

Jaylson Jair da Silveira

ABORDAGEM DOS CICLOS ENDÓGENOS:

**UMA RESENHA DA MODELAGEM DOS CICLOS DE NEGÓCIOS FUNDAMENTADA
NO CONCEITO DE CICLO LIMITE E NO TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof^o Dr. Jean-Luc S. Rosinger

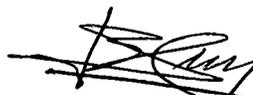
Florianópolis

1998

ABORDAGEM DOS CICLOS ENDÓGENOS:

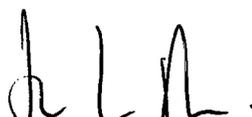
UMA RESENHA DA MODELAGEM DOS CICLOS DE NEGÓCIOS FUNDAMENTADA
NO CONCEITO DE CICLO LIMITE E NO TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de
Mestre em Economia e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-
Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Dr. Laércio Barbosa Pereira
Coordenador do Curso

Banca examinadora:



Prof. Dr. Jean-Luc S. Rosinger (presidente) CPGE/CSE/UFSC



Prof. Dr. João Rogério Sanson CPGE/CSE/UFSC



Prof. Dr. Robert Samoyl EPS/CTC/UFSC

Aprovada em: 16.12.98

À minha companheira Ana e minha filha Júlia

In memoriam,

*Ao meu pai Jair Vicente da Silveira,
meu grande amigo e meu primeiro professor,
registro aqui minha eterna gratidão.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, destaco que sem o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) não teria sido possível, ou no mínimo muito mais difícil, realizar meu curso de mestrado.

É imenso o número de indivíduos que me ajudaram, direta ou indiretamente, durante meu curso de mestrado e durante a feitura desta dissertação. Registro meu agradecimento a todos eles. Todavia, alguns destes merecem um agradecimento explícito.

Ao prof. Jean-Luc S. Rosinger por sua orientação, críticas construtivas e confiança no meu trabalho.

A todos os meus colegas do mestrado pela amizade, em especial ao Márcio Köller e ao Jailson Coelho pelo companheirismo e aos meus colegas do IPE/USP Alexandre, Ana Cláudia, Carlos Eduardo, Geraldo, Marcos e Paulo, por me ajudarem quando precisei.

Aos professores e funcionários do departamento de economia. Aproveito para registrar meu agradecimento aos professores João Serafim Tusi da Silveira e Maria de Lourdes Pereira Dias pelo seu apoio durante minha graduação.

A toda minha família, em especial: a Mariza, Gildo e Matheus pela amizade e caronas; a minha sogra e meu sogro pelo apoio; a meus pais pela educação e amor; e a minha vó materna pelo seu imenso carinho.

Por último, o agradecimento mais intenso a Ana Maria pelo seu amor, apoio incondicional, enorme paciência e pela ajuda na digitação desta dissertação, sem os quais eu não teria conseguido concluir este trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE QUADROS	x
LISTA DE SIGLAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
LISTA DE TABELAS	xv
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. O Fenômeno dos Ciclos de Negócios	1
1.1.1. Cronologia dos ciclos de negócios e o comportamento das principais variáveis macroeconômicas de países desenvolvidos	3
1.1.2. Fatos estilizados	9
1.2. Panorama da Teoria dos Ciclos de Negócios	12
1.2.1. A persistência dos ciclos: choques exógenos versus mecanismos endógenos	13
1.2.2. Contra o método de corroboração da abordagem dos ciclos exógenos: o argumento Reductio ad Absurdum de Blatt	15
1.2.3. Periodização da modelagem dinâmica determinística não-linear dos ciclos de negócios	20
1.3. Metas, Questões Metodológicas e Roteiro do Trabalho	22
2. CARACTERÍSTICAS DEFINIDORAS DOS MODELOS DE CICLOS ENDÓGENOS FUNDAMENTADOS NO CONCEITO DE CICLO LIMITE E NO TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON	25
2.1. Digressão sobre Ciclos Limites em Sistemas Dinâmicos Contínuos Autônomos no Plano	26
2.1.1. Noções preliminares	26
2.1.2. Sistemas dinâmicos contínuos autônomos lineares bidimensionais com coeficientes constantes	32

2.1.3.	Sistemas dinâmicos contínuos autônomos não-lineares bidimensionais	35
2.1.3.1.	Análise da estabilidade local de um ponto de equilíbrio hiperbólico: a técnica de linearização	35
2.1.3.2.	Trajетórias periódicas e órbitas fechadas no plano de fases: a existência de um ciclo limite	39
2.1.4.	Estabilidade estrutural: a permanência de uma órbita fechada	47
2.2.	Defasagens Distribuídas e Mecanismos de Ajustamento de Erros Associados	52
2.2.1.	Análise discreta: defasagem distribuída geometricamente	53
2.2.2.	Análise contínua: defasagem distribuída exponencialmente	54
2.2.3.	Considerações adicionais sobre o tema	56
2.3.	Modelos de Ciclos Exógenos e Endógenos: uma ilustração de suas diferenças básicas	58
2.3.1.	O Modelo de Phillips	59
2.3.2.	O Modelo de Vogt	64
2.3.3.	Considerações Finais sobre os Modelos	69
	Apêndice 2.A. Trajetórias do Modelo de Phillips	71
3.	A CONTRIBUIÇÃO PIONEIRA DE KALDOR	74
3.1.	A Dinâmica Cíclica Kaldoriana	75
3.2.	A Formalização do Modelo de Kaldor: a versão Chang-Smyth	89
3.2.1.	O modelo: suposições e equações de movimento	89
3.2.2.	A Existência de um Ciclo Limite	91
3.3.	O Modelo de Kaldor e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios	99
	Apêndice 3.A. Avaliação das Condições de Existência Estabelecidas por Kaldor	101
4.	CICLO DO EMPREGO: O MODELO DE ROSE	106
4.1.	O Modelo: suposições e equações de movimento	106
4.2.	A Existência de um Ciclo Limite	117
4.3.	O Modelo de Rose e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios	127
5.	CICLO NUMA ECONOMIA DO TIPO IS-LM: O MODELO DE SCHINASI-SASAKURA	131
5.1.	O Modelo: suposições e equações de movimento	132

5.2.	A Existência de um Ciclo Limite	136
5.3.	O Modelo de Schinasi-Sasakura e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios	147
6.	CICLO NUMA ECONOMIA NÃO-WALRASIANA: O MODELO DE BENASSY	150
6.1.	O Modelo: suposições e equações de movimento	151
6.2.	A Existência de um Ciclo Limite	159
6.3.	O Modelo de Benassy e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios	166
7.	CICLO DO CRESCIMENTO NUMA ECONOMIA CAPITALISTA "GENUÍNA": O MODELO DE NIKAIDO	169
7.1.	O Modelo: suposições e equações de movimento	169
7.2.	A Existência de um Ciclo Limite	173
7.3.	O Modelo de Nikaido e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios	189
8.	CONCLUSÃO	191
8.1.	Um Resumo Comparativo e algumas Considerações Gerais sobre a Modelagem dos Ciclos de Negócios Fundamentada no Conceito de Ciclo Limite e no TPB	192
8.1.1.	Princípios compartilhados	192
8.1.2.	Limitações	194
8.2.	Sugestões para Futuras Pesquisas sobre o Tema	195
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	196

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1.** Estabilidade de um Ponto de Equilíbrio 30
- Figura 2.2.** Sistema Mola-Massa Horizontal 31
- Figura 2.3.** Formatos do Diagrama de Fases de Sistemas de EDO's Autônomos Bidimensionais Lineares com Coeficientes Constantes 34
- Figura 2.4.** Um *Saddle Loop* num Sistema de EDO's Bidimensional Autônomo 43
- Figura 2.5.** Caso Típico de Aplicação do TPB 44
- Figura 2.6.** Diagramas de Fases de uma Bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf 49
- Figura 2.7.** Funções Resposta das Defasagens Distribuídas Geometricamente e Exponencialmente 57
- Figura 2.8.** Diagrama de Fases do Modelo de Phillips 63
- Figura 2.9.** Diagrama de Fases do Modelo de Vogt 69
- Figura 3.1.** Ajustamento no Mercado de Bens com Funções Investimento e Poupança Lineares 79
- Figura 3.2.** Estabilidade do Sistema (3.10) 80
- Figura 3.3.** Função Investimento não-Linear 82
- Figura 3.4.** Função Poupança não-Linear 82
- Figura 3.5.** Equilíbrios Múltiplos no Mercado de Bens 83
- Figura 3.6.** Translações da Função Investimento 85
- Figura 3.7.** A Dinâmica Cíclica Kaldoriana 88
- Figura 3.8.** Existência de um Ponto de Equilíbrio no Modelo de Kaldor 93
- Figura 3.9.** Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Kaldor (versão Chang-Smyth) 96
- Figura 3.10.** O Conjunto Ω do Modelo de Kaldor (versão Chang-Smyth) 97
- Figura 4.1.** Curva de Phillips não-Linear 109
- Figura 4.2.** Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Rose 120
- Figura 4.3.** O Conjunto Ω do Modelo de Rose 121
- Figura 4.4.** Um Ciclo Limite do Modelo de Rose 126
- Figura 5.1.** Existência de um Ponto de Equilíbrio no Modelo de Schinasi 139
- Figura 5.2.** Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Schinasi (financiamento por moeda) 142
- Figura 5.3.** O conjunto Ω do Modelo de Schinasi-Sasakura 143

Figura 5.4. Um Ciclo Limite do Modelo de Schinasi-Sasakura	146
Figura 5.5. Um Ciclo Limite no Plano LM do Modelo de Schinasi	147
Figura 6.1. Curva de Phillips	153
Figura 6.2. Curva de Demanda Agregada	155
Figura 6.3. Curva de Oferta Agregada	156
Figura 6.4. O Equilíbrio Temporário não-Walrasiano	157
Figura 6.5. Renda de Equilíbrio versus Salário nominal	160
Figura 6.6. Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Benassy	162
Figura 6.7. O Conjunto Ω do Modelo de Benassy	163
Figura 6.8. Um Ciclo Limite do Modelo de Benassy	166
Figura 7.1. Taxa de Crescimento Planejada do Estoque de Capital	172
Figura 7.2. Translações da Curva de Demanda Agregada Planejada	178
Figura 7.3. Existência de um Ponto de Equilíbrio no Modelo de Nikaido	179
Figura 7.4. Comportamento da Curva de Demarcação $(X/K) = 0$	180
Figura 7.5. Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Nikaido (caso: demanda agregada deficiente com relação a oferta potencial)	185
Figura 7.6. Um Ciclo Limite do Modelo de Nikaido (caso: demanda agregada deficiente com relação a oferta potencial)	187

LISTA DE QUADROS

- Quadro 2.1.** Classificação dos Pontos de Equilíbrio de Sistemas de EDO's Autônomos Bidimensionais Lineares com Coeficientes Constantes 33
- Quadro 2.2.** Programa de Aplicação do TPB 45
- Quadro 2.3.** Características das Defasagens Distribuídas Geometricamente e Exponencialmente 57
- Quadro 3.1.** Processo de Ajustamento no Mercado de Bens 78
- Quadro 4.1.** O Comportamento das Variáveis de Estado do Modelo de Rose durante um período de um Ciclo 130
- Quadro 5.1.** O Comportamento das Variáveis de Estado do Modelo de Schinasi-Sasakura durante um período de um Ciclo 149
- Quadro 6.1.** O Comportamento das Variáveis de Estado do Modelo de Benassy durante um período de um Ciclo 168
- Quadro 7.1.** O Comportamento das Variáveis de Estado do Modelo de Nikaido durante um período de um Ciclo 190
- Quadro 8.1.** Resumo Comparativo Baseado na Estrutura Econômica dos Modelos de Ciclos Endógenos fundamentados no Conceito de Ciclo Limite e no Teorema de Poincaré-Bendixson 193

LISTA DE SIGLAS

EDO: equação diferencial ordinária

PVI: problema de valor inicial

TPB: teorema de Poincaré-Bendixson

LISTA DE SÍMBOLOS

Adiante segue a lista das principais nomenclaturas adotadas para os modelos.

$B(t)$: valor do estoque de títulos emitidos pelo governo no tempo t

c : propensão marginal a consumir

$C(t)$: consumo real agregado no tempo t

$G(t)$: gasto do governo no tempo t

$I(t)$: investimento real agregado no tempo t

I_{π}^d : quantidade de capital da geração τ demandada pela firma representativa i ;

I_{τ}^d : quantidade de capital da geração τ demandada pela economia;

I_{π} : quantidade de capital da geração τ efetivamente utilizada pela firma representativa i ;

I_{τ} : produção agregada observada de capital da geração τ ;

k : razão capital-trabalho

$K(t)$: estoque de capital agregado observado no tempo t

$K^d(t)$: estoque de capital agregado desejado no tempo t

$K_{\pi}(t)$: estoque de capital da firma representativa no tempo t

$M(t)$: oferta real agregada de moeda no tempo t

$M^d(t)$: demanda real agregada por moeda no tempo t

n : taxa de crescimento instantânea da oferta de trabalho agregada

N_{π}^d : quantidade de trabalho demandada pela firma representativa para empregar com o capital da geração τ

N_{τ}^d : quantidade de trabalho demandada pela economia para empregar com o capital da geração τ

N_{π} : quantidade de trabalho efetivamente empregada pela firma representativa com a quantidade agregada de capital da geração τ

N_{τ} : quantidade de trabalho efetivamente empregada pela economia com a quantidade agregada de capital da geração τ

- $N(t)$: quantidade total de trabalho empregada no tempo t , isto é, soma das quantidades de trabalho empregadas com os capitais das gerações $\tau \leq t$ no instante t (modelo de Vogt) ou demanda de trabalho agregada ou quantidade de trabalho efetivamente utilizado no tempo t
- $N_r(t)$: demanda de trabalho da firma representativa no tempo t
- $N^s(t)$: oferta de trabalho agregada no tempo t
- $P(t)$: preço do produto esperado pela firma representativa no tempo t ou nível geral de preços no tempo t
- $R(t)$: taxa de juros nominal no tempo t
- $r(t)$: taxa de juros real no tempo t
- s : propensão marginal a poupar
- $S(t)$: poupança agregada real no tempo t
- $T(t)$: receita real do governo no tempo t
- $u(t)$: nível de desemprego, ou seja, número de unidades de trabalho não empregada no tempo t
- $X(t)$: venda agregada esperada em termos reais pelas firmas da economia no tempo t pelo conjunto de firmas da economia no tempo t
- $W(t)$: salário nominal no tempo t
- $w(t)$: salário real no tempo t
- $Y(t)$: produto agregado no tempo t
- $Y^D(t)$: renda disponível agregada no tempo t
- $Y_r(t)$: produto da firma representativa no tempo t
- $Y_{\pi}(t)$: produto produzido pela firma representativa i no tempo t com trabalho e estoque de capital da geração τ ;
- $Y_r(t)$: produto agregado produzido no tempo t pelo quantidade agregada de capital da geração τ e pela quantidade de trabalho empregada neste montante de capital;
- $Z(t)$: demanda agregada autônoma no tempo t
- α_1 : velocidade de ajustamento da oferta agregada com relação ao hiato entre esta e a demanda agregada no mercado de bens
- α_2 : velocidade de ajustamento da demanda agregada esperada pelo conjunto de firmas da economia com relação ao hiato entre esta e a renda

- α_3 : velocidade de ajustamento do nível de atividade (nível de emprego ou renda) com relação ao hiato entre o investimento agregado e a poupança agregada
- β_1 : velocidade de ajustamento do estoque de capital agregado observado com relação ao hiato entre este e o estoque de capital agregado desejado
- β_2 : velocidade de ajustamento da taxa de crescimento da taxa de juros real com relação ao hiato entre a quantidade de capital da geração τ demandada pela economia e produção agregada observada de capital da geração τ
- β_3 : velocidade de ajustamento da oferta agregada com relação ao hiato entre esta e a demanda agregada no mercado monetário
- γ_1 : razão capital da firma representativa-capital agregado
- δ_τ : parâmetro de deslocamento da função de produção da firma representativa i na geração τ
- $\zeta(t)$: taxa de lucro no tempo t
- η : elasticidade da demanda conjetural (esperada) da firma representativa
- κ : coeficiente de aceleração
- λ : taxa de crescimento instantânea da produtividade do trabalho
- $\nu(t)$: proporção empregada da oferta de trabalho ou coeficiente de emprego no tempo t
- $\pi(t)$: lucro nominal agregado esperado de curto prazo no tempo t
- $\pi_r(t)$: lucro nominal esperado pela firma representativa de curto prazo no tempo t
- $\rho(t)$: razão oferta de trabalho-capital no tempo t
- $\sigma(t)$: razão demanda de trabalho-capital no tempo t

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1.1.** Duração e Cronologia dos Ciclos de Negócios nos Estados Unidos, Grã-Bretanha, França e Alemanha / NBER / 1855-1938 4
- Tabela 1.2.** Características dos Ciclos de Negócios nos Estados Unidos, Grã-Bretanha, França e Alemanha entre 1878 e 1932 5
- Tabela 1.3.** Durações e Cronologias dos Ciclos de Negócios nos Estados Unidos / 1932-1982 5
- Tabela 1.4.** Medidas Seleccionadas de Duração, Profundidade, e Difusão das Contrações do Ciclo de Negócios Nos Estados Unidos / 1920-1982 6
- Tabela 1.5.** Tendências de Longo Prazo e Mudanças Cíclicas Médias nos Preços nos Estados Unidos / 1789-1982 7
- Tabela 1.6.** Tendências dos Preços no atacado e Duração Relativa das Expansões e Contrações dos Ciclos de Negócios nos Estados Unidos, Grã-Bretanha, França e Alemanha / 1790-1982 8
- Tabela 1.7.** Simulação de um Modelo do Tipo Hicks 17
- Tabela 1.8.** Estimativas dos Parâmetros do Modelo (1.2) 18

RESUMO

Com base no princípio pelo qual o movimento oscilatório dos agregados macroeconômicos é mantido, os modelos de ciclos de negócios podem ser divididos em dois grupos: a *abordagem dos ciclos exógenos* e a *abordagem dos ciclos endógenos*. Os modelos de ciclos de negócios que pertencem à primeira abordagem (*modelos de ciclos exógenos*) tem como característica comum o fato de que a manutenção dos ciclos depende de *uma combinação específica dos valores dos parâmetros* destes modelos (estabelecida por equações e/ou inequações envolvendo tais parâmetros) e/ou de *impulsos exógenos* a estes (ou seja, de choques não explicados dentro dos modelos). Os modelos de ciclos de negócios que fazem parte da segunda abordagem (*modelos de ciclos endógenos*) são aqueles que explicam a persistência dos ciclos pela dinâmica interna (*modus operandis*) do modelo, ou seja, os ciclos são gerados e mantidos endogenamente, independentemente de valores específicos dos parâmetros e/ou de choques exógenos. O presente trabalho configura-se como uma *resenha crítica* de um conjunto de modelos pertencentes à abordagem dos ciclos endógenos cuja estratégia de modelagem, mais especificamente a prova de existência de um comportamento cíclico recorrente das variáveis de estado, é formalmente fundamentada no conceito de *ciclo limite* e no *teorema de Poincaré-Bendixson* (TPB). Estes modelos são: o modelo de Kaldor (1940) [versão Chang e Smyth (1971)], o modelo de Rose (1967), o modelo de Schinasi (1982), o modelo de Benassy (1984) e o modelo de Nikaido (1992). Nesta resenha busca-se apresentar pormenorizadamente os modelos acima citados e realizar uma *análise comparativa* destes. Dentre as conclusões gerais sobre *os modelos de ciclos endógenos fundamentados no conceito de ciclo limite e no TPB* as principais são: (i) Existe uma estrutura argumentativa comum, relativa à existência de um ciclo, ditada pelo TPB. Isto implica na existência de uma mesma "*sintaxe*", apesar de "*semânticas*" distintas; (ii) Existe um princípio dinâmico comum, a saber, próximo do estado estacionário as forças desestabilizadoras superam as estabilizadoras e o sistema econômico não converge para tal estado. Todavia, longe do estado estacionário a relação entre estas duas classes de forças se inverte e, conseqüentemente, a economia não "explode"; (iii) A referida inversão sempre ocorre devido a alguma *não-linearidade* postulada sobre o comportamento de uma variável macroeconômica, porém sem forte justificativa microeconômica (com exceção do modelo de Benassy); (iv) Fica claro a limitação da *técnica de linearização*, ou seja, torna-se patente o caráter local de seus resultados e demonstra-se que nem sempre vale o argumento de que modelos que apresentam *instabilidade local* não são relevantes na explicação da macrodinâmica das economias de mercado; (v) A maioria dos modelos resenhados não trata da questão da *estabilidade estrutural*, e os que o fazem tratam de forma pobre o assunto; (vi) O uso do conceito de ciclo limite e do TPB implica na possibilidade de se estudar um sistema com apenas duas variáveis de estado, o que dificulta a incorporação do lado monetário da economia.

ABSTRACT

Based on the principle that oscillatory movements in macroeconomic aggregates are kept, business Cycles models may be divided of two groups: the *exogenous cycle approach* and the *endogenous cycle approach*. Business Cycle models that belong to the first approach (*exogenous cycle models*) have as a common feature the fact that the maintenance of the cycles depends *on a specific combination of parameters values* from these models (established by equations and/or inequalities relating these parameters) and/or *exogenous impulses* (in other words, shocks not explained by the models). Business Cycle models that belong to the second approach (*endogenous cycle models*) are those that explain the persistence of cycles by the inner dynamics (modus operandi) of the model, namely, cycles are generated and kept endogenously, independently of parameters specific values and/or exogenous shocks. The aim of this work is to present a critical *survey* of a group of models that belong to the endogenous cycle approach and which modelling strategy, in more specific terms is to prove the existence of a cyclical behaviour caused by the state variables, is formally fundamentated in the concept of *limit cycle* and in the *Poincaré-Bendixson theorem* (PBT). These models are: the Kaldor model (1940) [Chang and Smyth (1971) version], the Rose model (1967), the Schinasi model (1982), the Benassy model (1984) and the Nikaido model (1992). The objective of this survey is to present in detail these models and to make a *comparative analysis* among them. The main general conclusions about *the endogenous cycle models based on the concept of the limit cycle and in the PBT* are: (i) There is a argumentative structure, related to the existence of a common cycle, dictated by the PBT. This implies the existence of the same “*sintaxis*”, in spite of distinct “*semantics*”; (ii) There is a common dynamic principle, namely, next to the steady state, the destabilizing forces surpass the stabilizing ones and the economic system doesn't converge to this state. Nevertheless, far from the steady state, a relationship between these two classes of forces are inverted and, consequently, the economy doesn't “explode”. This inversion always happens due to some *non-linearity* postulated at the macro level, but without a strong microeconomic reason (with the exception of the Benassy model); (iii) There is a clear limitation in the linearization technique, rendering evident the local character of the obtained results, and it's showed that it isn't always valid the argument that models which show *local instability* are not relevant ones in the explanation of the macrodynamics of market economies; (iv) Most of the models surveyed don't deal with the question of *structural stability*, and the models which do, do it in a very poor manner; (v) The use of the concept of limit cycle and the PBT imply the possibility of studying a system with only two state variables, which makes it more difficult to incorporate the monetary side of the economy.

1

INTRODUÇÃO

Este trabalho é uma *resenha crítica* de uma parte da literatura teórica que interpreta os *ciclos de negócios*¹ como uma característica intrínseca de uma economia de mercado, ou seja, que considera os ciclos como *endogenamente* gerados no sistema econômico e, portanto, não dependentes de *choques exógenos* a este. Antes de fornecer uma delimitação mais precisa do tema desta dissertação, cabem algumas considerações sobre o *fenômeno dos ciclos de negócios* e sobre o conjunto de teorias que tentam explicá-lo.

Este capítulo é composto de três seções. Na seção 1.1 são apresentados uma definição, uma cronologia e os principais fatos estilizados que definem os ciclos de negócios como um objeto próprio de estudo. Em seguida, na seção 1.2, é proporcionada uma visão panorâmica da teoria dos ciclos de negócios; nesta mesma seção buscar-se-á argumentar em favor da relevância da parte da teoria dos ciclos sobre a qual recairá o foco desta dissertação. Finalmente, na seção 1.3, é estabelecido precisamente o tema do presente trabalho, bem como os objetivos e o método que será utilizado para alcançá-los, além de um esboço do restante da dissertação.

1.1. O Fenômeno dos Ciclos de Negócios

Um trabalho sobre teorias dos ciclos de negócios deve iniciar com uma definição precisa do que se entende por “ciclos de negócios”. Gordon (1986, p. 2), num livro que registra os resultados de uma conferência sobre ciclos de negócios promovida pelo NBER² na década de 80, afirma que: *a melhor definição de ciclos de negócios é ainda a de Burns e Mitchell* [Tradução do autor], a qual segue³:

¹ Nos Estados Unidos este fenômeno é denominado *Business Cycles* e na Europa é alternativamente chamado de *Trade Cycles*.

² Robert J. Gordon é um dos pesquisadores associados do *National Bureau of Economic Research (NBER)*.

³ Gordon (1986, p. 736) também coloca que a citada definição é ainda usada como definição de trabalho pelo NBER na construção de cronologias dos ciclos de negócios. Wesley Clair Mitchell (1874-1948) e Arthur Frank Burns (1904-1987) foram economistas de destaque nos EUA não só na área acadêmica mas também na área de política econômica. Com respeito às suas contribuições para o estudo dos ciclos de negócios Boland (1987, p. 300) comenta: *A colaboração de Burns com Wesley Mitchell no estudo dos ciclos de*

Ciclos de negócios são um tipo de flutuação encontrada na atividade agregada das nações que organizam seu trabalho principalmente em empresas privadas: um ciclo consiste em expansões que ocorrem aproximadamente ao mesmo tempo em muitas atividades econômicas, seguidas por similares recessões, contrações e reviravoltas gerais, as quais fundem-se com a fase de expansão do próximo ciclo; esta seqüência de mudanças é recorrente mas não-periódica; a duração dos ciclos de negócios varia de mais do que um ano a dez ou vinte anos; eles não são divisíveis em ciclos mais curtos de caráter similar com suas amplitudes aproximadas. (Burns e Mitchell apud Gordon, 1986, p. 3)
 [Tradução do autor]

Os ciclos de negócios são flutuações relativamente *simultâneas* num *número suficiente* de atividades econômicas capaz de criar flutuações sensíveis a nível agregado, ou seja, nas variáveis macroeconômicas como produto, emprego, nível de preços, etc. É esta relativa *sincronia e difusão* das flutuações nas atividades econômicas a principal característica dos ciclos de negócios. Somada a esta característica encontra-se a de *persistência* das flutuações, ou seja, a presença contínua de ciclos de negócios nas principais nações capitalistas, como por exemplo Estados Unidos e Grã-Bretanha, que apresentam flutuações cíclicas desde o século XVIII (Moore e Zarnowitz, 1986). Outra característica importante dos ciclos de negócios é que estes são oscilações *não-periódicas*, ou seja, a distância (em unidades de tempo) entre dois fundos ou picos consecutivos varia consideravelmente. Finalmente, deve-se ressaltar a forte *assimetria* entre as fases de contração e expansão dos ciclos, isto é, as fases de expansão têm durações distintas das fases de contração.

Esta definição e, portanto, as características marcantes dos ciclos de negócios que ela levanta, podem ser ilustradas com as cronologias dos ciclos de negócios e com uma ilustração do comportamento das principais séries temporais das variáveis macroeconômicas (índice de preços, produto e taxa de desemprego). A partir destas observações empíricas pode-se extrair regularidades duradouras observadas nas variáveis agregadas que caracterizam os ciclos de negócios, denominadas *fatos estilizados*, os quais são úteis na comparação entre modelos ou teorias. Nas duas subseções que seguem tratar-se-á destas questões.

negócios conduziu a muitas inovações na técnica de mensuração e numa vasta acumulação de conhecimento sobre as características dos ciclos e as interações econômicas que os geraram. [Tradução do autor]

1.1.1. Cronologia dos ciclos de negócios e o comportamento das principais variáveis macroeconômicas de países desenvolvidos

O NBER, baseado em várias estatísticas sobre as atividades econômicas em geral, vem construindo desde sua fundação em 1920 uma cronologia para os ciclos de negócios de várias nações capitalistas. Esta cronologia consiste fundamentalmente na identificação das datas em que ocorreram os picos e fundos dos ciclos de negócios, além da avaliação da difusão e amplitude destas flutuações.

Na Tabela 1.1 encontra-se a duração e cronologia dos ciclos de negócios dos Estados Unidos, Grã-Bretanha, Alemanha e França desde a segunda metade do século XIX até o período pré-Segunda Guerra Mundial⁴. De acordo com esta cronologia, durante o período em apreço os ciclos de negócios apresentaram uma duração média variando entre 4 e 5,5 anos. Estes ciclos podem grosseiramente ser identificados como *Ciclos de Juglar*⁵. De fato os ciclos de negócios são recorrentes, todavia não são periódicos. Como pode ser diretamente percebido na Tabela 1.2, os ciclos de negócios são realmente assimétricos, ou seja, a duração da fase de expansão em média supera a duração da fase de contração.⁶

Entre os especialistas é consenso o fato de que a segunda Guerra Mundial representa um ponto de mudança nas características do ciclos de negócios. As principais mutações dos ciclos de negócios podem ser diretamente observadas na cronologia dos ciclos dos Estados Unidos pós-Segunda Guerra Mundial, a qual está exposta na Tabela 1.3.

⁴ Detalhes metodológicos sobre a construção destas cronologias são encontrados em Moore e Zarnowitz (1986).

⁵ No desenvolvimento da teoria dos ciclos de negócios levantou-se hipóteses sobre a existência de vários padrões cíclicos. Schumpeter (1939, *apud* Gabisch e Lorenz, 1989, p. 8) levantou a possibilidade de existência de quatro padrões cíclicos, a saber: (i) *Ciclos de Kondratieff*: também denominados ciclos de ondas longas. Com duração aproximada entre 40 e 60 anos. As inovações tecnológicas são levantadas como a principal força dirigente desta espécie de ciclo. As observações empíricas destas oscilações são escassas, o que é um empecilho na prova de existência ou não destas flutuações; (ii) *Ciclos de Kuznets*: Com duração média entre 15 a 25 anos. As principais forças governantes deste ciclo são: as atividades de construção civil, as atividades de facilidades de transporte, o crescimento populacional, o crescimento da força de trabalho, o desenvolvimento urbano, etc.; (iii) *Ciclos de Juglar*: Considerados os ciclos "principais". Duração entre 7 e 10 anos, após a Segunda Guerra Mundial a duração média caiu para entre 5 a 7 anos. Este ciclo parece estar relacionado com o ciclo de vida dos bens de investimento que acaba gerando flutuações da produção, taxa de juros e taxa de inflação; (iv) *Ciclos de Kitchin*: Duração entre 2 e 4 anos, ligados principalmente a flutuações no investimento em estoques e perturbações estocásticas.

⁶ Houve no período em questão um grau considerável de sincronização dos ciclos entre as nações, principalmente entre os países Europeus. Para detalhes sobre a sincronia internacional dos ciclos de negócios ver Zarnowitz (1985) e Zarnowitz e Moore (1986).

Tabela 1.1. Duração e Cronologia dos Ciclos de Negócios nos Estados Unidos, Grã-Bretanha, França e Alemanha / NBER / 1855-1938

Estados Unidos										Grã-Bretanha									
Datas de Picos e Fundos		Duração em Meses				Datas de Picos e Fundos				Duração em Meses									
Fundo (F)	Pico (P)	Contração	Expansão	Ciclo Completo	Fundo (F)	Pico (P)	Contração	Expansão	Ciclo Completo	Fundo (F)	Pico (P)	Contração	Expansão	Ciclo Completo	Fundo (F)	Pico (P)	Contração	Expansão	Ciclo Completo
		F a F	F a P	P a P			F a F	F a P	P a P			F a F	F a P	P a P			F a F	F a P	P a P
1855	1856	-	30	-	1855	1857	-	33	-	1855	1857	-	33	-	1855	1857	-	33	-
1858	1860	18	22	48	1858	1860	6	30	36	1858	1860	6	30	36	1858	1860	6	30	36
1861	1864	8	46	30	1862	1866	27	39	54	1862	1866	27	39	54	1862	1866	27	39	54
1867	1869	32	18	78	1868	1873	24	54	78	1868	1873	24	54	78	1868	1873	24	54	78
1870	1873	18	34	36	1879	1883	81	36	52	1879	1883	81	36	52	1879	1883	81	36	52
1878	1882	65	36	99	1886	1890	42	99	101	1886	1890	42	99	101	1886	1890	42	99	101
1885	1887	38	22	74	1889	1900	53	74	60	1889	1900	53	74	60	1889	1900	53	74	60
1888	1890	13	27	35	1901	1903	15	35	40	1901	1903	15	35	40	1901	1903	15	35	40
1891	1892	10	20	37	1904	1907	17	37	30	1904	1907	17	37	30	1904	1907	17	37	30
1894	1895	17	18	37	1908	1913	17	18	35	1908	1913	17	18	35	1908	1913	17	18	35
1896	1899	18	24	36	1914	1917	21	24	42	1914	1917	21	24	42	1914	1917	21	24	42
1900	1903	18	21	42	1919	1920	6	21	39	1919	1920	6	21	39	1919	1920	6	21	39
1904	1907	23	33	44	1921	1924	15	33	56	1921	1924	15	33	56	1921	1924	15	33	56
1908	1910	13	19	43	1926	1927	20	19	32	1926	1927	20	19	32	1926	1927	20	19	32
1911	1913	24	12	43	1928	1929	18	12	32	1928	1929	18	12	32	1928	1929	18	12	32
1914	1918	23	44	35	1932	1937	37	44	67	1932	1937	37	44	67	1932	1937	37	44	67
1919	1920	7	10	51	1938	-	12	10	17	1938	-	12	10	17	1938	-	12	10	17
1921	1923	18	22	28	-	-	-	22	40	-	-	-	22	40	-	-	-	22	40
1924	1926	14	27	36	-	-	-	27	41	-	-	-	27	41	-	-	-	27	41
1927	1929	13	21	40	-	-	-	21	34	-	-	-	21	34	-	-	-	21	34
1932	1937	43	50	64	-	-	-	50	93	-	-	-	50	93	-	-	-	50	93
1938	-	13	-	63	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Duração Média	-	21	26	48	-	-	26	26	48	-	-	26	26	48	-	-	26	26	48
Desvio Padrão	-	14	11	18	-	-	19	18	20	-	-	19	18	20	-	-	19	18	20
França										Alemanha									
Datas de Picos e Fundos		Duração em Meses				Datas de Picos e Fundos		Duração em Meses											
Fundo (F)	Pico (P)	Contração	Expansão	Ciclo Completo	Fundo (F)	Pico (P)	Contração	Expansão	Ciclo Completo	Fundo (F)	Pico (P)	Contração	Expansão	Ciclo Completo	Fundo (F)	Pico (P)	Contração	Expansão	Ciclo Completo
		F a F	F a P	P a P			F a F	F a P	P a P			F a F	F a P	P a P			F a F	F a P	P a P
1865	1866	-	23	-	1878	1882	-	35	-	1878	1882	-	35	-	1878	1882	-	35	-
1868	1869	11	22	33	1886	1890	55	22	33	1886	1890	55	22	33	1886	1890	55	22	33
1871	1873	18	19	37	1894	1900	61	19	37	1894	1900	61	19	37	1894	1900	61	19	37
1876	1878	35	20	55	1902	1903	24	20	55	1902	1903	24	20	55	1902	1903	24	20	55
1879	1882	17	27	37	1904	1907	18	27	44	1904	1907	18	27	44	1904	1907	18	27	44
1887	1890	68	41	95	1908	1913	17	41	109	1908	1913	17	41	109	1908	1913	17	41	109
1894	1900	48	62	89	1914	1917	16	62	110	1914	1917	16	62	110	1914	1917	16	62	110
1902	1903	30	8	92	1919	1922	12	8	38	1919	1922	12	8	38	1919	1922	12	8	38
1904	1907	17	33	25	1923	1925	18	33	50	1923	1925	18	33	50	1923	1925	18	33	50
1908	1913	19	52	52	1926	1929	12	52	71	1926	1929	12	52	71	1926	1929	12	52	71
1914	1917	14	46	66	1932	-	40	46	60	1932	-	40	46	60	1932	-	40	46	60
1918	1920	10	17	56	-	-	-	17	27	-	-	-	17	27	-	-	-	17	27
1921	1924	10	39	27	-	-	-	39	49	-	-	-	39	49	-	-	-	39	49
1925	1926	8	16	47	-	-	-	16	24	-	-	-	16	24	-	-	-	16	24
1927	1930	8	33	24	-	-	-	33	41	-	-	-	33	41	-	-	-	33	41
1932	1933	28	12	61	-	-	-	12	40	-	-	-	12	40	-	-	-	12	40
1935	1937	21	26	33	-	-	-	26	47	-	-	-	26	47	-	-	-	26	47
1938	-	14	-	40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Duração Média	-	22	29	51	-	-	27	29	52	-	-	27	29	52	-	-	27	29	52
Desvio Padrão	-	16	15	23	-	-	18	15	25	-	-	18	15	25	-	-	18	15	25

Fonte: Moore e Zarnowitz (1986, p. 750). (Tabela adaptada pelo autor).

Tabela 1.2. Características dos Ciclos de Negócios nos Estados Unidos, Grã-Bretanha, França e Alemanha entre 1878 e 1932

Características	Países			
	Estados Unidos	Grã-Bretanha	França	Alemanha
Número de ciclos (F a F)	17	13	14	10
Duração média dos ciclos (F a F)	48 (4,0)	65 (5,4)	53 (4,4)	63 (5,2)
Duração média das expansões (E)	25 (2,1)	37 (3,0)	32 (2,6)	37 (3,1)
Duração média das contrações (C)	22 (1,8)	27 (2,3)	22 (1,9)	27 (2,3)
Razão E/C	1,2	1,3	1,4	1,4

Fonte: Moore e Zarnowitz (1986, p. 750). (Tabela adaptada pelo autor).

Nota: Os valores entre parênteses estão expressos em anos e os demais em meses.

Tabela 1.3. Durações e Cronologias dos Ciclos de Negócios nos Estados Unidos / 1932-1982

Datas de Picos e Fundos		Duração em Meses			
Fundo (F)	Pico (P)	Contração (P a F)	Expansão (F a P)	Ciclo Completo	
				F a F	P a P
1932	1937	-	50	-	-
1938	1944	13	80G	63	93
1946	1948	08G	37	88	45
1949	1953	11	45G	48	56
1954	1957	10G	39	55	49
1958	1960	8	24	47	32
1961	1969	10	106G	34	116
1970	1973	11G	36	117	47
1975	1979	16	58	52	74
1980	1981	6	12	64	18
1982		16		28	
Duração Média	-	11	49	60	59
Desvio Padrão	-	03	27	26	31

Fonte: Moore e Zarnowitz (1986, p. 765). (Tabela adaptada pelo autor).

Nota: A letra "G" indica uma expansão em tempo de guerra e a contração posterior.

A principal mudança é encontrada na proporção entre a duração da expansão e da contração. Os ciclos de negócios passaram em média a apresentar fases de contração mais curtas e fases de expansão mais longas. Além disso, as fases de contração tornaram-se mais uniformes em termos de duração. Isto pode ser percebido comparando o desvio padrão das fases de contração dos ciclos de negócios norte-americanos na Tabela 1.1 com o respectivo desvio padrão na Tabela 1.3. Por sua vez, as expansões tornaram-se mais dispersas, haja visto que o desvio padrão destas mais que dobrou de valor (ver Tabelas 1.1 e 1.3). Dessa forma, as contrações tornaram-se mais previsíveis e as expansões menos. Outro ponto a ser destacado é que a duração média dos ciclos de negócios norte-americanos aumentou, passando de 4 para 5 anos. Em compensação estes tornaram-se menos uniformes em termos de duração, isto é, seu desvio padrão aumentou.

Estas mudanças a partir da segunda Guerra Mundial podem ser sentidas principalmente no comportamento das variáveis macroeconômicas tradicionais, como: produção, nível de emprego e nível de preços. Os Estados Unidos são um exemplo típico. Moore e Zarnowitz (1986, p. 539) constataram a queda na "severidade" das recessões no

período pós-Segunda Guerra. Estes autores procuraram medir a severidade das contrações do ciclo de negócios norte-americano entre 1920 e 1982 através de medidas da duração, profundidade e difusão das recessões via dados de produção, emprego e desemprego. A Tabela 1.4 mostra os dados e resultados obtidos pelos referidos autores. A coluna (1) é obviamente uma medida de duração das recessões. As colunas (2) a (6) são medidas relacionadas a profundidade ou amplitude das recessões. Finalmente, a coluna (7) refere-se ao grau de difusão das recessões.

Tabela 1.4. Medidas Selecionadas de Duração, Profundidade, e Difusão das Contrações do Ciclo de Negócios Nos Estados Unidos / 1920-1982

Datas Mensais dos Ciclos de Negócios: Pico - Fundo	Duração (meses) (1)	Declínio Percentual			Taxa de Desemprego		Difusão do Emprego (% de indústrias declinando) (7)	Ranking de Severidade (8)
		PIB Real (2)	Produção Industrial (3)	Emprego não-Agrícola (4)	Aumento (5)	Máximo (6)		
1/1920-7/1921	18	-8,7	-32,4	-10,5	+10,3	11,9	97	13
5/1923-7/1924	14	-4,1	-17,9	-2,2	+2,6	5,5	94	10
10/1926-11/1927	13	-2,0	-7,0	-0,4	+2,4	4,4	71	3
8/1929-3/1933	43	-32,6	-53,4	-31,6	+21,7	24,9	100	14
5/1937-6/1938	13	-18,2	-32,4	-10,8	+9,0	20,0	97	12
2/1945-10/1945	8	n.a.	-38,3	-10,1	+3,4	4,3	n.a.	6
11/1948-10/1949	11	-1,5	-10,1	-5,2	+4,5	7,9	90	8
7/1953-5/1954	10	-3,2	-9,4	-3,5	+3,6	6,1	87	5
8/1957-4/1958	8	-3,3	-13,5	-4,3	+3,8	7,5	88	7
4/1960-2/1961	10	-1,2	-8,6	-2,2	+2,1	7,1	80	3
12/1969-11/1970	11	-1,0	-6,8	-1,5	+2,7	6,1	80	3
11/1973-3/1975	16	-4,9	-15,3	-2,9	+4,4	9,0	88	11
1/1980-7/1980	6	-2,5	-8,6	-1,4	+2,1	7,8	77	1
7/1981-11/1982	16	-3,0	-12,3	-3,1	+3,6	10,8	81	9
Médias								
Três principais depressões	25	-19,8	-39,4	-17,6	+13,7	18,9	98	12-14
Seis recessões severas	12	-3,3	-13,1	-3,5	+3,8	7,8	88	5-11
Quatro recessões brandas	10	-1,7	-7,8	-1,7	+2,3	6,4	77	1-3
Quatorze contrações	14	-6,6	-19,0	-6,4	+5,4	9,5	87	1-14

Fonte: Moore e Zarnowitz (1986, p. 544). (Tabela adaptada pelo autor).

Com respeito aos resultados contidos na Tabela 1.4 Moore e Zarnowitz (1986, p. 542) comentam:

Uma importante advertência deve ser registrada neste ponto, a saber, que não há uma forma de construir uma medida única realmente satisfatória de severidade das recessões. Movimentos cíclicos são complexos e diferenciados em termos de duração, difusão e profundidade. [Tradução do autor]

Entretanto, estes autores concluem que:

O uso de "ranks" médios é um grosseiro procedimento de aproximação, o qual é mais agravado pelas lacunas nos dados. Contudo, os resultados parecem estar corretos visto que eles concordam com muito da ampla evidência dos estudos históricos e estatísticos. Nós experimentamos outros dados sem encontrar quaisquer boas razões para alterar nossas conclusões. (Moore e Zarnowitz, 1986, p. 542) [Tradução do autor]

Com relação ao movimento tendencial dos índices de preços ao consumidor e no atacado nos Estados Unidos, a Tabela 1.5 mostra que entre 1789 e 1932 tais índices apresentaram alternadamente tendências ascendentes e descendentes. Além disso, neste mesmo período (veja colunas (6) a (9)) houve uma relativa compensação entre os aumentos e decréscimos consecutivos destes índices de preços. Todavia, a partir de 1932 esta compensação desapareceu, ou seja, os aumentos nos índices de preços em questão foram consideravelmente maiores do que nos períodos anteriores de tendência ascendentes (veja colunas (4) a (9) da Tabela 1.5).

Tabela 1.5. Tendências de Longo Prazo e Mudanças Cíclicas Médias nos Preços nos Estados Unidos / 1789-1982

Tendência do índice de preços no atacado			Valores do primeiro e último anos (base: 1967=100)		Taxa média de variação (%/ano) no período		Taxa de variação acumulada no período (%)		Taxa média de variação (%/ano) na fase do ciclo	
Direção (1)	Datas (2)	Nº de Anos (3)	IPA (4)	IPC (5)	IPA (6)	IPC (7)	IPA (8)	IPC (9)	Expansões (10)	Contrações (11)
Ascendente	1789-1814	25	30-64	30-63	3,1	3,0	113,3	110,0	-	-
Descendente	1814-1843	29	64-26	63-28	-3,1	-2,8	-59,4	-55,6	-	-
Ascendente	1843-1864	21	26-68	28-47	4,7	2,5	161,5	67,9	-	-
Descendente	1864-1896	32	68-24	47-25	-3,2	-2,0	-64,7	-46,8	0,4	-2,3
Ascendente	1896-1920	24	24-80	25-60	5,1	3,7	233,3	140,0	9,7	-1,6
Descendente	1920-1932	12	80-34	60-41	-6,9	-3,1	-57,5	-31,7	2,1	-13,7
Ascendente	1932-1982	50	34-299	41-289	4,4	4,0	779,4	604,9	6,5	1,8
Total/Média	-	193	-	-	1,2	1,2	896,7	863,3	-	-

Fonte: Moore e Zarnowitz (1986, p. 527). (Tabela adaptada pelo autor).

Nota: CPI=índice de preços ao consumidor e IPA=índices de preço no atacado. As colunas (10) e (11) foram calculadas com base na cronologia mensal do NBER. Para maiores detalhes consulte a Tabela original.

Com respeito ao comportamento no curto prazo dos índices de preços pode-se afirmar que estes apresentaram movimentos pró-cíclicos. Como destacam Moore e Zarnowitz (1986, p. 526) [vide colunas (10) e (11) da Tabela 1.5], antes de 1932 os índices de preços aumentaram durante a maioria das fases de expansão do ciclo e diminuíram durante as fases de contração deste. Além disso, os aumentos nestes índices de preços foram em média superiores (em valor absoluto) aos decréscimos durante as fases de tendência ascendente e a situação inversa ocorreu nas fases de tendência descendente. Porém, após 1949 os preços continuaram a crescer mesmo quando a economia encontrava-se numa fase recessiva.

Burns e Mitchell (*apud* Moore e Zarnowitz, 1986, p. 526) encontraram uma conexão entre oscilações nos preços e o comprimento relativo das fases de expansão e contração dos ciclos. Tal conclusão foi baseada nos dados reproduzidos na Tabela 1.6. Como se pode observar, durante as fases ascendentes do índice de preços no atacado a

duração média das expansões nos quatro países em apreço são maiores que as durações médias das contrações. Exatamente o oposto ocorre durante as fases descendentes do índice de preços por atacado nestes países.

Outro ponto que merece destaque é que a frequência relativa das expansões durante as fases de tendência ascendente dos preços tem sido maior que a frequência das contrações nos períodos de tendência descendente. Moore e Zarnowitz (1986, p. 530) destacam que no caso dos Estados Unidos, apesar das guerras tenderem a empurrar para cima os níveis dos preços, as asserções anteriores não são invalidadas quando se excluem estes efeitos, conforme mostra os dados entre parênteses da Tabela 1.6.

Tabela 1.6. Tendências dos Preços no atacado e Duração Relativa das Expansões e Contrações dos Ciclos de Negócios nos Estados Unidos, Grã-Bretanha, França e Alemanha / 1790-1982

País	Tendência nos Preços (direção e datas)	Expansões dos Ciclos (E)			Contrações dos Ciclos (C)			Razões (E)/(C)	
		Número (1)	Duração em Meses		Número (4)	Duração em Meses		Média (7)	Total (8)
			Média (2)	Total (3)		Média (5)	Total (6)		
Estados Unidos	Ascendente								
	1789-1814	5	42	210	4	22	90	1,9	2,3
	1843-1864	6 (5)	32 (30)	194 (148)	5	15	74	2,1 (2,0)	2,6 (2,0)
	1896-1920	7 (6)	23 (20)	163 (119)	6	18	108	1,3 (1,1)	1,5 (1,1)
	1932-1982	10 (7)	49 (37)	487 (256)	10	11	109	4,5 (3,4)	4,5 (2,3)
	Total / Média	28 (23)	36 (32)	1.054 (733)	25	16	381	2,2 (2,0)	2,8 (1,9)
	Descendente								
	1814-1843	6	27	162	7	27	186	1,0	0,9
	1864-1896	7	25	175	8	26	211	1,0	0,8
	1920-1932	3	23	70	4	22		1,0	0,8
Total / Média	16	25	407	19	25	485	1,0	0,8	
Grã-Bretanha	Ascendente								
	1854-1873, 1896-1920	10	38	381	8	17	133	2,2	2,9
Grã-Bretanha	Descendente								
	1873-1896, 1920-1933	5	30	152	7	38	266	0,8	0,6
França	Ascendente								
	1865-1873, 1896-1926	11	31	337	9	15	137	2,1	2,5
França	Descendente								
	1873-1896, 1926-1935	4	30	121	6	34	204	0,9	0,6
Alemanha	Ascendente								
	1895-1923	6	40	240	6	18	105	2,2	2,3
Alemanha	Descendente								
	1923-1933	4	32	129	4	42	168	0,8	0,8

Fonte: Moore e Zarnowitz (1986, p. 528). (Tabela adaptada pelo autor).

Nota: Entradas entre parênteses excluem expansões em tempo de guerra (Guerra Civil, I e II Guerras Mundiais, Guerra da Coréia e Guerra do Vietnã).

Resumindo o que foi tratado até aqui nesta subseção⁷, pode-se dizer que os ciclos de negócios conforme identificados pelo NBER podem ser grosseiramente identificados como ciclo de Juglar. Tais ciclos são de fato recorrentes, não-periódicos e assimétricos. A partir da Segunda Guerra Mundial os ciclos de negócios sofrem alterações em suas características, sendo as principais: o aumento na razão entre a duração das expansões e a duração das contrações, as fases de contração tornaram-se mais uniformes e as fases de expansão mais dispersas, a severidade das recessões tornara-se menor e os preços continuaram a subir mesmo em fases de recessão.

1.1.2. Fatos estilizados

Para que uma comparação entre modelos teóricos de ciclos de negócios, característica central deste trabalho, seja frutífera, é importante o uso de *fatos estilizados* relacionados ao fenômeno em análise. Segundo Boland (1987, p. 535) o conceito de "*fatos estilizados*" é atribuído usualmente a Nicholas Kaldor, o qual introduziu e aplicou o referido conceito num artigo sobre acumulação de capital e crescimento econômico (Kaldor, 1958). Pode-se definir fatos estilizados, relativos a um determinado fenômeno econômico, como uma visão "*estilizada*" dos fatos (Kaldor, 1958, p. 178), ou seja, uma lista de fatos que expressa as tendências gerais e ignora os detalhes individuais (peculiaridades estatísticas) do fenômeno econômico em apreço.

A tese de Kaldor relativa ao uso dos fatos estilizados pode ser posta resumidamente como segue. Segundo este autor há o consenso entre os economistas ... *de que o requisito básico de qualquer modelo é que este deveria ser capaz de explicar os traços característicos do processo econômico como os encontramos na realidade* (Kaldor, 1958, p. 177). Sendo assim, ... *o teórico, na escolha de uma abordagem teórica particular, deve iniciar com um sumário de fatos os quais ele considera relevantes para seu problema* (Kaldor, 1958, p. 178) [Tradução do autor].

Para Kaldor, como bem salienta Boland (1987, p. 536), esta explicitação dos traços característicos do fenômeno econômico em foco por parte dos construtores de modelos ou

⁷ Maiores detalhes podem ser obtidos nos trabalhos que foram utilizados como base para esta subseção. A apresentação da cronologia do NBER e a breve descrição estatística do comportamento das principais variáveis macroeconômicas dos Estados Unidos e de sua conexão com os ciclos de negócios não têm obviamente a pretensão de ser uma exposição exaustiva sobre o assunto. O objetivo foi ilustrar a definição de Burns e Mitchell citada anteriormente.

daqueles que realizam exercícios de comparação entre modelos ou teorias teria duas conseqüências imediatas. A primeira seria a exclusão de debates improdutivos centrados em detalhes relativos a peculiaridades históricas. Estes debates são improdutivos devido à imprecisão inerente às estatísticas econômicas, as quais, nas palavras do próprio Kaldor (1958, p. 178): ... *estão sempre sujeitas a arestas [snags] e qualificações, e por esta razão são incapazes de ser acuradamente sintetizadas* [Tradução do autor]. A segunda, seria a construção de uma base de comparação (conjunto de fatos estilizados), a qual permitiria a realização de uma avaliação comparativa clara e precisa. Logo, o objetivo do uso de fatos estilizados é possibilitar a exposição clara das vantagens comparativas de cada modelo em análise em termos de poder de explicação relativo às amplas regularidades empíricas duradouras que são independentes de qualquer peculiaridade histórica e, simultaneamente, afastar debates baseados em detalhes individuais, os quais se tornariam improdutivos.

Entretanto, quando ocorre o contraste entre duas ou mais avaliações comparativas de um dado grupo de teorias ou modelos endereçados a um dado fenômeno econômico pode surgir um problema, a saber, o de inexistência de um consenso sobre quais fatos estilizados devem ser considerados como relevantes⁸. Esta crítica pode ser rebatida argumentando-se que, mesmo que não haja tal consenso, a proposta kaldoriana implica na explicitação a priori, por parte dos interlocutores do debate, do que eles consideram como *traços característicos* do fenômeno sobre o qual o grupo de teorias ou modelos que estão sendo comparados tratam. Isto obviamente deixaria bem claro o ponto de vista de cada debatedor.

Outra crítica que é feita à proposta de Kaldor é que os fatos estilizados podem ser utilizados na construção das suposições de modelos de forma *ad hoc*, ou seja, para evitarem óbvias refutações empíricas (Boland, 1987, 537). Esta crítica só tem efeito se o uso dos fatos estilizados se der fora do contexto especificado por Kaldor, isto é, se os fatos estilizados forem usados para outra coisa que não seja construir uma base para comparação de modelos ou teorias.

No presente trabalho tem-se uma situação típica para aplicar o método kaldoriano, ou seja, o do uso dos fatos estilizados para comparação de modelos⁹. Segue uma listagem

⁸ Esta crítica, segundo Boland (1987), foi colocada por Solow.

⁹ O esclarecimento enfático acima, anterior à listagem dos fatos estilizados dos ciclos de negócios, é justificado pelo seguinte comentário de Boland (1987, p. 536) relativo ao uso contemporâneo do conceito de fato estilizado:

de algumas regularidades empíricas duradouras observadas nas variáveis agregadas que caracterizam os ciclos de negócios, ou seja, alguns *atos estilizados dos ciclos de negócios*. Com base no conjunto de fatos estilizados sobre os ciclos de negócios formado pelas listas contidas nos trabalhos de Dore (1993, p. 19), Gabisch e Lorenz (1989, p. 10), Lucas (1981, p. 217) e Zarnowitz (1985, p. 525), pode-se destacar os seguintes:

- 1º. Os ciclos são recorrentes;
- 2º. Os ciclos não são periódicos, ou seja, não existe um ciclo com período constante;
- 3º. Os ciclos são assimétricos, ou seja, a duração das fases de expansão superam em média a duração das fases de contração;
- 4º. A taxa de inflação é pró-cíclica e entre esta e a taxa de desemprego há uma relação inversa; tais características acompanham o crescimento cíclico do produto;
- 5º. Há um movimento relativamente paralelo da inflação de preços e da inflação de salários, com a última liderando a primeira, exceto em períodos de elevada inflação;
- 6º. A taxa de crescimento do produto em termos reais apresenta uma tendência de longo prazo positiva;
- 7º. A produtividade do trabalho (produto por hora) flutua procíclicamente em torno de uma tendência ascendente;
- 8º. Os lucros possuem uma natureza pró-cíclica e apresentam flutuações com amplitudes maiores do que as demais variáveis macroeconômicas. Além disso, os lucros por unidade de vendas declinam antes das vendas se contraírem;
- 9º. As taxas de crescimento dos agregados monetários são pró-cíclicas; todavia, tais agregados não decrescem em termos absolutos nas contrações, mas apenas reduzem sua velocidade de expansão. A velocidade-renda da moeda é também pró-cíclica;
- 10º. As taxas de juros de curto prazo são pró-cíclicas e geralmente apresentam flutuações com amplitudes muito superiores às apresentadas pelas taxas de juros de longo prazo,

...Os economistas hoje que alegam explicar "atos estilizados" usualmente não estão plenamente conscientes de que Kaldor usou o termo somente no contexto de uma comparação teórica. Hoje a maioria dos construtores de modelos neoclássicos que alegam estar explicando somente atos estilizados fazem somente como uma conveniente simplificação do processo de construção do modelo. Se estes construtores de modelos pensam que estão seguindo os ensinamentos de Kaldor eles estão claramente equivocados. Para estarem seguindo o sentido de atos estilizados de Kaldor eles teriam que mostrar que seus modelos escolhidos têm uma vantagem comparativa sobre outros modelos possíveis que podem ser usados para explicar os atos estilizados. O objetivo do uso dos atos estilizados é tanto enfatizar as vantagens comparativas do modelo escolhido como evitar argumentos improdutivos em conflito. [Tradução do autor]

as quais apresentam também pouca conformidade com relação às flutuações na atividade econômica geral;

- 11°. O investimento agregado do setor privado apresenta flutuações mais intensas do que o consumo agregado. Tanto o investimento em capital fixo como em estoques são pró-cíclicos. O investimento em estoques desempenha um papel mais importante nos ciclos mais curtos e suaves, enquanto o investimento em capital fixo possui maior peso em ciclos mais longos e vigorosos;
- 12°. Os Salários reais são (ambiguamente) pró-cíclicos;
- 13°. O crédito ao consumidor apresenta um comportamento pró-cíclico;
- 14°. O nível de preços industrial geralmente apresenta flutuações mais amplas do que o nível geral de preços;
- 15°. A produção, o nível de emprego e o investimento no setor de bens duráveis apresentam flutuações com maiores amplitudes do que as respectivas flutuações no setor de bens não duráveis;
- 16°. Existe uma sincronização dos ciclos de negócios entre as economias capitalistas desenvolvidas.

Devido à longa controvérsia sobre o comportamento dos salários reais durante os ciclos não será considerado o 12° fato estilizado¹⁰. Além disso, dado que os modelos que serão resenhados neste trabalho são modelos altamente agregados (*modelos de ciclos de negócios a um setor de economias fechadas*), os quatro últimos fatos estilizados (referentes ao crédito ao consumidor, aos comportamentos em termos setoriais do nível de preços, da produção, do emprego e do investimento e a sincronização dos ciclos a nível internacional) não foram levados em consideração por tais modelos, pois não era pretensão destes últimos explicá-los. Dessa forma, a avaliação comparativa dos modelos que serão aqui resenhados se utilizará dos *onze* primeiros fatos estilizados anteriormente listados.

1.2. Panorama da Teoria dos Ciclos de Negócios

A intensidade do interesse pelo tema “Ciclos de Negócios” está tão sujeita a flutuações quanto as atividades econômicas das nações. Como bem salienta Zarnowitz (1985, p. 524): *o interesse nos ciclos de negócios é em si sujeito a movimentos ondulares.*

crecendo durante e após períodos de turbulência e depressão, diminuindo em períodos de substancial estabilidade e crescimento contínuo [Tradução do autor].

O exemplo mais ilustrativo de morte e renascimento do interesse na teoria dos ciclos de negócios é encontrado no período entre o pós-Segunda Guerra e a década de 70. Durante os anos 50 e a primeira metade dos anos 60, havia uma forte crença no poder das políticas monetária e fiscal para atenuar ou até extinguir as flutuações nas economias ocidentais desenvolvidas. Citando Gabisch e Lorenz (1989, p. 1): *Dos anos 50 até a metade da década de 60 a teoria dos ciclos de negócios tinha sido freqüentemente considerada ou como um apêndice da teoria do crescimento ou como um exercício acadêmico em dinâmica econômica* [Tradução do autor]. Todavia, a partir da segunda metade dos anos 60 e com a forte crise da década de 70 esta crença na eficiência das políticas de demanda anti-cíclicas de inspiração Keynesiana desmantelou-se. Assim, na década de 80, impulsionados inicialmente pelo programa de pesquisa dos hoje chamados *Novos Clássicos* iniciado na década de 70, os ciclos de negócios tornaram-se um tema de destaque da macroeconomia teórica e aplicada. Enfim, como afirma Gordon (1986, p. 2): *Parece-nos que estamos experimentando justamente o mais recente “ciclo do interesse nos ciclos”, com fundos nos anos 20 e 60 e picos nos anos 30-40 e 80* [Tradução do autor].

Adiante é fornecido uma divisão da teoria dos ciclos, uma discussão sobre suas relevâncias relativas, bem como um breve relato sobre a história da modelagem dinâmica determinísta não-linear dos ciclos de negócios.

1.2.1. A persistência dos ciclos: choques exógenos *versus* mecanismos endógenos

As teorias dos ciclos de negócios podem ser classificadas de várias maneiras. Todavia, há uma forma de classificação muito comum baseada no princípio pelo qual o movimento oscilatório dos agregados macroeconômicos é mantido. Deste ponto de vista a teoria dos ciclos de negócios pode ser dividida em duas grandes áreas, a saber: a *abordagem dos ciclos exógenos* e a *abordagem dos ciclos endógenos*.

Os modelos de ciclos de negócios que pertencem à abordagem dos ciclos exógenos tem como característica comum o fato de que a manutenção dos ciclos depende de *uma combinação específica dos valores dos parâmetros* destes modelos (estabelecida por

¹⁰ Uma abrangente resenha sobre o assunto é encontrada em Brandolini (1995).

equações e/ou inequações envolvendo tais parâmetros) e/ou de *impulsos exógenos* a estes (ou seja, de choques não explicados dentro dos modelos). Tais modelos são normalmente chamados *modelos de ciclos de negócios dependentes de choques* ou mais sucintamente *modelos de ciclos exógenos*. O estudo pioneiro neste grupo foi o de Frisch (1933). Este autor propôs uma solução para o problema de não ajustamento entre as predições dos modelos de ciclos, os quais eram sistemas dinâmicos lineares determinísticos, e as evidências. Frisch acrescentou a um sistema dinâmico linear determinístico com uma combinação específica de valores dos parâmetros do modelo, com a qual este sistema apresentava oscilações amortecidas (esta parte Frisch interpretou como um “*mecanismo de propagação*”), um outro mecanismo denominado “*mecanismo de impulso*”, o qual nada mais era do que choques aleatórios não explicados pelo modelo, responsáveis pelo persistente estado de oscilação das variáveis macroeconômicas do modelo.

Os modelos de ciclos de negócios que fazem parte da abordagem dos ciclos endógenos são aqueles que explicam a persistência dos ciclos pela dinâmica interna (*modus operandis*) do modelo, ou seja, os ciclos são gerados e mantidos endogenamente, independentemente de valores específicos dos parâmetros e/ou de choques exógenos. Tais modelos são normalmente denominados *modelos de ciclos independentes de choques* ou mais sinteticamente *modelos de ciclos endógenos*¹¹.

Desde os anos 50 até a década de 70 os modelos macroeconômicos pareciam fornecer fortíssimas evidências contra a abordagem dos ciclos endógenos. Este consenso entre os econométricos estudiosos dos ciclos de negócios é bem espelhado pelos comentários de Hymans (*apud* Blatt, 1978, p. 293) contidos no relatório de uma conferência realizada em 1972 sobre “*Econometrics Models of Cyclical Behavior*”:

[ou] (i) os modelos contêm erros de especificação extremos. Uma especificação um pouco mais correta poderia produzir ciclos mesmo com variáveis exógenas bem comportadas; ou (ii) o ciclo de negócios não é endógeno, mas é exatamente resultante da reação de um sistema normalmente estável, ou amortecido, com relação as influências externas. Sou de opinião que o tempo tem admitido que o peso da evidência razoável está do lado desta última [hipótese (ii)]. Simplesmente não existe qualquer evidência clara que suporte a visão de que o ciclo de negócios resulta da interação endógena dos gastos de consumo e investimento como eles são **normalmente** determinados numa economia de mercado industrializada livre de choques externos (...). E que, de

¹¹ Excetuando o caso de um *centro* num sistema dinâmico linear, oscilações auto-sustentáveis somente aparecem em modelos dinâmicos não-lineares. Dessa forma, os modelos de ciclos de negócios independentes de choques são em sua ampla maioria modelos dinâmicos não-lineares.

fato, retornamos a Schumpeter. Talvez isto não seja um lugar tão ruim depois de tudo. [Tradução do autor]

Em suma, havia um consenso geral em torno da hipótese de que o comportamento agregado das economias capitalistas industrializadas poderia ser interpretado como similar ao de sistemas dinâmicos estáveis sujeitos a choques estocásticos, ou seja, idealizadas como *Modelos do Tipo Frisch*¹². Na próxima subseção apresenta-se um contra-argumento construído por Blatt (1978 e 1983) com relação à "forte" evidência em favor dos modelos de ciclos exógenos.

1.2.2. Contra o método de corroboração da abordagem dos ciclos exógenos: o argumento *Reductio ad Absurdum* de Blatt

Blatt (1978 e 1983) demonstrou de forma brilhante a fraqueza dos resultados obtidos a partir da análise dos dados observados das economias capitalistas desenvolvidas, os quais pareciam "irremediavelmente" corroborar os modelos do tipo Frisch em detrimento das especulações sobre a existência de instabilidade local, ciclos limites, etc¹³. A estratégia utilizada por Blatt foi engenhosa. Ele não contestou qualquer fator ligado aos dados econômicos, mas sim ao método de análise utilizado pelos econométricos. Blatt demonstrou que a conclusão a favor da existência de um comportamento assintótico estável por parte das economias capitalistas industrializadas, caso estas não estivessem sujeitas a distúrbios estocásticos, poderia ser consequência do método de análise utilizado e não necessariamente implicada pelos fatos observados.

Esta referida demonstração da debilidade da análise econométrica dos ciclos de negócios pode ser resumida como segue. Os dados para a análise econométrica foram gerados a partir do seguinte modelo do tipo Hicks simplificado, o qual do ponto de vista

¹² Blatt (1983, p. 228) enquadra nesta categoria os modelos de ciclos que apresentam as seguintes propriedades: (i) as trajetórias de equilíbrio, na ausência de choques aleatórios, devem ser localmente estáveis; (ii) inexistência de trajetórias periódicas (ciclos) recorrentes na ausência de choques; (iii) os choques estocásticos devem ser suficientemente pequenos para que os desvios com relação à trajetória de equilíbrio possam ser estudados por uma aproximação linear em torno do equilíbrio; (iv) a distribuição estatística dos choques aleatórios deve ser tal que a probabilidade de uma série de choques $\{u(1), u(2), \dots, u(T)\}$ aparecer é a mesma que a do aparecimento da série reversa $\{-u(1), -u(2), \dots, -u(T)\}$ e (v) uma série econômica $\{y(1), y(2), \dots, y(T)\}$, onde $y(i)$ é o desvio com relação a uma curva tendência para todo $i=1, 2, \dots, T$, e sua série reversa $\{-y(1), -y(2), \dots, -y(T)\}$ devem apresentar os mesmos pontos de reviravolta (turning points), ou seja, os picos da primeira série deveriam ser os fundos da segunda e vice-versa.

¹³ Tais conceitos ligados à teoria dos sistemas dinâmicos serão definidos no próximo capítulo.

matemático é um sistema dinâmico discreto não-linear, e do ponto de vista da teoria do ciclos pode ser classificado como um modelo (não-linear) de ciclos endógeno¹⁴:

$$\begin{aligned} C_t &= \bar{C} + cY_{t-1} \\ I_t &= \max\{I_f, \bar{I} + \kappa[Y_{t-1} - Y_{t-2}]\}, \\ Y_t &= \min\{Y_c, C_t + I_t\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde: C_t é o consumo agregado no tempo t ; \bar{C} é o consumo agregado autônomo; c é a propensão marginal a consumir (constante e exogenamente determinada); I_t é o investimento agregado no tempo t ; \bar{I} é o investimento agregado autônomo; I_f é o "nível piso" ("floor level") para o investimento; κ é o coeficiente de aceleração (constante e exogenamente determinado); Y_t é a renda-produto agregado no tempo t e Y_c é o "nível teto" ("ceiling level") para a renda.

Assumindo-se o seguinte conjunto de parâmetros e condições iniciais: $\bar{C} = 25$, $c=0,75$, $I_f = -10$, $\bar{I} = 0$, $\kappa=1,5$, $Y_c = 120$, $Y(0)=101$ e $Y(1)=101$, o modelo (1.1) gera as séries temporais apresentadas na Tabela 1.7. Em $t=19$ o modelo atinge um "ciclo limite", ou seja, a partir deste instante do tempo o modelo passa a repetir uma seqüência de onze valores (apresenta um período de 11 unidades de tempo).

Agora as séries temporais da Tabela 1.7 podem ser vistas como "dados", ou seja, como valores observados de uma "economia" gerados por um processo dinâmico desconhecido previamente. O objetivo central da análise econométrica passa a ser o de avaliar a natureza da estabilidade deste processo dinâmico, ou seja, de testar se esta economia é estável ou instável na ausência de choques estocásticos.

¹⁴ As bases teóricas do chamado "Modelo do Tipo Hicks" foram lançadas em Hicks (1950). A versão simplificada acima é devida a Rau (*apud* Blatt, 1978, p. 294). Esta versão é na realidade um modelo de ciclo do tipo multiplicador-acelerador em tempo discreto, vide Samuelson (1939), que incorpora, com a introdução de um "nível piso" na função investimento e um "nível teto" na equação da renda, a observação de Hicks de que as oscilações dos agregados macroeconômicos não podem tornar-se infinitamente grandes. Durante as fases de contração dos ciclos o investimento líquido tem um limite inferior negativo ditado pela taxa de depreciação do estoque de capital. Enquanto que nas fases de expansão o produto não pode ser expandido *ad infinitum*, pois o estoque de recursos (capital, terra, força de trabalho, matérias primas, etc) é finito. Em suma, a dinâmica do modelo do tipo Hicks é dirigida pela evolução da demanda agregada planejada ($C+I$), a qual não cai indefinidamente devido ao fato de que o investimento possui um "piso", nem aumenta indefinidamente porque a oferta agregada potencial é limitada.

Tabela 1.7. Simulação de um Modelo do Tipo Hicks

Tempo	Renda	Consumo	Investimento	Tempo	Renda	Consumo	Investimento
0	101,00	-	-	16	120,00	115,00	5,06
1	101,00	-	-	17	115,00	115,00	0,00
2	100,75	100,75	0,00	18	103,75	111,25	-7,50
3	100,19	100,56	-0,38	19	92,81	102,81	-10,00
4	99,30	100,14	-0,84	20	78,46	94,61	-10,00
5	98,14	99,47	-1,34	21	74,61	88,46	-10,00
6	96,86	98,60	-1,74	22	74,61	83,84	-9,23
7	95,74	97,65	-1,91	23	75,20	80,96	-5,76
8	95,11	96,80	-1,69	24	82,27	81,40	0,87
9	95,40	96,33	-0,94	25	97,31	86,70	10,61
10	96,98	96,55	0,43	26	120,00	97,99	22,57
11	100,10	97,73	2,37	27	120,00	115,00	34,03
12	104,76	100,08	4,69	28	115,00	115,00	0,00
13	110,57	103,57	6,99	29	103,75	111,25	-7,50
14	116,63	107,92	8,70	30	92,81	102,81	-10,00
15	120,00	112,47	9,09	31	84,61	94,61	-10,00

Fonte: Blatt (1983, p. 192)

Para realizar este teste é padrão postular um modelo AR(2) com a renda como variável endógena, isto é:

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma Y_{t-2} + u_t \quad (1.2)$$

onde u é um termo estocástico com distribuição normal, média zero, variância constante e $\text{cov}[u(i), u(j)] = 0$ para todo $i \neq j$ com $i, j = 1, 2, \dots, T$. Este modelo econométrico pode ser visto como um modelo do tipo Frisch simplificado¹⁵:

$$\begin{aligned} C_t &= \bar{C} + cY_{t-1} \\ I_t &= \bar{I} + \kappa[Y_{t-1} - Y_{t-2}] + u_t, \\ Y_t &= C_t + I_t \end{aligned} \quad (1.3)$$

pois o modelo (1.3) pode ser reduzido a uma equação estocástica a diferenças finitas linear na variável renda, bastando para isso substituir as equações de consumo e investimento na equação de equilíbrio do mercado de bens, o que dá como resultado:

$$Y_t = (\bar{C} + \bar{I}) + (c + \kappa)Y_{t-1} - \kappa Y_{t-2} + u_t \quad (1.4)$$

Esta equação é similar ao modelo econométrico (1.2) identificando $\alpha = \bar{C} + \bar{I}$, $\beta = c + \kappa$ e $\gamma = -\kappa$. Portanto, os parâmetros do modelo (1.1) podem ser obtidos pela

¹⁵ O modelo (1.2) pode também ser diretamente comparado com a versão linearizada do modelo tipo Hicks simplificado (1.1), a qual resulta da introdução de $C(t)$ e $I(t)$ na equação da renda desconsiderando-se I_f e Y_C .

estimativa do modelo econométrico (1.2). A estimativa destes parâmetros é obtida através da aplicação do método dos mínimos quadrados aos “dados” da Tabela 1.7. Os resultados destes ajustamentos encontram-se resumidos na Tabela 1.8.

Tabela 1.8. Estimativas dos Parâmetros do Modelo (1.2)

Observações (T)	Coeficientes Ajustados			Valores Estimados		R^2	DW-h
	α	β_1	γ	$\kappa-\gamma$	$c=\beta-\kappa$		
30	28,5	1,600	-0,887	0,887	0,713	0,92	0,56
40	29,9	1,561	-0,866	0,866	0,695	0,91	0,96
50	30,4	1,543	-0,855	0,855	0,688	0,91	1,23
60	31,4	1,531	-0,855	0,855	0,676	0,90	0,80
70	31,0	1,578	-0,897	0,897	0,681	0,91	1,21

Fonte: Blatt (1983, p. 226). (Adaptada pelo autor).

Notas: Os cálculos para $T=60$ e $T=70$ não estão na tabela original. Estes foram incluídos aqui para demonstrar os resultados do ajuste em cima de amostras contendo mais de três ciclos completos, como foi feito em Blatt (1978).

Todas as estimativas dos parâmetros são estatisticamente significantes em todos os níveis de significância padrões. Os valores da estatística Durbin-h são todas maiores que o valor crítico que é 1,65 e, portanto, a hipótese de correlação serial é rejeitada a um nível de significância de 5%. As estimativas da propensão marginal a consumir e do total de gastos autônomos ($\bar{C} + \bar{I}$) são satisfatórias quando comparadas com seus verdadeiros valores. Logo, se a economia encontra-se no estado estacionário, suas propriedades são bem estimadas pelo modelo econométrico. Todavia, as estimativas do parâmetro crucial para o comportamento dinâmico do modelo, ou seja, do coeficiente de aceleração, são crucialmente diferentes do verdadeiro valor. Pelas estimativas o coeficiente de aceleração é menor que um, ou seja, a economia é *globalmente assintoticamente estável* na ausência de choques externos. Contudo, o verdadeiro valor do coeficiente de aceleração é maior que um ($\kappa=1,5$), ou seja, a “verdadeira economia” é *localmente instável*.

Resumindo, a análise econométrica demonstra que os “dados” da Tabela 1.7 são satisfatoriamente explicados por um modelo dinâmico linear com choques aleatórios e que há evidências estatisticamente significantes da existência de estabilidade na ausência destes choques aleatórios. Entretanto, a “verdadeira economia” é um sistema dinâmico determinístico não-linear e *localmente instável*. A partir deste *reductio ad absurdum* Blatt (1978, p. 300) conclui:

Os resultados obtidos aqui têm importantes conseqüências para as teorias dos ciclos de negócios: A evidência empírica contra as teorias do tipo Hicks

[abordagem dos ciclos endógenos] *poderia ser um resultado, não dos dados empíricos, mas dos métodos usados para analisar estes dados. Isto não é em qualquer sentido uma evidência positiva em favor da teoria de Hicks, ou de qualquer outro modelo não-linear; mas nosso trabalho desacredita a evidência negativa correntemente citada contra tais teorias ...* [Tradução do autor]

Blatt (1983, p. 227) vai mais longe e propõe um novo método de análise econométrica, observando que os modelos do tipo Frisch têm a propriedade de que as expansões e contrações são em média completamente simétricas, enquanto as teorias não-lineares endógenas predizem ciclos assimétricos. O comportamento das economias capitalistas desenvolvidas, conforme demonstrado na subsecção 1.1.1, apresenta uma falta evidente de simetria entre expansões e contrações, o que tem como implicação a refutação dos modelos do tipo Frisch¹⁶.

Apesar destes resultados obtidos por Blatt, a visão de que os ciclos de negócios são resultado da junção de dois mecanismos (propagação+impulso) continuou em evidência durante a primeira metade da década de oitenta. Isto pode ser confirmado a partir dos comentários de Gordon (1986, p. 5) na sua avaliação do método dominante da coletânea de artigos da conferência citada no início desta seção: *A distinção entre mecanismos de impulso e propagação, introduzida na análise econômica por Ragnar Frisch (1933) e Eugen Slutsky (1927), é aceita como estrutura analítica pelos autores neste volume ...* [Tradução do autor].

A *teoria dos ciclos reais*, o atual *mainstream* na área, continua explicando a manutenção do ciclo através de choques exógenos, mais precisamente através de choques exógenos de produtividade. Stadler (1994, p. 1752) em sua resenha sobre modelos de ciclos de negócios reais resume este ponto:

A teoria dos Ciclos de Negócios Reais [RBC] considera as flutuações estocásticas na produtividade dos fatores como a fonte predominante de flutuações na atividade econômica. Estas teorias seguem a abordagem de Ragnar Frisch (1933) e Eugen Slutsky (1937), a qual claramente distingue o mecanismo de impulso, que inicialmente faz com que uma variável desvie de

¹⁶ Os trabalhos de Blatt que acabam de ser apresentados não são representativos do estado de arte dos estudos econométricos atuais, estes foram escolhidos por sua simplicidade e clareza. Entretanto, como lembra Semmler (1994, 3-4), numa coletânea dedicada em parte à apresentação dos avanços da econometria contemporânea aplicada à detecção de mecanismos geradores de séries não-lineares, Blatt (1978), entre outros, salientou precocemente a impossibilidade de detecção dos mecanismos geradores de ciclos por intermédio de aproximações lineares. Além disso, a idéia do estudo da assimetria dos ciclos, salientada em Blatt (1983), tem sido usada contemporaneamente (Semmler, 1994, p. 4). Um outro *survey* sobre evidência empírica sobre não-linearidades dos ciclos de negócios pode ser encontrada em Mullineux e Peng (1993).

seu valor no estado estacionário, e o mecanismo de propagação, o qual faz com que desvios do estado estacionário persistam por algum tempo. Choques de produtividade são o único mecanismo de impulso que estes modelos originalmente incorporam. Outros mecanismos de impulso, tais como mudanças nas preferências, ou impostos, ou política monetária, têm sido geralmente considerados pelos teóricos do RBC como tendo no melhor dos casos menor influência sobre o ciclo de negócios [Tradução do autor].

A visão de que a economia é estável quando não sofre distúrbios externos que vem estampada nestes modelos é muito popular entre os economistas. A presente dissertação, ao resenhar um grupo de modelos ligados à abordagem dos ciclos endógenos, visa a contribuir para a divulgação de uma abordagem alternativa relativamente negligenciada, apesar da fragilidade da evidência empírica em favor da abordagem dominante.

1.2.3. Periodização da modelagem dinâmica determinista não-linear dos Ciclos de Negócios

Para melhor entender a posição dentro da literatura teórica dos ciclos de negócios do conjunto de modelos que serão adiante resenhados é útil lembrar a história da *modelagem dinâmica determinista não-linear* do ciclos de negócios, ou seja, a formalização baseada na *teoria dos sistemas dinâmicos determinísticos não-lineares*. Segundo Owase (1991, p. 1393) a história da modelagem dinâmica determinista não-linear das flutuações macroeconômicas nas economias capitalistas desenvolvidas pode ser dividida em quatro grandes períodos. Esta divisão é fundamentalmente baseada na estrutura formal dos modelos de ciclos de negócios e nas respectivas características da análise matemática¹⁷.

1ª Fase: A década de 30 e 40 constitui a primeira fase da modelagem dinâmica dos ciclos de negócios. Durante este período, a maioria dos modelos de ciclos de negócios eram sistemas dinâmicos lineares. Dessa forma, devido à linearidade, as previsões sobre o comportamento assintótico da economia só podiam ser de três tipos, ou seja, uma economia poderia apresentar: (i) um comportamento instável, isto é, flutuações macroeconômicas cuja amplitude cresceria incessantemente (oscilações explosivas); (ii) um comportamento estável, ou seja, flutuações macroeconômicas

¹⁷ Esta subseção está baseada no artigo de Owase acima citado.

cuja a amplitude decresceria incessantemente (oscilações amortecidas); ou (iii) um comportamento estável peculiar, isto é, flutuações macroeconômicas de amplitude constante. A primeira espécie de comportamento assintótico obviamente é rejeitada pelas evidências empíricas, ou seja, nunca foi observada a “explosão” de uma economia. O segundo tipo de comportamento assintótico prediz que a economia caminha para um estado estacionário, apresentando oscilações com amplitudes cada vez menores. Entretanto, como já comentado na seção 1.2, os ciclos de negócios são flutuações *persistentes*. Portanto, esta predição parece pouco relevante. A terceira possibilidade também é rejeitada pelos fatos estilizados, já que as flutuações macroeconômicas observadas são *não-simétricas*¹⁸. No final da década de 40, Kaldor (1940) tenta pela primeira vez estudar os efeitos da não-linearidade num sistema econômico. Com base numa argumentação geométrica, Kaldor buscou demonstrar a existência de flutuações auto-sustentáveis a partir de um comportamento não-linear por parte do investimento agregado e de sua interação com o mecanismo do multiplicador-acelerador keynesiano. Este modelo foi objeto posteriormente de intenso estudo dentro da teoria dos ciclos de negócios.

2ª Fase: A década de 50 pode ser vista como uma segunda fase no desenvolvimento da modelagem dinâmica dos ciclos de negócios. Nesta década, a explicação para a manutenção das flutuações cíclicas, ao invés de se utilizar de choques aleatórios em modelos dinâmicos lineares, passou a utilizar-se de não-linearidades. Os pioneiros, além de Kaldor, foram Goodwin (1951) e Yasui (1952). Tais modelos eram sistemas dinâmicos não-lineares *localmente instáveis* e a prova da existência de ciclos recaía sobre o método gráfico de Liénard.

3ª Fase: Na décadas de 60 e 70 deu-se continuidade na busca de explicações deterministas não-lineares para a existência e persistência das flutuações macroeconômicas. Contudo, isto se deu de forma mais precisa, ou seja, as demonstrações geométricas foram substituídas por demonstrações baseadas na emergente teoria qualitativa das equações diferenciais não-lineares. A técnica de demonstração

¹⁸ Neste período já existia em paralelo a estratégia de modelagem "mecanismo de propagação+mecanismo de impulso" da abordagem de ciclos exógena, que propõe uma solução para o problema de ajustamento das

predominante foi a redução de sistema dinâmicos econômicos a sistemas dinâmicos bidimensionais e a aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson (TPB) na demonstração de existência de órbitas fechadas no plano de fase. Além disso, uma interpretação do tipo predador-presa dos ciclos de negócios foi apresentada (Goodwin, 1967), bem como aplicações do Teorema da Bifurcação de Hopf na demonstração da existência de ciclos em sistemas econômicos dinâmicos contínuos de mais altas dimensões (Torre, 1977 *apud* Owase, 1991, p. 1395).

4ª Fase: A partir da década de 80 as tentativas de estudo dos ciclos adotando uma abordagem endógena passam a utilizar-se da noção de caos determinístico para explicar o comportamento errático das séries temporais macroeconômicas. Passa-se a dar ênfase à dinâmica caótica. Estes estudos se concentraram fundamentalmente em sistemas dinâmicos discretos uni e bidimensionais¹⁹.

1.3. Metas, Questões Metodológicas e Roteiro do Trabalho

A partir da divisão da teoria dos ciclos de negócios entre abordagem endógena e exógena e da periodização da história da modelagem dinâmica determinista não-linear dos ciclos de negócios, torna-se inteligível afirmar que a presente dissertação configura-se como uma "resenha crítica" de um grupo de modelos da abordagem dos ciclos endógenos que foram construídos com base na estratégia de modelagem dinâmica dos ciclos de negócios predominante nos anos 60 e 70. Mais precisamente, os modelos que serão aqui resenhados têm a prova de existência de um comportamento cíclico recorrente das variáveis de estado fundamentada no conceito de ciclo limite e no TPB, sendo eles: o modelo de Kaldor (1940) [versão Chang e Smyth (1971)], o modelo de Rose (1967), o modelo de Schinasi (1982), o modelo de Benassy (1984) e o modelo de Nikaido (1992).

Cabe ainda uma explicação mais precisa do termo "resenha crítica", utilizado no início deste capítulo e desta seção. Tal termo no presente contexto significa uma apresentação pormenorizada dos modelos citados anteriormente e um esforço de comparação destes. A análise comparativa destes modelos será feita com base no método

predições dos modelos dinâmicos determinísticos lineares.

¹⁹ Um bom *survey* sobre o estado da dinâmica econômica não-linear na primeira metade da década de 80 é encontrado em Grandmont e Malgrange (1986).

Kaldoriano exposto na subseção 1.1.2, o qual preocupa-se em primeiro plano com o "quanto se explica". Todavia, esta análise comparativa englobará o "como se explica", ou seja, o contraste dos modelos com base em certas *características econômicas* (mecanismo gerador de ciclos²⁰, conexão entre ciclo e crescimento e a existência ou não do problema da demanda efetiva). Obviamente esta avaliação comparativa não pretende ser conclusiva no sentido de apontar "o melhor modelo". O objetivo, por meio do método de comparação traçado anteriormente, é somente evidenciar os méritos relativos de cada modelo.

Um subproduto deste exercício de resenha será uma ilustração da relevância das estruturas não-lineares em macrodinâmica, com a demonstração da ampliação do poder de explicar a dinâmica de uma economia quando se incorpora num modelo estruturas não-lineares. Além disso, esta resenha colocará em evidência algumas armadilhas a que estão expostos os economistas ao realizarem inferências com base em modelos formados por estruturas puramente lineares.

O presente trabalho é fundamentalmente inspirado e guiado pelas resenhas feitas por autoridades no assunto, sendo elas: Gabisch e Lorenz (1989), Dore (1993), Blatt (1983) e Zarnowitz (1985). Todavia, estes trabalhos não foram dedicados exclusivamente à abordagem dos ciclos endógenos e, portanto, dado as restrições de espaço, suas apresentações dos modelos citados anteriormente são por assim dizer mais "compactas" quando comparadas com as realizadas nesta dissertação. Dessa forma, o presente trabalho procura fornecer em língua portuguesa uma resenha/revisão de uma parte relevante da literatura ligada à abordagem dos ciclos endógenos tão profunda e ampla quanto as existentes em língua inglesa. Isto significa um esforço mais efetivo de utilização do método kaldoriano, ou seja, uma comparação mais explícita entre as predições dos modelos e o conjunto de fatos estilizados. Adicionalmente, procura-se detalhar as cadeias de deduções (ou como se diz popularmente e informalmente "*abrir os modelos*"), com o objetivo de facilitar a leitura dos leitores menos treinados em matemática.

Esta dissertação organiza-se como segue. No próximo capítulo é realizada uma digressão sobre ciclos limites, o TPB, defasagens distribuídas e mecanismos de ajustamento de erros associados. Este capítulo objetiva dar um caráter "*autônomo*" ao presente trabalho, ou seja, fornecer uma base técnica suficiente para leitura dos capítulos restantes. Neste mesmo capítulo procura-se clarificar a distinção entre modelos de ciclos exógenos e modelos de ciclos endógenos através da apresentação de um modelo simples

²⁰ O conjunto de forças econômicas que geram o ciclo e a forma como estas interagem.

mas representativo de cada abordagem, a saber: o modelo de ciclo dependente de choques de Phillips (1954) e modelo de ciclo independente de choques de Vogt (1969 *apud* Gabisch e Lorenz, 1989). No terceiro capítulo dá-se início à resenha propriamente dita, a qual começa com a apresentação do modelo de Kaldor (1940). Tal modelo, a partir da década de 70, passa a ser objeto de vários refinamentos formais. Neste capítulo será apresentada a primeira versão formalizada, a qual se tornou a expressão formal *standard* do modelo de Kaldor. No quarto, quinto e sexto capítulos apresenta-se três modelos extremamente distintos do ponto de vista da teoria econômica, mas similares do ponto de vista de suas estruturas formais, os modelos de Rose (1967), Schinasi (1982) e Benassy (1984). Com isso pretende-se demonstrar que o estabelecimento da existência de um comportamento cíclico recorrente e assimétrico das variáveis de estado nestes modelos de ciclos de negócios endógenos está atrelado a uma determinada estrutura formal, imposta pelo TPB. No sétimo capítulo resenha-se um modelo mais contemporâneo feito por Nikaido (1992), o qual focaliza a conexão entre crescimento e ciclo. No último capítulo, finaliza-se o trabalho com uma análise comparativa geral entre os modelos discutidos nos capítulos antecedentes.

2

CARACTERÍSTICAS DEFINIDORAS DOS MODELOS DE CICLOS ENDÓGENOS FUNDAMENTADOS NO CONCEITO DE CICLO LIMITE E NO TPB

Os modelos econômicos que serão apresentados e avaliados nos capítulos posteriores são genericamente classificados em termos matemáticos como *sistemas dinâmicos contínuos bidimensionais*. Dessa forma, para que o processo de dedução das predições e a importância relativa de cada suposição tornem-se mais claros e, conseqüentemente, a leitura mais proveitosa, apresenta-se alguns resultados relativos a *ciclos limites*²¹.

Neste capítulo pretende-se também mostrar de forma mais concreta a diferença entre os modelos de ciclos de negócio *dependentes* de choques e os modelos de ciclos de negócios *independentes* de choques. Para realizar tal tarefa, utiliza-se a estratégia de apresentação de um exemplo *simples*²², mas representativo, de cada grupo de modelo, a saber: o *Modelo de Phillips* (modelo de ciclos exógeno) e o *Modelo de Vogt* (modelo de ciclos endógeno). A escolha do modelo de Phillips (1954) deve-se ao fato de que este é a primeira versão contínua dos modelos do tipo multiplicador-acelerador, os quais se tornaram populares na literatura depois do trabalho de Samuelson (1939) e são uma classe representativa da abordagem dos ciclos exógenos²³. Já a escolha do modelo de Vogt (1969

²¹ Para os leitores versados em sistemas dinâmicos este capítulo servirá apenas como uma recapitulação e/ou como fonte imediata de consulta dos teoremas que serão utilizados no transcorrer deste trabalho. Já para os leitores não familiarizados com tal assunto, esta digressão pretende fornecer uma base suficiente para o acompanhamento sem problemas do restante desta dissertação.

²² O adjetivo "simples" tem o intuito de destacar que tais modelos são modelos dinâmicos *lineares*. Isto permitirá apresentar as distinções alardeadas no primeiro capítulo deste trabalho mesmo sem nenhuma informação a priori sobre dinâmica não-linear, a qual é usualmente necessária para estudar os modelos de ciclos endógenos que são em sua maioria modelos dinâmicos não-lineares. Em termos formais, os modelos que serão expostos neste capítulo apresentam como equação de movimento uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes, ou equivalentemente, são sistemas dinâmicos autônomos lineares de primeira ordem bidimensionais.

²³ A razão do uso de um modelo do tipo multiplicador-acelerador contínuo numa versão puramente determinista (não-estocástica) como ilustração da abordagem dos ciclos exógena, apesar de não demonstrar explicitamente o papel de impulsos aleatórios exógenos na manutenção do ciclo, reside na possibilidade de ilustrar claramente a necessidade de introdução destes choques para a existência de um ciclo recorrente. A resenha do Modelo de Phillips mostrará uma versão contínua de um típico mecanismo de propagação de um modelo do tipo Frisch, na qual só há um caso excepcional onde somente uma perturbação inicial é necessária para que o sistema apresente um ciclo recorrente. Além disso, com a apresentação deste modelo é possível tornar claro o papel de choques exógenos (mecanismo de impulso) sem a necessidade de se passar para um ambiente estocástico e, portanto, sem a necessidade de demandar do leitor qualquer conhecimento a priori

apud Gabisch e Lorenz, 1989) é justificada por ser esse um exemplo peculiar de modelo de ciclo independente de choques, peculiar no sentido de ser um sistema dinâmico linear e ser inspirado na abordagem neoclássica²⁴.

Este capítulo é composto de três seções. Na seção 2.1 são apresentados o conceito de *ciclo limite* e o *TPB*, o qual trata das condições de existência de ciclos limites em sistemas formados por duas equações diferenciais ordinárias (EDO's) autônomas. Nesta mesma seção trata-se do conceito de estabilidade estrutural e apresenta-se condições necessárias e suficientes para que sistemas de EDO's autônomas bidimensionais sejam estruturalmente estáveis. Na seção 2.2 faz-se uma rápida recapitulação sobre defasagens distribuídas e mecanismos de ajustamento de erros associados. Na seção 2.3 são apresentados o modelo de Phillips e o modelo de Vogt.

2.1. Digressão sobre Ciclos Limites em Sistemas Dinâmicos Contínuos Autônomos no Plano

Para definir um ciclo limite, enunciar o TPB e apresentar sua utilização na detecção ou avaliação das condições de existência de um ciclo limite em um dado sistema de EDO's autônomas bidimensional, é preciso uma breve revisão de alguns conceitos e resultados básicos sobre sistemas dinâmicos.

2.1.1. Noções preliminares

Para se estudar a evolução (mudanças de estado) de um *sistema econômico* no decorrer do tempo tem-se que escolher certas variáveis que sejam consideradas relevantes na caracterização do *estado* deste sistema, bem como componentes fundamentais do mecanismo que governa a evolução do sistema. Suponha que um sistema econômico seja satisfatoriamente descrito por duas variáveis, as quais são denominadas *variáveis de estado*, e que estas sejam mensuráveis, contínuas e assumam valores reais. Segue que o

sobre processos estocásticos para entender o cerne do argumento. Esta postura de classificar os modelos do tipo acelerador-multiplicador como pertencentes à abordagem de ciclos exógena foi adotada por Gabisch e Lorenz (1989).

²⁴ Na realidade, este foi o único exemplo de um modelo de ciclos endógeno linear encontrado na literatura pesquisada. Isto demonstra que mesmo não sendo o modelo de Vogt um exemplo único é pelo menos um exemplo raro. A possível causa desta raridade pode ser encontrada no fato de que todos os modelos de ciclos endógenos lineares tem um ponto de equilíbrio que é um *centro* e, portanto, são estruturalmente instáveis (vide Exemplo 2.5).

estado de um sistema econômico num determinado ponto do tempo pode ser descrito pelo seguinte *vetor de estado*²⁵:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O conjunto de todos os vetores de estado *factíveis* (ou seja, a coleção de todos os estados que o sistema pode assumir) é denominado *espaço de estados*, denotado por X . Dado que as variáveis de estado assumem somente valores reais, então $X \subset \mathfrak{R}^2$. Além disso, por razões técnicas, é suposto que X é aberto²⁶.

A evolução do sistema econômico é dada por uma *função de transição de estado* (ou *fluxo do sistema*) $\phi: X \times J \times \mathfrak{R}^p \rightarrow X$. Esta função especifica um vetor de estado para um dado tempo $t \in J \subset \mathfrak{R}$, uma dada *condição inicial* $x^0 \equiv (x_1^0, x_2^0) \equiv [x_1(t_0), x_2(t_0)] \in X$ e um dado *vetor de parâmetros*²⁷ $\alpha \in \mathfrak{R}^p$.

Com base nas definições prévias um *sistema dinâmico bidimensional* parametrizado em \mathfrak{R}^n pode ser definido como segue²⁸:

Definição 2.1: Um *sistema dinâmico bidimensional* parametrizado em \mathfrak{R}^n é um par (X, ϕ) .

Na maioria das aplicações a função de transição de estado não é conhecida. Na realidade, o que se tem disponível é um sistema de EDO's que definem implicitamente a função de transição de estado. No caso bidimensional um sistema de EDO's pode ser genericamente expresso como:

$$\begin{aligned} G_1(x_1, x_2; \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_1^{(m)}, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dots, x_2^{(n)}; t; \alpha) &= 0 \\ G_2(x_1, x_2; \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_1^{(m)}, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dots, x_2^{(n)}; t; \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

²⁵ No restante deste capítulo a introdução de conceitos e apresentação de teoremas serão feitas dentro do cenário dos sistemas dinâmicos bidimensionais. Isto traz a vantagem de tornar a exposição mais intuitiva e é suficiente para os objetivos desta dissertação.

²⁶ Como neste capítulo a exposição se restringirá ao espaço bidimensional, o termo *plano de fases* será sinônimo do termo geral *espaço de estados*.

²⁷ Este conjunto de parâmetros sintetiza as características estruturais (que permanecem fixas durante o período de análise) do sistema e/ou representa variáveis de política econômica.

²⁸ Definição baseada em Azariadis (1993, p. 6)

onde $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$, $\ddot{x}_i \equiv d^2x_i/dt^2$ e $x_i^{(j)} \equiv d^jx_i/dt^j$ com $i = 1, 2$ e $j = m, n$. O sistema dinâmico definido implicitamente por (2.2) é dito *não-autônomo*, pois o tempo entra como argumento separado nas EDO's. No caso contrário o sistema é denominado *autônomo*.

Em geral o sistema (2.2) pode ser posto na forma explícita:

$$\begin{aligned} x_1^{(m)} &= g_1(x_1, x_2; \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_1^{(m-1)}, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dots, x_2^{(n)}; t; \alpha) \\ x_2^{(n)} &= g_2(x_1, x_2; \dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dots, x_1^{(m)}, \dot{x}_2, \ddot{x}_2, \dots, x_2^{(n-1)}; t; \alpha) \end{aligned} \quad (2.3)$$

No presente trabalho o interesse recai sobre conceitos e teoremas ligados a um caso particular de (2.3), a saber, sobre os sistema de EDO's autônomas bidimensionais de primeira ordem²⁹, o qual pode ser escrito como³⁰:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2; \alpha) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2; \alpha) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \dot{x} = f(x; \alpha) \quad (2.4)$$

onde: $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ e $f(x; \alpha) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2; \alpha) \\ f_2(x_1, x_2; \alpha) \end{bmatrix}$.

Um *problema de valor inicial (PVI)* é formado quando se acrescenta a (2.4) uma condição inicial x^0 dada. Resolver um PVI associado a (2.4) significa achar uma função $\phi: J \rightarrow X$ que satisfaça (2.4) e a condição inicial x^0 , para um dado vetor de parâmetros α . Esta solução é denominada *solução definida* ou *trajetória* do sistema³¹; formalmente³²:

²⁹ Um sistema dinâmico é de primeira ordem se as EDO's que o formam são de primeira ordem, ou seja, em cada EDO a derivada de mais alta ordem é a derivada primeira. O estudo dos sistemas autônomos de primeira ordem não é tão restritivo quanto parece à primeira vista. Sistemas de EDO's não-autônomos podem ser reduzidos a um sistema de EDO's autônomo às custas da introdução de mais uma dimensão do sistema (para um exemplo consulte Fiedler-Ferrara e Prado, 1994, p. 15). Além disso, EDO's de ordem maior que um podem também ser reduzidas a um sistema de primeira ordem, como ilustrado nos exemplos contidos neste capítulo.

³⁰ O sistema (2.4) pode ser considerado um *campo vetorial* em \mathcal{R}^2 . Intuitivamente isto significa que a cada ponto (x_1, x_2) é associado um vetor $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ que fornece a direção e a velocidade com que o sistema passará do estado (x_1, x_2) para o próximo estado.

³¹ O termo *fluxo* geralmente se refere à família de soluções de um sistema dinâmico, ou seja, o conjunto de soluções definidas gerado por todas as condições iniciais factíveis. Em outras palavras, o domínio da função de transição de estado (fluxo) é o produto cartesiano $X \times J \times \mathcal{R}^p$, enquanto a solução definida é parametrizada por dados $t_0 \in J$, $x^0 \in X$ e $\alpha \in \mathcal{R}^p$ e seu domínio é X . Feita esta observação, não haverá problema na utilização da mesma notação $\phi(t, x^0, \alpha)$ tanto para fluxo como para solução definida, pois no primeiro caso x^0 e α podem ser interpretados como *argumentos* da função, e no segundo caso como *parâmetros*.

³² Definição baseada em Brauer e Nohel (1969, p. 10) e Hirsch e Smale (1974, p. 161)

Definição 2.2: A *solução definida* de (2.4) é uma função diferenciável $\phi: J \rightarrow X$ definida em algum intervalo $J \subset \mathfrak{R}$ tal que para todo $t \in J$, $t_0 \in J$ e $x^0 \in X$:

$$\dot{\phi}(t) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1(t) \\ \dot{\phi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2; \alpha) \\ f_2(x_1, x_2; \alpha) \end{bmatrix} \text{ e } \phi(t_0) \equiv \begin{bmatrix} \phi_1(t_0) \\ \phi_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}.$$

A existência e unicidade de uma solução definida de um PVI associado a (2.4) são garantidas supondo que $f \in C^1$, ou seja, que as funções f_1 e f_2 sejam contínuas e possuam derivadas de primeira ordem contínuas³³. Segue da propriedade de unicidade que, se uma solução definida de (2.4) passa num ponto qualquer $x^0 \in X$, nenhuma outra trajetória pertencente ao fluxo deste sistema pode passar neste ponto. Logo, se um ponto pertence a uma trajetória ele não pertence a qualquer outra trajetória do sistema e, conseqüentemente, as soluções definidas de um sistema nunca se cruzam³⁴.

Um *estado estacionário* ou *solução estacionária* de (2.4) é um estado caracterizado pela seguinte propriedade: se o sistema encontra-se num estado estacionário, então este fica perpetuamente neste estado caso não seja perturbado por forças exógenas. Um estado estacionário pode ser definido precisamente como segue³⁵:

Definição 2.3: (x_1^*, x_2^*) é um *ponto de equilíbrio* (*ponto fixo* ou *ponto estacionário*) do sistema (2.4) se $f_1(x_1^*, x_2^*) = f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$.

É de grande interesse na atividade de modelagem, tanto nas ciências naturais como em economia, conhecer a reação de um sistema quando este é deslocado de sua posição de equilíbrio. A idéia por trás é estudar o comportamento da trajetória de um sistema dinâmico ao longo do tempo após este ser perturbado, ou seja, quando este inicia em t_0 num estado $(x_1^0, x_2^0) \neq (x_1^*, x_2^*)$. Este tipo de estudo é chamado de *análise de estabilidade* (*no sentido de Lyapunov*) de um estado estacionário (ponto de equilíbrio) e é bem diferente da *análise de estabilidade estrutural* de um sistema de EDO's, pois na primeira se está mantendo inalterado o campo vetorial (EDO's), enquanto na segunda o campo vetorial é alterado.

³³ A prova detalhada desta asserção pode ser encontrada em Hirsch e Smale (1974, cap. 8).

³⁴ Vide Lema 1.1.8 e 1.1.9 em Wiggins (1988, p. 8-9).

³⁵ Esta definição é encontrada em Azariadis (1993, p. 11), Hale e Koçak (1991, p. 178) e Hirsch e Smale (1974, p. 180).

Um ponto de equilíbrio (x_1^*, x_2^*) é *estável* (*neutralmente estável* ou *estável-Lyapunov*) quando trajetórias que iniciam na sua vizinhança permanecem próximas a este. Quando as trajetórias não se mantêm próximas então o ponto (x_1^*, x_2^*) é *instável*. Quando as trajetórias não só permanecem próximas mas também tendem ao ponto de equilíbrio (x_1^*, x_2^*) este é classificado como *assintoticamente estável*. Os casos de estabilidade de Liapunov e estabilidade assintótica são ilustrados na Figura 2.1. Adiante segue as definições precisas destes conceitos³⁶:

Definição 2.4: (x_1^*, x_2^*) é um ponto de equilíbrio *estável* (*neutralmente estável*) do sistema (2.4) se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\|\phi(t_0, x^0, \alpha) - (x_1^0, x_2^0)\| < \delta$ implica que $\|\phi(t, x^0, \alpha) - (x_1^*, x_2^*)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definição 2.5: (x_1^*, x_2^*) é um ponto de equilíbrio *instável* do sistema (2.4) se não é estável.

Definição 2.6: (x_1^*, x_2^*) é um ponto de equilíbrio *assintoticamente estável* do sistema (2.4) se é estável e existe um $\delta > 0$ tal que $\|\phi(t_0, x^0, \alpha) - (x_1^0, x_2^0)\| < \delta$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x^0, \alpha) - (x_1^*, x_2^*)\| = 0$.

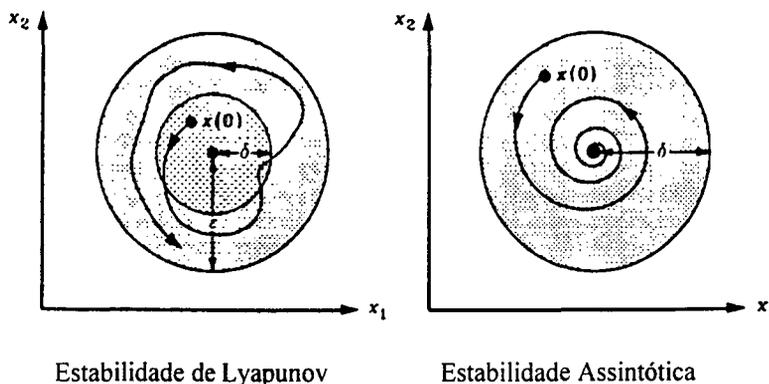


Figura 2.1. Estabilidade de um Ponto de Equilíbrio

Fonte: Lorenz (1993, p. 32)

O sistema (2.4) pode ser dividido em dois grandes grupos, a saber: os *sistemas dinâmicos lineares* e os *sistemas dinâmicos não-lineares*. O sistema (2.4) é classificado

³⁶ Nas definições que seguem $\| \cdot \|$ pode ser considerada a norma euclidiana sem perda de generalidade. Definições encontradas em Azariadis (1993, p. 12), Hale e Koçak (1991, p. 266) e Hirsch e Smale (1974, p. 185).

como linear se as funções f_1 e f_2 são lineares nas variáveis de estado x_1 e x_2 . Se esta condição não é satisfeita, o sistema é chamado de não-linear. Em matemática já existe uma teoria extensiva e elegante sobre os sistemas dinâmicos lineares. Infelizmente o mesmo não ocorre para os sistemas não-lineares. No entanto, no caso de sistemas dinâmicos não-lineares bidimensionais existem certos teoremas interessantes e com grande poder de aplicação na teoria dos ciclos de negócios. Para fixar os conceitos apresentados até aqui segue um exemplo clássico de sistema dinâmico da física, mais especificamente da mecânica clássica, o chamado *oscilador harmônico sem amortecimento*.

Exemplo 2.1: Na Figura 2.2 encontra-se a representação de um *sistema mola-massa*. Este consiste de um corpo apoiado em uma haste (fixada em duas paredes) e conectado a duas molas idênticas. No ponto $y=0$ o sistema encontra-se numa posição de equilíbrio, ou seja, as molas não estão esticadas nem comprimidas. Caso o corpo seja puxado (empurrado) para distante (próximo) de uma das paredes surge uma *força restauradora* gerada pelas molas, a qual tende a recolocar o corpo em sua posição de equilíbrio. Com relação ao SMM será suposto: (i) as molas tem massa desprezíveis (mola ideal), (ii) as molas satisfazem a *lei de Hooke* (mola linear); (iii) o corpo C será considerado um ponto material com massa constante m ; (iv) não existe atrito entre a haste e o corpo C; (v) as paredes são perfeitamente rígidas e o corpo C move-se em uma única direção (numa linha reta).

Dado as suposições acima o *estado* do SMM é completamente descrito pela distância y de onde se encontra o corpo C com relação à posição de equilíbrio ($y=0$). Dado (iii), com base na segunda lei de Newton pode-se escrever:

$$F = m\ddot{y}, \quad (\text{E.1.1})$$

onde F é a força resultante. Dadas as suposições (ii) e (iv) a força resultante é a força restauradora da mola, a qual é diretamente proporcional à distância que o corpo C é deslocado de sua posição de equilíbrio, ou seja:

$$F = -ky, \quad (\text{E.1.2})$$

onde k é uma constante real positiva. O sinal negativo significa que $y>0$ ($y<0$) as molas aplicarão uma força no sentido negativo (positivo) do movimento. Introduzindo-se (E.1.2) em (E.1.1) obtém-se a lei de movimento do SMM:

$$\ddot{y} + (k/m)y = 0 \quad (\text{E.1.3})$$

Esta EDO define um *oscilador harmônico sem amortecimento* (veja Apêndice 2.A). Defina $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$. Então a equação (E.1.3) é equivalente ao seguinte sistema de EDO's autônomo linear de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(k/m)x_1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k/m) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1.4})$$

Este sistema mais uma dada condição inicial $y(t_0) \equiv x_1(t_0)$ e $\dot{y}(t_0) \equiv x_2(t_0)$ definem um PVI e, conseqüentemente, a *equação de transição de estado* $\phi(t, x^0, \alpha)$ do SMM sem fricção, onde $\alpha = (k, m)$.

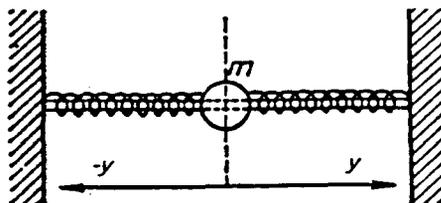


Figura 2.2. Sistema Mola-Massa Horizontal
Fonte: Andronov e Khaikin (1966, p. 1)

2.1.2. Sistemas dinâmicos contínuos autônomos lineares bidimensionais com coeficientes constantes

Um sistema de *EDO's autônomo linear homogêneo com coeficientes constantes* pode ser representado genericamente como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} são constante reais³⁷.

É bem conhecido que a forma geral das soluções de (2.5) são $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ e $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Tais soluções implicam que $\dot{x}_1(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t}$ e $\dot{x}_2(t) = \lambda c_2 e^{\lambda t}$. Logo, (2.5) pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \lambda e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (2.6)$$

Dividindo-se ambos os lados por $e^{\lambda t}$ e rearrumando os termos chega-se a:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Para que a solução de (2.7) seja não trivial ($c_1 = c_2 = 0$) a seguinte condição deve ser imposta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (2.8)$$

A matriz formada pelas constantes em (2.5) é denominada *matriz de coeficientes*, a qual pode ser denotada por A . Logo, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ e $\text{tr}A = a_{11} + a_{22}$. As raízes características (autovalores) de (2.8) são determinados pela fórmula:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\text{tr}A \pm \sqrt{(\text{tr}A)^2 - 4 \det A}}{2}, \quad (2.9)$$

a qual permite inferir que $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}A$.

Por (2.9) é possível afirmar que os autovalores podem ser: nulos ou não; diferentes ou iguais; números reais ou complexos conjugados. Em cada caso o comportamento

assintótico da trajetória de (2.5) se comportará de uma maneira específica³⁸. No Quadro 2.1 encontra-se um resumo dos casos possíveis e suas respectivas denominações. A Figura 2.3 apresenta os formatos possíveis do *diagrama de fases*³⁹ para um sistema dinâmico contínuo autônomo bidimensional com coeficientes constantes em função do determinante e do traço da matriz de coeficientes a partir das relações do Quadro 2.1.

Quando um dos autovalores da equação característica tem a parte real (denotada por Re) nula, tem-se um caso degenerado. Neste caso o ponto de equilíbrio é denominado *elíptico* e em caso contrário *hiperbólico*. A definição precisa destes conceitos e sua conexão com a linearização de um sistema de EDO's não-linear será feita nas subseções 2.1.3 e 2.1.4 (vide exemplo 2.6 nesta última).

Quadro 2.1. Classificação dos Pontos de Equilíbrio de Sistemas de EDO's Autônomos Bidimensionais Lineares com Coeficientes Constantes

Autovalores	Sinal da Parte Real	$\det A$ (λ_1, λ_2)	$\text{tr} A$ ($\lambda_1 + \lambda_2$)	$(\text{tr} A)^2 - 4 \det A$	Ponto de Equilíbrio	Estabilidade
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$	positivo	negativo	positivo	nó (hiperbólico)	assintoticamente estável
	$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$	positivo	positivo	positivo	nó (hiperbólico)	instável
	$\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$	negativo	positivo, negativo ou nulo	positivo	sela (hiperbólico)	instável
	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	positivo	negativo	nulo	nó impróprio ou foco (hiperbólico)	assintoticamente estável
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}$ $\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	positivo	negativo	nulo	nó impróprio ou foco (hiperbólico)	instável
	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	positivo	positivo	nulo	nó impróprio ou foco (hiperbólico)	instável
λ_1 e λ_2 complexos (conjugados)	$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$	positivo	negativo	negativo	espiral (hiperbólico)	assintoticamente estável
	$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) > 0$	positivo	positivo	negativo	espiral (hiperbólico)	instável
	$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$	positivo	nulo	negativo	centro (elíptico)	estável
$\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$	casos degenerados (elíptico)					

Fonte: Azariadis (1993, p. 135); George (1988, p. 97) e Hirsch e Smale (1974, p. 92-97). (Tabela adaptada pelo autor).

Nota: Na terminologia de Hirsch e Smale (1974, p. 92-97) um ponto de equilíbrio pode ser classificado genericamente como: (i) *sorvedouro* (*sink*), se todos os autovalores têm a parte real negativa [nó assintoticamente estável, nó impróprio/foco assintoticamente estável e espiral assintoticamente estável]; (ii) *centro* (*centre*); (iii) *fonte* (*source*), se todos os autovalores têm a parte real positiva [nó instável, nó impróprio/foco instável e espiral instável e (iv) *sela* (*saddle*), se os autovalores são reais com sinais opostos.

³⁷ Este conjunto de constantes, neste caso específico, formam o vetor de parâmetros α .

³⁸ Uma apresentação detalhada do comportamento assintótico de (2.5) pode ser encontrada em Hirsch e Smale (1974, cap. 5), Coddington e Levinson (1955, cap. 15) ou em qualquer livro texto de EDO's.

³⁹ O gráfico do fluxo de um sistema, ou seja, a imagem das trajetórias no espaço de fases com indicação da direção de movimento do ponto "representativo" (termo encontrado em Andronov e Khaikin, 1966, p. 4).

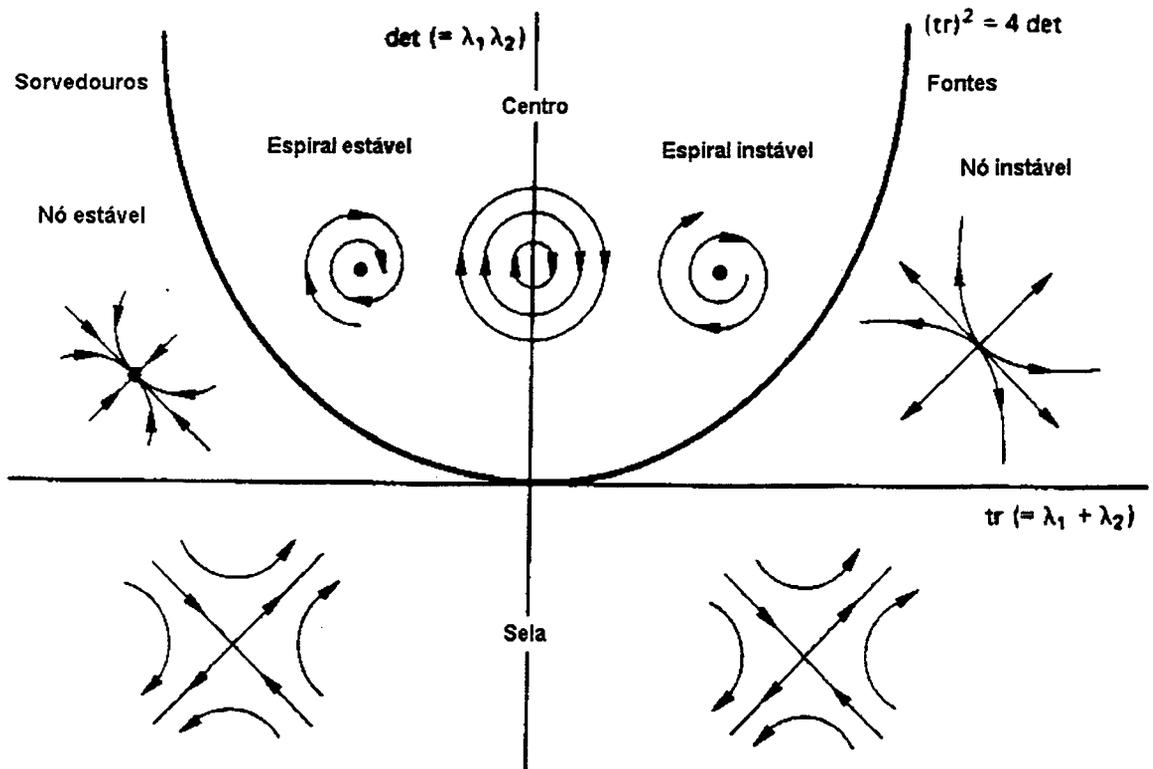


Figura 2.3. Formatos do Diagrama de Fases de Sistemas de EDO's Autônomos Bidimensionais Lineares com Coeficientes Constantes

Fonte: Azariadis (1993, p. 135)

Os resultados resumidos no Quadro 2.1 podem ser aplicados diretamente na análise de estabilidade de um sistema de *EDO's autônomo linear não-homogêneo com coeficientes constantes*, ou seja, do sistema:

$$\dot{x} = Ax + b \quad (2.10)$$

onde $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, sendo b_1 e b_2 constante reais⁴⁰.

Suponha que existe um ponto de equilíbrio x^* , ou seja, que existe um vetor x^* tal que $Ax^* + b = 0$. Defina $y \equiv x - x^*$. Logo, considerando (2.10), $\dot{x} = \dot{y} = A(y + x^*) + b = Ay + (Ax^* + b) = Ay$. Em suma, as propriedades dinâmicas de (2.10) podem ser estudadas por meio do sistema equivalente $\dot{y} = Ay$, o qual depende também somente da matriz de coeficientes A . Obviamente, a única diferença entre o

⁴⁰ O vetor de parâmetros α passa a incluir estas duas constantes além das quatro que aparecem no caso homogêneo.

sistema (2.5) e (2.10) são seus pontos de equilíbrio. No primeiro $x^* = 0$, enquanto no segundo $x^* = A^{-1}(-b) \neq 0$.

2.1.3. Sistemas dinâmicos contínuos autônomos não-lineares bidimensionais

Como visto anteriormente, existe uma teoria capaz de mapear todos os possíveis comportamentos dos sistemas de EDO's lineares bidimensionais com coeficientes constantes. Isto é vantajoso, pois estes resultados permitem avaliar o comportamento na vizinhança de certos pontos de equilíbrio de sistema dinâmicos não-lineares por intermédio da *técnica de linearização*. Em particular, tal técnica é uma peça fundamental na aplicação do TPB na prova de existência de um ciclo limite. Nesta seção, além destes assuntos, apresentar-se-á alguns resultados sobre a estabilidade estrutural de sistema de EDO's autônomos bidimensionais.

2.1.3.1. Análise da estabilidade local de um ponto de equilíbrio hiperbólico: a técnica de linearização

Considere o sistema (2.4). Suponha que exista um ponto de equilíbrio (x_1^*, x_2^*) para tal sistema. Uma *aproximação linear* em torno deste ponto é obtida por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1 - x_1^*) &= f_1(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \\ \frac{d}{dt}(x_2 - x_2^*) &= f_2(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Tem-se que $d(x_i - x_i^*)/dt = \dot{x}_i$ com $i = 1, 2$. Pela definição (2.1) $f_1(x_1^*, x_2^*) = f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$. Definindo-se $\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1^*, x_2^*) \equiv f_{ij}(x_1^*, x_2^*)$ com $i, j = 1, 2$ chega-se

a:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1^*, x_2^*) & f_{12}(x_1^*, x_2^*) \\ f_{21}(x_1^*, x_2^*) & f_{22}(x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

O sistema (2.12) será daqui em diante denominado sucintamente de *linearização* do sistema (2.4). A matriz de derivadas parciais avaliadas num ponto de equilíbrio será chamada *matriz jacobiana da linearização*, denotada por $Df(x^*)$. Um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.4) é definido a partir da matriz jacobiana da linearização, a saber⁴¹:

Definição 2.7: (x_1^*, x_2^*) é um ponto de equilíbrio *hiperbólico* (ou *não-degenerado*) do sistema (2.4) se para os autovalores λ_1 e λ_2 de $Df(x^*)$ tem-se que $\text{Re}(\lambda_1) \neq 0$ e $\text{Re}(\lambda_2) \neq 0$. Um ponto de equilíbrio é *não-hiperbólico* (*elíptico* ou *degenerado*) se $\text{Re}(\lambda_1) = 0$ ou $\text{Re}(\lambda_2) = 0$.

Quando os sistemas (2.11) e (2.4) possuem dinâmicas com propriedades qualitativas semelhantes, diz-se que existe uma *equivalência topológica* (*equivalência de fluxos*) entre eles; formalmente⁴²:

Definição 2.8: Suponha que em (2.4) $f \in C^1$. Seja $\dot{x} = g(x)$ um sistema de EDO's bidimensional definido em um conjunto aberto $U \subset \mathfrak{R}^2$ com $g \in C^1$. Este sistema e o sistema (2.4) são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo $h: X \rightarrow U$ que mapeia órbitas de f em órbitas de g preservando o sentido da direção no tempo, ou seja, suas orientações⁴³.

A técnica de linearizar um sistema dinâmico qualquer na vizinhança de um ponto é freqüentemente utilizada pelos economistas que trabalham com modelos econômicos dinâmicos. Entretanto, tal técnica só pode ser utilizada quando o fluxo de (2.4) é topologicamente equivalente ao fluxo de (2.11). O teorema a seguir estabelece a condição na qual esta equivalência ocorre⁴⁴:

Teorema 2.1: (*Hartman-Grobman*) Suponha que o sistema (2.4) tem um ponto de equilíbrio (x_1^*, x_2^*) hiperbólico. Então, na vizinhança $V((x_1^*, x_2^*), \varepsilon)$ de (x_1^*, x_2^*) o sistema (2.4) é topologicamente equivalente à sua linearização dada por (2.11).

Prova: Hartman (1964, p. 244) teorema 7.1. Enunciado sem prova em Azariadis (1993, p. 59) teorema 6.1 e Hale e Koçak (1991, p. 301) teorema 9.35.

⁴¹ Definição encontrada em Hale e Koçak (1991, p. 301) e Hirsch e Smale (1974, p. 187).

⁴² Definição encontrada em Azariadis (1993, p. 53) e Hale e Koçak (1991, p. 301).

⁴³ **Definição:** Se M e N são espaços métricos uma função $\psi: M \rightarrow N$ é chamada um *homeomorfismo* se, e somente se, ψ é bijetora e ψ e sua inversa ψ^{-1} são contínuas.

⁴⁴ Uma vizinhança de (x_1^*, x_2^*) é formalmente uma *bola aberta*, definida como $V((x_1^*, x_2^*), \varepsilon) = \{(x_1, x_2) \in X: d((x_1^*, x_2^*), (x_1, x_2)) < \varepsilon\}$, onde $d(\cdot)$ é uma distância, definida numa *métrica* de referência (uma função que define a distância entre dois pontos de um espaço), e ε uma constante real estritamente positiva.

Do ponto de vista da análise econômica, a técnica de linearização tem que ser utilizada com cautela para não acarretar em conclusões precipitadas, mesmo que o ponto de equilíbrio seja hiperbólico. Segundo Blatt (1983, p.152): *se um sistema mostra instabilidade local em torno de uma trajetória de equilíbrio, então este sistema não pode ser descrito adequadamente por qualquer aproximação linear para o sistema de equações* [Tradução do autor].

O que Blatt está querendo colocar em evidência é a possibilidade de um construtor de modelos descartar um determinado modelo com base no argumento de que este não é realista porque apresenta instabilidade local. Este argumento não é válido, por exemplo, para os modelos que serão aqui resenhados, já que a instabilidade local do ponto de equilíbrio é uma condição necessária para a existência de um comportamento cíclico endógeno das variáveis de estado. A seguir apresentam-se dois exemplos de um sistema de EDO's bidimensional onde a análise da estabilidade somente com base na linearização não é satisfatória.

Exemplo 2.2: Considere o sistema de EDO's não-lineares⁴⁵:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(\alpha_1 - x_1^2 - x_2^2) \equiv f_1(x_1, x_2; \alpha) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(\alpha_1 - x_1^2 - x_2^2) \equiv f_2(x_1, x_2; \alpha) \end{aligned} \quad (\text{E.2.1})$$

Note que o vetor de parâmetros α tem somente um componente, isto é, α_1 . Suponha que $\alpha_1 > 0$. O único ponto de equilíbrio de (E.2.1) é $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. A matriz jacobiana da linearização deste sistema em torno deste ponto de equilíbrio é dada por:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ -1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2.2})$$

Tem-se $\det Df(0,0) = \alpha_1^2 + 1 > 0$, $\text{tr} Df(0,0) = 2\alpha_1 > 0$ e $[\text{tr} Df(0,0)]^2 - 4 \det Df(0,0) = -4$. Logo, o ponto de equilíbrio é hiperbólico. Com base no Quadro 2.1 infere-se que na vizinhança do ponto de equilíbrio (0,0) o sistema original comporta-se como um *espiral instável*. Portanto, qualquer solução que inicie num ponto próximo à origem não convergirá para esta, mas, ao contrário, se afastará num movimento em espiral. Dessa forma, o sistema (E.2.1) é *localmente instável*.

Como (0,0) é o único ponto de equilíbrio poder-se-ia pensar então que o sistema (E.2.1) explodiria, ou seja, que x_1 e x_2 tenderiam para o infinito quando $t \rightarrow \infty$. Entretanto, devido à natureza não-linear deste sistema, esta conclusão não é verdadeira. O diagrama de fases completo do sistema (E.2.1) pode ser construído como segue. Em primeiro lugar, converte-se o sistema (E.2.1), expresso em coordenadas cartesianas, para coordenadas polares. Seja r o comprimento do vetor definido pelo ponto (x_1, x_2) e θ o ângulo formado por este vetor e o eixo das abscissas. É conhecido que:

$$x_1 = r \cos \theta \text{ e } x_2 = r \sin \theta \quad (\text{E.2.3})$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (E.2.1) por x_1 e a segunda por x_2 e somando-as:

$$x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (\text{E.2.4})$$

⁴⁵Em Boyce e Di Prima (1994, p. 378), Beltrami (1987, p. 62) e Hale e Koçak (1991, p. 192) é encontrado a análise do caso especial $\alpha_1 = 1$. Em Hale e Koçak (1991, p. 208) encontra-se a análise do caso geral acima.

Por intermédio de (E.2.4), considerando que $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ e $r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$, pode-se obter a equação para r :

$$\dot{r} = r(\alpha_1 - r^2) \quad (\text{E.2.5})$$

De forma similar deriva-se a equação para θ . Multiplicando a primeira equação do sistema (E.2.1) por x_2 e a segunda por x_1 e subtraindo-as,

$$x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2 \quad (\text{E.2.6})$$

Computando as derivadas \dot{x}_1 e \dot{x}_2 com base nas equações (E.2.3) e substituindo em (E.2.6), considerando (E.2.3) e lembrando que $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, obtém-se:

$$x_2[\dot{r}\cos\theta - r(\sin\theta)\dot{\theta}] - x_1[\dot{r}\sin\theta - r(\cos\theta)\dot{\theta}] = x_1^2 - x_2^2 \Leftrightarrow -r^2\dot{\theta} = r^2 \Leftrightarrow \dot{\theta} = -1 \quad (\text{E.2.7})$$

O sistema formado pelas equações (E.2.5) e (E.2.7) é equivalente ao sistema (E.2.1), com solução geral⁴⁶:

$$r = \sqrt{\alpha_1 / (1 + ce^{-2\alpha_1 t})} \text{ e } \theta = -t + k \quad (\text{E.2.8})$$

onde c e k são constantes arbitrárias. Dessa forma, a solução definida que satisfaz as condições iniciais $r_0 \equiv r(0)$ e $\theta_0 \equiv \theta(0)$ é dada por:

$$r = \sqrt{\alpha_1 / \left\{ 1 + \left[(\alpha_1 / r_0^2) - 1 \right] e^{-2\alpha_1 t} \right\}} \text{ e } \theta = -t + \theta_0 \quad (\text{E.2.9})$$

Conforme representado no diagrama de fases na Figura 2.6 (c), se $0 < r_0 < \sqrt{\alpha_1}$ ou $r_0 > \sqrt{\alpha_1}$, então $r \rightarrow \sqrt{\alpha_1}$ quando $t \rightarrow \infty$. Caso $r_0 = \sqrt{\alpha_1}$ o ponto representativo permanecerá no círculo de raio $\sqrt{\alpha_1}$ com centro no ponto de equilíbrio de (E.2.1).

O exemplo 2.2 coloca em destaque uma das duas limitações da técnica de linearização, a saber, o *caráter local* de seus resultados. Como demonstrado, o sistema (E.2.1) é *localmente instável*. Todavia, não é possível extrapolar esta conclusão para o comportamento global deste sistema. De fato, o sistema (E.2.1) é *globalmente estável*, ou seja, suas trajetórias convergem assintoticamente para um movimento cíclico, isto é, para o círculo de raio um com origem no ponto (0,0). Este círculo é um exemplo típico de um *ciclo limite*. Nas palavras de Boyce (1994, p. 379): *...uma trajetória fechada [na nomenclatura que se adotará adiante, uma órbita fechada] no plano de fase, tal que outras trajetórias não-fechadas espiralam para ela, sejam vindas de dentro, sejam vindas de fora, quando $t \rightarrow \infty$...*. Na próxima subseção é realizada uma exposição mais precisa deste conceito.

O exemplo 2.3 a seguir ilustra a outra limitação da técnica de linearização, a saber, a de que suas conclusões sobre a estabilidade local de um ponto de equilíbrio *não-hiperbólico* não são válidas.

⁴⁶ A solução geral do sistema formado pelas EDO's (E.2.5) e (E.2.7) pode ser obtida pela resolução em separado de cada uma destas, já que este sistema é desacoplado. A solução de (E.2.7) é trivial. Entretanto, a solução de (E.2.5) oferece uma maior resistência sendo obtida com auxílio do chamado "*método das frações parciais*" (consulte Lang, 1977, p. 236).

Exemplo 2.3: Substituindo-se a suposição, relativa ao sistema (E.2.1), de que $\alpha_1 > 0$ pela premissa de que $\alpha_1 = 0$, infere-se que o único ponto de equilíbrio de (E.2.1) continua sendo $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Entretanto, a matriz jacobiana da linearização deste sistema em torno deste ponto de equilíbrio passa a ser dada por:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3.1})$$

Tem-se $\det Df(0,0) = 1$, $\text{tr} Df(0,0) = 0$ e $[\text{tr} Df(0,0)]^2 - 4 \det Df(0,0) = -4$. Com base no Quadro 2.1 infere-se que na vizinhança do ponto de equilíbrio $(0,0)$ o sistema original comporta-se como um *centro*. Todavia, esta conclusão não é robusta, pois o ponto de equilíbrio não é hiperbólico, ou seja, é um ponto *elíptico (degenerado)*.

A inferência não válida da linearização pode ser demonstrada como segue. Substituindo o valor $\alpha_1 = 0$ na EDO (E.2.5) do exemplo 2.2 obtém-se o sistema expresso em coordenadas polares equivalente ao sistema (E.2.1) quando $\alpha_1 = 0$:

$$\dot{r} = -r^3 \quad (\text{E.3.2})$$

$$\dot{\theta} = -1$$

Sua solução geral é:

$$r = 1/\sqrt{c+2t} \quad \text{e} \quad \theta = -t + k \quad (\text{E.3.3})$$

onde c e k são constantes arbitrárias. Dessa forma, a solução definida que satisfaz as condições iniciais $r_0 \equiv r(0)$ e $\theta_0 \equiv \theta(0)$ é:

$$r = 1/\sqrt{(1/r_0^2) + 2t} \quad \text{e} \quad \theta = -t + \theta_0 \quad (\text{E.3.4})$$

Conforme representado no diagrama de fases na Figura 2.6 (b) para qualquer $r_0 \neq 0$ tem-se que $r \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Em outras palavras, o ponto representativo converge assintoticamente para o ponto de equilíbrio e, portanto, não realiza uma órbita circular em torno deste como inferido pela aplicação da técnica de linearização.

De fato, a *não-hiperbolicidade* de um ponto de equilíbrio está relacionada à presença de *bifurcações*, que são, grosso modo, mudanças na quantidade de pontos de equilíbrio e/ou mudanças nas características qualitativas do diagrama de fases de um sistema quando ocorre uma perturbação em pelo menos um parâmetro deste⁴⁷. Maiores detalhes sobre a estabilidade estrutural de um sistema dinâmico serão dados na seção 2.3.

2.1.3.2. Trajetórias periódicas e órbitas fechadas no plano de fases: a existência de um ciclo limite

As trajetórias (soluções definidas) são denominadas *periódicas* quando o sistema passa pelo mesmo estado em intervalos de tempo regulares, ou seja⁴⁸:

Definição 2.9: Uma trajetória $\phi(t, x^0, \alpha)$ de (2.4) é *periódica* se $\phi(t, x^0, \alpha)$ não é constante (isto é, não é uma trajetória periódica trivial) e existe um $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x^0, \alpha) = \phi(t, x^0, \alpha)$

⁴⁷ Exposições sobre o assunto podem ser encontradas em Azariadis (1993, p. 140), Hale e Koçak (1991) e Lorenz (1993, cap. 3).

⁴⁸ Definição encontrada em Azariadis (1993, p. 136) e Hale e Koçak (1991, p. 179).

para todo $t \in J \subset \mathbb{R}$. O menor $T > 0$ tal que $\phi(t+T, x^0, \alpha) = \phi(t, x^0, \alpha)$ para todo $t \in J \subset \mathbb{R}$ chama-se o *período* da trajetória $\phi(t, x^0, \alpha)$.

A imagem da função $\phi(t, x^0, \alpha)$, ou seja, o desenho traçado pela trajetória no plano de fases é denominada *órbita* que passa pelo ponto x^0 . Por sua vez, o desenho traçado pela trajetória $\phi(t, x^0, \alpha)$ no plano de fases quando o tempo flui no sentido crescente a partir de um dado t_0 é chamado *semi-órbita positiva*; formalmente⁴⁹:

Definição 2.10: Uma *órbita* passando pelo ponto x^0 é o conjunto $\gamma(x^0) = \{\phi(t, x^0, \alpha) : t \in J \subset \mathbb{R}\}$.

Uma *semi-órbita positiva* (ou *órbita positiva*) passando por x^0 é o conjunto $\gamma^+(x^0) = \{\phi(t, x^0, \alpha) : t \in J \subset \mathbb{R} \text{ e } t \geq t_0\}$.

Quando uma trajetória desenha uma *curva fechada simples*⁵⁰ no plano de fases dá-se um nome especial a esta órbita, a saber, *órbita fechada* ou *ciclo*, mais precisamente:

Definição 2.11: Quando a órbita $\gamma(x^0) = \{\phi(t, x^0, \alpha) : t \in J \subset \mathbb{R}\}$ é homeomorfa a um círculo unitário

$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ do plano euclidiano esta é chamada *órbita fechada* (*ciclo*), ou seja, uma órbita fechada é uma curva fechada simples ou curva de Jordan.

seguinte lema fornece uma conexão importante entre *trajetórias periódicas* e *órbitas fechadas* em sistemas dinâmicos autônomos:

Lema 2.1: Uma órbita periódica do sistema (2.4) corresponde a uma órbita fechada no plano de fases e uma órbita fechada corresponde a uma trajetória periódica.

Prova: Verhulst (1996, p. 14).

Um *ciclo limite* de (2.4) é um tipo especial de trajetória periódica, a saber, aquela que gera uma órbita fechada no plano de fases para onde converge o fluxo (conjunto de soluções definidas) de (2.4). Com a definição (2.11) o termo *ciclo* já está precisamente definido, resta agora tornar preciso o termo *limite*, o qual obviamente está diretamente

⁴⁹ Definição fundamentada em Hale e Koçak (1991, p. 178).

⁵⁰ O conceito de *curva fechada simples* ou *curva de Jordan* é um conceito de *Topologia*, o qual é definido com base no conceito de homeomorfismo como segue (Domingues, 1982, p. 107):

Definição: Todo espaço homeomorfo ao círculo unitário $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ do plano euclidiano chama-se uma *curva fechada simples* ou *curva de Jordan*.

Para os leitores interessados em maiores detalhes sobre este conceito recomenda-se Newman (1939).

relacionado à idéia de convergência. A definição de ciclo limite pode ser construída a partir das seguintes definições⁵¹:

Definição 2.12: Um ponto $(x_1, x_2) \in X$ é um *ponto limite- ω* da órbita $\gamma(x^0)$ se existe uma seqüência crescente t_n tal que $\lim_{t_n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x^0, \alpha) = (x_1, x_2)$. Analogamente, um ponto $(x_1, x_2) \in X$ é um *ponto limite- α* se existe uma seqüência decrescente t_n tal que $\lim_{t_n \rightarrow -\infty} \phi(t_n, x^0, \alpha) = (x_1, x_2)$.

Definição 2.13: O conjunto de todos os pontos limite- ω (pontos limite- α) é denominado *conjunto limite- ω* ($\omega(x^0)$) (*conjunto limite- α* $\alpha(x^0)$) de $\gamma(x^0)$. O termo *conjunto limite* será utilizado tanto para $\omega(x^0)$ como para $\alpha(x^0)$.

O exemplo mais simples de um conjunto limite é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Um ciclo limite também é um conjunto limite, mais precisamente⁵²:

Definição 2.14: Um *ciclo limite* de (2.4) é uma órbita fechada Γ tal que $\Gamma \subset \omega(x^0)$ ou $\Gamma \subset \alpha(x^0)$ para algum $x^0 \notin \Gamma$. No primeiro caso Γ é chamada um *ciclo limite- ω* e no segundo um *ciclo limite- α* .

Um ciclo limite é, portanto, uma *órbita fechada* no plano de fases que é um *conjunto limite*. No presente trabalho o conceito obviamente relevante é o de *ciclo limite- ω* , o qual será daqui para frente chamado resumidamente de *ciclo limite*. Existe uma forma alternativa de definir um ciclo limite, a saber⁵³:

⁵¹ Definição encontrada em Azariadis (1993, p. 104), Hale e Koçak (1991, p. 183) e Hirsch e Smale (1974, p. 198).

⁵² Definição encontrada em Hirsch e Smale (1974, p. 250).

⁵³ Por trás da definição 2.14.a está o teorema da curva de Jordan. Para enunciar este teorema é necessário definir o que é um conjunto conexo. Com base em Debreu (1959, p. 15), Domingues (1982, p. 133) e Lipschutz (1965, p. 180), pode-se adotar a seguinte definição de um conjunto conexo:

Definição: Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é *conexo* se não existem dois subconjuntos abertos não-vazios B e C de A tais que $B \cap C = \emptyset$ e $B \cup C = A$.

O teorema da curva de Jordan pode ser enunciado como segue:

Teorema: Uma curva fechada em \mathbb{R}^2 que não se intersecciona separa \mathbb{R}^2 em dois componentes (regiões) conexos, um limitado, chamado *interior* da curva, e o outro ilimitado, chamado o *exterior* da curva.

Prova: Newman (1939, p. 104) teorema 9.2 e Lefschetz (1949, p. 61) teoremas 9.1 e 9.2.

Definição 2.14.a: Uma órbita fechada Γ de (2.4) é um *ciclo limite* se existem dois pontos em $X \subset \mathbb{R}^2$, um no interior de Γ e outro no exterior, tal que os conjuntos limite- α e limite- ω das semi-órbitas passando por estes dois pontos são a órbita fechada Γ .

No exemplo 2.2 a órbita $\Gamma \equiv \{(x_1, x_2) \in X / x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ é um conjunto limite, pois toda órbita que inicie em $x^0 \neq (0,0)$ converge para Γ . Além disso, Γ é obviamente uma órbita fechada. Logo, Γ é uma órbita fechada, que é um conjunto limite, isto é, Γ é um ciclo limite. Neste caso específico a existência de um ciclo limite foi estabelecida por cálculos diretos, todavia na maioria dos casos isto não é possível. Felizmente, existem teoremas que estabelecem critérios para a avaliação da existência de ciclos limites em sistemas de EDO's autônomos bidimensionais sem a necessidade de se ter soluções explícitas destes. O pilar deste conjunto de teoremas é o chamado *Teorema de Poincaré-Bendixson*, o qual já há muito tempo é popular em mecânica e eletrodinâmica, mas só recentemente tornou-se atrativo para os teóricos dos ciclos de negócios⁵⁴. Antes de enunciar o TPB é esclarecedor enunciar um outro teorema que mostra os possíveis conjuntos limites do sistema (2.4).

Teorema 2.2. Suponha que o sistema (2.4) tenha um número finito de pontos de equilíbrio. Se $\gamma(x^0)$ é limitada, então uma das seguintes alternativas é verdadeira: (i) $\omega(x^0)$ é um único ponto de equilíbrio x^* assintoticamente estável; (ii) $\omega(x^0)$ é uma órbita fechada Γ e $\gamma^+(x^0) = \omega(x^0) = \Gamma$ ou $\gamma^+(x^0)$ espirala em direção a Γ quando $t \rightarrow \infty$; (iii) $\omega(x^0)$ consiste de pontos de equilíbrio e órbitas cujos conjuntos limite- α e limite- ω são pontos de equilíbrio (chamado saddle loop, vide Figura 2.4).

Prova: Enunciado sem prova em Azariadis (1993, p. 137) teorema A.16 e Hale e Koçak (1991, p. 366) teorema 12.1.

Este teorema é uma obviedade geométrica, porém uma asserção difícil de ser provada. A definição 2.14.a é encontrada em Azariadis (1993, p. 136) e Hale e Koçak (1991, p. 366).

⁵⁴ Gabisch e Lorenz (1989, p. 136) afirmam que uma dos primeiros estudos a utilizar-se do TPB na teoria dos ciclos de negócios foi o de Rose (1967), o qual será resenhado no capítulo quatro.

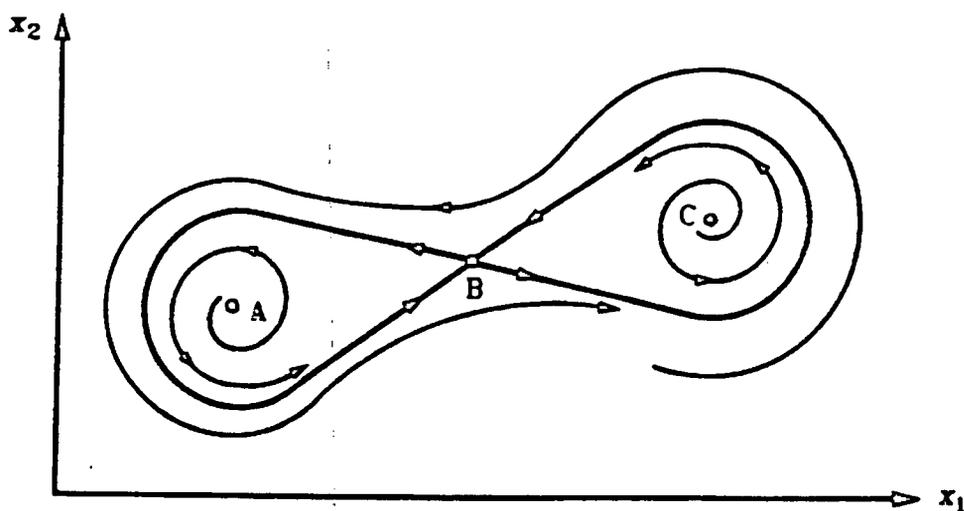


Figura 2.4. *Um Saddle Loop num Sistema de EDO's Bidimensional Autônomo*
 Fonte: Lorenz (1993, p. 39)

A prova do teorema 2.1 depende fundamentalmente do teorema da curva de Jordan, como destacam Azariadis (1993, p. 140), Hirsch e Smale (1974, p. 254) e Hale e Koçak (1991, p. 366). O TPB, o qual estabelece condições suficientes para a existência de um ciclo limite no sistema (2.4), é um resultado natural derivado do teorema 2.1. Se uma órbita limitada tem um conjunto limite que não possui qualquer ponto de equilíbrio, então os casos (i) e (iii) são descartados. Logo, o conjunto limite da referida órbita é um ciclo limite. O TPB pode ser enunciado como segue:

Teorema 2.3: (*Teorema Poincaré-Bendixson*) Suponha que em (2.4) $f \in C^1$. Se o conjunto limite $\omega(x^0)$ de (2.4) é limitado, fechado, não-vazio e não contém qualquer ponto de equilíbrio, então $\omega(x^0)$ é uma órbita fechada.

Prova: Hirsch e Smale (1974, p. 248), teorema não numerado. Enunciado sem prova em Azariadis (1993, p. 137) teorema A.16 e Hale e Koçak (1991, p. 367) teorema 12.5.

Existe uma versão "*mais fraca*" (Beltrami, 1987, p. 144), ou em outras palavras, um corolário mais "*utilizável*" (Azariadis, 1993, p. 137) deste teorema. Entretanto, para enunciá-lo é necessário o conceito de *conjunto positivamente invariante*, o qual é uma região do plano de fases na qual uma trajetória ao entrar permanece nela. A definição precisa deste conceito e o corolário do Teorema 2.1 seguem⁵⁵:

⁵⁵ Definição encontrada em Azariadis (1993, p. 106), Hale e Koçak (1991, p. 287) e Hirsch e Smale (1974, p. 198)

Definição 2.15: Um conjunto $\Omega \subset X \subset \mathfrak{R}^2$ é *positivamente invariante* se $x^0 \in \Omega$, então $\phi(t, x^0, \alpha) \in \Omega$ para todo $t \in J \subset \mathfrak{R}$ e $t \geq t_0 \in J \subset \mathfrak{R}$.

Corolário 2.1: Suponha que em (2.4) $f \in C^1$. Seja $\Omega \subset X$ um conjunto positivamente invariante, limitado e fechado. Suponha que não existe $(x_1^*, x_2^*) \in \Omega$. Seja $\gamma^+(x^0)$ uma semi-órbita positiva tal que $x^0 \in \Omega$. Então $\gamma^+(x^0)$ é um ciclo limite ou espirala em direção a um ciclo limite $\omega(x^0)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Prova: Azariadis (1993, p. 137) corolário do teorema A.16.

Uma órbita fechada de (2.4) sempre *circunda (enclose)* um ponto de equilíbrio⁵⁶. Dessa forma, se Ω contém um ciclo limite, o qual é uma órbita fechada, então este deve circundar um ponto (x_1^*, x_2^*) . Todavia, *não* existe $(x_1^*, x_2^*) \in \Omega$. Portanto, Ω deve ter um "furo". Um caso típico (Figura 2.5), no qual se enquadram todos os modelos baseados no TPB que serão aqui resenhados, surge quando é possível se encontrar um conjunto $U \subset X$ positivamente invariante que contém um único ponto de equilíbrio localmente instável. Se for removida uma vizinhança $V((x_1^*, x_2^*), \varepsilon)$ deste ponto (na qual a linearização funciona), a região que sobra $\Omega \equiv U - V((x_1^*, x_2^*), \varepsilon)$ contém um ciclo limite, devido ao corolário 2.1.

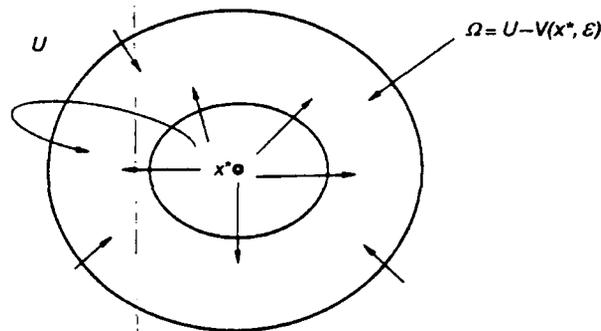


Figura 2.5. Caso Típico de Aplicação do TPB

Fonte: Azariadis (1993, p. 138)

Com base no Corolário 2.1, e com o "caso típico" em mente, torna-se possível estabelecer um programa de aplicação do TPB que será muito útil na apresentação dos modelos (vide Quadro 2.2). Tal programa considerará dois casos: no primeiro (*caso a*) é suposto que as formas específicas das funções f_1 e f_2 de (2.4) são conhecidas a priori, no segundo (*caso b*) poucas propriedades das funções f_1 e f_2 são estabelecidas a priori. O sistema (E.2.1) do exemplo 2.2 enquadra-se no *caso a*, por sua vez os modelos que serão

⁵⁶ A prova desta asserção pode ser encontrada em Hirsch e Smale (1974, p. 252) teorema 2.

aqui resenhados enquadram-se no *caso b*. Com este programa em mente, a sistemática de apresentação do terceiro ao sétimo capítulo ficará clara, pois nos artigos originais as provas de existência seguiram esta sequência. No exemplo que precede o Quadro 2.2, é ilustrada a aplicação do programa no sistema (E.2.1) do exemplo 2.2.

Exemplo 2.4: Considere o sistema (E.2.1) do exemplo 2.2. Foi demonstrado que (0,0) é o único ponto de equilíbrio do sistema e que este é localmente instável. Portanto, pelo TPB falta apenas construir o conjunto Ω . Tome-se, por exemplo, a região no plano de fases definida por $0,5 \leq r \leq 2$, a qual não contém o ponto (0,0) mas o circunda. Se $r = 0,5$, então $\dot{r} > 0$, ou seja, r aumenta, afastando-se da fronteira interna. Já se $r=2$, então $\dot{r} < 0$, ou seja, r decresce, afastando-se da fronteira externa. Logo, qualquer semi-órbita positiva $\gamma^+(x^0)$ com $x^0 \in \Omega \equiv \{(x_1, x_2) \in X : 0,5 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2\}$ deve manter-se nela.

Geralmente, a construção do conjunto Ω constitui-se no principal empecilho à aplicação do TPB. Outro ponto que deve ser destacado é a impossibilidade de extensão deste teorema para sistemas com três ou mais EDO's.

Quadro 2.2. Programa de Aplicação do TPB

<p>1º. Existência de um ponto de equilíbrio: Caso a: cálculo do (s) ponto (s) de equilíbrio. Caso b: avaliação da (s) condição (ões) de existência de um ponto de equilíbrio, ou seja, a (s) restrição (ões) mínima (s) que deve (m) ser imposta (s) sobre f_1 e f_2 para garantir a existência de um ponto de equilíbrio.</p> <p>2º. Unicidade do ponto de equilíbrio: Caso a: verificada diretamente no primeiro passo. Caso b: para que análise seja global deve-se encontrar a (s) restrição (ões) sobre f_1 e f_2 que garanta (m) a unicidade do ponto de equilíbrio.</p> <p>3º. Análise de estabilidade local do ponto de equilíbrio: Caso a: obtenção da matriz jacobiana da linearização $Df(x^*)$ (avaliada em cada ponto de equilíbrio) e, conseqüentemente, de $\det Df(x^*)$, $\text{tr} Df(x^*)$ e $[\text{tr} Df(x^*)]^2 - 4 \det Df(x^*)$, que são as informações suficientes para a determinação do comportamento assintótico do fluxo do sistema. Caso b: Construção de uma linearização em torno do ponto de equilíbrio e avaliação das condições suficientes, com base na matriz jacobiana $Df(x^*)$, para que este seja localmente instável e não seja um ponto de sela.</p> <p>4º. Construção do conjunto Ω: Caso a/b: construção de um conjunto Ω no plano de fases que não contenha o ponto de equilíbrio (apesar de o circundar) e tal que, em sua fronteira $\partial\Omega$, as órbitas que a cortam apontem para o interior de Ω.</p>
--

Existe outro teorema que se mostrará útil quando da exclusão de possibilidades de existência de ciclos limites num sistema dinâmico não-linear bidimensional. Tal teorema será utilizado no capítulo três e pode ser enunciado como segue:

Teorema 2.4: (*Cr terio de Bendixson*) Suponha que o sistema (2.4) tenha $f \in C^1$ num subconjunto aberto simplesmente conexo $D \subset X \subset \mathbb{R}^2$. Se $f_{11}(x_1, x_2) + f_{22}(x_1, x_2)$ tiver o mesmo sinal para todo ponto $(x_1, x_2) \in D$ e não for indenticamente nula, então (2.4) não terá qualquer órbita periódica situada inteiramente em D .

Prova: Hale e Koçak (1991, p. 373) teorema 12.8.

Para finalizar esta apresenta o sobre ciclos limites cabe resumir as características t picas dos ciclos limites levantadas por Blatt (1983, cap. 8), sendo elas: (i) o estabelecimento de um ciclo limite, ou seja, a aproxima o do movimento a um padrão cíclico pode ocorrer mesmo que o sistema parta de *condi es iniciais diferentes*; (ii) um ciclo limite é um *movimento estável* (i.e., mant m um padrão que não se degenera), mas não um *ponto estável*; (iii) o movimento é *fixo em escala*, a qual tem que ser consistente com as equa es de movimento do sistema; (iv) o movimento   *assimétrico no tempo*; (v) um ciclo limite requer energia externa ao sistema para manter-se operando; (vi) a ocorrência de estabilidade local não pode ser usada como argumento contra a existência de um ciclo limite. Como visto no primeiro capítulo deste trabalho, algumas destas características estão presentes nas séries de tempo das principais variáveis macroeconômicas durante os ciclos de negócios; o conceito de ciclo limite é por conseguinte atraente para alguns pesquisadores ligados à teoria dos ciclos de negócios.

Apesar da existência de um resultado de peso sobre a existência de ciclos limites em sistemas de EDO's bidimensionais como o TPB, não existe teoremas tão fortes com respeito ao número de ciclos limites no conjunto Ω , como salientam Hale e Koçak (1991, p. 365):

Depois de pontos de equilíbrio, as mais interessantes solu es de equa es diferenciais planares são órbitas periódicas. De fato, vimos no capítulo anterior o nascimento de órbitas periódicas quando um ponto de equilíbrio não-hiperbólico suporta uma bifurca o de Poincaré-Andronov-Hopf [veja a sequência de exemplos 2.2, 2.3 e 2.4 do presente trabalho].  rbitas periódicas podem também estar distantes dos pontos de equilíbrio. A detec o de tais órbitas é muito difícil. Em 1890, como parte do problema dezesseis de sua famosa lista, Hilbert colocou a seguinte questão: Qual é o número de órbitas periódicas (isoladas) de um sistema polinomial de equa es diferenciais no plano? O problema permanece não resolvido mesmo para o caso onde os componentes do campo vetorial planar são polinomiais quadráticas. Nossa incapacidade de resolver este problema básico exemplifica, de uma forma

notável, o escopo limitado de nosso conhecimento de órbitas periódicas.
[Tradução do autor]

Na conclusão deste mesmo capítulo Hale e Koçak (1991, p. 388) reforçam o seu comentário anterior:

O décimo sexto problema de Hilbert tem uma história fascinante e permanece como uma das poucas questões não respondidas de sua lista. Curiosamente, o número dezesseis está ausente na coleção de Browder (1976) sobre o progresso dos problemas de Hilbert. O primeiro resultado importante sobre o décimo sexto problema foi o "teorema" de Dulac (1923) sustentando a finitude do número total de ciclos limites de um campo vetorial planar polinomial geral. Posteriormente, uma lacuna em sua "prova" foi descoberta; vindo a ser não retificável. Recentemente, o teorema de Dulac tem sido provado por Bamón (1987) para polinomiais quadráticas, com contribuições importantes de Il'yaschenko. Para polinomiais gerais, existem anúncios do teorema de Dulac em Ecalle et al. (1987) e em Il'yaschenko (1990). Um limite para o número de ciclos limites, todavia, parece ainda estar distante, mesmo para polinomiais quadráticas. [Tradução do autor]

Estes comentários de autoridades no assunto são suficientes para justificar o escopo limitado da maioria dos modelos que serão aqui resenhados. Com exceção da versão de Chang e Smyth (1971) do modelo de Kaldor e do modelo de Rose (1967), os demais modelos aqui resenhados somente trataram da prova de existência de um ciclo limite sem se referirem ao número de órbitas periódicas atratoras.

2.1.4. Estabilidade Estrutural: a permanência de uma órbita fechada

A *estabilidade estrutural* de um sistema diz respeito à capacidade deste de manter as "*características qualitativas*" de sua dinâmica quando se realizam "*perturbações*" nas formas das EDO's que o define. Portanto, a *análise de estabilidade estrutural* de um sistema busca avaliar a *robustez* (*robustness* ou *coarseness*) do diagrama de fases deste frente a perturbações no campo vetorial que o define. Para ilustrar tais noções segue dois exemplos. No primeiro apresenta-se um sistema físico que não é estruturalmente estável, a saber, o de um *oscilador harmônico sem amortecimento (sem fricção)*, o qual em termos matemáticos é um sistema de EDO's bidimensional autônomo *linear*. O segundo é uma continuação da análise do sistema (E.2.1) contida nos exemplos 2.2 e 2.3. Esta sequência ilustra a instabilidade estrutural em um sistema de EDO's *não-linear*.

Exemplo 2.5: A equação do oscilador harmônico (sem amortecimento) é estruturalmente instável. Isto pode ser demonstrado como segue. Com base na matriz de coeficientes do sistema (E.1.4) infere-se que $\det A = k/m > 0$, $\text{tr}A = 0$ e $(\text{tr}A)^2 - 4\det A = -4k/m < 0$. Logo, a partir do Quadro 2.1, conclui-se que $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ é um centro e, portanto, *neutralmente estável*. Entretanto, se for considerada a existência de uma força de fricção (positiva ou negativa)⁵⁷ sobre o corpo C, o diagrama de fases do sistema mola-massa altera-se. Suponha que exista uma força de fricção que seja proporcional à velocidade, ou seja, $\gamma\dot{y}$, sendo γ uma constante real diferente de zero. A força resultante agora é a soma da força restauradora e da força de fricção:

$$F = -(\gamma\dot{y} + ky) \quad (\text{E.5.1})$$

Introduzindo (E.5.1) em (E.1.1) obtém-se:

$$\ddot{y} + (\gamma/m)\dot{y} + (k/m)y = 0 \quad (\text{E.5.2})$$

Esta EDO define um oscilador harmônico com fricção (negativa ou positiva). Faça $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$. Então a equação (E.5.2) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(k/m)x_1 - (\gamma/m)x_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\gamma/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5.3})$$

A partir da matriz de coeficientes de (E.5.3) infere-se que $\det A = k/m > 0$, $\text{tr}A = -\gamma/m$ e $(\text{tr}A)^2 - 4\det A = (\gamma^2 - 4km)/m^2$. Com base no Quadro 2.1 conclui-se que $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ não é mais um centro, podendo ser um *sorvedouro* (um nó, um foco ou um *espiral assintoticamente estável*) se $\gamma < 0$ ou uma *fonte* (um nó, um foco ou um *espiral instável*) se $\gamma > 0$. Portanto, a mudança da segunda EDO do sistema (E.1.3) altera profundamente o diagrama de fases deste.

O sistema (E.5.3) pode ser visto como parametrizado pelo parâmetro γ , ou seja, usando a notação vetorial de (2.4) e (2.10) este pode ser expresso genericamente como:

$$\dot{x} = f(x; \gamma) = A(\gamma)x, \quad (\text{E.5.4})$$

onde $A(\gamma)$ denota a dependência da matriz de coeficientes A com relação ao parâmetro γ . Cada valor específico de γ gera um sistema dinâmico. Apesar de γ poder assumir infinitos valores e, conseqüentemente, gerar uma família infinita de sistemas o ponto de equilíbrio será sempre $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Todavia, o mesmo não ocorre com o tipo de estabilidade deste ponto. Seja $(x_1^*, x_2^*; \gamma) = (0, 0; \gamma)$ o ponto de equilíbrio do sistema (E.5.3) para um dado valor γ . O ponto de equilíbrio do sistema (E.1.4) do exemplo 2.1 pode ser denotado como $((x_1^*, x_2^*); \gamma) = ((0, 0); 0)$. Este par ordenado, ligado a um ponto de equilíbrio que é um centro (não-hiperbólico), é denominado um *ponto de bifurcação*, pois qualquer perturbação do valor $\gamma = 0$ as características qualitativas do diagrama de fases alteram-se bruscamente, mais precisamente, o ponto de equilíbrio $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ torna-se um sorvedouro ou uma fonte (vide Figura 2.3).

Exemplo 2.6: O diagrama de fases do sistema (E.21) do exemplo 2.2 já foi estudado para os casos $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_1 = 0$. Resta, portanto, uma terceira possibilidade, a saber, $\alpha_1 < 0$. Neste último caso a solução do sistema formado por (E.2.5) e (E.2.7) tem a seguinte solução geral:

$$r = \sqrt{\alpha_1 / (ce^{2\alpha_1 t} - 1)} \text{ e } \theta = -t + k \quad (\text{E.6.1})$$

onde c e k são constantes arbitrárias. Dessa forma, a solução definida que satisfaz as condições iniciais $r_0 \equiv r(0)$ e $\theta_0 \equiv \theta(0)$ é dada por:

$$r = \sqrt{\alpha_1 / \{[(\alpha_1 / r_0^2) + 1]e^{2\alpha_1 t} - 1\}} \text{ e } \theta = -t + \theta_0 \quad (\text{E.6.2})$$

Conforme representado no diagrama de fases na Figura 2.6 (a) para qualquer $r_0 \neq 0$ tem-se que $r \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Em outras palavras, o ponto representativo converge assintoticamente para o ponto de equilíbrio semelhante ao caso $\alpha_1 = 0$.

⁵⁷ Uma força de fricção "negativa" pode parecer um tanto estranha num primeiro momento. Entretanto, são comuns os exemplos deste tipo de força em sistemas mecânicos e elétricos. Tais exemplos podem ser encontrados em Andronov e Khaikin (1966, p. 50).

Em suma, vê-se na Figura 2.6 que, com a variação do parâmetro α_1 de uma valor estritamente negativo ou nulo para um valor estritamente positivo (e vice-versa), ocorre uma mudança na estabilidade do ponto de equilíbrio, ou seja, este torna-se localmente instável (localmente estável) e o conjunto limite- ω transforma-se de um ponto de equilíbrio para um ciclo limite (e vice-versa). Nas palavras de Hale e Koçak (1991, p. 208): *O nascimento, ou a morte, de uma órbita periódica por meio de uma mudança na estabilidade de um ponto de equilíbrio é conhecido como bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf.*

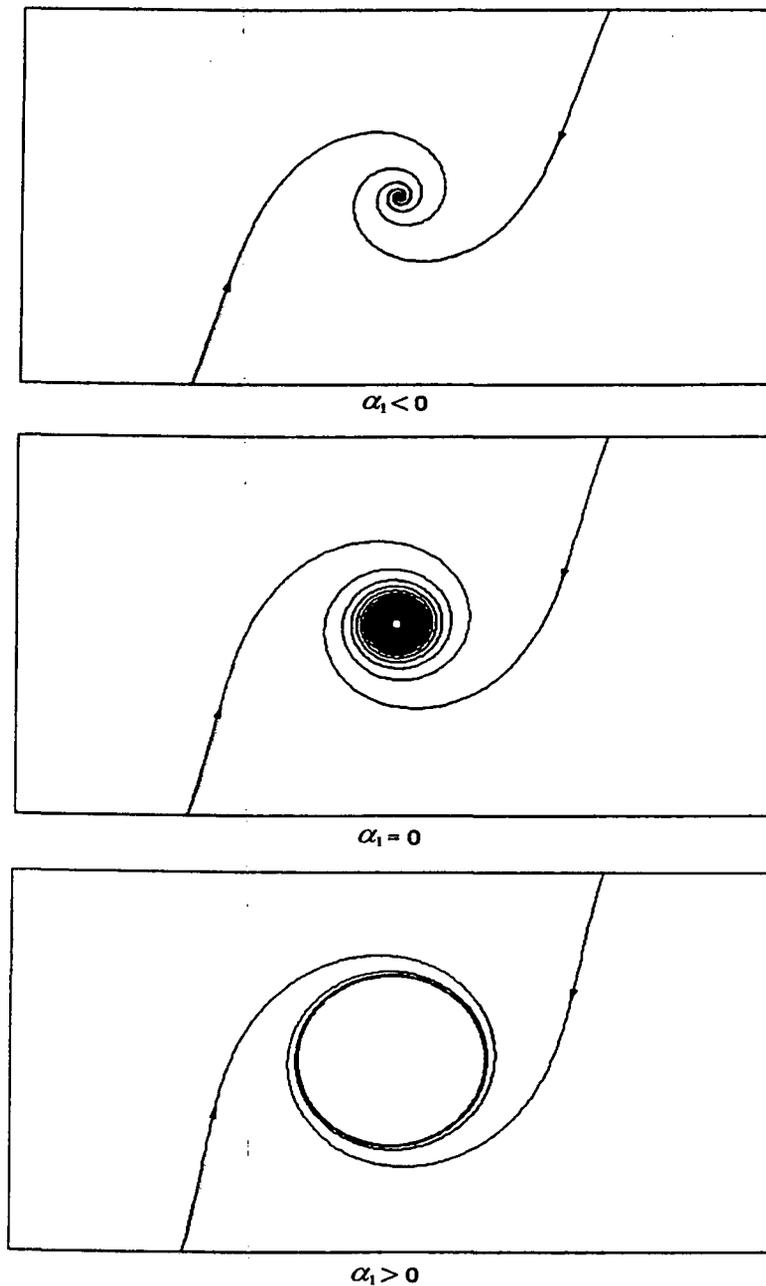


Figura 2.6. Diagramas de Fases de uma Bifurcação de Poincaré-Andronov-Hopf
 Fonte: Hale e Koçak (1991, p. 211)

A exposição do conceito de estabilidade estrutural que abre esta subseção, apesar de intuitiva, é claramente imprecisa, pois não há uma definição formal do termo "perturbação". Este termo é formalizado com base no conceito de *norma* num espaço de

funções de classe C^1 , com o qual se tem a "distância" entre duas funções continuamente diferenciáveis. Para formalizar estas idéias faz-se necessária a seguinte definição⁵⁸:

Definição 2.16: Uma curva fechada simples é dita ser *sem contato* com o campo vetorial (2.4) sempre que o vetor velocidade (\dot{x}_1, \dot{x}_2) não for nulo nem tangente em qualquer ponto pertencente a esta curva fechada simples.

Suponha que o sistema de EDO's (2.4) tenha $f \in C^1$ num subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset X$ tal que $\partial\mathcal{D}$ (a fronteira da região \mathcal{D}) é uma curva fechada simples sem contato e, sem perda de generalidade, que o vetor velocidade em cada ponto de $\partial\mathcal{D}$ aponte para o interior de \mathcal{D} . Seja E o conjunto formado pelos sistemas de EDO's bidimensionais que atendem tais hipóteses. DeBaggis (1952, p. 38) e Yan-Qian et al. (1986, p. 176) representaram um sistema de EDO's pertencente a E que não seja o sistema (2.4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) + p_1(x_1, x_2) \equiv g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + p_2(x_1, x_2) \equiv g_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad \text{ou } \dot{x} = g(x) \quad (2.13)$$

onde: $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ e $g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$. O sistema $\dot{x} = g(x)$ é denominado *sistema perturbado* (DeBaggis, 1952) e as funções $p_1(x_1, x_2) \in C^1$ e $p_2(x_1, x_2) \in C^1$ são denominadas *perturbações* (Yan-Qian et al., 1986, p. 176).

Para se ter a distância entre o sistema (2.4) e o sistema perturbado (2.13) introduz-se uma métrica em E (Yan-Qian et al., 1986, p. 176):

$$\rho = \max_{\mathcal{D}} \left(|p_1| + |p_2| + \left| \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \right| \right) \quad (2.14)$$

Com estas hipóteses e definições preliminares pode-se finalmente definir a propriedade de estabilidade estrutural do sistema (2.4)⁵⁹:

Definição 2.17: O sistema (2.4) é *estruturalmente estável* em \mathcal{D} se existe um $\delta > 0$ tal que todo sistema perturbado (2.12) com $\rho < \delta$ é topologicamente equivalente ao sistema (2.4).

⁵⁸ Definição baseada em DeBaggis (1952, p. 38)

⁵⁹ Definição baseada em Yan-Qian et al. (1986, p. 176). Consulte também Azariadis (1993, p. 58) e Hale e Koçak (1991, p. 391).

Para enunciar o teorema de estabilidade estrutural de Andronov-Pontryagin-DeBaggis é necessário definir alguns termos técnicos, a saber⁶⁰:

Definição 2.18: Seja T o período de um ciclo limite Γ de (2.4). Um ciclo limite Γ de (2.4) é dito *hiperbólico* quando $\int_0^T (f_{11} + f_{22}) dt \neq 0$.

Definição 2.19: Uma órbita $\gamma(x^0)$ é uma *conexão de sela* se seus conjuntos limite- α e limite- ω são pontos de sela.

As condições necessárias e suficientes para que (2.4) seja estruturalmente estável são fornecidas pelo seguinte teorema:

Teorema 2.5: Suponha que em (2.4) $f \in C^1$ num subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset X$. Suponha que $\partial\mathcal{D}$ é uma curva fechada simples sem contato e, sem perda de generalidade, que o vetor velocidade em cada ponto de $\partial\mathcal{D}$ aponte para o interior de \mathcal{D} . Atendidas estas condições, o sistema (2.4) é estruturalmente estável em \mathcal{D} se, e somente se, (i) existe um número finito de pontos de equilíbrio e todos são hiperbólico; e (ii) existe um número finito de ciclos limites e todos são hiperbólicos e (iii) não existe qualquer conexão de sela.

Prova: DeBaggis (1952) e Yan-Qian et al. (1986, p. 177) teoremas 8.1 e 8.2,

Este teorema foi enunciado pela primeira vez em 1937 por Andronov e Pontryagin (*apud* DeBaggis, 1952, p. 32). Como destaca DeBaggis (1952, p. 32), os resultados de por Andronov e Pontryagin foram restabelecidos e usados por Andronov e Khaikin (1966). Contudo, nestes dois trabalhos não foi realizada qualquer demonstração do referido teorema. No primeira metade da década de 50, Debaggis (1952) relaxou a hipótese de analiticidade de f_1 e f_2 , suposta por Andronov e Pontryagin em 1937, mantendo a premissa de que $f_1 \in C^1$ e $f_2 \in C^1$ e construiu uma prova do Teorema 2.5. Em 1962, Peixoto (*apud* Yan-Qian et al., 1986, p. 177), além de outros resultados, estendeu o teorema 2.5 para *variedades bidimensionais compactas (compact two-dimensional manifolds)*⁶¹.

⁶⁰ A definição 2.18 foi extraída de Yan-Qian et al. (1986, p. 30). A definição 2.19 vem de Hale e Koçak (1991, p. 392). Tais definições estão de acordo com o enunciado da versão original do teorema 2.5 adiante encontrada em DeBaggis (1952). O enunciado original de tal teorema usou uma nomenclatura levemente diferente.

⁶¹ Exposições sobre o conceito de *manifold* e conceitos relacionados podem ser encontradas em Ruelle (1989) ou Guillemin e Pollack (1974). O teorema de Peixoto pode ser colocado como segue:

Definição: Um ponto $x = (x_1, x_2) \in X$ é *nonwandering* se para qualquer $V((x_1, x_2), \varepsilon)$ existe um t' arbitrariamente grande tal que $\{\phi(t, x^0, \alpha) : x^0 \in V((x_1, x_2), \varepsilon) \text{ e } t \geq t'\} \cap V((x_1, x_2), \varepsilon) \neq \emptyset$,

Esta curta digressão sobre estabilidade estrutural permitirá ao leitor entender até onde a modelagem dos ciclos de negócios fundamentada no conceito de ciclo limite e no TPB avançou em termos de estabilidade estrutural, ou seja, que respostas foram dadas às duas questões levantadas anteriormente. O Teorema 2.5 foi utilizado somente nos dois únicos modelos de ciclos endógenos clássicos pertencentes à modelagem fundamentada no conceito de ciclo limite e no TPB que se referiram à questão da estabilidade estrutural, a saber, no modelo de Rose (1967) e na versão de Chang e Smyth (1971) do modelo de Kaldor (1940). No capítulo três e quatro, onde são resenhados estes modelos, será visto como foi aplicado o teorema 2.5.

É importante que fique bem claro que a noção de "perturbação" exposta anteriormente não inclui variações na dimensão do sistema dinâmico em apreço, ou seja, pressupõe-se que o número de EDO's que o definem permanece constante. Segundo Lorenz (1989, p. 81), existem definições alternativas de estabilidade estrutural que levam em conta o impacto sobre o comportamento qualitativo de um sistema dinâmico quando ocorrem mudanças em sua dimensão.

2.2. Defasagens Distribuídas e Mecanismos de Ajustamento de Erros Associados

Nunca é demais reforçar que os modelos macroeconômicos de curto prazo (de inspiração keynesiana) desconsideram por completo os efeitos da acumulação de capital, do crescimento da população e do progresso técnico. Por sua vez, os modelos de crescimento (principalmente as versões neoclássicas) incorporam todos estes fatores, porém supõem ajustamentos instantâneos dos mercados, o que implica inexistência do problema de demanda efetiva, ponto central nos modelos de curto prazo. Os modelos de

isto é, uma trajetória $\phi(t, x^0, \alpha)$ que inicia numa vizinhança de x a partir de um dado ponto do tempo retorna a esta vizinhança. O conjunto *nonwandering* é formado por todos os pontos *nonwandering* de X . [Definição baseada em Guckenheimer e Holmes (1983, p. 33)].

Teorema: (Peixoto) Seja $\chi^r(M^2)$ o conjunto de todos os campos vetoriais sobre variedades bidimensionais. Um campo vetorial C^r sobre uma variedade bidimensional compacta M^2 é estruturalmente estável se, e somente se: (i) o número de pontos de equilíbrios e órbitas fechadas é finito e cada um destes é hiperbólico; (ii) não existe qualquer conexão de sela; (iii) o conjunto *nonwandering* consiste somente em pontos de equilíbrios e órbitas fechadas. Além disso, se M^2 é orientável, o conjunto de campos vetoriais estruturalmente estáveis é denso e aberto em $\chi^r(M^2)$.

ciclos ficam numa posição intermediária entre estas duas classes de modelos. Como destaca Allen (1967, cap. 17) os modelos de ciclos são *modelos de dinâmica de desequilíbrio (models of disequilibrium dynamics)*, ou seja, são modelos onde aparecem *defasagens (lags)* e *mecanismos de ajustamento de erros (error-adjustment mechanisms)*.

Na apresentação que será iniciada no capítulo três ficará patente a presença constante de defasagens e mecanismos de ajustamento de erros. Dessa forma, cabe aqui uma rápida revisão de algumas estruturas de defasagens comuns nos processos de ajustamento entre variáveis econômicas.

Nos trabalhos teóricos e empíricos em economia várias *estruturas de defasagens* são utilizadas. Nesta seção tratar-se-á especificamente da *defasagem distribuída*, a qual aparece nos modelos que serão aqui resenhados. Tal estrutura de defasagem pode ser expressa em termos discretos ou contínuos. Apesar dos modelos estudados neste trabalho serem todos contínuos, adiante se apresentará não só a defasagem distribuída na *análise contínua* mas também na *análise discreta*, pois nesta última pode-se apelar mais facilmente para a intuição.

2.2.1. Análise discreta: defasagem distribuída geometricamente

Uma *defasagem distribuída em tempo discreto* ocorre quando uma variável Y no tempo t é função de n valores passados de uma dada variável X :

$$Y_t = \alpha_1 X_{t-\Delta} + \alpha_2 X_{t-2\Delta} + \dots + \alpha_n X_{t-n\Delta} \quad (2.15)$$

onde α_i é uma constante para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n$. O coeficiente α_i pode ser interpretado como o *peso* dado ao valor de X no tempo i na determinação de Y no tempo t . A variável Y_t pode depender de um número finito ou infinito de valores passados de X . No último caso é sempre assumido que a soma dos coeficientes converge para um número finito quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, normalizando-se convenientemente tem-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1 \quad (2.16)$$

Um caso particular da defasagem distribuída na análise discreta é a chamada *defasagem distribuída geometricamente*⁶². Nesta forma de defasagem distribuída os pesos decrescem em progressão geométrica, isto é, os pesos decrescem a uma razão r dada:

$$\alpha_i = r\alpha_{i-1} \text{ para todo } i = 2, 3, \dots, n, \dots \text{ e } 0 < r < 1 \quad (2.17)$$

A equação (2.17) é uma equação a diferenças finitas linear de primeira ordem, portanto o i -ésimo peso pode ser expresso como:

$$\alpha_i = \alpha_1 r^{i-1} \quad (2.18)$$

Introduzindo-se (2.18) em (2.16) tem-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_1 r^{i-1} = \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{\alpha_1}{1-r} = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1-r \quad (2.19)$$

Dadas a condição inicial (2.19) e a solução (2.18), a defasagem distribuída (2.15) toma a forma geométrica a seguir:

$$Y_t = (1-r)[X_{t-\Delta t} + rX_{t-2\Delta t} + r^2 X_{t-3\Delta t} + \dots + r^{n-1} X_{t-n\Delta t} + \dots] \quad (2.20)$$

Esta defasagem distribuída geometricamente pode ser transformada no seguinte mecanismo de ajustamento de erros⁶³:

$$\Delta Y_t = (1-r)[X_t - Y_t] \quad (2.21)$$

2.2.2. Análise contínua: defasagem distribuída exponencialmente

Uma *defasagem distribuída em tempo contínuo* é simplesmente a versão contínua de (2.15), ou seja, substitui-se o operador de somatório pelo operador de integral:

$$Y(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) X(t-\tau) d\tau \quad (2.22)$$

⁶² Esta forma é também denominada de *defasagem distribuída de Koyck* devido ao trabalho seminal de Koyck (1954).

⁶³ Com base em (2.19) é possível escrever:

$$Y_{t+\Delta t} = (1-r)X_t + rY_t$$

Subtraindo de ambos os lados desta equação Y_t , e considerando que $\Delta Y_t \equiv Y_{t+\Delta t} - Y_t$, obtém-se o mecanismo de ajustamento de erro em (2.20).

onde $f(t)$ é uma *função peso* (*weighting function*). Como no caso discreto é assumido que a soma dos pesos converge e que esta já está normalizada, ou seja:

$$\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \quad (2.23)$$

A estrutura de defasagem correspondente na análise contínua à defasagem distribuída geometricamente é a chamada *defasagem distribuída exponencialmente*, a qual é construída a partir da seguinte função peso:

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t} \quad (2.24)$$

onde α é uma constante estritamente positiva. Esta função peso satisfaz (2.23), pois:

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha \tau} d\tau = \left[-e^{-\alpha \tau} \right]_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda e^{-\lambda t} = 0 \quad (2.25)$$

A expressão da defasagem distribuída exponencialmente é obtida introduzindo-se (2.24) em (2.22):

$$Y(t) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha \tau} X(t - \tau) d\tau \quad (2.26)$$

O mecanismo de ajustamento de erro relacionado a esta espécie de defasagem é⁶⁴.

⁶⁴ Definindo $s = t - \tau$ tem-se que $ds = -d\tau$, $s = t$ quando $\tau = 0$ e $s = -\infty$ quando $\tau = \infty$. Portanto, a integral (2.25) pode ser reescrita como:

$$Y(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha(t-s)} X(s) ds$$

Dado que a integral converge ao se inverter os limites de integração o sinal desta se altera, ou seja:

$$Y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} \alpha e^{-\alpha(t-s)} X(s) ds$$

Como t é uma constante com relação a esta integral então $\alpha e^{-\alpha t}$ é uma constante, conseqüentemente:

$$Y(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha s} X(s) ds,$$

rearranjando,

$$Y(t)e^{\alpha t} = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha s} X(s) ds$$

Diferenciando esta expressão com respeito a t , tem-se:

$$\alpha Y(t)e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \frac{d}{dt} Y(t) = \alpha \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha s} X(s) ds$$

Nota-se que no termo à direita a integral que aparece está sendo diferenciada com respeito ao seu limite de integração superior (vide Chiang, 1992, p. 30), logo:

$$\alpha Y(t)e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \frac{d}{dt} Y(t) = \alpha \left[e^{\alpha s} X(s) \right]_{s=t} = \alpha e^{\alpha t} X(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \alpha[X(t) - Y(t)] \quad (2.27)$$

2.2.3. Considerações adicionais sobre o tema

Uma ilustração simples de um processo de ajustamento com base nos mecanismos de ajustamento de erros expostos anteriormente pode ser feita com um exemplo de um ajustamento de uma variável Y a um salto (*step-change*) de uma variável X . Suponha que $Y(0) = Y_0 = 0$ e que $Y(t) = X(t)$ para todo $t < 0$. Entretanto, a partir de $t = 0$, tem-se que $X(t) = A$ para todo $t \geq 0$, onde A é uma constante estritamente positiva.

O caso de uma defasagem distribuída geometricamente: Suponha que $\Delta t = 1$. Dado que $Y_0 = 0$ e $X_t = A$ para todo $t \geq 0$, então o mecanismo de ajustamento de erros (2.21) transforma-se numa equação a diferenças finitas linear de primeira ordem não-homogênea com coeficientes constantes:

$$Y_{t+1} - rY_t = (1-r)A \quad (2.28)$$

A solução definida desta equação a diferenças rende a seguinte *função resposta*⁶⁵:

$$Y_t = A(1 - r^t) \quad (2.29)$$

Dado que $0 < r < 1$, então Y_t converge para A quando $t \rightarrow \infty$. A velocidade de convergência foi maior quanto menor for a razão r . Note que, quanto menor r , maior é o coeficiente $(1-r)$. Este coeficiente indica que $(1-r)\%$ do hiato $(X_t - Y_t)$ é reduzido na passagem do período t para o período $t+1$. É por isto que o coeficiente $(1-r)$ é interpretado como a *velocidade de ajustamento* de Y com relação aos valores passados de X .

O caso de uma defasagem distribuída exponencialmente: Dado que $Y(0)=0$ e $X(t)=A$ para todo $t \geq 0$, então o mecanismo de ajustamento de erros (2.27) transforma-se numa EDO linear de primeira ordem não-homogênea com coeficientes constantes:

$$\dot{Y} + \alpha Y = \alpha A \quad (2.30)$$

Desta última expressão dividindo-se cada termo por $e^{\alpha t}$ é direta a obtenção do mecanismo de ajustamento de erros em (2.26).

⁶⁵ Este termo foi encontrado em Allen (1967, p. 91)

A solução definida desta EDO rende a seguinte função resposta:

$$Y(t) = A(1 - e^{-\alpha t}) \quad (2.31)$$

Análogo ao caso discreto, a constante α que aparece no mecanismo de correção de erros em (2.27) e na função resposta associada a este em (2.31) é considerada a velocidade de ajustamento de Y com respeito aos valores passados de X . Pela observação direta de (2.31) infere-se que quanto maior α mais rápido $Y(t)$ converge para A quando $t \rightarrow \infty$.

As duas funções respostas encontram-se grafadas adiante na Figura 2.7. No quadro 2.3 está resumido o que foi exposto até aqui nesta seção.

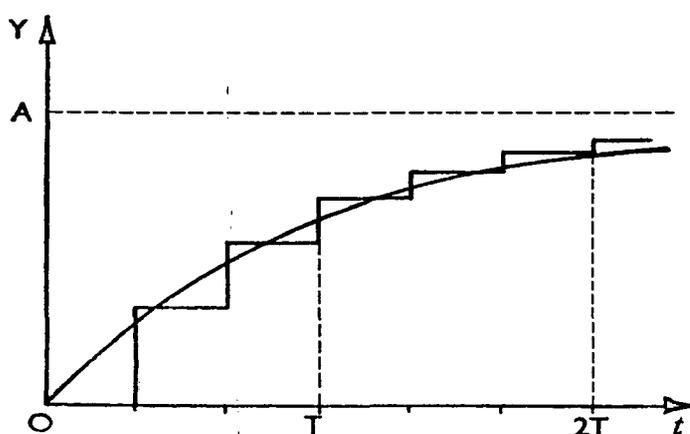


Figura 2.7. Funções Resposta das Defasagens Distribuídas Geometricamente e Exponencialmente

Quadro 2.3. Características das Defasagens Distribuídas Geometricamente e Exponencialmente

TIPO DE DEFASAGEM DISTRIBUÍDA	geométrica	exponencial
ANÁLISE	discreta	contínua
FUNÇÃO PESO	$\alpha_i = \alpha_1 r^{i-1}$, com $i=2,3, \dots$	$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$
DESCRIÇÃO FORMAL	$Y_i = (1-r)[X_{i-1} + rX_{i-2} + \dots + r^{i-1}X_{i-n} + \dots]$	$Y(t) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha \tau} X(t-\tau) d\tau$
MECANISMO DE AJUSTAMENTO DE ERROS ASSOCIADO	$\Delta Y_i = (1-r)[X_i - Y_{i-1}]$	$\dot{Y} = \alpha[X(t) - Y(t)]$
FUNÇÃO RESPOSTA	$Y_i = A(1 - r^i)$	$Y(t) = A(1 - e^{-\alpha t})$

A defasagem distribuída exponencialmente e o mecanismo de ajustamento de erros associado aparecem na maioria dos modelos que serão resenhados adiante. Portanto, é importante fazer alguns breves comentários sobre tal mecanismo. Como salientam

Gandolfo et al. (1981, p. 17) o mecanismo (2.27) é um caso particular do seguinte mecanismo:

$$\dot{Y}(t) = g[X(t) - Y(t)], \text{ com } g[0] = 0 \text{ e } g'[\cdot] > 0 \quad (2.32)$$

A função $g[\cdot]$ é uma *função de preservação de sinal* (*sign-preserving function*). No caso do mecanismo de ajustamento de erros em (2.27) esta função assume a *forma linear*, $g[\cdot] = \alpha[\cdot]$.

Sobre a formulação de modelos com base em mecanismos de ajustamento de erros, caso onde se enquadram os modelos que serão aqui resenhados, Gandolfo et al. (1981, p. 18) salientam um ponto importante, a saber:

Em qualquer caso [inclui os casos em (2.27) e (2.32)] a formulação do modelo como um conjunto de equações de ajustamento significa admitir a possibilidade de que o sistema esteja numa situação de desequilíbrio, isto é, de que pontos observados não necessariamente estejam sobre suas relações de comportamento ou (mais restritivamente) sobre suas intersecções.

Em outras palavras, estamos num contexto de dinâmica do desequilíbrio, o qual parece mais apropriado para fenômenos da vida real. [Tradução do autor]

Por trás dos mecanismos de ajustamento de erros (2.27) e (2.32) tem-se tipicamente mecanismos de mercado ou funções de reação de *policy makers*. Os exemplos de (2.27) representando mecanismos de mercado são: a equação de ajustamento do excesso de demanda agregada no mercado de bens (encontrada nos modelos de Phillips, Kaldor, Benassy e Schinasi) e a curva de Phillips (encontrada nos modelos de Rose, Benassy). Um exemplo de (2.27) representando uma função de reação é a restrição orçamentária do governo (encontrada no modelo de Schinasi). Um exemplo do caso mais geral (2.32) será encontrado no modelo de Nikaido, representando um mecanismo de mercado.

2.3. Modelos de Ciclos Exógenos e Endógenos: uma ilustração de suas diferenças básicas

Nesta seção pretende-se mostrar de forma mais concreta a diferença entre os modelos de ciclos exógenos e endógenos. Para realizar tal tarefa, utiliza-se a estratégia de

apresentação de um exemplo *simples*⁶⁶, mas representativo, de cada grupo de modelo, a saber: o *Modelo de Phillips* (modelo de ciclos exógeno) e o *Modelo de Vogt* (modelo de ciclos endógeno). A escolha do modelo de Phillips (1954) se deve ao fato de que este é a primeira versão contínua dos modelos do tipo multiplicador-acelerador, os quais tornaram-se populares na literatura depois do trabalho de Samuelson (1939) e são uma classe representativa da abordagem dos ciclos exógenos⁶⁷. Já a escolha do modelo de Vogt (1969 *apud* Gabisch e Lorenz, 1989) é justificada por ser esse um exemplo peculiar de modelo de ciclo independente de choques, peculiar no sentido de ser um sistema dinâmico linear e ser inspirado na abordagem neoclássica⁶⁸.

2.3.1. O Modelo de Phillips

Como já posto, o modelo de Phillips (1954) é um modelo em tempo contínuo pertencente à classe dos modelos de ciclos de negócios do tipo multiplicador-acelerador. Este modelo apresenta semelhanças com os modelos do tipo Samuelson-Hicks⁶⁹, os quais são também modelos que fazem uso do princípio da aceleração e do mecanismo do multiplicador, porém são modelos em tempo discreto.

⁶⁶ O adjetivo “simples” tem o intuito de destacar que tais modelos são modelos dinâmicos *lineares*. Isto permitirá apresentar as distinções alardeadas no primeiro capítulo deste trabalho mesmo sem nenhuma informação a priori sobre dinâmica não-linear, a qual é usualmente necessária para estudar os modelos de ciclos endógenos que são em sua maioria modelos dinâmicos não-lineares. Em termos formais, os modelos que serão expostos neste capítulo apresentam como equação de movimento uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes, ou equivalentemente, são sistemas dinâmicos autônomos lineares de primeira ordem bidimensionais.

⁶⁷ A razão do uso de um modelo do tipo multiplicador-acelerador contínuo numa versão puramente determinista (não-estocástica) como ilustração da abordagem dos ciclos exógena, apesar de não demonstrar explicitamente o papel de impulsos aleatórios exógenos na manutenção do ciclo, reside na possibilidade de ilustrar claramente a necessidade de introdução destes choques para a existência de um ciclo recorrente. A resenha do Modelo de Phillips mostrará uma versão contínua de um típico mecanismo de propagação de um modelo do tipo Frisch, na qual só há um caso excepcional onde somente uma perturbação inicial é necessária para que o sistema apresente um ciclo recorrente. Além disso, com a apresentação deste modelo é possível tornar claro o papel de choques exógenos (mecanismo de impulso) sem a necessidade de se passar para um ambiente estocástico e, portanto, sem a necessidade de demandar do leitor qualquer conhecimento a priori sobre processos estocásticos para entender o cerne do argumento. Esta postura de classificar os modelos do tipo acelerador-multiplicador como pertencentes à abordagem de ciclos exógena foi adotada por Gabisch e Lorenz (1989).

⁶⁸ Na realidade, este foi o único exemplo de um modelo de ciclos endógeno linear encontrado na literatura pesquisada. Isto demonstra que mesmo não sendo o modelo de Vogt um exemplo único é pelo menos um exemplo raro. A possível causa desta raridade pode ser encontrada no fato de que todos os modelos de ciclos endógenos lineares têm um ponto de equilíbrio que é um *centro* e, portanto, são estruturalmente instáveis (vide Exemplo 2.5 no capítulo anterior).

⁶⁹ São modelos semelhantes a uma versão construída por Hicks (1956) do trabalho de Samuelson (1939).

Phillips (1954) apresentou seu modelo em duas versões básicas. A primeira delas (versão 1) baseada na suposição de que os preços e taxa de juros mantinham-se constantes no decorrer do tempo e a segunda (versão 2) onde tal hipótese era relaxada. O objetivo central deste autor era avaliar os efeitos de políticas de estabilização da produção e do nível de emprego numa economia fechada, cuja dinâmica seria regida pelo mecanismo do multiplicador e pelo princípio da aceleração. Já o objetivo da presente seção é simplesmente demonstrar que, na ausência de intervenção governamental ou de perturbações estocásticas, este modelo só apresentará um comportamento cíclico *recorrente* da produção e demais variáveis envolvidas caso ocorra uma peculiar combinação de valores dos parâmetros. Dado este objetivo, para manter a simplicidade e sem perda de generalidade, esta apresentação ater-se-á somente à versão 1 do modelo de Phillips.

O modelo de Phillips é construído a partir das seguintes suposições⁷⁰:

SUPOSIÇÃO (SP.1): O nível de preços e a taxa de juros permanecem constantes em todo período de análise.

SUPOSIÇÃO (SP.2): O consumo agregado é uma função linear da renda agregada $C(t) = cY(t)$, com c constante e $0 < c < 1$.

SUPOSIÇÃO (SP.3): O estoque de capital desejado depende linearmente da renda $K^d(t) = \kappa Y(t)$, com κ constante e $\kappa > 0$.

SUPOSIÇÃO (SP.4): As firmas ajustam seu estoque de capital em termos proporcionais à discrepância entre o estoque de capital *desejado* e o estoque de capital *observado*, não havendo depreciação do capital, ou seja, $\dot{K}(t) = \beta_1 [K^d(t) - K(t)]$, com β_1 constante e $\beta_1 > 0$.

SUPOSIÇÃO (SP.5): O *investimento observado* é igual ao *investimento planejado*, $\dot{K}(t) = I(t)$.

SUPOSIÇÃO (SP.6): A oferta agregada varia linearmente com respeito ao excesso de demanda agregada $\dot{Y}(t) = \alpha_1 [C(t) + I(t) + Z(t) - Y(t)]$, com α_1 constante e $\alpha_1 > 0$.

⁷⁰ A forma de apresentar as premissas do modelo de Phillips foi inspirada na resenha de Gabisch e Lorenz (1989, p. 69).

SUPOSIÇÃO (SP.7): A demanda agregada autônoma é constante, ou seja, $\dot{Z}(t) = 0$ para todo t .

A suposição (SP.1) explicita o fato de que o foco aqui recai sobre a versão 1 do modelo de Phillips e, portanto, a análise é em termos reais desconsiderando-se por completo o lado monetário da economia. Outras coisas desconsideradas são o crescimento da força de trabalho e o progresso técnico. Enfim, o modelo de Phillips concentra-se no lado da demanda e mais especificamente na dinâmica do mercado de bens. Com (SP.3) supõe-se uma relação capital-produto constante, o que implica que haverá em qualquer instante de tempo um estoque de capital agregado desejado (uma referência) compatível com a produção agregada. Entretanto, durante o ciclo, abrir-se-á a possibilidade de que o estoque de capital observado difira do estoque de capital desejado. Dessa forma, é preciso criar um mecanismo de ajustamento de erros para corrigir tal discrepância. Este é construído a partir das suposições (SP.3), (SP.4) e (SP.5), como será demonstrado logo a seguir. A suposição (SP.6) introduz o segundo mecanismo de ajustamento de erros do modelo, a saber, aquele que reflete o processo de ajustamento dos hiatos entre oferta e demanda agregadas no mercado de bens. Portanto, aqui há uma diferença básica entre o modelo de ciclo de Phillips e os modelos de crescimento (de inspiração neoclássica), a saber, a possibilidade de insuficiência ou abundância de demanda no mercado de bens. Finalmente, com (SP.7) reflete-se a desconsideração por parte de Phillips do efeito do comportamento da componente autônoma da demanda agregada durante o ciclo.

O modelo de Phillips e sua dinâmica subjacente podem ser apresentados como segue. Introduzindo-se a função consumo postulada em (SP.2) no mecanismo de ajustamento de erros entre oferta e demanda agregadas postulado em (SP.6), obtém-se a primeira EDO do modelo de Phillips, a saber:

$$\dot{Y} = -\alpha_1(1-c)Y + \alpha_1 I + \alpha_1 Z \quad (2.33)$$

Diferenciando com respeito ao tempo a equação que fornece a variação do estoque de capital da economia em (SP.4) e considerando a ausência de depreciação e a premissa (SP.5), tem-se:

$$\dot{I} = \beta_1(\dot{K}^d - I) \quad (2.34)$$

Esta última EDO reflete o fato de que a evolução do investimento planejado é regida pelo hiato entre a variação no estoque de capital desejada e o investimento observado. A taxa de variação do investimento planejado, dado (SP.3), tem seu comportamento traçado pelo efeito aceleração, ou seja, $\dot{K}^d = \kappa \dot{Y}$, o qual inserido em (2.34) resulta no segundo mecanismo de ajustamento de erros do modelo de Phillips:

$$\dot{I} = \beta_1(\kappa \dot{Y} - I) \quad (2.35)$$

Finalmente, substituindo (2.33) em (2.35) encontra-se a segunda EDO de modelo de Phillips:

$$\dot{I} = -\alpha_1 \beta_1 \kappa (1-c) Y + (\alpha_1 \beta_1 \kappa - \beta_1) I + \alpha_1 \beta_1 \kappa Z \quad (2.36)$$

Dado (2.33) e (2.36) o modelo de Phillips pode ser posto como um sistema de EDO's autônomo bidimensional linear de primeira ordem não-homogêneo com coeficientes constantes⁷¹:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1(1-c) & \alpha_1 \\ -\alpha_1 \beta_1 \kappa (1-c) & \alpha_1 \beta_1 \kappa - \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 Z \\ \alpha_1 \beta_1 \kappa Z \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

O ponto de equilíbrio deste sistema é dado por $Y^* = Z / (1-c)$ e $I^* = 0$, ou seja, o estado estacionário é o ponto de chegada do processo do multiplicador, acompanhado de uma igualdade entre o estoque de capital observado e o estoque de capital planejado. A matriz de coeficientes do sistema (2.37) rende:

$$\begin{cases} \det A = \alpha_1 \beta_1 (1-c) > 0 \\ \text{tr} A = -\alpha_1 (1-c) + \alpha_1 \beta_1 \kappa - \beta_1 \end{cases} \quad (2.38)$$

Dado que o determinante da matriz de coeficientes de (2.37) é positivo, é conhecido, pelo Quadro 2.1, que este sistema apresentará um comportamento cíclico estável mas não amortecido, ou seja, uma órbita fechada no plano de fases (vide Figura

⁷¹ É comum expressar o sistema (2.37) na sua forma equivalente, a saber, como uma EDO linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes, como faz o próprio Phillips no artigo original e outros autores como Allen (1967) e Gabisch e Lorenz (1989). Esta forma alternativa de apresentação é exposta no Apêndice 3.A no final deste capítulo. A forma acima foi adotada para manter uniformidade com o resto do trabalho.

2.8) se, e somente se, o traço da matriz de coeficientes for nulo. Para que isso ocorra a seguinte condição deve ser satisfeita⁷²:

$$\alpha_1(1-c) + \beta_1 = \alpha_1\beta_1\kappa \quad (2.39)$$

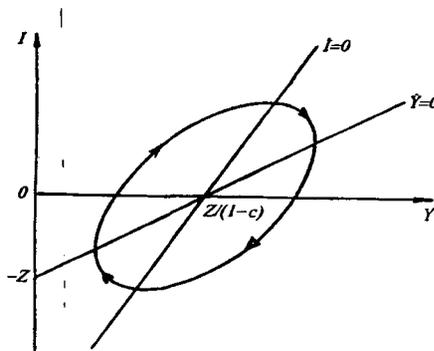


Figura 2.8. Diagrama de Fases do Modelo de Phillips

Portanto, excluindo a existência de perturbações estocásticas e intervenção governamental, o modelo de Phillips depende de uma especialíssima conjunção de valores do seu conjunto de parâmetros para apresentar um comportamento cíclico recorrente de suas variáveis de estado, ou seja, para dar conta do primeiro fato estilizado listado no capítulo anterior. Todavia, não há qualquer razão a priori que garanta a satisfação da condição (2.39)⁷³.

Conforme demonstrado no Apêndice 3.A no final deste capítulo, as oscilações da produção, além de terem sua existência atrelada a uma determinada combinação de valores dos parâmetros, são perfeitamente simétricas (as fases de expansão e contração têm exatamente a mesma duração) com amplitude constante.

⁷² É importante lembrar que o ponto representativo do sistema (2.19) passa por um dado estado em intervalos de tempo rigorosamente iguais (vide Apêndice 3.A). Note que a órbita de um ponto de equilíbrio que é um centro no plano de fases com as variáveis de estado originais pode ser uma elipse. Entretanto, pode-se fazer uma conveniente transformação de variáveis de forma que se tenha no final uma órbita que seja uma circunferência com origem em (0,0). Para maiores detalhes sobre este assunto vide Hirsch e Smale (1974).

⁷³ Dessa forma, justifica-se a classificação do Modelo de Phillips como um modelo de ciclo exógeno, pois somente no caso excepcional (2.21) é que o sistema (2.19) necessita ser perturbado uma única vez ou iniciar fora de seu ponto de equilíbrio para que apresente um ciclo recorrente. No caso de oscilações amortecidas, $\alpha_1(1-c) + \beta_1 > \alpha_1\beta_1\kappa$, a manutenção do ciclo depende de choques exógenos recorrentes, ou seja, depende de um mecanismo de impulso. Para uma ilustração deste caso em tempo discreto vide Gabisch e Lorenz (1989, seção 3.2, p. 86).

2.3.2. O Modelo de Vogt

O modelo de Vogt (1969 *apud* Gabisch e Lorenz, 1989, cap. 4) é um exemplo peculiar de um modelo de ciclos endógeno. Esta peculiaridade advém do fato de que tal modelo é linear, ao passo que a abordagem dos ciclos endógenos é dominada por modelos não-lineares. Como destacam Gabisch e Lorenz (1989, p. 115), o trabalho de Vogt caracteriza-se como uma modificação do *modelo de crescimento neoclássico com gerações de capital (neoclassical vintage growth model)*⁷⁴ buscando obter um crescimento cíclico. Esta intenção desembocou, do ponto de vista formal, em um exemplo econômico de um *oscilador harmônico sem amortecimento* tão popular em mecânica clássica (vide exemplo 2.1 no capítulo 2).

O modelo de Vogt é formado com base nas seguintes suposições:

SUPOSIÇÃO (SV.1): a tecnologia de uma firma i no instante t é descrita por uma função de produção Cobb-Douglas $Y_n = \delta_\tau (I_n)^\alpha (L_n)^\beta$ com α e β constantes, $\alpha + \beta < 1$ (retornos decrescente de escala) e $\delta_\tau > 0$, sendo que os bens de capital possuem durabilidade técnica infinita, isto é, não há depreciação.

SUPOSIÇÃO (SV.2): a economia como um todo apresenta retornos constantes de escala.

SUPOSIÇÃO (SV.3): a taxa de crescimento instantânea da taxa de juros ajusta-se continuamente com relação ao hiato entre a quantidade de capital da geração τ demandada pela economia e a produção agregada observada de capital da geração τ , como segue:

$$\frac{d}{dt}(\dot{r}/r) = \beta_2 [\ln I^d - \ln I], \text{ com } \beta_2 \text{ constante e } \beta_2 > 0.$$

SUPOSIÇÃO (SV.4): o trabalho é homogêneo e sua curva de oferta de mercado é perfeitamente elástica.

SUPOSIÇÃO (SV.5): o sistema econômico encontra-se sempre em um estado de equilíbrio competitivo.

SUPOSIÇÃO (SV.6): os salários são todos gastos em bens de consumo, $C(t) = wL(t)$.

⁷⁴ Existe uma tradução alternativa na versão traduzida do livro de Jones (1979), a saber, *modelo de crescimento de safra neoclássico*.

A suposição (SV.1) impõe uma tecnologia específica e, portanto, pode ser considerada demasiadamente restritiva. É importante esclarecer que a hipótese de durabilidade técnica infinita dos bens de capital influencia na especificação da função de produção. Se existisse, por exemplo, uma taxa de depreciação constante d , o estoque de capital agregado da geração τ em uso no tempo t , denotado por $K_\tau(t)$, seria determinado por $K_\tau(t) = e^{-d(t-\tau)} I_\tau$. Dessa maneira, supor durabilidade técnica infinita, ou seja, $d = 0$, implica que $K_\tau(t) = I_\tau$. Isto justifica a presença de I_τ no lugar de $K_\tau(t)$ na função de produção em (SV.1). Gabisch e Lorenz (1989, p.116) argumentam que a suposição (SV.2) retrata a existência de economias externas, como por exemplo devido a melhoras da infraestrutura da economia geradas pelo processo de crescimento. A suposição (SV.3) é um mecanismo de ajustamento de erros associado a uma defasagem distribuída exponencialmente. Tal mecanismo é uma hipótese sobre o processo de ajustamento desencadeado por discrepâncias entre os planos de investimento das firmas e a produção observada de bens de capital. A suposição (SV.4) garante a inexistência de demanda não realizada no mercado de trabalho. A suposição (SV.5) garante que a economia ajusta-se instantaneamente a perturbações no seu vetor de preços. Finalmente, a suposição (SV.6) juntamente com (SV.1) e (SV.5) desembocam na chamada hipótese de uma "função de poupança clássica" (Jones, 1979, p. 118), ou seja, a de que todos os salários são gastos e todos os lucros poupados. Tais premissas são chaves na derivação da função consumo, como será visto à frente.

Da suposição (SV.1) pode-se obter a forma explícita das produtividades do capital e do trabalho a nível da firma, como segue:

$$\frac{\partial Y_{ii}}{\partial I_{ii}} = \alpha \delta_\tau (I_{ii})^{\alpha-1} (L_{ii})^\beta \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y_{ii}}{\partial L_{ii}} = \beta \delta_\tau (I_{ii})^\alpha (L_{ii})^{\beta-1} \quad (2.40)$$

Seja o preço do bem o *numeraire* da economia, isto é, $P=1$. Como a economia é perfeitamente competitiva [suposição (SV.5)], a i -ésima firma maximizadora de lucro toma como dados o salário e a taxa de juros reais e determina suas demandas de fatores com base no seguinte sistema⁷⁵:

⁷⁵ Dado que a função de produção apresenta retornos decrescentes, a solução do sistema adiante de fato fornecerá pontos de máximo, pois a condição de segunda ordem é satisfeita.

$$\begin{aligned} \alpha \delta_{\tau} (I_{\pi}^d)^{\alpha-1} (L_{\pi}^d)^{\beta} &= r \\ \beta \delta_{\tau} (I_{\pi}^d)^{\alpha} (L_{\pi}^d)^{\beta-1} &= w \end{aligned} \quad (2.41)$$

o qual rende:

$$I_{\pi}^d = \left[\alpha^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{w} \right)^{\beta} \delta_{\tau} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} r^{-\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \text{ e } L_{\pi}^d = \left[\alpha^{\alpha} \left(\frac{\beta}{w} \right)^{1-\alpha} \delta_{\tau} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} r^{-\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \quad (2.42)$$

Obtida a função investimento para uma firma representativa i o próximo passo é a consecução da função investimento agregada. A conexão entre esta última e as funções de investimento individuais é feita com base nas suposições (SV.2) e (SV.5). Dado que a economia produz um único produto homogêneo, todas as firmas são *price-takers*, existe perfeito conhecimento e livre entrada e saída, então no longo prazo as firmas convergem para uma planta ótima e, conseqüentemente, atingirão o mesmo nível de produção. Portanto, Vogt supõe que a demanda de investimento e a demanda de trabalho agregada são obtidas simplesmente multiplicando a demanda de investimento e de trabalho da firma representativa pelo número de firmas existentes no mercado, ou seja⁷⁶:

$$I_{\tau}^d = z I_{\pi}^d \text{ e } L_{\tau}^d = z L_{\pi}^d \quad (2.43)$$

Cabe destacar que devido a (SV.4) tem-se que $L_{\tau}^d = L_{\tau}$. Entretanto, I_{τ}^d e I_{τ} podem diferir já que I_{τ}^d resulta das decisões das firmas e I_{τ} das decisões das famílias. Vogt supõe que o investimento agregado observado e a quantidade de trabalho efetivamente empregada pela economia com a quantidade de capital da geração τ são divididas em partes iguais entre as z firmas que compõem a economia, ou seja:

$$I_{\tau} = z I_{\pi} \text{ e } L_{\tau} = z L_{\pi} \quad (2.44)$$

A partir de (2.44), considerando a função de produção postulada em (SV.1), tem-se:

$$Y_{\pi} = \delta_{\tau} (I_{\tau}^d)^{\alpha} (L_{\tau}^d)^{\beta} z^{-\alpha-\beta} \quad (2.45)$$

Para se chegar à produção agregada basta multiplicar (2.45) pelo número de firmas existente na economia, isto é:

⁷⁶ Aqui está implícita a premissa de que o nível de produção da firma representativa é pequeno quando comparado à demanda de mercado e, portanto, o número de firmas de equilíbrio é relativamente grande, ou seja, z é relativamente grande. Isto é necessário para que a suposição de que as firmas são tomadoras de preço faça sentido.

$$Y_\tau = zY_\pi = \delta_\tau (I_\tau)^\alpha (L_\tau)^\beta z^{1-\alpha-\beta} \quad (2.46)$$

Entretanto, pela suposição (SV.2) o sistema econômico como um todo apresenta retornos constantes de escala, fato este que pode ser expresso formalmente como segue:

$$Y_\tau = \Delta (I_\tau)^{1-\beta} (L_\tau)^\beta \quad (2.47)$$

onde Δ é uma constante técnica para a economia como um todo. Existe uma relação entre os parâmetros δ_τ e Δ . Esta relação é obtida igualando (2.46) e (2.47), operação que tem como resultado:

$$\delta_\tau = \Delta \left[\frac{I_\tau}{z} \right]^{1-\alpha-\beta} \quad (2.48)$$

Esta relação é importante dentro deste modelo. Esta demonstra como as firmas são afetadas pela variação do investimento agregado observado. Por (2.48) tem-se que para um dado z , quanto maior (menor) for I_τ maior (menor) será δ_τ . Isto significa que uma expansão (contração) do investimento observado agregado expande (contraí) os conjuntos de produção individuais (conjunto de planos de produção factíveis das firmas) e, conseqüentemente, cada firma produz mais (menos) com dados níveis de capital e trabalho do que antes da alteração.

Finalmente, chega-se às funções demanda de investimento e demanda de trabalho agregadas introduzindo (2.48) em (2.42) e o resultado desta operação em (2.43):

$$I_\tau^d = \theta_1 r^{-\theta_2} I_\tau \quad (2.49)$$

$$L_\tau^d = \theta_3 r^{-\theta_4} I_\tau \quad (2.50)$$

onde $\theta_1 \equiv \left[\alpha^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \Delta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$, $\theta_2 \equiv \frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}$, $\theta_3 \equiv \left[\alpha^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^{1-\alpha} \Delta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$ e $\theta_4 \equiv \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}$.

A demanda agregada por investimento não depende somente das restrições tecnológicas e do vetor de preços, mas também do investimento observado, o qual é determinado pelas decisões de poupança e consumo das famílias. Pelas suposições (SV.1) e (SV.5) pode-se inferir que a participação dos salários na renda é igual à elasticidade da produção com respeito ao trabalho e, portanto, $wL(t) = \beta Y(t)$. Pela suposição (SV.6) tem-se que os trabalhadores não poupam, ou seja, $C(t) = wL(t)$. Destas considerações resulta a seguinte função consumo agregada:

$$C(t) = \beta Y(t) \quad (2.51)$$

onde $Y(t) = \int_{-\infty}^t Y_{\tau} d\tau$ é a produção resultando de todas as gerações de capital no instante t . Dado que o sistema econômico sempre encontra-se em equilíbrio, suposição (SV.5), então poupança e investimento planejados sempre se igualam, ou seja, não existe nenhum problema de demanda efetiva. Dessa maneira, considerando (2.51), tem-se a seguinte função de investimento⁷⁷:

$$I_{\tau=t} = Y(t) - C(t) = (1 - \beta)Y(t) \quad (2.52)$$

De (2.49) infere-se a taxa instantânea de crescimento da razão investimento planejado-investimento observado, a saber:

$$\frac{d}{dt} \ln(I^d / I) = \frac{(I^d / I)}{(I^d / I)} = \frac{-\theta_2 \theta_1 (r)^{-(\theta_2+1)} \dot{r}}{\theta_1 (r)^{-\theta_2}} = -\theta_2 \frac{\dot{r}}{r} \quad (2.53)$$

A equação (2.53) estabelece que a taxa instantânea de crescimento da razão entre o investimento planejado e o investimento observado mantém uma relação inversamente proporcional com a taxa de crescimento instantânea da taxa de juros real. Sendo assim, o comportamento desta taxa no tempo é de extrema importância. A suposição (SV.3) fixa tal comportamento, afirmando que a taxa de crescimento instantânea da taxa de juros real ajusta-se com respeito ao excesso de demanda por investimento. Portanto, o mecanismo de ajustamento postulado em (SV.3) e a equação (2.53) formam um sistema de EDO's autônomo bidimensional linear de primeira ordem homogêneo com coeficientes constantes tendo como variáveis de estado⁷⁸ $\ln(I^d / I)$ e \dot{r} / r .

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (\ln(I^d / I)) \\ \frac{d}{dt} (\dot{r} / r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_2 \\ \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(I^d / I) \\ \dot{r} / r \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

O ponto de equilíbrio deste sistema é (0,0) e sua matriz de coeficientes rende:

⁷⁷ A fórmula adiante simplesmente coloca em evidência o fato de que o investimento observado será sempre igual à massa de lucros da economia, a qual é integralmente convertida em poupança, dada premissa (S.7).

⁷⁸ Em Gabisch e Lorenz (1989, p. 118) afirma-se que as variáveis de estado são (I^d / I) e \dot{r} / r . Porém, se a razão (I^d / I) for considerada uma variável de estado o sistema (2.38) não será linear.

$$\begin{cases} \det A = \beta_2 \theta_2 > 0 \\ \text{tr} A = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

A partir do Quadro 2.1, conclui-se que o ponto de equilíbrio é um *centro*. Isto significa que o ponto representativo do sistema (2.55) descreve uma órbita fechada cujo ponto representativo passa por um determinado estado em intervalos iguais de tempo. No plano de fases forma-se uma circunferência cujo centro é o ponto (0,0), conforme mostrado na Figura 2.9.

O modelo de Vogt possui uma característica essencial que o diferencia do modelo de Phillips, a saber, o fato de que a existência e recorrência de um comportamento oscilatório das variáveis de estado *não* dependem de uma combinação específica dos parâmetros do modelo. Em outras palavras, o modelo de Vogt dá conta do primeiro fato estilizado, listado no capítulo anterior, sem a necessidade de apelar para perturbações exógenas.

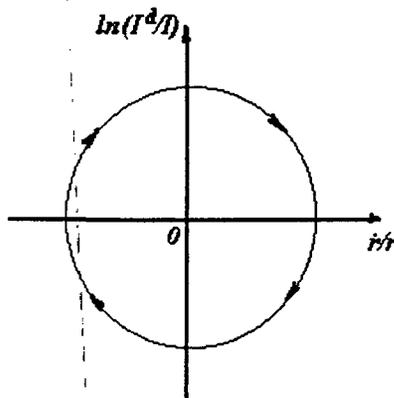


Figura 2.9. Diagrama de Fases do Modelo de Vogt

Como no modelo de Phillips, o modelo de Vogt prediz oscilações das variáveis de estado perfeitamente simétricas (as fases de expansão e contração tem exatamente a mesma duração) com amplitude constante.

2.3.3. Considerações Finais sobre os Modelos

As distinções entre o modelo de Phillips e o de Vogt são obviamente aquelas arroladas no primeiro capítulo deste trabalho entre modelos de ciclos de negócios dependentes de choques e os modelos de ciclos de negócios independentes de choques. O modelo de Phillips apresenta ciclos recorrentes e independentes de perturbações externas

somente com uma única combinação de valores dos parâmetros dentre infinitas combinações possíveis a priori. Além disso, no caso de ciclos amortecidos e explosivos, faz-se necessária a existência de forças externas para realimentar e amortecer tais ciclos, respectivamente. Já o modelo de Vogt não depende de forma nenhuma de uma combinação específica dos valores dos parâmetros e nem de qualquer força externa para a manutenção do movimento cíclico das variáveis de estado. Em suma, os ciclos de negócios neste modelo são explicados completamente pelas interações entre as variáveis endógenas do sistema econômico, ou seja, os ciclos são totalmente explicados pelo *modus operandis* da economia.

Apesar de mostrar ciclos gerados endogenamente, os ciclos de negócios no modelo de Vogt, semelhante ao modelo de Phillips, são simétricos e com amplitude constante, além de oscilarem em torno de um ponto estacionário constante. Portanto, deste modelo deriva-se predições que não estão de acordo com importantes fatos estilizados listados no capítulo um. Os modelos que serão apresentados adiante não exibem tais deficiências, devido basicamente à mudança nas suas estruturas formais. Nestes são incorporadas interações não-lineares entre os agregados macroeconômicos. Outra fraqueza de modelos de ciclos independentes de choques *lineares* e, portanto, do modelo de Vogt, é que estes vão ter sempre um ponto de equilíbrio que é um *centro*, ou seja, um ponto de equilíbrio não-hiperbólico. Isto implica, pelo teorema 2.5 do capítulo anterior, que tais modelos são *estruturalmente instáveis*.

Apêndice 2.A. Trajetórias do Modelo de Phillips

O modelo de Phillips pode ser exposto alternativamente como segue. Diferenciando-se com relação ao tempo o mecanismo de ajustamento de erros da produção agregada em (SP.6) tem-se:

$$\dot{Y} = \alpha_1 [\dot{C} + \dot{I} + \dot{Z} - \dot{Y}] \quad (2.A.1)$$

Quanto ao consumo agregado, a EDO descrevendo seu padrão de evolução pode ser diretamente obtida da suposição (SP.2) através da diferenciação da função consumo com relação ao tempo.

$$\dot{C} = c\dot{Y} \quad (2.A.2)$$

Isolando-se $I(t)$ em (SP.6) e introduzindo-se a função consumo na expressão resultante, obtém-se:

$$I = \frac{\dot{Y}}{\alpha_1} + (1-c)Y - Z \quad (2.A.3)$$

Finalmente, consegue-se o padrão de evolução do investimento agregado em função da produção agregada substituindo-se (2.A.3) em (2.35):

$$\dot{I} = \beta_1 \left[\left(\frac{\alpha_1 \kappa - 1}{\alpha_1} \right) \dot{Y} - (1-c)Y + Z \right] \quad (2.A.4)$$

Tendo em mãos os padrões de evolução do consumo e investimento agregados descritos como função da produção agregada e considerando que $\dot{Z} = 0$ [suposição (SP.7)], a EDO, descrevendo as variações do produto agregado, pode ser construída, bastando para isso introduzir (2.A.2) e (2.A.4) em (2.A.1), do que resulta:

$$\dot{Y}(t) + [\alpha_1(1-c) - \alpha_1\beta_1\kappa + \beta_1]\dot{Y}(t) + [\alpha_1\beta_1(1-c)]Y(t) = \alpha_1\beta_1Z \quad (2.A.5)$$

A resolução desta EDO linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes fornecerá a trajetória temporal da produção agregada do sistema econômico e, conseqüentemente, as trajetórias das demais variáveis de estado do sistema.

A equação característica de (2.A.5) é dada por:

$$\lambda^2 + [\alpha_1(1-c) - \alpha_1\beta_1\kappa + \beta_1]\lambda + [\alpha_1\beta_1(1-c)] = 0, \quad (2.A.6)$$

desta resulta:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha_1(1-c) - \alpha_1\beta_1\kappa + \beta_1}{2} \pm \frac{\sqrt{[\alpha_1(1-c) - \alpha_1\beta_1\kappa + \beta_1]^2 - 4[\alpha_1\beta_1(1-c)]}}{2} \quad (2.A.7)$$

A solução complementar de (2.A.5) é:

$$Y_h(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.A.8)$$

A solução particular de (2.A.5) é obviamente $Y_p(t) = Z / (1 - c)$. Logo, a solução geral de (2.A.5) é:

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{Z}{1 - c} \quad (2.A.9)$$

É bem conhecido que (2.A.9) apresentará um comportamento oscilatório não amortecido e não explosivo se, e somente se, as raízes características (autovalores) forem números imaginários puros. Com base em (2.A.7) esta condição é satisfeita se, e somente se:

$$\alpha_1(1 - c) - \alpha_1 \beta_1 \kappa + \beta_1 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_1 \beta_1(1 - c) > 0 \quad (2.A.10)$$

Note que a segunda condição é satisfeita, porém a primeira [equivalente a (2.39)] não, ou seja, é uma condição que tem que ser imposta. As condições (2.A.10) juntas implicam, por (2.A.7), que os autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\alpha \beta (1 - c)}$. Faça $\mu \equiv \sqrt{\alpha \beta (1 - c)}$. Logo, (2.A.9) transforma-se em:

$$Y(t) = a_1 e^{i\mu t} + a_2 e^{-i\mu t} + \frac{Z}{1 - c} \quad (2.A.11)$$

Com base nas *relações de Euler*, a solução de (2.A.11) pode ser rescrita como⁷⁹:

$$Y(t) = a_1 (\cos \mu t + i \sin \mu t) + a_2 (\cos \mu t - i \sin \mu t) + \frac{Z}{1 - c} \quad (2.A.12)$$

Sejam γ o *módulo* e θ o *argumento* das constantes complexas⁸⁰ a_1 e a_2 . Portanto, tais constantes podem ser colocadas nas suas respectivas *formas trigonométricas*:

⁷⁹ As Relações de Euler permitem expressar a exponencial de um número complexo em termos das funções seno e co-seno, como segue: $e^{\pm i x} \equiv \cos x \pm i \sin x$. Para maiores detalhes ver Chiang (1982, p. 457) ou Gandolfo (1996, cap. 14).

É importante salientar que as constantes a_1 e a_2 são números complexos definidos por duas constantes iniciais e pelos autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\alpha_1 \beta_1 (1 - c)}$. Apesar disto, o termo direito da equação (2.A.12) não assume valores complexos, pois a_1 e a_2 são complexos *conjugados*. Para ver isto basta reordenar (2.A.12) da seguinte forma:

$$Y(t) = (a_1 + a_2) \cos \mu t + (a_1 - a_2) i \sin \mu t + \frac{Z}{1 - c}$$

Sem perda de generalidade, faça $a_1 \equiv a + bi$ e $a_2 \equiv a - bi$, onde a e b são números reais. As constantes $a_1 + a_2$ e $(a_1 - a_2)i$ são na realidade constantes reais, pois $a_1 + a_2 = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ e $(a_1 - a_2)i = [(a + bi) - (a - bi)]i = 2bi^2 = -2b$. Portanto, o termo direito de (2.A.12) de fato assume somente valores reais.

⁸⁰ Seja $a + bi$ um número complexo, sendo a e b números reais. O módulo e o argumento de $a + bi$ são por definição $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arccos(a / \gamma) = \arcsen(b / \gamma)$, respectivamente.

$$\begin{aligned} a_1 &= a + bi = \gamma(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ a_2 &= a - bi = \gamma(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) \end{aligned} \quad (2.A.13)$$

Inserindo as formas trigonométricas de (2.A.13) em (2.A.12) resulta⁸¹:

$$Y(t) = 2\gamma \cos(\theta + \mu t) + \frac{Z}{1-c} \quad (2.A.14)$$

Portanto, o produto oscilará em torno do ponto de equilíbrio $Z/(1-c)$ com amplitude 2γ e período⁸² $2\pi/\mu$.

A trajetória do consumo e do investimento agregados são obtidas com base em (2.A.14), (SP.2) e (2.A.3), as quais são⁸³:

$$C(t) = 2c\gamma \cos(\theta + \mu t) + \frac{cZ}{1-c} \quad (2.A.15)$$

$$I(t) = 2b_1\gamma \cos(b_2 + \theta + \mu t) \quad (2.A.16)$$

onde $1-c = b_1 \cos b_2$ e $(c\mu/\alpha) = b_1 \operatorname{sen} b_2$. A equação (2.A.15) mostra que o consumo agregado oscila em torno de seu valor de equilíbrio $[cZ/(1-c)]$ com um período igual ao do produto $(2\pi/\mu)$, mas com uma amplitude $(2c\gamma)$ menor do que a apresentada por este (2γ) . Além disso, as fases de expansões e contrações destas duas variáveis coincidem. Por sua vez, a equação (2.A.16) demonstra que o investimento também tem uma amplitude $(2b_1\gamma)$ diferenciada daquelas apresentadas pelo produto e pelo consumo. Além disso, as fases de expansão (contração) do investimento sucedem as fases de expansão (contração) do produto em intervalos de tempo regulares. Finalmente, cabe salientar que a trajetória do estoque de capital observado é obtida, devido a (SP.5), pela integração de (2.A.16). Consequentemente, tal variável realiza uma trajetória co-senóide com amplitude constante em torno de seu valor inicial.

⁸¹Cabe lembrar que para quaisquer dois números x e y vale a igualdade $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

⁸²Tome-se dois instantes de tempo t' e t'' tal que $2\gamma \cos(\theta + \mu t') = 2\gamma \cos(\theta + \mu t'')$ e t'' tal que este seja o primeiro instante de tempo maior que t' (com t' fixado) tal que a igualdade anterior seja satisfeita. Desta igualdade infere-se que $\theta + \mu t' = \theta + \mu t''$. É conhecido que, para qualquer valor de uma variável x , tem-se $\cos x = \cos(x + 2\pi)$. Logo, $(\theta + \mu t'') - (\theta + \mu t') = \mu(t'' - t') = 2\pi$ e, portanto, o período é $(t'' - t') = 2\pi/\mu$.

⁸³A partir de (2.A.14) e (2.A.3) infere-se:

$$I(t) = 2\gamma[(1-c) \cos(\theta + \mu t) - (c\mu/\alpha) \operatorname{sen}(\theta + \mu t)]$$

Sejam b_1 e b_2 constantes reais arbitrárias. Faça $1-c = b_1 \cos b_2$ e $(c\mu/\alpha) = b_1 \operatorname{sen} b_2$. Logo, a expressão anterior pode ser reexpressa como:

$$I(t) = 2b_1\gamma[\cos b_2 \cos(\theta + \mu t) - \operatorname{sen} b_2 \operatorname{sen}(\theta + \mu t)],$$

da qual resulta (2.A.16).

3

A CONTRIBUIÇÃO PIONEIRA DE KALDOR

Este capítulo é dedicado inteiramente à discussão do famoso "*Model of Trade Cycle*" elaborado por Kaldor no final da década de trinta (Kaldor, 1940). O modelo de Kaldor tem sua importância na história da construção de modelos sobre o fenômeno dos ciclos de negócios por ser a primeira tentativa de avaliar os efeitos da não-linearidade em modelos de ciclos e mesmo uma das primeiras na ciência econômica (Gabisch e Lorenz, 1989, p. 129).

Em seu modelo, Kaldor procura estabelecer condições necessárias e suficientes para a existência de ciclos de negócios em economias de mercado. A obtenção de tais condições é feita basicamente a partir da interação do mecanismo do "*multiplicador*" com uma função investimento não-linear. Como destaca o próprio Kaldor (1940, p. 78), este princípio era a base das teorias dos ciclos desenvolvidas por Harrod (1936) e por Kalecki (1937). Entretanto, o modelo de Kaldor tem sua originalidade por substituir a hipótese de linearidade da função investimento e levar em consideração o efeito da acumulação de capital na demanda por bens de capital.

O método utilizado por Kaldor (1940, p. 78) para derivar as condições necessárias e suficientes para a existência de ciclos de negócios foi essencialmente geométrico. Isto levou a conclusões não muito precisas, problema este que posteriormente foi resolvido primeiramente por Chang e Smyth (1971), os quais utilizaram a teoria qualitativa das EDO's não-lineares (mais especificamente o conceito de ciclo limite e o TPB) para provar a existência de um comportamento cíclico das variáveis de estado.

A estrutura de exposição deste capítulo organiza-se da seguinte forma. Na seção 3.1 apresentar-se-á a versão original do modelo de Kaldor. Na seção 3.2 serão expostos melhoramentos formais do modelo de Kaldor, a saber, a versão formalizada deste modelo construída por Chang e Smyth. O capítulo encerra-se com a seção 3.3, onde é avaliada o desempenho do modelo de Kaldor com relação aos fatos estilizados dos ciclos de negócios.

3.1. A Dinâmica Cíclica Kaldoriana

Antes da apresentação propriamente dita da macrodinâmica cíclica derivada por Kaldor, cabe uma exposição de alguns comentários feitos pelo próprio Kaldor a respeito do processo de ajustamento no mercado de bens, mercado este que é o palco principal para a dinâmica cíclica Kaldoriana¹.

A primeira questão relevante que Kaldor (1940, p. 78) levanta a este respeito, de cunho conceitual, é a distinção entre valores *ex-ante* e valores *ex-post* da poupança e do investimento agregados. O *investimento ex-ante*² é definido como o valor da variação dos estoques de todos os tipos *planejada* pelas firmas. O *investimento ex-post* é dado pelo valor da variação dos estoques de todos os tipos *não planejada* pelas firmas. Segue de tais conceitos que as discrepâncias entre o investimento *ex-ante* e o investimento *ex-post* são geradas quando os planos de vendas das firmas não se concretizam, ou seja, quando as vendas planejadas diferem das vendas realizadas. A *poupança ex-ante* é definida como sendo o valor que as famílias planejam poupar, isto é, que *poupariam* se previssem corretamente suas rendas. Já a *poupança ex-post* é constituída pelo montante não gasto em consumo pelas famílias após o recebimento efetivo de suas rendas. Conseqüentemente, as diferenças entre valores *ex-ante* e *ex-post* da poupança agregada surgem do fato de que as rendas efetivamente recebidas pelas famílias diferem das rendas previstas por estas, ou seja, devido a mudanças inesperadas da renda das famílias³.

A segunda questão de relevo levantada por Kaldor no início de seu artigo diz respeito ao processo de ajustamento no mercado de bens propriamente dito. Dois pontos foram tratados: a forma de reação “*instantânea*” da economia a discrepâncias entre poupança *ex-ante* e investimento *ex-ante* e as condições necessárias e suficientes para que o sistema econômico, a partir de certas hipóteses específicas, elimine estas discrepâncias e convirja para um nível de atividade onde poupança e investimento *ex-ante* sejam iguais.

¹ Apresentações pouco formalizadas sobre o modelo de Kaldor podem ser encontradas em Bober (1968) e Evans (1969).

² Nesta seção, quando há uma referência ao investimento, caso não seja explicitado ao contrário, trata-se de *investimento bruto*, isto é, investimento líquido mais investimento de reposição (depreciação).

³ Com relação à adoção por parte de Kaldor da terminologia *ex-ante* e *ex-post*, a qual foi introduzida pela “*Escola Sueca*”, cabe salientar que isto implica que a dinâmica cíclica kaldoriana tem seus fundamentos em conceitos ligados à dinâmica econômica que foram estopim de um longo debate conceitual nos anos 30 entre Keynes e componentes da citada escola (entre eles: Olinh, Lindhal e Myrdal). Dada a complexidade do tema, não seria factível nem honesto tratá-lo aqui em poucas páginas. Para o leitor interessado recomenda-se a leitura das correspondências de Keynes com os Suecos contidas nos *Collected Writings* (Keynes, 1971).

Se uma economia encontra-se num estado de desequilíbrio, ou seja, num estado onde poupança e investimento *ex-ante* não são iguais, haverá uma mudança de estado, isto é, uma variação no nível de atividade⁴. O sentido da variação (expansão ou contração) do nível de atividade dependerá do tipo de desalinhamento entre a poupança *ex-ante* e o investimento *ex-ante*. Caso o nível de atividade de desequilíbrio seja caracterizado por um volume de poupança *ex-ante maior* que o volume de investimento *ex-ante*, então a poupança *ex-post* irá ser menor que a poupança *ex-ante* e/ou o investimento *ex-post* será maior do que o investimento *ex-ante*. Se a primeira espécie de disparidade entre valores planejado e realizado (poupança *ex-ante* > poupança *ex-post*) é verificada, significa que as famílias receberam menos renda do que tinham previsto, o que provocaria uma contração nos gastos em bens de consumo. Se o segundo tipo de discrepância entre valores planejado e realizado (investimento *ex-post* > investimento *ex-ante*) ocorrer, significa que houve uma acumulação indesejada de estoques, o que induziria as firmas a uma redução nas compras de bens de capital, ou seja, geraria uma contração do investimento agregado. Portanto, a redução simultânea destes componentes da demanda agregada, ou mesmo de apenas um deles, implicaria uma contração da demanda efetiva, o que teria como consequência uma queda do nível de atividade, ou seja, uma contração do nível de emprego. Caso a situação seja oposta a esta, ou seja, se o nível de atividade de desequilíbrio for caracterizado por um volume de poupança *ex-ante menor* que o volume de investimento *ex-ante*, então ocorrerá tudo exatamente ao inverso e, portanto, haverá uma expansão do nível de emprego. Em suma:

$$\begin{aligned} \dot{N} &> 0, \text{ se } I > S \\ \dot{N} &= 0, \text{ se } I = S \\ \dot{N} &< 0, \text{ se } I < S \end{aligned} \tag{3.1}$$

Descrito como o mercado de bens reage instantaneamente a desequilíbrios entre poupança e investimento *ex-ante*, Kaldor passou a tratar da questão de como o processo de ajustamento deste mercado ocorreria sob certas hipóteses a respeito do comportamento da poupança e investimento agregados *ex-ante*. Inicialmente Kaldor (1940, p. 79) supôs que tanto o investimento como a poupança agregados *ex-ante* são funções do nível de atividade, isto é, do nível de emprego. Estas relações funcionais podem ser formalmente representadas por:

⁴ Na argumentação que segue é suposto uma economia fechada sem governo.

$$I = I(N) \quad (3.2)$$

$$S = S(N) \quad (3.3)$$

No caso da função investimento, é suposto que um nível mais alto de produção conduz a um nível mais elevado de lucros, o que implica por sua vez uma maior demanda por bens de capital, dessa forma:

$$I_N > 0 \quad (3.4)$$

Com relação à propensão marginal a poupar, com base na teoria da função consumo, é suposta ser estritamente positiva e menor do que um, isto é, a derivada da função poupança tem seus valores restringidos a:

$$0 < S_N < 1 \quad (3.5)$$

A avaliação, por parte de Kaldor (1940, p. 80), das condições sob as quais uma economia converge para um estado de equilíbrio no mercado de bens foi realizada dentro de um cenário onde as taxas de variação da poupança e do investimento *ex-ante* com relação a mudanças no nível de atividade se mantêm constantes para todos os níveis de atividade econômica. Em outras palavras, Kaldor avaliou o caso em que as derivadas das funções investimento e poupança *ex-ante* são constantes, ou seja, quando tais funções são lineares⁵.

$$I = \bar{I} + bN \quad (3.6)$$

$$S = \bar{S} + sN \quad (3.7)$$

Tomando-se este padrão de reação do investimento e poupança agregados com relação ao nível de atividade, o processo de ajustamento no mercado de bens poderá levar a economia a dois estados básicos possíveis. Se a economia irá para um ou para outro dependerá da relação entre as intensidades de reação da poupança e do investimento a mudanças no nível de atividade. Os casos possíveis estão esquematicamente apresentados no Quadro 3.1

⁵ Dado que $S_N = s$ e $I_N = b$, onde s e b são constantes estritamente positivas, as funções poupança e investimento lineares resultam da integração destas simples EDO's. Dessa forma, \bar{I} e \bar{S} podem ser vistas como constantes de integração.

Conclui-se a partir do Quadro 3.1 que um comportamento mais responsivo por parte do investimento *ex-ante* do que a poupança *ex-ante* a variações no nível de atividade ($I_N = b > s = S_N$) acarretaria, a partir de um estado de desequilíbrio, uma evolução totalmente instável do sistema econômico. Por sua vez, um comportamento do investimento *ex-ante* a variações no nível de atividade menos responsivo do que a poupança *ex-ante* ($I_N = b < s = S_N$) implicaria uma tendência contrária ao caso anterior, ou seja, qualquer discrepância entre investimento e poupança tenderia a ser eliminada e o equilíbrio seria estabelecido⁶.

Quadro 3.1. Processo de Ajustamento no Mercado de Bens

Casos	o investimento reage com mais intensidade do que a poupança a variações no nível de atividade ($I_N = b > s = S_N$)	o investimento reage com menos intensidade do que a poupança a variações no nível de atividade ($I_N = b < s = S_N$)
$I > S$	(níveis de atividade à direita do ponto N^* na Figura 3.1.a) O nível de atividade tenderia a expandir-se. Esta expansão no nível de emprego provocaria um novo aumento da poupança e do investimento. Todavia, dado que o investimento aumentaria mais intensamente, o hiato entre estes se tornaria ainda maior. Esta maior discrepância entre investimento e poupança conduziria novamente a uma expansão do nível de atividade e, portanto, a uma reexpansão do hiato poupança-investimento. Este processo repetir-se-ia indefinidamente sempre em escalas cada vez maiores e a economia tenderia a um estado “explosivo”.	(níveis de atividade à esquerda do ponto N^* na Figura 3.1.b) O nível de atividade tenderia a expandir-se, implicando um aumento tanto da poupança como do investimento <i>ex-ante</i> . Contudo, dada a resposta menos intensa do investimento, a economia diminuiria a desigualdade entre poupança e investimento. Este processo de ajustamento repetir-se-á até a economia encontrar-se em N^* .
$I < S$	(níveis de atividade à esquerda do ponto N^* na Figura 3.1.a) O nível de atividade tenderia a contrair-se, implicando uma redução tanto na poupança como no investimento <i>ex-ante</i> . Contudo, dada a resposta mais intensa do investimento, a economia aumentaria ainda mais a desigualdade entre poupança e investimento, levando a uma nova contração do nível de atividade. Esta cadeia de efeitos prolongar-se-ia conduzindo a economia a um estado de estagnação completa, isto é, para um estado onde o nível de emprego fosse nulo.	(níveis de atividade à direita do ponto N^* na Figura 3.1.b) O nível de atividade tenderia a contrair-se. Esta redução no nível de emprego provocaria uma queda da poupança e do investimento. Todavia, dado que o investimento cairia menos (em termos absolutos) do que a poupança, o hiato entre estes se reduziria. Esta menor discrepância entre investimento e poupança conduziria novamente a uma contração do nível de atividade e, conseqüentemente, a uma nova redução do hiato poupança-investimento. Este processo se repetir-se-á até este hiato ser extinguido, ou seja, até a economia atingir o nível de emprego de equilíbrio N^* .

Fonte: Kaldor (1940)

⁶ Sobre este último caso, representado na Figura 3.1.b, Kaldor (1940, p. 80) comenta: *Esta, eu acredito, é a suposição implicada pela teoria do emprego do sr. Keynes.* [Tradução do autor]

A argumentação contida no Quadro 3.1 pode ser desenvolvida alternativamente de uma maneira mais formal e concisa⁷. Suponha-se que o nível de atividade ajuste-se de acordo com o excesso de demanda agregada no mercado de bens.

$$\dot{N} = \alpha_3 [I(N) - S(N)] , \text{ com } \alpha_3 \text{ constante e } \alpha_3 > 0 \quad (3.8)$$

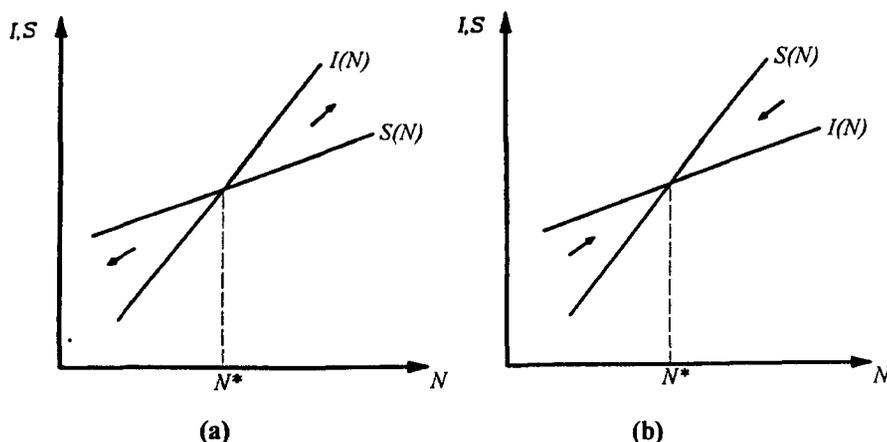


Figura 3.1. *Ajustamento no Mercado de Bens com Funções Investimento e Poupança Lineares*
Fonte: Kaldor (1940, p. 80)

A partir deste mecanismo de ajustamento de erros, no caso em que as funções poupança e investimento são lineares, a equação de movimento do nível de atividade toma a forma:

$$\dot{N} = \alpha_3 (\bar{I} + bN - \bar{S} - sN) \text{ ou } \dot{N} - \alpha_3 (b - s)N = \alpha_3 (\bar{I} - \bar{S}) \quad (3.9)$$

Esta última EDO é linear de primeira ordem não-homogênea com coeficientes constantes. Como é bem conhecido, a solução desta é dada por:

$$N(t) = N^* + [N(t_0) - N^*] e^{\alpha_3 (b-s)(t-t_0)} \quad (3.10)$$

onde $N^* \equiv \frac{\bar{S} - \bar{I}}{b - s}$. Como pode ser constatado por simples inspeção, o comportamento assintótico do nível de emprego (o limite de N quando $t \rightarrow \infty$) depende do sinal da constante $\alpha_3 (b - s)$ e do hiato $N(t_0) - N^*$. Os seis casos possíveis podem ser resumidos graficamente como consta na Figura 3.2.

⁷ A modelagem que segue não aparece explicitamente em Kaldor (1940).

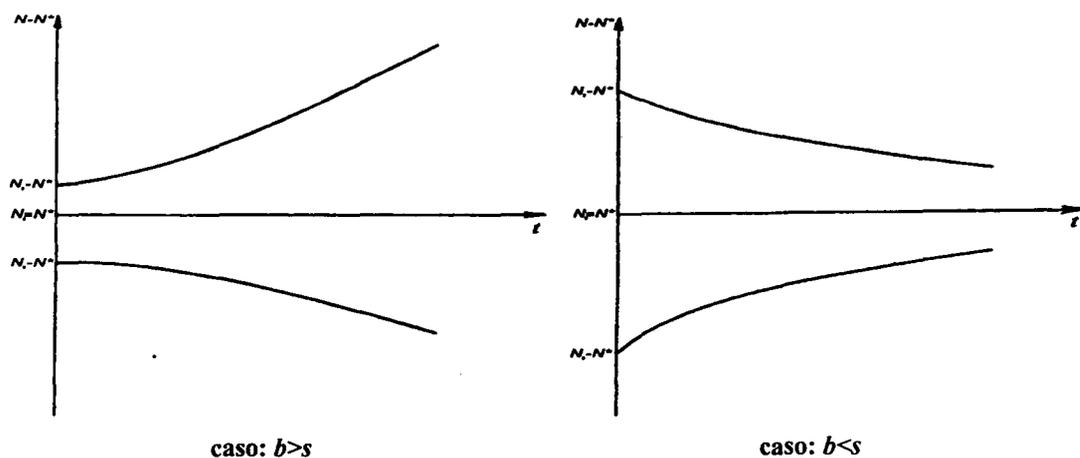


Figura 3.2. Estabilidade do Sistema (3.10)

Concluindo esta discussão, pode-se perceber que as duas formas básicas possíveis de comportamento assintótico que o sistema (3.10) pode apresentar são extremas. Pela falta de uma forte justificativa econômica e pela restrição imposta pela lei psicológica fundamental, a equação (3.5), a possibilidade de que $b > s$ não pode ser desconsiderada. Todavia, devido ao contraste com os fatos, ou seja, dada a falta de evidências de existência de economias tão instáveis, a condição $b < s$ aparece como a alternativa mais plausível. Entretanto, como salienta Kaldor (1940, p. 80), as economias observadas também não demonstram uma estabilidade tão forte. Portanto, chega-se à conclusão de que as intensidades de reação da poupança e/ou investimento *não são constantes* para todos os níveis de atividade.

A partir desta constatação Kaldor (1940, p. 81) introduz na análise do processo de ajustamento do mercado de bens duas idéias que buscam explicar estas flutuações na intensidade de resposta do investimento e/ou da poupança a variações no nível de atividade, idéias estas que dão originalidade a seu modelo de ciclos de negócios. A primeira delas foi admitir que as funções poupança e investimento podem não ser lineares com relação ao nível de atividade. A segunda foi considerar o efeito da mudança do estoque de capital sobre o comportamento da poupança e do investimento agregados.

Com relação à forma da função investimento, é assumido que para baixos e altos níveis de atividade a demanda por bens de capital tende a ser mais inelástica com relação a variações no nível de emprego do que para níveis normais de atividade. Em outras palavras, é suposto que a inclinação da função investimento (3.2) é pequena para níveis baixos e altos de atividade. A intuição econômica por trás desta suposição é a seguinte: para baixos níveis de atividade há um alto grau de capacidade ociosa e, portanto, aumentos

do nível de emprego não induziriam a grandes volumes de compras de bens de capital; para altos níveis de atividade econômica, aumentos subsequentes do nível de emprego não acarretariam um forte impulso ao investimento, devido aos crescentes custos financeiros de instalação de novos bens de capitais (custo crescentes de construção e tomada de empréstimos). Logo, como mostrado na Figura 3.3, a função investimento possuirá uma forma sigmóide, pois o investimento se desviará de um comportamento linear com relação ao nível de emprego para valores anormais deste último.

No caso da função poupança (3.3), o grau de elasticidade tem um comportamento inverso ao da função investimento, ou seja, para valores anormais (extremamente baixos ou altos) do nível de atividade, a poupança é mais elástica com respeito a variações no nível de emprego do que em níveis normais de atividade. Valores elevados de S_N para baixos níveis de atividade devem-se ao fato de que quando as rendas (no sentido microeconômico) são muito baixas, as poupanças são drasticamente cortadas e podem mesmo tornar-se negativas. No caso de altos níveis de atividade a explicação para elevados valores de S_N pode ser encontrada no fato de que os indivíduos com níveis de renda extremamente elevados provavelmente não só poupam maiores quantidades de sua renda mas também maiores proporções desta. Kaldor (1940, p. 82) afirma que esta alta sensibilidade da poupança a níveis anormais de renda por parte dos indivíduos advém do fato de que para níveis normais desta há um "*padrão de vida costumeiro*" ("*customary standard of living*"), bem como um certo nível normal de poupança. Portanto, se as rendas são muito baixas os indivíduos irão consumir seus recursos para manterem seu "padrão de vida costumeiro", já se suas rendas são altas estes indivíduos não alterarão rapidamente seu padrão de vida e, conseqüentemente, sua proporção da renda não consumida aumentará. A estas causas microeconômicas somam-se as seguintes tendências macroeconômicas. Primeiro, em níveis baixos de atividade uma proporção cada vez maior do rendimento dos trabalhadores toma a forma de benefícios (seguros) de desemprego devido à meta macroeconômica de manter o consumo agregado dentro de um certo patamar. Segundo, para altos níveis de atividade os preços dos bens e serviços tende a aumentar mais velozmente do que os salários, isto provocará uma distribuição de renda em favor dos lucros, aumentando assim a propensão a poupar da economia.



Figura 3.3. Função Investimento não-Linear
 Fonte: Kaldor (1940, p. 81)

O argumento para justificar a forma sigmóide da função investimento é muito mais robusto do que o argumento relativo à função poupança. Este último envolve simultaneamente mudança na distribuição de renda e ajustamentos de preços sem recorrer, por exemplo, a um raciocínio de equilíbrio geral, o qual permitiria avaliar de forma mais precisa esta complexa teia de interações. Entretanto, mesmo se a não-linearidade da função poupança não for sustentável de um ponto de vista teórico, o ciclo Kaldoriano não tem sua existência posta em xeque, pois: *como o leitor notará, nossa análise permaneceria válida mesmo se somente uma das duas funções se comportasse da maneira sugerida, enquanto a outra fosse linear* (Kaldor, 1940, p. 82). [Tradução do autor]



Figura 3.4. Função Poupança não-Linear
 Fonte: Kaldor (1940, p. 82)

Somente com a premissa de não-linearidade da função investimento e/ou da função poupança já é possível inferir a existência de estados de equilíbrio múltiplos. No artigo de Kaldor onde é assumida especificamente a *forma sigmóide* tanto para função investimento

como para função poupança passam a existir três pontos de equilíbrio, conforme exposto na Figura 3.5.

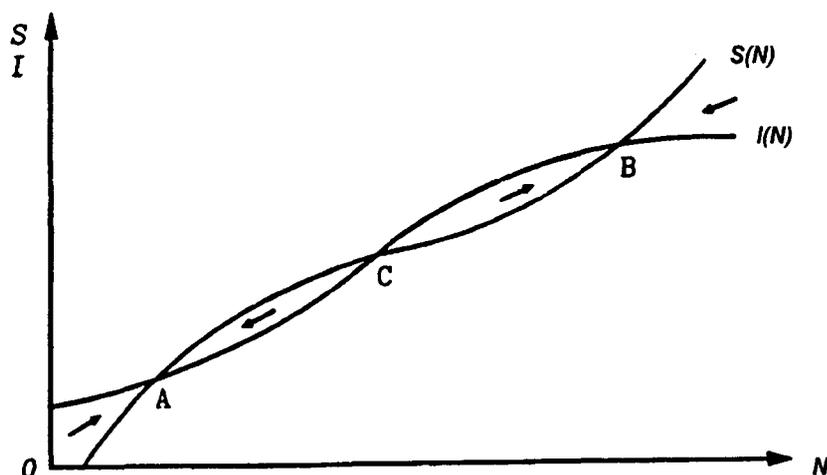


Figura 3.5. *Equilíbrios Múltiplos no Mercado de Bens*
Fonte: Kaldor (1940, p. 83)

Com respeito à estabilidade dos pontos de equilíbrio, Kaldor (1940, p. 82) assume que os pontos *A* e *B* são localmente estáveis e o ponto *C* é instável, ou seja:

$$I_N < S_N, \text{ nas vizinhanças de } A \text{ e } B \quad (3.11)$$

$$I_N > S_N, \text{ na vizinhança de } C \quad (3.12)$$

Destas hipóteses infere-se que a economia, *ceteris paribus*, tende assintoticamente para um nível de emprego de equilíbrio extremamente baixo ou alto.

Como já comentado, para obter um comportamento cíclico das variáveis macroeconômicas envolvidas, Kaldor incorporou os efeitos da acumulação de capital sobre a poupança e o investimento. Como colocado explicitamente por ele:

A chave para explicação do ciclos de negócios é encontrada no fato de que cada um desses pontos [pontos A e B na Figura 3.5] é estável somente no curto prazo: quando a atividade continua em um desses níveis, forças gradualmente acumulam [devido a variações no estoque de capital], as quais mais cedo ou mais tarde tornam essa particular posição instável. É para uma explicação da natureza dessas forças que devemos agora nos voltar. (Kaldor, 1940, p. 83). [Tradução do autor]

É importante esclarecer o significado de “curto prazo” (*short period*) para Kaldor. Curto prazo é o intervalo de tempo no qual o estoque de capital não se altera e, portanto, a poupança e o investimento agregados dependem apenas do nível de emprego. Dessa forma, Kaldor denomina $S(N)$ e $I(N)$ de *funções de curto prazo* (*short-period functions*).

A explicação da “natureza das forças” que geram o comportamento cíclico das variáveis macroeconômicas envolvidas no modelo oferecida por Kaldor é feita por meio da junção da não-linearidade (com relação ao nível de atividade) das funções investimento e poupança de curto prazo com os efeitos de longo prazo [ou seja, os deslocamentos endógenos destas funções de curto prazo no plano (N, \mathfrak{R}_+)] gerados pelas variações no estoque de capital agregado.

A exposição do argumento de Kaldor que estabelece as condições para a existência de ciclos de negócios pode ser feita como segue. Suponha (Kaldor, 1940, p. 83) que o investimento e a poupança agregada dependem não somente do nível de emprego, mas também do volume do estoque de capital da economia. Portanto, ambas as funções passam a ter mais um argumento⁸.

$$S = S(N, K) \quad (3.13)$$

$$I = I(N, K) \quad (3.14)$$

Tais funções são agora *funções de longo prazo*. Kaldor (1940, p. 83) mantém as propriedades (3.4) e (3.5) e acrescenta a estas as seguintes:

$$S_K > 0 \quad (3.15)$$

$$I_K < 0 \quad (3.16)$$

A relação positiva entre poupança e estoque de capital advém de uma espécie de “efeito riqueza real inverso” (*inverse real wealth effect*) (Gabisch e Lorenz, 1989, p. 126). Quando o nível de atividade é alto, o investimento agregado é elevado e, portanto, há uma forte acumulação de capital (investimento líquido estritamente positivo). Conseqüentemente, haverá uma maior produção de bens a cada nível de emprego e, portanto, um aumento do nível da oferta agregada, o que conduz a um aumento na renda nacional gerando um maior volume de poupança a cada nível de emprego. Quando o nível de atividade encontra-se a níveis baixos ocorre exatamente o efeito inverso. Agora a

representação da função poupança agregada no plano (N,S) é feita para uma dada quantidade do estoque de capital, isto é, a função $S(N,\bar{K})$ é uma curva de nível e é traçada para um dado \bar{K} . Assim, quanto mais alto (baixo) o valor de \bar{K} mais distante (próximo) estará a função poupança do eixo das abcissas.

A relação inversa entre investimento e estoque de capital tem uma explicação mais convincente do que possui a relação entre poupança e o estoque de capital. A acumulação de capital gera dois efeitos opostos sobre o investimento: o primeiro, é o de restringir a gama de oportunidades de investimento disponíveis; o segundo, é o de provocar surgimento de novas invenções, as quais impulsionam novos investimentos. Kaldor (1940, p. 85) argumenta que o efeito negativo supera o efeito positivo sobre o investimento, assim uma expansão do estoque de capital acaba levando a contrações no investimento. No caso de uma desacumulação de capital, ou seja, da inexistência de investimento líquido os dois efeitos trabalham no mesmo sentido, isto é, ampliam-se as oportunidades de investimento a cada nível de atividade e há um clima propenso a novas invenções. Em suma, ao contrário da função poupança, quanto mais alto o valor de \bar{K} , mais próximo estará a função investimento de curto prazo do eixo das abcissas, conforme exposto na Figura 3.6.

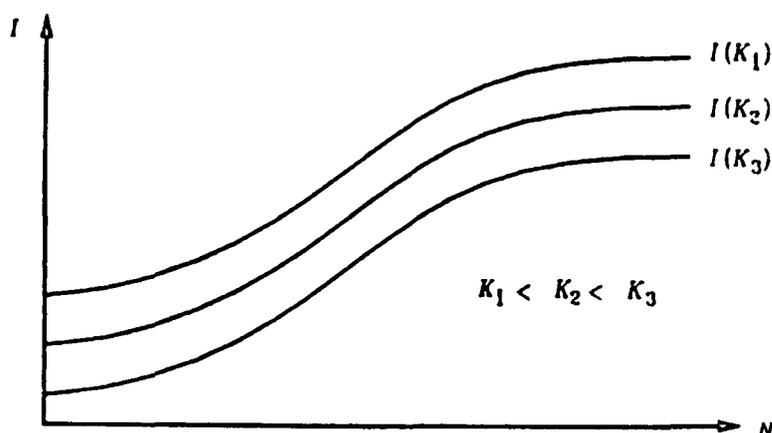


Figura 3.6. *Translações das Função Investimento*
 Fonte: Ichimura (1955, p. 210). (Figura adaptada pelo autor)

⁸ Estas funções de longo prazo, ao contrário das de curto prazo, não são postas explicitamente por Kaldor. Sua argumentação é puramente verbal e geométrica. Elas são aqui incluídas para facilitar a comparação com a versão formalizada do modelo de Kaldor feita por Chang e Smyth (1971) que será apresentada à frente.

O mecanismo gerador de ciclos

Kaldor estabeleceu a existência de um ciclo de negócios com base no seguinte argumento geométrico. Suponha que inicialmente a economia se encontre no ponto *B* na Figura 3.7.a. Neste ponto o nível de atividade é alto e, portanto, o investimento também está num patamar elevado (investimento líquido estritamente positivo), conseqüentemente, há uma expansão do estoque de capital. Esta acumulação de capital gera uma translação para baixo da função investimento e para cima da função poupança. Logo, o ponto *B* é deslocado para a esquerda e o ponto *C* para a direita, os quais se aproximam um do outro gradativamente (Figura 3.7.b) e a economia começa a sofrer uma contração no nível de emprego (a economia está no ponto *B*). Este processo se desenrola até os pontos *B* e *C* se fundirem (ponto *BC* na Figura 3.7.c) num estado onde o nível de emprego é menor do que antes. Entretanto, a economia não se mantém no ponto *BC*, continuando a contrair-se, já que na vizinhança deste ponto a poupança *ex-ante* é maior que o investimento *ex-ante* ($S > I$) e, portanto, os distúrbios (translações) provocados pela acumulação de capital serão amplificados e levarão rapidamente a economia para um fundo do ciclo, ou seja, ao ponto *A* (Figura 3.7.d)⁹. Agora no ponto *A* a economia encontra-se num nível de atividade extremamente baixo, logo o investimento está a um nível baixo (investimento líquido estritamente negativo) e, conseqüentemente, há uma contração do estoque de capital. Esta gradual redução do estoque de capital gera translações da função investimento para cima e da função poupança para baixo. Dessa forma, reaparecerão três pontos de equilíbrio (Figura 3.7.e). A economia continuará a expandir-se e o ponto *A* (onde a economia se encontra) começará a ser deslocado para direita e o ponto *C* para a esquerda, os quais passam a aproximar-se um do outro gradativamente (Figura 3.7.f). Este processo se desenrola até os pontos *A* e *C* se fundirem (ponto *AC* na Figura 3.7.g). Entretanto, a economia não permanece no estado *AC*, continuando a expandir-se, pois na vizinhança deste ponto o investimento *ex-ante* é maior que a poupança *ex-ante* ($I > S$). Dessa forma, os distúrbios (translações) gerados pela desacumulação de capital se amplificarão e conduzirão a

⁹ Kaldor (1940, p. 84) comenta que: *a rota seguida na transição de BC [B no original] para A pode ser ao longo da curva I ou da curva S, a depender se a poupança ex-post é ajustada ao investimento ex-ante ou o investimento ex-post à poupança ex-ante - i. e., à medida que o desapontamento das expectativas ocorram do lado das rendas, ou do nível dos estoques das firmas* [Tradução do autor]. A que se reconhecer que estes comentários são pouco esclarecedores, pois não é de fato explicitado nenhum mecanismo de ajustamento.

economia rapidamente a um *pico* do ciclo, isto é, ao ponto *B* (Figura 3.7.h)¹⁰. Agora, no ponto *B*, a economia se encontra num nível de atividade extremamente alto. Logo, o investimento está num nível elevado e, portanto, há uma expansão do estoque de capital. Esta gradual acumulação de estoque de capital gera translações da função investimento para baixo e da função poupança para cima. Tais deslocamentos levarão novamente ao reaparecimento de três pontos de equilíbrio e ao retorno da economia ao seu estado inicial (ponto *B* na Figura 3.7.a) o que completa um período de um ciclo de negócios e a partir daí inicia-se um novo período deste ciclo.

A partir desta argumentação geométrica, Kaldor (1940, p. 85) afirma que a interação entre as funções poupança e investimento não-lineares e o mecanismo do multiplicador gerarão flutuações nas variáveis macroeconômicas que caracterizam o estado da economia se, e somente se, as seguintes condições forem verificadas:

CONDIÇÃO (CK.1): Para níveis *normais* de atividade a condição $I_N > S_N$ deve ser satisfeita;

CONDIÇÃO (CK.2): Para níveis *anormais* (extremamente altos ou baixos) de atividade a condição $I_N < S_N$ deve ser satisfeita;

CONDIÇÃO (CK.3): No ponto de equilíbrio *BC* (*AC*), o nível de investimento deve ser grande (pequeno) o suficiente para que haja um investimento líquido estritamente positivo (negativo) e, portanto, uma translação para baixo (cima) da função investimento e para cima (baixo) da função poupança. Equivalentemente, o nível de emprego em que o investimento líquido é nulo (equilíbrio de longo prazo) deve ser um nível de emprego localizado entre os pontos *BC* e *AC* (excluindo-os).

Considerando (CK.1), a condição (CK.3) pode ser recolocada como¹¹: existe um N^* tal que $S(N^*, K) = I(N^*, K)$, $I_L \equiv I(N^*, K) - I_R = 0$ e $I_N(N^*, K) > S_N(N^*, K)$, onde I_L é o investimento líquido e I_R é o investimento de reposição. Em outras palavras o equilíbrio de longo prazo tem que estar localizado na faixa de nível de atividade normal.

¹⁰ Os comentários sobre a transição de *BC* para *A* feitos na nota de rodapé anterior aplicam-se a transição de *AC* para *B*.

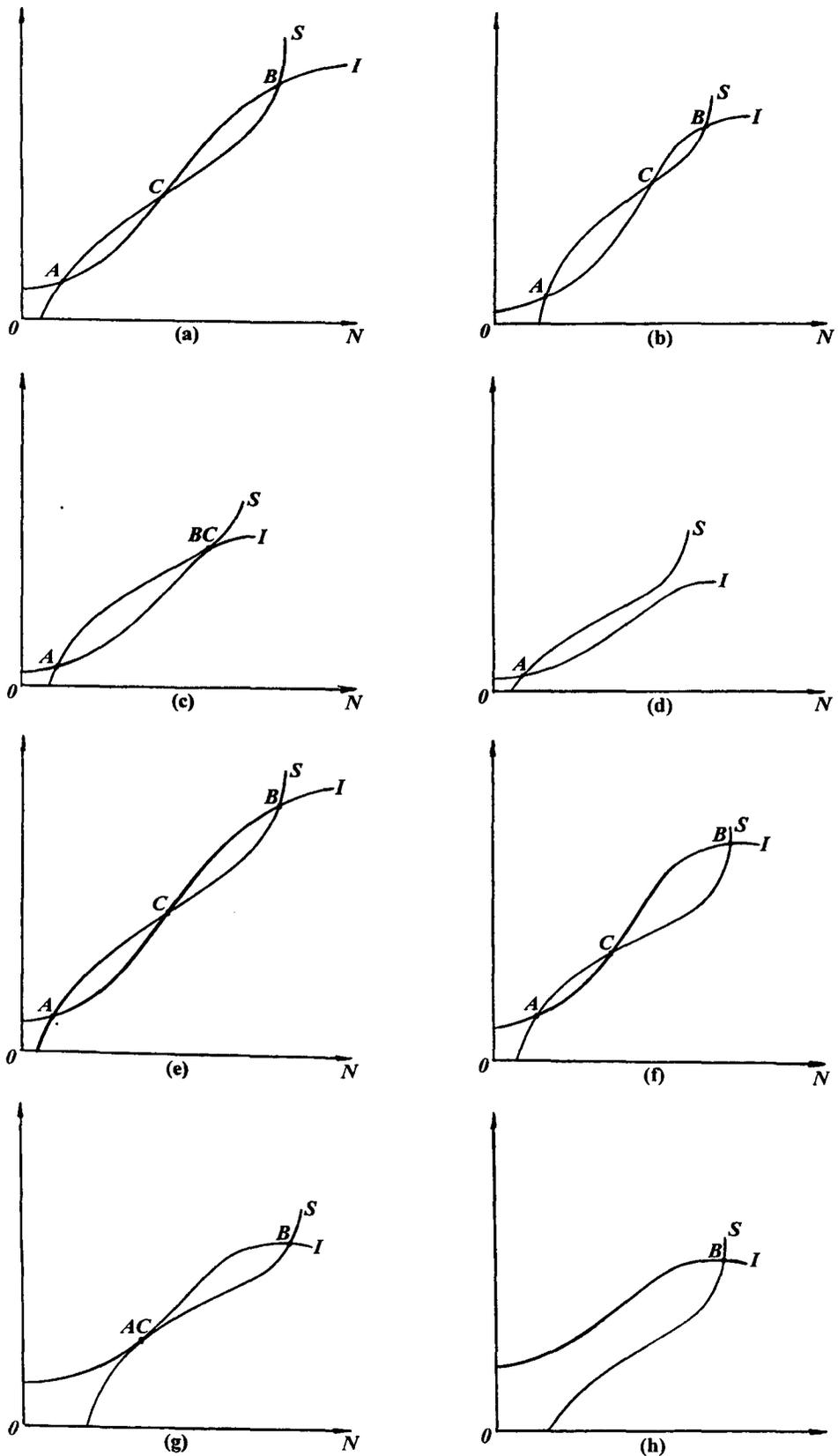


Figura 3.7. A Dinâmica Cíclica Kaldoriana

Fonte: Kaldor (1940, p.84) (Figura adaptada pelo autor)

¹¹ Esta reexpressão de condição (CK.3) de Kaldor é encontrada (utilizando-se a variável renda no lugar da variável nível de emprego) em Chang e Smyth (1971, p. 40) e Gabisch e Lorenz (1989, p. 128).

3.2. A Formalização do Modelo de Kaldor: a versão Chang-Smyth

O modelo de ciclos de negócios de Kaldor vem despertando muito interesse por parte dos estudiosos do fenômeno dos ciclos de negócios. Após a publicação deste trabalho houve uma duradoura onda de aprimoramentos formais¹². Nesta seção apresentar-se-á o primeiro deste conjunto de trabalhos, no qual demonstra-se de fato a existência de uma trajetória periódica no modelo de Kaldor, a saber, a versão de Chang e Smyth (1971)¹³.

Estes autores rerepresentaram o modelo de ciclos de negócios de Kaldor dentro de uma roupagem mais formalizada do que a apresentação original. O modelo foi transformado num *sistema de EDO's bidimensional autônomo não-linear*. A este sistema foi aplicado o TPB, com o intuito de estabelecer as condições de existência de um ciclo limite. Deste exercício resultou uma fixação precisa das condições necessárias e suficientes para a existência de um comportamento cíclico das variáveis macroeconômicas envolvidas.

3.2.1. O modelo: suposições e equações de movimento

A versão de Chang e Smyth (1971, p. 38) é construída a partir das seguintes suposições básicas:

SUPOSIÇÃO (SCS.1): O investimento *líquido ex-ante* e a poupança *ex-ante* são ambas funções (gerais não-lineares) do nível de renda e do estoque de capital, ou seja, $I = I(Y, K)$ e $S = S(Y, K)$, as quais possuem derivadas parciais primeiras contínuas que satisfazem as seguintes propriedades: $I_Y > 0$, $I_K < 0$, $S_Y > 0$ e $S_K < 0$ para todo $Y \geq 0$ e $K \geq 0$.

SUPOSIÇÃO (SCS.2): O nível de renda varia proporcionalmente ao excesso de demanda agregada, $Y = \alpha_3 [I - S]$ com α_3 constante e $\alpha_3 > 0$.

¹² Esta onda dura até hoje, veja por exemplo o artigo de Dohtani (1996) publicado numa revista de *matemática aplicada*.

¹³ Antes do trabalho de Chang e Smyth houve outros trabalhos relacionados ao modelo de ciclos de Kaldor, a saber: Ichimura (1954), Ichimura (1955) e Black (1956). Todavia, nestes artigos não existia uma prova analítica de existência de uma órbita fechada no plano de fases do modelo de ciclos de Kaldor.

SUPosição (SCS.3): Não há depreciação e a variação do estoque de capital é uma média ponderada dos níveis de investimento líquido e poupança *ex-ante*, ou seja, $\dot{K} = \mu I + (1 - \mu)S$ com μ constante $\mu \in [0,1]$.

Estas suposições, além de mais precisas em termos formais, são levemente diferentes daquelas adotadas por Kaldor. Na suposição (SCS.1) é introduzida como variável medidora do nível de atividade a *renda nacional* no lugar da variável *nível de emprego* utilizada originalmente. Isto foi feito devido ao fato de que a renda é a variável geralmente usada para este fim contemporaneamente (Chang e Smyth, 1971, p. 38). Ainda com relação à suposição (SCS.1), observa-se que a hipótese Kaldoriana da existência de uma relação positiva entre poupança e estoque de capital a um dado nível de renda ($S_K > 0$) é substituída pela proposição inversa, ou seja, $S_K < 0$. Este procedimento foi justificado apelando-se para o aparente consenso entre os economistas em torno do *efeito riqueza*, isto é, de que um aumento (decréscimo) na riqueza, mantendo-se a renda constante, acarretará uma expansão (contração) no consumo¹⁴.

A suposição (SCS.2) é a adoção explícita de uma hipótese sobre o processo de ajustamento no mercado de bens, a saber, a de que a renda se ajusta com base no mecanismo de correção de erros associado a uma defasagem distribuída exponencialmente.

Com a suposição (SCS.3) leva-se em consideração de maneira explícita e formal o ajustamento do estoque de capital da economia, coisa que Kaldor não tinha feito. Chang e Smyth (1971; p. 39) trabalham com uma função de investimento *líquido*, ao contrário de Kaldor que trabalhou com uma função de investimento *bruto*. Além disso, Chang e Smyth (1971, p. 39) supõem que o processo de ajuste no mercado de bens se dá ao longo da curva de investimento, ou seja, é suposto que o investimento *ex-ante* é sempre igual ao investimento *ex-post* e, portanto, que o desequilíbrio no mercado de bens é caracterizado sempre pelo desalinhamento entre a poupança *ex-ante* e a poupança *ex-post*, formalmente

¹⁴ Chang e Smyth (1971, p. 39) argumentam que dado que a poupança depende do nível de renda e do nível do estoque de capital, $S = S(Y, K)$, e a renda do nível de emprego e do nível de estoque de capital, $Y = Y(N, K)$, então $S = S(Y(N, K), K) \equiv \bar{S}(N, K)$. Portanto, o impacto de uma variação no nível do estoque de capital sobre a poupança é dado por $\bar{S}_K = S_Y Y_K + S_K$. Chang e Smyth afirmam que Kaldor assumiu que $\bar{S}_K > 0$. Isto significa que Kaldor supôs que o impacto positivo da acumulação de capital sobre o volume de poupança *ex-ante* via expansão da renda induzida pela expansão do estoque de capital ($S_Y Y_K$) supera o efeito de contração (S_K).

$\dot{K} = I$. Contudo, Chang e Smyth (1971, p. 44) afirmam que se for suposto que¹⁵ $\dot{K} = S$ ou de forma mais geral que¹⁶ $\dot{K} = \mu I + (1 - \mu)S$, as condições de existência de um ciclo limite não serão alteradas. Por isto, em (SCS.3) adotou-se a hipótese mais geral. Para comparar os resultados aqui obtidos com os respectivos resultados no texto original de Chang e Smyth basta fazer $\mu = 1$. Para o caso $\dot{K} = S$ (não feito explicitamente no texto original), basta fazer $\mu = 0$.

Assumidas tais premissas sobre o comportamento da poupança e do investimento, bem como com respeito aos processos de ajustamento da renda e do estoque de capital, as transições de estado de uma economia com estas características passam a ser governadas pelo seguinte sistema de EDO's bidimensional autônomo não-linear:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha_3 [I(Y, K) - S(Y, K)] \\ \dot{K} &= \mu I(Y, K) + (1 - \mu)S(Y, K) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Este sistema é definido no plano de fases $\Theta = \{(Y, K) \in \mathfrak{R}_+^2\}$.

3.2.2. A existência de um ciclo limite

Construída a formulação dinâmica do modelo de Kaldor, Chang e Smyth passam ao estabelecimento das condições de existência de um ciclo limite. Esta tarefa pode ser rigorosamente apresentada na seqüência especificada no programa de aplicação do TPB explicitado no capítulo dois.

Existência de um ponto de equilíbrio

Dado que as funções investimento e poupança são gerais¹⁷, as condições de existência, unicidade e estabilidade local de um ponto de equilíbrio do sistema (3.17)

¹⁵ A poupança *ex-ante* é sempre realizada, isto é, o excesso de demanda agregada por capital é preenchido por estoques reguladores (buffer stocks).

¹⁶ O excesso de demanda agregada por capital é preenchido em parte pela produção não planejada e em parte pelo movimento dos estoques.

¹⁷ No sentido de que somente são especificados os sinais de suas derivadas parciais e a classe a que pertencem (o "quanto" são contínuas).

foram obtidas a partir da análise das *curvas de demarcação (demarcation curves)*¹⁸ implicitamente definidas pelas equações:

$$\begin{aligned}\alpha_3[I(Y, K) - S(Y, K)] &= 0 \\ \mu I(Y, K) + (1 - \mu)S(Y, K) &= 0\end{aligned}\tag{3.18}$$

O locus onde a *renda*, ou seja, a curva de demarcação $\dot{Y} = 0$ é determinada implicitamente pela primeira equação em (3.18). A inclinação desta curva no plano (Y, K) pode ser obtida por intermédio do teorema da função implícita:

$$\left. \frac{dK}{dY} \right|_{\dot{Y}=0} = \frac{S_Y - I_Y}{I_K - S_K}\tag{3.19}$$

As informações dadas por (SCS.1) são insuficientes para determinar o sinal desta expressão. Por sua vez, o locus onde o estoque de capital mantém-se inalterado, isto é, a curva de demarcação $\dot{K} = 0$, definida implicitamente a partir da segunda equação em (3.18), tem sua inclinação no plano (Y, K) completamente definida por (SCS.1), a saber:

$$\left. \frac{dK}{dY} \right|_{\dot{K}=0} = -\frac{\mu I_Y + (1 - \mu)S_Y}{\mu I_K + (1 - \mu)S_K} > 0, \text{ para todo } Y \geq 0\tag{3.20}$$

Um ponto de equilíbrio (Y^*, K^*) é obtido pelo cruzamento das curvas de demarcação em (3.18). Para garantir a existência (Y^*, K^*) , Chang e Smyth (1971, p. 39-41) impõem as seguintes condições ao modelo:

CONDIÇÃO (CCS.1): O investimento líquido *ex-ante* é mais responsivo a variações no estoque de capital do que a poupança *ex-ante*, isto é, $|I_K| > |S_K|$ para todo $Y \geq 0$ e $K \geq 0$.

CONDIÇÃO (CCS.2): As curvas de demarcação apresentam as seguintes propriedades:

- (i) a curva de demarcação $\dot{Y} = 0$ intersecciona, no plano (Y, K) , o eixo Y num ponto finito Y_3 à direita do ponto de equilíbrio, ou seja, existe $Y_3 > Y^*$ tal que $I(Y_3, 0) = S(Y_3, 0)$. Além disso, $K \rightarrow \infty$ quando $Y \rightarrow 0$;

¹⁸ Este termo é utilizado por Chiang (1992, p. 629) e será adotado no restante desta dissertação.

(ii) a curva de demarcação $\dot{K} = 0$ intersecciona, no plano (Y, K) , o eixo K num ponto $K_0 > 0$ tal que $\mu I(0, K_0) + (1 - \mu)S(0, K_0) = 0$. Além disso, dado que a curva de demarcação $\dot{K} = 0$ é contínua e estritamente crescente no intervalo fechado $[0, Y_3]$, esta é limitada e, portanto, existe no eixo K um ponto finito K_3 tal que $\mu I(Y_3, K_3) + (1 - \mu)S(Y_3, K_3) = 0$.

A partir de (SCS.1), (CCS.1) e (CCS.2) infere-se que as curvas de demarcação se cruzarão pelo menos uma vez (podendo fazê-lo mais de uma vez). Isto é suficiente para que exista um ponto de equilíbrio (Y^*, K^*) . Na Figura 3.8 são apresentados alguns casos possíveis.

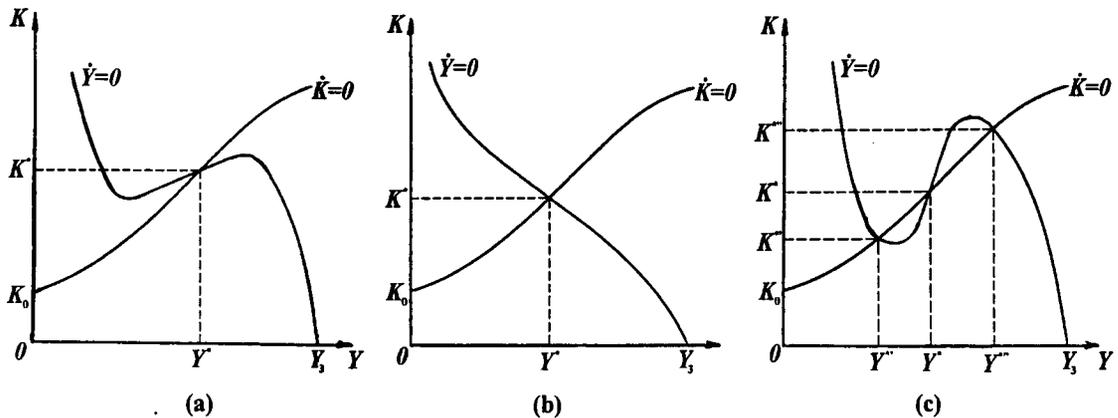


Figura 3.8. Existência de um Ponto de Equilíbrio no Modelo de Kaldor

Unicidade do ponto de Equilíbrio

A unicidade do ponto de equilíbrio é obtida pela garantia de que as curvas de demarcação em (3.18) cruzam-se uma, e somente uma vez. Para garantir isto Chang e Smyth acrescentam a seguinte condição:

CONDIÇÃO (CCS.3): $S_K I_Y - I_K S_Y > 0$

Esta condição assegura a unicidade de (Y^*, K^*) devido ao fato de que a curva de demarcação $\dot{K} = 0$ é mais inclinada do que a curva de demarcação $\dot{Y} = 0$, mesmo que esta última seja positivamente inclinada, ou seja:

$$\left. \frac{dK}{dY} \right|_{\dot{Y}=0} - \left. \frac{dK}{dY} \right|_{\dot{K}=0} = \frac{I_K S_Y - S_K I_Y}{[\mu I_K + (1-\mu)S_K](I_K - S_K)} < 0, \text{ para todo } Y \geq 0 \quad (3.21)$$

Análise de estabilidade local do ponto de equilíbrio

A matriz jacobiana da linearização de (3.17) em torno de (Y^*, K^*) é dada por:

$$Df(Y^*, K^*) = \begin{bmatrix} \alpha_3(I_Y^* - S_Y^*) & \alpha_3(I_K^* - S_K^*) \\ \mu I_Y^* + (1-\mu)S_Y^* & \mu I_K^* + (1-\mu)S_K^* \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

a qual rende:

$$\begin{cases} \det Df(Y^*, K^*) = \alpha_3[S_K^* I_Y^* - I_K^* S_Y^*] \\ \text{tr} Df(Y^*, K^*) = \alpha_3(I_Y^* - S_Y^*) + \mu I_K^* + (1-\mu)S_K^* \end{cases} \quad (3.23)$$

Com base no Quadro 2.1 do capítulo dois, para que (Y^*, K^*) seja localmente instável, mas não um ponto de sela, é suficiente que $\det Df(Y^*, K^*) > 0$ e $\text{tr} Df(Y^*, K^*) > 0$. A primeira dessas condições é garantida por (SCS.1) e (CCS.3). A partir da expressão do traço da matriz jacobiana em (3.23) Chang e Smyth (1971, p. 40) impõem a seguinte condição:

CONDIÇÃO (CCS.4): $\alpha_3(I_Y^* - S_Y^*) + \mu I_K^* + (1-\mu)S_K^* > 0$

Dessa maneira, é garantido que (Y^*, K^*) comporta-se localmente como uma *fonte* (um espiral, um foco ou um nó instável).

Assumidas as quatro condições anteriores pode-se esboçar com certa precisão o diagrama de fases do sistema (3.17), o qual se encontra exposto na Figura 3.9. Chang e Smyth traçaram a curva de demarcação $\dot{Y} = 0$ considerando a condição imposta por Kaldor de que $I_Y > S_Y$ para níveis *normais* de renda e $I_Y < S_Y$ para níveis *anormais* (baixos e altos) de renda. É importante destacar que a instabilidade local de (Y^*, K^*) conduz a

(CCS.4). Tal condição implica que $I_Y^* > S_Y^*$. Logo, (Y^*, K^*) está localizado na faixa de renda normal (intervalo (Y_1, Y_2) na Figura 3.9).

Para determinar a direção de mudança das variáveis de estado a partir de qualquer ponto do plano de fases, os seguintes fatos são relevantes:

$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial K} = \alpha_3 (I_K - S_K) < 0, \text{ para todo } Y \geq 0 \text{ e } K \geq 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial Y} = \mu I_Y + (1 - \mu) S_Y > 0, \text{ para todo } Y \geq 0 \text{ e } K \geq 0 \quad (3.25)$$

Dado que $\alpha_3 > 0$ e $\mu \in [0, 1]$, o sinal da primeira expressão é determinado por (SCS.1) e (CCS.1) e o da segunda somente por (SCS.1). A derivada (3.24) expressa o comportamento dinâmico da renda nacional com respeito a variações no estoque de capital, para um dado nível de renda¹⁹. Dessa forma, pontos *abaixo* (*acima*) da curva de demarcação $\dot{Y} = 0$ devem apresentar uma velocidade da renda *positiva*, $\dot{Y} > 0$ (*negativa*, $\dot{Y} < 0$). A derivada (3.25) expressa o comportamento dinâmico do estoque de capital com relação a variações da renda nacional, para um dado nível do estoque de capital. Logo, pontos *à esquerda* (*à direita*) da curva de demarcação $\dot{K} = 0$ devem apresentar uma velocidade do estoque de capital *negativa*, $\dot{K} < 0$ (*positiva*, $\dot{K} > 0$).

¹⁹ Seja $\bar{Y} \geq 0$ um nível de renda qualquer. Tome-se o conjunto $\{(Y, K) \in U = \mathfrak{R}_+^2 : Y = \bar{Y} \geq 0\}$ formado por todos os estados factíveis em que o nível de renda é \bar{Y} . Geometricamente, este conjunto é uma semi-reta com extremidade em \bar{Y} e paralela ao eixo K (ordenada) no plano de fases. Faça $\dot{Y}(Y, K)$ denotar a velocidade da renda no estado (Y, K) . A derivada (3.24) implica que $\dot{Y}(\bar{Y}, K_1) > \dot{Y}(\bar{Y}, K_2)$, quando $K_2 > K_1$. Em outras palavras, um ponto pertencente à semi-reta $\{(Y, K) \in U = \mathfrak{R}_+^2 : Y = \bar{Y} \geq 0\}$, quanto mais distante do eixo Y (abscissa), menor será a velocidade da renda. Seja \bar{K} o nível de estoque de capital tal que (\bar{Y}, \bar{K}) pertença à curva de demarcação $\dot{Y} = 0$. Dado que $\dot{Y}(\bar{Y}, \bar{K}) = 0$ e $\dot{Y}(\bar{Y}, K_1) > \dot{Y}(\bar{Y}, K_2)$ para $K_2 > K_1$, então $\dot{Y}(\bar{Y}, K) > 0$ para todo $K < \bar{K}$ e $\dot{Y}(\bar{Y}, K) < 0$ para todo $K > \bar{K}$. Enfim, como o argumento anterior é válido para qualquer $Y \geq 0$, então pontos *abaixo* (*acima*) da curva de demarcação $\dot{Y} = 0$ devem apresentar uma velocidade da renda *positiva*, $\dot{Y} > 0$ (*negativa*, $\dot{Y} < 0$).

A interpretação anterior pode ser aplicada de forma análoga à derivada (3.25). Na determinação da direção de mudança das variáveis de estado a partir de qualquer ponto do plano de fases nos modelos resenhados nos capítulos cinco e seis o raciocínio explicitado no parágrafo anterior estará implícito.

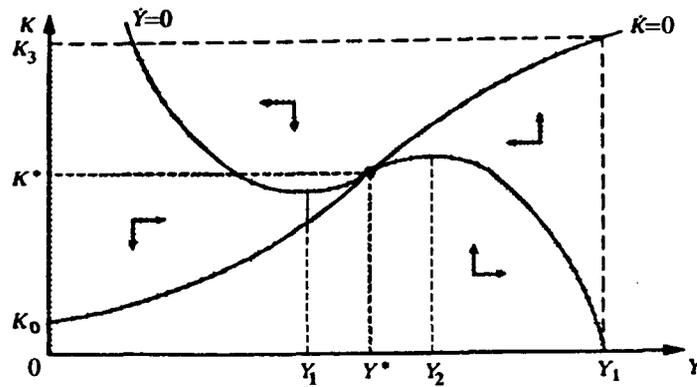


Figura 3.9. Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Kaldor (versão Chang-Smyth)

Fonte: Chang e Smyth (1971, p. 41). (Figura adaptada pelo autor).

Construção do conjunto Ω

Chang e Smyth (1971, p. 42) definem o seguinte conjunto $\Omega = \{(Y, K) \in \Theta = \mathbb{R}_+^2 : Y \leq Y_3 \text{ e } K \leq K_3\} - V((Y^*, K^*), \varepsilon)$. Para mostrar que Ω é positivamente invariante deve-se demonstrar que o vetor velocidade em sua fronteira aponta para o seu interior. Considerando a argumentação relativa à direção de mudança do ponto representativo em cada uma das quatro regiões formadas pelas curvas de demarcação $\dot{Y} = 0$ e $\dot{K} = 0$ anteriormente a partir de (3.24) e (3.25), conclui-se que (veja Figura 3.10): (i) o segmento \overline{AB} está na região onde $\dot{Y} < 0$ e $\dot{K} < 0$, logo o vetor velocidade aponta para sudoeste; (ii) os segmentos $\overline{BK_3}$ e $\overline{OK_3}$ estão na região onde $\dot{Y} > 0$ e $\dot{K} < 0$, então o vetor velocidade aponta para sudeste; (iii) o segmento $\overline{OY_3}$ está na região onde $\dot{Y} > 0$ e $\dot{K} > 0$, então o vetor velocidade aponta para nordeste e (iv) o segmento $\overline{AY_3}$ está na região onde $\dot{Y} < 0$ e $\dot{K} > 0$, então o vetor velocidade aponta para noroeste. Em suma, em cada um destes segmentos de reta que fazem parte da fronteira do conjunto Ω o vetor velocidade aponta para o interior deste. Logo, desde que na fronteira da vizinhança $V((Y^*, K^*), \varepsilon)$ o vetor velocidade aponta para o interior de Ω [pois, (Y^*, K^*) não é um ponto de sela e é instável localmente], o conjunto Ω é positivamente invariante e apesar de circundar o ponto

(Y^*, K^*) não o contém. Além disso, Se uma órbita de (3.17) passa em qualquer ponto $(Y, K) \in \{\mathfrak{R}_+^2 - \Omega\}$ esta acabará entrando na região Ω .²⁰

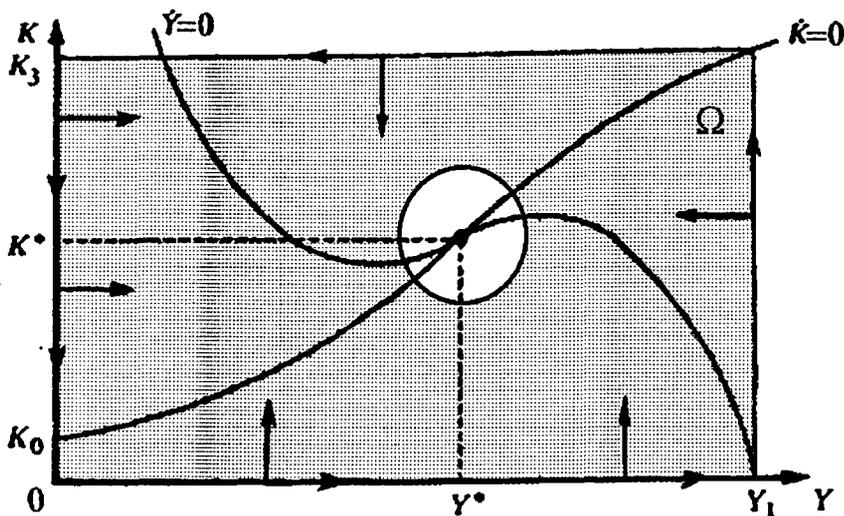


Figura 3.10. O conjunto Ω do Modelo de Kaldor (versão Chang-Smyth)

Teorema de existência de um ciclo

Finalmente, pode-se enunciar o teorema de existência de um ciclo limite no plano de fases de (3.17) estabelecido por Chang e Smyth (1971, p. 41).

Teorema 3.1: (Chang-Smyth)

Se o sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha_3 [I(Y, K) - S(Y, K)] \\ \dot{K} &= \mu I(Y, K) + (1 - \mu) S_K \end{aligned} \quad (3.17)$$

definido em $\Theta = \{(Y, K) \in \mathfrak{R}_+^2\}$ e construído a partir das suposições (SCS.1), (SCS.2) e (SCS.3), satisfaz as condições (CCS.1), (CCS.2), (CCS.3) e (CCS.4), então toda semi-órbita positiva $\gamma^+(Y_0, K_0)$ que inicie em qualquer ponto $(Y_0, K_0) \in \{\Theta - V((Y^*, K^*), \varepsilon)\}$ ou é um ciclo limite ou converge para um ciclo limite.

²⁰ Chang e Smyth (1971, p. 41), ao enunciar seu teorema de existência, supõem que $I(Y, K) < S(Y, K)$ para todo $Y > Y_3$ ($Y > Y_1$ na nomenclatura original) e $K \geq 0$ para garantir que toda órbita de (3.17) passando em qualquer ponto $(Y, K) \in \{(Y, K) \in U = \mathfrak{R}_+^2: Y > Y_3 \text{ e } K > K_3\}$ acabará entrando em Ω .

Prova: A prova desta proposição, à luz das argumentações até aqui tecidas nesta subseção, pode ser realizada como segue. A partir de (SCS.1), (CCS.1), (CCS.2) e (CCS.3) decorre que o sistema (3.17) possui um, e somente um, ponto de equilíbrio (Y^*, K^*) . Por (CCS.3) e (CCS.4) infere-se que o ponto (Y^*, K^*) é localmente instável e não é um ponto de sela. Pode-se definir um conjunto $\Omega = \{(Y, K) \in \Theta = \mathfrak{R}_+^2: Y \leq Y_3 \text{ e } K \leq K_3\} - V((Y^*, K^*), \varepsilon)$ que circunda (Y^*, K^*) mas não o contém. Além disso, o campo vetorial aponta para dentro de Ω na sua fronteira, ou seja, Ω é um conjunto positivamente invariante. Logo, pelo corolário 2.1 toda semi-órbita positiva $\mu^+(Y_0, K_0)$ ou é um ciclo limite ou o conjunto limite desta $\omega(Y_0, K_0)$ é um ciclo limite.

As condições de existência de um ciclo do teorema de Chang e Smyth diferem daquelas colocadas por Kaldor. No Apêndice 3.A é exposto o comentário de Chang e Smyth sobre esta diferença, bem como uma avaliação feita pelo próprio Kaldor sobre o assunto.

Sobre o número de ciclos limites no sistema (3.17) Chang e Smyth (1971, p. 41) estabelecem a seguinte proposição:

Teorema 3.2: (*Chang-Smyth*) Se o sistema dinâmico (3.17) atende todas as hipóteses do teorema 3.1 e é estruturalmente estável, então existe um número finito de ciclos limite.

Prova: A existência de pelo menos um ciclo limite no plano de fases do sistema (3.17) é garantida pelo teorema 3.1. Se o sistema (3.17) é estruturalmente estável, então pelo teorema 2.5 do capítulo dois infere-se que existe um número finito de ciclos limite.

A utilização do teorema de Andronov-Pontryagin-DeBaggis (teorema 2.5) por parte de Chang e Smyth é de certa maneira inócua. A estabilidade estrutural do modelo de Kaldor é garantida por hipótese, a qual permite inferir somente a finitude dos ciclos limites, não se sabendo nem mesmo quantos ciclos limite existem de fato. Note que as condições

Como visto na argumentação baseada em (3.24), esta hipótese é redundante, pois (SCS.1) e (CCS.1) já garantem isto.

(i) e (iii) do teorema 2.5 (um número finito de pontos de equilíbrio hiperbólicos e a inexistência de qualquer conexão de sela, respectivamente) são de fato garantidas pelas premissas adotadas por Chang e Smyth. O problema para derivar a estabilidade estrutural como um teorema é provar que existe um número finito de ciclos limite e que todos sejam hiperbólicos. Infelizmente, como espelha os comentários de Hale e Koçak citados na subseção 2.1.3 do capítulo dois, a questão do número de ciclos limite em sistema dinâmicos planares é ainda uma questão sem uma resposta geral.

3.3. O Modelo de Kaldor e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios

Nesta última seção busca-se contrastar as predições do modelo de Kaldor com a lista de fatos estilizados do capítulo um. Quase nada pode ser feito a partir do artigo original de Kaldor ou da versão de Chang e Smyth. Cabe reforçar, que o contraste que segue entre os resultados do modelo de Kaldor e o conjunto de fatos estilizados listados no capítulo um, não tem a pretensão de esgotar todas as possibilidades possíveis de comparação. O objetivo é somente colocar em evidência as conexões qualitativas entre os resultados do modelo e os fatos estilizados.

Fato estilizado 1: *Explicado* pelo teorema 3.1.

Fato estilizado 2: *Provavelmente explicado.* Se uma semi-órbita positiva $\gamma^+(Y_0, K_0)$ não é um ciclo limite, esta converge em espiral para um ciclo limite e, portanto, as oscilações que esta gera não são "periódicas", no sentido de que não possuem um período constante. Entretanto, quando $\gamma^+(Y_0, K_0)$ é um ciclo limite o sistema passa pelo mesmo ponto em intervalos de tempo regulares. Se o número de ciclos limites é finito, então é mais provável que $\gamma^+(Y_0, K_0)$ não seja um ciclo limite.

Fato estilizado 3: *Impossibilidade de comparação.* Os resultados de cunho qualitativo impossibilitam, sem colocar mais estrutura no modelo, o estabelecimento de qualquer relação precisa entre as predições deste com o fato estilizado em questão.

- Fato estilizado 4:** *Não explicado.* O modelo está expresso em termos reais e, portanto, não há nenhuma relação entre o nível de preço e qualquer outra variável macroeconômica.
- Fato estilizado 5:** *Não explicado.* Não há uma modelagem explícita do mercado de trabalho e do mercado monetário.
- Fato estilizado 6:** *Não explicado.* Como a renda de equilíbrio Y^* é determinada completamente pelas condições iniciais e parâmetros do modelo, os quais permanecem fixos no período de análise, então não existe nenhum mecanismo endógeno que explique a tendência de crescimento positiva da renda.
- Fato estilizado 7:** *Não explicado.* Não há uma modelagem explícita do mercado de trabalho, bem como da tecnologia de produção.
- Fato estilizado 8:** *Não explicado.* O modelo de Kaldor e a versão de Chang e Smyth, por estarem preocupados em estabelecerem as condições mais gerais possíveis de existência de ciclos, especificam as funções de comportamento $I = I(Y, K)$ e $S = S(Y, K)$ de forma extremamente genérica. Isto impossibilita, sem colocar mais estrutura no modelo, o estabelecimento de qualquer relação precisa entre as predições do modelo com este fato estilizado.
- Fato estilizado 9:** *Não explicado.* Os comentários feitos anteriormente relativos ao fato estilizado 4 aplicam-se a este fato.
- Fato estilizado 10:** *Não explicado.* Não há uma modelagem explícita do mercado monetário.
- Fato estilizado 11:** *Não explicado.* Os comentários feitos anteriormente relativos ao fato estilizado 8 aplicam-se a este fato.

Apêndice 3.A. Avaliação das Condições de Existência Estabelecidas por Kaldor

Chang e Smyth (1971, p. 43) demonstraram que as condições de existência de ciclos levantadas por Kaldor em 1940 não eram necessárias nem suficientes. O mesmo número da *Review of Economic Studies* onde foi publicado o trabalho de Chang e Smyth, continha um comentário do próprio Kaldor (1971) sobre os resultados obtidos por estes autores. Neste apêndice pretende-se resumir a referida demonstração de Chang e Smyth e este comentário de Kaldor.

Em primeiro lugar, é conveniente reestabelecer as condições de Kaldor em termos da variável renda nacional:

(CK'.1) $I_Y > S_Y$ para todo $Y \in (Y_1, Y_2)$, isto é, $I_Y > S_Y$ na faixa de renda normal;

(CK'.2) $I_Y < S_Y$ para todo $Y \geq 0$ e $Y \notin (Y_1, Y_2)$, isto é, $I_Y < S_Y$ na faixa de renda anormal;

(CK'.3) Em (Y^*, K^*) tem-se $I_Y^* > S_Y^*$, isto é, (Y^*, K^*) localiza-se na faixa de renda normal.

3.A.1. As condições de Kaldor não são suficientes

Com o auxílio do *Teorema de Olech*²¹ Chang e Smyth (1971, p. 43) estabeleceram condições suficientes para que o ponto de equilíbrio (Y^*, K^*) de (3.17) seja *globalmente assintoticamente estável*.

Teorema 3.A.1: (*Chang e Smyth*) Se em todo ponto $(Y, K) \in \Theta = \mathfrak{R}_+^2$ o sistema (3.17) satisfaz, além das premissas (SCS.1) a (SCS.3) e as condições (CCS.1) a (CCS.3), a propriedade $trDf(Y, K) = \alpha_3(I_Y - S_Y) + \mu I_K + (1 - \mu)S_K < 0$, então o ponto de equilíbrio (Y^*, K^*) é *globalmente assintoticamente estável*.

Prova: Como demonstrado na seção 3.2 com as suposições (SCS.1) a (SCS.3) e com as condições (CCS.1) a (CCS.3) o ponto de equilíbrio (Y^*, K^*) existe e é único. Faça $f_1(Y, K) \equiv \alpha_3[I(Y, K) - S(Y, K)]$ e $f_2(Y, K) \equiv \mu I(Y, K) + (1 - \mu)S(Y, K)$. Dado que $I(Y, K) \in C^1$ e $S(Y, K) \in C^1$, então $f_1(Y, K) \in C^1$ e $f_2(Y, K) \in C^1$. Faça $f_{ij}(x_1, x_2) \equiv \partial^2 f_j(x_1, x_2) / \partial x_i \partial x_j$ com $i = Y, K$ e $j = 1, 2$. Logo: (i) $trDf(Y, K) = f_{Y1} + f_{K2} = \alpha_3(I_Y - S_Y) + \mu I_K + (1 - \mu)S_K < 0$ para todo $(Y, K) \in \Theta = \mathfrak{R}_+^2$ por hipótese; (ii) $\det Df(Y, K) = f_{Y1}f_{K2} - f_{K1}f_{Y2} = \alpha_3[S_K I_Y - I_K S_Y] > 0$ para todo

²¹ Com base na nomenclatura estabelecida no capítulo dois [fundamentalmente a nomenclatura associada às equações (2.4) e (2.11)] o teorema de Olech pode ser enunciado como segue:

Teorema: (*Olech*) Tome-se o sistema bidimensional (2.4) $\dot{x} = f(x; \alpha)$ com $f \in C^1$ e plano de fases X . Suponha que exista um, e somente um, ponto de equilíbrio $(0, 0)$. Se (i) $trDf(x_1, x_2) = f_{11} + f_{22} < 0$ para todo $(x_1, x_2) \in X$; e (ii) $\det Df(x_1, x_2) = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} > 0$ para todo $(x_1, x_2) \in X$ e (iii) $f_{11}f_{22} \neq 0$ ou $f_{12}f_{21} \neq 0$ para todo $(x_1, x_2) \in X$, então $(0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável. **prova:** Olech (1963, p. 395) teorema 3.

$(Y, K) \in \Theta = \mathfrak{R}_+^2$ devido a (SCS.1) e (CCS.3) e (iii)
 $f_{K1}f_{Y2} = \alpha_3(I_K - S_K)[\mu I_Y + (1 - \mu)S_Y] \neq 0$ para todo $(Y, K) \in \Theta = \mathfrak{R}_+^2$ devido a
 (SCS.1), (SCS.2) e (CCS.1). Portanto, pelo teorema de Olech, (Y^*, K^*) é globalmente
 assintoticamente estável.

Proposição 3.A.1: As condições de Kaldor (CK'.1), (CK'.2) e (CK'.3) não implicam a existência de um ciclo limite no sistema (3.17).

Prova: Para mostrar a não-suficiência das condições de Kaldor basta mostrar que sob tais condições o ponto de equilíbrio (Y^*, K^*) do sistema (3.17) pode ser globalmente assintoticamente estável. Portanto, a demonstração pode ser efetuada pela verificação de que as condições de Kaldor não descartam qualquer condição satisfeita pelo *teorema 3.A.1*. Com efeito, com relação à condição (i) do teorema 3.A.1, mesmo no intervalo de renda normal (Y_1, Y_2) (vide Figura 3.9) onde por (CK'.1) se tem $I_Y > S_Y$, pode-se ter $trDf(Y, K) = \alpha_3(I_Y - S_Y) + \mu I_K + (1 - \mu)S_K < 0$. As condições (ii) e (iii) do teorema 3.A.1 são satisfeitas pelas premissas originais de Kaldor $(I_Y, S_Y, S_K > 0$ e $I_K < 0)$. Logo, as condições de Kaldor não são suficientes para a existência de um ciclo limite no plano de fases Θ de (3.17).

Enfim, mesmo que o investimento seja mais responsivo do que a poupança a variações na renda no ponto de equilíbrio, pode-se ter uma ou mais das seguintes alternativas: (i) uma baixa velocidade de ajustamento da renda e, portanto, discrepâncias entre oferta e demanda agregada, conduzirão a relativamente fracas variações do nível da renda; (ii) um comportamento extremamente sensível por parte do investimento, a um dado nível de renda, a variações no estoque de capital. Isto teria como conseqüência um amortecimento das flutuações do estoque de capital, pois uma acumulação (desacumulação) de capital gerada por um investimento líquido positivo (negativo) conduziria a um forte impacto sobre o investimento subsequente implicando uma contenção no processo de acumulação (desacumulação) de capital; e (iii) a presença de uma insuficiente superioridade na intensidade de resposta a variações na renda por parte do investimento com relação à respectiva resposta da poupança.

3.A.2. As condições de Kaldor não são necessárias

Chang e Smyth (1971, p. 43) demonstram a não necessidade das condições de Kaldor com base no Critério de Bendixson (veja capítulo 2 teorema 2.3), como segue:

Proposição 4A.1: A não satisfação de pelo menos uma das condições de Kaldor (CK.1), (CK.2) e (CK.3) não implica a inexistência de um ciclo limite no sistema (3.17).

Prova: Pelo critério de Bendixson tem-se que se existe pelo menos um ciclo limite em $\Omega \subset \Theta$ de (3.17), então $trDf(Y, K) = \alpha_3(I_Y - S_Y) + \mu I_K + (1 - \mu)S_K$ troca de sinal pelo menos uma vez em Ω

ou $trDf(Y, K) = \alpha_3(I_Y - S_Y) + \mu I_K + (1 - \mu)S_K = 0$ para todo $(Y, K) \in \Omega$. Para provar que as condições de Kaldor não são necessárias para a existência de um ciclo limite basta provar que as duas possibilidades anteriores não implicam pelo menos uma das condições de Kaldor²², isto é, que a troca de sinal de $trDf(Y, K)$ pelo menos uma vez em Ω ou a condição $trDf(Y, K) = 0$ para todo $(Y, K) \in \Omega$ não são condições suficientes para a verificação das condições de Kaldor. Se $trDf(Y, K)$ troca de sinal pelo menos uma vez em Ω , então $I_Y > S_Y$ em algum ponto $(\tilde{Y}, \tilde{K}) \in \Omega$, entretanto isto não implica que $\tilde{Y} \in (Y_1, Y_2)$. Mesmo que $I_Y > S_Y$ para todo $(Y, K) \in \Omega$ [negação de (CK'.2)] pode-se ter uma mudança de sinal de $trDf(Y, K)$. Além disso, caso o ponto de equilíbrio (Y^*, K^*) seja localmente estável, ou seja, $I_Y^* < S_Y^*$ [negação de (CK'.3)] não significa que não se possa construir uma vizinhança em torno deste ponto tal que em sua fronteira o vetor velocidade de (3.17) aponte para o exterior desta vizinhança (isto é, para o interior de Ω) e, portanto, não se exclui a possibilidade de existência de um ciclo limite em Ω . Finalmente, se $trDf(Y, K) = 0$ para todo $(Y, K) \in \Omega$, então $\alpha_3(I_Y - S_Y) = -[\mu I_K + (1 - \mu)S_K] > 0$. Logo, $I_Y > S_Y$ para todo $(Y, K) \in \Omega$ e, conseqüentemente, a condição (CK'.2) de Kaldor não é satisfeita. Isto completa a prova.

3.A.3. Comentários de Kaldor

Com relação à condição (CCS.3), ou seja, com respeito ao requerimento de que o determinante da matriz jacobiana da linearização de (3.17) seja positivo Kaldor (1971, p. 45) dá a seguinte interpretação²³:

... o significado desta [$S_K I_Y - I_K S_Y > 0$] é que a extensão pela qual o efeito de uma mudança no estoque de capital sobre o investimento excede seu correspondente efeito sobre a poupança [I_K / S_K] é maior do que a extensão pela qual o efeito de uma mudança na renda sobre o investimento excede seu correspondente efeito sobre a poupança [I_Y / S_Y]. [Tradução do autor]

Kaldor justifica a não explicitação da condição (CCS.3) no seu modelo de ciclos com o argumento de que na época em que escreveu seu artigo considerava-se $S_K = 0$, ou seja, desconsiderava-se o impacto

²² Chang e Smyth (1971, p. 43) não consideraram de forma explícita a possibilidade lógica $trDf(Y, K) = 0$.

²³ O entendimento da interpretação de Kaldor da condição (CS.4) citada adiante é facilitado tendo-se em mente a seguinte expressão equivalente:

$$\frac{I_K}{S_K} > \frac{I_Y}{S_Y}$$

A desigualdade anterior pode ser obtida da seguinte maneira. Tome-se a desigualdade (CCS.3) $S_K I_Y - I_K S_Y > 0$, a qual pode ser recolocada como $S_K I_Y > I_K S_Y$. Multiplicando-se esta última desigualdade por -1 (lembre-se que $I_K < 0$ e $S_K < 0$) obtém-se $-I_K S_Y > -S_K I_Y$, da qual se deduz a primeira desigualdade desta nota.

direto da variação no estoque de capital sobre a poupança. Sobre a substituição por parte de Chang e Smyth de sua suposição de que $S_K > 0$ pelas suposições $S_K < 0$ e $|I_K| > |S_K|$ Kaldor (1971, p. 45) comenta:

... Eu estou propenso a acreditar que a introdução de uma suposição explícita de que S_K tem um valor moderado não faz as condições necessárias de qualquer forma mais rigorosa do que elas foram nos bons e velhos tempos quando S_K era pensado como zero. [Tradução do autor]

Esta declaração de Kaldor à primeira vista parece um tanto contraditória, já que Kaldor em seu trabalho busca avaliar o efeito da acumulação de capital sobre o processo de ajustamento no mercado de bens não só via o investimento mas também via poupança. Portanto, não faria muito sentido supor mesmo naqueles "bons e velhos tempos" que $S_K = 0$. Entretanto, levando em consideração a interpretação da hipótese kaldoriana de uma relação direta entre poupança e estoque de capital dada por Chang e Smyth (vide nota de rodapé 14), a citação anterior faz sentido, pois ao se assumir $S_K = 0$ decorre que $\bar{S}_K = S_Y Y_K + S_K > 0$. Esta interpretação de Chang e Smyth, apesar de elucidativa, não parece espelhar fielmente a interpretação de Kaldor sobre a referida hipótese. Uma interpretação mais precisa é a que Kaldor não considerou a existência de um efeito *direto* da poupança sobre o estoque de capital, ou seja, achava que $S_K = 0$, pois como ele mesmo comenta (Kaldor, 1971, p. 45, nota de rodapé 2) o efeito-Pigou na época não tinha sido ainda inventado. Portanto, Kaldor não parece ter postulado uma espécie de "efeito-riqueza real inverso" ("*inverse real wealth effect*"), como afirmam Gabisch e Lorenz (1989, p. 126), mas simplesmente considerou unicamente a cadeia causal $S_Y Y_K$.

Dado que Kaldor (1940) supôs que $S_K > 0$, então (CCS.3) é satisfeita. Logo, é a condição (CCS.4) que efetivamente diferencia o conjunto de condições de existência de um ciclo de Chang e Smyth do conjunto de condições levantado por Kaldor.

Cabe notar que a condição (CCS.4) de Chang e Smyth implica a não satisfação das condições do teorema 3.A.1, sendo precisamente esta condição não presente na lista de condições de Kaldor. Este autor (Kaldor, 1971, p. 45) interpreta a condição (CCS.4) como segue:

O significado desta desigualdade [$\alpha_3(I_Y - S_Y) + \mu I_K + (1 - \mu)S_K > 0$] é de que um movimento ao longo da curva I ou S procede mais rapidamente no tempo do que a taxa de deslocamento destas curvas devido \dot{K} [velocidades de translação no plano (Y, \mathfrak{R}_+) das curvas I e S]. Em outras palavras, toma menos tempo para ajustar o produto a uma mudança no investimento do que toma mudar o investimento (a um dado nível de produto) por conta da mudança no estoque de capital. [Tradução do autor]

A partir desta interpretação Kaldor argumenta que a condição (CCS.4) foi assumida implicitamente em seu artigo²⁴, já que tal premissa é encontrada em todo modelo Keynesiano de curto prazo. Nesta espécie de modelo trata-se o estoque de capital como dado, ou seja, ignora-se as variações no estoque de capital geradas pelos investimentos passados ou considera-se que as velocidades destas variações são relativamente

baixas quando comparadas às mudanças no produto advindas da alteração da grau de utilização da capacidade existente e do nível de emprego²⁵.

Como bem destaca Lorenz (1989, p. 132) o artigo de Chang e Smyth é um dos melhores exemplos de como a análise gráfica pode ser enganosa. Pode-se acrescentar a este comentário outro, a saber, o de que o trabalho de Kaldor (1940) é um bom exemplo do quão é difícil o processo de dedução sem ferramentas matemáticas. Mesmo cérebros perspicazes como o de Kaldor com um raciocínio econômico aguçado, são capazes de realizar inferências não completamente precisas a partir de um dado conjunto de premissas sobre um determinado processo econômico.

²⁴ Na realidade Kaldor (1940, p. 90) levanta esta condição no apêndice de seu artigo ao comparar seu modelo com o modelo de Kalecki, como destacado pelo próprio Kaldor em seu comentário (Kaldor, 1971, p. 45) na nota de rodapé número três.

²⁵ Todavia, autores como Gabisch e Lorenz (1989, p. 133) sugerem que Kaldor talvez não explicitou tal hipótese devido ao fato de que este construiu sua argumentação centrada principalmente nos espaços (I, N) e (S, N) , passando-lhe dessa forma despercebido a influência do estoque de capital sobre a estabilidade do sistema.

4

CICLO DO EMPREGO: O MODELO DE ROSE

Apresenta-se aqui a versão básica do modelo de Rose (1967). Em seu modelo, Rose consegue estabelecer formalmente a existência de um comportamento cíclico da *proporção empregada da oferta de trabalho* com a incorporação de uma *curva de Phillips não-linear* num ambiente de competição imperfeita, ou seja, composto por firmas maximizadoras de lucro não tomadoras de preço¹.

Este capítulo é composto de três seções. Na seção um, apresentam-se as premissas nas quais assenta-se o modelo e a dedução das equações que governam a sua dinâmica. Na seção dois, são expostas as condições de existência de um ciclo. Na última seção, busca-se contrastar as predições do modelo de Rose com os fatos estilizados listados no primeiro capítulo.

4.1. O modelo: suposições e equações de movimento

Suposições

O modelo em foco foi elaborado com o auxílio do artifício do agente representativo, baseando-se nas hipóteses que seguem:

SUPOSIÇÃO (SR.1): Com respeito à *firma representativa* é assumido que:

- (i) a firma representativa é maximizadora de lucro no curto prazo²;
- (ii) a razão produto-capital e a razão demanda de trabalho-capital adotadas pela firma representativa são iguais às respectivas razões a nível agregado, ou seja, $Y_r / K_r = Y / K$ e $N_r / K_r = N / K$;

¹ (Gabisch e Lorenz, 1989, p. 136) denominam este cenário de uma "*estrutura essencialmente neoclássica*". Todavia, esta interpretação é muito genérica. Por exemplo, no modelo de Rose há desequilíbrios no mercado de bens, ou seja, problemas de demanda efetiva, coisa que não ocorre no modelo de crescimento neoclássico (Solow, 1956 e Swan, 1956).

- (iii) a função de produção da firma representativa é homogênea de grau um, ou seja, $Y_r = Y(K_r, N_r)$ é tal que $Y_r / K_r = Y(1, N_r / K_r) \equiv f(\sigma)$ para todo $\sigma > 0$, onde $\sigma \equiv N_r / K_r = N / K$, $f(\sigma) > 0$ e $f'(\sigma) > 0$ para todo $\sigma > 0$;
- (iv) o estoque de capital da firma representativa é uma proporção inalterada do estoque de capital agregado, ou seja, $K_r = \gamma_1 K$ com γ_1 constante e $0 < \gamma_1 < 1$;
- (v) o preço praticado e o salário pago pela firma representativa são *índices representativos* do nível de preços e dos salários nominais da economia;
- (vi) para um dado nível de preço, o crescimento da demanda esperada num instante t é uma função crescente do excesso da demanda observada com relação à demanda esperada (ou produção) em $t - \Delta t$ ³;
- (vii) a firma representativa tem sua demanda observada maior, igual ou menor que a sua demanda esperada se a demanda agregada for maior, igual ou menor do que a produção agregada, respectivamente;
- (viii) quando a firma representativa tem sua demanda observada igualada a sua demanda esperada num instante $t - \Delta t$ o crescimento da demanda esperada desta em t é igual ao crescimento da economia em $t - \Delta t$, o qual será medido pelo crescimento do estoque de capital agregado;
- (ix) a firma representativa se defronta com a seguinte função de demanda conjetural (esperada)⁴: $P(t) = A_1(t)Q[Y_r(t) / A_2(t)]$ onde $A_1(t) > 0$, $Q(Y_r/A_2) > 0$, $Y_r(t) > 0$, $A_2(t) > 0$ para todo $t > 0$,

² A noção de curto prazo adotada por Rose tornar-se-á precisa no decorrer da apresentação do modelo.

³ Dado que a firma é maximizadora de lucro, esta produz, para um dado preço no instante t , um nível de produção igual à demanda esperada. Rose (1967, p. 155), apesar de listar este fato junto com as outras suposições sobre a firma representativa, salienta que este não se configura como uma suposição independente, sendo apenas um aspecto da hipótese de maximização de lucro. Desde que o modelo de Rose é um modelo em tempo contínuo, Δt tem que ser visto como o intervalo de tempo infinitesimal.

⁴ As variáveis A_1 e A_2 parametrizadas pelo tempo que aparecem adiante constituem-se num artifício de modelagem utilizado por Rose para formalizar as propriedades (vi), (vii) e (viii). Esta formalização será posteriormente apresentada detalhadamente.

$Q(Y_r/A_2)$ é não-crescente para todo t e a elasticidade-preço esperada da demanda é maior que um para todo $(Y_r/A_2) > 0$;

(x) a taxa de crescimento planejada do estoque de capital da firma representativa iguala-se à taxa de crescimento planejada da economia (isto é, a taxa de crescimento planejada do estoque de capital agregado), ou seja, $I_r / K_r = I / K$.

SUPOSIÇÃO (SR.2): A taxa de juros nominal é mantida constante num determinado patamar \bar{R} pela autoridade monetária.

SUPOSIÇÃO (SR.3): A poupança agregada planejada depende em última instância do estoque de capital agregado e do nível de emprego da economia, sendo a função poupança homogênea de grau um nestes dois argumentos, isto é, $S=S(K,N)$ é tal que $S / K = S(1, N / K) \equiv g(\sigma)$ para $\sigma > 0$ e $g'(\sigma) > 0$ para todo $\sigma > 0$.

SUPOSIÇÃO (SR.4): A taxa de crescimento planejada do estoque de capital agregado é uma função da razão demanda de trabalho-capital, ou seja, $I / K = h(\sigma)$ para $\sigma > 0$ e $h'(\sigma) > 0$ para todo $\sigma > 0$.

SUPOSIÇÃO (SR.5): Não há depreciação e a variação observada do estoque de capital é uma média ponderada dos níveis de investimento e poupança *ex-ante*, ou seja, $\dot{K} = \mu I + (1 - \mu)S$ com μ constante e $\mu \in [0,1]$.

SUPOSIÇÃO (SR.6): A taxa de crescimento dos salários nominais é uma função estritamente crescente da proporção empregada da força de trabalho (Figura 4.1), ou seja, $\dot{W} / W = F(\nu)$, tal que $\nu \in (\nu_1, \nu_2)$, $0 < \nu_1 < \nu_2 \leq 1$, $F'(\nu) > 0$ para $\nu > 0$. Além disso, tem-se que $\lim_{\nu \rightarrow \nu_1} F(\nu) = -\infty$ e $\lim_{\nu \rightarrow \nu_2} F(\nu) = +\infty$.

SUPOSIÇÃO (SR.7): A oferta de trabalho cresce a uma taxa instantânea constante e exogenamente determinada $n > 0$, isto é, $N^s(t) = N^s(t_0)e^{nt}$.

A suposição (SR.1) busca estabelecer a ponte entre a firma representativa e a economia como um todo. A formalização desta relação será apresentada logo após breves comentários sobre as sete suposições anteriormente listadas. Entretanto, cabem aqui algumas considerações preliminares com respeito a (SR.1).

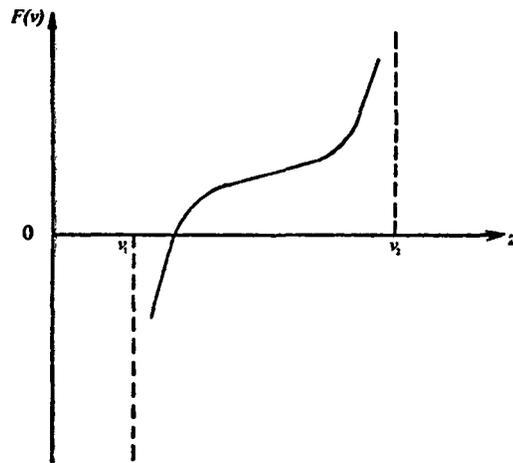


Figura 4.1. Curva de Phillips não-Linear

Fonte: Rose (1967, p. 159)

Em primeiro lugar, é importante citar o esclarecimento dado por Rose (1967, p. 154) sobre sua maneira de interpretar o artifício da firma representativa:

... Na macroeconomia teórica o conceito de firma representativa é o veículo pelo qual as suposições sobre a parte sistemática do comportamento das firmas, seus comportamentos médios, são transmitidas.

Muitos macroeconomistas preferem a suposição mais forte de que todas as firmas são similares. Isto dá fundamento para variáveis do tipo números índices no modelo - de fato, mais do que suporta os números índices do "mundo real" para os quais as previsões do modelo são aplicadas. Mas isto tem a desvantagem de implicar a concepção do macroequilíbrio que ignora o elemento aleatório na experiência da firma individual. Pretendemos evitar esta implicação dando preferência ao "comportamento médio" em detrimento do rigor espúrio das "firmas idênticas". [Tradução do autor]

Em segundo lugar, Rose (1967, p. 54) argumenta que a produção se dá na antecipação da demanda e que nenhum evento real (isto é, não-mental) pode ocorrer sem ser gasto um certo tempo. Devido a isto, a produção é planejada para maximizar o lucro esperado para um dado estoque de capital (lucro esperado de curto prazo). A firma num dado instante t possui um determinado estoque de capital e mesmo que esta queira expandir este estoque isto ocupará algum tempo e, portanto, a firma não poderá usar este novo capital para a produção em t .

Por último, a função demanda conjetural (esperada) postulada em (ix) de (SR.1) merece um comentário à parte, pois ela é primordial na conexão entre o comportamento da firma representativa e a economia como um todo. Rose, ao postular que $Q(Y_r / A_2)$ é não-crescente, permite o aparecimento de dois comportamentos distintos da firma

representativa. Em algumas faixas de produção a firma pode defrontar-se com uma função de demanda inversa horizontal e, portanto, se comportar como uma firma competitiva (*price-taker firm*). Em outras faixas de produção esta pode se defrontar com uma função de demanda inversa negativamente inclinada e, conseqüentemente, ser capaz de afetar o preço do produto (*price-maker firm*). Na realidade, Rose trata a primeira possibilidade apenas como um caso especial da última, em suas palavras (Rose, 1967, p. 154): *Deveremos focalizar nossa atenção sobre as firmas imperfeitamente competitivas, permitindo o padrão mais simples de competição pura emergir como um caso especial* [Tradução do autor].

A suposição (SR.2) fixa uma meta para política monetária, o que à primeira vista pode parecer uma grande perda de generalidade. Contudo, numa das extensões do modelo em análise, feita por Rose em seu artigo, é avaliada a repercussão sobre as predições do modelo ao relaxar-se esta hipótese. Rose (1967, p. 172), admitindo que a autoridade monetária possa utilizar a taxa de juros como instrumento estabilizador, chega a seguinte conclusão⁵:

Para explicar a contínua presença do ciclo do emprego não necessitamos acreditar que não existe uma política de taxa de juros estabilizadora. Mesmo se tais políticas podem ser encontradas na teoria, deve ser uma questão de grande dificuldade prática descobrir a restrição financeira mínima necessária, e também exercer o controle requisitado sobre a oferta de moeda. E, naturalmente, existem freqüentemente objetivos da política de taxa de juros que competem entre si: o controle dos movimentos de capitais internacionais e o gerenciamento da dívida nacional. [Tradução do autor]

Para esclarecer a suposição (SR.3) basta destacar que Rose (1967, p. 157) afirma explicitamente que a poupança agregada é função da renda real esperada (lucro real esperado mais salários), do estoque de capital e da taxa de juros. Todavia, pela suposição (SR.2) tem-se que a taxa de juros é fixada em um dado nível \bar{R} . Além disso, a renda depende do estoque de capital e do nível de emprego via relações tecnológicas e de distribuição. Dessa forma, Rose postula consistentemente que $S=S(K,N)$. Com respeito a esta função poupança agregada, Rose (1967, p. 157) assume que $S(K,N)$ é homogênea de grau um em K e N e que a quantidade de poupança por unidade de capital é uma função

⁵ Devido à conclusão que segue, somada à restrição de espaço, optou-se por apresentar somente a versão básica do modelo de Rose. Os detalhes da extensão acima referida, bem como de outras, podem ser encontrados no mesmo artigo onde está a versão básica.

estritamente crescente da razão demanda de trabalho-capital, ou seja, que a propensão marginal a poupar é positiva.

Rose (1967, p. 157) sustenta a suposição (SR.4) com base no seguinte argumento. Dado que a taxa de juros é mantida constante por hipótese, então a taxa de crescimento planejada do estoque de capital da firma representativa, a qual é igual à respectiva taxa a nível agregado por (x) de (SR.1), passa a depender somente do “estado de expectativas de longo prazo”. Todavia, Rose pressupõe que estas expectativas são sobrepujadas pelas “expectativas de curto prazo”. Dessa forma, a taxa de lucro real de curto prazo ($\zeta = \pi/PK$) passa a ser a variável determinante do nível de investimento da firma representativa e, conseqüentemente, da economia. Todavia, como será demonstrado adiante a taxa de lucro real de curto prazo é uma função estritamente crescente da razão demanda de trabalho-capital. Logo, o investimento passa a ser uma função estritamente crescente desta razão.

A suposição (SR.5) diz respeito ao processo de ajustamento do estoque de capital. Na realidade, Rose (1967, p. 157), oposto ao que foi assumido por Chang e Smyth (vide capítulo 4), supõe que o desequilíbrio no mercado de bens é sempre caracterizado pelo desalinhamento entre investimento planejado e investimento observado. Em outras palavras, o excesso (negativo ou positivo) de demanda agregada de bens é preenchido unicamente por estoques reguladores (buffer stocks). Como feito no capítulo anterior, adotou-se aqui a hipótese mais genérica de que o desequilíbrio no mercado de bens é caracterizado tanto por desalinhamento do lado do investimento quanto da poupança. Rose (1967, p. 158), na nota de rodapé 1, afirma que esta suposição mais geral não alteraria os resultados de seu modelo. Como será visto, esta asserção de Rose é correta. Para comparar os resultados aqui obtidos com os respectivos resultados no texto original de Rose basta fazer $\mu = 0$.

Relacionado à suposição (SR.6), Rose (1967, p. 158) afirma que de fato a taxa de crescimento do salário nominal depende não somente da proporção da oferta de trabalho empregada mas também da expectativa sobre a variação do custo de vida (taxa de inflação esperada). Contudo, Rose assume que a taxa de inflação esperada pelos agentes é nula durante o ciclo. Dessa maneira, a taxa de crescimento dos salários nominais passam a depender exclusivamente do coeficiente de emprego. A alta sensibilidade de \dot{W}/W a valores extremos de ν é explicada por Rose a partir de um argumento um tanto superficial, a saber, de que em valores extremos do coeficiente de emprego ocorre um pressão da competição que supera a inércia do salário nominal. Como será demonstrado à frente, a

suposição (SR.6) é chave para as predições do modelo, pois este postulado da existência de uma curva de Phillips não-linear vai constituir-se no elemento chave do mecanismo gerador dos ciclos do modelo de Rose, além de ditar os limites inferior e superior do coeficiente de emprego.

A suposição (SR.7) é uma hipótese padrão, ou seja, o crescimento da população economicamente ativa é exogenamente determinado e fixo.

Equações de movimento

Listadas e comentadas as premissas do modelo em análise, pode-se passar ao esclarecimento das conexões entre o comportamento da firma representativa e o estado da economia.

Rose inicialmente supõe o nível de preços *fixo* e determina o que influencia a taxa de crescimento da demanda esperada (ou equivalentemente, a taxa de crescimento da produção) da firma representativa. Para ver isto, lembrando que $\dot{P}/P = 0$ se o preço é fixo, basta aplicar o operador de logaritmo na função de demanda conjetural especificada em (ix) de (SR.1) e derivar a expressão resultante com relação ao tempo, o que rende:

$$\frac{\dot{Y}_r}{Y_r} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} + \eta \frac{\dot{A}_1}{A_1}, \quad (4.1)$$

onde:

$$\frac{1}{\eta} \equiv -Q'(Y_r/A_2) \frac{(Y_r/A_2)}{Q(Y_r/A_2)} \quad (4.2)$$

Portanto, para um dado nível de preço, a taxa de crescimento da demanda esperada pela firma representativa depende das taxas de crescimento das variáveis A_1 e A_2 , bem como da elasticidade-preço da demanda conjetural η . Sabe-se por (ix) de (SR.1) que $\eta > 1$ para todo $Y_r/A_2 > 0$. Rose (1967, p. 156 e 158) especificou as variáveis A_1 e A_2 de acordo com as propriedades (vi), (vii) e (viii) da suposição (SR.1).

As propriedades (vi) e (vii) foram formalizadas por Rose por meio da variável A_1 . Se a taxa de crescimento instantânea desta variável é uma função crescente do hiato entre demanda agregada e oferta agregada e é zero quando este hiato é nulo, então as propriedades (vi) e (vii) de (SR.1) são satisfeitas. Entretanto, Rose (1967, p. 158) argumenta que a revisão da demanda esperada por parte da firma representativa em t pode

não ser significativamente afetada pelo hiato entre demanda e produção nos períodos anteriores, caso este hiato seja pouco significativo quando comparado com o tamanho da firma medido pelo seu estoque de capital. Dessa maneira, a firma representativa avalia a importância relativa das variações do (des) investimento não planejado em estoque com relação ao seu estoque de capital total. Portanto, Rose achou ser mais plausível estabelecer não uma relação direta entre a mudança de *estado das expectativas* da firma representativa (\dot{A}_1 / A_1) e a variação *absoluta* não planejada do estoque de capital agregado ($I-S$), mas sim entre \dot{A}_1 / A_1 e a variação *relativa* não planejada do estoque de capital agregado $(I-S)/K$. Considerando (x) de (SR.1) está última relação pode ser expressa no agregado como:

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} = E\left[\frac{I-S}{K}\right] = E\left[\frac{I}{K} - \frac{S}{K}\right] \quad (4.3)$$

onde $E(0) = 0$ e $E'(\cdot) > 0$ para todo $[(I/K) - (S/K)] \in \mathfrak{R}$.

Por meio das suposições (SR.3) e (SR.4) pode-se inferir que a taxa de crescimento das expectativas é uma função da razão demanda de trabalho-capital, ou seja, (4.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} = E[h(\sigma) - g(\sigma)] \equiv H(\sigma), \quad (4.4)$$

Note que $H'(\sigma) = E'(\cdot)[h'(\sigma) - g'(\sigma)] \underset{>}{<} 0$ se, e somente se, $h'(\sigma) \underset{>}{<} g'(\sigma)$.

A propriedade (viii) de (SR.1) foi formalizada por Rose a partir da variável A_2 . Quando a demanda agregada é igual à oferta agregada ($S=I$), tem-se por (4.3) que $\dot{A}_1 / A_1 = 0$ e, conseqüentemente, para um dado nível de preço, por (4.1):

$$\frac{\dot{Y}_r}{Y_r} = \frac{\dot{A}_2}{A_2} \quad (4.5)$$

Pela propriedade (viii) de (SR.1), quando $\dot{A}_1 / A_1 = 0$, tem-se $\dot{Y} / Y = \dot{K} / K$. Logo, considerando (4.5), a seguinte identidade deve ser satisfeita:

$$\frac{\dot{A}_2}{A_2} = \frac{\dot{K}}{K} \quad (4.6)$$

Esta última igualdade significa que $A_2 = \gamma_2 K$, onde γ_2 é uma constante e $\gamma_2 > 0$. Como por (iv) de (SR.1) tem-se $K_r = \gamma_1 K$, logo $A_2 = (\gamma_2 / \gamma_1) K_r$. Sem perda de generalidade pode-se fazer $\gamma_2 = \gamma_1$, ou seja, $A_2 = K_r$. Assim:

$$\frac{Y_r}{A_2} = \frac{Y_r}{K_r} \quad (4.7)$$

Com base nesta última igualdade e nas propriedades (ii) e (iii) de (SR.1) pode-se reescrever a função demanda conjetural em função de σ , como segue:

$$P = A_1 Q(Y_r / K_r) = A_1 Q(Y / K) = A_1 Q[f(\sigma)] \quad (4.8)$$

A formalização das propriedades (vi), (vii) e (viii) torna explícita a estrutura da formação de expectativas por parte da firma representativa com relação à demanda futura e, conseqüentemente, do setor produtivo da economia. A formação de expectativas com relação à demanda tem dois componentes. A firma representativa leva em conta o hiato entre oferta e demanda de bens, corrigindo-o a partir de um mecanismo de ajustamento de erros que reflete uma formação de expectativas adaptativas [equação (4.4)]. Entretanto, a firma representativa forma sua expectativa com relação ao crescimento da demanda levando em consideração também o crescimento econômico [equação (4.6)].

Pela propriedade (i) de (SR.1), sabe-se que a firma representativa é maximizadora de lucro no curto prazo. Dessa forma, esta num instante t , a partir de um dado $A_1(t)$ [o qual Rose (1967, p. 156) chama de *estado de expectativa de curto prazo*] e um dado estoque de capital [$K_r(t)$], toma como dado o salário nominal e escolhe o nível de produto e o nível de emprego tais que maximizam seu lucro esperado de curto prazo. Este programa de otimização pode ser posto em termos agregados como segue⁶:

$$\max_{(\sigma)} \pi / K = A_1 Q[f(\sigma)] f(\sigma) - W \sigma \quad (4.9)$$

⁶ O programa original da firma representativa é:

$$\max_{(Y_r, N_r)} \pi_r = A_1 Q(Y_r / K_r) Y_r - W N_r,$$

ou equivalentemente, a firma escolhe a razão produto-capital e a razão demanda de trabalho-capital que maximizam a taxa de lucro nominal de curto prazo (π_r / K_r):

$$\max_{\left(\frac{Y_r}{K_r}, \frac{N_r}{K_r}\right)} \frac{\pi_r}{K_r} = A_1 Q\left(\frac{Y_r}{K_r}\right) \frac{Y_r}{K_r} - W \frac{N_r}{K_r}$$

Pela propriedade (v) de (SR.1) o preço praticado e o salário nominal pago pela firma representativa são *índices representativos* destes respectivos preços em nível agregado. Dessa forma, com o auxílio de (ii), (iii) e (iv) de (SR.1) e da equação (4.8) torna-se factível expressar o problema de maximização da taxa de lucro nominal de curto prazo em termos agregados.

A condição de primeira ordem para este problema de maximização é dada por:

$$\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) Q[f(\sigma)] f'(\sigma) = \frac{W}{A_1} \quad (4.10)$$

Faça $\aleph(\sigma) \equiv Q[f(\sigma)] f(\sigma)$. Em virtude de (iii) e (ix) de (SR.1), ou seja, de que $f'(\sigma) > 0$, $Q[f(\sigma)] > 0$ e $\eta > 1$ tem-se que:

$$\begin{aligned} \aleph(\sigma) &> 0 \\ \aleph'(\sigma) &= \{Q'[f(\sigma)] f(\sigma) + Q[f(\sigma)]\} f'(\sigma) = \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) Q[f(\sigma)] f'(\sigma) > 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Rose (1967, p. 156) estabeleceu um conjunto de condições sobre $\aleph(\sigma)$ suficiente para garantir a existência e unicidade de um ponto de máximo para o programa de otimização (4.10), a saber:

CONDIÇÃO (CR.1): (i) $\aleph(\sigma)$ é estritamente côncava, ou seja, $\aleph''(\sigma) < 0$;

$$(ii) \lim_{\sigma \rightarrow 0} \aleph'(\sigma) = +\infty \text{ e } \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \aleph'(\sigma) = 0 ;$$

$$(iii) \aleph \in C^2$$

Portanto, em (4.10) tem-se formalizado explicitamente como o setor produtivo da economia fixa sua demanda de trabalho (e, conseqüentemente, a razão demanda de trabalho-capital, já que o estoque de capital é fixo no curto prazo) e a oferta de produto a partir de um dado estado herdado da história.

Na parte inicial desta seção, quando do comentário sobre a suposição (SR.4) afirmou-se que a taxa de lucro real esperada era positivamente relacionada à razão demanda de trabalho-capital. Esta asserção é derivada formalmente com base na condição de primeira ordem em (4.10), da qual infere-se que⁷:

⁷ Por (v) de (SR.1) P é o índice de preço do produto. Então a taxa de lucro real esperada de curto prazo é dada por $\zeta = \pi / PK$. Substituindo a função objetivo de (4.9) nesta última expressão, obtém-se:

$$\zeta = (1/P) \{A_1 Q[f(\sigma)] f(\sigma) - W\sigma\}$$

Introduzindo-se (4.8) e (4.10) na equação acima chega-se à função (4.12). Considerando que $\zeta = \pi / PK$, a derivada $\zeta'(\sigma)$ pode ser expressa como:

$$\zeta'(\sigma) = \frac{d(1/P)}{d\sigma} \frac{\pi}{K} + \frac{1}{P} \frac{d(\pi/K)}{d\sigma}$$

Dado que no ponto de maximização de lucro $d(\pi/K)/d\sigma = 0$, então por (4.8), (iii) e (ix) de (SR.1) conclui-se que:

$$\zeta = f(\sigma) - \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \sigma f'(\sigma), \quad \zeta'(\sigma) \geq 0 \text{ para todo } \sigma > 0 \quad (4.12)$$

Rose estava interessado no comportamento do emprego. Dessa forma, derivou equações de movimento para as variáveis de estado ρ e σ , as quais, juntas, determinam a proporção empregada da força de trabalho⁸.

Como $\rho \equiv N^s / K$, tem-se:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{N}^s}{N^s} - \frac{\dot{K}}{K} \quad (4.13)$$

Por (SR.5) tem-se que $\dot{K} = \mu I + (1 - \mu)S$, então de (SR.3) e (SR.4) resulta:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\mu I + (1 - \mu)S}{K} = \mu h(\sigma) + (1 - \mu)g(\sigma) \quad (4.14)$$

Dessa forma, por (SR.7) e (4.14) a equação (4.13) transforma-se em:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = n - [\mu h(\sigma) + (1 - \mu)g(\sigma)] \quad (4.15)$$

A EDO ligada à razão demanda de trabalho-capital surge analogamente da aplicação do operador de logaritmo a (4.10) e da posterior derivação do resultado com respeito ao tempo, o que rende⁹:

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \phi(\sigma) \left(\frac{\dot{A}_1}{A_1} - \frac{\dot{W}}{W} \right) \quad (4.16)$$

onde¹⁰:

$$\zeta'(\sigma) = - \frac{Q'[f(\sigma)]f'(\sigma)}{A_1\{Q[f(\sigma)]\}^2} \frac{\pi}{K} \geq 0, \quad \forall \sigma > 0$$

Note que esta expressão pode ser nula (a taxa de lucro não é afetada pela razão demanda de trabalho-capital) devido à suposição de que $Q'[f(\sigma)] \leq 0$, ou seja, pelo fato de que a firma representativa pode se confrontar com uma função de demanda inversa horizontal.

⁸ Por definição $v \equiv N / N^s$, dividindo-se o numerador e denominador do termo direito desta equação por K e considerando-se as definições das variáveis ρ e σ , conclui-se que $v = \sigma / \rho$.

⁹ Mais explicitamente, considerando a definição em (4.17):

$$\ln \left\{ \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) Q[f(\sigma)]f'(\sigma) \right\} = \ln W - \ln A_1 \Rightarrow \left\{ \frac{d}{d \ln \sigma} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) Q[f(\sigma)]f'(\sigma) \right] \right\} \frac{d \ln \sigma}{dt} = - \frac{1}{\phi(\sigma)} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \frac{\dot{W}}{W} - \frac{\dot{A}_1}{A_1}$$

¹⁰ Considerando (4.11) a expressão em (4.17) pode ser reescrita como segue:

$$\frac{1}{\phi(\sigma)} = - \frac{d \ln \aleph'(\sigma)}{d \ln \sigma} = - \frac{d \aleph'(\sigma)}{d \sigma} \frac{\sigma}{\aleph'(\sigma)} = - \aleph''(\sigma) \frac{\sigma}{\aleph'(\sigma)}$$

$$\frac{1}{\phi(\sigma)} = -\frac{d}{d \ln \sigma} \ln \left[\left(1 - \frac{1}{\eta} \right) Q[f(\sigma)]f'(\sigma) \right], \quad \phi(\sigma) > 0 \text{ para todo } \sigma > 0 \quad (4.17)$$

Nas palavras de Rose (1967, p. 160) a equação (4.16) ... *diz que a razão demanda de trabalho-capital cresce (decresce) quando a lista de preços de demanda esperados aumenta mais rápido (mais lentamente) do que os salários*¹¹ [Tradução do autor].

Introduzindo-se (4.4) e a curva de Phillips postulada em (SR.6) em (4.16) obtém-se a segunda EDO do sistema que define a dinâmica do modelo em questão, a saber:

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \phi(\sigma)[H(\sigma) - F(\sigma / \rho)] \quad (4.18)$$

Em suma, a dinâmica do modelo de Rose é definida pelo seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \{n - [\mu h(\sigma) + (1 - \mu)g(\sigma)]\}\rho \\ \dot{\sigma} &= \{\phi(\sigma)[H(\sigma) - F(\sigma / \rho)]\}\sigma \end{aligned} \quad (4.19)$$

Este sistema, devido a (SR.6), tem como plano de fases o conjunto $\Theta = \{(\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0, \sigma > 0 \text{ e } 0 < v_1 < \sigma / \rho < v_2 < 1\}$.

4.2. A Existência de um Ciclo Limite

A prova da existência de um ciclo limite no plano de fases de (4.19) feita por Rose pode ser apresentada na seqüência estabelecida no programa de aplicação do TPB apresentado no capítulo dois.

Disto resulta:

$$\phi(\sigma) = -\frac{1}{\kappa''(\sigma)} \frac{\kappa'(\sigma)}{\sigma}$$

Portanto, a partir de (4.11) e (i) de (CR.1) infere-se que $\phi(\sigma) > 0$. Economicamente $\phi(\sigma)$ é a elasticidade da demanda de trabalho de curto prazo (para um dado estoque de capital) com sinal trocado. Para ver isto basta notar que considerando (4.11) a condição de primeira ordem em (4.10) pode ser reescrita:

$$\kappa'(\sigma) = W / A_1,$$

da qual resulta:

$$\frac{d\sigma}{d(W / A_1)} = \frac{1}{\kappa''(\sigma)} < 0 \text{ [este sinal é implicado por (i) de (CR.1)]}$$

Logo, $\phi(\sigma)$ pode ser escrita como:

$$\phi(\sigma) = -\frac{1}{\kappa''(\sigma)} \frac{\kappa'(\sigma)}{\sigma} = -\frac{d\sigma}{d(W / A_1)} \frac{W / A_1}{\sigma}$$

Existência de um ponto de equilíbrio

Dado que o sistema (4.19) é definido para $\rho > 0$ e $\sigma > 0$ e que $\phi(\sigma) > 0$ para todo $\sigma > 0$, então o equilíbrio (ρ^*, σ^*) é definido pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned} \mu h(\sigma^*) + (1 - \mu)g(\sigma^*) - n &= 0 \\ H(\sigma^*) - F(\sigma^* / \rho^*) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Com relação a (4.20) Rose (1967, p. 160) assume que:

CONDIÇÃO (CR.2): Para dados n e \bar{R} (a taxa de juros parametriza a função poupança) existe um σ^* finito que satisfaz a primeira equação em (4.20).

Como σ^* é finito, então pela continuidade da função $H(\sigma)$ a imagem $H(\sigma^*)$ é finita. Além disso, existe um ρ^* que satisfaz a segunda equação em (4.20) para um dado σ^* , pois pela suposição (SR.6) o conjunto imagem da função $F(\sigma / \rho)$ é a reta real.

Unicidade do ponto de equilíbrio

A unicidade do σ^* é garantida, para dados n e \bar{R} , pelas suposições (SR.3) e (SR.4), mais especificamente pela condição $\mu h'(\sigma) + (1 - \mu)g'(\sigma) > 0$ para todo $\sigma > 0$. Por sua vez, a existência de um, e somente um, ρ^* associado a σ^* é implicada pela suposição (SR.6), ou seja, devido à hipótese de que $F'(\sigma / \rho) > 0$ para todo $v_1 < (\sigma / \rho) < v_2$.

Análise de estabilidade local do ponto de equilíbrio

A matriz jacobiana da linearização de (4.19) em torno de (ρ^*, σ^*) é a seguinte:

$$Df(\rho^*, \sigma^*) = \begin{bmatrix} 0 & -[\mu h'(\sigma^*) + (1 - \mu)g'(\sigma^*)]\rho^* \\ \phi(\sigma^*)F'(\sigma^* / \rho^*)(\sigma^* / \rho^*)^2 & \phi(\sigma^*)(H'(\sigma^*) - (1 / \rho^*)F'(\sigma^* / \rho^*))\sigma^* \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

¹¹ Isto de certa forma torna um pouco mais clara a denominação *estado de expectativa de curto prazo* dada por Rose à variável $A_I(t)$.

a qual implica que:

$$\begin{cases} \det Df(\rho^*, \sigma^*) = \phi(\sigma^*) F'(\sigma^* / \rho^*) (\sigma^* / \rho^*)^2 [\mu h'(\sigma^*) + (1 - \mu) g'(\sigma^*)] \rho^* \\ \text{tr} Df(\rho^*, \sigma^*) = \phi(\sigma^*) [H'(\sigma^*) - (1 / \rho^*) F'(\sigma^* / \rho^*)] \sigma^* \end{cases} \quad (4.22)$$

Com base no Quadro 2.1 do capítulo dois para que (ρ^*, σ^*) seja localmente instável, mas não um ponto de sela, é suficiente que $\det Df(\rho^*, \sigma^*) > 0$ e $\text{tr} Df(\rho^*, \sigma^*) > 0$. A partir de (4.16), (SR.3), (SR.4) e (SR.6) a primeira destas condições é satisfeita. Dado (4.17), a partir da expressão do traço da matriz jacobiana em (4.22) Rose (1967, p. 163) deriva a seguinte condição para garantir a instabilidade local de (ρ^*, σ^*) :

$$\text{CONDIÇÃO (CR.3): } H'(\sigma^*) > F'(\sigma^* / \rho^*) / \rho^*$$

Dessa forma, é garantido que (ρ^*, σ^*) comporta-se como uma fonte (um espiral, um foco ou um nó instável)

O comportamento global do sistema (4.19) pode ser aproximado pelo seu diagrama de fase, vide Figura 4.2. Em primeiro lugar, como de praxe, cabe determinar a forma das isóclinas $\dot{\rho} = 0$ e $\dot{\sigma} = 0$, ou seja, das curvas de demarcação implicitamente definidas por:

$$\begin{cases} \{n - [\mu h(\sigma) + (1 - \mu) g(\sigma)]\} \rho = 0 \\ \{\phi(\sigma) [H(\sigma) - F(\sigma / \rho)]\} \sigma = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n - \mu h(\sigma) + (1 - \mu) g(\sigma) = 0 \\ H(\sigma) - F(\sigma / \rho) = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

A isóclina $\dot{\sigma} = 0$ é uma reta paralela ao eixo ρ do plano (ρ, σ) e intercepta o eixo das coordenadas em σ^* , ou seja:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \frac{0}{[\mu h'(\sigma) + (1 - \mu) g'(\sigma)] \rho} = 0 \quad (4.24)$$

A isóclina $\dot{\sigma} = 0$ está contida na região Θ , já que $F(\sigma / \rho)$ é definida no intervalo (ν_1, ν_2) . A inclinação desta isóclina é determinada pela seguinte expressão:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\rho} \right|_{\sigma=0} = - \frac{(\sigma / \rho^2) F'(\sigma / \rho)}{H'(\sigma) - (1 / \rho) F'(\sigma / \rho)}, \quad (4.25)$$

Devido à suposição (SR.6) e à condição (CR.3) infere-se que (4.25) é estritamente negativa na vizinhança do ponto (ρ^*, σ^*) .

A direção de mudança das variáveis de estado dentro da região Θ é determinada com o auxílio das seguintes relações extraídas de (4.19):

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \sigma} = -[\mu h'(\sigma) + (1 - \mu)g'(\sigma)]\rho < 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \rho} = \phi(\sigma)F'(\sigma / \rho)(\sigma / \rho)^2 > 0 \quad (4.27)$$

Dado que $\rho > 0$ e $\sigma > 0$, o sinal de (4.26) é determinado por (SR.3) e (SR.4) e o sinal de (4.27) por (4.16) e (SR.6). A derivada (4.26) expressa o comportamento dinâmico da razão oferta de trabalho-capital com respeito a variações na razão demanda de trabalho-capital, para um dado nível da razão oferta de trabalho-capital. Dessa forma, pontos *abaixo* (*acima*) da curva de demarcação $\dot{\rho} = 0$ devem apresentar uma velocidade da razão oferta de trabalho-capital *positiva*, $\dot{\rho} > 0$ (*negativa*, $\dot{\rho} < 0$). A derivada (4.27) expressa o comportamento dinâmico da razão demanda de trabalho-capital com relação a variações na razão oferta de trabalho-capital, para um dado nível da razão demanda de trabalho-capital. Logo, pontos *à esquerda* (*à direita*) da curva de demarcação $\dot{\sigma} = 0$ devem apresentar uma velocidade da razão demanda de trabalho-capital *negativa*, $\dot{\sigma} < 0$ (*positiva*, $\dot{\sigma} > 0$).

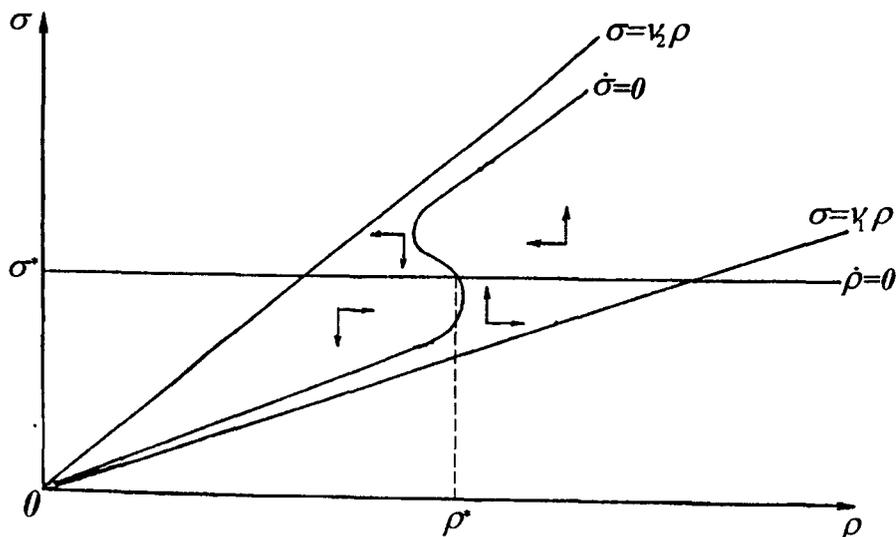


Figura 4.2. Diagrama de Fase do Modelo de Rose

Construção do conjunto Ω

Embora Rose (1967, p. 163) tenha somente definido geometricamente o conjunto Ω , com base no seu esboço do diagrama de fases de seu modelo pode-se definir o referido conjunto como segue. Considere o seguinte conjunto:

$$\Sigma = \{(\rho, \sigma) \in \mathbb{R}_{++}^2 : 0 < \nu_1 \leq \sigma / \rho \leq \nu_2 < 1 \text{ e } \sigma^* / \nu_2 \leq \rho \leq \sigma^* / \nu_1\} - V((\rho^*, \sigma^*), \varepsilon)$$

Se uma semi-órbita positiva $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ inicia em qualquer ponto regular (aquele que não é um ponto de equilíbrio) não pertencente a Σ , ou seja, qualquer $(\rho_0, \sigma_0) \in \{\Theta - \Sigma\} \cup \{V((\rho^*, \sigma^*), \varepsilon) - (\rho^*, \sigma^*)\}$, esta semi-órbita positiva acabará entrando no conjunto Σ . Para ver isto basta observar que: (i) se $(\rho_0, \sigma_0) \in \{\Theta - \Sigma\}$ e $\rho < \sigma^* / \nu_2$, então o ponto representativo de $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ entra em Σ ou se aproxima da reta $\sigma = \nu_1 \rho$; (ii) se $(\rho_0, \sigma_0) \in \{\Theta - \Sigma\}$ e $\rho > \sigma^* / \nu_1$, então o ponto representativo de $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ entra em Σ ou se aproxima da reta $\sigma = \nu_2 \rho$; (iii) se $(\rho_0, \sigma_0) \in \{V((\rho^*, \sigma^*), \varepsilon) - (\rho^*, \sigma^*)\}$, então o ponto representativo de $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ se afastará de (ρ^*, σ^*) e entrará em Σ , devido a instabilidade local de (ρ^*, σ^*) e por este não ser um ponto de sela.

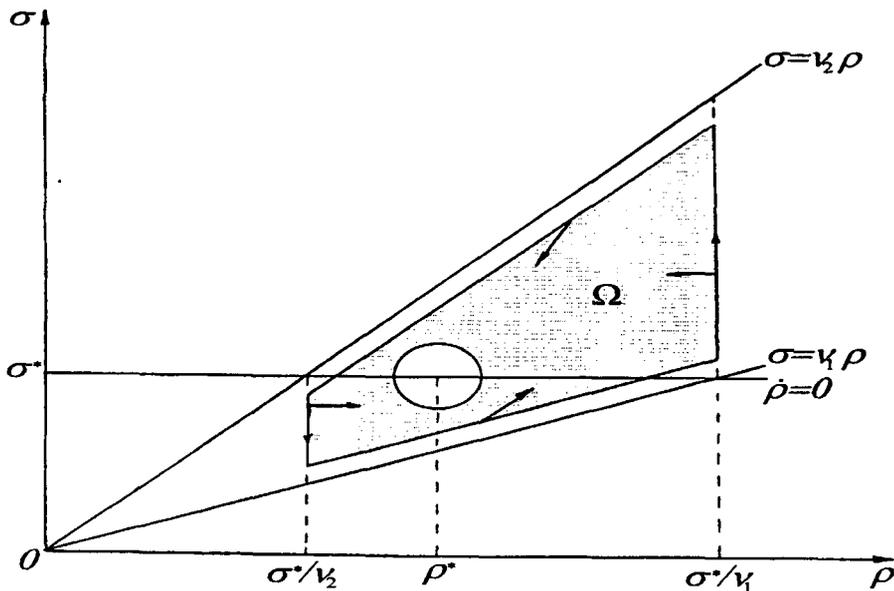


Figura 4.3. O Conjunto Ω do Modelo de Rose

Na realidade, as possibilidades levantadas pelos casos (i) e (ii), a saber, de que o ponto representativo de $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ convirja para a reta $\sigma = v_1\rho$ ou para a reta $\sigma = v_2\rho$, não existem de fato. Para ver isto basta notar que, para qualquer dado $\bar{\sigma} > 0$, tem-se por (4.19) que:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \{n - [\mu h(\bar{\sigma}) + (1 - \mu)g(\bar{\sigma})]\}\rho \\ \dot{\sigma} &= \{\phi(\bar{\sigma})[H(\bar{\sigma}) - F(\bar{\sigma}/\rho)]\}\bar{\sigma} \end{aligned}$$

Portanto, quando $(\bar{\sigma}/\rho) \rightarrow v_1$ implica que $\dot{\rho} \rightarrow c$ (onde c é uma constante) e $\dot{\sigma} \rightarrow +\infty$, pois por (SR.6) $-F(\bar{\sigma}/\rho) \rightarrow +\infty$. Também por (SR.6) tem-se que $F(\bar{\sigma}/\rho) \rightarrow -\infty$, logo quando $(\bar{\sigma}/\rho) \rightarrow v_2$ implica que $\dot{\sigma} \rightarrow -\infty$. Enfim, a semi-órbita positiva $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ que se aproxima de $\sigma = v_1\rho$ ou $\sigma = v_2\rho$ tem seu vetor velocidade $(\dot{\rho}, \dot{\sigma})$ apontando para o interior do conjunto Σ e, conseqüentemente, o ponto representativo de $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ acabará entrando no conjunto Σ .

A partir destes resultados Rose (1967, p. 164) conclui: ... segue que $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ está contida num subconjunto limitado e aberto, Σ , de Θ , e não tem ponto limites sobre a fronteira. Portanto $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ está contida em um subconjunto compacto de Σ [Notações adaptadas e tradução do autor]. Todavia, Rose não constrói explicitamente este subconjunto, ou seja, o conjunto Ω .

Uma construção possível deste conjunto é:

$$\Omega = \{(\rho, \sigma) \in \mathfrak{R}_{++}^2: \sigma^*/v_2 \leq \rho \leq \sigma^*/v_1 \text{ e } d_1 + v_1\rho \leq \sigma \leq -d_2 + v_2\rho \text{ com } d_1 > 0 \text{ e } d_2 > 0\} - V((\rho^*, \sigma^*), \varepsilon)$$

Note que as constantes d_1 e d_2 devem ser suficientemente pequenas para que o vetor velocidade aponte para o interior de Ω nas fronteiras:

$$\{(\rho, \sigma) \in \mathfrak{R}^2: \sigma = d_1 + v_1\rho \text{ e } \sigma^*/d_2 \leq \rho \leq \sigma^*/v_1\}$$

$$\{(\rho, \sigma) \in \mathfrak{R}^2: \sigma = d_2 + v_2\rho \text{ e } \sigma^*/d_2 \leq \rho \leq \sigma^*/v_1\}$$

Pela simples observação do diagrama de fases na Figura 4.2 vê-se que nas fronteiras:

$$\{(\rho, \sigma) \in \mathfrak{R}^2: d_1 + v_1(\sigma^*/v_2) \leq \sigma \leq -d_2 + v_2(\sigma^*/v_2) \text{ e } \rho = \sigma^*/v_2\}$$

$$\{(\rho, \sigma) \in \mathfrak{R}^2: d_1 + v_2(\sigma^*/v_1) \leq \sigma \leq -d_2 + v_2(\sigma^*/v_1) \text{ e } \rho = \sigma^*/v_1\}$$

o vetor velocidade aponta para o interior de Ω . Logo, o conjunto Ω é positivamente invariante.

Teorema de existência de um ciclo

A existência de flutuações cíclicas da razão demanda de trabalho-capital e da razão oferta de trabalho-capital foi estabelecida precisamente por Rose (1967, p. 163) no seguinte teorema¹²:

Teorema 4.1: (Rose)

Se o sistema de EDO's:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \{n - [\mu h(\sigma) + (1 - \mu)g(\sigma)]\}\rho \\ \dot{\sigma} &= \{\phi(\sigma)[H(\sigma) - F(\sigma/\rho)]\}\sigma\end{aligned}\tag{4.19}$$

definido em $\Theta = \{(\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^2 / \rho > 0, \sigma > 0 \text{ e } 0 < a < \sigma/\rho < b \leq 1\}$ e construído a partir das suposições (SR.1), (SR.2), (SR.3), (SR.4), (SR.5), (SR.6) e (SR.7), satisfaz as condições (CR.1), (CR.2) e (CR.3), então toda semi-órbita positiva $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ que inicie em qualquer ponto $(\rho_0, \sigma_0) \in \Theta - (\rho^*, \sigma^*)$ é um ciclo limite ou se aproxima de um ciclo limite.

Prova: Com base nos resultados obtidos nos quatro passos do algoritmo de aplicação do TPB realizados anteriormente, a demonstração poder ser feita como segue. A partir de (CR.2) e (SR.6) decorre que o sistema (4.19) possui um ponto de equilíbrio (ρ^*, σ^*) . Por (SR.3) e (SR.6) infere-se que existe um, e somente um, (ρ^*, σ^*) . De (4.16), (SR.3), (SR.6) e (CR.3) conclui-se que o ponto (ρ^*, σ^*) é localmente instável e não é um ponto de sela. Pode-se definir $\Omega = \{(\sigma, \rho) \in \mathbb{R}^2 / \rho > 0, \sigma > 0, \sigma^*/v_2 \leq \rho \leq \sigma^*/v_1 \text{ e } d_1 + v_1\rho \leq \sigma \leq -d_2 + v_2\rho \text{ com } v_1 > 0 \text{ e } d_2 > 0\} - V((\rho^*, \sigma^*), \varepsilon)$ que circunda (ρ^*, σ^*) mas não o contém. Além disso, o campo vetorial aponta para dentro de Ω na sua fronteira, ou seja, Ω é um conjunto positivamente

¹² A versão que segue do teorema de existência de Rose é diferente da versão original, embora sejam equivalentes. A modificação na redação foi feita para manter a homogeneidade com os demais teoremas de existência de um ciclo limite dos outros modelos de ciclos resenhados neste trabalho. Isto permitirá uma comparação mais nitida das semelhanças formais entre estes modelos.

invariante. Logo, pelo TPB, toda semi-órbita positiva $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ é um ciclo limite ou o conjunto limite $\omega(\rho_0, \sigma_0)$ é um ciclo limite.

Sobre o número de ciclos limites no sistema (4.19), Rose (1967, p. 164) enuncia:

Teorema 4.2: (Rose) Se o sistema dinâmico (4.19) atende todas as hipóteses do teorema 4.1 e é estruturalmente estável, então existe um número finito de ciclos limites.

Prova: A existência de pelo menos um ciclo limite no plano de fases do sistema (4.19) é garantida pelo teorema 4.1. Se o sistema (4.19) é estruturalmente estável, então pelo teorema 2.5 do capítulo dois infere-se que existe um número finito de ciclos limites.

A aplicação do teorema de Andronov-Pontryagin-DeBaggis (teorema 2.5) por Rose foi idêntica à utilização deste por parte de Chang e Smyth. Dessa forma, os comentários feitos no capítulo três com relação a este assunto se aplicam por completo ao presente caso. Cabe aqui reforçar que o modelo de Kaldor (versão Chang-Smyth) e o modelo de Rose foram as únicas modelagens de ciclos endógenos fundamentados no conceito de ciclo limite e no TPB que trataram do questão da estabilidade estrutural.

O mecanismo gerador de ciclos

A explicação intuitiva de um ciclo do emprego típico feita por Rose (1967, p. 165) pode ser resumida como segue. Sem perda de generalidade, suponha que o sistema econômico encontre-se inicialmente no estado onde o coeficiente de emprego está no seu patamar mínimo (ponto 1, Figura 4.4). Como o coeficiente de emprego esta próximo do limite inferior ν_1 ditado pela curva de Phillips, então a taxa de crescimento do salário nominal torna-se infinitamente negativa ao passo que a taxa de crescimento do nível de preços esperado tem um valor finito. Esta situação, considerando (4.16) e (4.17), conduz as firmas (maximizadoras de lucro) a realizarem aumentos nos seus volumes de produção e, conseqüentemente, a expandirem a razão demanda de trabalho-capital. O aumento desta última tem como conseqüência, considerando (4.12), um aumento na taxa de lucro, bem

como na taxa de crescimento do estoque de capital [considere (4.14) e a premissa de que $h'(\sigma) > 0$ e $g'(\sigma) > 0$]. Apesar deste último efeito, a taxa de crescimento do estoque de capital ainda está abaixo da taxa de crescimento da oferta de trabalho, o que permite um aumento da razão oferta de trabalho-capital, considerando (4.15). Entretanto, o crescimento da razão demanda de trabalho-capital supera o crescimento da razão oferta de trabalho-capital implicando numa expansão do coeficiente de emprego. Isto leva a economia a atingir o valor de equilíbrio da razão demanda de trabalho-capital σ^* , onde população e estoque de capital crescem à mesma taxa (ponto 2, Figura 4.4).

Esta expansão do coeficiente de emprego inicialmente não tem fortes impactos na taxa de crescimento dos salários nominais, pois o coeficiente de emprego encontra-se no intervalo onde a curva de Phillips é pouco inclinada (região "achatada"). Isto permite um contínuo aumento da razão demanda de trabalho-capital, já que a taxa de crescimento do nível de preços esperado mantém-se ainda superior à taxa de crescimento dos salários nominais. Portanto, é a parte menos inclinada da curva de Phillips, ou seja, a baixa inflação de salários que impede que a razão demanda de trabalho-capital caia acentuadamente e juntamente com a razão oferta de trabalho-capital converjam para o estado de equilíbrio.

Quando a razão demanda de trabalho-capital ultrapassa seu valor de equilíbrio σ^* (ponto 2, Figura 4.4), a taxa de crescimento do estoque de capital passa a superar a taxa de crescimento da oferta de trabalho, o que passa a gerar contrações da razão oferta de trabalho-capital. Todavia, o contínuo crescimento da razão demanda de trabalho-capital, permitido pela baixa inflação de salários, mantém a expansão do coeficiente de emprego. Este processo se desenrola até a economia chegar ao valor máximo da razão demanda de trabalho-capital (ponto 3, Figura 4.4).

O aumento contínuo do coeficiente de emprego leva este a se aproximar de seu limite superior ν_2 , ditado pela curva de Phillips. Como consequência, surge uma forte inflação de salários, a qual ultrapassa a inflação de preços esperada. Dessa forma, as firmas passam a diminuir seus volumes de produção observando-se, na economia, uma queda da razão demanda de trabalho-capital e da taxa de lucro. Apesar disto, devido ao longo período de expansão da razão demanda de trabalho-capital, esta se encontra muito acima do seu nível de equilíbrio e, portanto, a taxa de crescimento do estoque de capital é ainda superior à taxa de crescimento da oferta de trabalho, o que significa que a razão oferta de trabalho-capital continua a cair mesmo com a queda da razão demanda de trabalho-capital. Até um certo estágio a queda da razão demanda de trabalho-capital é menos veloz que a

queda da razão oferta de trabalho-capital e, portanto, o coeficiente de emprego continua a crescer. Porém, a contínua queda da razão demanda de trabalho-capital leva a taxa de crescimento do estoque de capital a um limite, a partir do qual a razão oferta de trabalho-capital começa a cair menos velozmente que a razão demanda de trabalho-capital. É a partir deste limite que a economia começa a apresentar uma queda na proporção empregada da oferta de trabalho (ponto 4, Figura 4.4). Isto conduz a economia a atingir novamente o valor de equilíbrio da razão demanda de trabalho-capital (ponto 5, Figura 4.4).

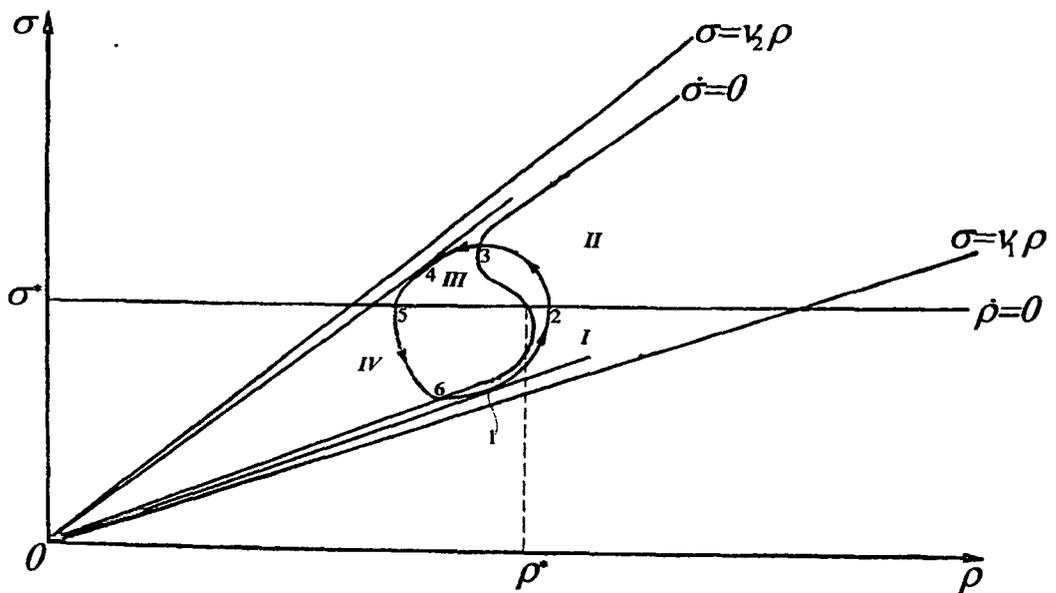


Figura 4.4. Um Ciclo Limite do Modelo de Rose

Quando a razão demanda de trabalho-capital cai abaixo do seu nível equilíbrio σ^* , a taxa de crescimento do estoque de capital é ultrapassada pela taxa de crescimento da oferta de trabalho. Portanto, a razão oferta de trabalho-capital começa a se expandir. Dessa forma, dado que a razão demanda de trabalho-capital continua a decrescer, o coeficiente de emprego mantém sua queda. Esta contínua contração da proporção empregada da oferta de trabalho leva o coeficiente de emprego se aproximar de seu limite inferior v_1 , fixado pela curva de Phillips. Esta aproximação leva a uma forte deflação de salários. Isto tem como consequência uma queda da taxa de crescimento dos salários nominais a patamares inferiores à taxa de crescimento do nível de preços esperado. Dessa forma, as firmas retomam a expansão de seus níveis de produção e a economia começa a apresentar expansões da razão demanda de trabalho-capital, bem como aumento da taxa de lucro (ponto 6, Figura 4.4). Apesar disto, devido ao longo período de contração da razão

demanda de trabalho-capital, esta se encontra muito abaixo do seu nível de equilíbrio e, portanto, a taxa de crescimento do estoque de capital ainda é inferior a taxa de crescimento da oferta de trabalho, o que significa que a razão oferta de trabalho-capital continua a subir simultaneamente ao crescimento da razão demanda de trabalho-capital. Até um certo estágio a elevação da razão oferta de trabalho-capital é mais veloz que a elevação da razão demanda de trabalho-capital e, portanto, o coeficiente de emprego continua a decrescer até retornar ao seu ponto inicial, ou seja, seu valor mínimo (ponto 1, Figura 4.4), a partir do qual o ciclo se repete.

Como visto é a curva de Phillips não-linear, ou seja, a presença de fortes inflações (deflações) dos salários nominais quando a economia encontra-se numa situação de alto (baixo) nível de emprego que levam as firmas a alterar seus planos de produção e mudar o rumo da economia. Dessa forma, é lícito afirmar que a curva de Phillips não-linear é o componente central do mecanismo gerador de ciclos do modelo de Rose.

4.3. O Modelo de Rose e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios

Nesta última seção, busca-se contrastar as predições do modelo de Rose com a lista de fatos estilizados do capítulo um. As ressalvas feitas na seção 3.3 aplicam-se aqui.

Fato estilizado 1: *Explicado* pelo Teorema 4.1.

Fato estilizado 2: *Provavelmente explicado.* Se uma semi-órbita positiva $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ não é um ciclo limite esta converge em espiral para um ciclo limite e, portanto, as oscilações que esta gera não são periódicas, no sentido de que não possuem um período constante. Entretanto, quando $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ é um ciclo limite o sistema passa pelo mesmo ponto em intervalos de tempo regulares. Se o número de ciclos limites é finito, então é mais provável que $\gamma^+(\rho_0, \sigma_0)$ não seja um ciclo limite.

Fato estilizado 3: *Impossibilidade de comparação.* Os resultados de cunho qualitativo impossibilitam, sem colocar mais estrutura no modelo, o

estabelecimento de qualquer relação precisa entre as predições deste e o fato estilizado em questão¹³.

Fato estilizado 4: *Não explicado.* A evolução observada da taxa de crescimento do índice de preços é obtida, considerando (4.2) e (4.4), a partir de (4.8):

$$\frac{\dot{P}}{P} = H(\sigma) - \frac{1}{\eta} \frac{f'(\sigma)\sigma}{f(\sigma)} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$$

Desde que o impacto das expectativas sobre os preços é ambíguo, já que depende do tipo de desequilíbrio no mercado de bens, ou seja, dado que

$$H'(\sigma) = E'(\cdot)[h'(\sigma) - g'(\sigma)] \underset{>}{<} 0 \text{ se, e somente se, } h'(\sigma) \underset{>}{<} g'(\sigma), \text{ então}$$

o comportamento da taxa de inflação de preço observada durante o ciclo é também ambíguo.

Fato estilizado 5: *Não explicado.* Desde que o comportamento da taxa de crescimento do índice de preços observado durante o ciclo é ambíguo, torna-se impossível estabelecer uma relação precisa entre esta e a inflação de salários.

Fato estilizado 6: *Explicado.* A partir das propriedades (ii) e (iii) de (SR.1) tem-se que

$$Y = Kf(\sigma) \text{ e, conseqüentemente,}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} + \frac{f'(\sigma)\sigma}{f(\sigma)} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$$

No estado estacionário, considerando (4.14) e a primeira igualdade em (4.20), esta expressão reduz-se a,

¹³ Com relação à amplitude das órbitas no planos de fases, cabe destacar que estas estão contidas no conjunto Σ , conforme representado na Figura 4.3. Isto se dá devido ao fato de que $\dot{\rho}$ somente pode mudar de sinal no intervalo $[\sigma^* / \nu_2, \sigma^* / \nu_1]$ e que, como já provado, as órbitas não cruzam as retas $\sigma = \nu_1 \rho$ e $\sigma = \nu_2 \rho$. Portanto, a proporção empregada da oferta de trabalho fica limitada a valores contidos no intervalo (ν_1, ν_2) .

Rose (1967, p.) argumenta que:

... este [o modelo] é capaz de explicar porque flutuações da taxa de desemprego são limitadamente confinadas. Teoricamente o desemprego pode variar entre 0 a 100 por cento. De fato, na economia dos EUA as taxas de desemprego maiores do que, digamos, 12 por cento e menores do que, digamos, 2 por cento, são muito improváveis. [Tradução do autor]

Realmente, o modelo de Rose implica que $\nu_1 < \nu < \nu_2$. Todavia, os valores ν_1 e ν_2 são exogenamente determinados e, conseqüentemente, os limites da taxa de desemprego são também determinados exogenamente. Além disso, a não ultrapassagem destes valores é conseqüência direta da postulação de não-linearidade da curva de Phillips.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = n$$

Isto significa que o produto apresenta uma tendência de crescimento ascendente, embora dada exogenamente.

Fato estilizado 7: *Não explicado.* A produtividade média do trabalho, considerando as propriedades (ii) e (iii) de (SR.1), é dada por:

$$\frac{Y}{N} = \frac{Y/K}{N/K} = \frac{f(\sigma)}{\sigma}$$

Portanto, no ponto de equilíbrio esta é constante e definida por,

$$\frac{Y}{N} = \frac{f(\sigma^*)}{\sigma^*}$$

Da mesma forma, a produtividade marginal do trabalho no ponto de equilíbrio é constante e dada por $f'(\sigma^*)$. Logo, a produtividade do trabalho não apresenta uma tendência de crescimento positiva. Além disso, desde que:

$$\frac{d(Y/N)}{d\sigma} = -\frac{f(\sigma) - \sigma f'(\sigma)}{\sigma^2} < 0,$$

então a produtividade média do trabalho é anti-cíclica. O efeito de uma variação em σ sobre a produtividade marginal seria dado por $f''(\sigma)$, entretanto Rose (1967, p. 155) afirma explicitamente que: *exceto sob competição pura indivisibilidades podem tornar impossível a suposição de que $f''(\sigma) < 0$ para todo σ .*

Fato estilizado 8: *Parcialmente explicado.* Como destaca Rose (1967, p. 156), a condição necessária para maximização de lucro fornece W/A_1 como uma função de σ . Assim, introduzindo (4.10) na função objetivo em (4.9), e considerando a definição $\aleph(\sigma) \equiv Q[f(\sigma)]f(\sigma)$, obtém-se:

$$\pi = A_1 K [\aleph(\sigma) - \aleph'(\sigma)\sigma]$$

Logo, por (CR.1):

$$\frac{d\pi}{d\sigma} = -A_1 K \aleph''(\sigma) > 0,$$

ou seja, o lucro é pró-cíclico. Todavia, não se pode extrair *a priori*, sem impor mais estrutura ao modelo, qualquer conclusão a respeito da volatilidade do lucro.

Fato estilizado 9: *Não explicado.* Sobre o comportamento dos agregados monetários nada é posto explicitamente na versão básica do modelo de Rose.

Fato estilizado 10: *Não explicado.* Dado que por hipótese a taxa de juros é constante o modelo de Rose desconsidera este fato estilizado.

Fato estilizado 11: *Parcialmente explicado.* A taxa de crescimento do estoque de capital, como se vê no Quadro 4.1, é pró-cíclica. O investimento agregado depende positivamente da razão demanda de trabalho-capital. Entretanto, dadas as formas gerais da função investimento e da função poupança, não se pode extrair *a priori*, sem impor mais estrutura ao modelo, qualquer conclusão a respeito das volatilidades das flutuações do investimento e do consumo.

Quadro 4.1. O Comportamento das Variáveis de Estado do Modelo de Rose durante um Período de um Ciclo

Variáveis de Estado	Fases do Ciclo	I	II	III	IV
Razão oferta de trabalho-capital	ρ	↗	↘	↘	↗
Razão demanda de trabalho-capital	σ	↗	↗	↘	↘
Coefficiente de emprego	$v = \sigma / \rho$	↘ ↗	↗	↗ ↘	↘
Taxa de crescimento do estoque de capital	$\frac{\dot{K}}{K} = \mu(\sigma) + (1-\mu)g(\sigma)$	↗	↗	↘	↘
Razão capital-produto	$\frac{Y}{K} = f(\sigma)$	↗	↗	↘	↘
Taxa de crescimento do salário nominal	$\frac{\dot{W}}{W} = F(v)$	↘ ↗	↗	↗ ↘	↘

5

**CICLO NUMA ECONOMIA DO TIPO "IS-LM": O
MODELO DE SCHINASI-SASAKURA**

Este capítulo será dedicado ao modelo de Schinasi (1982), no qual é demonstrada a possibilidade de existência de um ciclo de negócios numa versão dinâmica do tradicional modelo IS-LM com preços fixos pela aplicação do TPB¹.

A transformação da versão estática de livro texto do modelo IS-LM em uma versão dinâmica foi feita, como de praxe, por intermédio da postulação de que a renda e a taxa de juros variam de acordo com o hiato entre demanda e oferta agregadas nos mercados de bens e monetário, respectivamente. Todavia, Schinasi introduziu duas novidades: a primeira foi a inclusão de uma restrição orçamentária do governo, com a qual se introduz a dinâmica da dívida interna no modelo levando-se em consideração as duas formas básicas de financiamento do déficit do governo (por moeda e por títulos); a segunda, foi a adoção da hipótese kaldoriana de uma função investimento sigmóide. Como será visto, o comportamento do governo em busca do equilíbrio orçamentário e o comportamento não-linear do investimento se constituirão nos elementos formadores do mecanismo gerador de ciclos do modelo de Schinasi.

Este capítulo é composto de três seções. Na primeira, apresentam-se as premissas nas quais assenta-se o modelo e a dedução das equações que governam a sua dinâmica. Na segunda, são expostas as condições de existência de um ciclo. Na última seção, busca-se contrastar as predições do modelo de Schinasi-Sasakura com os fatos estilizados listados no primeiro capítulo.

¹ O cerne do trabalho de Schinasi sobre flutuações cíclicas está contido em sua tese de doutorado (Schinasi, 1979 *apud* Schinasi, 1981, p. 650). Trabalho ao qual o autor desta dissertação não teve acesso direto.

5.1. O modelo: suposições e equações de movimento

Suposições

A possibilidade de existência de um comportamento cíclico das tradicionais variáveis de estado do modelo IS-LM relativo a uma economia fechada com governo pode surgir a partir das seguintes hipóteses básicas:

SUPOSIÇÃO (SS.1): Durante o período de análise, o nível geral de preços é tomado como fixo².

SUPOSIÇÃO (SS.2): O investimento planejado é uma função do nível de renda e da taxa de juros correntes e é caracterizado pelas propriedades seguintes:

$$I = I(Y, R) \text{ com } I_Y > 0, I_{YY} \begin{cases} < 0 & \text{para } Y > Y^* \\ > 0 & \text{para } Y < Y^* \end{cases} \text{ e } I_R < 0.$$

SUPOSIÇÃO (SS.3): A poupança planejada depende do nível de renda disponível, ou seja, $S = S(Y^D)$ com $dS / dY^D \equiv S' > 0$, onde $Y^D \equiv Y + RB - T$

SUPOSIÇÃO (SS.4): A demanda de moeda é função do nível de renda e da taxa de juros, ou seja, a função preferência pela liquidez é dada por $L = L(Y, R)$ com $L_Y > 0$ e $L_R < 0$.

SUPOSIÇÃO (SS.5): O total dos gastos do governo é mantido constante em um nível $\bar{G} > 0$.

SUPOSIÇÃO (SS.6): A parte da receita do governo advinda da tributação é função do fluxo total de rendimentos auferidos pelo setor privado, o qual é dado pelo nível de renda mais o pagamento de juros sobre os títulos emitidos pelo governo, isto é, $T = T(Y + RB)$ com $0 < dT / d(Y + RB) \equiv T' < 1$.

SUPOSIÇÃO (SS.7): O governo utiliza a emissão de moeda e/ou venda de títulos para financiar seu déficit orçamentário, ou seja, $\dot{M} + \dot{B} = G + RB - T$.

² As demais suposições são estabelecidas considerando o preço do bem de consumo como *numeraire*, mais precisamente $P=1$ para todo $t \geq t_0$. Em particular, a taxa de juros nominal e real são iguais.

SUPOSIÇÃO (SS.8): O nível de renda varia proporcionalmente ao excesso de demanda agregada no mercado de bens, ou seja, $\dot{Y} = \alpha_3(I - S + G - T)$ com α_3 constante e $\alpha_3 > 0$.

SUPOSIÇÃO (SS.9): A taxa de juros varia proporcionalmente ao excesso de demanda agregada no mercado monetário, ou seja, $\dot{R} = \beta_3(L - M)$ com β_3 constante e $\beta_3 > 0$.

SUPOSIÇÃO (SS.10): O mercado monetário ajusta-se mais rapidamente do que o mercado de bens. Mais precisamente, a velocidade de ajustamento do mercado monetário é considerada infinita ($\beta_3 \rightarrow +\infty$).

Com (SS.1) deixa-se de lado o estudo das conexões entre o financiamento da dívida pública e a inflação e centra-se nas inter-relações entre o comportamento cíclico do produto e os déficits orçamentários do governo.

Com (SS.2) incorpora-se ao modelo uma função investimento *à la* Kaldor. Schinasi (1979 *apud* Sasakura, 1994, p. 426) afirmou ser possível derivar uma função investimento sigmóide a partir de um modelo de firmas maximizadoras intertemporais de lucro com horizonte de planejamento infinito sem a necessidade de apelar para a explicação original de Kaldor. Como será visto adiante, esta função é o componente chave, como no modelo de Kaldor, do mecanismo gerador de ciclo do modelo em análise.

As premissas (SS.3) e (SS.4) postulam funções de comportamento padrões dentro do contexto IS-LM³.

O comportamento do governo é traçado por meio das hipóteses (SS.5), (SS.6) e (SS.7). Com as premissas (SS.5) e (SS.6) o lado da despesa do orçamento do governo passa a ter uma ligação direta com nível de atividade da economia, ou seja, com os ciclos de negócios. A suposição (SS.7) postula uma função de reação para o governo⁴, na qual é

³ Schinasi (1982, p. 370) inclui também como argumento da função poupança e da função preferência pela liquidez a riqueza agregada. Todavia, o efeito desta variável não foi de fato considerado no estudo da possibilidade de existência de um ciclo limite no caso de financiamento do déficit das contas públicas exclusivamente via emissão de moeda, o qual será o caso efetivamente apresentado adiante.

⁴ Sasakura (1994, p. 426) afirma que a substituição desta função de reação por outra que represente uma política monetária anti-cíclica [isto é, $\dot{M} = \gamma(Y^* - Y)$ com γ constante e $\gamma > 0$] não alteraria a análise do ponto de vista formal. Isto significa, na linguagem desta dissertação, que o programa de aplicação do TPB poderia ser aplicado com sucesso neste novo cenário.

levado em consideração as duas formas de financiar os seus hiatos orçamentários⁵. O governo pode financiar seu déficit orçamentário vendendo títulos ao setor privado (*financiamento por títulos*) e/ou vendendo títulos ao Banco Central (*financiamento por moeda*). No caso do governo apresentar um superávit orçamentário, este pode utilizá-lo para resgatar títulos do setor privado e/ou resgatar títulos do Banco Central⁶.

As suposições (SS.8) e (SS.9) estabelecem mecanismos de ajustamento de erros associados a defasagens distribuídas exponencialmente nos mercados de bens e monetário.

Com (SS.10) descarta-se a possibilidade de desequilíbrio no mercado monetário, ou seja, é considerado que este se ajusta instantaneamente de forma que $L(Y,R) = M$ para todo $t \geq t_0$. Em outras palavras, a economia sempre está sobre a curva LM. Tal premissa é de cunho operacional⁷, pois com ela torna-se factível a aplicação do TPB na prova de existência de um ciclo limite, já que o sistema fica com somente duas EDO's.

Equações de movimento

Introduzindo-se as funções de comportamento, postuladas de (SS.2) a (SS.6), nos respectivos mecanismos de ajustamento de erros, postulados em (SS.7), (SS.8) e (SS.9), resulta a seguinte versão dinâmica geral do sistema IS-LM com preços fixos expandida pela restrição orçamentária do governo:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha_3 [I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y + RB)] \\ \dot{R} &= \beta_3 [L(Y, R) - M] \\ \dot{M} + \dot{B} &= \bar{G} + RB - T(Y + RB) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para o estabelecimento das condições de existência de ciclos limite, a partir do TPB, Schinasi (1982, p. 370) reduziu a dimensão do sistema (5.1) postulando o ajustamento instantâneo do mercado monetário. Dessa maneira, dado (SS.10) e lembrando

⁵ Cabe salientar que existe outra forma de financiamento, a saber, a venda de ativos do governo (por exemplo, privatização de empresas estatais). Todavia, esta terceira alternativa é de uso esporádico nas economias observadas.

⁶ Diz-se que a venda de títulos do governo diretamente ao Banco Central é um financiamento via emissão de moeda porque isto implica em *monetização da dívida*, ou seja, o Banco Central expande (contraí) a base monetária quando toma títulos do (devolve títulos ao) governo.

⁷ Do ponto de vista empírico (Dornbusch e Fischer, 1991, p. 58) esta premissa é considerada razoável, pois o mercado monetário ajusta-se simplesmente via compras e vendas de obrigações, enquanto no mercado de bens o ajustamento se dá via alterações nos planos de produção das firmas, processo de ajustamento este que demanda mais tempo que o primeiro.

que $\beta_3 > 0$, a segunda equação de (5.1) reduz-se a condição de equilíbrio no mercado monetário:

$$L(Y, R) - M = 0, \quad (5.2)$$

a qual define implicitamente a *curva LM*, que, devido a (SS.4), apresenta a inclinação de praxe:

$$\left. \frac{dR}{dY} \right|_{LM} = -\frac{L_Y}{L_R} > 0 \quad (5.3)$$

Dessa forma, a cada instante t a história fornece valores da renda e da oferta monetária real e instantaneamente o mercado monetário se ajusta. Deste ajuste resulta a taxa de juros de equilíbrio em t e, conseqüentemente, o sistema (5.1) pode ser reduzido a:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha_3 [I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y + RB)] \\ \dot{M} + \dot{B} &= \bar{G} + RB - T(Y + RB) \\ L(Y, R) - M &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

A demonstração da possibilidade de existência de um ciclo é feita por Schinasi em dois cenários distintos: o primeiro, construído a partir da hipótese de financiamento do déficit do governo exclusivamente por moeda; o segundo, construído a partir da hipótese de financiamento exclusivamente por títulos. Adiante é exposta detalhadamente a demonstração da existência de um ciclo limite no caso de financiamento por moeda⁸.

O estudo do caso de financiamento do déficit do governo exclusivamente por moeda é realizado supondo-se $\dot{B} = 0$ e, para não sobrecarregar a notação, que em t_0 $B = 0$. Dessa forma, o sistema (5.4) reduz-se a:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha_3 [I(R, Y) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y)] \\ \dot{M} &= \bar{G} - T(Y) \\ L(Y, R) - M &= 0 \end{aligned} \quad (5.4-a)$$

A observação direta de (5.4-a), mais especificamente da segunda EDO deste sistema, revela o caráter endógeno da política monetária. Como a despesa do governo é

⁸ Schinasi (1982) realiza a prova de existência de um ciclo limite com as duas formas de financiamento separadas e afirma que uma forma mesclada não alteraria os resultados. Esta apresentação se restringirá ao caso acima citado tanto por motivos de espaço quanto por ter sido este caso objeto de uma importante reformulação feita por Sasakura (1994), a qual será detalhada adiante.

congelada (\bar{G}), o déficit orçamentário passa a depender exclusivamente do lado da receita [$T(Y)$], a qual é unicamente função do nível de renda.

5.2. A Existência de um Ciclo Limite

Schinasi (1982, p. 371-373) constrói uma prova de existência de um ciclo limite para o sistema (5.4-a). Todavia, apesar de respeitar a seqüência de aplicação do TPB, sua demonstração é incompleta, devido as seguintes falhas: (i) não é desenvolvido nenhum argumento que explicita condições suficientes ou suficientes e necessárias para existência de um ponto de equilíbrio do sistema (5.4-a), mas ao contrário, é apenas suposto sua existência; (ii) a mesma espécie de crítica do item (i) pode ser feita com relação à unicidade do ponto de equilíbrio e (iii) não é construído explicitamente o conjunto compacto Ω , mas somente suposto sua existência.

Sasakura (1994) realizou uma prova completa, explicitando condições suficientes para a existência e a unicidade do ponto de equilíbrio e construindo de fato um conjunto Ω . Entretanto, para realizar tal tarefa Sasakura, embora mantendo a suposição (SS.10), desloca sua análise do plano de fases (Y, M) para o plano tradicional (Y, R), utilizando-se do estratagema que passa agora a ser descrito.

Apesar do sistema (5.4-a) possuir somente duas EDO's, este tem efetivamente três variáveis endógenas Y , M e R . Como salienta Sasakura (1994, p. 426), a trajetória deste sistema, ou seja, o movimento do seu ponto representativo pode ser imaginado (vide Figura 5.5 no final desta seção) como ocorrendo no espaço tridimensional (Y, R, M) sob a imposição de que este ponto sempre esteja no plano definido pela condição de equilíbrio do mercado monetário $L(Y, R) - M = 0$. Sendo assim, a trajetória do sistema (5.4-a) no espaço tridimensional (Y, R, M), sob tal condição, pode ser projetada em três planos alternativos: (Y, M), (Y, R) ou (R, M). Schinasi (1982) usou o primeiro plano (Y, M), isto é, escolheu como variáveis de estado de seu sistema bidimensional Y e M , enquanto que Sasakura (1994) optou pelo tradicional plano (Y, R), ou seja, pelas tradicionais variáveis de estado Y e R do modelo IS-LM.

Derivando-se (5.2) com relação ao tempo obtém-se:

$$L_Y \dot{Y} + L_R \dot{R} - \dot{M} = 0 \quad (5.5)$$

Introduzindo as EDO's de (5.4-a) em (5.5) resulta:

$$\dot{R} = (1 / L_R)[\bar{G} - T(Y)] - \alpha_3(L_Y / L_R)[I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y)] \quad (5.6)$$

Juntando a primeira EDO de (5.4-a) com (5.6) tem-se o sistema que define implicitamente a projeção no plano (Y, R) da função de transição de estado implicitamente definida por (5.4-a), ou, em outras palavras, a projeção no plano (Y, R) da órbita traçada no plano $L(Y, R) - M = 0$, definido no espaço tridimensional (Y, R, M) :

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha_3[I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y)] \\ \dot{R} &= (1 / L_R)[\bar{G} - T(Y)] - \alpha_3(L_Y / L_R)[I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Este sistema é definido no plano de fases $\Theta = \{(Y, R) \in \mathfrak{R}^2\}$.

A demonstração de Sasakura (1994, p. 427-435) de existência de um ciclo limite num modelo IS-LM é feita com base no sistema (5.7). Sua prova pode ser apresentada rigorosamente na seqüência especificada pelo programa de aplicação do TPB, explicitado no capítulo dois desta dissertação.

Sasakura (1994, p. 425) acrescenta às premissas de Schinasi, relativas as funções de comportamento, as seguintes hipóteses simplificadoras:

- CONDIÇÃO (CS.1):** (i) sobre as funções poupança, preferência pela liquidez e tributação é assumido que são lineares em todos os seus argumentos, ou seja, S' , L_Y , L_R e T' são constantes;
- (ii) sobre a função investimento é assumido que $I_{RY} = I_{RR} = 0$.

Existência de um ponto de equilíbrio

Dado que as funções de comportamento são gerais, as condições de existência, bem como as de unicidade, de um ponto de equilíbrio do sistema (5.7), foram obtidas a partir da análise das curvas de demarcação implicitamente definidas por:

$$\begin{aligned} \alpha_3[I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y)] &\equiv F(Y, R) = 0 \\ (1 / L_R)[\bar{G} - T(Y)] - \alpha_3(L_Y / L_R)[I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y)] &\equiv G(Y, R) = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Estas curvas (*loci*) onde a renda e a taxa de juros são constantes, $\dot{Y} = 0$ e $\dot{R} = 0$, daqui em diante serão denominadas de *curva IS* e *curva GH*, respectivamente⁹. As inclinações destas curvas no plano (Y,R) a partir de (5.8) são:

$$\left. \frac{dR}{dY} \right|_{IS} = - \frac{I_Y - S'(1-T') - T'}{I_R} \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix} \text{ se, e somente se, } I_Y \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} S'(1-T') + T' \quad (5.9)$$

$$\left. \frac{dR}{dY} \right|_{GH} = - \frac{T' + \alpha_3 L_Y [I_Y - S'(1-T') - T']}{\alpha_3 L_Y I_R} > 0 \text{ se } I_Y > S'(1-T') + T' \quad (5.10)$$

As informações a priori sobre as funções de comportamento são insuficientes para determinar o sinal destas expressões. Note que para a inclinação da curva GH ser positiva a condição $I_Y > S'(1-T') + T'$ é *suficiente*, porém *não necessária*. Considerando (5.9), isto significa que em pontos onde a curva GH é positivamente inclinada a curva IS pode ser negativamente inclinada.

Um ponto de equilíbrio (Y^*, R^*) é obtido pelo cruzamento das curvas de demarcação. Assim, para garantir a existência de (Y^*, R^*) Sasakura (1994, p. 428) impõe as seguintes condições ao modelo:

CONDIÇÃO (CS.2): As curvas de demarcação apresentam as seguintes propriedades:

- (i) a curva IS (isóclina $\dot{Y} = 0$) intersecciona, no plano (Y,R) , o eixo Y num ponto finito Y_1 à direita do ponto de equilíbrio Y^* , ou seja, existe $Y_1 > Y^*$ tal que $F(Y_1, 0) = 0$. Além disso, $R \rightarrow \infty$ quando $Y \rightarrow 0$;
- (ii) a curva GH (isóclina $\dot{R} = 0$) é positivamente inclinada, ou seja, $dR/dY|_{GH} > 0$ para todo $Y \in (0, Y_1)$. Além disso, esta curva intersecciona, no plano (Y,R) , o eixo R num ponto finito $R_1 > 0$, ou seja, existe um $R_1 > 0$ tal que $G(0, R_1) = 0$.

A partir exclusivamente de (CS.2) infere-se que as curvas de demarcação se cruzarão pelo menos uma vez (podendo fazê-lo mais de uma vez, vide Figura 5.1)¹⁰. Desde

⁹ A curva LM definida implicitamente por (5.2) e a curva GH são curvas distintas.

que $R_1 > 0$ a curva GH, por ser estritamente crescente, está completamente acima do eixo Y . O conjunto imagem da curva IS é o intervalo $[0, \infty)$. Como estas curvas são contínuas, então elas terão pelo menos um ponto de intersecção.

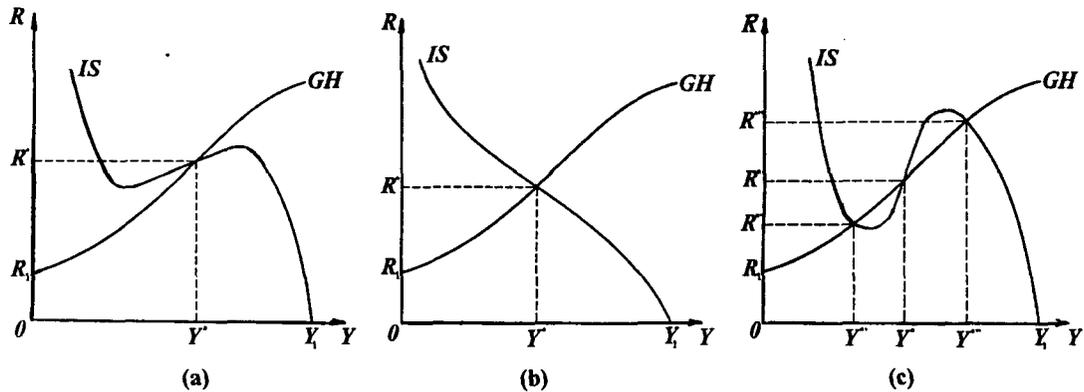


Figura 5.1. Existência de um Ponto de Equilíbrio no Modelo de Schinasi

Unicidade do ponto de equilíbrio

Dada a existência de um ponto (Y^*, R^*) a sua unicidade é automaticamente garantida pelas suposições (SS.2), (SS.4) e (SS.6), pois a curva GH sempre será mais inclinada que a curva IS, mesmo que esta última seja positivamente inclinada, formalmente¹¹:

$$\left. \frac{dR}{dY} \right|_{GH} - \left. \frac{dR}{dY} \right|_{IS} = -\frac{T'}{\alpha_3 L_Y I_R} > 0 \text{ para todo } Y \in (0, Y_1) \quad (5.11)$$

Garantido a existência e unicidade de (Y^*, R^*) , a existência e unicidade do valor de equilíbrio da oferta real de moeda são garantidas por (5.2), isto é, $M^* = L(Y^*, R^*)$. Com

10 Além disso, as curvas IS e GH são convexas para todo $Y < Y^*$ e côncavas para todo $Y > Y^*$. Tais características são implicadas fundamentalmente pela hipótese de existência de uma função investimento sigmóide, formalmente:

$$\left. \frac{d^2 R}{dY^2} \right|_{IS} = \left. \frac{d^2 R}{dY^2} \right|_{GH} = -\frac{I_{YY}}{I_R} \begin{cases} < 0 \text{ para } Y > Y^* \\ > 0 \text{ para } Y < Y^* \end{cases}$$

Estas expressões são obtidas a partir de (5.36) e (5.37) utilizando (CS.1) e considerando a seguinte regra (Yamane, 1974, p. 197): para uma função implícita $f(x,y)=0$ sua derivada segunda é $d^2 y / dx^2 = -(f_{xx} f_y^2 + f_{yy} f_x^2 - 2 f_{xy} f_x f_y) / f_y^3$.

11 Isto significa que o caso c na Figura 5.1 é descartado.

respeito ao estado estacionário, Sasakura (1994, p. 426) pressupõe que o chamado *déficit estrutural do governo*¹² é nulo, formalmente:

CONDIÇÃO (CS.3): No nível de renda de equilíbrio Y^* tem-se que $\bar{G} - T(Y^*) = 0$, onde Y^* pode ser interpretado como uma "tendência" ou, um nível "normal" ou "esperado".

Análise de estabilidade local do ponto de equilíbrio

A matriz jacobiana da linearização de (5.7) em torno de (Y^*, R^*) é dada por:

$$Df(Y^*, R^*) = \begin{bmatrix} \alpha_3(I_{Y^*} - S'^*(1 - T'^*) - T'^*) & \alpha_3 I_{R^*} \\ (1/L_{R^*})(-T_{Y^*} - \alpha_3 L_{Y^*}(I_{Y^*} - S'^*(1 - T'^*) - T'^*)) & -\alpha_3(1/L_{R^*})L_{Y^*}I_{R^*} \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

a qual rende:

$$\begin{cases} \det Df(Y^*, R^*) = \frac{\alpha_3 I_{R^*} T'^*}{L_{R^*}} = -\frac{\alpha_3^2 I_{R^*}^2 L_{Y^*}}{L_{R^*}} \left[\frac{dR}{dY} \Big|_{GH^*} - \frac{dR}{dY} \Big|_{IS^*} \right] > 0 \\ \text{tr} Df(Y^*, R^*) = \alpha_3 \left[I_{Y^*} - S'^*(1 - T'^*) - T'^* - \frac{L_{Y^*} I_{R^*}}{L_{R^*}} \right] = -\alpha_3 I_{R^*} \left[\frac{dR}{dY} \Big|_{IS^*} - \frac{dR}{dY} \Big|_{LM^*} \right] \end{cases} \quad (5.13)$$

Com base no Quadro 2.1 do capítulo dois para que (Y^*, R^*) seja localmente instável, mas não um ponto de sela, é suficiente que $\det Df(Y^*, R^*) > 0$ e $\text{tr} Df(Y^*, R^*) > 0$. A primeira dessas condições é garantida por (SS.2), (SS.4) e (SS.6). Da expressão do traço da matriz jacobiana em (5.12) Sasakura (1994, p. 429) deriva a seguinte condição:

$$\text{CONDIÇÃO (CS.4): } I_{Y^*} - S'^*(1 - T'^*) - T'^* - \frac{L_{Y^*} I_{R^*}}{L_{R^*}} > 0 \text{ ou } \frac{dR}{dY} \Big|_{IS^*} > \frac{dR}{dY} \Big|_{LM^*}$$

Esta é a condição de instabilidade local imposta originalmente por Schinasi (1982, p. 372), a qual implica que na vizinhança de Y^* a curva IS apresenta uma inclinação positiva, já que a inclinação da curva LM é sempre estritamente positiva conforme

¹² Existe uma distinção entre *déficit real* e *estrutural*, o primeiro é o déficit observado, enquanto o segundo é o déficit calculado como se a economia estivesse no nível de pleno emprego. Para maiores detalhes

demonstrado em (5.3). Em termos econômicos, esta condição significa que próximo do pleno emprego a *propensão marginal a gastar da renda* é maior que um, ou seja, o mercado de bens tende a ampliar os hiatos entre demanda e oferta agregadas, pois o impacto desestabilizador da variação da renda via investimento supera o efeito estabilizador da variação da renda via poupança e impostos¹³.

Com as condições anteriormente assumidas pode-se esboçar com certa precisão o diagrama de fase do sistema (5.7), o qual se encontra exposto na Figura 5.2. Para determinar a direção de mudança das variáveis de estado a partir de qualquer ponto do plano de fases que não pertença às curvas de demarcação, os seguintes fatos são relevantes:

$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial R} = \alpha_3 I_R < 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \dot{R}}{\partial R} = -\frac{\alpha_3 L_Y I_R}{L_R} < 0 \quad (5.15)$$

Dado que $\alpha_3 > 0$, o sinal de (5.14) é determinado por (SS.2) e de (5.15) por (SS.2) e (SS.4). A derivada (5.14) expressa o comportamento dinâmico da renda nacional com respeito à variação na taxa de juros. Pontos *abaixo* (*acima*) da curva IS devem apresentar uma velocidade da renda *positiva*, $\dot{Y} > 0$ (*negativa*, $\dot{Y} < 0$). A derivada (5.15) expressa o comportamento dinâmico da taxa de juros com relação ao seu próprio nível. Pontos *à esquerda* (*à direita*) da curva GH devem apresentar uma velocidade da taxa de juros *negativa*, $\dot{R} < 0$ (*positiva*, $\dot{R} > 0$).

consulte Dornbusch e Fischer (1991, cap. 16)

13 Sabe-se que a demanda agregada (DA) numa economia fechada com governo é, por definição, $DA \equiv C + I + G - T$. Com as hipóteses comportamentais adotadas, esta torna-se $DA = [Y - S(Y^D)] + I(Y, R) + \bar{G} - T(Y)$, da qual se deduz a propensão marginal a gastar da renda:

$$\frac{\partial DA}{\partial Y} = 1 - S'(1 - T') + I_Y - T'$$

A condição (CS.4) implica que $\partial DA / \partial Y|_{Y=Y^*} > 1$. Isto significa que num gráfico do tipo "cruz keynesiana" a curva de demanda agregada é mais inclinada que a reta de 45° na vizinhança de Y^* e, portanto, o mercado de bens é localmente instável.

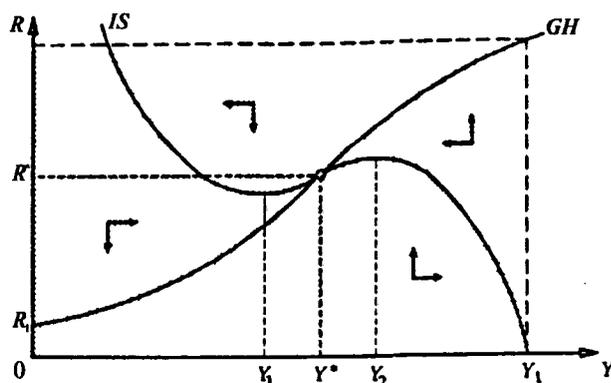


Figura 5.2. *Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Schinasi (financiamento por moeda)*

Fonte: Sasakura (1994, p. 431). (Adaptada pelo autor).

Construção do conjunto Ω

Dada a continuidade da curva GH e o fato desta ser côncava para todo $Y > Y^*$, então esta curva intersecciona a linha vertical $Y = Y_1$ (Figura 5.3). Seja $A(Y_1, R_A)$ este ponto de interseção, onde $R_A > R^*$. A partir deste ponto de referência torna-se possível construir os seguintes pontos: $B(Y_B, R_A)$, $C(Y_B, R_C)$, $D(Y_D, R_C)$, $E(Y_D, R_E)$ e $A'(Y_D, R_A)$ tal que $F(Y_B, R_A) = F(Y_D, R_C) = 0$ (pontos sobre a curva IS) e $H(Y_B, R_C) = H(Y_D, R_E) = 0$ (pontos sobre a curva GH). A região retangular $A'BCD$, ou seja, o conjunto $\{(Y, R) \in \Theta: Y_B \leq Y \leq Y_D \text{ e } R_C \leq R \leq R_A\}$ é compacto (limitado e fechado) e, portanto, é possível definir o conjunto Ω com base nesta região da seguinte maneira:

$$\Omega = \{(Y, R) \in \Theta: Y_B \leq Y \leq Y_D \text{ e } R_C \leq R \leq R_A\} - V((Y^*, R^*), \varepsilon).$$

Para mostrar que Ω é positivamente invariante deve-se demonstrar que o vetor velocidade em sua fronteira aponta para o seu interior. Considerando a argumentação relativa à direção de mudança do ponto representativo em cada uma das quatro regiões formadas pelas curvas de demarcação IS e GH tecidas anteriormente a partir de (5.14) e (5.15), conclui-se que: (i) os segmentos A'B e A'E estão na região onde $\dot{R} < 0$ e $\dot{Y} < 0$, logo o vetor velocidade aponta para sudoeste; (ii) o segmento BC está na região onde $\dot{R} < 0$ e $\dot{Y} > 0$, então o vetor velocidade aponta para sudeste; (iii) o segmento CD está na região onde $\dot{R} > 0$ e $\dot{Y} > 0$, então o vetor velocidade aponte para nordeste e (iv) o segmento DE está na região onde $\dot{R} > 0$ e $\dot{Y} < 0$, então o vetor velocidade aponta para noroeste. Em suma, em cada um destes segmentos de reta que compõem a fronteira $A'BCD$

do conjunto Ω o vetor velocidade aponta para o interior deste. Logo, desde que na fronteira da vizinhança $V((Y^*, R^*), \varepsilon)$ o vetor velocidade aponta para o interior de Ω [pois, (Y^*, R^*) não é um ponto de sela e é instável localmente], o conjunto Ω é positivamente invariante e apesar de circundar o ponto (Y^*, R^*) , não o contém.

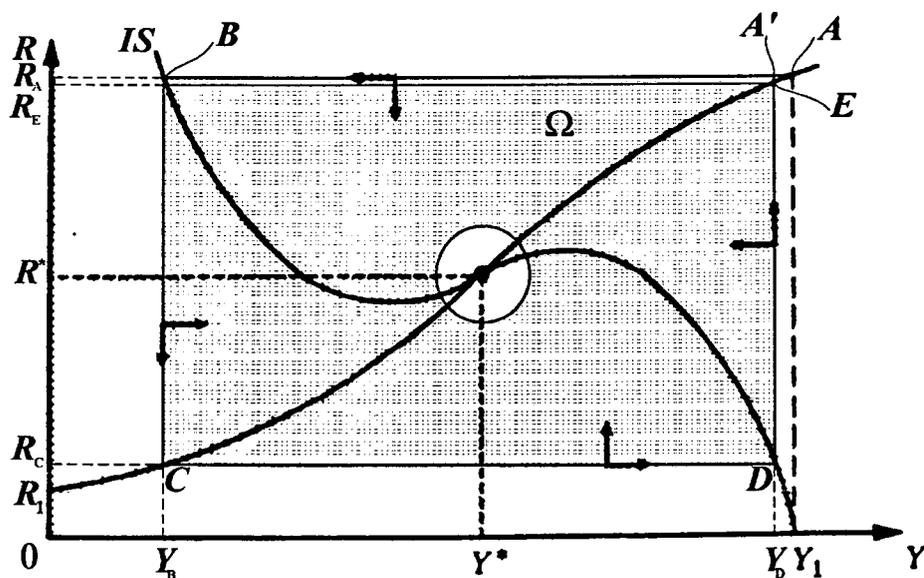


Figura 5.3. O conjunto Ω do Modelo de Schinasi-Sasakura

Teorema de existência de um ciclo

Com as reformulações feitas por Sasakura (1994) o teorema construído por Schinasi (1982, p. 372) pode ser assim enunciado:

Teorema 5.3: (Schinasi-Sasakura)

Se o sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha_3 [I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y)] \\ \dot{R} &= (1/L_R) [\bar{G} - T(Y)] - \alpha_3 (L_Y / L_R) [I(Y, R) - S(Y^D) + \bar{G} - T(Y)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

definido em $\Theta = \{(Y, R) \in \mathfrak{R}^2\}$ e construído a partir das suposições (SS.1) a (SS.10), satisfaz condições (CS.1), (CS.2), (CS.3) e (CS.4), então toda semi-órbita positiva $\gamma^+(Y_0, R_0)$ que inicie em qualquer ponto $(Y_0, R_0) \in \{\Theta - V((Y^*, R^*), \varepsilon)\}$ é um ciclo limite ou converge para um ciclo limite.

Prova: A partir de (SS.2), (SS.4), (SS.6), (CS.1) e (CS.2) decorre que o sistema (5.7) possui um, e somente um, ponto de equilíbrio (Y^*, R^*) . Por (CS.4) infere-se que o ponto (Y^*, R^*) é localmente instável e não é um ponto de sela. Pode-se definir um conjunto $\Omega = \{(Y, R) \in \Theta: Y_B \leq Y \leq Y_D \text{ e } R_C \leq R \leq R_A\} - V((Y^*, R^*), \varepsilon)$ que circunda (Y^*, R^*) mas não o contém. Além disso, o campo vetorial aponta para dentro de Ω na sua fronteira, ou seja, Ω é um conjunto positivamente invariante. Logo, pelo Corolário 2.1 do capítulo dois toda semi-órbita positiva $\gamma^+(Y_0, R_0)$ é um ciclo limite ou o conjunto limite desta $\omega(Y_0, R_0)$ é um ciclo limite.

O mecanismo gerador de ciclos

A descrição de um ciclo típico construída por Sasakura (1994, p. 433) pode ser assim exposta¹⁴. Suponha, sem perda de generalidade, que a economia se encontra no estado onde a taxa de juros está baixa e o orçamento do governo encontra-se equilibrado (ponto 1, Figura 5.4). Neste estado o mercado de bens apresenta um excesso de demanda, o que leva a um aumento do produto. Este aumento da renda desequilibra o orçamento do governo gerando um excesso de receita e, portanto, contração da oferta real de moeda. Este último efeito no mercado monetário faz a taxa de juros elevar-se. Esta cadeia causal que eleva a taxa de juros ocorre até esta atingir um nível elevado o suficiente para frear os investimentos e eliminar o excesso de demanda no mercado de bens (ponto 2, Figura 5.4).

14 Cabe aqui um prévio esclarecimento sobre as curvas LM traçadas na Figura 5.4. A suposição (SS.10) implica que o ponto representativo do sistema (5.34) está sempre sobre uma curva LM. Isto significa que o movimento deste ponto é acompanhado pela curva LM, ou seja, esta se movimenta para cima e para baixo no plano de fases de (5.7). Note que de fato este movimento da LM é somente de translação pois sua inclinação é constante devido a (CS.1). É interessante saber, já que a órbita de (5.34) e a curva LM sempre se cruzam, a inclinação relativa destas em cada momento do ciclo. A inclinação da órbita de (5.34) é obtida eliminando dt , isto é:

$$\frac{dR}{dY} = \frac{dR/dt}{dY/dt} = \frac{\bar{G} - T(Y)}{L_R F(Y, R)} - \frac{L_Y}{L_R}$$

No ponto 1 e 4 da Figura 5.7, onde $Y = Y^*$, tem-se por (CS.3) que $\bar{G} - T(Y^*) = 0$. Logo a inclinação da órbita é $dR/dY|_{Y=Y^*} = -L_Y/L_R$ que é igual à inclinação da LM dada por (5.30). Acima da curva IS a inclinação da órbita é menor (maior) do que a da curva LM quando $Y > Y^*$ ($Y < Y^*$). Abaixo da curva IS a inclinação da órbita é maior (menor) do que a da curva LM quando $Y > Y^*$ ($Y < Y^*$).

Outro ponto que merece destaque é a posição relativa da curva LM no ponto de equilíbrio (Y^*, R^*) . Neste ponto tem-se a seguinte relação (Sasakura, 1994, p. 429, proposição 2):

$$\left. \frac{dR}{dY} \right|_{GH^*} > \left. \frac{dR}{dY} \right|_{IS^*} > \left. \frac{dR}{dY} \right|_{LM^*} > 0$$

Está relação é implicada por (5.38), (CS.4) e (SS.4) [considere (5.30)].

Entretanto, a taxa de juros continua a crescer porque o governo ainda está com seu orçamento superavitário e o mercado de bens passa a apresentar excesso de oferta devido às altas taxas de juros. Nesta fase a contração do produto, gerada por este excesso de oferta, contribui para acelerar a eliminação do superávit orçamentário. A taxa de juros alcança seu patamar máximo (ponto 3, Figura 5.4) quando esta provoca um excesso de oferta máximo no mercado de bens. Deste ponto em diante, a taxa de juros começa a cair, devido à brusca contração do produto, embora o governo ainda esteja retirando moeda da economia devido a seu persistente superávit orçamentário. Este processo vai desenrolar-se até o governo atingir novamente seu equilíbrio orçamentário de longo prazo (ponto 4, Figura 5.4), onde a oferta real de moeda se encontra no seu nível mínimo.

Todavia, o governo não consegue se manter no ponto 4, pois o mercado de bens ainda apresenta excesso de oferta que gera contração no produto. Esta queda na renda desequilibra o orçamento do governo gerando um déficit e, portanto, expansão da oferta real de moeda. Este último efeito faz a taxa de juros cair. Esta cadeia causal que contrai a taxa de juros ocorre até esta atingir um nível baixo o suficiente para acelerar os investimentos e eliminar o excesso de oferta no mercado de bens (ponto 5, Figura 5.4). Contudo, a taxa de juros continua a decrescer porque o governo ainda está com seu orçamento deficitário e o mercado de bens passa a exibir excesso de demanda devido as baixas taxas de juros. Nesta fase, a expansão do produto, gerada por este excesso de demanda, contribui para acelerar o desaparecimento do déficit orçamentário. A taxa de juros alcança seu valor mínimo (ponto 6, Figura 5.4). Daí para frente a taxa de juros começa a elevar-se, devido a forte expansão do produto, embora o governo ainda esteja emitindo moeda devido ao seu persistente déficit. Este processo vai desenrolar-se até o governo atingir seu equilíbrio orçamentário de longo prazo inicial (ponto 1, Figura 5.4), onde a oferta real de moeda está no seu auge. A partir deste estado o ciclo recomeça.

Em suma, quando o governo está em seu equilíbrio orçamentário de longo prazo o mercado de bens está com excesso de demanda ou oferta, o que gera perturbações na renda e, portanto, na receita do governo, o que perturba o equilíbrio das contas públicas. Por sua vez, quando o mercado de bens está equilibrado o governo está com déficit ou superávit orçamentário e, portanto, está alterando a oferta de moeda e, conseqüentemente, a taxa de juros, o que perturba o equilíbrio entre oferta e demanda agregada de bens via seu efeito sobre o investimento.

Quando a economia se afasta de Y^* em ambas as direções a partir de uma certa distância a curva IS torna-se negativamente inclinada como de praxe, conforme pode-se ver nas figuras desta subseção. Isto implica por (5.9) que "longe" de Y^* tem-se $I_Y < S'(1 - T') + T'$. Esta desigualdade é possível devido à função investimento ser não-linear e ter a forma sigmóide. Em termos econômicos, isto significa que quando a economia encontra-se em estados de relativamente forte recessão ou expansão a propensão marginal a gastar da renda é menor que um e, portanto, o mercado de bens tende a diminuir os hiatos entre demanda e oferta agregadas, pois o impacto desestabilizador da renda via investimento passa a ser superado pelo efeito estabilizador da renda via poupança e impostos. Note que esta relação de forças é exatamente oposta àquela apresentada pela mercado de bens quando a economia está próxima de Y^* . Enfim, é o comportamento não-linear do investimento que não permite a economia convergir nem se afastar continuamente de Y^* .

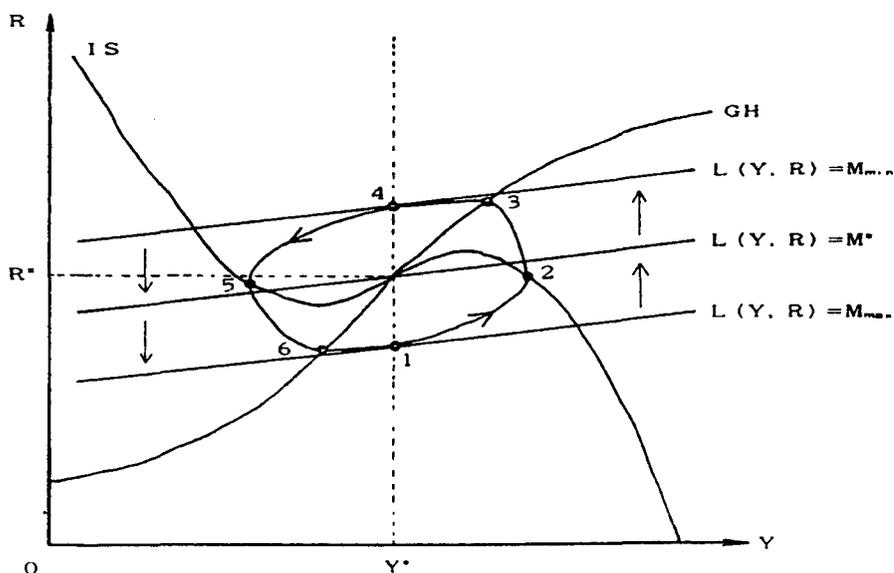


Figura 5.4. Um Ciclo Típico do Modelo de Schinasi-Sasakura
 Fonte: Sasakura (1994, p. 433).

Na Figura 5.5 encontra-se representado no espaço tridimensional (Y, R, M) um ciclo de negócios típico do modelo de Schinasi, bem como suas projeções nos planos (Y, M) , (Y, R) e (R, M) .

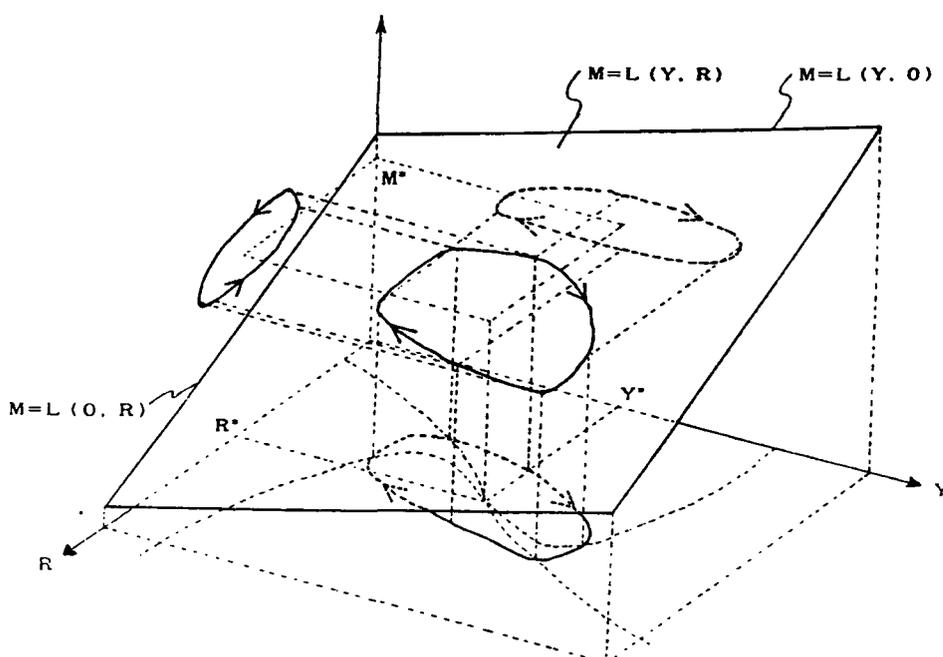


Figura 5.5. Um Ciclo Limite no Plano LM do Modelo de Schinasi
 Fonte: Sasakura (1994, p. 435)

5.3. O Modelo de Schinasi e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios

Nesta última seção busca-se contrastar as previsões do modelo de Schinasi-Sasakura com a lista de fatos estilizados do capítulo um. As ressalvas feitas na seção 3.3 aplicam-se aqui.

Fato estilizado 1: *Explicado* pelo teorema 5.3.

Fato estilizado 2: *Provavelmente explicado.* Se uma semi-órbita positiva $\gamma^+(Y_0, R_0)$ não é um ciclo limite, esta converge em espiral para um ciclo limite e, portanto, as oscilações que esta gera não são periódicas, no sentido de que não possuem um período constante. Entretanto, quando $\gamma^+(Y_0, R_0)$ é um ciclo limite o sistema passa pelo mesmo ponto em intervalos de tempo regulares. Se o número de ciclos limites é finito, então é mais provável que $\gamma^+(Y_0, R_0)$ não seja um ciclo limite.

Fato estilizado 3: *Impossibilidade de comparação.* Os resultados de cunho qualitativo impossibilitam, sem colocar mais estrutura no modelo, o estabelecimento de qualquer relação precisa entre as previsões deste com o fato estilizado em questão.

- Fato estilizado 4:** *Não explicado.* Este fato é descartado por hipótese, já que é suposto que o nível de preços é constante.
- Fato estilizado 5:** *Não explicado.* Está ausente no modelo de Schinasi uma modelagem do mercado de trabalho, ou seja, uma teoria para a curva de oferta agregada, a qual por (SS.1) é implicitamente suposta perfeitamente elástica com relação ao nível geral de preços (curva de oferta agregada horizontal).
- Fato estilizado 6:** *Não explicado.* Como a renda de equilíbrio Y^* é determinada completamente pelas condições iniciais e parâmetros do modelo, os quais permanecem fixos no período de análise, então não existe nenhum mecanismo endógeno que explique a tendência de crescimento positiva da renda.
- Fato estilizado 7:** *Não explicado.* Desde que não existe uma modelagem explícita do sistema produtivo da economia, então não há qualquer consideração explícita a respeito da evolução da produtividade do trabalho.
- Fato estilizado 8:** *Não explicado.* Devido ao alto nível de agregação do modelo em questão e à manutenção de um corte analítico típico do modelo IS-LM, não existe nenhuma classificação em termos de grupos de renda ou classe social (trabalhadores e capitalistas) no modelo em análise. Isto implica na utilização da renda como um agregado único, isto é, não há uma divisão, por exemplo, entre salários e lucros dentro do modelo de Schinasi. Logo, a variável lucro não aparece explicitamente¹⁵.
- Fato estilizado 9:** *Parcialmente explicado.* Conforme se vê no Quadro 5.1 a oferta de moeda real com exceção das fases dois e cinco acompanha o movimento do produto durante o ciclo. Dessa maneira, pode-se afirmar que esta tem um comportamento pró-cíclico. Embora isso ocorra, a oferta monetária real apresenta decréscimos em termos absolutos.
- Fato estilizado 10:** *Parcialmente explicado.* A taxa de juros, semelhante à oferta monetária real, acompanha o sentido do movimento do produto na maior parte de um período do ciclo de negócios. Neste modelo não há uma diferenciação entre taxas de juros de curto e de longo prazo.

Fato estilizado 11: *Não explicado.* Apesar do investimento, além de sofrer influências da renda, como o consumo, ainda depender da taxa de juros, não é possível afirmar que este apresentará flutuações mais intensas que o consumo, pois isto dependerá dos coeficientes do modelo. Devido ao alto nível de agregação do modelo não há uma separação entre investimento em estoques e investimento em capital fixo.

Quadro 5.1. *O Comportamento das Variáveis de Estado do Modelo de Schinasi-Sasakura durante um período de um Ciclo*

Variáveis de Estado	Fases do Ciclo	I	II	III	IV	V	VI
Produto	Y	↗	↗	↘	↘	↘	↗
Taxa de Juros	R	↗	↗	↗	↘	↘	↘
Oferta de Moeda	M	↗	↘	↘	↘	↗	↗

Fonte: Sasakura (1994, p. 434)

¹⁵ Se o lado da oferta fosse modelado a partir de uma função de produção neoclássica padrão poder-se-ia provavelmente extrair conclusões mais precisas sobre as relações entre produto, produtividade e lucros. Entretanto, ter-se-ia que previamente conciliar a função de produção com a função investimento sigmóide.

6

CICLO NUMA ECONOMIA NÃO-WALRASIANA: O MODELO DE BENASSY

Em nenhum dos modelos vistos até aqui havia uma estrutura de curto prazo formalizada que determinasse de forma consistente as variáveis endógenas (preços e quantidades) em cada ponto do tempo dados os valores das variáveis exógenas fornecidos pela história (pelas equações de movimento). Esta inexistência de uma estrutura de curto prazo, como destaca Benassy (1984, p. 78), implica na possibilidade de discrepâncias entre poupança e investimento no curto prazo, as quais fariam sentido somente recorrendo a ajustamentos de estoques não formalizados nos modelos.

O objetivo deste capítulo é apresentar o modelo de ciclos endógenos de Benassy (1984). Neste modelo, o curto prazo é modelado explicitamente como um *equilíbrio não-walrasiano*. Nesta estrutura de curto prazo não-walrasiana encontra-se o coração do mecanismo gerador de ciclos deste modelo. Tal estrutura conduz a classificação do modelo de Benassy como pertencente à *Teoria dos Equilíbrios não-Walrasianos*¹.

Outra característica marcante do modelo de Benassy é o fato de que a existência de um ciclo não recai sobre alguma forma *ad-hoc* da função investimento, curva de Phillips ou qualquer outra função de comportamento agregada ou mecanismo de ajustamento de erros, como ocorreu nos modelos resenhados até o presente momento.

Este capítulo é formado por três seções. Na seção inicial, trata-se da dedução das equações que governam a evolução do sistema. Na segunda seção, expõe-se as condições de existência de um ciclo. Na última seção, busca-se contrastar as previsões do modelo de Benassy com os fatos estilizados listados no primeiro capítulo.

¹ Uma apresentação detalhada da teoria dos equilíbrios não-walrasianos é encontrada em Benassy (1986). Em língua portuguesa tem-se o trabalho de Rosinger (1995), o qual apresenta a base de tal teoria de um ponto de vista macroeconômico. Nestes dois trabalhos existe uma abundante referência bibliográfica sobre o tema.

6.1. O modelo: suposições e equações de movimento

Suposições

O modelo de Benassy (1984) é construído a partir das seguintes premissas:

SUPOSIÇÃO (SB.1): No curto prazo, o salário nominal é fixo e o nível de preços flexível.

SUPOSIÇÃO (SB.2): O consumo agregado depende do nível de renda e do nível geral de preços, ou seja, $C = C(Y, P)$ com $0 < C_Y < 1$ e $C_P < 0$.

SUPOSIÇÃO (SB.3): O investimento agregado depende da demanda esperada e da taxa de juros², ou seja, $I = I(X, R)$ com $I_R < 0$ e $I_X > 0$.

SUPOSIÇÃO (SB.4): A oferta nominal de moeda é fixada a um nível $\bar{M} > 0$.

SUPOSIÇÃO (SB.5): A demanda de moeda é função da renda, da taxa de juros e do nível geral de preços, ou seja, $M^d = L(Y, R, P)$ com $L_Y > 0, L_R < 0$ e $L_P > 0$.

SUPOSIÇÃO (SB.6): O sistema produtivo é formado por um único setor, o qual produz um único bem homogêneo utilizando o trabalho como único fator de produção, sujeito a uma função de produção agregada neoclássica $F(N)$ com $F'(N) > 0$ e $F''(N) < 0$.

SUPOSIÇÃO (SB.7): A oferta de trabalho é perfeitamente inelástica com relação ao salário real, sendo fixada a um nível $N_0 > 0$.

SUPOSIÇÃO (SB.8): A demanda esperada ajusta-se ao valor da demanda observada, ou seja, $\dot{X} = \alpha_2(Y - X)$, com α_2 constante e $\alpha_2 > 0$.

SUPOSIÇÃO (SB.9): A variação do nível de salário nominal depende do nível de desemprego de acordo com a Curva de Phillips $\dot{W} = H(u)$ com $H'(u) < 0$ para todo $u \geq 0$, $\lim_{u \rightarrow 0} \dot{W} = +\infty$ e $\lim_{u \rightarrow +\infty} \dot{W} = -\infty$.

Com relação à suposição (SB.1), cabe esclarecer o significado de curto prazo. Este é o horizonte de tempo no qual as firmas tomam o salário nominal como dado e têm

² O modelo de ciclos de Benassy foi apresentado originalmente no artigo já citado de 1984. Contudo, Benassy reapresentou seu modelo em seu livro *Macroeconomics: a introduction to the non-walrasian approach* (Benassy, 1986, cap. 11). Nesta reapresentação Benassy acrescenta o nível de preço como argumento da função investimento. Todavia, isto não altera qualquer resultado do artigo original.

fixadas suas expectativas com respeito à demanda futura (o porquê destas condições ficará claro no decorrer da exposição). Entretanto, o modelo de Benassy é um sistema dinâmico contínuo. Conseqüentemente, o intervalo no qual o salário nominal e a demanda esperada permanecem constantes é infinitesimalmente pequeno.

A função consumo agregada postulada em (SB.2) pode ser interpretada como o resultado do comportamento maximizador de utilidade por parte das famílias racionadas no mercado de trabalho³.

A função investimento postulada em (SB.3) traz uma novidade com respeito às funções de investimento agregadas que compõem a equações IS nas apresentações tradicionais do sistema IS-LM, a saber, a introdução explícita da demanda esperada. Nos sistemas IS-LM tradicionais geralmente utiliza-se o nível de renda presente ou de períodos passados como *proxy* da demanda esperada. É a demanda esperada que definirá o estado de expectativas do modelo em análise.

A suposição (SB.4) é introduzida com o objetivo de simplicidade, ou seja, com ela desconsidera-se os efeitos da política monetária sobre a evolução dinâmica do sistema econômico. Além disso, na especificação dos componentes da demanda agregada, desconsidera-se também as variáveis de política fiscal (tributação e gastos do governo). Dessa forma, o ciclo surgirá unicamente do *modus operandis* do setor privado da economia.

A suposição (SB.5) completa as suposições necessárias para a construção do “*bloco da demanda*” do modelo de oferta e demanda agregada com salário fixo e preço flexível que define o curto prazo do modelo de Benassy. Cabe notar que a função investimento e a função demanda por encaixes reais têm como argumento a mesma taxa de juros, ou seja, não há uma diferenciação explícita entre taxa de juros nominal e real. Isto significa que se está assumindo implicitamente que a taxa de inflação esperada é igual a zero.

A suposição (SB.6) desconsidera a existência de progresso técnico. Somada com a suposição (SB.7), isto implica na desconsideração explícita do crescimento e sua conexão com o fenômeno do ciclo. Estas suposições dão origem ao “*bloco da oferta*”.

As suposições (SB.8) e (SB.9) são as equações de movimento que governam a evolução dinâmica do modelo de Benassy. Na suposição (SB.8) é assumido que a demanda esperada se ajusta adaptativamente ao hiato entre a demanda observada e a demanda esperada.

³ Para uma derivação formal vide Rosinger (1995).

Na suposição (SB.9) é postulada a existência de uma curva de Phillips padrão⁴ (Figura 6.1). Dada a existência de uma relação biunívoca entre o nível de emprego e o nível de produto, dada pela função de produção, é possível reexpressar esta premissa conectando diretamente a taxa de variação do nível de salário nominal com o nível de produto, como segue:

$$\dot{W} = G(Y) \quad (6.1)$$

onde $G(Y) \equiv H[N_0 - F^{-1}(Y)]$ e $G'(Y) \equiv -H'(F^{-1})' > 0$ para todo $Y > 0$. É importante salientar que existe um, e somente um, valor \bar{u} (nível de desemprego não-inflacionário) tal que $\dot{W} = H(\bar{u}) = 0$, pois $H(u)$ é uma função continuamente diferenciável, $H'(u) < 0$ para todo $u \geq 0$, $\lim_{u \rightarrow 0} \dot{W} = +\infty$ e $\lim_{u \rightarrow +\infty} \dot{W} = -\infty$. Por definição, tem-se $u \equiv N_0 - N$. Portanto, desde que $Y = F(N)$ é contínua e $F'(N) > 0$, existe um, e somente um, nível de produto não-inflacionário associado a \bar{u} , determinado por $\bar{Y} = F(N_0 - \bar{u})$. Obviamente, $\dot{W} = G(\bar{Y}) = 0$.

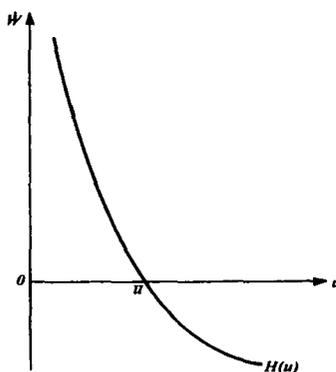


Figura 6.1. Curva de Phillips
Fonte: Benassy (1986)

O curto prazo como um equilíbrio temporário não-walrasiano

A estrutura do modelo em questão no curto prazo é semelhante àquela de um modelo IS-LM de uma economia fechada sem governo com preço flexível e rigidez do

⁴ O nível de desemprego está relacionado à velocidade de ajustamento do salário nominal e não, como de praxe, à taxa de crescimento do salário nominal. Benassy (1986, p. 175) salienta que esta simplificação facilita a argumentação e não acarreta qualquer mudança dos resultados centrais do modelo.

salário nominal no mercado de trabalho⁵. O lado da demanda, a partir das suposições (SB.2) a (SB.5), é formado pelas equações IS-LM tradicionais.

$$\begin{aligned} Y &= C(Y, P) + I(X, R) \\ L(Y, R, P) &= \bar{M} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Seja $K(X, P, \bar{M})$ a solução em Y deste sistema IS-LM. Esta função corresponde à "Curva de Demanda Agregada" keynesiana de livro texto. Os impactos de variações da demanda esperada e do nível de preço sobre a renda de equilíbrio são dados por:

$$K_X = \frac{I_X L_R}{(1 - C_Y)L_R + L_Y I_R} > 0 \quad \text{e} \quad K_P = \frac{C_P L_R - I_R L_P}{(1 - C_Y)L_R + L_Y I_R} < 0, \quad (6.3)$$

os sinais destas expressões são determinados por (SB.2), (SB.3) e (SB.5).

No espaço (P, Y) a curva de demanda agregada é parametrizada pela oferta monetária e pelo estado de expectativas (demanda esperada). O comportamento da função $K(X, P, \bar{M})$ no espaço (P, Y) pode ser determinado definindo o comportamento desta função para valores extremos da demanda esperada, $X=0$ e $X=Y_0$. Para tais valores é assumido que a curva de demanda agregada comporta-se da seguinte maneira quando o nível de preço tende a seus valores extremos:

CONDIÇÃO (CB.1): $\lim_{P \rightarrow 0} K(0, P, \bar{M}) > Y_0$ e $\lim_{P \rightarrow \infty} K(Y_0, P, \bar{M}) < \bar{Y}$, onde $Y_0 = F(N_0)$.

A suposição de que o nível de demanda agregada será maior (fixado $X=0$ e o valor da oferta monetária em \bar{M}) do que o nível de oferta agregada de pleno emprego (Y_0), quando o preço cai a níveis baixíssimos, advém da existência de um efeito do tipo "encaixe real". Já a suposição de que a demanda agregada cairá (fixado $X=Y_0$ e o valor da oferta monetária em \bar{M}) a níveis inferiores ao nível de oferta não-inflacionária (\bar{Y}) quando o nível de preços tende a tornar-se excessivamente alto, pode ser racionalizada atentando-se simplesmente para os efeitos do nível de preços sobre a demanda agregada. Elevações do nível de preço reduzem o consumo agregado diretamente. Além disso, tais elevações aumentam a demanda de moeda, a qual aumenta a de juros. Isto gera efeitos contracionista

⁵ Nos manuais correntes de macroeconomia este modelo é alternativamente denominado *modelo de demanda e oferta agregadas com salário nominal fixo e preço flexível*.

sobre o investimento. A partir da condição (CB.1) a curva de demanda agregada pode ser esboçada como exposto na Figura 6.2.

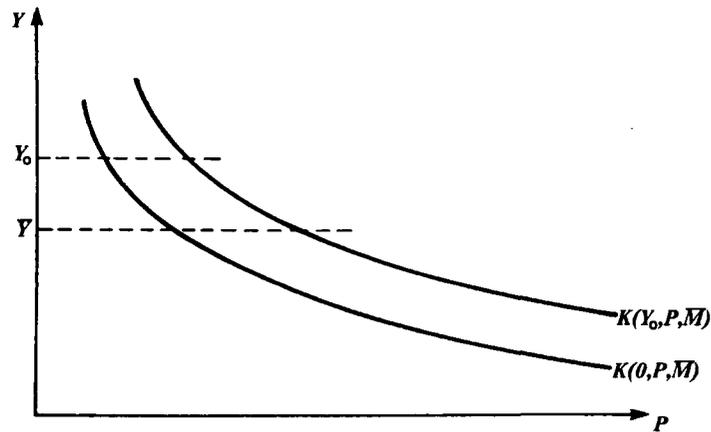


Figura 6.2. Curva de Demanda Agregada
Fonte: Benassy (1986, p. 177)

O “lado da oferta” é derivado do comportamento maximizador de lucro da firma representativa, a qual leva em conta a possibilidade de existência de uma restrição N_0 no mercado de trabalho. Dado (SB.5) a solução deste problema de otimização condicionada é bem definida e fornece a função *demanda de trabalho efetiva* e a *função oferta de bens efetiva*:

$$N^d = \min\{F'^{-1}(W/P), N_0\} \quad (6.4)$$

$$Y^s = \min\{F[F'^{-1}(W/P)], Y_0\} \quad (6.5)$$

Como já comentado anteriormente, se o vetor de preços vigente na economia é tal que a firma representativa não encontra ativa a *restrição percebida* no mercado de trabalho, então esta realiza sua demanda de trabalho walrasiana e, conseqüentemente, sua oferta de bens walrasiana. Dessa maneira, a “Curva de Oferta Agregada” tem o formato apresentado na Figura 6.3.

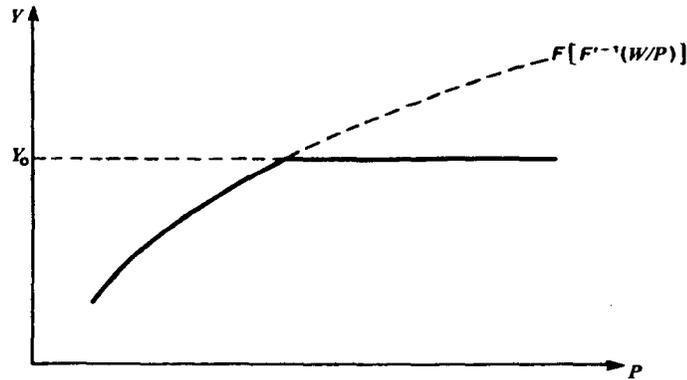


Figura 6.3. Curva de Oferta Agregada
Fonte: Benassy (1986, p. 178)

Dada a flexibilidade do preço do produto e a possibilidade de restrição no mercado de trabalho, devido à rigidez do salário nominal, o *equilíbrio de curto prazo*, ou seja, o *equilíbrio temporário não-walrasiano* é então determinado pelas condições de equilíbrio seguintes:

$$\begin{aligned} Y &= C(Y, P) + I(X, R) \\ L(Y, R, P) &= \bar{M} \\ Y &= \min\{F[F^{-1}(W/P)], Y_0\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

O equilíbrio temporário não-walrasiano poderia ser caracterizado pela existência de desemprego⁶. Entretanto, dada a hipótese (SB.9) sobre a dinâmica do salário nominal (a existência de uma Curva de Phillips tradicional) o pleno emprego nunca é atingido durante a evolução dinâmica do sistema⁷. Dessa forma, o *lado da oferta* é formado simplesmente pela parte walrasiana da curva de oferta agregada, $Y^s = F[F^{-1}(W/P)]$. Sendo assim, o sistema que efetivamente determina o equilíbrio de curto prazo é:

$$\begin{aligned} Y &= C(Y, P) + I(X, R) \\ L(Y, R, P) &= \bar{M} \\ Y &= F[F^{-1}(W/P)] \end{aligned} \quad (6.7)$$

⁶ Cabe salientar que devido à premissa de flexibilidade de preço no mercado de bens este não apresenta excesso de demanda ou de oferta.

⁷ Quando $Y \rightarrow Y_0$ pela função de produção tem-se que $N \rightarrow N_0$. Isto implica que $u \equiv N_0 - N \rightarrow 0$.

Pela curva de Phillips $\dot{W} \rightarrow \infty$ e, portanto, $\frac{W}{P} \rightarrow \infty$. Logo, a demanda de trabalho walrasiana, a qual determina o nível de *transação* no mercado de trabalho devido à vigência da *regra do lado curto*, é fortemente contraída, ou seja, tende a ser nula na vizinhança do pleno emprego e, conseqüentemente, este não é atingido.

A condição (CB.1) assegura que o sistema (6.7) tem uma solução. Além disso, por (SB.9) é implicado que a curva de oferta e demanda agregada se cruzam abaixo do nível de renda de pleno emprego, conforme representado na Figura 6.4.

O sistema (6.7) é a *estrutura de curto prazo* do modelo de Benassy. Tal sistema é parametrizado pelo nível de salário nominal W , pelo estado das expectativas X e pela dotação de encaixes monetários \bar{M} . Em outras palavras, os valores das variáveis endógenas Y , R e P são determinados para dados valores de W , X e \bar{M} , variáveis estas consideradas exógenas no curto prazo. O ponto (Y, R, P) , solução de (6.7), é o *equilíbrio temporário não-walrasiano* do modelo de Benassy⁸.

Seja $Y = Z^1(W, X; \bar{M})$, $R = Z^2(W, X; \bar{M})$ e $P = Z^3(W, X; \bar{M})$ a solução⁹ do sistema (6.7). Fazendo $S(P, W) \equiv F[F'^{-1}(W/P)]$, onde $S_p > 0$ e $S_w < 0$ devido a (SB.6), os impactos de variações do nível de demanda esperada e do nível da salário sobre as variáveis endógenas no curto prazo (renda, taxa de juros e preço) são dados por:

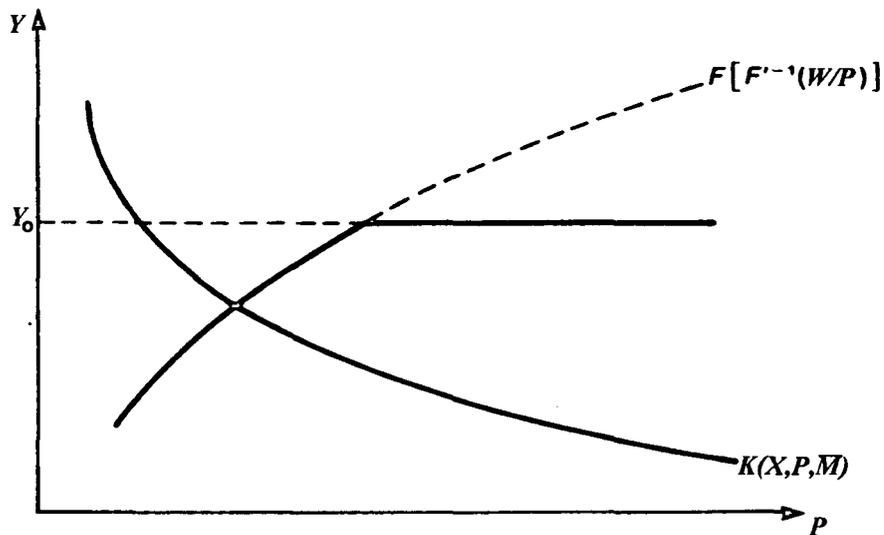


Figura 6.4. O Equilíbrio Temporário não-Walrasiano
Fonte: Benassy (1986, p. 178)

⁸ A estrutura de curto prazo do modelo de Benassy implica a existência de um equilíbrio temporário não-walrasiano caracterizado pelo equilíbrio no mercado de bens e excesso de oferta no mercado de trabalho e, portanto, localizado exatamente sobre a *fronteira entre o desemprego keynesiano e o desemprego clássico* no espaço de preços (P, W) . As definições precisas de tais fronteiras podem ser encontradas em Benassy (1986) ou Rosinger (1985).

⁹ O ponto-e-vírgula separando \bar{M} dos demais argumentos busca destacar o fato de que \bar{M} possui um *status* de parâmetro do modelo de Benassy. Poder-se-ia, por exemplo, estudar a presença de bifurcações devido a política monetária neste modelo.

$$Z_W^1 = \frac{S_W(C_P L_R - I_R L_P)}{J} < 0 \quad \text{e} \quad Z_X^1 = -\frac{S_P I_X L_R}{J} > 0 \quad (6.8)$$

$$Z_W^2 = -\frac{S_W[(1-C_Y)L_P + C_P L_Y]}{J} \quad \text{e} \quad Z_X^2 = \frac{I_X(L_Y S_P + L_P)}{J} > 0 \quad (6.9)$$

$$Z_W^3 = \frac{S_W[(1-C_Y)L_R + I_R L_Y]}{J} > 0 \quad \text{e} \quad Z_X^3 = \frac{I_X L_R}{J} < 0 \quad (6.10)$$

onde $J \equiv C_P L_R - I_R L_P - S_P[(1-C_Y)L_R + L_Y I_R] > 0$.

Nota-se que a intensidade do impacto (positivo) de uma variação do estado de expectativa sobre o nível de renda de equilíbrio, Z_X , depende fundamentalmente do impacto da demanda esperada sobre o volume de investimento, ou seja, do valor do “coeficiente de aceleração”, I_X . Quanto mais alto este coeficiente, maior será o impacto sobre a demanda agregada e, conseqüentemente, maior será o impacto sobre a renda de equilíbrio. Por sua vez, o impacto (negativo) do salário nominal sobre o nível de renda de equilíbrio, Z_W , depende da intensidade da resposta da demanda de trabalho por parte das firmas a variações do salário nominal, S_W . Quanto mais sensível for a demanda de trabalho a tais variações maior será a variação do volume de oferta agregada e, portanto, maior será o impacto sobre a renda de equilíbrio.

A dinâmica: sucessão de equilíbrios temporários não-walrasianos

Pela suposição (SB.4) a oferta nominal de moeda é fixa a um nível \bar{M} e, portanto, continuará a ser considerada uma variável exógena durante a evolução do sistema econômico em questão. Dessa forma, o equilíbrio de curto prazo só se alterará quando ocorrerem mudanças no nível de salário nominal ou na demanda esperada pelas firmas. Em outras palavras, a evolução dinâmica do modelo de Benassy (isto é, a seqüência de equilíbrios temporários não-walrasianos) dependerá diretamente da evolução dos salários nominais e da demanda esperada.

A evolução destas variáveis é dada pelos mecanismos de ajustamento de erros postulados em (SB.8) e (SB.9). Considerando a função $Y = Z^1(W, X; \bar{M})$ que define em cada instante de tempo a renda de equilíbrio não-walrasiana, a dinâmica do modelo de Benassy é então definida pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= G(Y) \\
\dot{X} &= \alpha_2(Y - X) \quad \text{ou} \quad \dot{W} = G[Z^1(W, X; \bar{M})] \\
Y &= Z^1(W, X; \bar{M}) \quad \dot{X} = \alpha_2[Z^1(W, X; \bar{M}) - X]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Este sistema é definido no plano de fases $\Theta = \{(W, X) \in \mathfrak{R}_+^2\}$.

6.2. A existência de um ciclo limite

Construída a formulação dinâmica do modelo de Benassy, pode-se passar ao estudo das condições de existência de um ciclo limite no plano de fases $\Theta = \{(W, X) \in \mathfrak{R}_+^2\}$ de (6.11). Esta tarefa pode ser rigorosamente apresentada na seqüência especificada no programa de aplicação do TPB explicitado no capítulo dois.

Existência de um ponto de equilíbrio

Um ponto de equilíbrio (W^*, X^*) do sistema (6.11), bem como a renda de equilíbrio Y^* associada a este ponto, são determinados pelas condições a seguir:

$$\begin{aligned}
X^* &= Y^* = \bar{Y} \\
Z^1(W^*, \bar{Y}; \bar{M}) &= \bar{Y}
\end{aligned} \tag{6.12}$$

A existência de um nível de produção não-inflacionária \bar{Y} é garantida, como já argumentado, pelas premissas (SB.6) e (SB.9). Dessa forma, a existência de um ponto de equilíbrio (W^*, X^*) é derivada da existência de um W^* tal que a segunda equação em (6.11) tenha solução. Isto é assegurado pela condição (CB.1), pois a partir desta deduz-se:

$$\lim_{W \rightarrow 0} Z^1(W, 0; \bar{M}) > Y_0 \quad \text{e} \quad \lim_{W \rightarrow +\infty} Z^1(W, Y_0; \bar{M}) < \bar{Y}, \tag{6.13}$$

limites estes que garantem que(vide Figura 6.6):

$$\lim_{W \rightarrow 0} Z^1(W, \bar{Y}; \bar{M}) > Y_0 \quad \text{e} \quad \lim_{W \rightarrow +\infty} Z^1(W, \bar{Y}; \bar{M}) < \bar{Y}, \tag{6.14}$$

pois (lembrando que $Z_x^1 > 0$) $Z^1(W, Y_0; \bar{M}) > Z^1(W, \bar{Y}; \bar{M}) > Z^1(W, 0; \bar{M})$ para todo $W \geq 0$.

Dado que $Z^1(W, X; \bar{M})$ é contínua, então existe pelo menos um W^* que resolve (6.11).

Unicidade do ponto de equilíbrio

A unicidade do ponto de equilíbrio (W^*, X^*) advém naturalmente da monotonicidade da função $Z^1(W, X; \bar{M})$ com relação a W assegurada pela condição $Z^1_W < 0$.

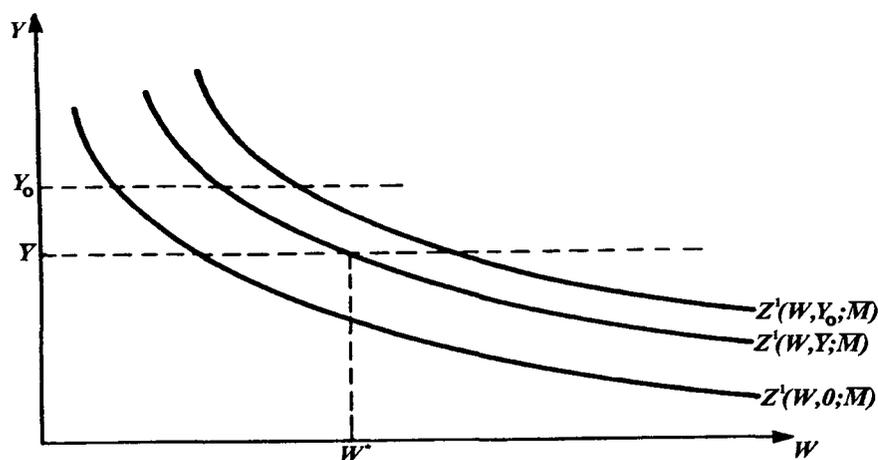


Figura 6.5. Renda de Equilíbrio versus Salário nominal
Fonte: Benassy (1984, p. 83)

Análise de estabilidade local do ponto de equilíbrio

A matriz jacobiana da linearização de (6.11) em torno de (W^*, X^*) é dada por:

$$Df(W^*, X^*) = \begin{bmatrix} G_Y^* Z_W^{1*} & G_Y^* Z_X^* \\ \alpha_2 Z_W^{1*} & \alpha_2 (Z_X^{1*} - 1) \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

a qual rende:

$$\begin{cases} \det Df(W^*, X^*) = -\alpha_2 G_Y^* Z_W^{1*} \\ \text{tr} Df(W^*, X^*) = G_Y^* Z_W^{1*} + \alpha_2 (Z_X^{1*} - 1) \end{cases} \quad (6.16)$$

Com base no Quadro 2.1 do capítulo dois para que (W^*, X^*) seja localmente instável, mas não um ponto de sela, é suficiente que $\det Df(W^*, X^*) > 0$ e $\text{tr} Df(W^*, X^*) > 0$. Dado (SB.2), (SB.3), (SB.5), (SB.6) e (SB.9), considerando (6.1) e (6.9), a primeira destas condições é satisfeita. A partir da expressão do traço da matriz jacobiana em (6.60) Benassy (1984, p. 84) infere que a condição que garante que (W^*, X^*) comporta-se localmente como uma *fonte* (um espiral, um foco ou um nó instável) é:

CONDIÇÃO (CB.2): $\alpha_2(Z_X^* - 1) > -G_Y^* Z_W^*$

A interpretação da condição de instabilidade local (CB.2) é direta. Para que o sistema não atinja o estado estacionário, quando seu ponto representativo se encontra na vizinhança deste estado, o efeito expansivo das expectativas sobre a demanda agregada tem que superar o efeito depressivo do salário sobre a oferta agregada.

O esboço do diagrama de fases do sistema em análise pode ser feito como segue. Em primeiro lugar, determina-se a inclinação das curvas de demarcação implicitamente definidas por:

$$\begin{aligned} G[Z^1(W, X; \bar{M})] &= 0 \\ \alpha_2[Z^1(W, X; \bar{M}) - X] &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

as quais são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dX}{dW} \right|_{\dot{W}=0} &= -\frac{Z_W^1}{Z_X^1} > 0, \text{ para todo } W \geq 0 \\ \left. \frac{dX}{dW} \right|_{\dot{X}=0} &= \frac{Z_W^1}{1 - Z_X^1} > 0 \text{ se } Z_X^1 > 1 \\ &= 0 \text{ se } Z_X^1 = 1 \\ &< 0 \text{ se } Z_X^1 < 1 \end{aligned} \quad (6.18)$$

A curva de demarcação $\dot{W} = 0$ tem sua inclinação determinada pelas derivadas (6.8) e (6.9). A curva de demarcação $\dot{X} = 0$ na vizinhança do ponto de equilíbrio será positivamente inclinada, pois (CB.2) implica que $Z_X^* > 1$.

Para se ter as direções de mudança do ponto representativo do sistema em análise nas quatro regiões geradas pelas curvas de demarcação, basta considerar os seguintes fatos:

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial X} = G_Y Z_X^1 > 0, \text{ para todo } X \geq 0 \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial W} = \alpha_2 Z_W^1 < 0, \text{ para todo } W \geq 0 \quad (6.20)$$

A derivada (6.19) expressa o comportamento dinâmico do salário nominal com respeito a variações nas vendas esperadas pelas firmas, para um dado nível do salário nominal. Dessa forma, pontos à esquerda (à direita) da curva de demarcação $\dot{W} = 0$ devem apresentar uma velocidade do salário nominal positiva, $\dot{W} > 0$ (negativa, $\dot{W} < 0$). A derivada (6.20) expressa o comportamento dinâmico das vendas esperadas pelas firmas

com relação a variações do salário nominal, para um dado nível do salário nominal. Logo, pontos à esquerda (à direita) da curva de demarcação $\dot{X} = 0$ devem apresentar uma velocidade das vendas esperadas pelas firmas positiva, $\dot{X} > 0$ (negativa, $\dot{X} < 0$). Destas considerações resulta o diagrama de fases do sistema (6.11), exposto na Figura 6.6.

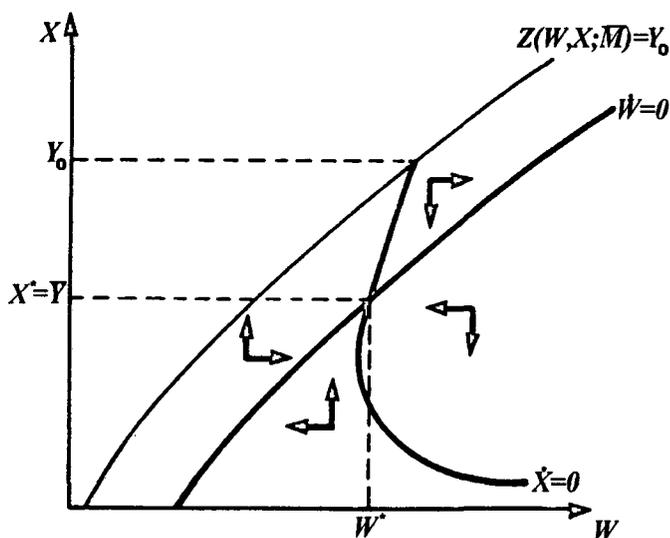


Figura 6.6. Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Benassy
Fonte: Benassy (1984, p. 84)

Construção do conjunto Ω

Benassy define o conjunto Ω da seguinte maneira. Seja \hat{W} um valor do salário nominal, alto o suficiente para que $Z^1(\hat{W}, Y_0; \bar{M}) < \bar{Y}$. Seja \hat{Y} um valor da renda, alto o suficiente para que a desigualdade $Z_w^1 G(\hat{Y}) + Z_X^1 \alpha_2 Y_0 < 0$ seja satisfeita. Com base nestas definições Benassy estabelece o seguinte conjunto (veja Figura 6.7): $\Omega = \{(W, X) \in \Theta : Z^1(W, X; \bar{M}) \leq \hat{Y}, W \leq \hat{W} \text{ e } 0 \leq X \leq Y_0\} - V((W^*, X^*), \varepsilon)$.

Para mostrar que Ω é positivamente invariante deve-se demonstrar que o vetor velocidade em sua fronteira aponta para o seu interior. Considerando o diagrama de fases conclui-se que: (i) os segmentos \overline{BC} e \overline{CD} estão na região onde $\dot{W} > 0$ e $\dot{X} < 0$, logo o vetor velocidade aponta para sudeste; (ii) o segmento \overline{DE} e \overline{EF} estão na região onde $\dot{W} < 0$ e $\dot{X} < 0$, então o vetor velocidade aponta para sudoeste; (iii) os segmentos \overline{FG} e \overline{GH} estão na região onde $\dot{W} < 0$ e $\dot{X} > 0$, então o vetor velocidade aponta para noroeste e (iv) o segmento \overline{AH} está na região onde $\dot{W} > 0$ e $\dot{X} > 0$, então o vetor velocidade aponta para nordeste.

Não se pode inferir que o vetor velocidade dos pontos pertencentes à curva AB apontam para o interior de Ω . Benassy (1984, p. 86) resolve este problema como segue. A curva AC e, conseqüentemente, o trecho AB , é definida implicitamente pela equação $Z^1(X, W) = \hat{Y}$, onde \hat{Y} deve assumir um valor tal que, se o ponto representativo de (6.11) estiver nesta curva sua direção de mudança apontará para o interior do conjunto compacto em questão. Para que isso aconteça, desde que a curva AB é definida para um dado valor de Y , é suficiente que $\dot{Y} < 0$, pois se Y decresce então, considerando (6.8), W tem que aumentar e X tem que diminuir. Desde que $Y = Z^1(W, X; \bar{M})$ e a oferta nominal de moeda é constante por hipótese, então pode-se escrever: $\dot{Y} = Z^1_W \dot{W} + Z^1_X \dot{X} = Z^1_W G(Y) + Z^1_X \alpha_2 (Y - X)$. Como $Z^1_X > 0$ e $Y - X < Y_0$, então $\dot{Y} = Z^1_W G(Y) + Z^1_X \alpha_2 (Y - X) < Z^1_W G(Y) + Z^1_X \alpha_2 Y_0$. Portanto, lembrando que $Z^1_W < 0$ e $G_Y > 0$, para garantir que $\dot{Y} < 0$ sobre a curva AB basta escolher um \hat{Y} alto o suficiente para que $Z^1_W G(\hat{Y}) + Z^1_X \alpha_2 Y_0 < 0$, o que é sempre possível devido às hipóteses sobre a curva de Phillips.

Em suma, em cada ponto da fronteira do $ABCDEFG$ do conjunto Ω o vetor velocidade aponta para o interior deste. Logo, desde que na fronteira da vizinhança $V((Y^*, R^*), \varepsilon)$ o vetor velocidade aponta para o interior de Ω [pois, (W^*, X^*) não é um ponto de sela e é localmente instável], o conjunto Ω é positivamente invariante e apesar de circundar o ponto (W^*, X^*) não o contém.

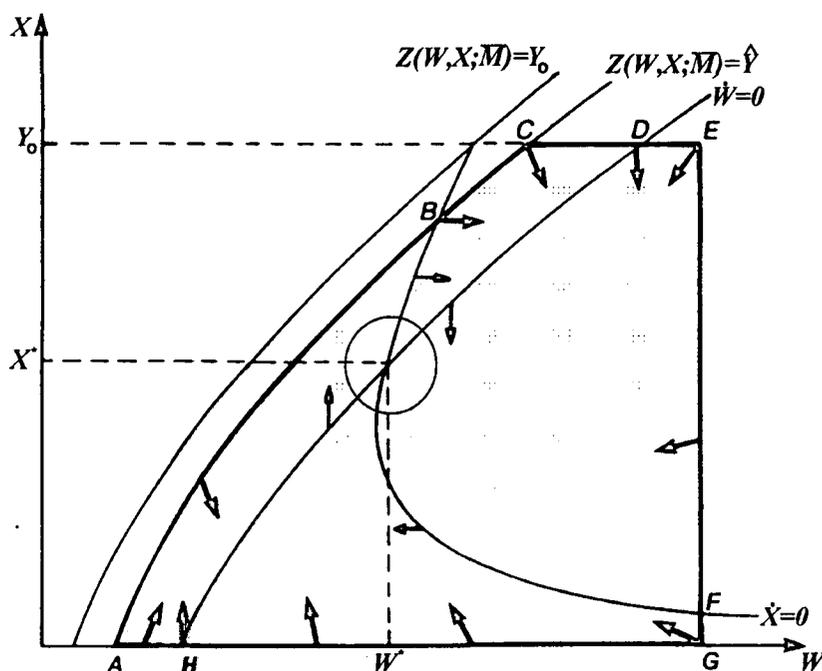


Figura 6.7. O Conjunto Ω do Modelo de Benassy
Fonte: Benassy (1984, p. 87)

Teorema de existência de um ciclo

Finalmente pode-se enunciar o teorema de existência de um ciclo limite no plano de fases de (6.11) estabelecido por Benassy (1984, p. 86).

Teorema 6.4: (*Benassy*)

Se o sistema de EDO's:

$$\begin{aligned}\dot{W} &= G[Z^1(W, X; \bar{M})] \\ \dot{X} &= \alpha_2[Z^1(W, X; \bar{M}) - X]\end{aligned}\quad (6.11)$$

definido em $\Theta = \{(W, X) \in \mathfrak{R}_+^2\}$ e construído a partir das suposições (SB.1), (SB.2), (SB.3), (SB.4), (SB.5), (SB.6), (SB.7), (SB.8) e (SB.9), satisfaz as condições (CB.1) e (CB.2), então toda semi-órbita $\gamma^+(W_0, X_0)$ que inicie em qualquer ponto $(W_0, X_0) \in \{\Theta - V((W^*, X^*), \varepsilon)\}$ ou é um ciclo limite ou converge para um ciclo limite.

Prova: A condição (CB.1) garante a existência do ponto de equilíbrio (W^*, X^*) . A unicidade deste ponto é garantida pelo fato de que $Z_w^1 < 0$. A condição (CB.2) é necessária e suficiente para que o ponto de equilíbrio seja localmente instável e não seja um ponto de sela. Pode-se definir um conjunto $\Omega = \{(W, X) \in \Theta: Z^1(W, X; \bar{M}) < \hat{Y}, W \leq \hat{W} \text{ e } 0 \leq X \leq Y_0\} - V((W^*, X^*), \varepsilon)$ que circunda (W^*, X^*) mas não o contém. Além disso, o campo vetorial aponta para dentro de Ω na sua fronteira, ou seja, Ω é um conjunto positivamente invariante. Logo, pelo corolário 2.1 toda semi-órbita positiva $\gamma^+(W_0, X_0)$ ou é um ciclo limite ou o conjunto limite desta $\omega(W_0, X_0)$ é um ciclo limite.

O mecanismo gerador de ciclos

A descrição de um ciclo do modelo de Benassy pode ser colocada como segue. Suponha, sem perda de generalidade, que a economia se encontra no estado onde a demanda esperada está no seu patamar máximo (ponto 1, Figura 6.8). Neste estado a demanda esperada iguala a demanda observada, porém o nível de desemprego está abaixo do nível de desemprego não-inflacionário e, portanto, o salário nominal está subindo. Esta elevação do salário nominal comprime o nível do produto e gera uma discrepância entre as

expectativas das firmas (demanda esperada) e a demanda observada. Isto dá início a um processo de correção de expectativas por parte das firmas, mais precisamente as firmas começam a rever suas expectativas para baixo. Esta cadeia causal leva a economia a atingir o estado caracterizado pelo nível de desemprego não-inflacionário e o valor máximo do salário nominal (ponto 2, Figura 6.8).

Neste estado as firmas ainda apresentam erros de expectativas e, conseqüentemente, tais expectativas continuam a ser revisadas para baixo. Isto conduz a uma contração do investimento que leva a contrações da produção observada. Este processo desloca a economia do nível de desemprego não-inflacionário e dura até as firmas corrigirem completamente suas expectativas (ponto 3, Figura 6.8).

Entretanto, a economia não se mantém neste estado, pois esta apresenta um alto nível de desemprego gerado pelo processo de correção de expectativas das firmas, o qual leva a uma contração do salário nominal e, conseqüentemente, a uma expansão do produto. Isto gera novamente uma discrepância entre as expectativas das firmas e a demanda observada. As firmas passam então a revisar sistematicamente suas expectativas para cima. Estas revisões impulsionam positivamente o investimento, o que leva a aumentos na produção. Tais expansões da produção passam a reduzir o nível de desemprego gerando uma desaceleração da queda do salário nominal até a economia atingir novamente o nível de desemprego não-inflacionário, porém agora acompanhado do valor mínimo do salário nominal (ponto 4, Figura 6.8). Contudo, neste estado as firmas não corrigiram completamente seus erros de expectativas e, portanto, a economia é deslocada por uma expansão do produto. Tal expansão continuará até a economia voltar a seu estado inicial (ponto 1, Figura 6.8), do qual o ciclo reinicia.

Em suma, quando as firmas tem suas expectativas realizadas, o mercado de trabalho apresenta um nível de desemprego diferente do nível de desemprego não-inflacionário, o que leva a alterações no salário nominal e, conseqüentemente, na demanda observada, gerando uma discrepância entre esta e as expectativas das firmas. Por sua vez, quando a economia apresenta o nível de desemprego não-inflacionário as firmas possuem expectativas não realizadas e, portanto, revisam-nas gerando uma variação na demanda agregada e no nível de desemprego.

Como levantado na introdução da presente seção e comprovado com a demonstração que acabou de ser realizada, o modelo de Benassy tem um mecanismo gerador de ciclo que não apela para nenhuma forma funcional *ad-hoc*, ao contrário dos

modelos de Kaldor (função investimento sigmóide), Rose (curva de Phillips sigmóide) e Schinasi-Sasakura (função investimento sigmóide).

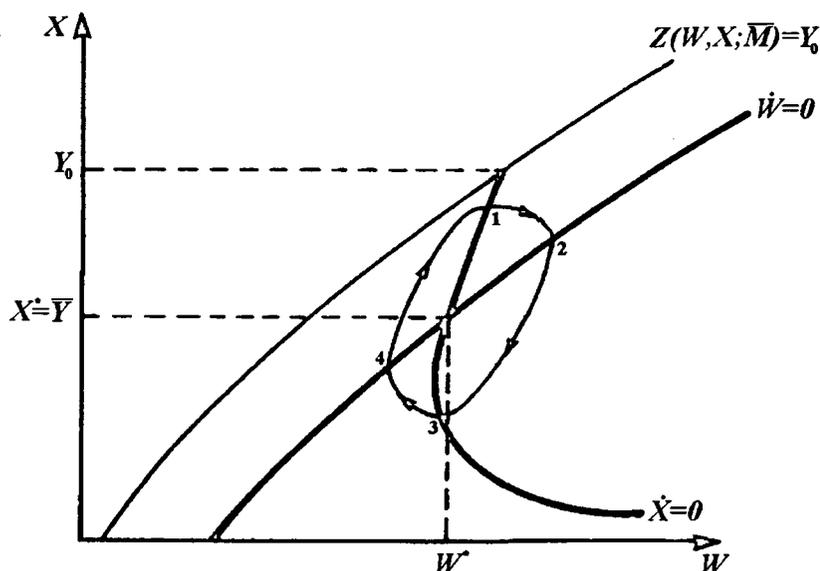


Figura 6.8. Um Ciclo Limite do Modelo de Benassy

O mecanismo gerador de ciclo é simplesmente formado pela combinação de uma “dinâmica de quantidades” estabilizante e uma “dinâmica de preços” desestabilizante. Próximo do estado estacionário, para que a economia não convirja para este, o efeito das expectativas sobre a demanda, medido pelo coeficiente de aceleração, tem que superar o efeito do nível geral de preços sobre a demanda e o efeito dos salários, via curva de Phillips, sobre a oferta. Todavia, ao se afastar do ponto de equilíbrio de longo prazo, a relação entre estas forças deve se alterar, para que o sistema não tenda a uma situação insustentável.

Outra qualidade do modelo de Benassy é a existência de microfundamentos, o qual fornece uma determinação consistentemente dos preços e quantidades no curto prazo.

6.3. O Modelo de Benassy e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios

Nesta última seção busca-se contrastar as previsões do modelo de Benassy com a lista de fatos estilizados do capítulo um. As ressalvas feitas na seção 3.3 aplicam-se aqui.

Fato estilizado 1: *Explicado* pelo Teorema 6.4.

- Fato estilizado 2:** *Provavelmente explicado.* Se uma semi-órbita positiva $\gamma^+(W_0, X_0)$ não é um ciclo limite esta converge em espiral para um ciclo limite e, portanto, as oscilações que esta gera não são periódicas, no sentido de que não possuem um período constante. Entretanto, quando $\gamma^+(W_0, X_0)$ é um ciclo limite o sistema passa pelo mesmo ponto em intervalos de tempo regulares. Se o número de ciclos limites é finito, então é mais provável que $\gamma^+(W_0, X_0)$ não seja um ciclo limite.
- Fato estilizado 3:** *Impossibilidade de comparação.* Os resultados de cunho qualitativo impossibilitam, sem colocar mais estrutura no modelo, o estabelecimento de qualquer relação precisa entre as previsões deste com o fato estilizado em questão.
- Fato estilizado 4:** *Não explicado.* Conforme mostra o Quadro 6.1, há uma relação direta entre o índice de preços e o nível de desemprego. Entre o nível de preços e o produto há uma relação inversa.
- Fato estilizado 5:** *Explicado.* Como se vê no Quadro 6.1, há um certo movimento paralelo do índice de preços e do salário nominal.
- Fato estilizado 6:** *Não explicado.* Como a renda de equilíbrio Y^* é determinada completamente pelas condições iniciais e parâmetros do modelo (os quais permanecem fixos no período de análise), então não existe nenhum mecanismo endógeno que explique a tendência de crescimento positiva da renda.
- Fato estilizado 7:** *Não explicado.* Desde que a relação técnica entre produto e trabalho é dada por uma função de produção agregada padrão, então tanto a produtividade média quanto a marginal do trabalho são anti-cíclicas.
- Fato estilizado 8:** *Não explicado.* No modelo não há uma formalização explícita a respeito.
- Fato estilizado 9:** *Parcialmente explicado.* Conforme se vê no Quadro 6.1 a oferta real de moeda varia inversamente com relação ao índice de preços, já que a oferta nominal de moeda é fixa por hipótese. Isto implica que em termos absolutos este agregado é pró-cíclico. Embora isso ocorra a oferta monetária real apresenta decréscimos em termos absolutos. Além disso, não há qualquer referência sobre a evolução da velocidade-renda da moeda durante um período de um ciclo.

Fato estilizado 10: *Não explicado.* Em primeiro lugar, não há no modelo em questão uma diferenciação entre taxas de juros de curto e de longo prazo. Em segundo lugar, devido à ambigüidade de Z_W^2 não é possível inferir uma relação precisa entre produto e taxa de juros. Neste modelo, como já destacado, a taxa de juros que entra como argumento na *IS* é a mesma que entra como argumento na *LM* e, conseqüentemente, descarta-se o papel da inflação e das expectativas inflacionárias sobre a decisão de investir via custo do capital.

Fato estilizado 11: *Não explicado.* Devido ao alto nível de agregação do modelo não há uma separação entre investimento em estoques e investimento em capital fixo. Além disso, o investimento para cada estado (W, X) é determinado por $I[X, Z^2(W, X; \bar{M})]$ e, portanto, já que a venda esperada afeta o investimento tanto positivamente (efeito direto, I_X) como negativamente (efeito indireto via taxa de juros, $I_R Z_X^2$) e o impacto dos salários sobre o investimento ($I_R Z_W^2$) é indeterminado, não é possível se estabelecer com precisão a direção de mudança do investimento durante o transcorrer do ciclo.

Quadro 6.1. *O Comportamento das Variáveis de Estado do Modelo de Benassy durante um Ciclo*

Fases do Ciclo		I	II	III	IV
Variáveis de Estado					
Salário nominal	W	↗	↘	↘	↗
Venda esperada	X	↘	↘	↗	↗
Renda/Produto	$Y = Z^1(W, X; \bar{M})$	↘	↘ ↗	↗	↗ ↘
Taxa de juros	$R = Z^2(W, X; \bar{M})$?	?	?	?
Índice de preços	$P = Z^3(W, X; \bar{M})$	↗	↗ ↘	↘	↘ ↗
Oferta real de moeda	\bar{M} / P	↘	↘ ↗	↗	↗ ↘
Consumo	$C = C[Z^1(\cdot), Z^2(\cdot)]$	↘	↘ ↗	↗	↗ ↘
Investimento	$I = I[X, Z^2(\cdot)]$?	?	?	?
Nível de desemprego	$u = N_0 - F^{-1}[Z^1(\cdot)]$	↗	↗ ↘	↘	↘ ↗

7 | **CICLO DO CRESCIMENTO NUMA ECONOMIA CAPITALISTA GENUÍNA: O MODELO DE NIKAIDO**

Recentemente Nikaído (1992) tentou integrar o modelo de ciclos de Kaldor (1940) com o modelo de crescimento neoclássico a um setor (Solow, 1956 e Swan, 1956), buscando demonstrar a possibilidade de existência de um caminho de crescimento acompanhado de oscilações nas variáveis macroeconômicas tradicionais.

Nikaído (1992, p. 247 e 248) argumenta que seu modelo pertence ao paradigma keynesiano, o qual, segundo o próprio autor, vê as economias capitalistas como “mal-comportadas” (“ill-behaved”) mesmo que não existam (ou que estas estejam protegidas de) perturbações externas¹. O modelo de Nikaído prediz a possibilidade de existência de um “crescimento cíclico keynesiano genuíno” (“genuine keynesian growth cycle”), ou seja, a possibilidade da presença de ciclos durante o crescimento de economias capitalistas “genuínas”, isto é, de economias capitalistas “hermeticamente” isoladas de choques externos.

Este capítulo é composto de três seções. Na primeira, apresenta-se as premissas e a dedução das equações que governam a dinâmica do modelo em questão. Na segunda seção, trata-se das condições de existência de um ciclo. Na seção final, busca-se contrastar as predições do modelo de Nikaído com os fatos estilizados listados no primeiro capítulo.

7.1. O modelo: suposições e equações de movimento

Suposições

O modelo de Nikaído (1992, p. 248) ergue-se a partir das premissas que seguem:

¹ Nikaído contrapõe este paradigma ao paradigma monetarista, o qual ele divide em duas variantes. Um deles fundado na crença de que a economia, quando não sofre perturbações externas (como intervenções do governo), é bem-comportada (well-behaved), possui boa-funcionalidade (well-workable) e é estável. Além disso, este grupo acredita que a economia se beneficia com mecanismos que, de forma gradual, são capazes de eliminar os efeitos desestabilizadores dos choques externos. O segundo grupo diferencia-se do primeiro por acreditar que a economia é dotada de um mecanismo (expectativas racionais) capaz de eliminar instantaneamente perturbações externas antecipadas. Nota-se aqui que esta é uma nomenclatura alternativa, dentro da teoria dos ciclos de negócios, com relação àquela adotada no primeiro capítulo deste trabalho.

SUPOSIÇÃO (SN.1): O sistema produtivo é formado por um único setor, o qual produz um único bem homogêneo, que pode ser consumido ou utilizado como bem de capital, utilizando dois fatores de produção (capital e trabalho), sujeito a uma função de produção agregada neoclássica padrão. Formalmente, $F(K, N)$ com $F_K > 0$, $F_N > 0$, $F_{KK} < 0$, $F_{NN} < 0$, $F(\lambda K, \lambda N) = \lambda F(K, N)$, $\forall \lambda > 0$ e $\forall K, N > 0$ e satisfazendo as condições de Inada.

SUPOSIÇÃO (SN.2): O trabalho é homogêneo e sua oferta cresce a uma taxa instantânea constante e exogenamente determinada $n > 0$, isto é, $N^s = N^s(t_0)e^{nt}$.

SUPOSIÇÃO (SN.3): O investimento observado será igual à poupança planejada, a qual é uma proporção fixa da renda, ou seja, $\dot{K} = sY$ com $0 < s < 1$ e $s \equiv (S/Y)$ constante e exogenamente determinada.

SUPOSIÇÃO (SN.4): A produção observada será o mínimo entre o nível de oferta de pleno emprego (*supply potential*) e o nível das vendas esperadas pelas firmas (em termos reais), ou seja, $Y = \min[F(K, N^s), X]$.

SUPOSIÇÃO (SN.5): A razão investimento planejado-capital, ou seja, a taxa de crescimento planejada do estoque de capital é função da razão capital-trabalho e da taxa de lucro correntes, isto é, $I/K = \Phi(k, \zeta)$ com $\Phi_k < 0$ e $\Phi_\zeta > 0$, onde² $k \equiv K/N^s$.

SUPOSIÇÃO (SN.6): A taxa de lucro depende da razão produto-capital, ou seja, $\zeta = \Psi(Y/K)$ com $\Psi' > 0$.

SUPOSIÇÃO (SN.7): A variação da razão venda esperada-capital é positivamente relacionada com o hiato entre a demanda agregada planejada e a venda (agregada) esperada, isto é, $\frac{d}{dt}\left(\frac{X}{K}\right) = G\left(\frac{I}{K} + c\frac{Y}{K} - \frac{X}{K}\right)$ com $G' > 0$ e $G(0) = 0$.

As suposições (SN.1) e (SN.2) são hipóteses padrões do modelo de crescimento neoclássico a um setor. Já as suposições (SN.3) a (SN.7) introduzem o problema da

² Nikaido (1992, p. 249) denomina k de *razão capital-trabalho social (social capital-labor ratio)*, a qual é a razão capital trabalho efetiva somente quando a força de trabalho ofertada esta plenamente empregada.

demanda efetiva no modelo em análise e, portanto, têm suas origens nos modelos keynesianos de curto prazo e de ciclos.

Com respeito a (SN.4) é importante salientar que se a venda agregada esperada for menor do que a oferta de pleno emprego, isto é, $X < F(K, N^s)$, então a produção de X unidades de produto será realizado com N unidades de trabalho tal que $X = F(K, N)$ com $N < N^s$ e, conseqüentemente, ter-se-á $(N^s - N)$ unidades de trabalho desempregadas involuntariamente.

As firmas com base no mecanismo de ajustamento de erros especificado em (SN.7) corrigem suas expectativas relativas às vendas. Dada esta expectativa sobre as vendas planejadas agregadas, as firmas tomam suas decisões de produção limitadas pela restrição tecnológica $F(K, N^s)$. Portanto, neste modelo, diferentemente do modelo de Solow-Swan, a demanda agregada não se ajusta passivamente à oferta de pleno emprego, ou seja, existe uma função investimento explícita. São estas características que diferenciam o modelo de Nikaido do modelo de crescimento neoclássico a um setor *à la* Solow-Swan.

O que relaciona o modelo de Nikaido e o modelo de Kaldor, apresentado no capítulo quatro, é a consideração do efeito da evolução do estoque de capital sobre a dinâmica macroeconômica, mais especificamente sobre a dinâmica do mercado de bens.

Equações de movimento

Da definição de razão capital-trabalho social, $k \equiv K / N^s$, tem-se que $\dot{k} / k = \dot{K} / K - \dot{N}^s / N^s$. Dessa forma, a partir de (SN.2) e (SN.3), infere-se que:

$$\dot{k} = \left(\frac{sY}{K} - n \right) k, \quad (7.1)$$

a qual é a primeira EDO do modelo em análise. Note que esta equação tornar-se-ia a equação de movimento fundamental do modelo de Solow se a taxa de crescimento *observada* do estoque de capital, sY/K , fosse sempre igual à taxa de crescimento *planejada* do estoque de capital, I/K , ou seja, se não houvesse problema de demanda efetiva. Todavia, como já comentado, este não é o caso no modelo de Nikaido.

Pela suposição (SN.5) a taxa de crescimento planejado do estoque de capital é função da razão capital-trabalho social e da taxa de lucro. Por (SN.6) esta última depende

da razão produto-capital. Então a taxa de crescimento planejada do estoque de capital depende em última instância das razões capital-trabalho social e produto-capital, como segue:

$$\frac{I}{K} = \Phi\left(k, \Psi\left(\frac{Y}{K}\right)\right) \quad (7.2)$$

Para um dado k a função (7.2) possui derivada positiva, devido a (SN.5) e (SN.6). Com relação a esta função (ver Figura 7.1) é assumido (Nikaido, 1992, p. 251):

CONDIÇÃO (CN.1): (i) $\frac{\partial^2 (I/K)}{\partial (Y/K)^2} > 0$, ou seja, (7.2) é convexa;

(ii) $\Phi(k, \Psi(0)) > 0$

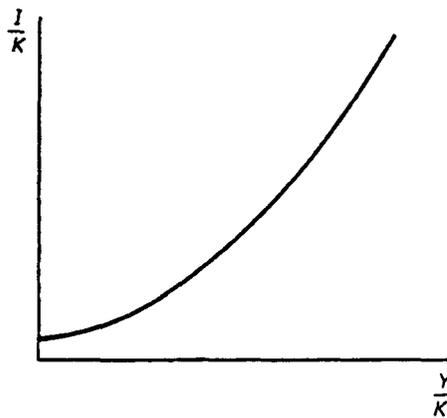


Figura 7.1. Taxa de Crescimento Planejada do Estoque de Capital
Fonte: Nikaido (1992, p. 251)

A segunda EDO do modelo de Nikaido é obtida pela introdução de (7.2) no mecanismo de ajustamento de erros postulado em (SN.7).

$$\left(\frac{\dot{X}}{K}\right) = G\left[\Phi\left(k, \Psi\left(\frac{Y}{K}\right)\right) + \frac{cY}{K} - \frac{X}{K}\right] \quad (7.3)$$

As equações de movimento (7.1) e (7.3) dependem da decisão sobre o volume de produção observada em cada instante de tempo. A produção observada, por sua vez, depende da relação entre a venda esperada e a oferta de pleno emprego. Por (SN.4) pode-se escrever:

$$\frac{Y}{K} = \min \left[\frac{F(K, N^s)}{K}, \frac{X}{K} \right] \quad (7.4)$$

Por (SN.1) a função de produção agregada apresenta retornos constantes de escala. Esta premissa permite reescrever (7.4) como:

$$\frac{Y}{K} = \min \left[\frac{f(k)}{k}, \frac{X}{K} \right], \quad (7.4.a)$$

onde $f(k) \equiv F(k, 1)$. Pode-se interpretar (7.4.a) como sendo a estrutura de curto prazo do modelo de Nikaido. Num dado instante do tempo as firmas contrastam suas expectativas de vendas com a capacidade de produção de pleno emprego, donde resulta o volume que irão efetivamente ofertar. A partir destas definições sobre os níveis efetivos de oferta ocorre o acréscimo (ou decréscimo) efetivo no estoque de capital e o contraste entre a oferta e a demanda planejada, fatos estes que determinarão a evolução do sistema em apreço. Em suma, a dinâmica do modelo de Nikaido é regida pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \left(\frac{sY}{K} - n \right) k \\ \left(\frac{\dot{X}}{K} \right) &= G \left[\Phi \left(k, \Psi \left(\frac{Y}{K} \right) \right) + \frac{cY}{K} - \frac{X}{K} \right] \\ \frac{Y}{K} &= \min \left[\frac{f(k)}{k}, \frac{X}{K} \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Este sistema é definido no plano de fases $\Theta = \left\{ (k, X/K) \in \mathfrak{R}_{++}^2 \right\}$.

7.2. A existência de um ciclo limite

Dado o sistema de EDO's (7.5), que define implicitamente a função de transição de estado do modelo de Nikaido, a apresentação da prova da possibilidade de existência de um comportamento oscilante de suas variáveis de estado pode ser rigorosamente enquadrada na seqüência estabelecida pelo programa de aplicação do TPB delineado no capítulo dois.

Existência de um ponto de equilíbrio

O plano de fase do sistema (7.5) pode ser dividido em três regiões distintas com base na relação entre a venda esperada e a oferta de pleno emprego. Uma região composta de pontos (estados) onde a venda esperada é superior à oferta de pleno emprego (*região de superemprego*); outra região formada por pontos onde a venda esperada é inferior à oferta de pleno emprego (*região de desemprego*) e, finalmente, a região que é a fronteira que divide as duas regiões anteriores, ou seja, o locus onde a venda esperada está no mesmo patamar que a capacidade produtiva da economia definida pela condição:

$$\frac{X}{K} = \frac{f(k)}{k} \quad (7.6)$$

Na Figura 7.3 a curva que intersecciona as curvas de demarcação é a *fronteira de pleno emprego*, a qual representa a produtividade média do capital³. Tal fronteira é negativamente inclinada e suposta (implicitamente) convexa por Nikado (1992, p. 254), conforme é confirmado pelos sinais de suas derivadas⁴:

$$\frac{d(X/K)}{dk} = -\frac{f(k) - f'(k)k}{k^2} < 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{d^2(X/K)}{dk^2} = \frac{f''(k)k^2 + 2[f(k) - f'(k)k]}{k^3} \stackrel{>}{=} 0 \Leftrightarrow 2[f(k) - f'(k)k] \stackrel{>}{<} -f''(k)k^2 \quad (7.8)$$

As curvas de demarcação $\dot{k} = 0$ e $(X/K) = 0$ comportam-se de forma diferenciada nas regiões do plano de fases anteriormente delineadas. De forma genérica tais curvas podem ser assim expressas:

³ Nikaido utiliza uma nomenclatura um pouco diferente e menos detalhada.

⁴ Desde que $Y = N^s f(k)$, e considerando (SN.1), tem-se $F_K = f'(k) > 0$ e $F_{N^s} = f(k) - f'(k)k > 0$. Além disso, desde que $F_{KK} < 0$ e $F_{KK} = f''(k) / N^s$ tem-se $f''(k) < 0$.

$$\begin{aligned}
s \frac{Y}{K} - n &= 0 \\
\Phi \left(k, \Psi \left(\frac{Y}{K} \right) \right) + c \frac{Y}{K} - \frac{X}{K} &= 0 \\
\frac{Y}{K} &= \min \left[\frac{f(k)}{k}, \frac{X}{K} \right]
\end{aligned} \tag{7.9}$$

O comportamento efetivo de tais curvas de demarcação, definidas implicitamente pelas duas primeiras funções implícitas em (7.9), depende da região onde o sistema econômico se encontra, ou seja, da produção observada, a qual é determinada pela terceira equação em (7.9). Desta forma, as inclinações destas curvas de demarcação em

$\Theta - \left\{ (k, X/K) \in \mathfrak{R}_{++}^2 : \frac{X}{K} = \frac{f(k)}{k} \right\}$ podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\left. \frac{d(X/K)}{dk} \right|_{k=0} = - \frac{\frac{d(Y/K)}{dk}}{\frac{d(X/K)}{dk}} \tag{7.10}$$

$$\left. \frac{d(X/K)}{dk} \right|_{(X/K)=0} = - \frac{\Phi_k + (\Phi_\zeta \Psi' + c) \frac{d(Y/K)}{dk}}{(\Phi_\zeta \Psi' + c) \frac{d(Y/K)}{d(X/K)} - 1} \tag{7.11}$$

Na região de desemprego, onde a produção observada é igual à venda esperada, ou seja, $Y/K = X/K$, tem-se:

$$\frac{d(Y/K)}{dk} = 0 \text{ e } \frac{d(Y/K)}{d(X/K)} = 1 \tag{7.12}$$

e, portanto, considerando (7.10) e (7.11) resulta:

$$\left. \frac{d(X/K)}{dk} \right|_{k=0} = 0 \tag{7.13}$$

$$\left. \frac{d(X/K)}{dk} \right|_{(X/K)=0} = - \frac{\Phi_k}{\Phi_\zeta \Psi' - s} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \Phi_\zeta \Psi' - s \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \tag{7.14}$$

Logo, a curva de demarcação $\dot{k} = 0$ é paralela ao eixo k e a curva de demarcação $(X/K) = 0$ tem a inclinação dependente da inclinação relativa da demanda agregada (DA) com relação a reta de 45° quando estas se cruzam⁵.

Na região de superemprego, onde a produção observada é igual à oferta de pleno emprego, isto é, $Y/K = f(k)/k$, tem-se:

$$\frac{d(Y/K)}{dk} = -\frac{f(k) - f'(k)k}{k^2} \text{ e } \frac{d(Y/K)}{d(X/K)} = 0 \quad (7.15)$$

e, conseqüentemente, considerando (7.10) e (7.11):

$$\left. \frac{dk}{d(X/K)} \right|_{\dot{k}=0} = 0 \quad (7.16)$$

$$\left. \frac{d(X/K)}{dk} \right|_{(X/K)=0} = \Phi_k + (\Phi_\zeta + c) \left(-\frac{f(k) - f'(k)k}{k^2} \right) < 0 \quad (7.17)$$

Portanto, nesta região a curva de demarcação $(X/K) = 0$ passa a ter uma inclinação invariante. A curva de demarcação $\dot{k} = 0$ passa a ser perpendicular ao eixo k e tem um ponto de interseção com sua outra parte exatamente na fronteira de pleno emprego, ou seja, em $(k_s, n/s)$. k_s é a razão capital-trabalho social do estado de crescimento estacionário com pleno emprego, ou seja, do *estado estacionário solowiano*, definido pela condição:

$$\frac{sf(k_s)}{k_s} = n \text{ ou } \frac{f(k_s)}{k_s} = \frac{n}{s} \quad (7.18)$$

Obviamente, a interseção entre as curvas de demarcação determinarão o ponto de equilíbrio do sistema dinâmico (7.9). Dado o formato da curva de demarcação $\dot{k} = 0$ e a

⁵ A partir de (7.2) e das considerações sobre a poupança agregada em (SN.3) pode-se escrever a curva DA como segue:

$$DA = \Phi \left(k, \Psi \left(\frac{Y}{K} \right) \right) + \frac{cY}{K}$$

Portanto, lembrando que a reta de 45° tem inclinação igual a 1, a diferença entre a inclinação da curva DA e da reta de 45° [quando X/K é operativo em (7.4.a)] é dada por:

$$\frac{\partial DA}{\partial (X/K)} - 1 = (\Phi_\zeta \Psi' + c) - 1 = \Phi_\zeta \Psi' - s$$

Esta expressão é o denominador de (7.14) que determina a inclinação da curva de demarcação $(X/K) = 0$ na região de desemprego.

continuidade da curva de demarcação $(X/K) = 0$, para estabelecer a existência de $(k^*, (X/K)^*)$ basta garantir que a curva de demarcação $(X/K) = 0$ apresenta o seguinte comportamento: quando $k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$) tem-se $(X/K) \rightarrow +\infty$ [$(X/K) \rightarrow 0$] ao longo de $(X/K) = 0$. Nikaido (1992, p. 252) realiza esta tarefa utilizando um argumento geométrico baseado na curva DA.

Na Figura 7.2 encontra-se representada a curva DA para diferentes níveis da razão capital-trabalho social. A "dobra" (ponto B) nesta curva é causada quando a variável X/K deixa de ser operativa em (7.4.a), ou seja, quando as expectativas de vendas das firmas em nível agregado superam a capacidade produtiva da economia. Note que, para um dado k , cada ponto de intersecção entre a curva DA e a reta de 45° é associado a um único ponto da curva de demarcação $(X/K) = 0$ pela segunda função implícita em (7.9). Sobre estes pontos de intersecção Nikaido (1992, p. 252) assume:

- CONDIÇÃO (CN.2):** (i) Para níveis "baixos" e "altos" da razão capital-trabalho social a curva DA intersecciona a reta de 45° uma única vez (Figura 7.2.a e 7.2.d);
- (ii) Para níveis "intermediários" da razão capital-trabalho social a curva DA intersecciona a reta de 45° três vezes (Figura 7.2.c);
- (iii) Existe um, e somente um, k tal que a curva DA tangência a reta de 45° (Figura 7.2.b).

A prova da existência de um ponto de equilíbrio de (7.5), bem como da unicidade deste, está atrelada diretamente ao comportamento de translação da curva DA no plano $(X/K, DA)$ provocado por variações na razão capital-trabalho social. Se a economia está na região de superemprego e apresenta um baixo valor de k num estado correspondente ao ponto A da Figura 7.2.a, então quando k aumenta a curva DA se desloca para baixo e o ponto A se desloca para mais próximo da origem correspondendo a um valor mais baixo de X/K . Exatamente o oposto aconteceria se k aumentasse. Estes movimentos estão de acordo com o sinal não ambíguo da derivada (7.17). Já que por (i) de (CN.2) é garantido que para valores baixos de k a economia está num ponto como o ponto A da Figura 7.2.a, infere-se

que curva de demarcação $(X/K) = 0$ satisfaz de fato a propriedade de que $k \rightarrow 0$ implica que $(X/K) \rightarrow +\infty$.

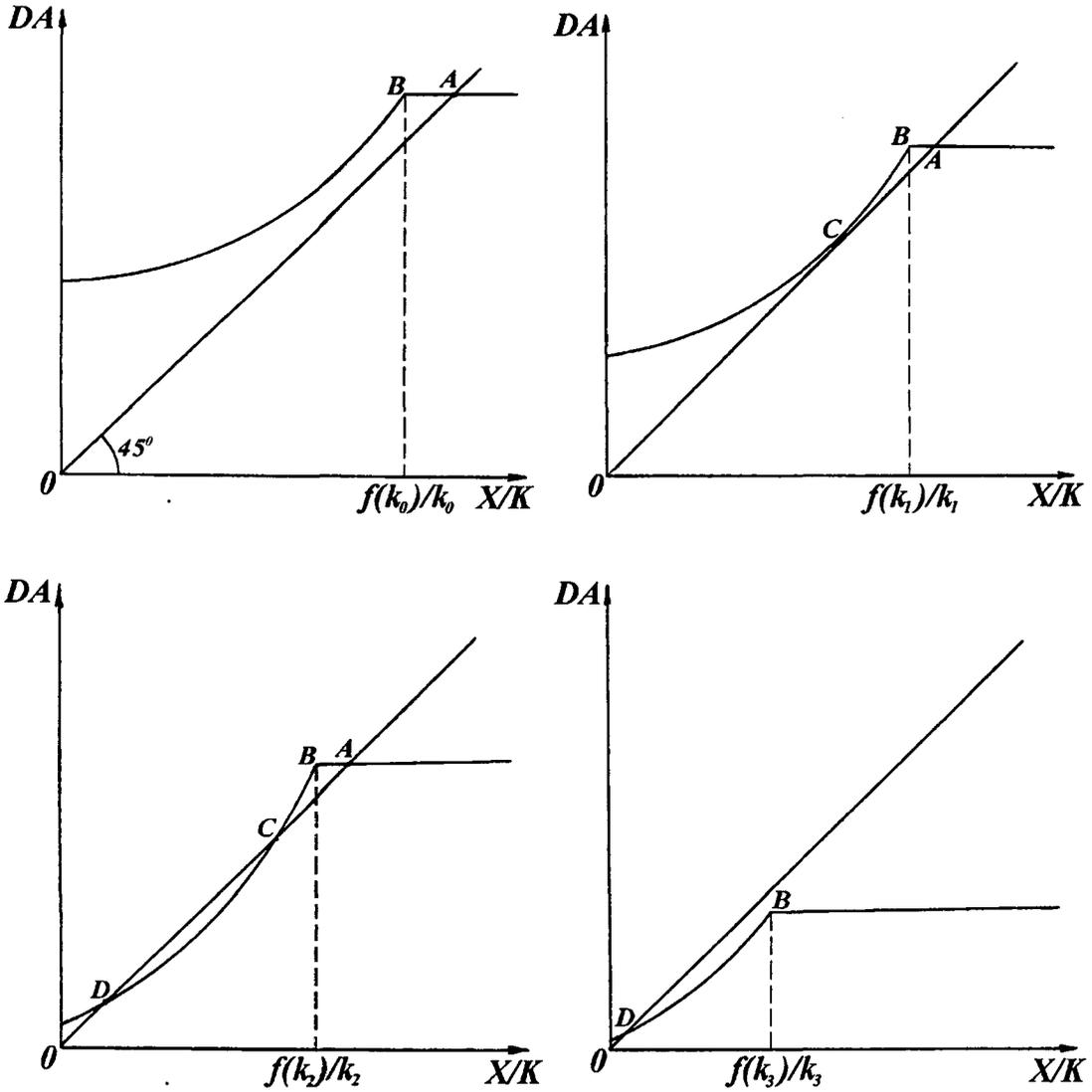


Figura 7.2. Translações da Curva de Demanda Agregada Planejada
 Fonte: Nikaido (1992, p. 253). (Adaptada pelo autor)

Nota: Desde que $\frac{d}{dk} \left(\frac{f(k)}{k} \right) < 0$ e $k_3 > k_2 > k_1 > k_0$, tem-se

$$\frac{f(k_0)}{k_0} > \frac{f(k_1)}{k_1} > \frac{f(k_2)}{k_2} > \frac{f(k_3)}{k_3}.$$

Suponha agora que a economia está na região de desemprego e apresenta um alto valor de k num estado correspondente a ponto D da Figura 7.2.d. Nesta situação a inclinação da curva DA é menor que a inclinação da reta de 45° , ou seja, tem-se

$\Phi_\zeta \Psi' - s < 0$ ⁶. Portanto, para todo k suficientemente alto tem-se que (7.14) assume um valor negativo e, conseqüentemente, a curva de demarcação $(X/K) = 0$ satisfaz a propriedade de que $k \rightarrow +\infty$ implica que $(X/K) \rightarrow 0$. Enfim, desde que a curva de demarcação $(X/K) = 0$ é contínua, garante-se que esta cruza pelo menos uma vez a curva de demarcação $\dot{k} = 0$ (vide Figura 7.3).

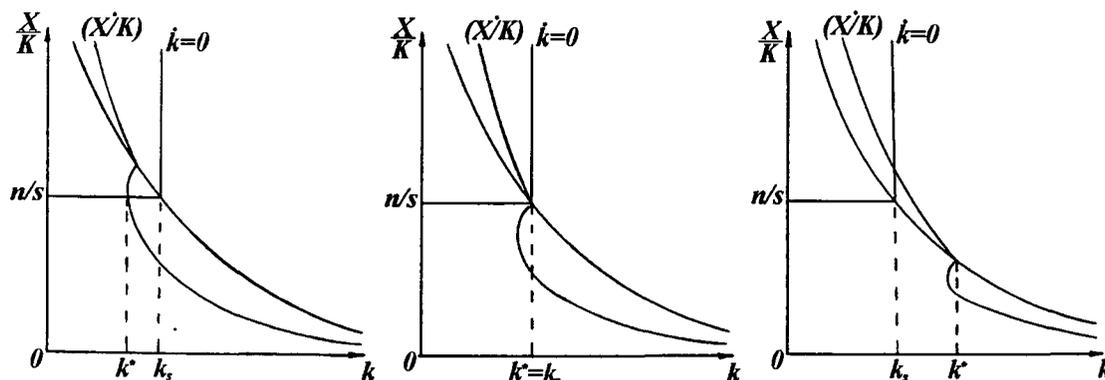


Figura 7.3. Existência de um Ponto de Equilíbrio no Modelo de Nikaido
Fonte: Nikaido (1992, p. 253). (Adaptada pelo autor)

Unicidade do ponto de equilíbrio

Para se demonstrar que as suposições feitas até o momento garantem a unicidade de $(k^*, (X/K)^*)$ é necessário detalhar um pouco mais o comportamento da curva de demarcação $(X/K) = 0$ na região de desemprego. Considere o ponto $(\tilde{k}, \tilde{X}/\tilde{K})$ da curva de demarcação $(X/K) = 0$ que intersecciona a fronteira de pleno emprego, ou seja, tal que $\tilde{X}/\tilde{K} = f(\tilde{k})/\tilde{k}$. A contraparte da coordenada $(\tilde{k}, \tilde{X}/\tilde{K})$ no plano $(X/K, DA)$ é o ponto A na Figura 7.4.

⁶ Esta desigualdade é garantida por (i) de (CN.2) e pelo fato de que quando k aumenta a "dobra" ("kink") da curva DA se aproxima do eixo das ordenadas no plano $(X/K, DA)$, pois a produtividade média do capital é decrescente [ou seja, quanto maior k , menor é o valor de X/K tal que (7.6) é satisfeita].

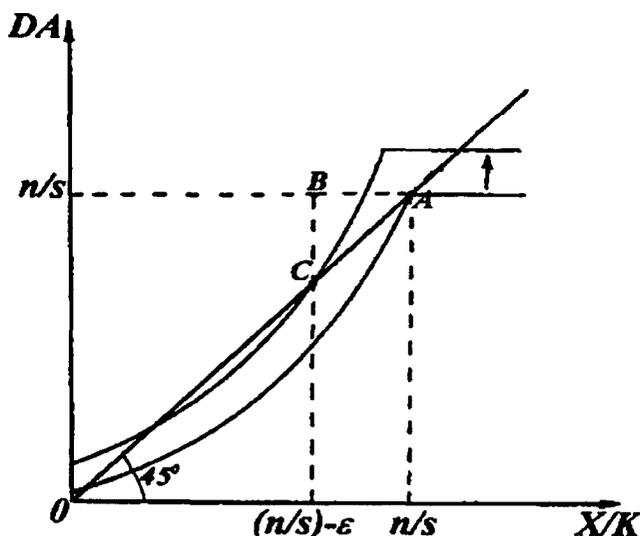


Figura 7.4. Comportamento da Curva de Demarcação $(X/K) = 0$

Suponha que se tenha uma variação negativa de X/K tal que a economia vá para o ponto B da Figura 7.4. Este ponto não está relacionado a qualquer ponto pertencente à curva de demarcação $(X/K) = 0$. Para este novo valor de X/K (abscissa do ponto B) o ponto que está relacionado com um ponto da referida curva de demarcação é o ponto C . Isto significa que o valor de k deve decrescer para que a curva DA , passando por A , desloque-se para cima e passe pelo ponto C . Enfim, a variação negativa de X/K a partir da coordenada $(\tilde{k}, \tilde{X}/K)$ implica uma variação negativa em k . Esta relação direta ocorre até a economia alcançar a situação retratada na Figura 7.2.b. A partir daí tal relação torna-se inversa. Portanto, a curva de demarcação $(X/K) = 0$ na região de desemprego é *estritamente convexa* e como já demonstrado converge assintoticamente para o eixo das abscissas quando $k \rightarrow +\infty$. Isto garante a unicidade de $(k^*, (X/K)^*)$.

A priori um ponto $(k^*, (X/K)^*)$ (isto é, o cruzamento das curvas de demarcação) pode estar localizado na região de superemprego, exatamente na fronteira de pleno emprego ou na região de desemprego⁷. Onde de fato estará localizado $(k^*, (X/K)^*)$ dependerá, dado a propensão marginal a poupar e a taxa de crescimento da força de

⁷ Em outras palavras, existe a possibilidade da economia, apesar de estar num estado de crescimento estacionário ($\dot{k} = 0$), apresentar um desemprego crônico ou uma demanda perpetuamente insatisfeita, além do caso coberto pelo modelo de crescimento de Solow-Swan. A possibilidade destas configurações de longo prazo serão formalmente demonstradas adiante.

trabalho, da posição da curva de demarcação $(X/K) = 0$, como torna-se evidente pela Figura 7.3. A posição de tal locus está diretamente atrelada a taxa de crescimento planejada do estoque de capital (I/K) , a qual depende por sua vez do comportamento do investimento planejado.

Caracterização do estado estacionário

A condição de que a taxa de crescimento observada do estoque de capital é igual à taxa de crescimento da população, ou seja, de que $\dot{k} = 0$, não garante que k^* a *razão capital-trabalho social de equilíbrio efetiva* [o valor da abscissa do ponto de equilíbrio $(k^*, (X/K)^*)$] seja igual à razão capital-trabalho do estado estacionário solowiano k_s . Com efeito, no estado estacionário solowiano é possível *a priori*, a depender da propensão a investir do setor produtivo, três configurações entre a demanda agregada planejada e a oferta de pleno emprego, a saber⁸:

$$\Phi(k_s, \Psi(n/s)) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} n \quad (7.19)$$

O estado estacionário $(k^*, (X/K)^*)$ é definido pelo seguinte conjunto de condições, derivado a partir de (7.5):

$$\begin{aligned} \left(\frac{Y}{K}\right)^* &= \frac{n}{s} \\ \left(\frac{X}{K}\right)^* &= \Phi\left(k^*, \Psi\left(\frac{n}{s}\right)\right) + \frac{cn}{s} \\ \left(\frac{Y}{K}\right)^* &= \min\left[\left(\frac{X}{K}\right)^*, \frac{f(k^*)}{k^*}\right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

⁸ A condição (7.19) é deduzida da seguinte maneira:

$$I + C \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} F(K, N^s) \Leftrightarrow \frac{I}{K} + \frac{C}{K} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{F(K, N^s)}{K}$$

Considerando (7.2), (7.4), (7.4.a), a hipótese de que $S=sY$ e (7.18) tem-se no estado estacionário solowiano:

$$\Phi\left(k_s, \Psi\left(\left(\frac{Y}{K}\right)^*\right)\right) + c\left(\frac{Y}{K}\right)^* \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{f(k_s)}{k_s} \Leftrightarrow \Phi(k_s, \Psi(n/s)) + c(n/s) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} n/s$$

Desta última desigualdade resulta (7.19).

Caso a: (*estado estacionário solowiano com DA deficiente*) Suponha que o ponto de equilíbrio $(k^*, (X/K)^*)$ esteja localizado na região de desemprego. Isto implica, considerando (7.20), que $(X/K)^* < f(k^*)/k^*$ e $(Y/K)^* = (X/K)^*$ e, conseqüentemente:

$$\left(\frac{X}{K}\right)^* = \frac{n}{s} \quad \text{e} \quad \Phi\left(k^*, \Psi\left(\frac{n}{s}\right)\right) = n \quad (7.21)$$

Dado que $f(k^*)/k^* > (X/K)^* = n/s$ e, por definição, $f(k_s)/k_s = n/s$, então⁹ $k^* < k_s$. Desde que $k^* < k_s$ e $\Phi_k < 0$ tem-se $\Phi(k_s, \Psi(n/s)) < n$. Isto comprova, por (7.19), que o estado estacionário $(k^*, (X/K)^*)$ quando localizado na região de desemprego (onde a venda esperada agregada é menor que a oferta de pleno emprego) implica numa situação de deficiência de demanda planejada com respeito à oferta de pleno emprego se a razão capital-trabalho de equilíbrio fosse k_s . De fato, $(k^*, (X/K)^*) = (k^*, n/s)$.

Caso b: (*estado estacionário solowiano padrão*) Suponha que o ponto de equilíbrio $(k^*, (X/K)^*)$ esteja localizado na fronteira de pleno emprego. Isto implica, considerando (7.20), que $(X/K)^* = f(k^*)/k^*$ e $(Y/K)^* = (X/K)^* = f(k^*)/k^*$ e, por conseguinte:

$$\left(\frac{X}{K}\right)^* = \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n}{s} \quad \text{e} \quad \Phi\left(k^*, \Psi\left(\frac{n}{s}\right)\right) = n \quad (7.22)$$

Desde que $f(k^*)/k^* = n/s$ e, por definição, $f(k_s)/k_s = n/s$, então $k^* = k_s$. Portanto, $\Phi(k_s, \Psi(n/s)) = n$. Isto comprova, por (7.19), que o estado estacionário $(k^*, (X/K)^*)$, quando localizado na fronteira de pleno emprego (onde a venda esperada agregada é igual a oferta de pleno emprego), apresenta um equilíbrio entre a demanda agregada planejada e a oferta de pleno emprego. De fato, $(k^*, (X/K)^*) = (k_s, n/s)$.

Caso c: (*estado estacionário solowiano com DA abundante*) Suponha que o ponto de equilíbrio $(k^*, (X/K)^*)$ esteja localizado na região de superemprego. Isto implica, considerando (7.20), que $f(k^*)/k^* < (X/K)^*$ e $(Y/K)^* = f(k^*)/k^*$ e, portanto:

⁹ Lembre-se que $\frac{d}{dk} \left(\frac{f(k)}{k} \right) = -\frac{f(k) - f'(k)k}{k^2} < 0$.

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n}{s} \quad \text{e} \quad \left(\frac{X}{K}\right)^* = \Phi\left(k^*, \Psi\left(\frac{n}{s}\right)\right) + \frac{cn}{s} \quad (7.23)$$

Dado que $f(k^*)/k^* = n/s$ e, por definição, $f(k_s)/k_s = n/s$, então $k^* = k_s$. Todavia, por (7.23), $(X/K)^* = \Phi(k_s, \Psi(n/s)) + cn/s > f(k_s)/k_s = n/s$. Logo, $\Phi(k_s, \Psi(n/s)) > n$. Isto comprova, por (7.19), que o estado estacionário $(k^*, (X/K)^*)$, quando localizado na região de superemprego (onde a venda esperada agregada é maior que a oferta de pleno emprego), implica uma situação de abundância de demanda agregada planejada com respeito à oferta de pleno emprego se a razão venda esperada-capital de equilíbrio fosse n/s . De fato, $(k^*, (X/K)^*) = (k_s, \Phi(k_s, \Psi(n/s)) + cn/s)$.

Análise de estabilidade local do ponto de equilíbrio

Nikaido (1992, p. 254) demonstra a possibilidade de existência de um ciclo limite no caso em que o estado estacionário é caracterizado por uma demanda agregada deficiente com relação à oferta de pleno emprego. A matriz jacobiana da linearização de (7.9) em torno do ponto de equilíbrio $(k^*, n/s)$, localizado na região de desemprego, é dada por:

$$Df(k^*, (X/K)^*) = \begin{bmatrix} 0 & sk^* \\ G'(0)\Phi_k^* & G'(0)(\Phi_\zeta^* \Psi'(n/s) - s) \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

a qual rende:

$$\begin{cases} \det Df(k^*, (X/K)^*) = -sk^* G'(0) \left[\frac{d(Y/K)}{dk} + \Phi_k \frac{d(Y/K)}{d(X/K)} \right] \\ \text{tr} Df(k^*, (X/K)^*) = sk^* \frac{d(Y/K)}{dk} + G'(0) \left[(\Phi_\zeta^* \Psi' + c) \frac{d(Y/K)}{d(X/K)} - 1 \right] \end{cases} \quad (7.25)$$

Com base no Quadro 2.1 do capítulo dois para que $(k^*, n/s)$ seja localmente instável, mas não um ponto de sela, é suficiente que $\det D(k^*, n/s) > 0$ e $\text{tr} D(k^*, n/s) > 0$. Dado o exposto no *Caso a* sobre a caracterização do estado estacionário, Nikaido (1992) garante que $(k^*, n/s)$ é um ponto de equilíbrio instável, embora não um ponto de sela, supondo:

CONDIÇÃO (CN.3): (i) $\Phi(k_s, \Psi(n/s)) < n$

(ii) $\Phi_\zeta \Psi'(n/s) > s$

Esta condição implica, por (7.10), que a curva de demarcação $(X/K) = 0$ é positivamente inclinada na vizinhança do ponto de equilíbrio. Além disso, cabe lembrar que $k^* < k_s$ e $(k^*, n/s)$ corresponde ao ponto *C* na Figura 7.2.c.

Com as condições anteriormente assumidas torna-se factível esboçar com certa precisão o diagrama de fase do sistema (7.5). Esta tarefa pode ser realizada levando-se em consideração os seguintes fatos:

$$\begin{cases} \frac{\dot{k}}{\partial k} = s \frac{X}{K} - n > 0 \Leftrightarrow \frac{X}{K} > \frac{n}{s} \text{ (região de desemprego)} \\ \frac{\dot{k}}{\partial k} = sf'(k) - n < 0, \text{ para todo } k > k_s \text{ (região de superemprego)} \end{cases} \quad (7.26)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(X/K)}{\partial k} = G' \Phi_k < 0 \text{ (região de desemprego)} \\ \frac{\partial(X/K)}{\partial k} = G' \left[\Phi_k + (\Phi_\zeta \Psi' + c) \left(-\frac{f(k) - f'(k)k}{k^2} \right) \right] < 0 \text{ (região de superemprego)} \end{cases} \quad (7.27)$$

A partir de (7.26) infere-se que pontos à direita da parte perpendicular ao eixo k da curva de demarcação $\dot{k} = 0$ apresentam uma velocidade de variação da razão capital-trabalho social *negativa*, $\dot{k} < 0$. Além disso, pontos abaixo (acima) da parte paralela ao eixo k da curva de demarcação $\dot{k} = 0$ apresentam uma velocidade de variação da razão capital-trabalho social *negativa*, $\dot{k} < 0$ (*positiva*, $\dot{k} > 0$). Considerando (7.27), nota-se que o comportamento dinâmico da razão venda esperada-capital é similar nas duas regiões separadas pela fronteira de pleno emprego. Dessa forma, pontos à *esquerda* (à *direita*) da curva de demarcação $(X/K) = 0$ apresentam uma velocidade de variação da razão venda esperada-capital *positiva*, $(X/K) > 0$ (*negativa*, $(X/K) < 0$). Em suma, o ponto representativo do sistema (7.6) movimenta-se sempre no sentido horário, conforme representado na Figura 7.5 adiante.

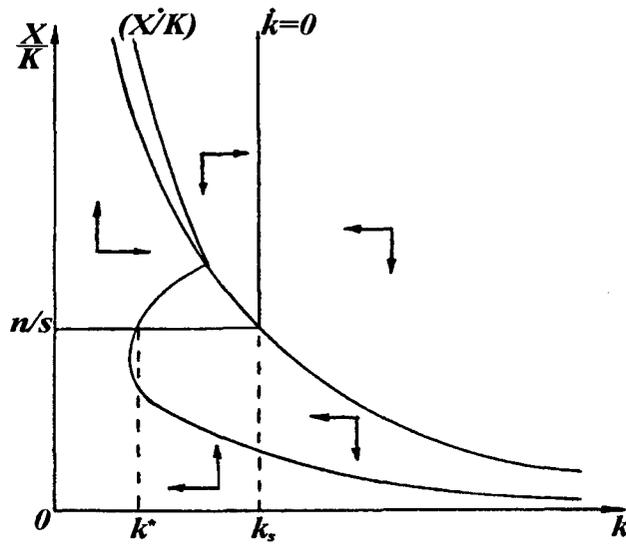


Figura 7.5. Esboço do Diagrama de Fases do Modelo de Nikaido (caso: demanda agregada deficiente com relação a oferta de pleno emprego)

Construção do conjunto Ω

Nikaido não faz qualquer referência explícita ao conjunto Ω . O referido autor limita-se a afirmam que (Nikaido (1992, p. 255): ... *todas as trajetórias, iniciando em qualquer ponto, são limitadas e eventualmente giram em espiral no sentido horário, vindas de dentro ou de fora em torno de um único ponto crítico instável* $(k^*, n/s)$. [Notações adaptadas e tradução do autor].

Teorema de existência de um ciclo

A existência de um ciclo limite é garantida pelo TPB, como segue:

Teorema 6.3: (Nikaido)

Se o sistema dinâmico

$$\dot{k} = \left(s \frac{Y}{K} - n \right) k$$

$$\left(\frac{\dot{X}}{K} \right) = G \left[\Phi \left(k, \Psi \left(\frac{Y}{K} \right) \right) + \frac{cY}{K} - \frac{X}{K} \right] \quad (7.5)$$

$$\frac{Y}{K} = \min \left[\frac{f(k)}{k}, \frac{X}{K} \right]$$

definido em $\Theta = \{(k, X/K) \in \mathfrak{R}_{++}^2\}$ e construído a partir das suposições (SN.1) a (SN.7), satisfaz as condições (CN.1), (CN.2) e (CN.3), então toda semi-órbita positiva $\gamma^+(k_0, (X/K)_0)$ que inicie em qualquer ponto $(k_0, (X/K)_0) \in \{\Theta - V((k^*, (X/K)^*), \varepsilon)\}$ ou é um ciclo limite ou se aproxima de um ciclo limite.

Prova: A prova desta proposição, à luz das argumentações até aqui tecidas nesta subseção, pode ser realizada como segue. A partir de (CN.1) e (CN.2) decorre que o sistema (7.5) possui um, e somente um, ponto de equilíbrio $(k^*, (X/K)^*)$. Por (CN.3) inferê-se que o ponto $(k^*, (X/K)^*)$ é localmente instável e não é um ponto de sela. Suponha que existe um conjunto Ω no plano de fase Θ que não contenha $(k^*, n/s)$, mas que o circunde, e que em sua fronteira $\partial\Omega$ as órbitas que a cortam apontem para o seu interior, ou seja, que Ω seja um conjunto positivamente invariante. Logo, pelo corolário 2.1 toda semi-órbita positiva $\gamma^+(k_0, (X/K)_0)$ ou é um ciclo limite ou o conjunto limite desta $\omega(k_0, (X/K)_0)$ é um ciclo limite.

O mecanismo gerador de ciclos

O ciclo pode ser posto em palavras como segue. Sem perda de generalidade, suponha que a economia se encontre exatamente num ponto sobre um ciclo limite (Figura 7.6), mais especificamente no ponto 1 onde a razão venda esperada-capital está no seu patamar mínimo. Neste ponto a demanda agregada e a venda esperada agregada estão niveladas, entretanto a produção observada está muito baixa e, conseqüentemente, a taxa de crescimento observada do estoque de capital está abaixo da taxa de crescimento da oferta de trabalho o que acaba gerando uma queda da razão capital-trabalho social. Esta queda desalinha as expectativas com relação às vendas e à demanda agregada. As firmas começam a rever suas expectativas para cima e, portanto, a expandir a produção levando a uma expansão da taxa de lucro. Por outro lado, a razão capital-trabalho social continua a decrescer. Estes dois efeitos expandem a taxa de crescimento planejada do estoque de capital. Esta cadeia causal ocorre até a razão capital-trabalho social se estabilizar, ou seja, até o investimento observado compensar a expansão da oferta de trabalho (ponto 2, Figura 7.6).

A economia não mantém sua razão capital-trabalho social estabilizada, pois a demanda agregada ainda supera a venda esperada agregada. Isto leva as firmas a continuarem o processo de revisão de expectativas para cima, ou seja, a continuarem a expansão da produção. Isto leva a um aumento da razão capital-trabalho social. Nesta fase o investimento tende a ser expandido pelo crescimento da produção observada (via taxa de lucro) e comprimido pelo crescimento da razão capital trabalho social. O efeito positivo sobre o investimento supera o efeito negativo sobre este e a economia expande seu nível de produção observada até atingir o pleno emprego de sua oferta de trabalho (ponto 3, Figura 7.6). A partir daí a expansão da produção passa a ser paulatinamente freada, pois o crescimento da razão capital-trabalho social passa a comprimir o investimento não só de maneira direta, mas também indiretamente via taxa de lucro, a qual passa a cair juntamente com a produtividade média do capital. Esta desaceleração paulatina se desenrola até as firmas nivelarem novamente suas expectativas de vendas com a demanda agregada (ponto 4, Figura 7.5).

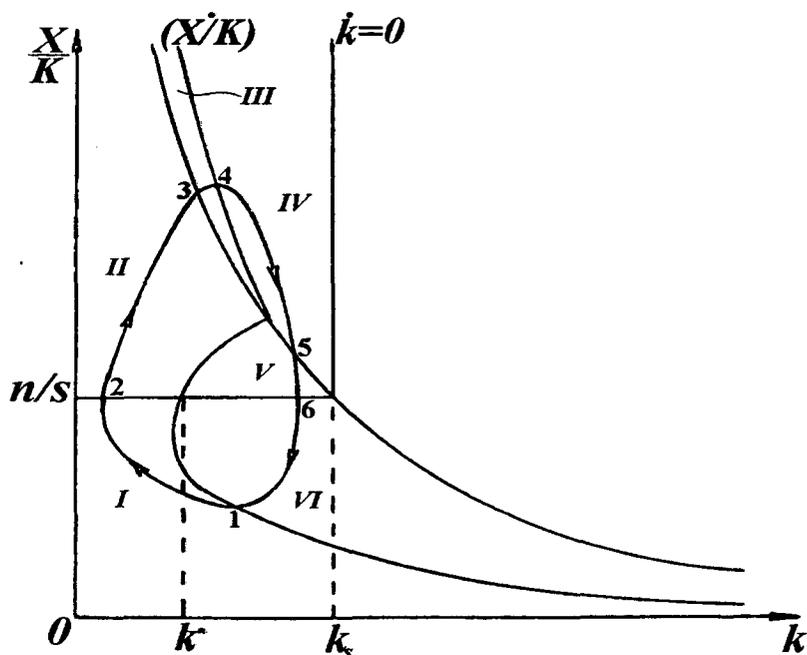


Figura 7.6. Um Ciclo Limite no Modelo de Nikaido (caso: demanda agregada deficiente com relação a oferta de pleno emprego)

Quando a economia atinge novamente o estado de equilíbrio entre demanda agregada e vendas esperadas esta não consegue se manter aí, pois a taxa de crescimento observada do estoque de capital é maior que a taxa de crescimento da oferta de trabalho e, portanto, a razão capital-trabalho social continua a crescer, o que leva a uma compressão

do investimento e, conseqüentemente, a um desequilíbrio entre demanda agregada e vendas esperadas. A redução na demanda agregada planejada desencadeia uma sucessão de contrações na venda esperada e a economia cruza a fronteira de pleno emprego novamente (ponto 5, Figura 7.6). A produção observada, que agora é igual à venda esperada, continua paulatinamente a contrair-se devido à insuficiência de investimento. Isto leva a economia a atingir novamente um estado onde a taxa de crescimento observada do estoque de capital se iguala à taxa de crescimento da população, ou seja, um caminho de crescimento balanceado (ponto 6, Figura 7.6).

A economia não consegue se manter no caminho de crescimento balanceado, pois a venda esperada ainda está acima da demanda agregada planejada e, portanto, a produção observada continua a decrescer reduzindo assim a taxa de crescimento observada do estoque de capital. Dessa forma, a economia acaba se desviando do caminho de crescimento balanceado e inicia uma fase de queda simultânea da razão venda esperada-capital e da razão capital-trabalho social. Com esta queda simultânea surge novamente efeitos opostos sobre o volume de investimento planejado. De um lado o investimento tende a aumentar devido à contração da razão capital-trabalho social, do outro tende a contrair-se devido à queda na taxa de lucro gerada pela queda na produção observada. O efeito negativo sobre o investimento agora supera o efeito positivo sobre este e, conseqüentemente, a economia continua a apresentar contrações na venda esperada até atingir o estado de equilíbrio inicial entre demanda agregada e venda esperada agregada (ponto 1, Figura 7.6). A partir deste estado o ciclo recomeça.

Em suma, a economia não permanece no caminho de crescimento balanceado devido a problemas de demanda efetiva e nem mantém nivelada a demanda agregada e as expectativas com relação às vendas devido a perturbações advindas do processo de acumulação de capital. Dessa forma, são os impulsos gerados pelo ajustamento entre oferta e demanda agregada planejadas no mercado de bens e os impulsos da dinâmica de acumulação de capital os elementos formadores do mecanismo gerador de ciclos do modelo de Nikaido. Portanto, o modelo de Nikaido se diferencia do modelo de Solow (1956) pela introdução do problema da demanda efetiva no processo de crescimento e do modelo de Kaldor (1940) por levar em consideração a interrelação entre o crescimento da oferta de trabalho e da acumulação de capital e seus efeitos sobre o ciclo.

7.3. O Modelo de Nikaido e os Fatos Estilizados dos Ciclos de Negócios

Nesta última seção busca-se contrastar as predições do modelo de Nikaido com a lista de fatos estilizados do capítulo um. As ressalvas feitas na seção 3.3 aplicam-se aqui.

Fato estilizado 1: *Explicado* pelo teorema 6.3.

Fato estilizado 2: *Provavelmente explicado*. Se uma semi-órbita positiva $\gamma^+(k_0, (X/K)_0)$ não é um ciclo limite, esta converge em espiral para um ciclo limite e, portanto, as oscilações que esta gera não são periódicas, no sentido de que não possuem um período constante. Entretanto, quando $\gamma^+(k_0, (X/K)_0)$ é um ciclo limite o sistema passa pelo mesmo ponto em intervalos de tempo regulares. Se o número de ciclos limites é finito, então é mais provável que $\gamma^+(k_0, (X/K)_0)$ não seja um ciclo limite.

Fato estilizado 3: *Impossibilidade de comparação*. Os resultados de cunho qualitativo impossibilitam, sem colocar mais estrutura no modelo, o estabelecimento de qualquer relação precisa entre as predições deste com o fato estilizado em questão.

Fato estilizado 4: *Não explicado*. O modelo de Nikaido trata unicamente do lado real da economia, dessa forma desconsidera por completo este fato estilizado.

Fato estilizado 5: *Não explicado*. Não existe no modelo qualquer equação de preço ou salário.

Fato estilizado 6: *Explicado*. $Y = Kf(k)$, portanto $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} + \frac{f'(k)}{f(k)} \dot{k}$. No estado

estacionário $\frac{\dot{K}}{K} = s \left(\frac{Y}{K} \right)^* = n$, então $\frac{\dot{Y}}{Y} = n$. Portanto, o produto oscila

em torno de uma taxa de crescimento positiva.

Fato estilizado 7: *Não explicado*. Desde que a relação técnica entre produto e capital é dada por uma função de produção agregada padrão, então tanto a produtividade média quanto a marginal do trabalho são anti-cíclicas.

Fato estilizado 8: *Parcialmente explicado*. A taxa de lucro real (lucro real por unidade de capital) mantém uma relação direta com a razão produto-capital por

hipótese. Sem colocar mais estrutura sobre o modelo não se pode inferir *a priori* qualquer coisa sobre a volatilidade dos lucros.

Fato estilizado 9: *Não explicado.* Os comentários feitos anteriormente relativos ao fato estilizado 4 aplicam-se a este fato estilizado.

Fato estilizado 10: *Não explicado.* Os comentários feitos anteriormente relativos ao fato estilizado 4 aplicam-se a este fato estilizado. Além disso, se a taxa de juros de longo prazo está amarrada pela produtividade marginal do capital, esta apresentará um comportamento anti-cíclico.

Fato estilizado 11: *Não explicado.* Devido ao alto nível de agregação do modelo não há uma separação entre investimento em estoques e investimento em capital fixo. Dadas as formas gerais da função investimento, não se pode extrair *a priori*, sem impor mais estrutura ao modelo, qualquer conclusão a respeito da volatilidade das flutuações do investimento.

Quadro 7.1. *O Comportamento das Variáveis de Estado do Modelo de Nikaido durante um Ciclo*

	Fases do Ciclo	I	II	III	IV	V	VI
Variáveis de Estado							
Razão venda esperada-capital	X/K	↗	↗	↗	↘	↘	↘
Razão capital-trabalho social	k	↘	↗	↗	↗	↗	↘
Razão produto-capital	$\frac{Y}{K} = \min\left[\frac{f(k)}{k}, \frac{X}{K}\right]$	↗	↗	↘	↘	↘	↘
Taxa de lucro	$\zeta = \Psi/K, \Psi > 0$	↗	↗	↘	↘	↘	↘
Taxa de crescimento planejada do estoque de capital	$I/K = \Phi(k, \zeta), \Phi_k < 0 \text{ e } \Phi_\zeta > 0$	↗	↗	↘	↘	↘	↘
Taxa de crescimento observada do estoque de capital	$\frac{\dot{K}}{K} = s \frac{Y}{K}$	↗	↗	↘	↘	↘	↘
Oferta de trabalho	$N^s = N^s(t_0)e^{rt}$	↗	↗	↗	↗	↗	↗

8

CONCLUSÃO

Neste capítulo conclusivo é conveniente iniciar com uma advertência. A resenha aqui realizada não deve deixar a impressão de uma proposta implícita de que só há espaço para uma das duas abordagens dos ciclos de negócios. Zarnowitz, um dos mais destacados estudiosos dos ciclos de negócios, por exemplo, argumenta em favor de uma síntese¹. A mensagem central dos modelos de ciclos endógenos aqui resenhados é de que, de um ponto de vista teórico, o *modus operandis* das economias de mercado pode trazer no seu bojo forças capazes de gerar flutuações macroeconômicas mesmo num mundo "ideal", do ponto de vista ortodoxo, ou seja, um mundo onde, além de não ocorrerem choques exógenos não originários do setor público (choques tecnológicos por exemplo), o governo intervém ao mínimo e mantém suas contas equilibradas.

Esta tentativa de síntese possui um tom comparativo. Todavia, não tem a pretensão de eleger o "melhor" modelo. Pretende apenas esboçar um quadro que possibilite uma visualização mais clara possível das diferenças e similitudes entre os modelos considerados clássicos dentro da abordagem dos ciclos endógenos cuja modelagem é fundamentada no conceito de ciclo limite e no TPB.

Este capítulo é composto de duas seções. Na seção 8.1 são oferecidos um quadro das principais características de cada modelo aqui resenhado, bem como algumas considerações de âmbito geral sobre a modelagem dos ciclos de negócios fundamentada no conceito de ciclo limite e no TPB. Na seção 8.2 encerra-se esta dissertação com sugestões para futuras pesquisas sobre o tema aqui tratado.

¹ Sobre esta síntese, Zarnowitz (1985, p. 570) comenta: *Como uma questão de simples lógica, se cada um de um número de modelos é de fato válido, então seria em princípio possível integrar estes e aperfeiçoar a teoria. Naturalmente, isto é mais fácil ser dito do que feito, mas quando cada modelo é tratado em isolado, há pouca chance de que o trabalho seja sempre seriamente empreendido. A conclusão à qual se chega aqui, então, é que o movimento em direção a uma síntese de hipóteses testadas e não falsificadas é urgentemente necessário se é para ser feito progresso real em nosso entendimento dos ciclos de negócios.* [Tradução do autor]

8.1. Um Resumo Comparativo e algumas Considerações Gerais sobre a Modelagem dos Ciclos de Negócios Fundamentada no Conceito de Ciclo Limite e no TPB

No Quadro 8.1, lista-se diferenças e similitudes entre os modelos apresentados neste trabalho, levantadas a partir de um conjunto de parâmetros considerados relevantes.

Além do conteúdo auto-explicativo do Quadro 8.1, os modelos de ciclos endógenos baseados no conceito de ciclo limite e no TPB, de uma forma geral apresentam certas propriedades (positivas e negativas) dignas de nota, as quais apareceram recorrentemente nos capítulos anteriores.

8.1.1. Princípios compartilhados

Nos modelos de ciclos endógenos fundamentados no conceito de ciclo limite e no TPB existe uma estrutura argumentativa comum, relativa à existência de ciclos. Estrutura esta ditada pelo uso do TPB, mais especificamente, pelo programa de aplicação deste teorema explicitado no capítulo dois do presente trabalho. Em outras palavras, nestes modelos apesar de "semânticas" distintas os modelos apresentam uma mesma "sintaxe".

Apesar de cada modelo ter um conjunto de forças formadoras do mecanismo de geração de ciclos distinto, estes compartilham de uma visão comum sobre as economias de mercado, a saber, de que uma "economia capitalista genuína" não caminha para estados estacionários, mas sim gera flutuações devido ao seu *modus operandis*.

Existe uma idéia subjacente ao TPB, a qual se faz presente em todos os modelos de ciclos endógenos fundamentados no conceito de ciclo limite e neste teorema. Próximo do estado estacionário as forças desestabilizadoras superam as estabilizadoras e não permitem a convergência do sistema econômico para tal estado (ponto de equilíbrio), longe deste estado a relação entre estas duas classes de forças se alteram e as forças estabilizadoras passam a preponderar. No caso dos modelos aqui resenhados, com exceção do modelo de Benassy, esta inversão acontece sempre por causa de alguma não-linearidade postulada nas funções de comportamento ou mecanismos de ajustamento de erros (por exemplo, função investimento e curva de Phillips).

Quadro 8.1. Resumo Comparativo sobre os Modelos de Ciclos Endógenos Fundamentados no Conceito de Ciclo Limite e no TPB

PARÂMETROS	MODELOS	KALDOR (1940) (versão Chang-Smith)	ROSE (1967)	SCHINASI (1982)	BENASSY (1984)	NIKAIDO (1992)
Forças Formadoras	Interação do mecanismo do multiplicador (processo de ajustamento entre demanda e oferta agregada no mercado de bens) com um comportamento "não-linear" por parte do investimento e/ou poupança com respeito a variações no nível de atividade e no estoque de capital.	Interação de um comportamento altamente sensível do salário nominal com respeito a variações na proporção empregada da força de trabalho em situações de desemprego muito elevado ou muito baixo (curva de Phillips não-linear) com um comportamento da demanda por trabalho por parte das firmas maximizadoras de lucro no curto prazo (ou seja, para um dado nível de capital).	A existência do ciclo depende diretamente de uma postulação <i>ad hoc</i> sobre a forma funcional da curva de Phillips	A existência de um ciclo depende diretamente de uma postulação <i>ad hoc</i> sobre a forma funcional da função investimento.	Interação de uma "dinâmica de expectativas desestabilizante" agregada atuando via efeito de aceleração com uma "dinâmica de preços estabilizante" (efeito do nível geral de preços sobre a demanda e efeito do salário nominal via curva de Phillips).	Interação entre os impulsos gerados pelo ajustamento entre demanda e oferta agregada no mercado de bens com os impulsos ligados à dinâmica de acumulação de capital.
Mecanismo Gerador de Ciclos	A existência de um ciclo depende diretamente de uma postulação <i>ad hoc</i> sobre a forma funcional da função investimento e/ou poupança.	A existência do ciclo depende diretamente de uma postulação <i>ad hoc</i> sobre a forma funcional da curva de Phillips	A existência de um ciclo depende diretamente de uma postulação <i>ad hoc</i> sobre a forma funcional da função investimento.	Posui uma estrutura não-walrasiana que determina explicitamente o equilíbrio de curto prazo. Além disso, a existência de ciclos independe de qualquer postulado <i>ad hoc</i> sobre formas funcionais.	O confronto entre as expectativas ligadas às vendas e o potencial produtivo por parte das firmas desempenha um papel fundamental no processo de ajustamento no mercado de bens, pois é deste contraste que resulta a oferta agregada e, para um dado nível do estoque de capital, a demanda agregada. Diferentemente de Kaldor, Nikaído leva em consideração a evolução da oferta de trabalho na dinâmica de acumulação de capital. Cabe salientar que um padrão de crescimento cíclico não tem sua existência atrelada a qualquer forma funcional <i>ad hoc</i> .	Busca integrar ciclo e crescimento
Ciclo versus Crescimento	Trata o ciclo como fenômeno distinto. Não existe nem mesmo uma tendência autônoma de crescimento.	Trata o ciclo como fenômeno distinto. Não existe nem mesmo uma tendência autônoma de crescimento.	Trata o ciclo como fenômeno distinto. Não existe nem mesmo uma tendência autônoma de crescimento.	Trata o ciclo como fenômeno distinto	Trata o ciclo como fenômeno distinto	Trata o ciclo como fenômeno distinto
Demanda Efetiva versus Lei de Say	Existência de possibilidade de desequilíbrio no mercado de bens.	Existência de possibilidade de desequilíbrio no mercado de bens.	Existência de possibilidade de desequilíbrio no mercado de bens.	Existência de possibilidade de desequilíbrio no mercado de bens.	Existência de possibilidade de desequilíbrio no mercado de bens.	Existência de possibilidade de desequilíbrio no mercado de bens.
Fato Estilizado	1° - 2° 4°, 5°, 6°, 7°, 8°, 9°, 10°, 11° 3°	1° 8°, 11° 2° 4°, 5°, 6°, 7°, 8°, 9°, 10° 3°	1° 9°, 10° 2° 4°, 5°, 6°, 7°, 8°, 11° 3°	1° 9° 2° 4°, 5°, 6°, 7°, 8°, 10°, 11° 3°	1°, 6° 8° 2° 4°, 5°, 7°, 9°, 10°, 11° 3°	1°, 6° 8° 2° 4°, 5°, 7°, 9°, 10°, 11° 3°
Estabilidade Estrutural	Existência postulada.	Existência postulada.	Existência postulada.	Existência postulada.	Não é discutida.	Não é discutida.

Os mecanismos de ajustamento de erros (fundamentalmente, mecanismos de ajustamento de erros associados a defasagens distribuídas exponencialmente) têm um papel importante na estratégia de modelagem dos modelos aqui resenhados. Usando uma analogia, tais mecanismos estão para os modelos de ciclos resenhados assim como a segunda lei de Newton está para a mecânica clássica, ou seja, por meio destes mecanismos de ajustamento de erros tem-se a formalização das "leis" dinâmicas que definem a evolução dos agregados macroeconômicos envolvidos².

Os modelos de ciclos endógenos fundamentados no conceito de ciclo limite e no TPB ilustram claramente a limitação da *técnica de linearização*, ou seja, tornam patente o caráter local de seus resultados, e são bons contra-exemplos do argumento de que modelos que apresentam instabilidade local não são relevantes na explicação da macrodinâmica das economias de mercado.

Finalmente, é importante destacar que os modelos de ciclos endógenos baseados no conceito de ciclo limite e no TPB e, conseqüentemente, resenhas tratando deste assunto proporcionam uma boa ilustração, num ambiente de baixa dimensão, de como a dinâmica fora do equilíbrio [entenda-se fora do estado estacionário (ponto de equilíbrio)] pode ser "rica".

8.1.2. Limitações

A maioria dos modelos aqui resenhados não trataram do assunto "estabilidade estrutural". Os que dele trataram (Chang-Smyth e Rose) simplesmente assumiram a existência de estabilidade estrutural e, portanto, a existência de um número finito de ciclos limite (vide teorema 2.5, capítulo 2). Portanto, mesmo nos modelos que tocaram explicitamente no assunto "estabilidade estrutural" não foram buscadas condições formais necessárias e/ou suficientes, e com conteúdo/significado econômico, capazes de justificar a "robustez" de suas predições.

O uso do conceito de ciclo limite e do TPB como instrumento formal na demonstração de existência de ciclos implica na restrição da dimensão do sistema de EDO's e, conseqüentemente, dificulta a incorporação do lado monetário da economia.

² Obviamente, não se está insinuando que tais "leis" dinâmicas possuem o mesmo grau de generalidade na macrodinâmica dos ciclos de negócios que a segunda lei de Newton tem na mecânica clássica.

Com exceção do modelo de Benassy, os modelos aqui resenhados tiveram sua prova de existência de um ciclo endógeno baseada no postulado de não-linearidade de uma função de comportamento agregada sem qualquer forte justificativa econômica e principalmente microeconômica. Em outras palavras, não há qualquer microfundamento em tais modelos.

8.2. Sugestões para Futuras Pesquisas sobre o Tema

Não há qualquer tentativa, nos artigos originais, de comparar características quantitativas dos ciclos (como por exemplo período e amplitude), preditas pelos modelos e as respectivas características observadas pelas cronologias dos ciclos de negócios desenvolvidas pelo NBER e outras fontes. Além disso, como exposto nos capítulos três a sete, a comparação das previsões dos modelos com os fatos estilizados, ou seja, a aplicação do método kaldoriano, é de certa forma extremamente difícil devido à impossibilidade de se obter resultados quantitativos gerais para os modelos. Uma alternativa seria impor mais estrutura sobre os modelos e realizar exercícios de calibragem, os quais permitiriam resultados quantitativos. Isto possibilitaria uma aplicação mais eficiente do método kaldoriano.

Considerando o comentário feito na subseção 8.1.2 relativo ao assunto estabilidade estrutural, seria recomendável realizar um esforço de aplicação dos resultados acumulados desde Dulac (1923) sobre o número finito de ciclos limites e dos resultados de Andronov a Peixoto sobre estabilidade estrutural de sistemas de EDO's bidimensionais. Talvez, seria assim possível definir os requerimentos para que os modelos aqui resenhados possuam estabilidade estrutural e um número finito de ciclos limites.

Desde que os modelos, com exceção de Benassy (1984), postularam funções de comportamento agregadas não-lineares sem fortes justificativas microeconômicas, poder-se-ia estudar os microfundamentos dos modelos aqui resenhados, não só pelo caminho usual (isto é, via figura do agente representativo), mas por outros caminhos, como por exemplo dando ênfase na modelagem de interações com agentes heterogêneos por meio de simulações numéricas³.

³ Um ponto de partida poderia ser encontrado nos trabalhos contidos em Arthur et. al (1997).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEN, R. G. D. *Macroeconomic theory*. New York: MacMillan, 1967.
- ARTHUR, W. Brian, DURLAUF, Steven N., LANE, David A. (Eds.). *The economy as an evolving complex system II*. Santa Fe: Santa Fe Institute, 1997. (Proceedings, v. XVII).
- ANDRONOV, A. A., KHAIKIN, S. E., VITT, A. A. *Theory of oscillators*. New York: Pergamon Press, 1966.
- AZARIADIS, Costas. *Intertemporal macroeconomics*. Cambridge: Blackwell, 1993.
- BELTRAMI, Edward. *Mathematics for dynamic modeling*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1987.
- BENASSY, Jean-Pascal. A non-walrasian model of the business cycle. *Journal of Economic Behavior and Organization*, n. 5, p. 77-89, 1984.
- _____. *Macroeconomics: a introduction to the non-walrasian approach*. Orlando: Academic Press, 1986.
- BENHABIB, Jess, NISHIMURA, Kazuo. Competitive equilibrium cycles. *Journal of Economic Theory*, v. 35, p. 284-306, 1985.
- BLACK, J. A Note on Mr. Kaldor's Trade Cycle Model. *Oxford Economic Papers*, n. 8, p. 151-163, 1956.
- BLATT, John M. On the econometric approach to business-cycles analysis. *Oxford Economic Papers*, v. 30, p. 292-300, 1978.
- _____. *Dynamic economic systems: a post-keynesian approach*. New York: M. E. Sharpe, 1983.
- BOBER, Stanley. *Los ciclos y el crecimiento económico*. Tradução por César A. Fernández; revisão técnica por Miguel Iribarne. Buenos Aires: Amorrortu editores, 1968. Tradução de: The economics of cycles and growth.
- BOLAND, Lawrence A. Stylized facts. In: NEWMAN, Peter, MILGATE, Murray, EATWELL, John. *The new Palgrave: the dictionary of economics*. London: Macmillan, 1987.
- BOYCE, William E., DiPRIMA, Richard C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 5. ed. Tradução por Horácio Macedo. Rio de Janeiro: LCT, 1994. Tradução de: Elementary differential equations and boundary value problem.

- BRANDOLINI, Andrea. In search of a stylised fact: do real wages exhibit a consistent pattern of cyclical variability? *Journal Economic Surveys*, v. 9, n. 2, p. 103-163, jun., 1995.
- BRAUER, Fred, NOHEL, John A. *Ordinary differential equations: a first course*. New York: W. A. Benjamin, 1967)
- CHANG, W. W., SMYTH, D. J. The existence and persistence of cycle in a non-linear model: Kaldor's 1940 model re-examined. *Review of Economic Studies*, v. 38, p. 37-44, 1971.
- CHIANG, Alpha C. *Fundamental methods of mathematical economics*. 3. ed. Singapore : McGraw-Hill, 1992.
- CODDINGTON, E. A., LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations*. New York: MacGraw-Hill, 1955.
- DeBAGGIS, H. F. Dynamical systems with stable structures. In: LEFSCHETZ, S. (Ed.). *Contributions to the theory of nonlinear oscillations*. Princeton: Princeton University Press, 1952.
- DEBREU, Gerard. *Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium*. New Harver: Yale University Press, 1959.
- DOHTANI, Akitaka. Existence and Stability of Business Cycles. *Quartely of Applied Mathematics*, Toyama, v. LIV, n. 1, p. 105-120, mar. 1996.
- DOMINGUES, Hygino H. *Espaços métricos e introdução a topologia*. São Paulo: Atual e EDUSP, 1982.
- DORE, Mohammed H. I. *The macrodynamics of business cycles: a comparative evaluation*. Cambridge : Blackwell, 1993.
- DORNBUSCH, Rudiger, FISCHER, Stanley. *Macroeconomia*. 2. ed. São Paulo: Makron Books e McGraw-Hill, 1991.
- EVANS, Michael K. *Macroeconomic activity: theory, forecasting, and control*. New York: Harper & Row, 1969.
- FIEDLER-FERRARA, Nelson, PRADO, Carmen P. Cintrado. *Caos: uma introduação*. São Paulo: Edgar Blücher, 1994.
- FRISCH, Ragnar. Propagation problems and impulse problems in dynamic economics. In: *Economic essays in honour of Gustav Cassel*. London: Allen & Unwin, 1993.
- GABISCH, G., LORENZ, H. W. *Business Cycle Theory: A Survey of Methods and Concepts*. 2. ed. New York : Springer-Verlag, 1989.

- GANDOLFO, G. *Qualitative analysis and econometric estimation of continuous time dynamic models*. New York: North-Holland, 1981.
- GANDOLFO, G. *Economic Dynamics: methods and models*. Amsterdam: North-Holland, 1996.
- GEORGE, Donald A. R. *Mathematical modelling for economists*. London: MacMillan, 1988.
- GOODWIN, R. M. The non-linear accelerator and persistence of business cycle. *Econometric*, v. 19, p. 1-17, 1951.
- _____. A growth cycle. In: FEINSTEIN, C. H. (Ed.). *Socialism, Capitalism and economic growth: essays presented to Maurice Dobb*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- GUCKENHEIMER, John, HOMES, Philip. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- GUILLEMIN, Victor, POLLACK, Alan. *Differential topology*. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.
- GORDON, Robert J. *The american business cycle: continuity and change*. Chicago: Chicago University Press for NBER, 1986.
- GRANDMONT, Jean-Michel, MALGRANGE, Pierre. Nonlinear economic dynamics: introduction. *Journal of Economic Theory*, v. 40, p. 3-12, 1986.
- HALE, J. K., KOÇAK, H. *Dynamics and bifurcations*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- HAMBURGER, L. Note on economic cycles and relaxation-oscillations. *Econometrica*, v. 2, p. 112, 1934.
- HARROD, R. F. *The Trade Cycle: an essay*. Oxford : Oxford University Press, 1936.
- HARTMAN, Philip. *Ordinary differential equations*. New York: John Wiley & Sons, 1964.
- HICKS, J. R. *A contribution to the theory of trade cycle*. Oxford: Oxford University Press, 1950.
- HIRSCH, Morris W., SMALE, Stephen. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1974.
- ICHIMURA, Shinichi. Notes on Non-Linear Business Cycles Theories. *Osaka Economic Papers*, mar., 1954.

- ICHIMURA, Shinichi. *Toward a General Nonlinear Macrodynamic Theory of Economic Fluctuations*. In: KURIHARA, K. (ed.). *Post-Keynesian economics*. New Brunswick: Rutgers University Press, 1955.
- JONES, Hywel G. *Modernas teorias do crescimento econômico: uma introdução*. Tradução por Maria Angela Fonseca e Eduardo Giannetti Fonseca. São Paulo: Atlas, 1979. Tradução de: An introduction to modern theories of economic growth.
- KALDOR, N. A comment. *Review of Economic Studies*, v. 38, p. 45-46, 1971.
- _____. A model of Trade Cycle. *Economic Journal*, v. 50, p. 78-92, 1940.
- _____. Capital accumulation and economic growth. In: HAGUE, D. C., LUTZ, F. A. (Eds.). *The theory of capital*. New York: St. Martin's Press, 1968.
- KALECKI, M. A Macrodynamic Theory of Business Cycles. *Econometrica*, Leyden, oct. 1933.
- _____. A theory of business cycle. *Review of Economic Studies*, v. 4, n. 2, p. 77-97, 1937.
- KEYNES, John Maynard. *Collected writings of John Maynard Keynes*. London: MacMillan, 1971.
- KOYCK, L. M. *Distributed lags and investment analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1959.
- LANG, Serge. *Cálculo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977. Tradução de: A first course in calculus.
- LEFSCHETZ, Solomon. *Introduction to topology*. New Jersey: Princeton University, 1949.
- LIPSCHUTZ, Seymour. *Schaum's outline of theory and problems of general topology*. New York: Schaum, 1965.
- LORENZ, Hans-Walter. *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*. 2. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- LUCAS, R. E. *Studies in business cycle theory*. Oxford: Basil Blackwell, 1981.
- MOORE, Geoffrey H., ZARNOWITZ, Victor. Major changes in cyclical behavior. In: GORDON, Robert J. *The american business cycle: continuity and change*. Chicago: Chicago University Press for NBER, 1986.
- MULLINEUX, Andy, PENG, WenSheng. Nonlinear business cycle modelling. *Journal Economic Surveys*, v. 7, n. 1, p. 41-83, 1993.
- NEWMAN, M. H. A. *Topology of plane sets*. London and New York: Cambridge University Press, 1939.

- NIKAIDO, Hukukane. A genuine keynesian growth cycle. In: MAJUMBAR, Mukul (ed.). *equilibrium and dynamics: essays in honour of David Gale*. London: MacMillan, 1992.
- OLECH, Czeslaw. On the global stability of an autonomous system on the plane. *Contribution of differential equations*, v. 1, n. 3, p. 389-400, 1963.
- OWASE, Tatsuji. Nonlinear dynamical systems and economic fluctuations: a brief survey. *IEICE Transactions*, v. E74, n. 6, p. 1393-1400, june 1991.
- PHILLIPS, A. W. Stabilisation policy in a closed economy. *Economic Journal*, v. 64, p. 290-323, june 1954.
- READINGS IN BUSINESS CYCLES. London: Allen and Unwin, 1966. (American Economic Association Series).
- ROSE, H. On the non-linear theory of the employment cycle. *Review of Economic Studies*, v. 34, p. 153-173, 1967.
- ROSINGER, Jean-Luc. Macroeconomia e equilíbrios não-walrasianos: uma apresentação. In: ANPEC. *Anais do XXIII Encontro Nacional de Economia*. Salvador: 1995, p. 610-632.
- RUELLE, David. *Elements of differentiable dynamic and bifurcation theory*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1989.
- SAMUELSON, P. A. Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *Review of Economic Statistics*, n. 21, p. 75-78, 1939.
- SASAKURA, Kzuyuki. On the dynamic behavior of Schinasi's business cycle model. *Jornal of Macroeconomics*, v. 16, n. 3, p. 423-444, 1994.
- SCHINASI, Garry J. A nonlinear dynamical model of short run fluctuations. *Review of Economic Studies*, v. XLVIII, p. 649-656, 1981.
- SCHINASI, Garry J. Fluctuations in a dynamical, intermediate-run IS-LM model: applications of the Poincaré-Bendixon Theorem. *Journal of Economic Theory*, v. 28, p. 369-375, 1982.
- SEMMLER, Willi (ed.). *Business cycles: theory and empirical methods*. London: Kluwer Academic Publischer, 1994.
- STADLER, George W. Real business cycles. *Journal of Economics Literature*, v. XXXII, dec., p. 1750-1783, 1994.
- VERHULST, Ferdinand. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

- WIGGINS, Stephen. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- YAMANE, Taro. *Matemática para economistas*. São Paulo: Atlas, 1974.
- YAN-QIAN, Ye. *Theory of limit cycles*. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 1986.
- YASUI, T. Self-excited oscillations and business cycles. *Riron-Kcizai-Gaku*, nov., 1952.
- ZARNOWITZ, Victor. Recent work on business cycles in historical perspective: a review of theories and evidence. *Journal of Economic Literature*, v. 23, n. 2, p. 523-580, june 1985.