RAFAEL DESCOVI GALELLI

A DIMENSÃO DE HAUSDORFF

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Aldrovando Luís Azeredo Araújo

Florianópolis
Dezembro 2007

Agradecimentos

À família, pela paciência.
Aos amigos, pela compreensão.
Aos mestres, pela sabedoria.
Ao meu anjo da guarda,
por ter mantido minha sanidade,
ao menos pela maior parte do tempo.

Sumário

INTRODUÇÃO

A noção da dimensão de Hausdorff depende crucialmente do conceito de medida de Hausdorff. A idéia por trás da medida de Hausdorff é simples: podemos estimar o *tamanho* de um conjunto cobrindo o mesmo com bolas e contando o número de bolas. Para visualizar melhor, introduzimos neste momento um exemplo de um conjunto fractal. Uma construção clássica publicada em 1904 por H. von Koch, chamada *Kock snowflake* ou floco de neve de Koch. Comece por $t = 0$ com um segmento de tamanho 1cm e decomponha em três intervalos de $\frac{1}{3}$cm. Retire o intervalo central, construa um triângulo equilátero com lado $\frac{1}{3}$cm e o deixando "sem a base", tendo assim 4 subintervalos de $\frac{1}{3}$cm. Faça o mesmo procedimento para cada um dos subintervalos criando assim a curva de Koch.

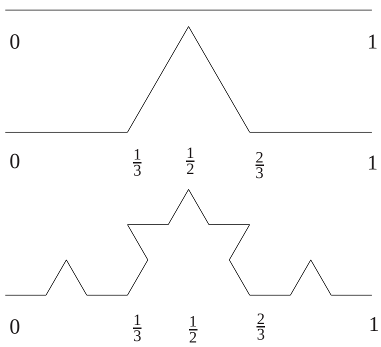

Figura 1: Curva de Koch

Tomando $t = 1 - 2^{-n}$ temos uma curva consistindo de 4^n subintervalos de tamanho 3^{-n}cm e comprimento total de $(\frac{4}{3})^n$cm. Depois de algum t temos uma curva C de comprimento infinito homeomorfa ao intervalo unitário. Vamos supor que o procedimento de contrução da curva de Kock pare no tempo $t = 1 - 2^{-5}$. Assim temos "uma curva sinuosa" C' de comprimento $(\frac{4}{3})^5 \approx 4.21$cm. Mas vamos supor que não sabemos disso. Vamos então cobrir a curva C' mais ou menos "eficientemente" com discos de aproximadamente $\delta = 3^{-2} \approx 0.11$cm de diâmetro e podemos estimar a medida simplesmente contando o número de discos, $4^2 = 16$ e multiplicando por δ:

$$L \approx \sum_{discos\, na\, cobertura} \delta \tag{1}$$

Assim obtemos uma estimativa de $16.3^{-2} \approx 1.77$cm, que de fato não é muito precisa, então podemos tentar contar novamente com discos menores, com diâmetro de $3^{-3} \approx 0,04$cm. Agora temos uma estimativa contando os $4^3 = 64$ discos obtendo $64.3^{-3} \approx 2.37$cm que é um pouco mais próxima do comprimento verdadeiro. Já podemos notar onde isto vai nos levar. Se usarmos o diâmetro dos discos 3^{-5}cm temos a estimativa $4^5.3^{-5} \approx 4.21$cm que é razoavelmente apurada. Mais geralmente, se estimarmos o comprimento de uma curva “razoavelmente suave” desta maneira, podemos esperar que as somas da Equação 1.1 irão convergir para o verdadeiro comprimento quando δ tende a zero. Da mesma maneira, se tivermos uma região plana R como um quadrado com uma fronteira “razoavelmente suave” - o que quer dizer que em alguma escala ela deve começar a parecer com uma curva linear - então podemos estimar o tamanho cobrindo eficientemente com discos de raio δ e multiplicando o número de discos pela área de cada disco.

$$A \approx \sum_{discos\, na\, cobertura} \delta^2 \tag{2}$$

Novamente podemos esperar que as somas na Equação 1.2 irão convergir para a verdadeira área quando δ tende a zero. Observe que se tentássemos estimar o tamanho da região R com a Equação 1.1, obteríamos somas divergindo e tendendo ao infinito. Podemos dizer que R teria um “comprimento infinito”. Por outro lado, se tentássemos estimar o tamanho da curva C' usando a Equação 1.2, obteríamos estimativas convergindo para zero. Poderíamos assim dizer que C' tem “área zero”. Em um espaço euclidiano n-dimensional, podemos estimar o tamanho de uma superfície limitada com fronteira “razoavelmente suave” S de uma dimensão topológica d cobrindo S com bolas n-dimensionais de diâmetro δ e efetuando a soma:

$$\text{tamanho na dimensão k} = \sum_{bolas\, na\, cobertura} \delta^k \tag{3}$$

Se tomarmos $k < d$, esperamos que as somas vão divergir quando δ tende a zero; por outro lado, se tomarmos $k > d$, podemos esperar que as somas irão convergir para zero quando δ tende a zero. Considere agora o que acontece com a curva de Koch C, se tentarmos utilizar esse procedimento. Já que C é topologicamente uma curva, naturalmente tentaremos estimar o tamanho com a Equação 1.1 mas como sabemos o tamanho de C é infinito, e quando tomamos discos menores nossa soma diverge. Por outro lado, se usarmos a Equação 1.2 encontraremos que C tem uma área zero. Neste contexto, C tem um comportamento intermediário entre curvas “razoavelmente suaves” e superfícies com fronteira “razoavelmente suaves”. Assim, como podemos usar nosso processo para estimar o tamanho de C? Aqui entra a simples mas genial idéia de Hausdorff: Já que a soma da Equação 1.3 é um número finito diferente de zero somente se o “crescimento” no número de bolas quando diminuimos δ, precisamente balança o decrescimento das bolas de tamanho δ^k, devemos então aceitar a possibilidade de tomar δ elevado à alguma potência intermediária fracionária t:

$$\text{tamanho na dimensão t} = \sum_{bolas\,na\,cobertura} \delta^t \tag{4}$$

Qual valor t deveríamos tomar para obter uma aproximação razoável de C? Suponha tomar $\delta_n = 3^{-n}$cm. Já que o número de discos no n-ésimo estágio da construção cresce na forma 4^n e o diâmetro de cada disco decresce em 3^{-n}, então escrevemos:

$$1 = 4^n.(3^{-n})^t = 4^n 3^{-nt}$$

Resolvendo para t, temos:

$$t = \frac{log 4}{log 3} \approx 1.2618$$

Já que este expoente t é o único (como demonstraremos depois neste trabalho) que devolve uma solução finita diferente de zero para o tamanho de C, podemos desta forma considerar t como sendo a ”dimensão” do conjunto C.

A dimensão de Hausdorff é uma generalização da noção de dimensão vetorial. No caso do $\mathbb{R}^n$, associado à dimensão do espaço, existe uma medida que atribui as bolas de raio r, o valor

$$m(B_r) = C_n(2r)^n$$

onde C_n é uma constante que depende apenas da dimensão. Esta medida conhecida como a medida de Lebesgue corresponde a medida geométrica associada à estrutura do espaço. Outros conjuntos dentro de espaços métricos, poderiam também ter uma medida com estas propriedades, mas para tal precisaríamos ter um candidato para dimensão do conjunto em questão. Entre as noções possíveis que generalizam a noção de dimensão temos a dimensão de Hausdorff[1] que é aquela que permite a construção simultânea de uma medida geométrica associada. A idéia é

[1]Felix Hausdorff, 1868-1942. Matemático alemão, Considerado um dos fundadores da topologia moderna.

procurar um número, que agora pode ser fracionário, que garanta

$$\inf\left\{\sum_i |A_i|^t\right\}$$

seja finito quando considerado sobre todas as coberturas por bolas do conjunto dado. Quando isto acontece, o número t é a dimensão de Hausdorff do conjunto e a medida associada é a medida de Hausdorff do conjunto. Pode-se provar que esta noção generaliza a nocão de dimensão de espaço vetorial. Sua utilidade se mostrou enorme em uma variedade de trabalhos de pesquisa. Muitos principalmente nos últimos anos com resultados relevantes sobre conjuntos invariantes na teoria de Sistemas Dinâmicos.

Além de apresentar a definição e propriedades básicas da dimensão de Hausdorff bem como métodos o cálculo desta dimensão para conjuntos consagrados, como por exemplo o conjunto de Cantor que tem dimensão de Hausdorff $\frac{log2}{log3}$, outros exemplos de conjuntos *irregulares* serão introduzidos ao longo do trabalho. Ainda vamos trabalhar com alguns conjuntos classificados como auto-similares e a partir dessa classificação obter a dimensão de Hausdorff destes conjuntos.

1 ELEMENTOS DE ANÁLISE REAL

1.1 DEFINIÇÕES E CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Definição 1.1.1. Um espaço métrico é um par (X,d) onde X é um conjunto e d é uma métrica em X, a saber, uma função

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$$

tal que:

i) $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Definição 1.1.2. Dado $x \in X$ onde (X,d) é um espaço métrico e $r > 0$ definimos a bola aberta de centro x e raio r via:

$$B_r(x) = \{y \in X \, : \, d(x,y) < r\}$$

Definição 1.1.3. Dizemos que um subconjunto $A \subseteq X$ onde (X,d) é espaço métrico, é um aberto se para todo $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subseteq A$.

Definição 1.1.4. Dizemos que um subconjunto $A \subseteq X$ onde (X,d) é espaço métrico, é um fechado se A^c (Complementar de A) é um conjunto aberto.

Definição 1.1.5. Dado um conjunto $A \subset X$ definimos o fecho de A como o conjunto

$$\overline{A} = \left\{ y \in X \, : \, \exists \, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \, ; \lim_{n \to \infty} x_n = y \right\}$$

Lema 1.1. Seja $F \subset X$ onde (X,d) é métrico. Então F é fechado se e somente se para toda sequência $(x_n)_n \subset F$ convergente, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

$x \in F$.

Definição 1.1.6. Dizemos que um subconjunto K de um espaço métrico (X,d) é compacto se dado uma cobertura de abertos $(U_i)_{i\in I}$ de K, isto é, U_i é um aberto de X para todo $i \in I$ e $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, então existem $i_1, i_2, \cdots, i_N$ em I tais que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{i_j}$$

Lema 1.2. Seja K um subconjunto compacto de X onde (X,d) é espaço métrico. Então K é fechado.

Lema 1.3. Seja $K \subset X$ onde (X,d) é métrico. Então K é compacto se e somente se para toda sequência $(x_n)_n \in K$ existe subsequência x_{n_k} convergente para um ponto de K.

Definição 1.1.7. Dizemos que um subconjunto $Y \subseteq X$ em um espaço métrico (X,d) é relativamente compacto se o fecho de Y é compacto.

Definição 1.1.8. Seja (X,d) um espaço métrico. Dizemos que uma seqüência $(x_n)_n \subset X$ é uma seqüêcia de Cauchy se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m,n > N$ então

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definição 1.1.9. Dizemos que um espaço métrico (X,d) é completo se toda seqüência de Cauchy em X é convergente.

Teorema 1.1. *Seja (X,d) é um espaço métrico. Seja $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de compactos não-vazios encaixados, isto é, tal que $K_i \subseteq K_j$ sempre que $1 \leqslant i < j < \infty$. Então*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$$

é um conjunto compacto não-vazio.

Demonstração: Primeiro mostramos que

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \varnothing.$$

Seja $x_n \in K_n$. Então a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência contida em K_1. Como K_1 é compacto existe uma subsequência x_{n_k} convergente, isto é,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \overline{x},$$

com $\overline{x} \in K_1$. Mas $x_i \in K_r\, \forall i \geqslant r$. Portanto dado $N \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{i_j} \in K_N$ para todo

$j \geqslant k$. Logo, por 2.1 e 2.2 $\overline{x} \in K_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$ e portanto

$$\overline{x} \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i.$$

Para provarmos que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ é compacto, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K_1$. Sendo K_1 compacto, segue que existe subsequência $(x_{n_k})_{K \in \mathbb{N}}$ convergente a um ponto de K_1, a saber $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \overline{x} \in K_1$. Como $(x_{n_k})_{K \in \mathbb{N}} \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$, x_{n_k} é um sequência em K_N para todo N. Logo $\overline{x} \in K_N$ e finalmente

$$\overline{x} \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i.$$

Definição 1.1.10. Se (X, d_X) e (Y, d_Y) são espaços métricos, dizemos que uma função $f : X \to Y$ é uma contração se existe $0 \leqslant c < 1$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leqslant c d_X(x,y), \quad \forall x, y \in X.$$

É imediato ver que se $f : X \to Y$ é uma contração então f é contínua.

Teorema 1.2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Se (X, d) é um espaço métrico completo e $f : X \to X$ é uma contração então f tem um único ponto fixo, ou seja, existe um único $x \in X$ tal que*

$$f(x) = x.$$

Demonstração: Seja $x_0 \in X$. Defina a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, via $x_{n+1} = f(x_n)$. Observe que se $n \geq 2$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant c d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant c^n d(x_1, x_0).$$

Provemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy. Sejam $n > m \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) =& d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots d(x_{m+1}, x_m) \\ \leqslant& c^{n-1} d(x_1, x_0) + c^{n-2} d(x_1, x_0) + \cdots + + c^m d(x_1, x_0) \\ =& (c^m + c^{m+1} + \cdots + c^{n-1}) d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Como $c < 1$, dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N}^{\infty} c^k < \frac{\varepsilon}{d(x_0, x_1)}.$$

Segue que se $m,n > N$ e supondo sem perda de generalidade que $n > m$, tem-se:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leqslant (c^m + c^{m+1} + \cdots + c^{n-1})d(x_1,x_0) \\ &\leqslant d(x_1,x_0)\sum_{k=m}^{n-1} c^k = d(x_1,x_0)\sum_{k=N}^{\infty} c^k \\ &\leqslant d(x_1,x_0)\frac{\varepsilon}{d(x_0,x_1)} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy. Como X é completo, seja $x_\infty \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty.$$

Mas a relação recursiva

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

nos permite tomar limite nos dois lados da igualdade e obter:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Assim

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_\infty),$$

provando que x_∞ é um ponto fixo de f. Para provar a unicidade, suponha que x_1, x_2 são pontos fixos de f, isto é, $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$. Então

$$d(x_1,x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1,x_2).$$

Como $c < 1$ segue que $d(x_1,x_2) = 0 \implies x_1 = x_2$, provando assim a unicidade do ponto fixo.

$\blacksquare$

1.2 MÉTRICA DE HAUSDORFF

Estamos agora prontos para definir a métrica de Hausdorff. Considere $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathscr{K}(D)$ a família dos subconjuntos compactos de D. Dado $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathscr{K}(D)$ definimos A_ε via:

$$A_\varepsilon = \{x \in D : d(x,y) < \varepsilon, \text{ para algum } y \in A\}.$$

Claramente $A_\varepsilon \supseteq A$ para qualquer subconjunto $A \subset D$.

Definição 1.2.1. Definimos em $X = \mathscr{K}(D)$ a métrica de Hausdorff como: se $A,B \in \mathscr{K}(D)$ definimos

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon : A \subseteq B_\varepsilon, B \subseteq A_\varepsilon\}$$

Observe que se $A,B \in \mathscr{K}(D)$ então, A,B são compactos e portanto são limitados. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$A_\varepsilon \supseteq B \text{ e } B_\varepsilon \supseteq A,$$

garantindo assim que $d_H(A,B)$ está bem definida para todo par $A,B \in \mathscr{K}(D)$. Provemos que de fato esta função é uma métrica.

i) $d_H(A,B) = 0 \iff A = B \quad \forall A,B \in \mathscr{K}(D)$. Suponha que $d_H(A,B) = 0$. Seja $a \in A$. Para todo $\varepsilon > 0$, $a \in B_\varepsilon$ já que $d_H(A,B) = 0$. Se $a \in B$, então

$$a \in B^c \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(a) \subset B^c$$

portanto $\inf\{|a-b| : b \in B\} \geqslant \varepsilon$. Segue que $a \in A \Rightarrow a \in B$, isto é, $A \subseteq B$. Argumento idêntico mostra que $B \subseteq A$. Portanto $A = B$

ii) $d_H(A,B) = d_H(B,A)$. Esta é trivial.

iii) $d_H(A,B) \leqslant d_H(A,C) + d_H(B,C)$ para qualquer $A,B,C \in \mathscr{K}(D)$ para tal precisamos de um lema.

Lema 1.4. Para cada $A \in \mathscr{K}(D)$, e todo $\varepsilon, \delta > 0$, temos que

$$(A_\delta)_\varepsilon \subseteq A_{\delta+\varepsilon}.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon, \delta > 0$ e $A \in \mathscr{K}(D)$. Fixe $a \in (A_\delta)_\varepsilon$. Então existe um $a_0 \in A_\delta$ tal que $|a - a_0| < \varepsilon$. Como $a_0 \in A_\delta$, existe um $a_1 \in A$ tal que $|a_1 - a_0| < \delta$. Da desigualdade triangular segue

$$|a - a_1| \leqslant |a - a_0| + |a_0 - a_1| < \varepsilon + \delta,$$

o que prova que $a \in A_{\delta+\varepsilon}$. Para provarmos o item iii) fixemos $A, B, C \in \mathscr{K}(D)$. Tome $\delta_1 > d(B,C)$ e $\delta_2 > d(A,C)$. As seguintes inclusões são verdadeiras:

$$B \subseteq C_{\delta_1}, \quad C \subseteq B_{\delta_1}, \quad A \subseteq C_{\delta_2}, \quad C \subseteq A_{\delta_2}.$$

Como $A \subseteq C_{\delta_2}$ usando o lema 2.4 obtemos

$$A \subseteq B_{\delta_1+\delta_2}.$$

Similarmente como $C \subseteq A_{\delta_2}$ temos

$$C_{\delta_1} \subseteq (A_{\delta_2})_{\delta_1}$$

usando novamente o lema 2.4, a equação $B \subseteq C_{\delta_1}$ e a desigualdade anterior obtemos

$$B \subseteq A_{\delta_1+\delta_2}.$$

Segue que

$$d_H(A,B) \leqslant \delta_1 + \delta_2,$$

para todo $\delta_1 > d_H(B,C)$ e $\delta_2 > d_H(A,C)$. Fazendo $\delta_1 \searrow d(B,C)$ seguido de $\delta_2 \searrow d_H(A,C)$, temos que

$$d_H(A,B) \leqslant d_H(B,C) + d_H(A,C).$$

Nos resta provar que $\mathscr{K}(D)$ com a métrica de Hausdorff é um espaço métrico completo.

Teorema 1.3. *Suponha que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}(D)$ é uma seqüência de Cauchy na métrica de Hausdorff. Então existe $A \in \mathscr{K}(D)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Demonstração: Seja A o conjunto de pontos limites de seqüências $(x_n)_n$ com $x_n \in A_n$. É fácil ver da definição de A, que A é fechado. Sendo subconjunto de um compacto segue que A é compacto e portanto $A \in \mathscr{K}(D)$. Provemos que A_n converge a A. Seja $\varepsilon > 0$. Para provarmos que $d_H(A_n, A) < 2\varepsilon$ para n suficientemente grande, precisamos provar as seguintes inclusões

$$A \subset (A_n)_{2\varepsilon} \text{ e } A_n \subset A_{2\varepsilon}.$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(A_n, A_m) < \varepsilon$ sempre que $m, n > N$. Como $(A_N)_\varepsilon \supset A_n$, toda seqüência x_n selecionada na definição de A deve ter pontos em $(A_N)_\varepsilon$ para n suficientemente grande. Assim, $\lim x_n$ deve estar em $\overline{(A_N)_\varepsilon}$. Segue que $A \subset (A_N)_{2\varepsilon}$.

Seja $\varepsilon > 0$ como antes. Escolhemos N_i estritamente crescente tal que $m,n > N_i$ implique que $d_H(A_m,A_n) < \varepsilon/2^i$. A estratégia será mostrar que, para todo x em algum A_k com $k \geqslant N_1$, existe uma seqüência $(x_i)_i$ com $x_i \in A_i$ tal que, para todo $p \geqslant 2$ e $N_p \leqslant i, j \leqslant N_{p+1}$, teremos $d(x_i,x_j) < \varepsilon/2^p$ e $d(x,x_{N_2}) < \varepsilon/2$. Assim, para todo $j \geqslant N_2$ teremos $q \geqslant 2$ tal que $N_q \leqslant j \leqslant N_{q+1}$ e

$$\begin{aligned} d(x,x_j) \leqslant& d(x,x_{N_2}) + d(x_{N_2},x_{N_3}) + \cdots + d(x_{N_q},x_j) \\ <& \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \cdots + \varepsilon/2^q < \varepsilon. \end{aligned}$$

Deste modo, a seqüência $(x_j)_j$ irá convergir para um ponto à distância menor que 2ε de x.

Vamos usar várias vezes a seguinte observação.

Afirmação. Para todo par (x,k) com $x \in A_k$ e $k \geqslant N_i$, existe um ponto $x_j \in A_j$, a distância menor do que $\varepsilon/2^i$ de x sempre que $j \geqslant k$.

Para provarmos a afirmação, lembremos que os N_i foram construídos de modo que

$$d_H(A_j,A_k) < \varepsilon/2^i \quad \text{para } j \geqslant k \geqslant N_i.$$

Portanto, sabemos que

$$(A_j)_{\varepsilon/2^i} \supset A_j \text{ para } j \geqslant k.$$

Em particular, sabemos que para todo $j \geqslant k$, existe um $x_j \in A_j$ tal que $B(y_j, \varepsilon/2^i) \ni x$ provando a observação.

Para construirmos x_i, seja o elemento $x_k = x$. Além disso,usando a afirmação com o par (x,k), escolhemos o elemento $x_{N_2} \in A_{N_2}$ com $d(x,x_{N_2}) \geqslant \varepsilon/2$. Todos os outros elementos x_j com $j < N_2$ podem ser escolhidos arbitrariamente sem afetar a convergência ou a restrição sobre seu ponto limite.

Assuma por indução em m que x_i está definido quando $i \leqslant N_m$, e assuma que para $2 \leqslant p < m$ e $N_p \leqslant i, j \leqslant N_{p+1}$, tenhamos $d(x_i,x_j) < \varepsilon/2^p$. Usando a afirmação aplicada a (x_{N_m}, N_m), tem-se que para cada $j \geqslant N_M$, existe um $x_j \in A_j$, à distância $\varepsilon/2^m$ de x_{N_m}. Defina para $N_m < i \leqslant N_{m+1}$ como este x_j. Como para $N_m \leqslant i, j \leqslant N_{m+1}$ temos que $d(x_i,x_j) < \varepsilon/2^m$, as hipóteses de indução estão satisfeitas.

Assim construindo um ponto limite à distância menor que 2ε de um ponto arbitrário $xinA_k$ com $k \geqslant N_1$, mostramos que $A_k \subset A_{2\varepsilon}$ para $k \geqslant N_1$. Já sabíamos que $A \subset (A_k)_{2\varepsilon}$ para $k \geqslant N_1$, logo $d_H(A,A_k) < 2\varepsilon$ para $k \geqslant N_1$. Como para todo $\varepsilon > 0$ existe um N_1 nestas condições, provamos que A é o limite da seqüência A_k.

1.3 CONJUNTOS DE MEDIDA ZERO

Definição 1.3.1. Um conjunto X é dito ter medida de Lebesgue zero se para todo $\varepsilon > 0$ existir uma cobertura de cubos[1] para X de volume menor ou igual a ε.

Definição 1.3.2. Um conjunto X é dito ser de medida total se o complementar de X, X^c tem medida zero.

Definição 1.3.3. Seja A um conjunto qualquer na reta. Dizemos que $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma cobertura de bolas abertas para A se satisfazer:

i) $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$;

ii) $B_i = (a_i, b_i)$ que correspondem as bolas abertas de centro $\frac{a_n+b_n}{2}$ e raio $\frac{b_n-a_n}{2}$.

O comprimento da cobertura $\{B_i\}$ é definido como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_n - a_n)$$

Exemplo 1.3.1. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ tem medida zero.

Sabe-se que $\mathbb{Z}$ é enumerável, então pode ser escrito como $\mathbb{Z} = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Fixe um $\varepsilon > 0$ arbitrário e considere as bolas $B_i = (x_j - \varepsilon 2^{-i}, x_j + \varepsilon 2^{i}$. Assim o comprimento da cobertura $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ é:

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2\varepsilon.2^{-n} \leqslant \varepsilon$$

Note que de forma geral, todo conjunto enumerável tem medida de Lebesgue zero, e também que se $A \subseteq X$ e X tem medida zero, então A também tem medida de Lebesgue zero. Desta maneira o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ tem medida zero e o conjunto dos números irracionais tem medida total.

[1] definição de cubos em $\mathbb{R}^n$ encontra-se na pág 20-21

2 ELEMENTOS DA TEORIA DA MEDIDA E DIMENSÃO

O propósito deste capítulo é apresentar as definições e teoremas básicos da Teoria da Medida.

2.1 MEDIDAS

Definição 2.1.1. Seja X um conjunto. Uma família de subconjuntos $\mathscr{A} \subset X$ é uma *álgebra* se

i) $X \in \mathscr{A}$

ii) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$

iii) $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$

Segue destas propriedades que:

$$A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{A} \Rightarrow (A \cap B) = (A^c \cup B^c) \in \mathscr{A}$$
$$A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A - B = A \cap B^c \in \mathscr{A}$$

Definição 2.1.2. Dizemos que uma coleção de conjutos de X, $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra se:

i) $\varnothing \in \mathscr{A}$;

ii) Se $A \in \mathscr{A}$ então $A^c \in \mathscr{A}$.

iii) Se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma coleção enumerável de conjuntos em $\mathscr{A}$ então:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

Lema 2.1. Seja $\mathscr{A}$ uma σ-álgebra. Então valem:

i) Se $A_i \in \mathscr{A}$ para $i = 1, 2, \ldots$ então $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{A}$

ii) Se $A, B \in \mathscr{A}$ então $B - A \in \mathscr{A}$.

Se $\mathscr{A}_0$ é uma família de subconjuntos de X, dizemos que $\mathscr{A}$ é *gerada* por $\mathscr{A}_0$ se $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ e toda σ-álgebra $\mathscr{A}'$ de subconjuntos de X tal que $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}'$ satisfaz $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$.

Definição 2.1.3. Se $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X, então $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ é uma *medida* se,

i) $\mu(\varnothing) = 0$

ii) Se $\{A_i\}_{i \in N}$ é uma coleção de conjuntos disjuntos em $\mathscr{A}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Definição 2.1.4. Se X é um espaço métrico, denomina-se σ-álgebra de Borel de X à σ-álgebra gerada pela família dos conjuntos abertos que denotamos por $\mathscr{B}$. Os conjuntos em $\mathscr{B}$ denominam-se boreleanos de X.

Um espaço de medida é uma terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$ onde $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ uma medida. Dizemos que X é totalmente σ-finito se X pode ser escrito como uma união enumerável $X = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$ tal que $\mu(A_n) < +\infty$ para todo n. Dizemos que é um espaço de probabilidade se $\mu(X) = 1$.

Se $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é um espaço de medida, dizemos que um conjunto $A \subset X$ é de medida zero se existe $A_1 \in \mathscr{A}$ tal que $A \subset A_1$ e $\mu(A_1) = 0$.

Definição 2.1.5. Dizemos que um espaço de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$ é completo se todo conjunto $A \subset X$ de medida zero pertence a $\mathscr{A}$.

Exemplo 2.1. Seja X um conjunto qualquer e considere sobre a σ-álgebra das partes de X, $\mathscr{P}(X)$. Fixe um ponto $x \in X$. Seja a medida definida por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \in A^c \end{cases}$$

É fácil ver que δ_x é uma medida. Esta medida é usualmente conhecida como *delta de Dirac em x*.

Teorema 2.1 (Teorema de Extensão de Hahn-Kolmogorov)**.** [1] *Seja X um conjunto, $\mathscr{A}_0$ uma álgebra de sub-conjuntos de X e $\mu_0 : \mathscr{A}_0 \to [0,1]$ uma medida. Então se $\mathscr{A}$ é a σ-álgebra gerada por $\mathscr{A}_0$ existe uma e só uma medida*

$$\mu : \mathscr{A} \to [0,1]$$

tal que

$$\mu_{|\mathscr{A}_0} = \mu_0.$$

Uma maneira de construir medidas sobre conjuntos é através das medidas exteriores.

2.2 MEDIDA EXTERIOR

Definição 2.2.1. Uma medida exterior em X, é uma função definida nas partes de X

$$\mu^* : \quad \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$$

satisfazendo:

i) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

ii) Se $A \subseteq B \Longrightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;

iii) Se $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma coleção de conjuntos em $\mathscr{P}(X)$ então:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).(subaditividade)$$

Definição 2.2.2. Se (X,d) é um espaço métrico, então uma medida exterior sobre X, $\mu^* : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ é métrica se

$$d(A,B) > 0 \Longrightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

[1] MANÉ, p. 03

Exemplo 2.2.1. Seja $X = \mathbb{R}^n$ e defina m^* por

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(C_i) \;\; : \;\; \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \supset A\right\},$$

onde $C_i = [a_1^i, b_1^i] \times \cdots \times [a_n^i, b_n^i]$ denota um n-cubo em $\mathbb{R}^n$ e

$$\mathrm{vol}(C_i) = \prod_{j=1}^{n}(b_j^i - a_j^i).$$

Então m^* é uma medida exterior em $\mathbb{R}^n$ conhecida como medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.3. Um subconjunto A de X é dito ser μ^*-mensurável se $\forall\, B \subset X$

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

O seguinte teorema garante que se uma medida exterior é métrica então a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis relativamente a μ^* contém a σ-álgebra de Borel.

Teorema 2.2. *Seja (X,d) um espaço métrico e seja μ^* uma medida exterior métrica. Então todo conjunto fechado (e portanto todo conjunto boreleano) é mensurável com respeito a μ^*.*

Teorema 2.3. *Seja $\mu^* : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ uma medida exterior em X, $\mathscr{A}$ a coleção de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis e $\mu = \mu^*|_{\mathscr{A}}$. Então*

i) *$\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra;*

ii) *$(X,\mathscr{A},\mu)$ é um espaço de medida completo.*

Corolário 2.1. Existe uma medida

$$m : \mathscr{M} \to [0,+\infty]$$

onde $\mathscr{M}$ denota a σ-álgebra dos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ relativamente a medida exterior métrica m^* definida no exemplo 2.2.1 tal que

$$m([a_1^i, b_1^i] \times \cdots \times [a_n^i, b_n^i]) = \prod_{j=1}^{n}(b_j^i - a_j^i).$$

Esta medida se chama de medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ e está definida numa σ-álgebra que contém os boreleanos.

Definição 2.2.4. Sejam $x, yez \in X$. Uma relação de equivalência é dada por:

i) $x \sim x$;

ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

iii) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Considerando a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ uma questão se coloca. $\mathscr{M} = \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$? De fato o exemplo que exibiremos agora mostra que

$$\mathscr{M} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R}^n).$$

Isto é, existem conjuntos não mensuráveis em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2.2. (Um conjunto não mensurável em $\mathbb{R}$.) Tome o intervalo (0,1] com a relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Os ítens i) e ii) são claramente óbvios. Provemos iii). Se $x \sim y$ então $q = x - y \in \mathbb{Q}$. Se $y \sim z$, $p = y - z \in \mathbb{Q}$. Assim

$$x - z = x - y + y - z = q + p \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \sim z,$$

provando que $\sim$ é de fato uma relação de equivalência.

Usando o Axioma da Escolha seja S o conjunto formado pela escolha de um ponto em cada classe de equivalência para esta relação de equivalência.

Afirmação. O conjunto S não é Lebesgue-mensurável.

Se $x, y \in (0,1]$ definimos

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y & \text{se } x + y \leq 1 \\ x + y - 1 & \text{se } x + y > 1 \end{cases}.$$

Dado $A \in (0,1]$ definimos

$$A \oplus x =: \{a \oplus x : a \in A\}.$$

Lema 2.2. Se A é mensurável então para todo $x \in (0,1]$ $A \oplus x$ é mensurável e

$$m(A \oplus x) = m(A),$$

onde m denota como antes a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

A prova do Lema será omitida.

Passemos à prova da afirmação. Seja $r_1, r_2, \cdots$ uma enumeração dos racionais em $(0,1]$. Então valem:

i) se $i \neq j$ então $S \oplus r_i \bigcap S \oplus r_j = \varnothing$

ii) $(0,1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} S \oplus r_i$

Para provarmos i) suponhamos que $x \in S \oplus r_i \bigcap S \oplus r_j$ Então $x = s_i \oplus r_i = s_j \oplus r_j$ para algum $s_i, s_j \in S$. Isto implicaria que s_i e s_j diferem por um racional, e assim $s_i = s_j$ uma vez que S contém exatamente um representante de cada classe de equivalência. Mas, então, como $0 < r_i, r_j \leqslant 1$ deveríamos ter $r_i = r_j$, isto é $i = j$.

Para provarmos ii) seja $x \in (0,1]$. Então como x pertence a alguma classe de equivalência existe $s \in S$ tal que $x \sim s$. Segue que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x - s = q = r_i$ e portanto $x \in S \oplus r_i$. A outra inclusão é trivial.

Agora terminamos a prova da afirmação. Se S fosse mensurável, seja $c = m(S)$. Usando o Lema 2.2 teríamos:

$$1 = m((0,1]) = \sum_{i=1}^{\infty} m(S \oplus r_i) = c + c + \cdots$$

de modo que a soma no lado direito da igualdade é 0 ou ∞, o que é uma contradição em qualquer um dos casos. Segue que S não é Lebesgue-mensurável.

3 MEDIDA E DIMENSÃO DE HAUSDORFF

3.1 MEDIDA DE HAUSDORFF

Definição 3.1.1. Seja (X,d) um espaço métrico. O diâmetro de um subconjunto $E \subset X$ está definido por

$$|E| = \sup_{x,y \in E} d(x,y).$$

Definição 3.1.2. Seja (X,d) um espaço métrico. Dados $A,B \subseteq X$ definimos

$$d(A,B) = \inf_{x \in A y \in B} \{d(x,y)\}$$

que se denomina a distância entre os conjuntos A,B.

Definição 3.1.3. Dado $E \subset X$, uma ε-cobertura de E é uma coleção enumerável de conjuntos $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$(não necessariamente abertos) de diâmetro no máximo $\varepsilon > 0$,

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Dado $E \in X$, denotamos por $\mathscr{U}_{\varepsilon}(E)$ a família das ε-coberturas de E.

Definição 3.1.4. Seja (X,d) um espaço métrico. Fixe $\alpha > 0$ e seja $\varepsilon > 0$. Definimos $H_{\alpha}^{\varepsilon} : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ por

$$H_{\alpha}^{\varepsilon}(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} |A_j|^{\alpha} \ : \ (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathscr{U}_{\varepsilon}(E) \right\}$$

Se $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ então $\mathscr{U}_{\varepsilon_1}(E) \subseteq \mathscr{U}_{\varepsilon_2}(E)$ e portanto

$$H_{\alpha}^{\varepsilon_1}(E) \geqslant H_{\alpha}^{\varepsilon_2}(E).$$

Definição 3.1.5 (Medida de Hausdorff)**.** Definimos a aplicação de conjuntos

$$m_\alpha^* : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$$

por

$$m_\alpha^*(E) = \sup_{\varepsilon>0}\{H_\alpha^\varepsilon(E)\} = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\alpha^{(\varepsilon)}(E).$$

Lema 3.1. Para todo $\alpha > 0$, m_α^* é uma medida exterior métrica.

Demonstração: Para cada $\varepsilon > 0$, $H_\alpha^\varepsilon(\varnothing) = 0$ e portanto $m_\alpha^*(\varnothing) = 0$. Do mesmo modo, a monotonicidade de H_α^ε é herdada por m_α^*. Seja E a união de $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e suponha que $m_\alpha^*(E) < \infty$. Logo, existe $\delta > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ então

$$m_\alpha^*(E) - \delta < H_\alpha^\varepsilon(E) \leqslant m_\alpha^*(E).$$

Segue que

$$m_\alpha^*(E) < H_\alpha^\varepsilon(E) + \delta \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} H_\alpha^\varepsilon(E_j) + \delta \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} m_\alpha^*(E_j) + \delta.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário segue a desigualdade procurada. O caso $m_\alpha^*(E) = \infty$ é similar.

Vamos provar agora que a medida exterior de Hausdorff é métrica. Sejam $A, B \subseteq X$ com $d(A,B) > 0$. Queremos provar que:

$$m_\alpha^*(A\cup B) = m_\alpha^*(A) + m_\alpha^*(B).$$

A desigualdade $(\leqslant)$ segue da subaditividade da medida exterior. Para provarmos a desigualdade inversa, seja $0 < \varepsilon < d(A,B)/2$. Observe que se $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma ε-cobertura de $A\cup B$ então para todo $j \in \mathbb{N}$ vale:

$$\text{se } V_j \cap A \neq \varnothing \text{ então } V_j \cap B = \varnothing$$

e portanto

$$\left\{V_j \,:\, V_j \cap A \neq \varnothing\right\} \in \mathscr{U}_\varepsilon(A) \quad \text{ e } \left\{V_j \,:\, V_j \cap B \neq \varnothing\right\} \in \mathscr{U}_\varepsilon(B).$$

Segue que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |V_j|^\alpha = \sum_{V_j\cap A\neq\varnothing} |V_j|^\alpha + \sum_{V_j\cap B\neq\varnothing} |V_j|^\alpha \geqslant H_\alpha^\varepsilon(A) + H_\alpha^\varepsilon(B)$$

i.e

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |V_j|^\alpha \geqslant H_\alpha^\varepsilon(A) + H_\alpha^\varepsilon(B)$$

Tomando o ínfimo das ε-coberturas de $A \cup B$ obtém-se:

$$H_\alpha^\varepsilon(A \cup B) \geqslant H_\alpha^\varepsilon(A) + H_\alpha^\varepsilon(B).$$

Finalmente tomando limite quando $\varepsilon \to 0$ obtém-se

$$m_\alpha^*(A \cup B) \geqslant m_\alpha^*(A) + m_\alpha^*(B).$$

■

3.2 A DIMENSÃO DE HAUSDORFF

Para definirmos a dimensão de Hausdorff de um subconjunto de um espaço métrico precisamos do seguinte lema:

Lema 3.2. Seja $E \subset X$ onde (X,d) denota um espaço métrico. Então, para qualquer ε-cobertura de E e $\alpha > \beta$ tem-se:

$$H_\alpha^\varepsilon(E) \leqslant \varepsilon^{\alpha-\beta} H_\beta^\varepsilon(E).$$

Demonstração: Considere uma ε-cobertura $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de E. Então para cada A_i vale: $|A_i|^{\alpha-\beta} \leqslant \varepsilon^{\alpha-\beta}$ já que $|A_i| \leqslant \varepsilon$. Logo

$$|A_i|^\alpha = |A_i|^{\alpha-\beta}|A_i|^\beta \leq \varepsilon^{\alpha-\beta}|A_i|^\beta.$$

Somando em i obtém-se

$$\sum_i |A_i|^\alpha \leqslant \varepsilon^{\alpha-\beta} \sum_i |A_i|^\beta.$$

Tomando o ínfimo nas ε-coberturas tem-se:

$$H_\alpha^\varepsilon(E) \leqslant \varepsilon^{\alpha-\beta} H_\beta^\varepsilon(E).$$

■

Corolário 3.1. Seja $E \subset X$ onde (X,d) é um espaço métrico. Então valem:

i) Se $m_\beta^*(E) < +\infty$, e $\alpha > \beta$, então $m_\alpha^*(E) = 0$

ii) Se $m_\beta^*(E) > 0$, e $\alpha < \beta$, então $m_\alpha^*(E) = +\infty$.

Demonstração: Como $m_\beta^*(E) < +\infty$ seja $\varepsilon > 0$ tal que $H_\beta^\varepsilon(E) < \infty$. Então pelo Lema 3.2 temos que

$$H_\alpha^\varepsilon(E) \leqslant \varepsilon^{\alpha-\beta} H_\beta^\varepsilon(E).$$

Como $\alpha > \beta$ então $\alpha - \beta > 0$. Tomando $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$0 \leqslant m_\alpha^*(E) \leqslant 0 \cdot m_\beta^*(E) \Longrightarrow m_\alpha^*(E) = 0.$$

Agora com $\alpha < \beta$ pelo Lema 3.2 vale

$$\frac{1}{\varepsilon^{\beta-\alpha}} H_\beta^\varepsilon(E) \leqslant H_\alpha^\varepsilon(E).$$

Tomando limite quando $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$m^*_\beta(E) = +\infty$$

já que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^{\beta-\alpha}} = \infty$ e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H^\varepsilon_\beta(E) = m^*_\beta(E) > 0$.

■

Corolário 3.2. Dado $E \subset X$ (X,d) métrico, existe um único $0 \leqslant t \leqslant \infty$ tal que

$$m^*_s(E) = +\infty \text{ se } s < t$$
$$m^*_s(E) = 0 \text{ se } t < s$$

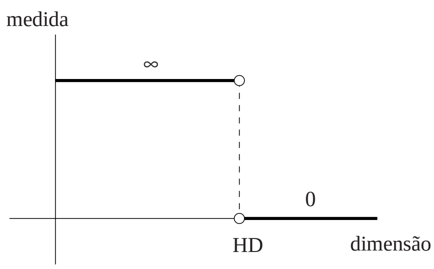

Figura 3.1: Medida X Dimensão

Definição 3.2.1. Seja $E \subset X$ onde (X,d) é um espaço métrico. Então definimos a dimensão de Hausdorff de E que denotamos $HD(E)$ por

$$HD(E) := \sup\{t : m^*_t(E) = \infty\} = \inf\{t : m^*_t(E) = 0\}.$$

O seguinte lema mostra que se um conjunto em $\mathbb{R}^n$ tem medida de Lebesgue positiva então a dimensão de Hausdorff deste conjunto é igual a n. Isto implica que a dimensão de Hausdorff de um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é não trivial, quando o conjunto tem medida zero.

Lema 3.3. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Então

$$m^*_t(E) = 0$$

para todo $t > n$.

Lema 3.4. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Se

$$m(E) > 0,$$

onde por m denotamos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, então

$$HD(E) = n.$$

Demonstração: Omitida

Para estimarmos a dimensão de Hausdorff dos conjuntos precisamos de dois lemas que dão estimativas superiores e inferiores para a mesma.

Lema 3.5. Seja $E \subset X$ onde (X,d) espaço métrico. Suponha que exista $t \geqslant 0$ tal que exista $c \geqslant 0$ de forma que para todo $\delta > 0$ exista uma δ-cobertura, com A_j os elementos da cobertura de E satisfazendo

$$\sum |A_j|^t \leqslant c.$$

Então

$$HD(E) \leqslant t.$$

Demonstração: Seja $\delta > 0$. Então existe $(A_j)_j$ δ-cobertura de E com:

$$\sum |A_j|^t \leqslant c$$

como

$$H_t^{\delta}(E) = \inf_{\delta-cobertura} \{\sum | A_j |^t\}$$

segue

$$H_t^{\delta}(E) \leqslant c$$

portanto

$$m_t^*(E) = \lim_{\delta \to 0} H_t^{\delta}(E) \leqslant c$$

i.e

$$m_t^*(E) \leqslant c$$

então

$$t \geqslant HD(E) = \inf\{t : m_t^*(E) < \infty\}$$

$\blacksquare$

Lema 3.6. Seja $E \subset Q$, onde Q é um subconjunto compacto de X. Suponha que exista uma medida de probabilidade boreleana em Q tal que:

i) $\mu(E) = 1$;

ii) Existe $C > 0$ e $R > 0$ tal que para qualquer bola B_δ de raio $\delta \leqslant R$, a medida

$$\mu(B) \leqslant C\delta^t$$

Então

$$HD(E) \geqslant t.$$

Demonstração: Seja $\delta \leqslant R$ e $(A_i)_i$ uma cobertura de E por bolas abertas de raio $r_i \leqslant \delta$. Então

$$1 = \mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} Cr_i^\delta = \frac{C}{2^t} \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^t = C' \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^t \tag{3.1}$$

onde $C' = \dfrac{C}{2^t}$. Segue que para qualquer δ-cobertura de bolas, vale:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^t \geqslant \frac{1}{C'}.$$

Logo, tomando o ínfimo nas coberturas obtemos

$$H_t^\delta(E) \geqslant \frac{1}{C'}.$$

Portanto, fazendo $\delta \to 0$ temos

$$m_t^*(E) \geqslant \frac{1}{C'}.$$

Segue que

$$HD(E) \geqslant t.$$

■

Como aplicação dos lemas acima vamos calcular a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor

3.3 O CONJUNTO DE CANTOR

Introduzido por Georg Cantor em 1883 o conjunto de Cantor "clássico"[1] é construido se retirando os terços médios abertos do intervalo [0,1] sucessivamente, ou seja, no primeiro passo se retira o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ deixando dois intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. A união dos intervalos denominamos K_1. No próximo passo retiramos os terços médios dos dois intervalos restantes, assim, K_2 será $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Continuando este procedimento até o infinito temos o conjunto de Cantor K_n que contém os pontos que não foram excluídos em nenhuma das iterações n. Assim sendo podemos "contar" o total retirado da seguinte forma: Como na primeira iteração retiramos um itervalo $\frac{2}{3}$, na segunda iteração dois intervalos ou $2.\frac{1}{9}$, na terceira $4.\frac{1}{27}$. note que podemos escrever a soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1$$

Assim, o comprimento do que foi retirado tem exatamente o mesmo do intervalo inicial. Este cálculo simples mostra que o conjunto de Cantor não pode conter nenhum intervalo de comprimento "não nulo". É fascinante o fato de ainda restar alguma coisa, no entanto, um olhar mais detalhado ao processo de construção revela que de fato o ato de se retirar os terços médios abertos deixa exatamente os extremos presentes. Assim sendo, remover o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ deixa exatamente os pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ no conjunto. Na próxima etapa, não serão mais retirados estes pontos nem qualquer dos extremos dos conjuntos subsequentes, revelando que de fato o conjunto de Cantor tem infinitos pontos[2].

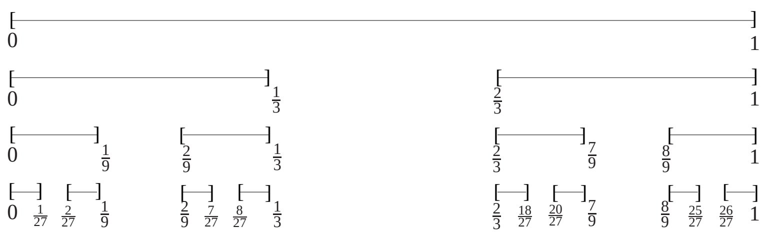

Figura 3.2: Conjuto Triádico Clássico de Cantor

Vamos agora ao cálculo mais formal da dimensão de Hausdorff para o conjunto de Cantor. No entanto precisamos antes de um candidato para testar nos lemas. A idéia aqui é se utilizar da própria construção do conjunto para ter uma estimativa para a dimensão. Como queremos que a medida seja finita na dimensão t, sabendo que a cada estágio da construção do conjunto temos

[1] também conhecido como conjunto triádico de Cantor

[2] Os extremos dos conjuntos retirados não são os únicos pontos do conjunto de Cantor. De fato os pontos do conjunto de Cantor são exatamente os extremos dos conjuntos retirados mais todos os pontos de acumulação. Outro ponto interessante é que todos os pontos do intervalo [0,1] que quando escritos na base 3 não contém o algarismo 1 são exatamente os pontos do conjunto de Cantor.

2^n intervalos de medida 3^{-n} e em cima desta medida que queremos encontrar um expoente que controla o crescimentos das somas dos diâmetros das coberturas, escrevemos:

$$1 = 2^n . \left(\frac{1}{3^n}\right)^t .$$

Resolvendo para t, obtemos $\dfrac{\log 2}{\log 3}$

Vamos agora testar este valor nos dois lemas:

Lema 3.7. Seja K o conjunto triádico de Cantor no intervalo $[0,1]$. Então

$$HD(K) \leqslant \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Demonstração: Pelo lema 3.5 seja $t = \frac{\log 2}{\log 3}$. Então tomando $c = 1$. Seja $\delta > 0$. Tome $n \geqslant 1$ tal que

$$\frac{1}{3^n} < \delta$$

e considere a cobertura $(I_j)_j$ dos intervalos da construção do conjunto de Cantor na etapa n. Observe que existem 2^n intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Então esta cobertura é uma δ-cobertura de K tal que

$$\begin{aligned} \sum |I_j|^t &= \sum \left|\frac{1}{3^n}\right|^{\frac{\log 2}{\log 3}} \\ &= \frac{2^n}{(3^n)^{\frac{\log 2}{\log 3}}} \leqslant 1 \end{aligned}$$

■

Lema 3.8. Seja K o conjunto triádico de Cantor no intervalo $[0,1]$. Então

$$HD(K) \geqslant \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Demonstração: Considere os intervalos retirados e os que restam na construção do conjunto de Cantor. Vamos definir uma medida de probabilidade sobre estas intervalos. Todo intervalo retirado tem medida zero na medida de probabilidade e os intervalos que restam na estapa n-ésima têm medida $\frac{1}{2^n}$. Usando o teorema 2.1 podemos provar que existe uma medida de probabilidade que denotamos por μ, sobre os boreleanos de $[0,1]$, que dá medida 1 no conjunto de Cantor. Agora vamos aplicar o lema 3.6. Seja então um intervalo de comprimento δ,

I_δ. Queremos mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ vale:

$$\mu(I_\delta) \leqslant C \mid I_\delta \mid^{\frac{\log 2}{\log 3}} .$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{3^{k+1}} \leqslant \delta < \frac{1}{3^k}.$$

O seguinte lema será provado após termos finalizado esta prova.

Lema 3.9. Sejam $\{J_i\}_{1\leq i\leq 2^n}$ os intervalos que restam na etapa n da construção do conjuto de Cantor. Então, se $n > k$ vale

$$\#\{1 \leqslant i \leqslant 2^n : I_\delta \cap J_i \neq \varnothing\} \leq 2^{n-k}$$

Usando o lema acima temos

$$\begin{aligned}\mu(I_\delta) = &\sum_{i=1}^{2^n} \mu(I_\delta \cap J_i) \leqslant 2^{n-k} \cdot \frac{1}{2^n} \\ = &\frac{1}{2^k} \frac{\delta^{\frac{\log 2}{\log 3}}}{\delta^{\frac{\log 2}{\log 3}}} = \delta^{\frac{\log 2}{\log 3}} \cdot \frac{1}{2^k \delta^{\frac{\log 2}{\log 3}}} \leqslant C\delta^{\frac{\log 2}{\log 3}}.\end{aligned}$$

onde $C > 0$ deve satisfazer: para todo k

$$\frac{1}{2^k \delta^{\frac{\log 2}{\log 3}}} \leqslant C.$$

Mas como $3^k < \frac{1}{\delta} \leqslant 3^{k+1}$ temos

$$\frac{1}{2^k \delta^{\frac{\log 2}{\log 3}}} \leqslant \frac{1}{2^k} \left(3^{k+1}\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leqslant C.$$

Logo para termos a desigualdade acima devemos ter

$$\left(3^{k+1}\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leqslant C 2^k.$$

tomando logaritmos dos dois lados da desigualdade obtemos

$$\begin{aligned}(k+1)\frac{\log 2}{\log 3} \cdot \log 3 \leq &\log C + k \log 2 \\ k \log 2 + \log 2 \leqslant &k \log 2 + \log C \Longrightarrow \log 2 \leqslant \log C\end{aligned}$$

o que pode ser satisfeito fazendo $C \geq 2$. Logo se tomamos $C \geqslant 2$ tem-se

$$\mu(I_\delta) \leqslant C\delta^{\frac{\log 2}{\log 3}}$$

como queríamos demonstrar. Segue então do lema 3.6 que

$$HD(K) \geqslant \frac{\log 2}{\log 3}.$$

3.4 PROPRIEDADES DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF

3.4.1 PROPRIEDADES DA DIMENSÃO DE ESPAÇOS VETORIAIS

Como os espaços vetorias são a noção usual de dimensão, enunciaremos aqui as propriedades da dimensão de espaços vetoriais apenas como ponto de comparação posterior com as propriedades da dimensão de Hausdorff. Note que a dimensão vetorial pode ser vista como um caso particular da dimensão de Hausdorff quando esta assume valor inteiro.

Proposição 3.1. Sejam A, B e C subespaços vetoriais de dimensão finita do espaço vetorial X. Então a dimensão do espaço vetorial, escrita como dim(.), é uma função de valor inteiro nos subespaços que satisfaz:

i) $\dim(A) \geqslant 0$ **(positividade)**;

ii) se $A \subset B$ então $\dim(A) \leqslant \dim(B)$ **(monotonicidade)**;

iii) $\dim(A+B)+\dim(A\cap B) = \dim(A)+\dim(B)$ **(união e intersecção)**;

iv) se $A \subseteq B$ então $\dim(A/B) = \dim(A)-\dim(B)$ **(regra dos quocientes)**;

v) se $A \subseteq B$ então para todo subespaço C, $\dim(B+C)-\dim(A+C) \leqslant \dim(B)-\dim(A)$ **(contractividade)**;

vi) se X e Y são espaços vetorias, então para todo $A \subseteq X$ e todo $B \subseteq Y$, $A\times B = (x,y) : x \in A, y \in B$ é um subespaço de $X \times Y$ e $\dim(A\times B) = \dim(A)+\dim(B)$ **(regra dos produtos)**.

3.4.2 PROPRIEDADES DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF

Proposição 3.2. Seja (X,d) um espaço métrico e $A,B \subseteq X$. Então:

i) para todo $A \subset X$, $HD(A) \geqslant 0$ **(positividade)**;

ii) se $A \subset B$ então $HD(A) \leqslant HD(B)$ **(monotonicidade)**;

iii) $HD(A\cup B) = \max\{HD(A), HD(B)\}$ **(uniões)**;

iv) se $A\cap B \neq \varnothing$, então $HD(A\cap B) \leqslant \min\{HD(A), HD(B)\}$ **(intersecções)**;

v) se $A \subset B$, então para todo fechado C,

$$HD(B\cup C) - HD(A\cup C) \leqslant HD(B) - HD(A) \textbf{(contractividade)}$$

vi) $HD(A \times B) \leqslant HD(A) + HD(B)$ **(regra dos produtos)**;

vii) **Continuidade por baixo:** Suponha $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \ldots \subset X$ e que exista um M tal que $HD(E_n) \leqslant M$ para todo $n > 0$. Então a união $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ tem dimensão de Hausdorff

$$HD(E) = \lim_{n \to \infty} HD(E_n)$$

viii) **Continuidade por cima:** Se $X \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots$, então a intersecção

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

satisfaz:

$$HD(F) \leqslant \lim_{n \to \infty} HD(E_n)$$

Demonstração:

i) Trivial.

ii) Seja $t = HD(B) + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$. Então $m^t(B) = 0$ de forma que certamente existe uma δ-cobertura de bolas B_j de B e assim de A com $\sum |B_j|^t \leqslant 1$. Pelo lema 3.2, isso implica que $HD(A) \leqslant t$. fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $HD(A) \leqslant HD(B)$.

iii) Note que como $A, B \subset A \cup B$, temos:

$$\max\{HD(A), HD(B)\} \leqslant HD(A \cup B)$$

Suponha agora, sem perda de generalidade que $HD(A) \geqslant HD(B)$. Precisamos assim mostrar que $HD(A \cup B) \leqslant HD(A)$. Seja $t = HD(A) + \varepsilon$. Então $HD(B) \leqslant HD(A) < t$ de tal forma que $m^t(A) = m^t(B) = 0$. Assim existem δ-coberturas de A, B respectivamente tal que:

$$\sum_j |U_j|^t \leqslant \frac{1}{2}, \sum_k |V_k|^t \leqslant \frac{1}{2}$$

Agora defina $W_{2n+1} = U_n$ e $W_{2n+2} = V_n$ para $n \geq 0$. Isto nos dá uma δ-cobertura de $A \cup B$ com $\sum_n |W_n|^t \leqslant 1$, então pelo lema 3.3, $HD(A \cup B) \leqslant t$. fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $HD(A \cup B) \leqslant HD(A)$

iv) É uma consequencia direta da segunda propriedade. Em geral não se pode dizer mais do que isso tendo em vista a natureza de $A \cap B$ não se pode prever como A, B estão dispostos em X.

v) Observe que $HD(A) \leqslant HD(B)$ já que $A \subset B$. Considere agora 3 casos:

(a) $HD(A) \leqslant HD(B) \leqslant HD(C)$: então $HD(B \cup C) - HD(A \cup C) = HD(C) - HD(C) = 0$ que certamente é menor ou igual que $HD(B) - HD(A)$ já que $HD(A) \leqslant HD(B)$.

(b) $HD(A) \leqslant HD(C) \leqslant HD(B)$ então $HD(B \cup C) - HD(A \cup C) = HD(B) - HD(C)$ que é certamente menor ou igual que $HD(B) - HD(A)$ já que $HD(A) \leqslant HD(C)$

(c) $HD(C) \leqslant HD(A) \leqslant HD(B)$: então $HD(B \cup C) - HD(A \cup C) = HD(B) - HD(A)$ que certamente é menor ou igual que ele mesmo.

vi) Sejam X, Y espaços métricos, e

$$t = HD(A)$$

$$s = HD(B)$$

onde $A \times B \subset X \times Y$. Vamos considerar sobre $X \times Y$ a métrica do supremo, isto é

$$d((a,b),(a',b')) = \sup\{d_x(a,a'), d_y(b,b')\}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Então segue da definição de dimensão de Hausdorff que

$$m^*_{t+\frac{\varepsilon}{2}}(A) = 0$$

$$m^*_{s+\frac{\varepsilon}{2}}(B) = 0$$

Logo, existem $\delta > 0$ e uma δ-cobertura $(A_i)_i$, $(B_j)_j$ de A e B respectivamente tal que

$$\sum_i |A_i|^{t+\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant 1$$

$$\sum_j |B_j|^{s+\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant 1$$

Então, $(A_i \times B_j)_{i,j}$ é uma δ -cobertura de $A \times B$. De fato $|A_i \times B_j| \leqslant \sup\{|A_i|, |B_j|\} \leqslant \delta$. Observe que se $|A_i \times B_j| = |B_j|$ então estimamos

$$\begin{aligned} |A_i \times B_j|^{t+s+\varepsilon} &= |A_i \times B_j|^{t+\frac{\varepsilon}{2}} |A_i \times B_j|^{s+\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\leqslant \delta^{t+\frac{\varepsilon}{2}} |B_j|^{s+\frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

Se $|A_i \times B_j| = |A_i|$ então

$$|A_i \times B_j|^{t+s+\varepsilon} \leqslant |A_i|^{t+\frac{\varepsilon}{2}}.\delta^{s+\frac{\varepsilon}{2}}$$

Seja $c = \sup\{\delta^{t+\frac{ep}{2}}, \delta^{s+\frac{\varepsilon}{2}}\}$ logo

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}|A_i\times B_j|^{t+s+\varepsilon} &\leqslant \sum_i |A_i|^{t+\frac{\varepsilon}{2}}.\delta^{s+\frac{\varepsilon}{2}}\sum|B_j|^{s+\frac{\varepsilon}{2}}.\delta^{t+\frac{\varepsilon}{2}}\\ &\leqslant c^2\sum_i|A_i|^{t+\frac{\varepsilon}{2}}\sum_j|B_j|^{s+\frac{\varepsilon}{2}}\\ &\leqslant c^2.1.1=c^2\end{aligned}$$

isto é $m^*_{t+s+\varepsilon}(A\times B)\leqslant c^2 \Rightarrow HD(A\times B)\leqslant t+s+\varepsilon$. Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, segue que $HD(A\times B)\leqslant t+s$ i.e

$$HD(A\times B)\leqslant HD(A)+HD(B).$$

vii) Note que $HD(E_n)$ são crescentes e limitadas superiormente, portanto convergem para algum $t\geqslant 0$. Agora tome $\varepsilon>0$. Vamos mostrar que $HD(E)\leq t+\varepsilon$. Para todo n, $HD(E_n)<t+\varepsilon$ então $m^{t+\varepsilon}(E_n)=0$, assim $m^{t+\varepsilon}(E_n)=0$ então $HD(E)\leqslant t+\varepsilon$. Da mesma forma, para todo n, $t-\varepsilon\leqslant HD(E_n)\leqslant HD(E)$ por monotonicidade. Então $t-\varepsilon\leqslant HD(E)\leq t+\varepsilon$. Fazendo $\varepsilon\to 0$ temos $HD(E)=\lim\limits_{n\to\infty}HD(E_n)$.

viii) Primeiramente note que a $HD(E_n)$ está decrescendo não negativamente, assim converge para algum limite, digamos $t\geqslant 0$. Fixe $\varepsilon>0$ então eventualmente $HD(E)\leqslant HD(E_n)<t+\varepsilon$. fazendo $\varepsilon\to 0$ temos $HD(E)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}HD(E_n)$.

■

3.4.3 INVARIÂNCIA DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF POR APLICAÇÕES LIPSCHITZ

Definição 3.4.1. Sejam (X,d) e (X',d') espaços métricos. Uma *aplicação* $\varphi: X\to X'$ é chamada aplicação Lipshitz (com constante Lipshitz β) se para todo $x,y\in X$,

$$d'(\varphi(x),\varphi(y))\leq\beta d(x,y).$$

Se $\varphi: X\to X'$ é inversível e se φ e φ^{-1} são ambas Lipshitz, então φ é chamado de Lipeomorfismo. Equivalentemente, φ é um Lipeomorfismo se existem α,β constantes positivas tal que para todo $x,y\in X$

$$\alpha.d(x,y)\leq d'(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant\beta.d(x,y)$$

Teorema 3.1. ***(Invariância da dimensão de Hausdorff por aplicações lipschitz)*** *Sejam (X,d) e (X',d') espaços métricos e $\varphi: X\to Y$ um lipeomorfismo. Então para todo $E\subset X$,*

$$HD(\varphi(E))=HD(E).$$

Demonstração: Claramente, isto é análogo ao fato de que a dimensão vetorial é invariante em isomorfismos lineares. Sem perda de generalidade, assuma que exista α e $\beta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$,

$$\alpha \cdot d(x,y) \leq d'(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \beta \cdot d(x,y)$$

Então, para todo *conjunto teste*, digamos $A \subset X$ temos $|\varphi(A)| \leqslant \beta|A|$. Fixe $\varepsilon > 0$ e faça $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ser uma δ-cobertura de E tal que $\sum |A_j|^t < H^t_\delta(E) + \varepsilon$. Então $\bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j)$ é uma $(\beta\delta)$-cobertura de $\varphi(E)$, então

$$\begin{aligned} H^t_{\beta\delta}(\varphi(E)) &\leqslant \sum |\varphi(A_j)|^t \\ &\leqslant \beta^t \sum |A_j|^t \\ &\leqslant \beta^t (H^t_\delta)(E) + \varepsilon \end{aligned}$$

isto vale para todo $\varepsilon > 0$ então

$$H^t_{\beta\delta}(\varphi E) \leqslant \beta^t H^t_\delta(E) \tag{3.2}$$

Da mesma forma, para todo *conjunto teste* $B \subset X'$ temos $\alpha.|\varphi^{-1}(B)| \leqslant |B|$. Fixe $\varepsilon > 0$ e faça $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ uma δ-cobertura de $\varphi(E)$ tal que $\sum |B_j|^t \leqslant H^t_\delta(\varphi(E)) + \varepsilon$. Então $\bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi^{-1}(B_j)$ é uma $(\frac{\delta}{\alpha})$-cobertura de E, assim

$$\begin{aligned} H^t_{\delta/\alpha}(E) &\leqslant \sum |\varphi^{-1}(B_j)|^t \\ &\leqslant \alpha^{-t} \sum |B_j|^t \\ &\leqslant \alpha^{-t} (H^t_\delta(\varphi(E)) + \varepsilon) \end{aligned}$$

como isto vale para todo $\varepsilon > 0$, entao

$$\alpha^t H^t_{\delta/\alpha}(E) \leqslant H^t_\delta(\varphi(E)) \tag{3.3}$$

Fazendo δ tender a zero nas equações 3.2 e 3.3, obtemos a seguinte e simples estimativa para a medida na t-dimensão de $\varphi(E)$:

$$\alpha^t m^t(E) \leqslant m^t(\varphi(E)) \leqslant \beta^t m^t(E)$$

Pelo definição de dimensão de hausdorff isto implica que a $HD(\varphi(E)) = HD(E)$.

∎

3.5 DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE CONJUNTOS AUTO-SIMILARES (SELF-SIMILAR SETS)

Neste capítulo descrevemos um procedimento que permite calcular a dimensão de Hausdorff de conjuntos auto-similares os quais englobam a maioria dos exemplos apresentados até aqui. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Como antes, seja $\mathscr{K}(D)$ a família dos subconjuntos compactos de D.

Definição 3.5.1. Seja a família de contrações $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ definidas em D, a saber, $f_i : D \to D \quad i = 1..r$. Definimos a função

$$F : \mathscr{K}(D) \to \mathscr{K}(D)$$
$$F(A) = \bigcup_{i=1}^{r} (f_i(A))$$

onde $f_i(A) = \{y : \exists x \in D, f_i(x) = y\}$ denota a imagem do compacto A por f_i.

Definição 3.5.2. Seja $\mathbb{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ uma família de contrações definidas em D. Dizemos que subconjunto $K \in \mathscr{K}(D)$ é invariante por $\mathbb{F}$ se

$$K = \bigcup_{i=1}^{r} f_i(K),$$

isto é, quando K é um ponto fixo de F,

$$F(K) = K.$$

Para demonstrarmos a existência de subconjuntos invariantes por contrações vamos mostrar que $F : \mathscr{K}(D) \to \mathscr{K}(D)$ é uma contração na métrica de Hausdorff e aplicando o teorema do ponto fixo de Banach obter um ponto fixo (único) para F. Este ponto fixo é o subconjunto invariante procurado. Este é o conteúdo do próximo lema.

Lema 3.10. Sejam $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ uma família de contrações $f_i : D \to D \quad i = 1..r$ e seja a função $F : \mathscr{K}(D) \to \mathscr{K}(D)$ definida acima. Então F é uma contração na métrica de Hausdorff.

Demonstração: Para cada f_i existe $c_i < 1$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq c_i |x - y| \quad \forall x, y \in D.$$

Seja $c := \max\{c_1, c_2, \dots, c_r\} < 1$. É suficiente mostrar que

$$F(B) \subseteq F(A)_{cd(A,B)},$$
$$F(A) \subseteq F(B)_{cd(A,B)}$$

para todo $A, B \in \mathscr{K}(D)$, já que $d(F(A), F(B))$ é o mínimo sobre todos $\delta > 0$ tais que $F(A) \subseteq F(B)_\delta, \quad F(B) \subseteq F(A)_\delta$. Sejam então $A, B \in \mathscr{K}(D)$. Seja $z \in \bigcup_{i=1}^{r} (f_i(B))$. Então existe $x \in B$ e $1 \leqslant i \leqslant r$ tais que $z = f_i(x)$. Considere qualquer $\varepsilon > d(A,B)$. Então $x \in A_\varepsilon$ pois $\varepsilon > d(A,B)$. Além disto $B \subseteq A_\varepsilon$. Logo, existe $y \in A$ tal que $|x - y| < \varepsilon$. Logo

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq c_i |x - y| \leq c|x - y| < c\varepsilon,$$

o que mostra que

$$z = f_i(x) \in f_i(A)_{c\varepsilon} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} f_i(A)_{c\varepsilon}.$$

Portanto $F(B) \subseteq F(A)_{c\varepsilon}$. Tomando $\varepsilon \searrow d(A,B)$ obtemos

$$F(B) \subseteq F(A)_{cd(A,B)},$$

provando a primeira inclusão. A segunda inclusão segue repetindo o argumento e trocando B por A.

$\blacksquare$

Vejamos como alguns conjuntos conhecidos podem ser obtidos desta forma.

Exemplo 3.5.1. Conjunto de Cantor triádico $K \subset [0,1]$ Considere as seguintes funções

$$f_1 : [0,1] \to [0,1] \qquad\qquad f_2 : [0,1] \to [0,1]$$
$$f_1(x) = \frac{x}{3} \qquad\qquad f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Então é fácil ver que

$$K = f_1(K) \cup f_2(K).$$

Exemplo 3.5.2. Produto cartesiano de dois conjuntos de Cantor: $K \times K$. Considere as seguintes funções $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ definidas por

$$f_1(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right),$$

$$f_2(x,y) = \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right),$$

$$f_3(x,y) = \left(\frac{2}{3}+\frac{x}{3}, \frac{2}{3}+\frac{y}{3}\right)$$

,

$$f_4(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{2}{3}+\frac{y}{3}\right).$$

Então é fácil ver que

$$K = f_1(K\times K)\cup f_2(K\times K)\cup f_3(K\times K)\cup f_4(K\times K).$$

O seguinte lema fornece outra maneira de se obter o subconjunto invariante de uma família de contrações.

Lema 3.11. Seja $\mathbb{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ uma família de contrações definidas em D. Então, se $S \in \mathscr{K}(D)$ satisfaz

$$f_i(S) \subseteq S \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant r,$$

$$K = \bigcap_{i=1}^{\infty} F^k(S)$$

é o subconjunto invariante pela família $\mathbb{F}$.

Demonstração: Seja então $S \in \mathscr{K}(D)$ um subconjunto tal que

$$f_i(S) \subseteq S \quad \forall 1 \leq i \leq r.$$

Segue por indução que

$$F^k(S) \subseteq F^{k-1}(S)\ \forall k \geq 2,$$

e assim a seqüência $\{F^k(S)\}$ é uma seqüência decrescente de compactos não-vazios, e portanto

$$K = \bigcap_{i=1}^{\infty} F^k(S)$$

é um conjunto compacto não-vazio de D. Além disso como $^F(S) \subseteq S$ segue que

$$F(K) = F\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F^k(S)\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F^{k+1}(S) = \bigcap_{i=2}^{\infty} F^k(S).$$

Mas como $F(S) \subset S$ segue que

$$F(K) = \bigcap_{i=2}^{\infty} F^k(S) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F^k(S) = K,$$

provando que K é um conjunto invariante pela família de contrações $\mathbb{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$.

■

O próximo teorema fornece uma fórmula para se calcular a dimensão de Hausdorff de conjuntos auto-similares. No entanto seu enunciado requer uma condição técnica que enunciamos agora.

Definição 3.5.3. Dizemos que uma família de contrações $\mathbb{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ definidas em D satisfaz a *condição aberta* se existe um conjunto aberto limitado não vazio V tal que

i) $f_i(V) \bigcap f_j(V) = \varnothing \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant r$

ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{r} f_i(V) \subseteq V.$

Nós ainda precisamos de mais uma definição:

Definição 3.5.4. Dizemos que uma contração $f : D \to D$ é uma similaridade se

$$|f(x) - f(y)| = c|x - y| \quad \forall x, y \in D,$$

onde $c < 1$ é a constante de contração da aplicação.

Teorema 3.2. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado. Suponha que $K \subset D$ seja o subconjunto invariante da família de contrações $\mathbb{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ definidas em D, isto é,*

$$K = \bigcup_{i=1}^{r} f_i(K). \tag{3.4}$$

Assuma que as contrações são todas similaridades e que satisfazem a condição aberta. Então a dimensão de Hausdorff de K é

$$HD(K) = s$$

onde s é a única solução de

$$\sum_{i=1}^{r} c_i^s = 1. \tag{3.5}$$

Além disso, para este valor de s

$$0 < HD(K) < +\infty.$$

Para provarmos o teorema necessitamos de um lema técnico. Seguimos aqui a apresentação em Fractal Geometry, FALCONER 1990.

Lema 3.12. Seja $\{V_i\}_i$ uma família de abertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que cada V_i contém uma bola de raio $a_1 r$ e está contido em uma bola de raio $a_2 r$. Então, qualquer bola B de raio r, intercepta no máximo

$$(1+2a_2)^n a_1^{-n}$$

dos $\overline{V_i}$.

Demonstração: Se $\overline{V_i}$ intercepta B, então $\overline{V_i}$ está contido na bola concêntrica a B de raio $(1+2a_2)r$. Suponha que q dos conjuntos $\overline{V_i}$ interceptam B. Então, somando os volumes das bolas correspondentes de raio a_1r, segue que

$$q(a_1r)^n < (1+2a_2)^n r^n$$

o que dá o limitante superior de q do lema.

■

Estamos prontos para fazer a prova do teorema 3.2

Demonstração: Teorema 3.2 Seja s a solução de

$$\sum_{i=1}^{r} c_i^s = 1. \tag{3.6}$$

Para cada conjunto $A \subset D$ denote por

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_k}(A).$$

Denotemos por J_k o conjunto de todas as seqüências $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ com $1 \leq i_j \leq r$. usando-se sucessivamente a equação 3.4 obtém-se que

$$K = \bigcup_{J_k} K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}.$$

Agora verificamos que esta cobertura de K fornece um estimativa superior para a dimensão de Hausdorff de K. Como as aplicações F_i são similaridades de razão c_i, temos que

$$\sum_{J_k} |K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s |K|^s = \left(\sum_{i_1} c_{i_1}^s\right) \cdots \left(\sum_{i_k} c_{i_k}^s\right) |K|^s = |K|^s \tag{3.7}$$

onde usamos 3.6 na última igualdade. Para qualquer $\delta > 0$, como $\max_i c_i < 1$, podemos escolher k tal que $|K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}| \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta$, e assim temos

$$m_\delta^s(K) \leq |K|^s \Rightarrow m^s(K) \leq |K|^s$$

implicando que

$$HD(K) \leq s.$$

Vamos agora estimar a dimensão de Hausdorff por baixo. Seja o conjunto

$$I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq r\},$$

e seja

$$I_{i_1,i_2,\dots,i_k} = \{(i_1, i_2, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq r\}$$

o cilindro definido pelas seqüências infinitas cujos os k primeiros elementos são $i_1, i_2, \dots, i_k$. Definimos uma medida sobre os cilindros via:

$$\mu(I_{i_1,i_2,\dots,i_k}) = (c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s.$$

Como $(c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^{r} (c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdots c_{i_k} \cdot c_i)^s$, isto é, $\mu(I_{i_1,i_2,\dots,i_k}) = \sum_{i=1}^{r} (i_1 \cdot i_2 \cdots i_k \cdot i)^s$ segue que μ é uma medida de probabilidade sobre o shift $\sum(r) = I$. Pelo teorema 2.1 esta medida se estende a uma medida sobre os boreleanos de I. Definimos finalmente uma medida sobre K via:

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu(\{(i_1, i_2, \cdots) : x_{i_1,i_2,\dots} \in A\}).$$

Observe que

$$x_{i_1,i_2,\dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{i_1,i_2,\dots}.$$

Vamos provar que $\widetilde{\mu}$ satisfaz as hipóteses do lema 3.6. Seja V o conjunto aberto limitado da definição 3.5.3. Como

$$\overline{V} \supset F(\overline{V}) = \bigcup_{i=1}^{r} f_i(\overline{V})$$

a sequência decrescente de iteradas $F^k(\overline{V})$ converge para K. Em particular $\overline{V} \supset K$ e

$$\overline{V}_{i_1,i_2,\dots,i_k} \supset K_{i_1,i_2,\dots,i_k}$$

para cada sequência finita $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$. Seja B qualquer bola de raio $r < 1$. Vamos estimar $\widetilde{\mu}(B)$ usando os conjuntos $V_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ com diâmetros comparáveis ao de B e cujo fecho intercepta $K \bigcap B$.

Seja Q o conjunto das sequências finitas obtidas pelo corte das sequências infintas $(i_1, i_2, \dots) \in I$ depois do primeiro termo i_k para o qual vale

$$\left(\min_i c_i\right) r \leq c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r. \tag{3.8}$$

Então, para toda sequência infinita $(i_1, i_2, \dots) \in I$ existe exatamente um valor k tal que $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in Q$. Como $V_1, \dots, V_r$ são disjuntos, também são $V_{i_1,\dots,i_k,1}, \dots V_{i_1,\dots,i_k,r}$ para cada

$(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Segue que a coleção de abertos

$$\{V_{i_1,i_2,\ldots,i_k} : (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in Q\}$$

é disjunta. Semelhantemente

$$K \subset \bigcup_Q K_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \subset \bigcup_Q \overline{V}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}.$$

Escolhemos a_1, a_2 tais que V contém uma bola de raio a_1 e está contido em uma bola de raio a_2. Então, para $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in Q$, o conjunto $V_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ contém uma bola de raio $c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} a_1$ e portanto, uma de raio $(\min_i c_i) a_1 r$, e está contido numa bola de raio $c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} a_2$ e portanto numa bola de raio $a_2 r$. Denotemos por Q_1 as sequências $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in Q$ tais que B intercepta $\overline{V}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Pelo Lema 3.12 existe pelo menos $q = (1+2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ sequências em Q_1 Assim,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(B) = \widetilde{\mu}(K \cap B) \leqslant & \mu\left(\{(i_1, i_2, \ldots) : x_{i_1,i_2,\ldots} \in K \cap B\}\right) \\ \leqslant & \mu\left(\left\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\right\}\right)\end{aligned}$$

uma vez que, se $x_{i_1,i_2,\ldots} \in K \cap B \subset \cup_{Q_1} \overline{V}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, então existe um inteiro k tal que $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in Q$. Assim,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(B) \leq & \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) \\ = & \sum_{Q_1} (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q\end{aligned}$$

onde usamos a equação 3.8. Como qualquer conjunto U está contido em uma bola de raio $|U|$, temos que

$$\widetilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$$

e portanto o lema 3.6 garante que

$$m_s^*(K) \geq q^{-1} > 0 \Longrightarrow HD(K) = s.$$

■

3.6 CÁLCULO DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF PARA CONJUNTOS AUTO-SIMILARES

Voltando ao conjunto de Cantor, sabendo que a constante de contração é $c = \frac{1}{3}$, vamos usar a equação 3.6 para mostrar o valor de $HD(K)$. Como $K = f_1(K) \cup f_2(K)$ ou seja, o conjunto de Cantor triádico tem 2 funções geradoras temos então a soma

$$\sum_{i=1}^{2} c^s = 1$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{3}^s = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

Resolvendo para s temos

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Assim, pelo teorema 3.2

$$HD(K) = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Vamos agora tratar a curva de Koch K como um conjunto auto-similar.

Exemplo 3.6.1. Koch snowflake obtida como invariante maximal de auto-similaridades. Definimos primeiro a rotação anti-horária de ângulo θ:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Seja a contração :

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Finalmente a translação:

$$T_{(a,b)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Agora estamos prontos para definir as similaridades que definem a curva de Koch como um invariante maximal.

$$
\begin{aligned}
f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\\
f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \left(T_{(2/3,0)}\circ F\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2/3\\0\end{pmatrix},\\
f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \left(R_{\pi/3}\circ F\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T_{(1/3,0)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x/3\\y/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/3\\0\end{pmatrix},\\
f_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \left(R_{-\pi/3}\circ T_{(-1/3,0)}\circ F\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x/3-1/3\\y/3\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

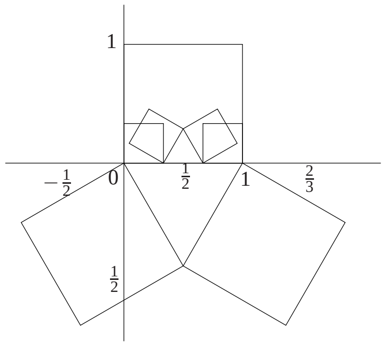

Figura 3.3: Função de von Koch

Assim, novamente a constante de contração $c = \dfrac{1}{3}$ porém temos aqui 4 funções geradoras fazendo a equação 3.6 ficar da forma

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Novamente, resolvendo para s temos

$$s = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

Assim, pelo teorema 3.2

$$HD(K) = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

CONCLUSÃO

No presente trabalho procuramos contruir os fundamentos matemáticas para mostrar o que é a dimensão de Hausdorff e ainda apresentar mais precisamente seu cálculo. Depois de conceituada, duas técnicas podem ser utilizadas: a definição formal com os dois lemas que *espremem* a dimensão e a definição que se utiliza do fato de que a maioria dos conjuntos que apresentam problemas ao definir uma medida em uma certa dimensão serem auto-similares na construção.

Para tal foram necessários vários conceitos de análise, topologia e teoria da medida, que não fazem parte do currículo da licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Santa Catarina mas que para este acadêmico se tornaram um assunto de grande interesse tanto como curiosidade quanto como uma introdução para um estudo maior em um possível curso de mestrado.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. *A History of Mathematics*, USA, John Wiley and Sons, INC: 1968.

[2] COHN, Donald L. *Measure Theory* USA, Birkhauser: 1996.

[3] FALCONER, Kenneth J. *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*. USA, John Wiley and Sons: 1990.

[4] MANÉ, Ricardo. *Introdução à Teoria Ergodica*. Brasil, Instituto de Matemática Pura e Aplicada: 1983.

[5] OXTOBY, John C. *Measure and Category* USA, Springer-Verlag: 1971.