

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

GRUPO G_2 DE AUTOMORFISMOS DE OCTÓNIOS

Oscar Ricardo Janesch

Orientador : Andrzej Solecki

Janeiro/1990

GRUPO G_2 DE AUTOMORFISMOS DE OCTÔNIOS

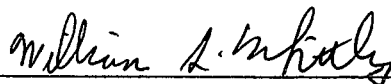
por

OSCAR RICARDO JANESCH

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

" MESTRE EM CIÊNCIAS "

ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA.



Prof. William Glenn Whitley, Ph. D.
Coordenador

BANCA EXAMINADORA



Prof. Andrzej Solecki, Ph. D.
Orientador



Prof. Paul James Otterson, Ph. D.



Prof. Wadir Quandt, Dr.

Aqueles que mais amo

Silvia

e

Ricardo

RESUMO

O objetivo deste trabalho é obter uma descrição matricial de G_2 , o grupo dos automorfismos dos octônios, assim como associar a G_2 seu diagrama de Dynkin através da álgebra de Lie \mathfrak{g}_2 .

O objetivo será alcançado pelo caminho seguinte:

- a) Descrever G_2 matricialmente.
- b) Provar que G_2 é um grupo de Lie.
- c) Calcular a álgebra de Lie \mathfrak{g}_2 .
- d) Provar que \mathfrak{g}_2 é simples.

O diagrama de Dynkin de G_2 resultará da simplicidade de \mathfrak{g}_2 e de sua dimensão.

ABSTRACT

In this dissertation we will give a description for the group G_2 of the automorphisms of the octaves and construct its Dynkin diagram, using the Lie algebra \mathfrak{g}_2 .

We will proceed in the following maner.

- a) Describe G_2 matricially.
- b) Prove that G_2 is a Lie group.
- c) Calculate the Lie algebra \mathfrak{g}_2 of G_2 .
- d) Prove that \mathfrak{g}_2 is a simple Lie algebra.

We will obtain the Dynkin diagram using the simplicity of \mathfrak{g}_2 and considerations concerning its dimension.

CONTEUDO

INTRODUÇÃO	01
I - PRELIMINARES	02
II - A ALGEBRA DE DICKSON	16
III - AUTOMORFISMOS DA ALGEBRA DE DICKSON	22
IV - O GRUPO DE LIE G_2 , SUA ALGEBRA DE LIE E DIAGRAMA DE DYNKIN	39
INDICE DE NOÇÕES	50
INDICE DE SIMBOLOS	52
BIBLIOGRAFIA	54

INTRODUÇÃO

Iniciamos o trabalho com conceitos e resultados sobre Algebras, Grupos e Algebras de Lie e diagramas de Dynkin.

Em seguida, definimos os octônios e provamos que formam uma álgebra não associativa que contém uma cópia dos quatérnios; denotamos por G_2 o grupo de seus automorfismos.

Obtemos uma descrição matricial para G_2 , construindo em matrizes três classes de automorfismos de \mathbb{D} , e provando que todo elemento de G_2 é a composição de três automorfismos, sendo um em cada classe apresentada.

Provamos que G_2 é um subgrupo de Lie conexo e compacto de $SO(7, \mathbb{R})$. Calculamos \mathfrak{g}_2 , a álgebra de Lie de G_2 , e provamos que \mathfrak{g}_2 é simples o que possibilita associar diagrama de Dynkin.

CAPITULO I - PRELIMINARES

Neste capítulo inicial apresentamos os conceitos e resultados que possibilitam a leitura do trabalho. Os resultados de Algebras, Grupos de Lie e Algebras de Lie, Sistemas de Raizes e Diagramas de Dynkin foram apresentados segundo as exposições de [6], [8] e [2] respectivamente.

ALGEBRAS

Uma álgebra sobre o corpo K é um espaço vetorial A sobre K , munido de uma operação de multiplicação de vetores satisfazendo as condições:

- (i) $ab \in A$ $\forall a, b \in A$
- (ii) $a(b+c) = ab+ac$; $(a+b)c = ac+bc$ $\forall a, b, c \in A$
- (iii) $t(ab) = (ta)b = a(tb)$ $\forall a, b \in A, \forall t \in K$

Uma álgebra é dita com unidade quando existe elemento neutro para a multiplicação. Álgebra associativa (comutativa) é uma denominação dada a álgebra quando a operação de multiplicação é associativa (comutativa).

Existem outras duas propriedades da multiplicação da álgebra A , que lhe dão denominação

- (iv) $\forall a, b \in A$, $ab = 0$ se e só se $a = 0$ ou $b = 0$
- (v) $a(ab) = a^2b$ e $(ab)b = ab^2$ $\forall a, b \in A$

Quando temos (iv) A é uma álgebra com divisão, e quando temos (v) A é uma álgebra alternativa. Algebras associativas são alternativas.

Finalmente, uma álgebra com divisão A é normada, quando existe uma forma quadrática positiva-definida em A , $N : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $N(ab) = N(a)N(b)$, $\forall a, b \in A$.

O centro de uma álgebra A é o conjunto

$$Z(A) = \{ a \in A ; ab = ba, \forall b \in A \}.$$

Note que \mathbb{R} e \mathbb{C} satisfazem as definições, \mathbb{C} podendo ser tratado como uma álgebra sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C} , e em todos os casos trata-se de álgebras que, por serem comutativas, coincidem com seus centros.

Usaremos intensamente uma terceira álgebra que é definida como segue:

Sejam $i, j, k, e 1$ denotando os elementos da base usual de \mathbb{R}^4 . O produto quaterniano em \mathbb{R}^4 é definido através de seus elementos básicos, e estendido pela linearidade e distributividade a todo conjunto \mathbb{R}^4 .

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j,$$

onde 1 gera uma cópia de \mathbb{R} .

A proposição abaixo mostra que \mathbb{R}^4 com o produto quaterniano é uma álgebra. Esta álgebra é chamada Álgebra dos Quatérnios e denotada por \mathbb{H} .

PROPOSIÇÃO 1.1 \mathbb{H} é uma álgebra associativa e não comutativa. [Imediata]

Identificamos o quatérnio x com (x_1, x_2, x_3, x_4) as suas coordenadas em relação a base $\{i, j, k, 1\}$ e denotamos seu conjugado por $\bar{x} = (-x_1, -x_2, -x_3, x_4)$. É fácil ver que $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ $\forall x, y \in \mathbb{H}$.

Definimos a norma de $x \in \mathbb{H}$ por

$$|x| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{\bar{x}x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

PROPOSIÇÃO 1.2 Todo quatérnio x não nulo é inversível e $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$. Além disso $|x^{-1}| = |x|^{-1}$. [Imediata]

PROPOSIÇÃO 1.3 \mathbb{H} é uma álgebra com divisão normada.

Dem. Sejam $x, y \in \mathbb{H}$ tais que $xy = 0$. Suponhamos que $x \neq 0$ e multipliquemos por x^{-1} , $x^{-1}(xy) = 0$. Como \mathbb{H} é associativa, $y = 0$ \square

Um quaternio x é unitário quando $|x| = 1$. Notamos que o conjunto dos quaternios unitários coincide com a esfera unitária S^3 em \mathbb{R}^4 .

Futuramente serão úteis as proposições seguintes:

PROPOSIÇÃO 1.4 $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ [Imediata]

PROPOSIÇÃO 1.5 Se A é uma álgebra alternativa então $(ab)a = a(ba)$
 $\forall a, b \in A$. [6, pg 287]

Um automorfismo de uma álgebra A é um isomorfismo do espaço vetorial A , $T : A \longrightarrow A$ tal que $T(ab) = T(a)T(b)$, $\forall a, b \in A$. Um anti-automorfismo é um automorfismo do espaço vetorial com multiplicação revertida. Involução e anti-involução são respectivamente automorfismos e anti-automorfismos de ordem 2.

PROPOSIÇÃO 1.6 A aplicação conjugação é uma anti-involução de \mathbb{H} . [Imediata].

Chamamos a atenção para o fato de que os automorfismos de uma álgebra A formam um grupo com a operação de composição. Denotamos este grupo por $\text{Aut}(A)$. Claramente $\text{Aut}(\mathbb{R}) = \{ \text{Id} \}$.

PROPOSIÇÃO 1.7. $\text{Aut}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}_2$. [Imediata]

Lembramos que $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ é o grupo das matrizes quadradas reais X de ordem 3, tal que $\det X = 1$ e $X^{-1} = X^t$. Mais tarde veremos que $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie conexo e compacto de dimensão 3.

PROPOSIÇÃO 1.8 $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{SO}(3, \mathbb{R})$. [6, pg 181]

Uma derivação de uma álgebra A é uma transformação linear $T : A \longrightarrow A$ tal que $T(ab) = aT(b) + T(a)b$, $\forall a, b \in A$. Chamamos $\text{Der}(A)$ ao conjunto das derivações de A . Note que $\text{Der}(A)$ é um subespaço vetorial de $\text{End}(A)$ - o espaço vetorial dos endomorfismos do espaço vetorial A .

GRUPOS DE LIE E ALGEBRAS DE LIE

Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável de classe C^∞ (conf. [8] pg 5) dotada de uma estrutura de grupo tal que a aplicação

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G, \\ (m,n) &\longmapsto mn^{-1} \text{ é } C^\infty. \end{aligned}$$

Note que da definição de variedade diferenciável, temos que um grupo de Lie é um espaço topológico de Hausdorff localmente Euclidiano. Esta observação será utilizada no capítulo IV.

Um grupo de Lie é compacto (conexo), se é um espaço topológico compacto (conexo).

São exemplos de grupos de Lie $(\mathbb{R}^n, +)$, (\mathbb{C}^*, \cdot) e $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ o grupo das matrizes quadradas reais inversíveis de ordem n .

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre \mathbb{R} é um espaço vetorial real \mathfrak{g} , junto com uma operação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, chamada colchete, que satisfaz:

- (i) $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$
(ii) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ - Ident. de Jacobi.

Observamos que pela bilinearidade do colchete, álgebras de Lie são exemplos de álgebras.

Qualquer espaço vetorial V sobre \mathbb{R} torna-se uma álgebra de Lie, com a multiplicação trivial ($xy = 0, \forall x, y \in V$). Este tipo de álgebra de Lie chama-se trivial. Um exemplo de álgebra de Lie não trivial é o espaço vetorial $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de todas as matrizes reais quadradas de ordem n , com o colchete definido por $[X, Y] = XY - YX, \forall X, Y \in GL(n, \mathbb{R})$.

No que segue trataremos com variedades diferenciáveis, deixando subentendido que são de classe C^∞ .

Uma aplicação $\psi : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 1$, entre as variedades diferenciáveis M e N se ψ é uma bijeção diferenciável de classe C^k , com inversa diferenciável de classe C^k .

Se M é uma variedade diferenciável e $m \in M$, duas funções $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tem o mesmo germe em m , se elas coincidem em alguma vizinhança de m . Isto define uma relação de equivalência no conjunto das funções C^∞ em vizinhanças de m . As classes de equivalência são chamadas de germes, e o conjunto das classes de equivalência é denotado por F_m . Com as operações de adição, multiplicação por escalar e multiplicação de funções, F_m é uma álgebra real.

Uma derivação da álgebra F_m é chamada vetor tangente à M no ponto $m \in M$. O conjunto $T_m M = \{v/v \text{ é vetor tangente à } M \text{ em } m \in M\}$ é chamado espaço tangente à M no ponto $m \in M$. Sendo $T_m M = \text{Der}(F_m)$, $T_m M$ é um espaço vetorial real.

PROPOSIÇÃO 1.9. $\dim T_m M = \dim M$. [8, pg 14].

O fibrado tangente da variedade diferenciável M é $T(M) = \bigcup_{m \in M} T_m M$, onde define-se a projeção

$$\pi : T(M) \longrightarrow M; \quad \pi(v) = m \text{ se } v \in T_m M.$$

O fibrado tangente $T(M)$ é uma variedade diferenciável cuja topologia é a mais fraca que torna a projeção contínua (conf. [8] pg 19).

Um campo de vetores em um conjunto U aberto em M é uma aplicação $X : U \longrightarrow T(M)$ tal que $\pi \circ X = \text{Id}_U$. Este campo de vetores é C^∞ quando X for C^∞ .

Denotaremos $X(m)$ por X_m .

PROPOSIÇÃO 1.10 Seja X um campo de vetores em M . Então as afirmações seguintes são equivalentes:

(1) X é C^∞

(ii) Se U é aberto em M e $f \in C^\infty(U)$ então $X(f) \in C^\infty(U)$.

[8, pg 35].

Se X e Y são campos de vetores C^∞ em M , define-se o colchete de Lie de X e Y por $[X, Y]_m(f) = X_m(Y(f)) - Y_m(X(f))$, onde $f \in C^\infty(M)$.

PROPOSIÇÃO 1.11 Para quaisquer X, Y e Z campos de vetores C^∞ em M vale:

(i) $[X, Y]$ é um campo de vetores C^∞ em M .

(ii) $[X, Y] = -[Y, X]$

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ [8, pg 36].

Sejam G um grupo de Lie e $m \in G$. Translação à esquerda por m é o difeomorfismo $l_m : G \longrightarrow G$; $l_m(n) = mn$, $\forall n \in G$. Um campo de vetores X em G é dito invariante à esquerda se $dl_m \cdot X = X \cdot l_m$, $\forall m \in G$. O conjunto de todos os campos de vetores em G que são invariantes à esquerda, é denotado pela letra minúscula correspondente \mathfrak{g} .

PROPOSIÇÃO 1.12 Seja G um grupo de Lie e \mathfrak{g} seu campo de vetores invariantes à esquerda.

(i) \mathfrak{g} é espaço vetorial real e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{G}_e$; $\rho(X) = X_e$ é um isomorfismo.

(ii) Campos de vetores invariantes à esquerda são C^∞ .

(iii) O colchete de Lie de dois campos de vetores invariantes à esquerda é novamente um campo invariante à esquerda.

(iv) \mathfrak{g} forma uma álgebra de Lie com o colchete de Lie de campos de vetores. [8, pg 85].

Segue de (i) que $\dim G = \dim \mathfrak{G}_e = \dim \mathfrak{g}$.

Define-se a álgebra de Lie do grupo de Lie G , como a álgebra de Lie \mathfrak{g} dos campos de vetores invariantes à esquerda em G . Usaremos a notação $G \longleftrightarrow \mathfrak{g}$ para designar que G é grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Exemplos:

$$\mathbb{R} \longleftrightarrow \left(t \left(\frac{d}{dx} \right) ; t \in \mathbb{R} \right)$$

$$GL(n, \mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

$\text{Aut}(V) \longleftrightarrow \text{End}(V)$ onde V é um espaço vetorial real de dimensão finita.

$$\text{GL}(n, \mathbb{C}) \longleftrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}). \quad [8, \text{pg } 86].$$

Para cada elemento x de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , define-se a aplicação adjunta, $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ por $\text{ad}_x(y) = [x, y], \forall y \in \mathfrak{g}$.

Um homomorfismo entre grupos de Lie G e H é uma aplicação $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que φ é C^∞ e φ é um homomorfismo de grupos. Se além disso φ é um difeomorfismo então φ é um isomorfismo de grupos de Lie.

Um homomorfismo entre álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} é uma transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ que preserva colchetes. Se além disso ψ for bijetiva então ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Seja G um grupo de Lie. Um subgrupo de Lie de G é um par (H, φ) tal que:

- (I) H é um grupo de Lie.
- (II) (H, φ) é uma subvariedade de G .
- (III) $\varphi : H \longrightarrow G$ é um homomorfismo.

Quando $\varphi(H)$ é fechado em G , (H, φ) é um subgrupo de Lie fechado de G . No caso em que φ é a identidade, não faremos referência a aplicação.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Um subespaço $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} se $[X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall X, Y \in \mathfrak{h}$.

Uma subálgebra de Lie \mathfrak{h} de \mathfrak{g} é dita um ideal de \mathfrak{g} se $[X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{h}$. A álgebra de Lie \mathfrak{g} é simples quando os seus únicos ideais são os triviais.

Um grupo de Lie é simples quando sua álgebra de Lie é simples.

Seja (H, φ) um subgrupo de Lie de G e sejam \mathfrak{h} e \mathfrak{g} suas respectivas álgebras de Lie. Então $d\varphi$ é um isomorfismo de \mathfrak{h} com a subálgebra $d\varphi(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{g} . [8, pg 93].

PROPOSIÇÃO 1.13 Considere o grupo de Lie \mathbb{R} com sua álgebra de Lie \mathfrak{r} . Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} e $\psi : \mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{g}$ um homomorfismo. Então existe um único homomorfismo $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ tal que $d\phi = \psi$. [8, pg 101].

Na proposição 1.13, consideremos o homomorfismo

$$\psi_x : \mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{g};$$

$$t \frac{d}{dx} \longmapsto tX, \quad \text{para } X \in \mathfrak{g} \text{ fixo.}$$

Obtemos um único homomorfismo $\exp_x : \mathbb{R} \longrightarrow G$ tal que

$$d(\exp_x(t \frac{d}{dx})) = tX.$$

Definimos então a aplicação exponencial

$$e = \exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G ; X \longmapsto \exp_x(1)$$

PROPOSIÇÃO 1.14. Sejam $G \longleftarrow \mathfrak{g}$ e $X \in \mathfrak{g}$. Então

$$(i) \quad \exp(tX) = \exp_x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad \exp((t_1+t_2)X) = \exp(t_1X) \exp(t_2X) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \quad \exp(-tX) = \exp(tX)^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(iv) $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ é C^∞ e $d \exp : \mathfrak{g}_e \longrightarrow G_e$ é a identidade, assim a aplicação exponencial é um difeomorfismo entre uma vizinhança de 0 em \mathfrak{g} e uma vizinhança de e em G . [8, pg 103].

PROPOSIÇÃO 1.15 Sejam (H, ρ) subgrupo de Lie de G , \mathfrak{g} álgebra de Lie de G e $X \in \mathfrak{g}$. Se $X \in d\rho(H)$ então $\exp(tX) \in \rho(H) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se $\exp(tX) \in \rho(H)$ para t em algum intervalo aberto, então $X \in d\rho(H)$.

[8, pg 104].

PROPOSIÇÃO 1.16 Sejam H um subgrupo de G , \mathfrak{g} álgebra de Lie de G e \mathfrak{h} um subespaço de \mathfrak{g} . Sejam U e V vizinhanças de 0 em \mathfrak{g} e de e em G respectivamente, tal que $\exp|_U : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo. Suponhamos que $\exp(U \cap \mathfrak{h}) = V \cap H$. Então H com a topologia induzida é um subgrupo de Lie de G , \mathfrak{h} é uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} e \mathfrak{h} é a álgebra de Lie de H . [8, pg 105].

PROPOSIÇÃO 1.17 $e = \exp: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ é dada por

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \text{ E temos as propriedades:}$$

- (i) $\det e^A = e^{\text{tr}(A)}$
 (ii) $e^{A+B} = e^A e^B$ se $AB = BA$. [8, pg 105].

PROPOSIÇÃO 1.18 Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G . Então H tem uma estrutura de variedade que o torna um subgrupo de Lie de G com a topologia induzida. [8, pg 110].

PROPOSIÇÃO 1.19 Sejam G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} , H um subgrupo de Lie conexo de G com álgebra de Lie \mathfrak{h} . Então H é um subgrupo normal de G se e só se \mathfrak{h} é um ideal de \mathfrak{g} . [8, pg 115].

PROPOSIÇÃO 1.20 Sejam H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G , $\underline{G} = \langle mH ; m \in G \rangle$ o conjunto à esquerda módulo H . Seja

$$\pi : G \longrightarrow \frac{G}{H} \text{ a projeção natural. Então } \frac{G}{H} \text{ tem uma única estrutura}$$

de variedade tal que:

- (i) π é C^∞
 (ii) Se $mH \in \frac{G}{H}$, então existe uma vizinhança W de mH e uma aplicação C^∞

$$T : W \longrightarrow G \text{ tal que } \pi \circ T = \text{id}. \text{ [8, pg 120].}$$

Variedades da forma $\frac{G}{H}$, onde H é um subgrupo fechado (o grupo de Lie G , cuja estrutura é a única satisfazendo (i) e (ii) da proposição anterior são chamadas variedades homogêneas.

PROPOSIÇÃO 1.21: Seja H um subgrupo normal e fechado de um grupo de Lie G . Então a variedade homogênea $\frac{G}{H}$ com a estrutura de grupo natural, é um grupo de Lie. [8, pg 124].

PROPOSIÇÃO 1.22: Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G . Se H e $\frac{G}{H}$ são conexos, então G é conexo. [8, pg 130].

PROPOSIÇÃO 1.23 S^n tem estrutura de grupo de Lie se e só se $n = 1$ ou $n = 3$. [8, pg 127].

Apresentamos alguns subgrupos de Lie fechados de $GL(n, \mathbb{C})$ que serão utilizados posteriormente.

$$U(n) = \{ X \in GL(n, \mathbb{C}) ; X^{-1} = \bar{X}^t \}$$

$$SU(n) = \{ X \in GL(n, \mathbb{C}) ; \det X = 1 \text{ e } X^{-1} = \bar{X}^t \}$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \{ X \in GL(n, \mathbb{R}) ; X^{-1} = X^t \}$$

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{ X \in GL(n, \mathbb{R}) ; \det X = 1 \text{ e } X^{-1} = X^t \}$$

A álgebra de Lie de $SO(n, \mathbb{R})$ é $so(n, \mathbb{R}) = \{ X \in gl(n, \mathbb{R}) ; X = -X^t \}$ cuja dimensão é $n(n-1)/2$ conforme [8, pg 107]. Esta álgebra de Lie será usada no capítulo IV.

PROPOSIÇÃO 1.24 (i) $SO(n, \mathbb{R})$, $SU(n)$, $U(n)$ e $GL(n, \mathbb{C})$ são conexos.
(ii) $GL(n, \mathbb{R})$ e $O(n, \mathbb{R})$ tem duas componentes.

[8, pg 130, 131].

PROPOSIÇÃO 1.25 $U(n)$ é compacto. [8, pg 108].

COROLÁRIO $SU(n)$, $O(n, \mathbb{R})$ e $SO(n, \mathbb{R})$ são compactos.

SISTEMAS DE RAIZES E DIAGRAMAS DE DYNKIN

Seja V um espaço Euclidiano real de dimensão $l > 1$. Para cada $r \in V$, $r \neq 0$ definimos $W_r(x) = x - 2\langle r, x \rangle r / \langle r, r \rangle$, a reflexão no hiperplano ortogonal a r .

Um subconjunto Φ de V é chamado um sistema de raizes em V se

- (i) Φ é finito e $0 \notin \Phi$
- (ii) Φ gera V

- (iii) Se $r, s \in \Phi$ então $W_r(s) \in \mathbb{Z}$
- (iv) Se $r, s \in \Phi$ então $2\langle r, s \rangle / \langle r, r \rangle$ é inteiro
- (v) Se $r, tr \in \Phi$ e se onde $t \in \mathbb{R}$ então $t = \pm 1$

Os elementos de Φ são chamados raízes.

Um subconjunto Π de Φ é chamado um sistema de raízes fundamental se

- (i) Π é linearmente independente
- (ii) Toda raiz em Φ é combinação linear de raízes em Π , onde os coeficientes são todos inteiros não negativos ou não positivos.

Na intenção de obtermos um sistema fundamental Π para qualquer sistema de raízes Φ , munimos o espaço V com uma ordenação total.

Seja V^+ um subconjunto de V satisfazendo:

- (i) Se $v \in V^+$ e $t > 0$ então $tv \in V^+$
- (ii) Se $u, v \in V^+$ então $u+v \in V^+$
- (iii) Para cada $v \in V$, exatamente uma das condições é verdadeira
 $v \in V^+, -v \in V^+$ ou $v = 0$

Um tal subconjunto V^+ pode ser obtido, por exemplo, escolhendo uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V e tomando

$$V^+ = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i ; \text{o primeiro coeficiente não zero é positivo} \right\}$$

Introduzimos agora uma relação de ordem \geq em V , definindo $v_1 \geq v_2$ quando $v_1 - v_2 \in V^+ \cup \{0\}$. Dizemos que $v_1 > v_2$ quando $v_1 - v_2 \in V^+$.

Um subconjunto de Φ é chamado um sistema de raízes positivo se tem a forma $\Phi \cap V^+$ para algum V^+ satisfazendo (i), (ii) e (iii) acima.

PROPOSIÇÃO 1.26 Todo sistema de raízes positivo em Φ contém um sistema fundamental. [2, pg 14]

PROPOSIÇÃO 1.27 Se $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\}$ é um sistema fundamental em Φ , então $\langle r_i, r_j \rangle \leq 0 \quad \forall i \neq j$. [2, pg 15].

Uma subálgebra h de uma álgebra de Lie g é dita uma subálgebra de Cartan se satisfaz as condições seguintes:

- (I) $h_r = 0$ para algum r , onde $h_2 = [h, h]$ e $h_r = [h, h_{r-1}]$, $r \geq 2$
 (II) Se $[x, y] \in h$ para todo $y \in h$ então $x \in h$.

A dimensão da subálgebra de Cartan é chamada o posto de g .

PROPOSIÇÃO 1.28 Se g é uma álgebra de Lie simples e h uma subálgebra de Cartan, então g pode ser apresentada como $g = h \oplus l_{r_1} \oplus \dots \oplus l_{r_k}$, soma direta de h com um número de subespaços 1-dimensionais, l_{r_i} onde $[h, l_{r_i}] \subseteq l_{r_i}$ para todo i . [2, pg 35].

A decomposição $g = h \oplus l_{r_1} \oplus \dots \oplus l_{r_k}$ da proposição é chamada uma decomposição de Cartan de g .

Seja g uma álgebra de Lie simples e $g = h \oplus l_{r_1} \oplus \dots \oplus l_{r_k}$ uma decomposição de Cartan de g . Em cada subespaço 1-dimensional l_r , escolhamos um vetor não nulo e_r . Para cada $y \in h$, $[y, e_r]$ é um múltiplo escalar de e_r , e escrevemos $[y, e_r] = r(y)e_r$.

A aplicação $r : h \longrightarrow \mathbb{R}$; $y \longmapsto r(y)$ é linear em virtude do colchete e portanto r é um elemento do dual de h .

As aplicações r_1, \dots, r_k são chamadas as raízes de g , e os subespaços l_{r_1}, \dots, l_{r_k} são chamados os subespaços raízes de g (relativos a subálgebra de Cartan h). Note que a aplicação nula não é uma raiz.

Definimos agora a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : h \times h \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\langle x, y \rangle = \text{traço}(\text{ad}_x \text{ad}_y)$. Vemos que $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in h$.

PROPOSIÇÃO 1.29 Cada elemento do dual de h é expresso na forma $y \longmapsto \langle x, y \rangle$ para um único elemento $x \in h$. [2, pg 36].

O elemento $x \in h$ associado a aplicação $y \longmapsto r(y)$ será identificado com a raiz r , assim r pode ser considerado como um elemento de h .

Considerando as raízes como elementos de h , seja Φ o subconjunto de h obtido desta forma. Chamemos de h_r o conjunto dos elementos de h que são combinações lineares de Φ com coeficientes reais. h_r é um espaço vetorial real.

PROPOSIÇÃO 1.30

(i) Φ gera h .

(ii) Se $x \in h_r$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ apenas quando $x = 0$ [2, pg 371].

Segue que h_r é um espaço Euclidiano e $\dim h_r = \dim h$.

Definimos o comprimento de $x \in h_r$ por $|x| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$ e o ângulo σ entre x e $y \in h_r$ como sendo o único $\sigma \in [0, 2\pi)$ satisfazendo $\langle x, y \rangle = |x| |y| \cos \sigma$.

PROPOSIÇÃO 1.31 O subconjunto Φ do espaço Euclidiano h_r forma um sistema de raízes. [2, pg 371].

Ao sistema de raízes Φ em h_r chamamos de sistema de raízes da álgebra de Lie simples g .

Segue da proposição 1.26 que Φ contém um sistema de raízes fundamental Π .

Sejam p_i, p_j raízes fundamentais distintas em g , e seja σ_{ij} o ângulo entre elas. Pela proposição 1.27, $\langle p_i, p_j \rangle \leq 0$ e portanto σ_{ij} é um ângulo obtuso.

Sendo $p_i, p_j \in \Phi$, $2\langle p_i, p_j \rangle / \langle p_i, p_i \rangle$ e $2\langle p_j, p_i \rangle / \langle p_j, p_j \rangle$ são inteiros, e assim $4\langle p_i, p_j \rangle^2 / \langle p_i, p_i \rangle \langle p_j, p_j \rangle = 4\cos^2 \sigma_{ij}$ é inteiro.

Desde que $0 \leq \cos^2 \sigma \leq 1$ temos $4\cos^2 \sigma_{ij} = 0, 1, 2, 3$ ou 4 . Mas σ_{ij} é obtuso e portanto $\sigma_{ij} = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ ou π . Sendo p_i, p_j linearmente independentes, excluimos $\sigma_{ij} = \pi$. Assim o ângulo entre duas raízes fundamentais distintas é $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Para cada par de raízes fundamentais distintas p_i, p_j definimos um número inteiro n_{ij} por $n_{ij} = 4\cos^2\sigma_{ij}$, segue que $n_{ij} = 0, 1, 2,$ ou 3 se $i \neq j$.

O diagrama de Dynkin de uma álgebra de Lie simples \mathfrak{g} é um desenho composto por pontos e traços da forma seguinte. Os pontos correspondem às raízes fundamentais de \mathfrak{g} , e dois pontos correspondentes a duas raízes distintas estão ligados por n_{ij} traços.

Os únicos diagramas de Dynkin de álgebras de Lie simples, são apresentados em [2, pg 40,43], com as dimensões das subálgebras de Cartan. Encontramos apenas um diagrama cuja dimensão da álgebra é 14, a saber, $\textcircled{=}$ denotado por G_2 . Temos também um único diagrama cuja dimensão da álgebra é 3, a saber, $\textcircled{0}$ denotado por A_1 .

Neste capítulo apresentamos os octônios, derivamos algumas propriedades que nos permitem provar que os octônios formam uma álgebra com unidade, não comutativa, não associativa, alternativa, com divisão e normada. Encerramos apresentando uma forma matricial para os octônios.

OCTONIOS

Consideramos o espaço vetorial \mathbb{R}^8 . O produto escalar possibilita obter uma base ortonormal para \mathbb{R}^8 , que denotaremos por $ie, je, ke, e, i, j, k, 1$.

Definimos uma operação de multiplicação de vetores em \mathbb{R}^8 pela tabela.

	ie	je	ke	e	i	j	k	1
ie	- 1	- k	j	- i	e	-ke	je	ie
je	k	- 1	- i	- j	ke	e	-ie	je
ke	- j	i	- 1	- k	-je	ie	e	ke
e	i	j	k	- 1	-ie	-je	-ke	e
i	- e	-ke	je	ie	- 1	k	- j	i
j	ke	- e	-ie	je	- k	- 1	i	j
k	-je	ie	- e	ke	j	- i	- 1	k
1	ie	je	ke	e	i	j	k	1

e estendemos a todo \mathbb{R}^8 da maneira usual.

Vamos denotar \mathbb{R}^8 com tal operação por \mathbb{D} e chamar seus elementos de octônios. Olhando a tabela, vemos que \mathbb{D} contém uma cópia da álgebra H.

Podemos escrever um octônio

$x = x_1 e + x_2 j + x_3 k + x_4 e + x_5 i + x_6 j + x_7 k + x_8$ como a soma de suas partes pura e real,

$x = Pu(x) + Re(x)$ onde $Re(x) = x_8$ e $Pu(x) = x - x_8$

ou como um par ordenado de quatérnios,

$x = (x', x'') = x' e + x''$ onde

$$x' = x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4$$

$$x'' = x_5 i + x_6 j + x_7 k + x_8$$

Usando a notação \bar{x} para a imagem do quatérnio x pela conjugação de \mathbb{H} , segue que a conjugação de um octônio x tem a forma

$$\bar{x} = -Pu(x) + Re(x) = (-x', \bar{x}'')$$

Para efeito de cálculos é conveniente encontrarmos uma fórmula para o produto de octônios x e y , que não envolva as dificuldades causadas pela falta de associatividade. ($ke = (ij)e \neq i(je) = -ke$).

$$xy = (x', x'')(y', y'') = (x' e + x'')(y' e + y'') =$$

$$= (x' e)(y' e) + (x' e)y'' + x''(y' e) + x''y''$$

Verificamos que

$$(x' e)(y' e) = -\bar{y}' x'$$

$$(x' e)y'' = (x' \bar{y}'')e$$

$$x''(y' e) = (y' x'')e$$

Assim, $(x', x'')(y', y'') = -\bar{y}' x' + (x' \bar{y}'')e + (y' x'')e + x''y''$

$$= (x' \bar{y}'' + y' x'')e + (-\bar{y}' x' + x''y'')$$

$$= (x' \bar{y}'' + y' x'', -\bar{y}' x' + x''y'') \quad (1)$$

Escrevendo os octônios x e y como

$$x = x_1 i e + x_2 j e + x_3 k e + x_4 e + x_5 i + x_6 j + x_7 k + x_8$$

$$y = y_1 i e + y_2 j e + y_3 k e + y_4 e + y_5 i + y_6 j + y_7 k + y_8$$

aplicamos a fórmula (1) e encontramos as coordenadas do produto xy em relação a nossa base.

xy =

$$\begin{aligned}
 & i e (x_8 y_1 + x_7 y_2 - x_6 y_3 + x_5 y_4 - x_4 y_5 + x_3 y_6 - x_2 y_7 + x_1 y_8) + \\
 & j e (-x_7 y_1 + x_8 y_2 + x_5 y_3 + x_6 y_4 - x_9 y_5 - x_4 y_6 + x_1 y_7 + x_2 y_8) + \\
 & k e (x_6 y_1 - x_5 y_2 + x_8 y_3 + x_7 y_4 + x_2 y_5 - x_1 y_6 - x_4 y_7 + x_9 y_8) + \\
 & e (-x_5 y_1 - x_6 y_2 - x_7 y_3 + x_8 y_4 + x_1 y_5 + x_2 y_6 + x_9 y_7 + x_4 y_8) + \quad (2) \\
 & i (x_4 y_1 + x_3 y_2 - x_2 y_3 - x_1 y_4 + x_8 y_5 - x_7 y_6 + x_6 y_7 + x_5 y_8) + \\
 & j (-x_3 y_1 + x_4 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_7 y_5 + x_8 y_6 - x_5 y_7 + x_6 y_8) + \\
 & k (x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_4 y_3 - x_3 y_4 - x_6 y_5 + x_5 y_6 + x_8 y_7 + x_7 y_8) + \\
 & l (-x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7 + x_8 y_8).
 \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 2.1 \mathbb{D} é uma álgebra real.

Dem. Dados $x, y, z \in \mathbb{D}$ e $t \in \mathbb{R}$

(i) xy é um par de quatérnios, assim $xy \in \mathbb{D}$

As igualdades

(ii) $t(xy) = (tx)y = x(ty)$

(iii) $x(y + z) = xy + xz$; $(x + y)z = xz + yz$

seguem da regra do produto (1) e de resultados equivalentes para quatérnios \square

A álgebra \mathbb{D} é chamada a álgebra dos octônios ou álgebra de Graves-Cayley-Dickson. Notamos que \mathbb{D} é uma álgebra com unidade (1), não comutativa ($ij = -ji$) e não associativa ($ke = (ij)e \neq i(je) = -ke$)

PROPOSIÇÃO 2.2 \mathbb{D} é uma álgebra alternativa.

Dem. Devemos verificar que $x(xy) = x^2 y$ e $(xy)y = xy^2$, $\forall x, y \in \mathbb{D}$. Faremos apenas a primeira; a segunda é análoga.

$$\begin{aligned}
 x(xy) &= (x', x'')(x', x'')(y', y'') = \\
 &= (x', x'')(x' \bar{y}'' + y' x'', -\bar{y}' x' + x'' y'') = \\
 &= (x'(-\bar{y}' x' + x'' y'') + (x' \bar{y}'' + y' x'')x'', - (x' \bar{y}'' + y' x'')x' + x''(-\bar{y}' x' + x'' y'')) = \\
 &= (-x' \bar{x}' y' + x' \bar{y}'' \bar{x}'' + x' \bar{y}'' x'' + y' x'' x'', -y'' \bar{x}' x' - \bar{x}'' \bar{y}' x' - x'' \bar{y}' x' + x'' x'' y'') = \\
 &= (-|x'|^2 y' + x'(\bar{y}''(2\text{Re}(x''))) + y' x'' x'', -y'' |x'|^2 - (2\text{Re}(x'')\bar{y}')x' + x'' x'' y'') = \\
 &= (-y' |x'|^2 + x'(2\text{Re}(x''))\bar{y}'' + y' x'' x'', -|x'|^2 y'' - \bar{y}' x' 2\text{Re}(x'') + x'' x'' y'') = \\
 &= (-y' \bar{x}' x' + x' \bar{x}'' \bar{y}'' + x' x'' \bar{y}'' + y' x'' x'', -\bar{x}' x' y'' - \bar{y}' x' \bar{x}'' - \bar{y}' x' x'' + x'' x'' y'') = \\
 &= ((x' \bar{x}'' + x' x'')\bar{y}'' + y'(-\bar{x}' x' + x'' x''), -\bar{y}'(x' \bar{x}'' + x' x'') + (-\bar{x}' x' + x'' x'')y'') = \\
 &= (x' \bar{x}'' + x' x'', -\bar{x}' x' + x'' x'')(y', y'') \\
 &= [(x', x'')(x', x'')](y', y'') = x^2 y \quad \square
 \end{aligned}$$

COROLARIO $\forall x, y \in \mathbb{D}, (xy)x = x(yx)$.

Dem. Proposição 1.5 ■

PROPOSIÇÃO 2.3 \mathbb{R} é o centro de \mathbb{D} .

Dem. Imediata, visto que \mathbb{H} é subálgebra de \mathbb{D} e $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ ■

LEMA 2.1 $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} ; x \longmapsto \bar{x}$ é uma anti-involução, isto é, $\forall x, y \in \mathbb{D}, \forall t \in \mathbb{R}$ vale:

$$(i) \quad \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$(ii) \quad \overline{tx} = t\bar{x}$$

$$(iii) \quad \overline{\bar{x}} = x$$

$$(iv) \quad \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$$

Dem.: (i) e (ii) são imediatas.

$$(iii) \quad \overline{\bar{x}} = \overline{\overline{(x', x'')}} = \overline{(-x', \bar{x}'')} = (x', \bar{x}'') = (x', x'')$$

$$\begin{aligned} (iv) \quad \overline{xy} &= \overline{(x' \bar{y}'' + y' x'', -\bar{y}' x' + x'' y'')} \\ &= \overline{(-x' \bar{y}'' - y' x'', -\bar{y}' x' + x'' y'')} \\ &= \overline{(-y' x'' - x' \bar{y}'', -\bar{x}' y' + \bar{y}'' \bar{x}'')} \\ &= \overline{(-y', \bar{y}'')(-x', \bar{x}'')} \\ &= \bar{y}\bar{x} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definimos a norma de um octônio x por

$$|x| = (x\bar{x})^{\frac{1}{2}} = (\bar{x}x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^8 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ segue que } |\bar{x}| = |x|, |x| \geq 0 \text{ e } |x| = 0 \text{ se e só se } x = 0.$$

É fácil ver que para todo $x \in \mathbb{D}, x \neq 0, x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$.

LEMA 2.2. Para $x, y \in \mathbb{D}$, com $y \neq 0$ temos:

$$(i) \quad (xy)y^{-1} = x \quad \text{e} \quad y^{-1}(yx) = x$$

$$(ii) \quad (yx)y^{-1} = y(xy^{-1})$$

$$(iii) \quad \text{Se } x \neq 0, (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Dem. (i)} \quad (xy)y^{-1} &= (x' \bar{y}'' + y' x'', -\bar{y}' x' + x'' y'')(-y', \bar{y}'') / |y|^2 = \\ &= (x' \bar{y}'' \bar{y}'' + y' x'' \bar{y}'' + y' \bar{y}' x' - y' x'' y'', \bar{y}' x' \bar{y}'' + \bar{y}' y' x'' - \bar{y}' x' \bar{y}'' + x'' y'' \bar{y}'') / |y|^2 = \\ &= (x' |y''|^2 + |y'|^2 x', |y'|^2 x'' + x'' |y''|^2) / |y|^2 = \\ &= (x' |y|^2, x'' |y|^2) / |y|^2 = (x', x'') = x \end{aligned}$$

Para $y^{-1}(yx) = x$ a demonstração é análoga.

(ii) Sendo \mathbb{D} alternativamente, partimos da igualdade

$$(y + x)^2 y^{-1} = (y + x)((y + x)y^{-1})$$

$$(yy + yx + xy + xx)y^{-1} = (y + x)(1 + xy^{-1})$$

$$(yy)y^{-1} + (yx)y^{-1} + (xy)y^{-1} + (xx)y^{-1} = y + y(xy^{-1}) + x + x(xy^{-1})$$

Fazendo uso de (i) temos

$$y + (yx)y^{-1} + x + (xx)y^{-1} = y + y(xy^{-1}) + x + x(xy^{-1})$$

A alternatividade garante $(xx)y^{-1} = x(xy^{-1})$ e portanto

$$(yx)y^{-1} = y(xy^{-1})$$

(iii) De (i) temos $y^{-1}(yx) = x = (y^{-1}y)x \quad \forall x, y \in \mathbb{D} \text{ com } y \neq 0$

Fazendo $x = (xy)^{-1}$ obtemos

$$(xy)^{-1} = y^{-1}(y(xy)^{-1}) = y^{-1}([x^{-1}(xy)](xy)^{-1}) = y^{-1}x^{-1} \quad \blacksquare$$

PROPOSIÇÃO 2.4 \mathbb{D} é uma álgebra com divisão.

Dem. Sejam $x, y \in \mathbb{D}$ tq. $xy = 0$. Suponhamos que $y \neq 0$, então temos seu inverso y^{-1} . Multiplicando por y^{-1} ambos os lados da igualdade $xy = 0$ temos $(xy)y^{-1} = 0y^{-1} = 0$. Aplicando agora o lema 2.2 vemos que $x = 0$ \blacksquare

LEMA 2.3 (i) $|tx| = |t||x| \quad \forall x \in \mathbb{D} \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}$

(ii) $|x^{-1}| = |x|^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{D}, x \neq 0$

Dem. Imediata.

A lei de distributividade $x(ty + lz) = txy + lxz$ com $t, l \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in \mathbb{D}$, permite interpretar a multiplicação $y \longmapsto xy$ por $x \in \mathbb{D}$ fixo, como uma transformação linear em $\mathbb{R}^{\mathbb{B}}$,

$$M_x : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

$$y \longmapsto xy$$

onde y é tomado como uma matriz coluna.

Da igualdade $M_x(y) = xy$, vemos pela fórmula (2) que o operador M_x tem a forma

$M_x =$

$$\begin{bmatrix} x_8 & x_7 & -x_6 & x_5 & -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \\ -x_7 & x_8 & x_5 & x_6 & -x_9 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ x_6 & -x_5 & x_8 & x_7 & x_2 & -x_1 & -x_4 & x_9 \\ -x_5 & -x_6 & -x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_9 & x_4 \\ x_4 & x_9 & -x_2 & -x_1 & x_8 & -x_7 & x_6 & x_5 \\ -x_9 & x_4 & x_1 & -x_2 & x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & -x_9 & -x_6 & x_5 & x_8 & x_7 \\ -x_1 & -x_2 & -x_9 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & x_8 \end{bmatrix}$$

Podemos então associar a cada octônio x , uma matriz quadrada de ordem 8, $M : \mathbb{D} \longrightarrow gl(8, \mathbb{R}) ; x \longmapsto M_x$. Esta aplicação é linear, isto é,

$$M_{(x+y)} = M_x + M_y \quad \text{e} \quad M_{(tx)} = tM_x \quad \forall x, y \in \mathbb{D} \quad \text{e} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \text{Com efeito,}$$

$$M_{(x+y)}(z) = (x+y)z = xz + yz = M_x(z) + M_y(z) = (M_x + M_y)(x)$$

$$\forall z \in \mathbb{D}.$$

$$M_{(tx)}(z) = (tx)z = t(xz) = tM_x(z) = (tM_x)(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Qualquer tentativa de obter uma aplicação $\phi : \mathbb{D} \longrightarrow gl(8, \mathbb{R})$ preservando também o produto não procede, visto que neste caso \mathbb{D} seria isomorfo a uma parte de $gl(8, \mathbb{R})$, e a cópia de \mathbb{D} estaria munida, em $gl(8, \mathbb{R})$, de multiplicação associativa, contradizendo o fato que \mathbb{D} é uma álgebra não associativa.

Para um octônio unitário fixo s , vamos denotar a matriz M_s por $M_s = (m_{pr})$, $p, r = 1, 2, \dots, 8$.

O objetivo aqui é obter a representação matricial dos automorfismos de \mathbb{D} , para utilizá-la no capítulo IV.

Baseamo-nos em [7] e atacamos o problema como segue. Construímos 3 classes de automorfismos e damos suas representações matriciais. Posteriormente verificamos que todo automorfismo é a composição de 3 automorfismos, um de cada classe apresentada. Verificamos também que os automorfismos de \mathbb{D} estão contidos em um subgrupo clássico de matrizes, a saber, $SO(7, \mathbb{R})$.

AUTOMORFISMOS

Sabemos que os automorfismos de \mathbb{D} tem estrutura de grupo; denotaremos este grupo por G_2 .

Um elemento $T \in G_2$ é um automorfismo do espaço vetorial $\mathbb{D} \cong \mathbb{R}^8$ tq. $T(xy) = T(x)T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{D}$. Sendo $T(1) \neq 0$, temos seu inverso e a igualdade $T(1) = T(1.1) = T(1).T(1)$ implica $T(1) = 1$. Pela linearidade de T , vemos que a parte real de um octônio é invariante sob atuação de automorfismos, isto é, automorfismos de \mathbb{D} atuam apenas nos 7 primeiros elementos básicos. Além disso, para $x = (x_1, \dots, x_7, x_8)$ e $T(x) = (y_1, \dots, y_7, y_8)$ temos $T(\bar{x}) = \overline{T(x)}$. De fato, $\bar{x} = -x + 2x_8$ e $T(\bar{x}) = -T(x) + 2T(x_8) = (-y_1, \dots, -y_7, -x_8) + 2x_8 = \overline{T(x)}$.

Como consequência, $T \in G_2$ preserva norma. Com efeito, $|T(x)|^2 = T(x)\overline{T(x)} = T(x)T(\bar{x}) = T(x\bar{x}) = T(|x|^2) = |x|^2$. Logo T é uma transformação ortogonal.

Se $x \in \mathbb{D}$ é puro e $y = \frac{x}{|x|} \in S^6$ então $T(x) = T(|x|.y) = |x| T(y)$. Portanto, podemos considerar $T \in G_2$ atuando no conjunto dos octônios puros unitários, a esfera S^6 em \mathbb{R}^7 .

Na intenção de descrever os elementos de G_2 , vamos

inicialmente nos preocupar com automorfismos internos, isto é, conjugações por octônios fixos não nulos.

$$U_x : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad x \neq 0$$

$$y \longmapsto xyx^{-1}$$

onde a ordem que efetuamos o produto é desconsiderada em virtude do lema 2.2.

PROPOSIÇÃO 3.1. $U_x : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad y \longmapsto xyx^{-1}, \quad x \neq 0$ é um automorfismo do espaço vetorial $\mathbb{D} \cong \mathbb{R}^8$.

Dem. (i) $U_x(ty) = xtyx^{-1} = txyx^{-1} = tU_x(y) \quad \forall y \in \mathbb{D}, \forall t \in \mathbb{R}$,

(ii) $U_x(y+z) = x(y+z)x^{-1} = (xy+xz)x^{-1} = xyx^{-1} + xzx^{-1} = U_x(y) + U_x(z)$
 $\forall y, z \in \mathbb{D}$

(iii) $U_x(y) = 0 \Rightarrow xyx^{-1} = 0 \Rightarrow y = 0$

Assim U_x é uma transformação linear injetiva de \mathbb{D} em \mathbb{D} , portanto é automorfismo do espaço vetorial \mathbb{D} ■

Para que U_x fosse também um automorfismo da álgebra \mathbb{D} , necessitaríamos $U_x(yz) = U_x(y) \cdot U_x(z) \quad \forall y, z \in \mathbb{D}$. Porém para $x = e$, $y = i$ e $z = j$ temos $-k = eke^{-1} = U_e(k) = U_e(ij) \neq eie^{-1} \cdot eje^{-1} = (-i)(-j) = k$.

Buscamos saber sob que condições impostas ao octônio $x \neq 0$, U_x é um automorfismo de \mathbb{D} . Para isso provaremos alguns lemas.

Note que podemos reduzir conjugações por octônios, à conjugações por elementos da esfera S^7 (octônios unitários), pois se $x \neq 0$ e $s = \frac{x}{|x|}$ temos

$$U_x(y) = xyx^{-1} = xy \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{x}{|x|} y \frac{\bar{x}}{|x|} = sxs^{-1} = U_s(y) \quad \forall y \in \mathbb{D}.$$

Até o final deste capítulo, s é um octônio unitário, i.e., $s \in S^7$.

LEMA 3.1 $(U_s)^{-1} = U_{s^{-1}} = U_{\bar{s}}$

Dem. Dado $y \in \mathbb{D}$, $U_s \circ U_{s^{-1}}(y) = U_s(s^{-1}ys) = s(s^{-1}ys)s^{-1} =$
 $= [s(s^{-1}(ys))s^{-1}] = (ys)s^{-1} = y$

Por outro lado, $U_{s^{-1}} \circ U_s(y) = U_{s^{-1}}(sys^{-1}) = s^{-1}(sys^{-1})s =$
 $= [s^{-1}(s(ys^{-1}))s] = (ys^{-1})s = y.$

Note que utilizamos o lema 2.2 ■

LEMA 3.2 $U_s = U_t$ se e só se $s = \pm t$; $s, t \in S^7$.

Dem (\Leftarrow) Evidente

$(\Rightarrow) U_s(x) = U_t(x) \quad \forall x \in \mathbb{D} \Rightarrow sxs^{-1} = txt^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{D}.$

Se $s = \pm 1$ temos $xt = tx \quad \forall x \in \mathbb{D}$, assim $t = \pm 1$ pois $t \in Z(\mathbb{D})$ e $t \in S^7$.

Se $s \neq \pm 1$ então s não é colinear a 1. Completamos uma base

a partir de 1 e s , $\beta' = \{ \hat{1}e, \hat{1}j, \hat{1}k, \hat{1}e, \hat{1}i, \hat{1}j, s, 1 \}$ e

ortonormalizamos β' a partir de 1, obtendo

$\beta = \{ \hat{1}e, \hat{1}j, \hat{1}k, \hat{1}e, \hat{1}i, \hat{1}j, \hat{s}, 1 \}$ onde $\hat{s} = \frac{s^\perp}{|s|}$

$s^\perp = s - \frac{\langle \hat{s}, 1 \rangle}{|1|^2} 1 = s - s_s$.

Segue que $s = s^\perp + s_s = |s| \hat{s} + s_s 1$, assim $s \in S^3 \subseteq \mathbb{H}$

Trabalhamos agora com $sxs^{-1} = txt^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{D}$ e $s \in S^3$.

Temos então a igualdade

$(x' s'' s''', s'' x'' s''') =$

$= (t' x'' t'' + x' t'' t'' + t' x' t' - t' t'' x'', t' t' x'' + t' x' t' - x' t' t'' + t'' x'' t''),$

$\forall x \in \mathbb{D}.$

Para $x' = 0$

$$(0, s''x''\overline{s''}) = (t'x''\overline{t''} - t't''x'', \overline{t't'x''} + t''x''\overline{t''})$$

$\forall (x', x'') \in \mathbb{D}$ com $x' = 0$.

(1)

Comparando os primeiros membros de (1),

$$t'(yt'' - t'y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{H},$$

donde $t' = 0$ ou $\overline{yt''} = t''y \quad \forall y \in \mathbb{H}$, i.e., $t'' = 0$

Supondo $t'' = 0$, comparamos os segundos membros de (1)

$s''ys'' = \overline{t't'y} = \overline{y} \quad \forall y \in \mathbb{H}$, mas isto é impossível pois temos a igualdade de um automorfismo com uma anti-involução em \mathbb{H} . Portanto $t' = 0$, i.e., $t \in S^3$, reduzindo o problema a \mathbb{H} . Mas pela associatividade de \mathbb{H} temos para todo $x \in \mathbb{H}$

$$sxs^{-1} = txt^{-1} \Rightarrow sxs = txt \Rightarrow stx = xst \Rightarrow st \in \mathbb{R} = Z(\mathbb{H}).$$

$$|\overline{st}| = |\overline{s}| |t| = 1 \Rightarrow \overline{st} = \pm 1 \Rightarrow s(\overline{st}) = \pm s \Rightarrow t = \pm s \quad \blacksquare$$

COROLARIO Conjugação por um octônio unitário t é um automorfismo interno de \mathbb{H} se e somente se $t \in S^3$.

Dem. (\Leftarrow) Evidente ($t \in S^3$, txt^{-1} é automorfismo de \mathbb{H})

(\Rightarrow) A hipótese diz que para todo $y \in \mathbb{H}$, $(t', t'')(0, y)(-\overline{t'}, \overline{t''}) = (0, s)(0, y)(0, \overline{s})$ para algum $s \in S^3$, o que corresponde à igualdade (1) do lema e implica que $t \in S^3$ \blacksquare

LEMA 3.3 $U_2 U_1^{-1} \in G_2 \Rightarrow s^3 = \pm t^3, \quad s, t \in S^7$

Dem. Se $U_2 U_1^{-1} \in G_2$ então $U_2 U_1^{-1}(x) U_2 U_1^{-1}(y) = U_2 U_1^{-1}(xy)$

$$\forall x, y \in \mathbb{D} \quad (2)$$

Em (2) colocando $x = U_1(u)$ e $y = U_1(v)$ para u e v em \mathbb{D} temos,

$$U_2(u) U_2(v) = U_2 U_1^{-1}(U_1(u) U_1(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{D}.$$

Aplicando U_2^{-1}

$$U_2^{-1}(U_2(u) U_2(v)) = U_1^{-1}(U_1(u) U_1(v)) \quad \forall u, v \in \mathbb{D}, \text{ isto é,}$$

$$\overline{s}((sus)(svs))s = \overline{t}((tut)(tvt))t \quad \forall u, v \in \mathbb{D} \quad (3)$$

Como no lema 3.2, assumimos $s \in S^3$. Veremos que $t \in S^3$.

$$\overline{s}((sus)(svs))s = (u's^3v''\overline{s^3} + v's^3u''\overline{s^3}, -\overline{s^3}v'u's^3 + u''v'') \quad (4)$$

Colocando $u' = v' = 0$ em (4), segue que (3) tem a forma

$$uv = \overline{t}((tut)(tvt)) \quad \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Conjugando por t , $t(uv)t = (tut)(tvt) \quad \forall u, v \in \mathbb{H}$, isto é, conjugação por um octônio unitário t é um automorfismo de \mathbb{H} , e pelo corolário anterior, $t \in S^3$.

Agora fazemos $u'' = v'' = 0$ em (4). Segue que (3) tem a forma $(0, -\overline{s^3}v'us^3)t = (0, -\overline{t^3}v'ut^3) \quad \forall u, v \in \mathbb{H}$.

Para $a = \overline{vu} \in \mathbb{H}$ temos

$$\overline{s^3}a s^3 = \overline{t^3}at \quad \forall a \in \mathbb{H}$$

Pelo lema 3.2, $s^3 = t^3$ ■

LEMA 3.4 $U_s \in G_2 \Leftrightarrow s^3 = \pm 1$

Dem $(\Rightarrow) U_s = U_s \circ Id = U_s U_1^{-1} \in G_2 \Rightarrow s^3 = \pm 1$

(\Leftarrow) Se $s = \pm 1$ então $U_s \in G_2$. Se $s \neq \pm 1$, assumimos como no lema 3.2 que $s = (0, s) \in S^3$.

$$\begin{aligned} U_s(xy) &= (0, s)(x' \overline{y''} + y' x'', -\overline{y' x'} + x'' y'')(0, \overline{s}) \quad \forall x, y \in \mathbb{D} \\ &= ((x' \overline{y''} + y' x'')s, s(-\overline{y' x'} + x'' y'')(0, \overline{s}) = \\ &= ((x' \overline{y''} + y' x'')s^2, s(-\overline{y' x'} + x'' y'')\overline{s}) \end{aligned} \quad (5)$$

Para $s^3 = 1$, como $\overline{ss} = 1$ temos $s^2 = \overline{s}$ e daí,

$$\begin{aligned} U_s(xy) &= ((x' s^2 \overline{y''} + y' s^2 \overline{sx''})\overline{s}, s^2(-\overline{y' x'} + x'' y'')\overline{s}) \\ &= (x' s^2 \overline{sy''} + y' s^2 \overline{sx''}, -\overline{s^2 y' x'} + s^2 x'' y' \overline{s}) \\ &= (x' s^2 \overline{sy''} + y' s^2 \overline{sx''}, -\overline{s^2 y' x'} + s^2 x'' y' \overline{s}) \quad (6) \\ &= (x' s^2, \overline{sx''}) (y' s^2, \overline{sy''}) \\ &= (x' s, \overline{sx''})(0, \overline{s})(y' s, \overline{sy''})(0, \overline{s}) \\ &= (0, s)(x', \overline{x''})(0, \overline{s})(0, s)(y', \overline{y''})(0, \overline{s}) \end{aligned}$$

$$= U_{\frac{1}{2}}(x) U_{\frac{1}{2}}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{D}$$

Para $s^3 = -1$, $s^2 = -\bar{s}$ e de (5) temos

$$U_{\frac{1}{2}}(xy) = (-(x' s^2 \overline{sy''} + y' s^2 \overline{sx''}) s^2, -\bar{s}^2 (-\bar{y}' x' + x'' \bar{y}'') \bar{s})$$

$$= ((x' s^2 \overline{sy''} + y' s^2 \overline{sx''}) \bar{s}, \bar{s}^2 \bar{y}' x' - \bar{s}^2 x'' \bar{y}'') \bar{s}$$

$$= (x' s^2 \overline{sy''} \bar{s} + y' s^2 \overline{sx''} \bar{s}, -\bar{s}^2 y' x' s^2 + s x'' s \bar{y}'') \bar{s} = (6) \text{ e portanto temos}$$

$$U_{\frac{1}{2}}(xy) = U_{\frac{1}{2}}(x) U_{\frac{1}{2}}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{D}. \quad \blacksquare$$

PROPOSIÇÃO 3.2 $U_{\frac{1}{2}} \in G_2$ se e só se $s \in \tilde{S}^6 = \{x \in S^7; x_8 = 1/2\}$ ou $s = 1$

Dem Pelo Lema 3.4 temos

$$U_{\frac{1}{2}} \in G_2 \text{ se e só se } s^3 = \pm 1.$$

Como anteriormente, podemos considerar $s \in S^3 \subseteq \mathbb{H}$,

$$s = (0, (s_5, s_6, s_7, s_8))$$

$$s^2 s = (2s_5 s_8, 2s_6 s_8, 2s_7 s_8, 2s_8^2 - 1)(s_5, s_6, s_7, s_8)$$

$$s^3 = \pm 1 \Leftrightarrow (4s_5 s_8^2 - s_5, 4s_6 s_8^2 - s_6, 4s_7 s_8^2 - s_7, 4s_8^3 - 3s_8) = (0, 0, 0, \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_5 (4s_8^2 - 1) = 0 & \Leftrightarrow s_5 = 0 \text{ ou } s_8 = \pm 1/2 \\ s_6 (4s_8^2 - 1) = 0 & \Leftrightarrow s_6 = 0 \text{ ou } s_8 = \pm 1/2 \\ s_7 (4s_8^2 - 1) = 0 & \Leftrightarrow s_7 = 0 \text{ ou } s_8 = \pm 1/2 \\ 4s_8^3 - 3s_8 \pm 1 = 0 & \Leftrightarrow s_8 = \pm 1 \text{ ou } s_8 = \pm 1/2 \end{cases}$$

segue $s^3 = 1 \Leftrightarrow s = 1$ ou $s_8 = -1/2$

$$s^3 = -1 \Leftrightarrow s = -1 \text{ ou } s_8 = 1/2$$

Assim $U_{\frac{1}{2}} \in G_2$ se só se $s = \pm 1$ ou $s_8 = \text{Re}(s) = \pm 1/2$. Pelo lema 3.2 $U_{\frac{1}{2}} = U_{-\frac{1}{2}}$ portanto $(s_1, s_2, \dots, s_7, -1/2) \in S^7$ representa o mesmo automorfismo que $(-s_1, \dots, -s_7, 1/2) \in \tilde{S}^6$, e também $U_{-\frac{1}{2}} = U_{\frac{1}{2}}$. Logo os automorfismos internos de \mathbb{D} , $\text{int}(\mathbb{D})$, são exatamente $U_{\frac{1}{2}}$ para $s = 1$ ou $s \in \tilde{S}^6$. Note que \tilde{S}^6 é homeomorfo a S^6 . \blacksquare

Segundo nossos objetivos, precisamos descrever matricialmente $U_2 \in G_2$, para tal temos a proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO 3.3 Para $s \in \tilde{S}^6$, a forma matricial de $U_2 = (U_{pr})$ é dada por $U_{pr} = 2(s_p s_r + s_8 m_{pr}) - \delta_{pr}$, $p, r=1, \dots, 7$.

Esta fórmula utiliza os elementos da matriz $M_2 = (m_{pr})$ do capítulo II e δ_{pr} o delta de Kronecker. Ela é verificada diretamente, aplicando U_2 nos vetores básicos e colocando os coeficientes em coluna \square

Consideramos a matriz de U_2 como uma matriz real 7×7 em vista da nossa observação inicial de que os automorfismos de \mathbb{D} deixam invariante a parte real de octônios. Em verdade quando consideramos U_2 como matriz 8×8 temos $U_{18} = U_{81} = 0$ e $U_{88} = 1$.

Assim a forma matricial de $U_2 \in G_2$ é $[\text{Id}]_{7 \times 7}$ ou

$$\begin{bmatrix} 2s_1^2 - 1/2 & 2s_1 s_2 + s_7 & 2s_1 s_3 - s_6 & 2s_1 s_4 + s_5 & 2s_1 s_5 - s_4 & 2s_1 s_6 + s_3 & 2s_1 s_7 - s_2 \\ 2s_2 s_1 - s_7 & 2s_2^2 - 1/2 & 2s_2 s_3 + s_5 & 2s_2 s_4 + s_6 & 2s_2 s_5 - s_3 & 2s_2 s_6 - s_4 & 2s_2 s_7 + s_1 \\ 2s_3 s_1 + s_6 & 2s_3 s_2 - s_5 & 2s_3^2 - 1/2 & 2s_3 s_4 + s_7 & 2s_3 s_5 + s_2 & 2s_3 s_6 - s_1 & 2s_3 s_7 - s_4 \\ 2s_4 s_1 - s_5 & 2s_4 s_2 - s_6 & 2s_4 s_3 - s_7 & 2s_4^2 - 1/2 & 2s_4 s_5 + s_1 & 2s_4 s_6 + s_2 & 2s_4 s_7 + s_3 \\ 2s_5 s_1 + s_4 & 2s_5 s_2 + s_3 & 2s_5 s_3 - s_2 & 2s_5 s_4 - s_1 & 2s_5^2 - 1/2 & 2s_5 s_6 - s_7 & 2s_5 s_7 + s_6 \\ 2s_6 s_1 - s_3 & 2s_6 s_2 + s_4 & 2s_6 s_3 + s_1 & 2s_6 s_4 - s_2 & 2s_6 s_5 + s_7 & 2s_6^2 - 1/2 & 2s_6 s_7 - s_5 \\ 2s_7 s_1 + s_2 & 2s_7 s_2 - s_1 & 2s_7 s_3 + s_4 & 2s_7 s_4 - s_3 & 2s_7 s_5 - s_6 & 2s_7 s_6 + s_5 & 2s_7^2 - 1/2 \end{bmatrix}$$

onde $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8 = 1/2) \in \tilde{S}^6$.

Futuramente utilizaremos a

PROPOSIÇÃO 3.4 $\text{Int}(\mathbb{D}) \subseteq \text{SO}(7, \mathbb{R})$

Dem. Sabemos que os automorfismos de \mathbb{D} são transformações ortogonais, assim $\text{Int}(\mathbb{D}) \subseteq \text{O}(7, \mathbb{R})$. Para $U_2 \in \text{Int}(\mathbb{D})$ temos $(U_2)^{-1} = (U_2)^T$ e portanto $\det(U_2) = \pm 1$. Resta provar que $\det(U_2) \neq -1$, ou seja, que U_2 está no componente identidade de $\text{O}(7, \mathbb{R})$.

Para $s = 1$, $U_s = Id \in SO(7, \mathbb{R})$. Dado $s \neq 1 \in S^7$ consideramos o arco

$$\psi : [0,1] \longrightarrow S^7$$

$$t \longmapsto \frac{(1-t)1 + ts}{|(1-t)1 + ts|}$$

conexo que liga 1 à s .

Além disso a aplicação $U : S^7 \longrightarrow O(7, \mathbb{R})$, $s \longmapsto U_s$ é contínua e portanto $U(\psi([0,1]))$ é conexa em $O(7, \mathbb{R})$ e liga Id à U_s . Logo U_s está no componente identidade de $O(7, \mathbb{R})$ e portanto $\det(U_s) = 1$. ■

Como consequência da falta de associatividade em S^7 apresentamos a

PROPOSIÇÃO 3.5 Não é verdade que $\text{Int}(\mathbb{D})$ é um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{D}) = G_2$.

Dem. Vamos exibir $U_s, U_t \in \text{Int}(\mathbb{D})$ tq. $U_s U_t \notin \text{Int}(\mathbb{D})$.

Tome $s = \frac{\sqrt{3}}{2}ie + 1/2$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}e + 1/2$ em \tilde{S}^6 e considere suas matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = U_s$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = U_1$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 \\ 3/4 & 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} = U_2 U_1$$

Supondo que $U_2 U_1 = U_r = (a_{ij}) \in \text{Int}(\mathbb{O})$ temos

$$\begin{cases} a_{11} = -1/2 = 2r_1^2 - 1/2 \\ a_{44} = -1/2 = 2r_4^2 - 1/2 \end{cases} \Rightarrow r_1 = r_4 = 0$$

Mas $a_{15} = -\sqrt{3}/2 = 2r_1 r_5 - r_4 = 0$. Absurdo ■

Ainda sobre automorfismos internos temos o

LEMA 3.5 $U_s \in \text{Int}(\mathbb{O})$. $U_s(e) = e \Leftrightarrow s = 1$ ou $s_4 = \pm\sqrt{3}/2$

Dem. $U_s(e) = e \Leftrightarrow ses' = e \Leftrightarrow se = es$. Utilizando a matriz para produto por octônios a esquerda, vem que

$$se = es \Leftrightarrow s_1 = s_2 = s_3 = s_5 = s_6, s_7 = 0, s_8 = 1/2 \text{ e } s_4 = \pm\sqrt{3}/2 \text{ ou } s = 1 \quad \blacksquare$$

Vamos procurar agora os demais elementos de G_2 que estabilizam e . Denotaremos este subconjunto de G_2 por $G_{2e} = \{L \in G_2, L(e) = e\}$. Veremos que G_{2e} é isomorfo a $SU(3)$.

Claramente $L, T \in G_{2e}$ implica $LT \in G_{2e}$.

Dado um octônio puro x , podemos escrevê-lo na forma

$$x = i(x_1 e + x_5) + j(x_2 e + x_6) + k(x_3 e + x_7) + x_4 e$$

Chamemos $z_1 = x_1 e + x_5$, $z_2 = x_2 e + x_6$, $z_3 = x_3 e + x_7$, em cada z_n , $n = 1, 2, 3$, troquemos e por i . Assim a cada octônio puro $x = x_4 e$ temos associado um único elemento $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, e reciprocamente. Segue que $L \in G_{20}$ pode ser visto como uma matriz de $GL(3, \mathbb{C})$.

PROPOSIÇÃO 3.6 G_{20} é isomorfo a $SU(3)$.

Dem. Considere a aplicação $A : G_{20} \longrightarrow GL(3, \mathbb{C})$;

$L \longmapsto A_L$ onde $A_L(z) = L(x)$ para x associado a $z = (z_1, z_2, z_3)$.

(I) A está bem definida.

Dados $L = T \in G_{20}$ e $z \in \mathbb{C}^3$, seja x associado a z . Então

$$A_L(z) = L(x) = T(x) = A_T(z)$$

(II) A é injetiva

Novamente tomando $L, T \in G_{20}$ e $z \in \mathbb{C}^3$ com x associado a z , temos

$$A(L) = A(T) \Rightarrow A_L(z) = A_T(z) \Rightarrow L(x) = T(x) \Rightarrow L = T$$

(III) A preserva operação

Ainda, se $L, T \in G_{20}$ e $z \in \mathbb{C}^3$ com x associado a z , temos

$$LT \in G_{20} \text{ e } LT(x) = L(x)T(x)$$

$$A_{LT}(z) = LT(x) = L(x) = A_L(z)A_T(z) = (A_L A_T)(z)$$

(IV) $A(G_{20}) = SU(3)$

Para $A_L \in A(G_{20})$ temos $|A_L(z)| = |L(x)| = |x| = |z|$, assim A_L preserva comprimento de vetores e portanto A_L é unitária. Segue que A_L é diagonalizável.

Escrevemos A_L na forma diagonal, $A_L = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}$

Lembramos que $\bar{A}_L^{-1} A_L = \text{Id}$, i.e., $w_1 \bar{w}_1 = w_2 \bar{w}_2 = w_3 \bar{w}_3 = 1$.

Consideramos a igualdade $L_{(k)} = L_{(1)} L_{(j)}$ e notamos que i, j e k são associados respectivamente a $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.
Aplicando A temos

$$A_L \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} A_L \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escrevendo em linguagem de produto de octônios temos $k w_3 =$

$= i w_1 j w_2$. Sejam $w_n = a_n + i b_n$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3$ daí,

$$k(a_3 + i b_3) = i(a_1 + i b_1)j(a_2 + i b_2) =$$

$$= (a_1 i + b_1 j e)(a_2 j + b_2 j e) = k[(a_1 a_2 - b_1 b_2) + e(-a_1 b_2 - b_1 a_2)].$$

Segue que $a_3 = a_1 a_2 - b_1 b_2$ e $b_3 = -(a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

$$\therefore w_3 = \overline{w_1 w_2} \Rightarrow w_3 w_2 = \bar{w}_1 \Rightarrow w_3 w_2 w_1 = 1$$

Portanto A_L é unimodular e unitário, isto é, $A_L \in \text{SU}(3)$

Para a inclusão contrária, tome $B = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{bmatrix} \in \text{SU}(3)$

$$v_n = (a_n + i b_n) \in \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Vamos supor que $B = A_L$ e ver qual a forma de L para que tenhamos $L \in \mathcal{G}_2$. Dados $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, seja x o octônio associado a z , com $z_n = (x_{n1} + x_{4+n})$, $n = 1, 2, 3$.

$$L(x) = A_L(z) = B(z) = \begin{bmatrix} v_1 z_1 \\ v_2 z_2 \\ v_3 z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 x_{11} + b_1 x_{15})i + (a_1 x_{15} - b_1 x_{11}) \\ (a_2 x_{22} + b_2 x_{26})i + (a_2 x_{26} - b_2 x_{22}) \\ (a_3 x_{33} + b_3 x_{37})i + (a_3 x_{37} - b_3 x_{33}) \end{bmatrix}$$

Reescrevendo esta matriz como uma matriz colunar de números reais temos:

Biblioteca de Matemática
- UFGO -

$$L(x) = \begin{bmatrix} a_1 x_1 + b_1 x_5 \\ a_2 x_2 + b_2 x_6 \\ a_3 x_3 + b_3 x_7 \\ a_1 x_5 + b_1 x_1 \\ a_2 x_6 - b_2 x_2 \\ a_3 x_7 - b_3 x_3 \end{bmatrix}$$

e portanto L tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & 0 & & \\ & & & & \text{Re}(B) & 0 & \text{Im}(B) \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & & \\ -\text{Im}(B) & 0 & & & \text{Re}(B) & & \\ & & & & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$\det L = \det \begin{bmatrix} \text{Re}(B) & \text{Im}(B) \\ -\text{Im}(B) & \text{Re}(B) \end{bmatrix} = \det [\text{Re}(B)\text{Re}(B) + \text{Im}(B)\text{Im}(B)] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 + b_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix}$$

Mas $B^* B = \Rightarrow \bar{v}_n v_n = 1 \Rightarrow a_n^2 + b_n^2 = 1, n = 1, 2, 3.$

Portanto L é um isomorfismo fixando e, a verificação de que $L(xy) = L(x)L(y)$ para quaisquer octônios puros x e y segue de cálculo, lembrando que $v_1 v_2 v_3 = 1$ e $\bar{v}_n v_n = 1 \Rightarrow v_3 = \overline{v_1 v_2} \Rightarrow a_3 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)$ e $b_3 = -(a_1 a_2 + b_1 b_2)$ ■

Segue da demonstração da proposição 3.6, que $L \in G_{20}$

Apresentaremos uma terceira classe, também contida em $SO(7, \mathbb{R})$, e provaremos que todo automorfismo de \mathbb{D} pode ser escrito como a composição de três automorfismos, um em cada classe apresentada.

PROPOSIÇÃO 3.7 $R : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}, (x', x'') \longmapsto (-x', x'')$ é um automorfismo de \mathbb{D} , que pertence a $SO(7, \mathbb{R})$.

Dem. A forma matricial de R é
$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente R é um isomorfismo de \mathbb{R}^8 em \mathbb{R}^8 que deixa fixa a última coordenada. Além disso,

$$\begin{aligned} R(x, y) &= R[(x', x'')(y', y'')] = (-x' \bar{y}' - y' x'', -\bar{y}' x' + x'' y'') = \\ &= ((-x) \bar{y}'' + (-y') x'', -(-\bar{y}') (-x') + x'' y'') = (-x'', x'') (-y, y'') \\ &= R(x) R(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Sendo R automorfismo de \mathbb{D} , R é ortogonal e como $\det(R) = 1$ vem que $R \in SO(7, \mathbb{R})$. ■

A terceira classe de automorfismos que anunciamos é exatamente R^ϵ , $\epsilon = 0$ ou 1 .

Necessitamos novamente de lemas para chegarmos ao objetivo deste capítulo.

LEMA 3.6 Se $x \in S^6$, existe $s \in \tilde{S}^6$ tq. $U_s(e) = x$ se e só se $-1/2 \leq x_4 \leq 1$

Dem. $(\Rightarrow) U_s(e) = \Rightarrow 2s_4^2 - 1/2 = x_4$

$s \in \tilde{S}^6 = \{y \in S^7; y_8 = 1/2\} \Rightarrow 0 \leq s_4^2 \leq 3/4$

Assim $-1/2 \leq x_4 \leq 1$

(\Leftarrow) Consideramos $-1/2 \leq x_4 \leq 1$ e devemos encontrar $x \in \tilde{S}^6$ tq. o sistema abaixo tenha solução.

$$\begin{cases} 2s_4 s_1 + s_5 = x_1 \\ 2s_4 s_2 + s_6 = x_2 \\ 2s_4 s_3 + s_7 = x_3 \\ 2s_4^2 - 1/2 = x_4 \\ -s_1 + 2s_4 s_5 = x_5 \\ -s_2 + 2s_4 s_6 = x_6 \\ -s_3 + 2s_4 s_7 = x_7 \end{cases} \quad \text{Note que já satisfizemos } s_8 = 1/2$$

Chamamos $a = 2s_4$ e reescrevemos o sistema matricialmente.

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_n \\ s_{4+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{4+n} \end{bmatrix} \quad n = 1, 2, 3.$$

$$2s_4^2 - 1/2 = x_4$$

A parte matricial não nos impõe restrições, o determinante das matrizes dos coeficientes para $n = 1, 2, 3$ é $a^2 + 1 = 2s_4^2 + 1 \neq 0$. Da segunda parte temos $s_4 = \pm \sqrt{x_4/2 + 1/4}$, segue que $s_4 \in [0, \sqrt{3}/2]$ ou $s_4 \in [-\sqrt{3}/2, 0]$.

Resta verificar que $r = \sum_{i=1}^7 s_i^2 = 3/4$, sabemos que $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 1$.

Da igualdade do sistema, com $a = 2s_4$, temos

$$(as_1 + s_5)^2 + (as_2 + s_6)^2 + (as_3 + s_7)^2 + (as_4 - 1/2)^2 + (as_5 - s_1)^2 +$$

$$+ (as_6 - s_2)^2 + (as_7 - s_3)^2 = 1$$

$$a^2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 + s_6^2 + s_7^2) + (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 + s_6^2 + s_7^2) + s_4^2 - s_4^2 - as_4 + 1/4 = 1$$

$$r(a^2 + 1) - s_4^2 - as_4 - 3/4 = 0$$

$$r(4s_4^2 + 1) - 3s_4^2 - 3/4 = 0$$

$$r(4s_4^2 + 1) - 3/4(4s_4^2 + 1) = 0 \Rightarrow (r - 3/4)(4s_4^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r - 3/4 = 0 \Rightarrow r = 3/4 \quad \blacksquare$$

COROLARIO Dado $x \in S^6$, existe $s \in \hat{S}^6$ com $s_4 \in [1/2, \sqrt{3}/2]$ ou

$s_4 \in [-\sqrt{3}/2, -1/2]$ tq. $U_2(e) = x$ ou $RU_2(e) = x$
 Dem. Se $0 \leq x_4 \leq 1$, pelo lema $\exists s \in \tilde{S}^6$ tq. $U_2(e) = x$ e da
 igualdade $-2s_4^2 - 1/2 = x_4$ temos $s_4 \in [1/2, \sqrt{3}/2]$ ou
 $s_4 \in [-\sqrt{3}/2, -1/2]$.

Se $-1 \leq x_4 \leq 0$, consideremos $y \in S^6$, $y = R(x)$ e temos
 $0 \leq y_4 \leq 1$, como no caso anterior, $\exists s \in \tilde{S}^6$ tq. $U_2(e) = R(x)$ com
 $s_4 \in [1/2, \sqrt{3}/2]$ ou $s_4 \in [-\sqrt{3}/2, -1/2]$. Aplicando R vemos que
 $\exists s \in \tilde{S}^6$ tq. $RU_2(e) = x$ com $s_4 \in [1/2, -1/2]$ ■

Do corolário, observamos que os conjuntos

$X = \{x \in S^6; x = U_2(e) \text{ ou } x = RU_2(e) \text{ com } s \in \tilde{S}^6 \text{ e } 1/2 \leq s_4 \leq \sqrt{3}/2\}$

$Y = \{x \in S^6; x = U_2(e) \text{ ou } x = RU_2(e) \text{ com } s \in \tilde{S}^6 \text{ e } -\sqrt{3}/2 \leq s_4 \leq -1/2\}$

são iguais a S^6 .

LEMA 3.7 Dado $A \in G_2$, $\exists s \in \tilde{S}^6$ com $-\sqrt{3}/2 \leq s_4 \leq -1/2$, $\exists \varepsilon \in (0,1)$
 tq. $AR^\varepsilon U_2 \in \text{SU}(3)$.

Dem. $A \in G_2$ é automorfismo, assim existe $x \in S^6$ tq. $A(x) = e$.
 Para este x , aplicando o corolário anterior, existe $s \in \tilde{S}^6$ com
 $-\sqrt{3}/2 \leq s_4 \leq -1/2$ tq. $R^\varepsilon U_2(e) = x$ onde $\varepsilon = 0$ ou 1 . Portanto,
 $AR^\varepsilon U_2(e) = A(x) = e$, isto é, $AR^\varepsilon U_2 \in \text{SU}(3)$ (estabiliza e)

TEOREMA 3.1 A aplicação

$$\psi : \text{SU}(3) \times \{s \in \tilde{S}^6; 1/2 \leq s_4 \leq \sqrt{3}/2\} \times \{0, 1\} \longrightarrow G_2$$

$$(L, s, \varepsilon) \longmapsto LU_2 R^\varepsilon$$

é sobrejetora.

Dem. Dado $A \in G_2$, pelo lema 3.7, $\exists t \in \tilde{S}^6$ com $-\sqrt{3}/2 \leq t_4 \leq -1/2$,
 $\exists \varepsilon \in \{0, 1\}$ tal que $AR^\varepsilon U_1 \in \text{SU}(3)$. Chamemos $L = AR^\varepsilon U_1$,
 apliquemos $U_1^{-1} = U_1$ e façamos $s = \bar{t}$. Segue que $LU_2 = AR^\varepsilon$.
 Finalmente, aplicamos R^ε e obtemos $LU_2 R^\varepsilon = A$ com $L \in \text{SU}(3)$, $s \in \tilde{S}^6$
 e $1/2 \leq s_4 \leq \sqrt{3}/2$, $\varepsilon = 0$ ou 1 ■

Chamamos a atenção para o fato de termos obtido uma
 representação matricial para todos os automorfismos de D ,

outrossim obtivemos $G_2 \subseteq SO(7, \mathbb{R})$. ?

CAPITULO IV - O GRUPO DE LIE G_2 - SUA ALGEBRA
DE LIE E DIAGRAMA DE DYNKIN

Verificaremos que G_2 é um grupo de Lie conexo e compacto, e calcularemos sua álgebra de Lie \mathfrak{g}_2 . A simplicidade de \mathfrak{g}_2 nos possibilitará associar seu diagrama de Dynkin, em função da dimensão de \mathfrak{g}_2 .

GRUPO DE LIE G_2

Com a notação do capítulo anterior, consideremos os seguintes subconjuntos de $SO(7, \mathbb{R})$:

$$X = G_{2e},$$

$$Y = \langle \text{Id}, R \rangle$$

$$Z = \{ U_s; s \in \tilde{S}^6 \text{ com } 1/2 \leq s_4 \leq \sqrt{3}/2 \}$$

Estes subconjuntos são fechados em $SO(7, \mathbb{R})$. Para Y é evidente, pois Y é finito e $SO(7, \mathbb{R})$ é espaço de Hausdorff. Para Z , chamemos $\tilde{S}^6 = \{ s \in \tilde{S}^6; 1/2 \leq s_4 \leq \sqrt{3}/2 \}$ e consideremos a restrição da função projeção sobre o quarto eixo, $\pi_4: \tilde{S}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua, segue que $\tilde{S}^6 = \pi_4^{-1} [1/2, \sqrt{3}/2]$ é fechado no compacto \tilde{S}^6 e portanto é compacto. Por outro lado, $U: \tilde{S}^6 \rightarrow SO(7, \mathbb{R}); s \mapsto U_s$ é uma aplicação contínua, de compacto em Hausdorff, portanto é fechada. Assim $Z = U(\tilde{S}^6)$ é fechado em $SO(7, \mathbb{R})$.

Para provar que G_{2e} é fechado em $SO(7, \mathbb{R})$, verificaremos que toda seqüência em G_{2e} que seja convergente tem limite em G_{2e} . Lembramos inicialmente que toda matriz unitária é normal e portanto diagonalizável.

$$A \in G_{20} \text{ se e só se } A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 + ib_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 + ib_3 \end{bmatrix} \in \text{SU}(3)$$

Tomemos uma seqüência $x_n \in G_{20}$, $x_n \longrightarrow x \in \text{SO}(7, \mathbb{R})$, x_n é da forma

$$\begin{bmatrix} a_{1n} & 0 & 0 & 0 & b_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n} & 0 & 0 & 0 & b_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3n} & 0 & 0 & 0 & b_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_{1n} & 0 & 0 & 0 & a_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & -b_{2n} & 0 & 0 & 0 & a_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{3n} & 0 & 0 & 0 & a_{3n} \end{bmatrix}$$

onde

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} a_{1n} + ib_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n} + ib_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3n} + ib_{3n} \end{bmatrix} \in \text{SU}(3)$$

Como o limite é dado termo a termo, vemos que x tem a forma

$$x = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

precisamos verificar que

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} c_1 + id_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 + id_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 + id_3 \end{bmatrix} \in SU(3).$$

Lembrando que o produto de matrizes e a função determinante são contínuas temos

$$\det(\hat{x}) = \det(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\det(\hat{x}_n)) = 1$$

$$\hat{x}\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n \hat{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Id = Id, \text{ portanto } X \text{ é fechado em } SO(7, \mathbb{R}).$$

Sendo $SO(7, \mathbb{R})$ compacto, segue que $X \times Y \times Z$ é compacto. Além disso, a aplicação $\psi : X \times Y \times Z \rightarrow SO(7, \mathbb{R})$ produto de matrizes é contínua com domínio compacto e contradomínio Hausdorff, portanto ψ é fechada. Sabemos do Teorema 3.1 que $G_2 = \psi(X \times Y \times Z)$, assim G_2 é um subgrupo fechado de $SO(7, \mathbb{R})$ e pela proposição 1.18 G_2 é um subgrupo de Lie de $SO(7, \mathbb{R})$.

O grupo de Lie G_2 é conexo e compacto. A compacidade é imediata, para a conexidade utilizamos o resultado de [7, pg 244] que afirma que $G_2 / SU(3)$ é homeomorfo a S^6 . Sendo S^6 e $SU(3)$ conexos vem da proposição 1.22 que G_2 é conexo.

ALGEBRA DE LIE \mathfrak{g}_2

Procuramos agora a álgebra de Lie de G_2 , a qual denotaremos por \mathfrak{g}_2 . Sendo G_2 um subgrupo de Lie de $SO(7, \mathbb{R})$ na topologia induzida, \mathfrak{g}_2 é uma subálgebra de Lie de $so(7, \mathbb{R})$. A dimensão de \mathfrak{g}_2 , sendo a mesma de G_2 é 14

Provaremos que \mathfrak{g}_2 é a subálgebra de $so(7, \mathbb{R})$ formada pelas derivações da álgebra \mathbb{D} . Iniciamos provando o lema seguinte.

LEMA 4.1 Derivações da álgebra real \mathbb{D} formam uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{K}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

Dem. Claramente $cL + T \in \text{Der}(\mathbb{D})$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall L, T \in \text{Der}(\mathbb{D})$.

Devemos verificar que o colchete de derivações é uma derivação.

Sejam $L, T \in \text{Der}(\mathbb{D})$, $x, y \in \mathbb{D}$,

$$[T, L](xy) =$$

$$= (TL - LT)(xy) =$$

$$= TL(xy) - LT(xy) =$$

$$= T(xL(y) + L(x)y) - L(xT(y) + T(x)y) =$$

$$= xTL(y) + T(x)L(y) + L(x)T(y) + TL(x)y - xLT(y) - L(x)T(y) - T(x)L(y) - LT(x)y =$$

$$= xTL(y) - xLT(y) + TL(x)y - LT(x)y =$$

$$= x[T, L](y) + [T, L](x)y =$$

"A priori" $T \in \text{Der}(\mathbb{D})$ é um endomorfismo de \mathbb{R}^8 , porém a igualdade $T(1) = T(1 \cdot 1) = 1T(1) + T(1)1 = 2T(1)$ garante $T(1) = 0$ assim consideramos T como uma matriz 7×7 .

Chamemos $\mathfrak{g} = \{ T \in \text{Der}(\mathbb{D}) \text{ tq } T \in \text{so}(7, \mathbb{R}) \}$; portanto $T \in \mathfrak{g}$ se e só se $T(xy) = xT(y) + T(x)y$, $\forall x, y \in \mathbb{D}$ e $T = -T^t$.

Sendo $\text{Der}(\mathbb{D})$ e $\text{so}(7, \mathbb{R})$ subespaços de $\mathfrak{gl}(7, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \text{Der}(\mathbb{D}) \cap \text{so}(7, \mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathfrak{gl}(7, \mathbb{R})$ e portanto \mathfrak{g} é um subespaço de $\text{so}(7, \mathbb{R})$. Além disso, $[L, T] \in \mathfrak{g} \forall L, T \in \mathfrak{g}$ e portanto \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie de $\text{so}(7, \mathbb{R})$.

Um elemento $T \in \text{so}(7, \mathbb{R})$ tem a forma

$$T = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} & T_{17} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} & T_{27} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 & T_{34} & T_{35} & T_{36} & T_{37} \\ -T_{14} & -T_{24} & -T_{34} & 0 & T_{45} & T_{46} & T_{47} \\ -T_{15} & -T_{25} & -T_{35} & -T_{45} & 0 & T_{56} & T_{57} \\ -T_{16} & -T_{26} & -T_{36} & -T_{46} & -T_{56} & 0 & T_{67} \\ -T_{17} & -T_{27} & -T_{37} & -T_{47} & -T_{57} & -T_{67} & 0 \end{bmatrix}$$

Exigindo que T satisfaça a regra de derivação para os pares de octônios i e j , ie e je , ie e i , restringimos T à forma(*) seguinte

$$\begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} & a \\ -T_{12} & 0 & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} & b \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 & T_{34} & T_{35} & T_{36} & c \\ -T_{14} & -T_{24} & -T_{34} & 0 & T_{45} & T_{46} & d \\ -T_{15} & -T_{25} & -T_{35} & -T_{45} & 0 & (T_{12} + T_{34}) & e \\ -T_{16} & -T_{26} & -T_{36} & -T_{46} & -(T_{12} + T_{34}) & 0 & f \\ -a & -b & -c & -d & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

onde $a = T_{46} + T_{35}$, $b = T_{36} - T_{45}$, $c = -T_{15} - T_{26}$,
 $d = T_{25} - T_{16}$, $e = T_{13} - T_{24}$, $f = T_{14} + T_{23}$

Verificamos através de cálculos que uma matriz T da forma (*)
satisfaz $T(xy) = xT(y) + T(x)y \quad \forall x, y \in \mathbb{D}$ e portanto temos
 $T \in \mathfrak{g}$ se e só se T tem a forma (*).

Segue que \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie de dimensão 14 de
 $SO(7, \mathbb{R})$. Para concluirmos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2$, basta provar a inclusão
 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}_2$; neste sentido temos o

LEMA 4.2 $A \in \mathfrak{g} \Rightarrow e^{tA} \in G_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Dem. Devemos provar que $e^{tA}(xy) = e^{tA}(x) e^{tA}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{D}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 $e^{tA}(xy) = \text{Id}(xy) + tA(xy) + \frac{t^2}{2!} A^2(xy) + \frac{t^3}{3!} A^3(xy) + \frac{t^4}{4!} A^4(xy) + \dots$

Notamos que

$$A(xy) = xA(y) + A(x)y$$

$$A^2(xy) = A(A(xy)) = xA^2(y) + 2A(x)A(y) + A^2(x)y$$

$$A^3(xy) = A(A^2(xy)) = xA^3(y) + 3A(x)A^2(y) + 3A^2(x)A(y) + A^3(x)y$$

$$A^n(xy) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} A^k(x) A^{n-k}(y)$$

Portanto,

$$\frac{A^n(xy)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!} A^k(x) A^{n-k}(y)$$

$$e^{tA}(x) e^{tA}(y) =$$

$$= (\text{Id}(x) + tA(x) + \frac{t^2}{2!} A^2(x) + \frac{t^3}{3!} A^3(x) + \dots) (\text{Id}(y) + tA(y) + \frac{t^2}{2!} A^2(y) + \frac{t^3}{3!} A^3(y) + \dots)$$

Efetuada o produto e agrupando as potências temos

$$m = 0, \quad \text{Id}(x)\text{Id}(y) = \text{Id}(xy)$$

$$m = 1 \quad t(xA(y) + A(x)y) = tA(xy)$$

$$m = 2 \quad t^2\left(\frac{x}{2!}A^2(y) + A(x)A(y) + A^2(x)\frac{y}{2!}\right) = \frac{t^2}{2!}A^2(xy)$$

$$m = 3 \quad t^3\left(\frac{x}{3!}A^3(y) + \frac{A(x)A^2(y)}{2!} + \frac{A^2(x)A(y)}{2!} + \frac{A^3(x)y}{3!}\right) = \frac{t^3}{3!}A^3(xy)$$

$$m = m \quad t\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!} A^k(x) A^{n-k}(y)\right) = \frac{t^n}{n!} A^n(xy)$$

Portanto $e^{tA}(xy) = e^{tA}(x) e^{tA}(y) \forall x, y \in \mathbb{D}, \forall t \in \mathbb{R}$, isto é, $e^{tA} \in \mathcal{G}_2, \forall t \in \mathbb{R}$. ■

Lembramos que pela proposição 1.15,

$$\mathcal{G}_2 = \{ A \in \text{so}(7, \mathbb{R}) ; e^{tA} \in \mathcal{G}_2 \forall t \in \mathbb{R} \}.$$

O lema anterior garante que para toda matriz $A \in \mathcal{g} \subseteq \text{so}(7, \mathbb{R})$ temos $e^{tA} \in \mathcal{G}_2 \forall t \in \mathbb{R}$. Segue que $\mathcal{g} \subseteq \mathcal{G}_2$ e portanto $\mathcal{g} = \mathcal{G}_2$ é a álgebra de Lie de \mathcal{G}_2 .

O passo seguinte é provar que \mathcal{G}_2 é simples. Como espaço vetorial, chamemos $\{v_1, v_2, \dots, v_{14}\}$ a base ordenada de \mathcal{G}_2 definida como segue: cada v_i corresponde ao valor 1 para a variável indicada da matriz (*) e 0 para os demais, segundo a correspondência

$v_1 \longrightarrow T_{12}$	$v_2 \longrightarrow T_{13}$	$v_3 \longrightarrow T_{14}$	$v_4 \longrightarrow T_{15}$
$v_5 \longrightarrow T_{16}$	$v_6 \longrightarrow T_{23}$	$v_7 \longrightarrow T_{24}$	$v_8 \longrightarrow T_{25}$
$v_9 \longrightarrow T_{26}$	$v_{10} \longrightarrow T_{34}$	$v_{11} \longrightarrow T_{35}$	$v_{12} \longrightarrow T_{36}$
$v_{13} \longrightarrow T_{45}$	$v_{14} \longrightarrow T_{46}$		

Será essencial nas contas que seguem o conhecimento de

Alguns colchetes entre elementos básicos, lembrando que

$$[v_i, v_j] = -[v_j, v_i] \quad \forall v_i, v_j \in \mathfrak{g}_2, \text{ temos}$$

$[v_1, \]$	$[v_2, \]$	$[v_3, \]$	$[v_4, \]$
$v_1 = 0$	-	-	-
$v_2 = -v_6$	-	-	-
$v_3 = -v_7$	$v_9 = -v_{10}$	-	-
$v_4 = -v_5 - v_8$	$v_4 = -2v_{11}$	$v_4 = -v_{12} - v_{13}$	-
$v_5 = v_4 - v_9$	$v_5 = -v_{12} - v_{13}$	$v_5 = 2v_4$	$v_5 = -v_{10}$
$v_6 = v_2$	$v_6 = -v_1$	$v_6 = 0$	$v_6 = v_{12}$
$v_7 = v_3$	$v_7 = 0$	$v_7 = -v_1$	$v_7 = -v_{11}$
$v_8 = v_4 - v_9$	$v_8 = v_{13}$	$v_8 = v_{14}$	$v_8 = v_{10} - v_1$
$v_9 = v_5 + v_8$	$v_9 = -v_{11}$	$v_9 = -v_{12}$	$v_9 = 0$
$v_{10} = 0$	$v_{10} = v_3$	$v_{10} = -v_2$	$v_{10} = v_5$
$v_{11} = -v_{12}$	$v_{11} = 2v_4$	$v_{11} = -v_5$	$v_{11} = -2v_2$
$v_{12} = v_{11}$	$v_{12} = v_5 + v_8$	$v_{12} = v_9$	$v_{12} = -v_6$
$v_{13} = -v_{14}$	$v_{13} = -v_8$	$v_{13} = v_4 - v_9$	$v_{13} = v_6 - v_9$
$v_{14} = v_{13}$	$v_{14} = v_4$	$v_{14} = 2v_5$	$v_{14} = -v_2$

Utilizaremos ainda

$$\begin{aligned}
 [v_5, v_6] &= v_{14} & [v_5, v_7] &= -v_{13} & [v_5, v_8] &= 0 & [v_5, v_9] &= v_{10} - v_1 \\
 [v_5, v_{14}] &= -2v_9 & [v_6, v_{12}] &= 2v_9 & [v_{12}, v_{13}] &= 0 & &
 \end{aligned}$$

Seja I um Ideal de \mathfrak{g}_2 . Consideremos $I \neq 0$. Se algum elemento básico estiver em \mathfrak{g}_2 teremos $I = \mathfrak{g}_2$. De fato, se $v_1 \in I$, pela operação de colchete, teremos também em I $v_2, v_3, v_6, v_7, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
 v_2 \in I &\Rightarrow [v_2, v_3] = -v_{10} \in I \Rightarrow v_{10} \in I \\
 &\Rightarrow [v_2, v_{11}] = 2v_4 \in I \Rightarrow v_4 \in I \\
 &\Rightarrow [v_2, v_{13}] = -v_8 \in I \Rightarrow v_8 \in I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_3 \in I &\Rightarrow [v_3, v_{11}] = v_5 \in I \\
 &\Rightarrow [v_3, v_{12}] = v_9 \in I
 \end{aligned}$$

Segue que se $v_1 \in I$ então $I = \mathfrak{g}_2$.

$$v_2 \in I \Rightarrow [v_2, v_6] = -v_1 \in I \Rightarrow I = \mathfrak{g}_2$$

$$\begin{aligned}
v_3 \in I &\Rightarrow [v_3, v_7] = -v_1 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_4 \in I &\Rightarrow [v_4, v_{11}] = -2v_2 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_5 \in I &\Rightarrow [v_5, v_{14}] = -2v_3 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_6 \in I &\Rightarrow [v_6, v_2] = v_1 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_7 \in I &\Rightarrow [v_7, v_9] = v_1 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_8 \in I &\Rightarrow [v_8, v_9] = -v_{14} \in I \Rightarrow [v_{14}, v_2] = -v_4 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_9 \in I &\Rightarrow [v_9, v_9] = v_{12} \in I \Rightarrow [v_{12}, v_4] = v_6 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_{10} \in I &\Rightarrow [v_{10}, v_9] = v_2 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_{11} \in I &\Rightarrow [v_{11}, v_9] = -v_5 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_{12} \in I &\Rightarrow [v_{12}, v_9] = v_9 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_{13} \in I &\Rightarrow [v_{13}, v_2] = v_8 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2 \\
v_{14} \in I &\Rightarrow [v_{14}, v_2] = -v_4 \in I \Rightarrow I = \mathcal{L}_2
\end{aligned}$$

Seja $I \neq \mathcal{L}_2$ um ideal de \mathcal{L}_2 . Seja $x \in I$, $x = \sum_{i=1}^{14} a_i v_i$.
 Verificaremos que $a_1 = a_2 = \dots = a_{14} = 0$ e teremos que \mathcal{L}_2 é simples. Utilizaremos o fato que nenhum elemento básico está em I .

$$\begin{aligned}
[v_1, x] \in I &\Rightarrow [v_1, [v_1, x]] \in I \Rightarrow z_1 = x + [v_1, [v_1, x]] \in I \Rightarrow \\
[v_1, z_1] \in I &\Rightarrow [v_5, [v_1, z_1]] \in I \Rightarrow -3(a_5 + a_8)v_1 \in I \Rightarrow a_5 = -a_8 \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[v_1, z_1] &= 3(a_4 - a_9)(v_5 + v_8) - 3(a_5 + a_8)(v_4 - v_9) = \\
&= 3(a_4 - a_9)(v_5 + v_8) \in I \Rightarrow [v_9, [v_1, z_1]] = 9(a_4 - a_9)v_{14} \in I \Rightarrow a_4 = a_9 \quad (2)
\end{aligned}$$

Restringimos x à forma

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + a_7 v_7 - a_5 v_8 + a_4 v_9 + a_{10} v_{10} + a_{11} v_{11} + a_{12} v_{12} + a_{13} v_{13} + a_{14} v_{14}$$

$$\begin{aligned}
[v_2, x] \in I &\Rightarrow [v_2, [v_2, x]] \in I \Rightarrow z_2 = x + [v_2, [v_2, x]] \in I \Rightarrow \\
\Rightarrow [v_2, z_2] \in I &\Rightarrow [v_4, [v_2, z_2]] \in I \Rightarrow -18a_4 v_2 \in I \Rightarrow a_4 = 0 \Rightarrow a_9 = 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

$$[v_2, z_2] = 9a_4 v_{11} - (6a_{11} + a_{14})v_4 \in I \Rightarrow a_{14} = -6a_{11} \quad (3)$$

Considerando x como

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + a_7 v_7 - a_5 v_8 + a_{10} v_{10} + a_{11} v_{11} + a_{12} v_{12} + a_{13} v_{13} + a_{14} v_{14}$$

$$[v_9, x] \in I \Rightarrow [v_9, [v_9, x]] \in I \Rightarrow z_3 = x + [v_9, [v_9, x]] \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [v_3, z_3] \in I \Rightarrow [v_5, [v_3, z_3]] \in I \Rightarrow -10a_5 v_5 \in I \Rightarrow a_5 = 0 \Rightarrow a_8 = 0 \quad (1)$$

$$[v_3, z_3] = 5a_5 v_{14} + (5a_{11} + 10a_{14})v_5 \in I \Rightarrow a_{11} = -2a_{14} \quad (4)$$

De (3) e (4) temos $a_{11} = a_{14} = 0$

Obtivemos até este ponto $a_4 = a_5 = a_8 = a_9 = a_{11} = a_{14} = 0$, portanto

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_6 v_6 + a_7 v_7 + a_{10} v_{10} + a_{12} v_{12} + a_{13} v_{13}$$

$$[v_4, z_1] \in I \Rightarrow [v_3, [v_4, z_1]] \in I \Rightarrow (3a_1 + 2a_{10})v_{14} \in I \Rightarrow 3a_1 + 2a_{10} = 0 \quad (5)$$

$$[v_3, z_1] \in I \Rightarrow [v_4, [v_3, z_1]] \in I \Rightarrow -(a_1 + 2a_{10})v_{11} \in I \Rightarrow a_1 + 2a_{10} = 0 \quad (6)$$

De (5) e (6) temos $a_1 = a_{10} = 0$

$$x = a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_6 v_6 + a_7 v_7 + a_{12} v_{12} + a_{13} v_{13}$$

Temos agora que $z_2 = a_2 v_2 + a_7 v_7 \in I$, assim

$$[v_4, v_2] \in I \Rightarrow (2a_2 - a_7)v_{11} \in I \Rightarrow 2a_2 - a_7 = 0 \quad (7)$$

$$[v_3, [v_2, [v_4, z_2]]] \in I \Rightarrow (2a_2 + a_7)v_{14} \in I \Rightarrow 2a_2 + a_7 = 0 \quad (8)$$

De (7) e (8) temos $a_2 = a_7 = 0$

$$x = a_3 v_3 + a_6 v_6 + a_{12} v_{12} + a_{13} v_{13} \Rightarrow z_3 = a_3 v_3 + a_6 v_6$$

$$[v_3, [v_2, [v_4, z_3]]] \in I \Rightarrow (2a_3 + 3a_6)v_{14} \in I \Rightarrow 2a_3 + 3a_6 = 0 \quad (9)$$

$$[v_3, [v_4, [v_3, z_3]]] \in I \Rightarrow -(2a_3 + a_6)v_{14} \in I \Rightarrow 2a_3 + a_6 = 0 \quad (10)$$

De (9) e (10) temos $a_3 = a_6 = 0$

$$\text{Poranto consideramos } x = a_{12} v_{12} + a_{13} v_{13}$$

$$[v_2, [v_4, x]] \in I \Rightarrow (2a_{12} - a_{13})v_4 \in I \Rightarrow 2a_{12} - a_{13} = 0 \quad (11)$$

raízes.

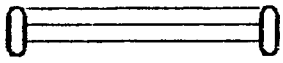
Estes mesmos resultados sobre \mathfrak{g}_2 e $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ são obtíveis através dos seus sistemas de raízes; porém sua construção envolveria uma série de cálculos. Note que através dos diagramas de Dynkin estes resultados tornam-se simples observações.


Algebra	-	2
Algebra alternativa	-	2
Algebra associativa	-	2
Algebra com divisão	-	2
Algebra com unidade	-	2
Algebra comutativa	-	2
Algebra normada	-	2
Algebra de Lie	-	5
Algebra de Lie de um grupo de Lie	-	7
Algebra de Lie simples	-	8
Algebra de Lie trivial	-	5
Algebra dos octónios	-	18
Algebra dos quatérnios	-	3
Angulo entre raizes	-	14
Anti-involução	-	4
Aplicação adjunta	-	8
Aplicação exponencial	-	9
Automorfismos de uma álgebra	-	4
Automorfismos internos	-	23
Campo de vetores	-	6
Centro da álgebra	-	3
Colchete	-	5
Colchete de Lie	-	7
Comprimento de raizes	-	14
Conjugado de octónio	-	17
Conjugado de quatérnio	-	3
Decomposição de Cartan	-	13
Derivação de álgebra	-	4
Diagrama de Dynkin	-	15
Espaço tangente	-	6
Fibrado tangente	-	6
Germe de funções	-	6
Grupo de Lie	-	5
Grupo de Lie compacto	-	5
Grupo de Lie conexo	-	5
Grupo de Lie simples	-	8

Homomorfismo de álgebras de Lie	- 8
Homomorfismo de grupos de Lie	- 8
Ideal de uma álgebra	- 8
Identidade de Jacobi	- 5
Inverso de octônio	- 19
Inverso de quatérnio	- 3
Involução	- 4
Norma de octônio	- 19
Norma de quatérnio	- 3
Octônios	- 16
Posto	- 12
Produto de octônios	- 17
Quatérnios	- 3
Raiz	- 12
Raizes da álgebra de Lie	- 14
Sistema de raizes	- 11
Sistema de raizes de uma álgebra de Lie simples	- 14
Sistema fundamental	- 12
Sistema positivo	- 12
Subálgebra de Cartan	- 13
Subálgebra de Lie	- 8
Subálgebra de Lie Simples	- 8
Subgrupo de Lie	- 8
Subgrupo de Lie compacto	- 11
Subgrupo de Lie conexo	- 11
Subgrupo de Lie fechado	- 8
Translação à esquerda	- 7
Variedade homogénea	- 10
Vetor tangente	- 6

Índice de Símbolos

$Z(A)$	-	3
H	-	3
$\text{Aut}(A)$	-	4
$\text{SO}(3, \mathbb{R})$	-	4,
$\text{Der}(A)$	-	4
$\text{End}(A)$	-	4
G	-	5
$\text{GL}(n, \mathbb{R})$	-	5
\mathfrak{g}	-	5
$[,]$	-	5
$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$	-	5
F_m	-	6
M_m	-	6
TOM	-	6
$X(m)$	-	6
$G \longleftrightarrow \mathfrak{g}$	-	7
$\text{GL}(n, \mathbb{C})$	-	8
$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$	-	8
ad_x	-	7
(\mathcal{H}, ρ)	-	8
$e = \exp$	-	9
\underline{G}	-	10
H		
$U(n)$	-	11
$SU(n)$	-	11
$O(n, \mathbb{R})$	-	11
$SO(n, \mathbb{R})$	-	11
$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$	-	11
$W_r(x)$	-	11
\mathfrak{k}	-	11
\prod	-	12
V^+	-	12
$>$	-	12
$\langle \rangle$	-	13
h_r	-	14
n_{ij}	-	15

 - 15

 - 15

D - 16

Pu(x) - 17

Re(x) - 17

M_x - 20

G_2 - 22

\tilde{S}^6 - 27

Int(D) - 27

G_{2e} - 30

A_L - 31

R^6 - 35

\tilde{S}^6 - 39

σ_2 - 41

BIBLIOGRAFIA

- [1] - BOURBAKI, N. Groupes et Algebres de Lie. Hermann, 1968.
- [2] - CARTER, R. W. Simple Groups of Lie type. John Wiley & Sons, 1972.
- [3] - HELGASON, S. Differential Geometry and Symetric Space. Academic Press, 1962.
- [4] - HUMPHREYS, J. E. Introduction to Lie Algebras and Representation Teory. Springer - Verlag, 2nd Ed., 1972.
- [5] - LIMA, E. L. Elementos de Topologia Geral, Livro Técnico SA, 1970.
- [6] - PORTEOUS, I. N. Topological Geometry. Cambridge University Press, 2nd Ed., 1981.
- [7] - SOLECKI, A. On Fiberings of $SO(7, \mathbb{R})$. Colloquium Mathematicum, 35, 1946, p.561-578.
- [8] - WARNER, F. W. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Scott, Foresman and Company, 1971.