MONIQUE MÜLLER LOPES ROCHA

Introdução às Álgebras de Clifford

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Bacharelado
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis
Novembro 2007

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n°51/CCM/07.

Profª. Ms. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva
Orientador

Profª. Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger

Agradecimentos

Ao professor Ivan Pontual Costa e Silva, que em muitos momentos foi mais que um orientador, mostrou-se um amigo com seus conselhos, meus agradecimentos e acima de tudo minha admiração.

Aos professores Luiz Augusto Saeger e Virgínia Silva Rodrigues pelas sugestões e correções feitas a este trabalho.

Aos professores Virgínia Silva Rodrigues, Oscar Ricardo Janesch e Ruy Exel Filho por serem referências ao longo do meu curso de graduação.

Ao professor José Luiz Rosas Pinho, pela amizade, pelo carinho e por nos alegrar com seus inúmeros trocadilhos.

Aos colegas de turma. Aos amigos Cinthia, Marcos (Marquito) e Caroline (Carol), pelos bons e maus momentos que passamos juntos e pela nossa amizade.

À minha mãe que sempre foi uma grande amiga e sempre me apoiou. À minha avó, que foi uma segunda mãe, sempre me apoiando nos estudos. Ao meu tio Marcos (*in memoriam*) pela sua amizade e seu carinho (Saudades!).

Ao meu esposo, Marcos, pelo companheirismo, pela compreensão e dedicação.

Sumário

Introdução

Em 1878 William Kingdom Clifford introduziu as Álgebras de Clifford, que podiam ser pensadas como uma possível generalização dos números complexos e dos quatérnios. Uma álgebra de Clifford é uma álgebra unital e associativa associada $\mathcal{C}\ell(V, q)$ funtorialmente a um espaço vetorial V munido da forma quadrática q. As Álgebras de Clifford têm importância fundamental em diversos contextos, em particular por sua relação com os Grupos de Spin e pelo papel desempenhado pelos módulos de Clifford, especialmente os espinores. Espinores, por sua vez, são objetos chave na Física, onde descrevem os campos de matéria fermiônica, e na Geometria Diferencial, onde são utilizados na construção de fibrados espinoriais e do assim chamado complexo de spin, que é instrumental na prova do clássico Teorema do Índice de Atiyah e Singer.

Este trabalho está organizado como segue:

No capítulo 1, falaremos sobre álgebras tensoriais, visto que as álgebras de Clifford são quocientes de uma álgebra tensorial por um ideal da mesma. Daremos a definição da álgebra de Clifford através de uma propriedade universal, mostraremos a existência e a unicidade a menos de isomorfismo desta álgebra. Apresentaremos também alguns exemplos relevantes.

No capítulo 2, provaremos algumas das propriedades básicas das álgebras de Clifford e definiremos suas principais subestruturas, dentre as quais estão os grupos de Spin.

No capítulo 3, daremos a definição de grupo fundamental e espaço de recobrimento e provaremos resultados importantes. Chegaremos ao fato de que $Spin_n$ é recobrimento universal de $SO(n)$.

No capítulo 4, falaremos de um caso particular interessante do fato mencionado acima para $n = 3$, mostraremos que o recobrimento universal de $SO(3)$ é isomomorfo a $SU(2)$.

Nos apêndices, falaremos produto tensorial de espaços vetoriais e álgebra de Lie e apresentaremos alguns resultados e exemplos.

Capítulo 1

Álgebras de Clifford: Conceitos Básicos

Neste capítulo, daremos a definição das Álgebras de Clifford através de uma propriedade universal. Por conveniência, assumiremos que o espaço vetorial V tem escalares em um corpo $\mathbb{K}$ com característica diferente de dois, $car(\mathbb{K}) \neq 2$, e $q : V \to \mathbb{K}$ é uma forma quadrática fixada em V. Para este capítulo, as referências são [3] e [4].

Definição 1.0.1 *Uma* ***álgebra de Clifford*** *associada a V e q é um par $(\mathcal{C}\ell(V,q), j)$ tal que*

i) $(\mathcal{C}\ell(V,q), \cdot)$[1], *é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade;*

ii) $j : V \to \mathcal{C}\ell(V,q)$ *é uma aplicação linear e* $j(v) \cdot j(v) = -q(v)1, \forall v \in V$*;*

iii) para toda aplicação linear $f : V \to A$ que satisfaz $f(v) \cdot f(v) = -q(v)1_A$, onde $(A, \cdot)$ é $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade, existe um único homomorfismo de álgebras $\widetilde{f} : \mathcal{C}\ell(V,q) \to A$ tal que $f = \widetilde{f} \circ j$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{C}\ell(V,q) \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

A seguinte proposição nos dá a unicidade destas álgebras a menos de isomorfismo.

Proposição 1.0.1 *Sejam $(\mathcal{C}\ell(V,q), j)$ e $(\mathcal{C}\ell'(V,q), j')$ álgebras de Clifford associadas a V e q, então $\mathcal{C}\ell(V,q)$ e $\mathcal{C}\ell'(V,q)$ são álgebras isomorfas.*

[1] O ponto denota o produto da álgebra, a partir de agora usaremos esta notação sem aviso prévio.

Demonstração: Como $j' : V \to \mathcal{C}\ell'(V,q)$ é linear e satisfaz $j'(v) \cdot j'(v) = -q(v)1$ e $(\mathcal{C}\ell(V,q), j)$ é álgebra de Clifford, existe um único homomorfismo $\varphi : \mathcal{C}\ell(V,q) \to \mathcal{C}\ell'(V,q)$ tal que $\varphi \circ j = j'$. Analogamente, existe um único homomorfismo $\bar{\varphi} : \mathcal{C}\ell'(V,q) \to \mathcal{C}\ell(V,q)$ tal que $\bar{\varphi} \circ j' = j$.

Logo, $(\varphi \circ \bar{\varphi}) \circ j' = j'$. Mas, $id_{\mathcal{C}\ell'(V,q)} : \mathcal{C}\ell'(V,q) \to \mathcal{C}\ell'(V,q)$ é tal que $id_{\mathcal{C}\ell'(V,q)} \circ j' = j'$. Daí, $\varphi \circ \bar{\varphi} = id_{\mathcal{C}\ell'(V,q)}$. Da mesma forma, $id_{\mathcal{C}\ell(V,q)} = \bar{\varphi} \circ \varphi$.

Portanto, $\mathcal{C}\ell(V,q)$ é isomorfa a $\mathcal{C}\ell'(V,q)$.

■

A demonstração da Proposição 1.0.1 em particular garante que , se $(\mathcal{C}\ell(V,q), j)$ é uma álgebra de Clifford e $j' : V \to \mathcal{C}\ell(V,q)$ é uma aplicação linear tal que $(\mathcal{C}\ell(V,q), j')$ é uma álgebra de Clifford, então $j' = \varphi \circ j$, onde φ é um automorfismo de $\mathcal{C}\ell(V,q)$. A aplicação j está então "fixada a menos de automorfismos". Adotaremos no que segue a convenção de nos referirmos à álgebra $\mathcal{C}\ell(V,q)$ como *a* álgebra de Clifford de (V,q), se não houver perigo de confusão.

Exemplo 1.0.1 *Seja $\mathcal{C}\ell_1$ a álgebra de Clifford associada ao espaço vetorial $\mathbb{R}$ com forma quadrática dada por $q(x) = x^2$. Então, $\mathcal{C}\ell_1$ é isomorfa a $\mathbb{C}$ visto como $\mathbb{R}$-álgebra.*

i) Não é difícil verificar que $\mathbb{C}$ com o produto usual dos números complexos dado por $(a,b)(c,d) = (ac - bd, bc + ad)$ é $\mathbb{R}$-álgebra associativa com unidade $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$.

ii) Defina $j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $j(x) = (0,x)$.

Claramente, j é linear. Vemos ainda que

$$j(x)j(x) = (0,x)(0,x) = (-x^2, 0) = -x^2(1,0) = -q(x)1_{\mathbb{C}}.$$

iii) Dada qualquer aplicação linear $f : \mathbb{R} \to A$, onde $(A, \cdot)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra associativa com unidade, tal que $f(x) \cdot f(x) = -q(x)1_A$, defina $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to A$ por $\widetilde{f}(a,b) = a1_A + f(b)$.

Vemos que $(\widetilde{f} \circ j)(x) = \widetilde{f}(0,x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $\widetilde{f} \circ j = f$.
Vejamos que $\widetilde{f}$ é homomorfismo de álgebras[2].

Note que $\widetilde{f}(1_{\mathbb{C}}) = \widetilde{f}(1,0) = 1_A$.

$$\begin{aligned} \widetilde{f}((a,b) + \lambda(c,d)) &= \widetilde{f}(a + \lambda c, b + \lambda d) = (a + \lambda c)1_A + f(b + \lambda d) = \\ &= (a1_A + f(b)) + \lambda(c1_A + f(d)) = \\ &= \widetilde{f}(a,b) + \lambda \widetilde{f}(c,d), \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

[2]No que segue, "álgebra"sifnificará "álgebra associativa com unidade".

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}((a,b)(c,d)) &= \widetilde{f}(ac-bd, bc+ad) = (ac-bd)1_A + f(bc+ad) = \\
&= ac1_A + cf(b) + af(d) - bd1_A = ac1_A + af(d) + f(b)c + bdf(1)\cdot f(1) = \\
&= ac1_A + af(d) + f(b)c + f(b)\cdot f(d) = (a1_A + f(b))\cdot(c1_A + f(d)) = \\
&= \widetilde{f}(a,b)\cdot\widetilde{f}(c,d).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que $\widetilde{f}$ é única.

Suponha que existe um homomorfismo de álgebras $g : \mathbb{C} \to A$ tal que $g \circ j = f$. Então, $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
g(a,b) &= g(a(1,0) + (0,b)) = ag(1,0) + g(0,b) = a1_A + g(j(b)) = \\
&= a1_A + f(b) = \widetilde{f}(a,b),
\end{aligned}$$

e portanto $g = \widetilde{f}$, o que conclui o exemplo.

Exemplo 1.0.2 *Seja $\mathcal{C}\ell_1^*$ a álgebra de Clifford associada ao espaço vetorial $\mathbb{R}$ com forma quadrática dada por $q(x) = -x^2$. Então, $\mathcal{C}\ell_1^*$ é isomorfa a $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ visto como $\mathbb{R}$-álgebra.*

Definindo o produto em $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ como $(a,b)(c,d) = (ac+bd, bc+ad)$ e $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ dada por $j(x) = (x,0)$, verifica-se o isomorfismo de forma análoga ao exemplo anterior.

Exemplo 1.0.3 *Seja $\mathcal{C}\ell_2$ a álgebra de Clifford associada ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com forma quadrática dada por $q((x,y)) = x^2 + y^2$. Então, $\mathcal{C}\ell_2$ é isomorfa a $\mathbb{H}$ visto como $\mathbb{R}$-álgebra.*

i) Não é difícil verificar que $\mathbb{H}$ com o produto usual dos quatérnios dado por $(a,b,c,d)(a',b',c',d') = (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - dc', ac' - bd' + ca' +$ $+ db', ad' + bc' - cb' + da')$ é $\mathbb{R}$-álgebra associativa com unidade.

ii) Defina $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$ por $j(x,y) = (0,x,y,0)$.

   Note que j é linear e que

$$\begin{aligned}
j(x,y)j(x,y) &= (0,x,y,0)(0,x,y,0) = (-x^2 - y^2, 0,0,0) = \\
&= -(x^2+y^2)(1,0,0,0) = -q(x,y)1_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}$$

iii) Dada qualquer aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to A$, onde $(A,\cdot)$ é $\mathbb{R}$-álgebra associativa com unidade, tal que $f(x,y)\cdot f(x,y) = -q(x,y)1_A$, defina $\widetilde{f} : \mathbb{H} \to A$ por $\widetilde{f}(a,b,c,d) = a1_A + bf(1,0) + cf(0,1) + df(1,0)\cdot f(0,1)$.

Vemos que $(\widetilde{f})\circ j(x,y)=\widetilde{f}(0,x,y,0)=xf(1,0)+yf(0,1)=f(x,y)$. Logo, $\widetilde{f}\circ j=f$.

Para verificar o homomorfismo,

$$\widetilde{f}((a,b,c,d)(a',b',c',d'))=\widetilde{f}(aa'-bb'-cc'-dd',ab'+ba'+cd'-dc',ac'-bd'+ca'+$$

$$+db',ad'+bc'-cb'+da')=(aa'-bb'-cc'-dd')1_A+(ab'+ba'+cd'-dc')f(1,0)+$$

$$+(ac'-bd'+ca'+db')f(0,1)+(ad'+bc'-cb'+da')f(1,0)f(0,1)=aa'1_A+ab'f(1,0)+$$

$$+ac'f(0,1)+ad'f(1,0)f(0,1)+ba'f(1,0)-bb'+bc'f(1,0)f(0,1)-bd'f(0,1)+ca'f(0,1)-$$

$$-cb'f(1,0)f(0,1)-cc'+cd'f(1,0)+da'f(1,0)f(0,1)+db'f(0,1)-dc'f(1,0)-dd'=aa'1_A+$$

$$+ab'f(1,0)+ac'f(0,1)+ad'f(1,0)f(0,1)+ba'f(1,0)+bb'f(1,0)^2+bc'f(1,0)f(0,1)+$$

$$+bd'f(1,0)^2f(0,1)+ca'f(0,1)+cb'f(0,1)f(1,0)+cc'f(0,1)^2+cd'f(0,1)f(1,0)f(0,1)+$$

$$+da'f(1,0)f(0,1)+db'f(1,0)f(0,1)f(1,0)+dc'f(1,0)f(0,1)^2+dd'f(1,0)f(0,1)f(1,0)f(0,1)=$$

$$=(a1_A+bf(1,0)+cf(0,1)+df(1,0)f(0,1))(a'1_A+b'f(1,0)+c'f(0,1)+$$

$$+d'f(1,0)f(0,1))=\widetilde{f}(a,b,c,d)\widetilde{f}(a',b',c',d'),$$

$$\widetilde{f}((a,b,c,d)+\lambda(a',b',c',d'))=\widetilde{f}(a+\lambda a',b+\lambda b',c+\lambda c',d+\lambda d')=(a+\lambda a')1_A+(b+\lambda b')f(1,0)+$$

$$+(c+\lambda c')f(0,1)+(d+\lambda d')f(1,0)\cdot f(0,1)=(a1_A+bf(1,0)+cf(0,1)+df(1,0)\cdot f(0,1))+\lambda(a'1_A+$$

$$+b'f(1,0)+c'f(0,1)+d'f(1,0)\cdot f(0,1))=\widetilde{f}(a,b,c,d)+\lambda\widetilde{f}(a',b',c',d'),$$

e ainda $\widetilde{f}(1,0,0,0)=11_A=1_A$.

Para provarmos a unicidade de $\widetilde{f}$, suponha que existe g homomorfismo de álgebras tal que $g\circ j=f$. Então,

$$\begin{aligned}
g(a,b,c,d) &= g(a1_{\mathbb{C}}+b(0,1,0,0)+c(0,0,1,0)+d(0,0,0,1))=\\
&= a1_A+bg(j(1,0))+cg(j(0,1))+dg((0,1,0,0)(0,0,1,0))=\\
&= a1_A+bf(1,0)+cf(0,1)+dg(j(1,0))g(j(0,1))=\\
&= a1_A+bf(1,0)+cf(0,1)+df(1,0)f(0,1)=\widetilde{f}(a,b,c,d).
\end{aligned}$$

O que conclui o exemplo.

O próximo exemplo é mais elaborado e vamos apresentá-lo como proposição.

Seja $V=\mathbb{R}^3$ e $q(v)=-v_1^2-v_2^2-v_3^2, v=(v_1,v_2,v_3)$.

Considere a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_3^*$ associada ao par (V,q).

Seja $M_2(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes 2 por 2 com entradas em $\mathbb{C}$.

Proposição 1.0.2 *$\mathcal{C}\ell_3^*$ é isomorfa a $M_2(\mathbb{C})$.*

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Defina $j : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{C}), j(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1,\ j(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2,\ j(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$.

As matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são chamadas de matrizes de Pauli.

Note que

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ \sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i, i \neq j, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dado $v \in \mathbb{R}^3, v = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i$. Então,

$$\begin{aligned} j(v)j(v) &= j(\sum_{i=1}^{3} v_i e_i) j(\sum_{k=1}^{3} v_k e_k) = \sum_{i=1}^{3} v_i j(e_i) \sum_{k=1}^{3} v_k j(e_k) = \sum_{i=1}^{3} v_i \sigma_i \sum_{k=1}^{3} v_k \sigma_k = \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -q(v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denotaremos a matriz identidade por $1_{2\times 2}$.

Afirmação: $\{1_{2\times 2}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\}$ é base de $M_2(\mathbb{C})$.

Primeiramente, notemos que $M_2(\mathbb{C})$ tem dimensão real 8.

Vamos provar que é linearmente independente.

Sejam $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \cdots, 8\}$. Então,

$$\lambda_1 1_{2\times 2} + \lambda_2\sigma_1 + \lambda_3\sigma_2 + \lambda_4\sigma_3 + \lambda_5\sigma_1\sigma_2 + \lambda_6\sigma_1\sigma_3 + \lambda_7\sigma_2\sigma_3 + \lambda_8\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda_6\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_7\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda_8\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (\lambda_1+\lambda_4)+i(\lambda_5+\lambda_8) & (\lambda_2-\lambda_6)+i(-\lambda_3+\lambda_7) \\ (\lambda_2+\lambda_6)+i(\lambda_3+\lambda_7) & (\lambda_1-\lambda_4)+i(-\lambda_5+\lambda_8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in \{1, \cdots, 8\}$.

Dada $f : \mathbb{R}^3 \to A$ linear. Defina $\widetilde{f} : M_2(\mathbb{C}) \to A$ por $\widetilde{f}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_A, \widetilde{f}(\sigma_1) = f(e_1), \widetilde{f}(\sigma_2) = f(e_2), \widetilde{f}(\sigma_3) = f(e_3), \widetilde{f}(\sigma_i\sigma_j) = f(e_i)f(e_j)$, para $i < j$ e $\widetilde{f}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = f(e_1)f(e_2)f(e_3)$.

Não é difícil ver que $\widetilde{f}$ é linear e é homomorfismo de álgebras.

Vemos que

$$\begin{aligned}(\widetilde{f}\circ j)(v) &= (\widetilde{f}\circ j)(\sum_{i=1}^{3} v_i e_i) = \widetilde{f}(\sum_{i=1}^{3} v_i j(e_i)) = \sum_{i=1}^{3} v_i \widetilde{f}(\sigma_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{3} f(e_i) = f(\sum_{i=1}^{3} v_i e_i) = f(v), \forall v \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Vamos provar agora que $\widetilde{f}$ é única.

Seja $g : M_2(\mathbb{C}) \to A$ um homomorfismo de álgebras tal que $g \circ j = f$. Então,

$$g\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ a'+b'i & c'+d'i \end{pmatrix} = \frac{a+c'}{2}g(1_{M_2(\mathbb{C})}) + \frac{a'+c}{2}g(j(e_1)) + \frac{b'-d}{2}g(j(e_2)) + \frac{a-c'}{2}g(j(e_3)) +$$

$$+\frac{b-d'}{2}g(\sigma_1\sigma_2) + \frac{a'-c}{2}g(\sigma_1\sigma_3) + \frac{b'+d}{2}g(\sigma_2\sigma_3) + \frac{b+d'}{2}g(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = \frac{a+c'}{2}1_A + \frac{a'+c}{2}f(e_1) +$$

$$+\frac{b'-d}{2}f(e_2) + \frac{a-c'}{2}f(e_3) + \frac{b-d'}{2}f(e_1)f(e_2) + \frac{a'-c}{2}f(e_1)f(e_3) + \frac{b'+d}{2}f(e_2)f(e_3) +$$

$$+\frac{b+d'}{2}f(e_1)f(e_2)f(e_3) = \frac{a+c'}{2}\widetilde{f}(1_{2\times 2}) + \frac{a'+c}{2}\widetilde{f}(\sigma_1) + \frac{b'-d}{2}\widetilde{f}(\sigma_2) + \frac{a-c'}{2}\widetilde{f}(\sigma_3) +$$

$$+\frac{b-d'}{2}\widetilde{f}(\sigma_1\sigma_2) + \frac{a'-c}{2}\widetilde{f}(\sigma_1\sigma_3) + \frac{b'+d}{2}\widetilde{f}(\sigma_2\sigma_3) + \frac{b+d'}{2}\widetilde{f}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = \widetilde{f}\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ a'+b'i & c'+d'i \end{pmatrix}.$$

■

A definição da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V,q)$ não garante no contexto geral, a existência da mesma. Mostraremos agora que esta sempre existe.

1.1 Construindo uma Álgebra de Clifford I: A Álgebra Tensorial

Definição 1.1.1 *Seja V um $\mathbb{K}$ espaço vetorial. Uma* ***álgebra tensorial*** *é um par $(T(V), \varphi)$, onde $T(V)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra e $\varphi : V \to T(V)$ é $\mathbb{K}$-linear, com a seguinte propriedade: para toda aplicação $f : V \to A$ linear, onde A é uma $\mathbb{K}$-álgebra, existe um único homomorfismo de álgebras $\bar{f} : T(V) \to A$ com $f = \bar{f} \circ \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Analogamente ao que fizemos para álgebras de Clifford, mostra-se que a álgebra tensorial é única a menos de isomorfismo.

1.1.1 Construção de uma Álgebra Tensorial

Aqui, como antes, apenas a definição de uma certa estrutura não prova a existência da mesma. Após sua construção explícita nos referimos a $T(V)$ como *a* álgebra tensorial de V.

Defina

$$T^k V = V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ vezes}}, k \in \mathbb{N}^{*}\,[3]$$

$$T^0 V = \mathbb{K}.$$

Seja $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \cdots$.

Proposição 1.1.1 *Para quaisquer $k, l \in \mathbb{N}^*$ os espaços vetoriais $T^k V \otimes T^l V$ e $T^{k+l} V$ são canonicamente isomorfos.*

Demonstração:

Seja $(T^k V \otimes T^l V, \xi)$ o produto tensorial entre $T^k V$ e $T^l V$.

Defina

$$\psi : T^k V \times T^l V \longrightarrow T^{k+l} V,$$

pondo

[3] Veja Apêndice 1 para as principais propriedades do produto tensorial de espaços vetoriais.

$$\psi\left(\left(\sum_{i_1,\cdots,i_k} v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_k}, \sum_{j_1,\cdots,j_l} w_{j_1}\otimes\cdots\otimes w_{j_l}\right)\right) = \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_l}} v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_k}\otimes w_{j_1}\otimes\cdots\otimes w_{j_l}$$

Não é difícil verificar que ψ é bilinear.

Logo, pela propriedade universal do produto tensorial, existe uma única aplicação linear

$\iota_{k,l} : T^kV\otimes T^lV \to T^{k+l}V$ tal que $\iota_{k,l}\circ\varphi_{k,l} = \psi$ onde $\varphi_{k,l} : T^kV\times T^lV \longrightarrow T^kV\otimes T^lV$ a injeção canônica, para a qual

$$\varphi_{k,l}\left(\sum_{i_1,\cdots,i_k} u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_k}, \sum_{j_1,\cdots,j_l} v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_l}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i_1,\cdots,i_k} u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_k}\right)\otimes\left(\sum_{j_1,\cdots,j_l} v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_l}\right).$$

Explicitamente temos,

$$\begin{aligned}
&\iota_{k,l}\left(\sum_t\left(\sum_{i_{1_t},\cdots,i_{k_t}} v_{i_{1_t}}\otimes\cdots\otimes v_{i_{k_t}}\right)\otimes\left(\sum_{j_{1_t},\cdots,j_{l_t}} w_{j_{1_t}}\otimes\cdots\otimes w_{j_{l_t}}\right)\right) =\\
&= \sum_t \iota_{k,l}\left(\left(\sum_{i_{1_t},\cdots,i_{k_t}} v_{i_{1_t}}\otimes\cdots\otimes v_{i_{k_t}}\right)\otimes\left(\sum_{j_{1_t},\cdots,j_{l_t}} w_{j_{1_t}}\otimes\cdots\otimes w_{j_{l_t}}\right)\right) =\\
&= \sum_t \iota_{k,l}\left(\xi\left(\sum_{i_{1_t},\cdots,i_{k_t}} v_{i_{1_t}}\otimes\cdots\otimes v_{i_{k_t}}, \sum_{j_{1_t},\cdots,j_{l_t}} w_{j_{1_t}}\otimes\cdots\otimes w_{j_{l_t}}\right)\right) =\\
&= \sum_t \psi\left(\sum_{i_{1_t},\cdots,i_{k_t}} v_{i_{1_t}}\otimes\cdots\otimes v_{i_{k_t}}, \sum_{j_{1_t},\cdots,j_{l_t}} w_{j_{1_t}}\otimes\cdots\otimes w_{j_{l_t}}\right) =\\
&= \sum_{\substack{t\\ i_{1_t},\cdots,i_{k_t}\\ j_{1_t},\cdots,j_{l_t}}} v_{i_{1_t}}\otimes\cdots\otimes v_{i_{k_t}}\otimes w_{j_{1_t}}\otimes\cdots\otimes w_{j_{l_t}}.
\end{aligned}$$

Sejam, $\forall k,l\in\mathbb{N}^*$

$$\varphi_k^l : \overbrace{V\times\cdots\times V}^{k+l \text{ vezes}} \longrightarrow T^kV\times T^lV$$

$\varphi_k^l(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+l}) = (\varphi_k(v_1,\cdots,v_k),\varphi_l(v_{k+1},\cdots,v_{k+l}))$, onde

$$\begin{aligned}
\varphi_k :\ \overbrace{V\times\cdots\times V}^{k \text{ vezes}} &\to\ T^kV\\
(v_1,\cdots,v_k) &\mapsto\ v_1\otimes\cdots\otimes v_k
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrl} \varphi_l : & \overbrace{V \times \cdots \times V}^{l \text{ vezes}} \rightarrow & T^l V \\ & (v_1, \cdots, v_l) \mapsto & v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \end{array}.$$

Como φ_k é k-linear e φ_l é l-linear, então φ_k^l é $k+l$-linear.

Não é difícil ver que $\varphi_{k,l}$ é bilinear.

Temos que se

$$\varphi_{k,l} \circ \varphi_k^l : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k+l \text{ vezes}} \longrightarrow T^k V \otimes T^l V,$$

então

$(\varphi_{k,l} \circ \varphi_k^l)(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+l}) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \otimes (v_{k+1}, \otimes \cdots \otimes v_{k+l})$ é $k+l$-linear.

Seja φ a injeção canônica de $\overbrace{V \times \cdots \times V}^{k+l \text{ vezes}}$ em $T^{k+l}V$. Portanto, existe uma única aplicação linear $\iota_{k+l} : T^{k+l}V \rightarrow T^k V \otimes T^l V$ tal que $\iota_{k+l} \circ \varphi = \varphi_{k,l} \circ \varphi_k^l$, conforme o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} V \times \cdots \times V & \xrightarrow{\varphi} & T^{k+l}V \\ {\scriptstyle \varphi_k^l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{k+l}} \\ T^k V \times T^l V & \xrightarrow{\varphi_{k,l}} & T^k V \otimes T^l V \end{array}$$

Explicitamente,

$$\iota_{k+l}\left(\sum_{i_1, \cdots, i_{k+l}} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k+l}}\right) = \sum_{i_1, \cdots, i_{k+l}} \iota_{k+l}\left(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k+l}}\right) =$$
$$= \sum_{i_1, \cdots, i_{k+l}} \iota_{k+l}\left(\varphi\left(v_{i_1}, \cdots, v_{i_{k+l}}\right)\right) = \sum_{i_1, \cdots, i_{k+l}} (\varphi_{k,l} \circ \varphi_k^l)(v_{i_1}, \cdots, v_{i_{k+l}}) =$$
$$= \sum_{i_1, \cdots, i_{k+l}} (v_{i_1} \otimes \cdots v_{i_k}) \otimes (v_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k+l}}).$$

Portanto,

$$(\iota_{k+l} \circ \iota_{k,l})\left(\sum_t \left(\sum_{i_{1_t}, \cdots, i_{k_t}} v_{i_{1_t}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k_t}}\right) \otimes \left(\sum_{j_{1_t}, \cdots, j_{l_t}} w_{j_{1_t}} \otimes \cdots \otimes w_{j_{l_t}}\right)\right) =$$
$$= \iota_{k+l}\left(\sum_{\substack{t \\ i_{1_t}, \cdots, i_{k_t} \\ j_{1_t}, \cdots, j_{l_t}}} v_{i_{1_t}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k_t}} \otimes w_{j_{1_t}} \otimes \cdots \otimes w_{j_{l_t}}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{t \\ i_{1_t}, \cdots, i_{k_t} \\ j_{1_t}, \cdots, j_{l_t}}} \iota_{k+l}\left(v_{i_{1_t}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k_t}} \otimes w_{j_{1_t}} \otimes \cdots \otimes w_{j_{l_t}}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{t \\ i_{1_t},\cdots,i_{k_t} \\ j_{1_t},\cdots,j_{l_t}}} \left(v_{i_{1_t}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k_t}}\right) \otimes \left(w_{j_{1_t}} \otimes \cdots \otimes w_{j_{l_t}}\right) =$$

$$= \sum_t \left(\sum_{i_{1_t},\cdots,i_{k_t}} v_{i_{1_t}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k_t}} \right) \otimes \left(\sum_{j_{1_t},\cdots,j_{l_t}} w_{j_{1_t}} \otimes \cdots \otimes w_{j_{l_t}} \right),$$

e

$$(\iota_{k,l} \circ \iota_{k+l}) \left(\sum_{i_1,\cdots,i_{k+l}} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k+l}} \right) =$$

$$= \iota_{k,l} \left(\sum_{i_1,\cdots,i_{k+l}} (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}) \otimes (v_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k+l}}) \right) =$$

$$= \iota_{k,l} \left(\sum_{i_1,\cdots,i_{k+l}} (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}) \otimes (v_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k+l}}) \right) =$$

$$= \sum_{i_1,\cdots,i_{k+l}} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k+l}}.$$

Assim, $\iota_{k,l}$ e ι_{k+l} são inversas uma da outra, logo, $i_{k,l}$ é um isomorfismo.

■

Pela definição, para verificar que $T(V)$ é uma álgebra tensorial devemos mostrar inicialmente que $T(V)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra. Para isto, defina a seguinte operação

$$\begin{array}{rccc} * : & T(V) \times T(V) & \longrightarrow & T(V) \\ & \left(\sum_i u_i, \sum_j v_j \right) & \mapsto & \sum_{i,j} \iota_{i,j}(u_i \otimes v_j) \end{array},$$

onde $u_i \neq 0$ e $v_j \neq 0$ apenas num conjunto finito, e $\iota_{i,j}$ é como na demonstração da Proposição 1.1.1.

Proposição 1.1.2 *$(T(V), *)$ é $\mathbb{K}$-álgebra.*

Demonstração:

i) Com as operações dadas por $\sum_i u_i + \sum_j v_j = \sum_{i,j} u_i + v_j$ e $\lambda \left(\sum_i u_i \right) = \sum_i \lambda u_i, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $T(V)$ é $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

ii) Verifiquemos a associatividade do produto:

$$\left(\left(\sum_i u_i\right) * \left(\sum_j v_j\right)\right) * \left(\sum_k w_k\right) = \sum_{i,j,k}((u_i * v_j) * w_k).$$

Escrevendo

$$u_i = \sum_{n_1,\cdots,n_i} u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i} \in T^i V$$

$$v_j = \sum_{m_1,\cdots,m_j} v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j} \in T^j V$$

$$w_k = \sum_{p_1,\cdots,p_k} w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k} \in T^k V,$$

vem

$((u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) * (v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j})) * (w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k}) =$

$= (\iota_{i,j}((u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) \otimes (v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}))) * (w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k}) =$

$= (u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i} \otimes v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}) * (w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k}) =$

$= \iota_{i+j,k}((u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i} \otimes v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}) \otimes (w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k})) =$

$= (u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i} \otimes v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}) \otimes w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k} =$

$= u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i} \otimes (v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j} \otimes w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k}) =$

$= \iota_{i,j+k}((u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) \otimes (v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j} \otimes w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k})) =$

$= (u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) * (v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j} \otimes w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k}) =$

$= (u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) * (\iota_{j,k}(v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}) \otimes (w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k})) =$

$= (u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) * ((v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}) * (w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k})).$

Daí,

$$(u_i * v_j) * w_k = \left(\left(\sum_{n_1,\cdots,n_i} u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}\right) * \left(\sum_{m_1,\cdots,m_j} v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}\right)\right) *$$

$$* \left(\sum_{p_1,\cdots,p_k} w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k}\right) = \sum_{\substack{n_1,\cdots,n_i\\ m_1,\cdots,m_j\\ p_1,\cdots,p_k}} ((u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) * (v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}))*$$

$$*(w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k}) = \sum_{\substack{n_1,\cdots,n_i\\ m_1,\cdots,m_j\\ p_1,\cdots,p_k}} (u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) * ((v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}) * (w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k})) =$$

$$= \left(\sum_{n_1,\cdots,n_i} u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}\right) * \left(\left(\sum_{m_1,\cdots,m_j} v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}\right) * \left(\sum_{p_1,\cdots,p_k} w_{p_1} \otimes \cdots \otimes w_{p_k}\right)\right) =$$

$= u_i * (v_j * w_k)$.

Então, $\displaystyle\sum_{i,j,k}(u_i * (v_j * w_k)) = \left(\sum_i u_i\right) * \left(\left(\sum_j v_j\right) * \left(\sum_k w_k\right)\right)$, como queríamos mostrar.

iii) Distributividade:

Para $i \geqslant j$, temos

$$\left(\sum_i u_i + \sum_j v_j\right) * \left(\sum_k w_k\right) = \left(\sum_i u_i + v_i\right) * \left(\sum_k w_k\right) = \sum_{i,k} \iota_{i,k}((u_i + v_i) \otimes w_k) =$$

$$= \sum_{i,k} \iota_{i,k}(u_i \otimes w_k + v_i \otimes w_k) = \sum_{i,k} \iota_{i,k}(u_i \otimes w_k) + \iota_{i,k}(v_i \otimes w_k) =$$

$$= \sum_{i,k} \iota_{i,k}(u_i \otimes w_k) + \sum_{j,k} \iota_{j,k}(v_j \otimes w_k) = \left(\sum_i u_i\right) * \left(\sum_k w_k\right) + \left(\sum_j v_j\right) * \left(\sum_k w_k\right).$$

Analogamente,

$$\left(\sum_i u_i\right) * \left(\sum_j v_j + \sum_k w_k\right) = \left(\sum_i u_i\right) * \left(\sum_j v_j\right) + \left(\sum_i u_i\right) * \left(\sum_k w_k\right).$$

Finalmente, $\forall a \in \mathbb{K}$,

$$\left(a\sum_i u_i\right) * \left(\sum_j v_j\right) = \left(\sum_i au_i\right) * \left(\sum_j v_j\right) = \sum_{i,j} \iota_{i,j}((au_i) \otimes v_j) =$$

$$= \sum_{i,j} \iota_{i,j}(a(u_i \otimes v_j)) = a\sum_{i,j} \iota_{i,j}(u_i \otimes v_j) = a\left(\left(\sum_i u_i\right) * \left(\sum_j v_j\right)\right).$$

Analogamente,

$$\left(\sum_i u_i\right) * \left(a\sum_j v_j\right) = a\left(\left(\sum_i u_i\right) * \left(\sum_j v_j\right)\right).$$

■

A seguinte proposição nos dá uma aplicação $\mathbb{K}$-linear com a qual $T(V)$ será uma álgebra tensorial.

Proposição 1.1.3 *Com a inclusão*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \hookrightarrow & T(V) \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$$

$(T(V), \varphi)$ é álgebra tensorial.

Demonstração:

É claro que φ é $\mathbb{K}$-linear.

Seja $f : V \to A$ uma aplicação linear, onde $(A, .)$ é $\mathbb{K}$-álgebra.

Defina $\bar{f} : T(V) \to A$, dada por $\bar{f}\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} f(v_{n_1})f(v_{n_2})\cdots f(v_{n_i})$, onde $v_i = \sum_{n_1,\cdots,n_i} v_{n_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_i} \in T^iV$. Queremos verificar que $\overline{f}$ é homomorfismo de álgebras e a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

De fato, é fácil ver que $\overline{f}$ é linear e $\overline{f}(1_{T(V)}) = 1_A$. Temos agora:

i) $$\bar{f}\left(\left(\sum_i u_i\right) * \left(\sum_j v_j\right)\right) = \bar{f}\left(\sum_{i,j}\left(\sum_{n_1,\cdots,n_i} u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}\right) * \left(\sum_{m_1,\cdots,m_j} v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}\right)\right) =$$

$$= \bar{f}\left(\sum_{\substack{i,j\\ n_1,\cdots,n_i\\ m_1,\cdots,m_j}} \iota_{i,j}((u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}) \otimes (v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}))\right) =$$

$$= \bar{f}\left(\sum_{\substack{i,j\\ n_1,\cdots,n_i\\ m_1,\cdots,m_j}} u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i} \otimes v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i,j\\ n_1,\cdots,n_i\\ m_1,\cdots,m_j}} f(u_{n_1})\cdots f(u_{n_i})f(v_{m_1})\cdots f(v_{m_j}) =$$

$$= \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} f(u_{n_1})\cdots f(u_{n_i}) \sum_j \sum_{m_1,\cdots,m_j} f(v_{m_1})\cdots f(v_{m_j}) =$$

$$= \bar{f}\left(\sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} u_{n_1} \otimes \cdots \otimes u_{n_i}\right) \cdot \bar{f}\left(\sum_j \sum_{m_1,\cdots,m_j} v_{m_1} \otimes \cdots \otimes v_{m_j}\right) =$$

$$= \bar{f}\left(\sum_i u_i\right) \cdot \bar{f}\left(\sum_j v_j\right),$$

e logo, $\bar{f}$ é homomorfismo de álgebras.

ii) $\left(\bar{f} \circ \varphi\right)(v) = \bar{f}(v) = f(v), \forall v \in V.$

iii) Seja g tal que $g : T(V) \to A$ é homomorfismo de álgebras e $g \circ \varphi = f$. Então

$$g\left(\sum_i v_i\right) = g\left(\sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} v_{n_1} \otimes \cdots \otimes v_{n_i}\right) = \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} g(v_{n_1}) \cdots g(v_{n_i}) =$$

$$= \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} g(\varphi(v_{n_1})) \cdots g(\varphi(v_{n_i})) = \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} f(v_{n_1}) \cdots f(v_{n_i}) = \bar{f}\left(\sum_i v_i\right).$$

Logo, $\bar{f}$ é única.

■

1.2 Construindo uma Álgebra de Clifford II: Quociente

Considere agora a álgebra tensorial $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V$, e o ideal $I_q(V) = \langle \{v \otimes v + q(v), v \in V\} \rangle$.

Seja $\mathcal{C}\ell(V,q) = T(V)/I_q(V)$. Defina $j : V \to \mathcal{C}\ell(V,q)$ pondo $j = \pi_q \circ \varphi$ onde $\varphi : V \to T(V)$ é a inclusão canônica e $\pi_q : T(V) \to \mathcal{C}\ell(V,q)$ a projeção canônica.

Notação: Para $x \in T(V)$ usaremos $[x]$ para denotar a classe de equivalência de x.

Proposição 1.2.1 *$(\mathcal{C}\ell(V,q), j)$ é álgebra de Clifford.*

Demonstração: Vemos que

i) j é linear, pois φ e π_q o são;

ii) $\forall v \in V, j(v) = (\pi_q \circ \varphi)(v) = \pi_q(v) = [v] \Rightarrow j(v) \cdot j(v) = [v] \cdot [v] = [v \otimes v] = [-q(v)] =$
$= -q(v)[1] = -q(v)1_{\mathcal{C}\ell(V,q)}$;

iii) Seja $f : V \to A$ aplicação linear tal que $f(v) \cdot f(v) = -q(v)1_A$.

Pela propriedade universal da álgebra tensorial, existe um único homomorfismo de álgebras $\bar{f} : T(V) \to A$ tal que $\bar{f} \circ \varphi = f$.

Afirmação: $I_q(V) \subset Ker\bar{f}$.

De fato, $\bar{f}(v \otimes v + q(v)) = \bar{f}(v \otimes v) + q(v)\bar{f}(1) = \bar{f}(v) \cdot \bar{f}(v) + q(v)1_A =$
$= f(v) \cdot f(v) + q(v)1_A = 0$, o que estabelece a afirmação.

Defina

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & T(V)/I_q(V) & \to & A \\ & [v] & \mapsto & \bar{f}(v) \end{array}.$$

i) $[v] = [w] \Rightarrow v - w \in I_q(V) \Rightarrow v - w \in Ker\bar{f} \Rightarrow \bar{f}(v-w) = 0 \Rightarrow \bar{f}(v) = \bar{f}(w)$

Logo, $\widetilde{f}$ está bem definida, e claramente linear, e $\widetilde{f}(1_{\mathcal{C}\ell(V,q)}) = \overline{f}(1) = 1_A$.

ii) $\widetilde{f}([v]\cdot[w]) = \widetilde{f}([v\otimes w]) = \bar{f}(v\otimes w) = \bar{f}(v)\cdot\bar{f}(w) = \widetilde{f}([v])\cdot\widetilde{f}([w])$.

Logo, $\widetilde{f}$ é homomorfismo de álgebras.

iii) $(\widetilde{f}\circ j)(v) = (\widetilde{f}\circ\pi_q\circ\varphi)(v) = \widetilde{f}(\pi_q(v)) = \widetilde{f}([v]) = \bar{f}(v) = f(v), \forall v \in V$.

Isto prova que $\widetilde{f}\circ j = f$.

iv) Sejam $g : \mathcal{C}\ell(V,q) \to A$ homomorfismo de álgebras tal que $g\circ j = f$ e $w \in T(V)$. Então, $w = \displaystyle\sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} w_{n_1}\otimes\cdots\otimes w_{n_i}$.

$$\begin{aligned} g([w]) &= g(\pi_q(w)) = g\left(\pi_q\left(\sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} w_{n_1}\otimes\cdots\otimes w_{n_i}\right)\right) = \\ &= \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} g(\pi_q(\varphi(w_{n_1})))\cdots g(\pi_q(\varphi(w_{n_i}))) = \\ &= \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} (g\circ j)(w_{n_1})\cdots(g\circ j)(w_{n_i}) = \\ &= \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} f(w_{n_1})\cdots f(w_{n_i}) = \\ &= \sum_i \sum_{n_1,\cdots,n_i} \widetilde{f}([w_{n_1}])\cdots\widetilde{f}([w_{n_i}]) = \widetilde{f}([w]). \end{aligned}$$

Assim, $\widetilde{f}$ é única.

■

Portanto, $(\mathcal{C}\ell(V,q), j)$ é álgebra de Clifford, e por ser única a menos de isomorfismo nos referimos, como já dissemos, a $\mathcal{C}\ell(V,q)$ como *a* álgebra de Clifford de (V,q).

Note que j é injetiva.

De fato, se $(\mathcal{C}\ell'(V,q), j')$ é álgebra de Clifford, existe um único isomorfismo $\psi : \mathcal{C}\ell(V,q) \to \mathcal{C}\ell'(V,q)$ com $j' = \psi\circ j$. Portanto, j' é injetiva. Assim, j é sempre uma inclusão de V em sua álgebra de Clifford, e no que segue, identificaremos V com sua imagem por j em $\mathcal{C}\ell(V,q)$.

Em particular, no lugar de $j(v)\cdot j(v) = -q(v)1$ escrevemos apenas $v\cdot v = -q(v)1$.

Capítulo 2

Propriedades Estruturais e Subgrupos de uma Álgebra de Clifford

Neste capítulo, veremos importante subestruturas das álgebras de Clifford tais como o grupo de Spin. Utilizamos a referência [4].

Definição 2.0.1 *Um* **`morfismo`** $f : (V, q) \to (V', q')$ *entre espaços vetoriais com forma quadrática é uma aplicação* $\mathbb{K}$*-linear* $f : V \to V'$ *que* **`preserva`** *a forma quadrática, ou seja,* $f^*q' := q' \circ f = q$*.*

Definição 2.0.2 *O* **`grupo linear de V`** *é definido por*

$$GL(V) = \{A : V \to V; A \text{ é operador linear invertível }\}.$$

Note que $GL(V)$ com a operação de composição forma um grupo.

Definição 2.0.3 *O* **`grupo ortogonal`** *associado a* V *e* q *é definido por*

$$O(V, q) = \{f \in GL(V) : f^*q = q\}.$$

Teorema 2.0.1 *Sejam* $f : (V, q) \to (V', q')$ *e* $g : (V', q') \to (V'', q'')$ *morfismos entre espaços vetoriais,* $(\mathcal{C}\ell(V, q), j), (\mathcal{C}\ell(V', q'), j')$ *e* $(\mathcal{C}\ell(V'', q''), j'')$ *as álgebras de Clifford associadas. Então*

i) $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$

ii) $\widetilde{Id_V} = Id_{\mathcal{C}\ell(V,q)}$.

Demonstração:

i) É claro que $j' \circ f$ é $\mathbb{K}$-linear, pois j' e f o são.

Vemos ainda que $j'(v') \cdot j'(v') = -q'(v')1, \forall v' \in V'$ e isto implica que $j'(f(v)) \cdot j'(f(v)) = -q'(f(v))1, \forall v \in V$. Mas, $q = q' \circ f$. Logo, $(j' \circ f)(v) \cdot (j' \circ f)(v) = -q(v)1$.

Portanto, existe um único homomorfismo de álgebras $\widetilde{f} : \mathcal{C}\ell(V,q) \to \mathcal{C}\ell(V',q')$ tal que $\widetilde{f} \circ j = j' \circ f$.

Analogamente, existe um único homomorfismo de álgebras $\widetilde{g} : \mathcal{C}\ell(V',q') \to \mathcal{C}\ell(V'',q'')$ tal que $\widetilde{g} \circ j' = j'' \circ g$.

Segue que (veja o diagrama ao lado)

$$j'' \circ g \circ f = \widetilde{g} \circ j' \circ f = (\widetilde{g} \circ \widetilde{f}) \circ j.$$

$$\begin{tikzcd}
(V,q) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{C}\ell(V,q) \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\
(V',q') \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{C}\ell(V',q') \arrow[d, dashed, "\widetilde{g}"] \\
(V'',q'') \arrow[r, "j''"] & \mathcal{C}\ell(V'',q'')
\end{tikzcd}$$

É claro que $j'' \circ g \circ f$ é linear.

Como $j''(v'') \cdot j''(v'') = -q''(v'')1, \forall v'' \in V''$, então $\forall v \in V, (j'' \circ g \circ f)(v) \cdot (j'' \circ g \circ f)(v) = -q''((g \circ f)(v))1 = -q'(f(v))1 = -q(v)1$, pois $q' = q'' \circ g$.

Portanto, existe um único homomorfismo de álgebras $\widetilde{g \circ f}$ tal que $(\widetilde{g \circ f}) \circ j = j'' \circ g \circ f$ e como $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ satisfaz essas condições, segue que $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$.

ii) É claro que $j \circ Id_V$ é $\mathbb{K}$-linear, pois j' e Id_V o são.

Vemos ainda que, $(j \circ Id_V)(v) \cdot (j \circ Id_V)(v) = j(v) \cdot j(v) = -q(v)1$. Logo, existe um único homomorfismo $\widetilde{Id_V}$ tal que $\widetilde{Id_V} \circ j = j \circ Id_V$. Mas, existe $Id_{\mathcal{C}\ell(V,q)} : \mathcal{C}\ell(V,q) \to \mathcal{C}\ell(V,q)$ tal que $j \circ Id_V = Id_{\mathcal{C}\ell(V,q)} \circ j$. Portanto, $\widetilde{Id_V} = Id_{\mathcal{C}\ell(V,q)}$(veja o diagrama ao lado).

$$\begin{tikzcd}
(V,q) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "Id_V"'] & \mathcal{C}\ell(V,q) \arrow[d, dashed, "\widetilde{Id_V}"] \\
(V,q) \arrow[r, "j"] & \mathcal{C}\ell(V,q)
\end{tikzcd}$$

■

Fixe um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V com forma quadrática q.

Corolário 2.0.1 *A aplicação* $\varphi : O(V,q) \to Aut(\mathcal{C}\ell(V,q))$ *dada por* $\varphi(f) = \widetilde{f}, \forall f \in O(V,q)$ *é monomorfismo de grupos.*

Demonstração:

i) $\varphi(f \circ g) = \widetilde{f \circ g} = \widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \varphi(f) \circ \varphi(g), \forall f, g \in O(V, q.)$

ii) $\varphi(Id_V) = \widetilde{Id_V} = Id_{\mathcal{C}\ell(V,q)}$.

iii) $\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow \widetilde{f} = \widetilde{g} \Rightarrow f = g$.

■

Definimos agora um importante automorfismo de $\mathcal{C}\ell(V,q)$. Defina inicialmente $\beta : V \to V$ pondo $\beta(v) = -v, \forall v \in V$.

Notemos que $\beta \in O(V,q)$. De fato, β é claramente $\mathbb{K}$-linear e $\beta^* q(v) = (q \circ \beta)(v) = \langle \beta(v), \beta(v) \rangle_q = \langle -v, -v \rangle_q = \langle v, v \rangle_q = q(v)$.

Então, $\alpha := \varphi(\beta) = \widetilde{\beta} : \mathcal{C}\ell(V,q) \to \mathcal{C}\ell(V,q)$ é um automorfismo de $\mathcal{C}\ell(V,q)$, chamado ***paridade***. Note que $\alpha^2 = \widetilde{\beta} \circ \widetilde{\beta} = \widetilde{\beta \circ \beta} = \widetilde{Id_V} = Id_{\mathcal{C}\ell(V,q)}$, e portanto α tem autovalores 1 e -1.

Definição 2.0.4 *Seja $\mathcal{C}\ell^i(V,q) = \{\varphi \in \mathcal{C}\ell(V,q) : \alpha(\varphi) = (-1)^i \varphi\}, i \in \{0,1\}$. $\mathcal{C}\ell^0(V,q)$ é chamada* ***parte par*** *de $\mathcal{C}\ell(V,q)$ e $\mathcal{C}\ell^1(V,q)$ é chamada* ***parte ímpar*** *de $\mathcal{C}\ell(V,q)$.*

Note que $\mathcal{C}\ell^0(V,q)$ é o autoespaço relacionado ao autovalor 1, e $\mathcal{C}\ell^1(V,q)$ é o autoespaço relacionado ao autovalor -1. Temos então que

$$\mathcal{C}\ell(V,q) = \mathcal{C}\ell^0(V,q) \oplus \mathcal{C}\ell^1(V,q). \tag{2.1}$$

Proposição 2.0.2 *$\mathcal{C}\ell^i(V,q).\mathcal{C}\ell^j(V,q) \subset \mathcal{C}\ell^{i+j}(V,q)$, onde $i+j$ é dado módulo 2.*

Demonstração: Seja $\varphi_i \varphi_j \in \mathcal{C}\ell^i(V,q)\mathcal{C}\ell^j(V,q)$. Então,
$\alpha(\varphi_i \varphi_j) = \alpha(\varphi_i)\alpha(\varphi_j) = (-1)^i \varphi_i (-1)^j \varphi_j = (-1)^{i+j} \varphi_i \varphi_j$.
Logo, $\varphi_i \varphi_j \in \mathcal{C}\ell^{i+j (mod\ 2)}(V,q)$.

■

Uma álgebra que satisfaz a decomposição (2.1) e a proposição anterior é dita $\mathbb{Z}_2$***-graduada***.

Proposição 2.0.3 *$\mathcal{C}\ell^0(V,q)$ é subálgebra de $\mathcal{C}\ell(V,q)$.*

Demonstração: É claro que $\mathcal{C}\ell^0(V,q)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{C}\ell(V,q)$, pois

i) $0 \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$

ii) Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$. Então, $\alpha(\varphi_1 - \varphi_2) = \alpha(\varphi_1) - \alpha(\varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$

iii) Seja $\lambda \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$. Então, $\alpha(\lambda\varphi) = \lambda\alpha(\varphi) = \lambda\varphi \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$.

De forma análoga, mostra-se que $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$, para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$. E é claro que $1 \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$, pois α é homomorfismo de álgebras.

$\blacksquare$

No entanto, $\mathcal{C}\ell^1(V,q)$ não é subálgebra, pois dados $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}\ell^1(V,q), \varphi_1, \varphi_2 \neq 0$, temos que $\alpha(\varphi_1\varphi_2) = \alpha(\varphi_1)\alpha(\varphi_2) = (-\varphi_1)(-\varphi_2) = \varphi_1\varphi_2$, o que implica que $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$.

Vamos introduzir algumas importantes subestruturas de $\mathcal{C}\ell(V)$.

Definição 2.0.5 *O* ***`grupo das unidades`*** *da álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell(V,q)$ *é o conjunto* $\mathcal{C}\ell^\times(V,q) = \{\varphi \in \mathcal{C}\ell(V,q) : \exists \varphi^{-1}$ *tal que* $\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = 1\}$.

Note que $v \in \mathcal{C}\ell^\times(V,q), \forall v \in V$ tal que $q(v) \neq 0$.
De fato, defina $v^{-1} = -\dfrac{v}{q(v)}$. Então,

$$vv^{-1} = -\frac{vv}{q(v)} = -\frac{-q(v)}{q(v)} = 1.$$

Analogamente, $v^{-1}v = 1$.

Vamos ver que o grupo das unidades age por automorfismos em $\mathcal{C}\ell(V,q)$.

Proposição 2.0.4 *A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} Ad: & \mathcal{C}\ell^\times(V,q) & \rightarrow & Aut(\mathcal{C}\ell(V,q)) \\ & \varphi & \mapsto & Ad_\varphi(x) = \varphi x \varphi^{-1}, \forall x \in \mathcal{C}\ell(V,q) \end{array}$$

é homomorfismo de grupos.

Demonstração: Vejamos que Ad está bem definida.

Seja $\varphi \in \mathcal{C}\ell^\times(V,q)$. Claro que $Ad_\varphi(1) = 1$

i) $Ad_\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x + \lambda y)\varphi^{-1} = \varphi x\varphi^{-1} + \lambda\varphi y\varphi^{-1} = Ad_\varphi(x) + \lambda Ad_\varphi(y), \forall x, y \in \mathcal{C}\ell(V,q), \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

ii) $Ad_\varphi(xy) = \varphi xy\varphi^{-1} = \varphi x\varphi^{-1}\varphi y\varphi^{-1} = Ad_\varphi(x)Ad_\varphi(y), \forall x, y \in \mathcal{C}\ell(V,q)$.

Então, $Ad_\varphi \in Aut(\mathcal{C}\ell(V,q))$.

Provemos, agora, que Ad é homomorfismo.

Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{C}\ell^\times(V,q)$. Então,

$$\begin{aligned} Ad_{\varphi\psi}(x) &= (\varphi \circ \psi)x(\varphi \circ \psi)^{-1} = \varphi(\psi x\psi^{-1})\varphi^{-1} = \varphi(Ad_\psi(x))\varphi^{-1} = \\ &= Ad_\varphi(Ad_\psi(x)) = (Ad_\varphi \circ Ad_\psi)(x), \forall x \in \mathcal{C}\ell(V,q). \end{aligned}$$

■

Este homomorfismo é chamado de ***representação adjunta*** de $\mathcal{C}\ell^{\times}(V,q)$.

Considere a álgebra de Lie[1] $\mathbb{C}\ell(V,q) = (\mathcal{C}\ell(V,q)),[,])$, onde $[x,y] = xy - yx$.

Proposição 2.0.5 *A aplicação*

$$\begin{aligned} ad: \ \mathbb{C}\ell(V,q) \to &\ \ Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}\ell(V,q)) \\ x \mapsto &\ \ ad_x(y) = [x,y] = xy - yx \end{aligned}$$

é homomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração: Vejamos que ad está bem definida.

Sejam $x \in \mathbb{C}\ell(V,q), a, b \in \mathcal{C}\ell(V,q)$. Então, segue da bilinearidade do colchete de Lie que ad_x é $\mathbb{K}$-linear.
$ad_x(ab) = [x,ab] = x(ab) - (ab)x = (xa - ax)b + a(xb - bx) = [x,a]b + a[x,b] =$
$= ad_x(a) \cdot b + a \cdot ad_x(b)$. Logo, $ad_x \in Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}\ell(V,q))$.

Verifiquemos, agora, que ad é homomorfismo de álgebras de Lie.

Temos que
$ad_{x+\lambda y}(z) = [x+\lambda y, z] = (x+\lambda y)z - z(x+\lambda y) = xz - zx + \lambda yz - \lambda zy = ad_x(z) + \lambda ad_y(z), \forall x, y \in \mathbb{C}\ell(V,q), z \in \mathcal{C}\ell(V,q), \lambda \in \mathbb{K}$. Logo, ad é linear. Temos as álgebras de Lie $\mathbb{C}\ell(V,q) = (\mathcal{C}\ell(V,q),[,])$ e $(Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}\ell(V,q)),[[,]])$. Então,

$$\begin{aligned} ad_{[x,y]}(z) &= [[x,y],z] = -[z,[x,y]] = [x,[y,z]] + [y,[z,x]] = \\ &= [x,[y,z]] - [y,-[z,x]] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = \\ &= ad_x([y,z]) - ad_y([x,z]) = ad_x(ad_y(z)) - ad_y(ad_x(z)) = \\ &= (ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x)(z) = [[ad_x, ad_y]](z), \forall z \in \mathcal{C}\ell(V,q). \end{aligned}$$

Logo, ad preserva colchete.

Portanto, ad é homomorfismo de álgebras de lie.

Denotaremos por $\langle , \rangle_q$ a (única) forma bilinear simétrica tal que $\langle v,v\rangle_q = q(v), \forall v \in V$. Temos, $\forall u, v \in V$ a seguinte ***identidade de polarização***

$$\langle u,v\rangle_q = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}.$$

Dessa identidade, notemos que $2\langle u,v\rangle_q = -(u+v)\cdot(u+v) + u \cdot u + v \cdot v$, donde

$$u \cdot v + v \cdot u = -2\langle u,v\rangle_q 1.$$

Usaremos esta identidade com frequência.

[1]Vide Apêndice 2

Proposição 2.0.6 *Seja $v \in V \subset \mathcal{C}\ell(V,q)$ tal que $q(v) \neq 0$. Então:*

i) $Ad_v(V) = V$

ii) $\forall w \in V, -Ad_v(w) = w - \dfrac{2\langle v, w\rangle_q v}{q(v)}$.

Demonstração:

i) $x \in Ad_v(V) \Rightarrow x = vuv^{-1}$, para algum $u \in V \Rightarrow x = vuv^{-1} = (-uv - 2\langle u, v\rangle_q)v^{-1} = -u + \dfrac{2\langle u, v\rangle_q v}{q(v)} \in V$.
$u \in V \Rightarrow u = v(v^{-1}uv)v^{-1} \in Ad_v(V)$.

ii)

$$\forall w \in V, Ad_v(w) = vwv^{-1} = -\frac{vwv}{q(v)} \Rightarrow -q(v)Ad_v(w) = vwv \tag{2.2}$$

Por (2.2),
$-q(v)Ad_v(w) = -wv^2 - 2\langle v, w\rangle_q v = q(v)w - 2\langle v, w\rangle_q v \Rightarrow -Ad_v(w) = w - \dfrac{2\langle v, w\rangle_q v}{q(v)}$.

■

Proposição 2.0.7 *$Ad_v|_V$ preserva a forma quadrática $q, \forall v \in V, q(v) \neq 0$.*

Demonstração:
$(Ad_v^* q)(w) = q(Ad_v(w)) = q\left(-w + \dfrac{2\langle v, w\rangle_q}{q(v)} v\right) = \left\langle -w + \dfrac{2\langle v, w\rangle_q}{q(v)} v, -w + \dfrac{2\langle v, w\rangle_q}{q(v)} v\right\rangle_q =$
$= \langle w, w\rangle_q - 2\left\langle w, \dfrac{2\langle v, w\rangle_q}{q(v)} v\right\rangle_q + \dfrac{4\langle v, w\rangle_q^2}{q(v)^2}\langle v, v\rangle_q = q(w) - \dfrac{4\langle v, w\rangle_q}{q(v)}\langle w, v\rangle_q + \dfrac{4\langle v, w\rangle_q^2}{q(v)} =$
$= q(w)$.

■

Definição 2.0.6 *O subgrupo $P(V,q)$ de $\mathcal{C}\ell^\times(V,q)$ é dado por*

$$P(V,q) = \langle\{v \in V; q(v) \neq 0\}\rangle.$$

Definição 2.0.7 *O grupo $Pin(V,q)$ é o subgrupo de $P(V,q)$ gerado pelos elementos $v \in V$ tal que $q(v) = \pm 1$, ou seja,*

$$Pin(V,q) = \langle\{v \in V; q(v) = \pm 1\}\rangle.$$

O grupo Spin(V,q) é definido por

$$Spin(V,q) = Pin(V,q) \cap \mathcal{C}\ell^0(V,q).$$

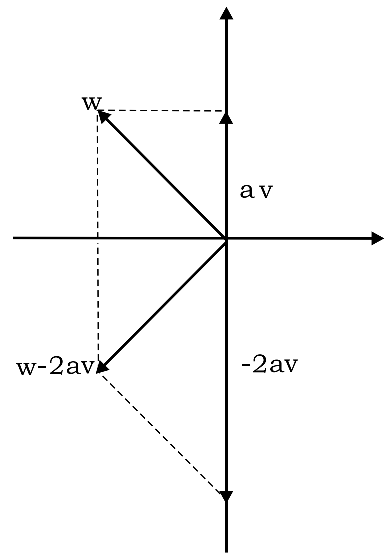

Figura 2.1: Reflexão de w através do hiperplano perpendicular a v, a= $\dfrac{\langle v,w\rangle_q}{q(v)}$

Se a forma quadrática q é positiva definida, então $w - \dfrac{2\langle v,w\rangle_q}{q(v)}v$ é interpretado geometricamente como uma reflexão de w através do hiperplano perpendicular a v.

Mas $-Ad_v(w) = w - \dfrac{2\langle v,w\rangle_q}{q(v)}v$, logo existe um sinal negativo espúrio prejudicando essa interpretação geométrica. Para remover este sinal, considere a ***representação adjunta modificada***

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{Ad}: & \mathcal{C}\ell^{\times}(V,q) & \to & GL(\mathcal{C}\ell(V,q)) \\ & \varphi & \mapsto & \widetilde{Ad}_{\varphi}(y) = \alpha(\varphi)y\varphi^{-1} \end{array}.$$

Note que $\widetilde{Ad}$ está bem definida.

De fato, $\widetilde{Ad}_{\varphi}(x+\lambda y) = \alpha(\varphi)(x+\lambda y)\varphi^{-1} + \alpha(\varphi)x\varphi^{-1} + \lambda\alpha(\varphi)y\varphi^{-1} = \widetilde{Ad}_{\varphi}(x) + \lambda\widetilde{Ad}_{\varphi}(y), \forall x,y \in \mathcal{C}\ell(V,q), \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Proposição 2.0.8 *$\widetilde{Ad}$ é homomorfismo de grupos.*

Demonstração:
$\widetilde{Ad}_{\varphi_1\varphi_2}(y) = \alpha(\varphi_1\varphi_2)y(\varphi_1\varphi_2)^{-1} = \alpha(\varphi_1)\alpha(\varphi_2)y\varphi_2^{-1}\varphi_2^{-1} = \alpha(\varphi_1)\widetilde{Ad}_{\varphi_2}(y)\varphi_1^{-1} =$
$= (\widetilde{Ad}_{\varphi_1} \circ \widetilde{Ad}_{\varphi_2})(y), \forall y \in \mathcal{C}\ell(V,q)$,

$(\widetilde{Ad}_{\varphi^{-1}} \circ \widetilde{Ad}_{\varphi})(y) = \widetilde{Ad}_{\varphi^{-1}}(\alpha(\varphi)y\varphi^{-1}) = \alpha(\varphi^{-1})\alpha(\varphi)y\varphi^{-1}\varphi = \alpha(1)y1 = y$. Analogamente, $(\widetilde{Ad}_{\varphi} \circ \widetilde{Ad}_{\varphi^{-1}})(y) = y, \forall y \in \mathcal{C}\ell(V,q)$. Logo, $\widetilde{Ad}_{\varphi^{-1}} = (\widetilde{Ad}_{\varphi})^{-1}$.

Proposição 2.0.9 *Se $\varphi \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$ então $\widetilde{Ad}_{\varphi} = Ad_{\varphi}$.*

Demonstração: $\varphi \in \mathcal{C}\ell^0(V,q) \Rightarrow \alpha(\varphi) = \varphi \Rightarrow \widetilde{Ad}_\varphi(y) = \alpha(\varphi)y\varphi^{-1} = \varphi y \varphi^{-1} = Ad_\varphi(y), \forall y.$

■

Analogamente ao caso para $\widetilde{Ad}$, mostra-se que $\widetilde{Ad}_v(w) = w - \dfrac{2\langle v,w\rangle_q}{q(v)}v.$

Proposição 2.0.10 $\widetilde{P}(V,q) = \{\varphi \in \mathcal{C}\ell^\times(V,q) : \widetilde{Ad}_\varphi(V) = V\}$ *é subgrupo de* $\mathcal{C}\ell^\times(V,q)$.

Demonstração: Vemos que $1 \in \widetilde{P}(V,q)$ pois $\widetilde{Ad}_1 v = \alpha(1)v1^{-1} = v$.

Dado $\varphi \in \widetilde{P}(V,q), \widetilde{Ad}_\varphi(V) = V \Rightarrow V = \widetilde{Ad}_{\varphi^{-1}}(\widetilde{Ad}_\varphi(V)) = \widetilde{Ad}_{\varphi^{-1}}(V) \Rightarrow \varphi^{-1} \in \widetilde{P}(V,q)$.

Sejam $\varphi, \psi \in \widetilde{P}(V,q)$. Então, $\varphi\psi \in \widetilde{P}(V,q)$, pois já sabemos que $\widetilde{Ad}_{\varphi\psi} = \widetilde{Ad}_\varphi \circ \widetilde{Ad}_\psi$.

■

Teorema 2.0.2 *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita e q uma forma quadrática não degenerada. Então o núcleo do homomorfismo*

$$\widetilde{Ad} : \widetilde{P}(V,q) \to Aut(V)$$

é exatamente o grupo $\mathbb{K}^\times = \{\lambda \cdot 1; \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Demonstração:

Seja $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. Então, $\widetilde{Ad}_\lambda(v) = \alpha(\lambda)v\lambda^{-1} = \lambda\alpha(1)v\lambda^{-1} = v, \forall v \in V.$

Portanto, $\mathbb{K}^\times \subset Ker\widetilde{Ad}$.

Seja $\varphi \in Ker\widetilde{Ad}$. Escolha[2] $\{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V tal que $q(v_i) \neq 0, \forall i$.

$\varphi \in Ker\widetilde{Ad} \Rightarrow \widetilde{Ad}_\varphi(v) = v, \forall v \in V \Rightarrow \alpha(\varphi)v\varphi^{-1} = v \Rightarrow \alpha(\varphi)v = v\varphi, \forall v \in V.$

Como $\varphi \in \mathcal{C}\ell^\times(V,q) \subset \mathcal{C}\ell(V,q), \varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, onde $\varphi_0 \in \mathcal{C}\ell^0(V,q), \varphi_1 \in \mathcal{C}\ell^1(V,q)$.

Então,

$\alpha(\varphi_0+\varphi_1)v = v(\varphi_0+\varphi_1) \Rightarrow \alpha(\varphi_0)v+\alpha(\varphi_1)v = v\varphi_0+v\varphi_1 \Rightarrow \varphi_0 v-\varphi_1 v = v\varphi_0+v\varphi_1 \Rightarrow \varphi_0 v - v\varphi_0 = v\varphi_1 + \varphi_1 v.$

Vemos que $\varphi_0 v - v\varphi_0 \in \mathcal{C}\ell^1(V,q)$, pois $\alpha(\varphi_0 v - v\varphi_0) = -\varphi_0 v + v\varphi_0 = -(\varphi_0 v - v\varphi_0)$ e $v\varphi_1 - \varphi_1 v \in \mathcal{C}\ell^0(V,q)$, pois $\alpha(v\varphi_1 - \varphi_1 v) = v\varphi_1 - \varphi_1 v$.

Logo, $\varphi_0 v - v\varphi_0 = 0 = v\varphi_1 - \varphi_1 v, \forall v \in V$. Daí,

$$\varphi_0 v = v\varphi_0 \text{ e } v\varphi_1 = -\varphi_1 v, \forall v \in V. \tag{2.3}$$

Pela construção de $\mathcal{C}\ell(V,q), \varphi_0$ e φ_1 são polinômios em $\mathbb{K}[v_1, \cdots, v_n]$.

[2]Isto é possível, pois q é não-degenerada [5]

Sabemos que $vw + wv = -2\langle v, w\rangle_q$. Se $v = w$, então

$$v^2 = -\langle v, v\rangle_q \in \mathbb{K}. \tag{2.4}$$

Podemos escrever $\varphi_0 = a_0 + v_1 a_1$, onde a_0 e a_1 são polinômios em $\mathbb{K}[v_2, \cdots, v_n]$. Note que em a_1 não aparece v_1, pois o mesmo foi colocado em evidência, e só há potência 1 em cada v_i devido a (2.4).

Analogamente, $\varphi_1 = b_1 + v_1 b_0$, onde b_1 e b_0 são polinômios em $\mathbb{K}[v_2, \cdots, v_n]$.

Afirmação: $a_0, b_0 \in \mathcal{C}\ell^0(V, q)$ e $a_1, b_1 \in \mathcal{C}\ell^1(V, q)$.

Sejam $a_0, a_1 \in \mathcal{C}\ell(V, q)$. Então, $a_0 = a_0' + a_0''$ e $a_1 = a_1' + a_1''$, onde $a_0', a_1' \in \mathcal{C}\ell^0(V, q)$ e $a_0'', a_1'' \in \mathcal{C}\ell^1(V, q)$. Daí, $\varphi_0 = a_0 + v_1 a_1 = a_0' + v_1 a_1'' + a_0'' + v_1 a_1'$.

Não é difícil ver que $a_0' + v_1 a_1'' \in \mathcal{C}\ell^0(V, q)$ e $a_0'' + v_1 a_1' \in \mathcal{C}\ell^1(V, q)$. Mas, $\varphi_0 \in \mathcal{C}\ell^0(V, q)$, então $a_0'' + v_1 a_1' = 0$.

Logo, $\varphi_0 = a_0' + v_1 a_1''$, onde $a_0' \in \mathcal{C}\ell^0(V, q)$ e $a_1'' \in \mathcal{C}\ell^1(V, q)$.

Analogamente, prova-se para φ_1, o que conclui a afirmação.

Em (2.3), fazendo $v = v_1$, temos $\varphi_0 v_1 = v_1 \varphi_0$ e $\varphi_1 v_1 = -v_1 \varphi_1$. Então,

$$(a_0 + v_1 a_1) v_1 = v_1 (a_0 + v_1 a_1) \Rightarrow a_0 v_1 + v_1 a_1 v_1 = v_1 a_0 + v_1^2 a_1 \tag{2.5}$$

$$(b_1 + v_1 b_0) v_1 = -v_1 (b_1 + v_1 b_0) \Rightarrow b_1 v_1 + v_1 b_0 v_1 = -v_1 b_1 - v_1^2 b_0. \tag{2.6}$$

Afirmação: $v_1 a_0 = a_0 v_1$ e $v_1 b_1 = -b_1 v_1$.

De fato, temos que $a_0 \in \mathcal{C}\ell^0(V, q)$ e é um polinômio em $\mathbb{K}[v_1, \cdots, v_n]$, mas tem apenas v_i's com potência 1.

Cada parcela deste polinômio deve conter apenas uma quantidade par de v_i's, pois $\alpha(v_i) = -v_i$ e $\alpha(a_0) = a_0$.

Analogamente, cada parcela do polinômio b_1 deve conter apenas uma quantidade ímpar de v_i's.

Sabemos que $v_i v_j + v_j v_i = -2\langle v_i, v_j\rangle_q = 0, i \neq j$. Logo, $v_i v_j = -v_j v_i$.

Como a_0 e b_1 não têm v_1 em nenhum de seus termos, $a_0 v_1 = (-1)^{2n} v_1 a_0 = v_1 a_0$ e $-b_1 v_1 = -((-1)^{2n+1} v_1 b_1) = v_1 b_1$, o que conclui a afirmação.

Por esta afirmação, (2.5) e (2.6) podem ser escritos, respectivamente, como

$v_1 a_0 - v_1^2 a_1 = v_1 a_0 + v_1^2 a_1$ e $-v_1 b_1 + v_1^2 b_0 = -v_1 b_1 - v_1^2 b_0$.

Daí, $0 = v_1^2 a_1 = -q(v_1) a_1$ e $0 = v_1^2 b_0 = -q(v_1) b_0$. Como, $q(v_i) \neq 0, a_1 = b_0 = 0$.

Portanto, φ_0 e φ_1 não envolvem v_1.

Repetindo o processo, vemos que φ_0 e φ_1 não envolvem $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Segue que, $\varphi_0 = \alpha(\varphi_0) = \varphi_0 \alpha(1) = \varphi_0 \cdot 1$ e $-\varphi_1 = \alpha(\varphi_1) = \varphi_1 \alpha(1) = \varphi_1 \cdot 1$. Logo, $\varphi_0 = t \cdot 1, t \in \mathbb{K}$ e $\varphi_1 = 0$. Então, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = t \cdot 1, t \in \mathbb{K}$. Note que $t \neq 0$ pois $\varphi \in \mathcal{C}\ell^{\times}(V, q)$.

Portanto, $\varphi \in \mathbb{K}^{\times}$.

■

Definição 2.0.8 *A aplicação* ***transposta*** *é dada por*

$$\begin{array}{rccc} (\ )^t: & \mathcal{C}\ell(V,q) & \to & \mathcal{C}\ell(V,q) \\ & \displaystyle\sum_{\{i_1,\cdots,i_r\}} \lambda_{i_1\cdots i_r} v_{i_1}\cdots v_{i_r} & \mapsto & \displaystyle\sum_{\{i_r,\cdots,i_1\}} \lambda_{i_1\cdots i_r} v_{i_r}\cdots v_{i_1} \end{array}.$$

Proposição 2.0.11 $(\ )^t$ *é antiautomorfismo, isto é,* $(\varphi\psi)^t = \psi^t\varphi^t$.

Demonstração: De fato, $()^t$ é claramente linear, e

$$\begin{aligned} (\varphi\psi)^t &= \left(\sum_{\{i_1,\cdots,i_n\}} \alpha_{i_1\cdots i_n} v_{i_1}\cdots v_{i_n} \cdot \sum_{\{j_1,\cdots,j_m\}} \beta_{j_1\cdots j_m} w_{j_1}\cdots w_{j_m}\right)^t = \\ &= \left(\sum_{\{i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_m\}} \alpha_{i_1\cdots i_n}\beta_{j_1\cdots j_m} v_{i_1}\cdots v_{i_n} w_{j_1}\cdots w_{j_n}\right)^t = \\ &= \sum_{\{j_m,\cdots,j_1,i_n,\cdots,i_1\}} \beta_{j_1\cdots j_m}\alpha_{i_1\cdots i_n} w_{j_m}\cdots w_{j_1} v_{i_n}\cdots v_{i_1} = \\ &= \sum_{\{j_m,\cdots,j_1\}} \beta_{j_1\cdots j_m} w_{j_m}\cdots w_{j_1} \cdot \sum_{\{i_n,\cdots,i_1\}} \alpha_{i_1\cdots i_n} v_{i_m}\cdots v_{i_1} = \psi^t\varphi^t. \end{aligned}$$

■

Note que $(\varphi^t)^t = \varphi$.

Definição 2.0.9 *A aplicação* ***norma*** *é dada por*

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathcal{C}\ell(V,q) & \to & \mathcal{C}\ell(V,q) \\ & \varphi & \mapsto & \varphi\alpha(\varphi^t) \end{array}.$$

Observação 2.0.1 $\alpha(\varphi^t) = (\alpha(\varphi))^t$

De fato, seja $\varphi = \displaystyle\sum_{i_1,\cdots,i_r} \lambda_{i_1\cdots i_r} v_{i_1}\cdots v_{i_r}$. Então

$$\alpha(\varphi^t) = \sum_{i_1,\cdots,i_r} \lambda_{i_1\cdots i_r}\alpha(v_{i_r})\cdots\alpha(v_{i_1}) = \left(\sum_{i_1,\cdots,i_r} \lambda_{i_1\cdots i_r}\alpha(v_{i_1})\cdots\alpha(v_{i_r})\right)^t = (\alpha(\varphi))^t.$$

Observação 2.0.2 $\forall v \in V, N(v) = q(v)$.

De fato, $N(v) = v\alpha(v^t) = v\alpha(v) = v(-v) = -v^2 = q(v)$.

Proposição 2.0.12 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e q uma forma quadrática não degenerada em V. Então $N : \widetilde{P}(V,q) \to \mathbb{K}^{\times}$ é um homomorfismo de grupos.*

Demonstração:

Vamos provar que $N(\widetilde{P}(V,q)) \subset \mathbb{K}^{\times}$.

Seja $\varphi \in \widetilde{P}(V,q)$. Então,

$$\widetilde{Ad}_{\varphi}(v) = \alpha(\varphi)v\varphi^{-1} \in V, \forall v \in V \Rightarrow (\alpha(\varphi)v\varphi^{-1})^t = (\varphi^{-1})^t(\alpha(\varphi)v)^t.$$

Vemos que,

$$(\varphi^{-1})^t\varphi^t = (\varphi\varphi^{-1})^t = 1^t = 1.$$

De forma análoga, $\varphi^t(\varphi^{-1})^t = 1$. Logo, $(\varphi^t)^{-1} = (\varphi^{-1})^t$.

Daí,

$$(\alpha(\varphi)v\varphi^{-1})^t = (\varphi^t)^{-1}v\alpha(\varphi^t).$$

Mas como $\alpha(\varphi)v\varphi^{-1} \in V$, temos que $(\alpha(\varphi)v\varphi^{-1})^t = \alpha(\varphi)v\varphi^{-1}$.

Então, $\alpha(\varphi)v\varphi^{-1} = (\varphi^t)^{-1}v\alpha(\varphi^t) \Rightarrow v = \varphi^t\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}(\alpha(\varphi^t))^{-1} = \widetilde{Ad}_{\alpha(\varphi^t)\varphi}(v), \forall v \in V$. Logo, $\alpha(\varphi^t)\varphi \in Ker\widetilde{Ad}|_{\widetilde{P}(V,q)}$.

Pelo Teorema 2.0.2, $\alpha(\varphi^t)\varphi \in \mathbb{K}^{\times}$.

Então, $\alpha(\alpha(\varphi^t)\varphi) = \varphi^t\alpha(\varphi) = N(\varphi^t) \in \mathbb{K}^{\times}$. Como φ é qualquer, isto é válido para $N(\varphi)$.

Agora, vejamos que N é homomorfismo. Claro que $N(1) = 1$.

Sejam $\varphi, \psi \in \widetilde{P}(V,q)$. Então,

$$N(\varphi\psi) = \varphi\psi\alpha((\varphi\psi)^t) = \varphi\psi \cdot \alpha(\psi^t\varphi^t) = \varphi\psi\alpha(\psi^t)\alpha(\varphi^t) = \varphi N(\psi)\alpha(\varphi^t) = N(\varphi) \cdot N(\psi).$$

■

Corolário 2.0.2 *A transformação $\widetilde{Ad}_{\varphi}$, $\varphi \in \widetilde{P}(V,q)$, preserva a forma quadrática. Portanto, temos representações*

$$\widetilde{Ad} : \widetilde{P}(V,q) \to O(V,q)$$

$$\widetilde{Ad} \cdot N : \widetilde{P}(V,q) \to C(V,q)$$

onde $C(V,q) = \{\lambda \in GL(V); \lambda^* q = tq$, para algum $t \in \mathbb{K}^{\times}\}$ denota o ***`grupo conforme`*** *de q.*

Demonstração: Primeiramente, vemos que

$$N(\alpha(\varphi)) = \alpha(\varphi)\alpha(\alpha(\varphi^t)) = \alpha(\varphi)\varphi^t = \alpha(\varphi\alpha(\varphi^t)) = \alpha(N(\varphi))$$

Como $\varphi \in \widetilde{P}(V,q)$, então $N(\varphi) \in \mathbb{K}^\times$.

Daí, $\alpha(N(\varphi)) = N(\varphi) \cdot \alpha(1) = N(\varphi)$. Logo, $N(\alpha(\varphi)) = N(\varphi)$.

Para $v \in V$ com $q(v) \neq 0$, temos

$$N(\widetilde{Ad}_\varphi(v)) = N(\alpha(v)v\varphi^{-1}) = N(\alpha(v))N(v)N(\varphi)^{-1} = N(\varphi)N(\varphi)^{-1}N(v) = N(v).$$

Pela observação 2.0.2 segue que $q(\widetilde{Ad}_\varphi(v)) = q(v)$. Ou seja, $\widetilde{Ad}_\varphi$ preserva a forma quadrática q.

Como $N(\varphi) \in \mathbb{K}^\times$,então $N(\varphi) = \lambda \cdot 1, \lambda \neq 0$. Então,

$$(\widetilde{Ad}_\varphi \cdot N(\varphi))(v) = (\widetilde{Ad}_{\varphi\cdot\lambda})(v) = \widetilde{Ad}_\varphi(\lambda v) = \lambda\widetilde{Ad}_\varphi(v) \Rightarrow q((\widetilde{Ad}_\varphi \cdot N(\varphi))v) = q(\lambda\widetilde{Ad}_\varphi(v)) = \lambda^2 q(v).$$

Logo, $\widetilde{Ad}_\varphi \cdot N \in C(V,q)$.

■

Proposição 2.0.13 *i) Seja $V^\times = \{v \in V, q(v) \neq 0\}$. Então $P(V,q) = \{v_1 \cdots v_r \in \mathcal{C}\ell(V,q); v_1 \cdots v_r$ é uma sequência finita de $V^\times\}$.*

ii) Seja $S = \{v \in V; q(v) = \pm 1\}$. Então $Pin(V,q) = \{v_1 \cdots v_r; v_i \in S, \forall i\}$.

iii) $Spin(V,q) = \{w_1 \cdots w_r \in Pin(V,q); r$ é par$\}$.

Demonstração:

i) Por definição $P(V,q) = \langle\{v \in V; q(v) \neq 0\}\rangle = \langle V^\times\rangle$. Chamemos A:=$\{v_1 \cdots v_r \in \mathcal{C}\ell(V,q); v_1 \cdots v_r$ é uma sequência finita de $V^\times\}$.

"$\supseteq$" É claro, pois $P(V,q)$ é grupo.

"$\subseteq$" $V^\times \subset A$,mas $P(V,q) = \langle V^\times\rangle \Rightarrow P(V,q) \subseteq A$.

ii) Por definição $Pin(V,q) = \langle\{v \in V; q(v) = \pm 1\}\rangle = \langle S\rangle$. Chamemos $B := \{v_1 \cdots v_r; v_i \in S, \forall i\}$

"$\supseteq$" É claro.

"$\subseteq$" $S \subset B$, mas $Pin(V,q) = \langle S\rangle$, o que implica que $Pin(V,q) \subseteq B$.

iii) Por definição $Spin(V,q) = Pin(V,q) \cap \mathcal{C}\ell^0(V,q)$. Seja $C := \{w_1 \cdots w_r \in Pin(V,q); r$ é par$\}$.

" $\supseteq$ " $w_1 \cdots w_r \in Pin(V,q)$ e como r é par $\alpha(w_1 \cdots w_r) = (-1)^r w_1 \cdots w_r = w_1 \cdots w_r$. Então $w_1 \cdots w_r \in Spin(V,q)$.

" $\subseteq$ " $\varphi \in Spin(V,q) \Rightarrow \varphi \in Pin(V,q)$ e $\varphi \in \mathcal{C}\ell^0(V,q) \Rightarrow \varphi = v_1 \cdots v_r, v_i \in S$ e $\alpha(\varphi) = \varphi \Rightarrow \varphi \in Pin(V,q)$ e r é par. Logo, $\varphi \in C$.

■

Lembre que $\widetilde{Ad} : \widetilde{P}(V,q) \to O(V,q)$ e que $\forall v \neq 0, q(v) \neq 0, w \in V, \widetilde{Ad}_v(w) = w - \dfrac{2\langle v,w\rangle_q}{q(v)} v$ é a reflexão de w através do hiperplano perpendicular a v.

Proposição 2.0.14 $P(V,q) \subset \widetilde{P}(V,q)$.

Demonstração: Seja $V^\times = \{v \in V; q(v) \neq 0\}$.

$v \in V^\times \Rightarrow \widetilde{Ad}_v(w) = w - \dfrac{2\langle v,w\rangle_q}{q(v)} v \in V \Rightarrow v \in \widetilde{P}(V,q)$. Logo, $V^\times \subset \widetilde{P}(V,q)$. Mas, $P(V,q) = \langle V^\times \rangle$. Portanto, $P(V,q) \subset \widetilde{P}(V,q)$.

■

Considere o homomorfismo

$$\begin{array}{rrl} \widetilde{Ad}: & P(V,q) \to & O(V,q) \\ & v_1 \cdots v_r \mapsto & \widetilde{Ad}_{v_1 \cdots v_r} = \widetilde{Ad}_{v_1} \circ \widetilde{Ad}_{v_2} \circ \cdots \circ \widetilde{Ad}_{v_r} \end{array},$$

onde $\widetilde{Ad}_{v_i}(w) = w - \dfrac{2\langle v_i,w\rangle_q}{q(v_i)} v_i, i \in \{1, \cdots, r\}$.

Por definição, os subgrupos $Pin(V,q)$ e $Spin(V,q)$ são subgrupos de $P(V,q)$ e portanto $\widetilde{Ad}(Pin(V,q)), \widetilde{Ad}(Spin(V,q))$ e $\widetilde{Ad}(P(V,q))$ são subgrupos de $O(V,q)$, e estes subgrupos são gerados por reflexões.

Proposição 2.0.15 $\widetilde{Ad}(Pin(V,q)), \widetilde{Ad}(Spin(V,q))$ *e* $\widetilde{Ad}(P(V,q))$ *são subgrupos normais de* $O(V,q)$.

Demonstração: Já vimos que o grupo $O(V,q)$ age por automorfismos em $\mathcal{C}\ell(V,q)$.

Seja $f \in O(V,q)$. Então, $(f \circ \alpha)(v) = f(-v) = \alpha(f(v)), \forall v \in V$. Ou seja, α comuta com $f, \forall f \in O(V,q)$.

Sejam $v, w \in V$ com $q(v) \neq 0$ e $g \in O(V,q)$.

Vemos que $g(v)g(v^{-1}) = g(vv^{-1}) = g(1) = 1$. Analogamente, $g(v^{-1})g(v) = 1$. Então, $(g(v))^{-1} = g(v^{-1})$. Portanto,

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad}_{g(v)}(w) &= \alpha(g(v))w(g(v))^{-1} = g(\alpha(v))wg(v^{-1}) = g(\alpha(v)g^{-1}(w)(v^{-1})) = \\ &= g(\widetilde{Ad}_v(g^{-1}(w))) = (g \circ \widetilde{Ad}_v \circ g^{-1})(w), \forall w \in V, \end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{Ad}_{g(v)} = g \circ \widetilde{Ad}_v \circ g^{-1}, \forall v \in V$ com $q(v) \neq 0, \forall g \in O(V,q)$.

Vamos provar que $g\widetilde{Ad}(Pin(V,q))g^{-1} = \widetilde{Ad}(Pin(V,q)), \forall g \in O(V,q)$.

Seja $\varphi \in Pin(V,q)$. Então, $\varphi = v_1 \cdots v_r \in \mathcal{C}\ell(V,q), v_i \in S = \{v \in V; q(v) = \pm 1\}$.

$$\begin{aligned}
g \circ \widetilde{Ad}_\varphi \circ g^{-1} &= g \circ \widetilde{Ad}_{v_1 \cdots v_r} \circ g^{-1} = g \circ \widetilde{Ad}_{v_1} \circ \cdots \circ \widetilde{Ad}_{v_r} \circ g^{-1} = \\
&= g \circ \widetilde{Ad}_{v_1} \circ g^{-1} \circ g \circ \widetilde{Ad}_{v_2} \circ g^{-1} \circ \cdots \circ g \circ \widetilde{Ad}_{v_r} \circ g^{-1} = \\
&= \widetilde{Ad}_{g(v_1)} \circ \cdots \circ \widetilde{Ad}_{g(v_r)} = \widetilde{Ad}_{g(v_1) \cdots g(v_r)}.
\end{aligned}$$

Como $g \in O(V,q), v_i \in S$, $q(g(v_i)) = q(v_i) = \pm 1$. Então, $g(v_1) \cdots g(v_r) \in Pin(V,q)$. Mostra-se de forma análoga para $\widetilde{Ad}(Spin(V,q))$ e $\widetilde{Ad}(P(V,q))$.

■

Definição 2.0.10 *O* **`grupo ortogonal especial`** *é dado por*

$$SO(V,q) = \{\lambda \in O(V,q) : det(\lambda) = 1\}.$$

O Teorema de Cartan e Dieudonné[3] diz que para toda forma quadrática não degenerada em um espaço vetorial de dimensão finita, o grupo $O(V,q)$ é gerado por reflexões e $SO(V,q)$ é gerado por pares de reflexões.

Definição 2.0.11 *Um corpo $\mathbb{K}$ é chamado* **`corpo spin`** *se a característica de $\mathbb{K}$ não é 2 e se $\forall a \in \mathbb{K}, \exists t \in \mathbb{K}$ tal que $t^2 = a$ ou $t^2 = -a$.*

São exemplos de corpo spin $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Teorema 2.0.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo spin $\mathbb{K}$ e q uma forma quadrática não-degenerada fixada em V. Então existem sequências exatas curtas de grupos*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow Spin(V,q) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} SO(V,q) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow Pin(V,q) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} O(V,q) \longrightarrow 0$$

$$\textit{onde } F = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} & , \textit{se } \sqrt{-1} \notin \mathbb{K} \\ \mathbb{Z}_4 = \{1, -1, -\sqrt{-1}, \sqrt{-1}\} & , \textit{caso contrário} \end{cases}.$$

Demonstração: Considere

$$F \xrightarrow{g} Pin(V,q) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} O(V,q) .$$

[3] Ver Referência [1]

Provemos que $Im(g) = \{1, -1\} = Ker\widetilde{Ad}$.

Caso 1) $F = \mathbb{Z}_2$

Neste caso pomos $g(\pm 1) = \pm 1$.

" $\subseteq$ " $\widetilde{Ad}_{\pm 1} v = \alpha(\pm 1) v (\pm 1)^{-1} = v$.

" $\supseteq$ " Seja $\varphi = v_1 \cdots v_r \in Ker\widetilde{Ad} = \mathbb{K}^\times$.

Por um lado,

$$N(\varphi) = \varphi \alpha(\varphi^t) = \varphi \alpha(\varphi) = \varphi \varphi \alpha(1) = \varphi^2.$$

Por outro lado,

$$N(\varphi) = N(v_1 \cdots v_r) = N(v_1) \cdots N(v_r) = q(v_1) \cdots q(v_r) = (\pm 1) \cdots (\pm 1) = \pm 1.$$

Logo, $\varphi^2 = \pm 1$. Mas, $\varphi = \lambda \cdot 1, \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{K}$. Então, $\lambda^2 = \pm 1$. Como $\sqrt{-1} \notin \mathbb{K}$, temos $\lambda = \pm 1 \Rightarrow \varphi = \pm 1$. O que completa a igualdade neste caso.

Caso 2) $F = \mathbb{Z}_4$.

Nesse caso, pomos $g(\pm 1) = \pm 1, g(\pm\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}$.

" $\subseteq$ " Para ± 1 a verifcação é análoga a que fizemos no caso 1.

$$\widetilde{Ad}_{\pm\sqrt{-1}} v = \alpha(\pm\sqrt{-1}) v (\pm\sqrt{-1})^{-1} = \alpha(\pm\sqrt{-1}) v (\pm\sqrt{-1}) = v.$$

" $\supseteq$ " $\varphi = \lambda \cdot 1$ e $\varphi^2 = \pm 1 \Rightarrow \lambda^2 = \pm 1$. Agora, $\sqrt{-1} \in \mathbb{K}$, portanto $\lambda = \pm 1, \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \varphi = \pm 1, \pm\sqrt{-1}$.

Analogamente, prova-se a exatidão de

$$F \longrightarrow Spin(V, q) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} SO(V, q) .$$

Vamos provar a sobrejetividade de $\widetilde{Ad}$. Então temos que mostrar que $\widetilde{Ad}(Spin(V, q)) = SO(V, q)$ e $\widetilde{Ad}(Pin(V, q)) = O(V, q)$.

É claro que

$$\widetilde{Ad}(Spin(V, q)) \subseteq SO(V, q)$$
$$\widetilde{Ad}(Pin(V, q)) \subseteq O(V, q).$$

Para provarmos " $\supseteq$ ", basta verificar que qualquer reflexão $\widetilde{Ad}_v, q(v) \neq 0$, pertence a $\widetilde{Ad}(Pin(V, q))$ e qualquer par de reflexões $\widetilde{Ad}_v \circ \widetilde{Ad}_w, q(v), q(w) \neq 0$, pertence a $\widetilde{Ad}(Spin(V, q))$. Daí o resultado segue pelo Teorema de Cartan-Dieudonné.

Seja $v \in V, q(v) \neq 0$.

Como $\mathbb{K}$ é corpo spin, existe $t \in \mathbb{K}$ tal que $t^2 = \pm(q(v))^{-1}$. Então, $t^2 q(v) = \pm 1 \Rightarrow q(tv) = \pm 1$. Logo, $tv \in Pin(V, q)$.

Afirmação: $\widetilde{Ad}_{tv} = \widetilde{Ad}_v$.

De fato, $\widetilde{Ad}_{tv}(w) = w - \dfrac{2\langle tv, w\rangle_q}{q(tv)} tv = w - \dfrac{2\langle v, w\rangle_q}{q(v)} v = \widetilde{Ad}_v(w)$.

Como $\rho_v = \widetilde{Ad}_v$, então $\rho_v \in \widetilde{Ad}(Pin(V,q))$.

Da mesma forma, $\widetilde{Ad}_v \circ \widetilde{Ad}_w = \widetilde{Ad}_v \circ \widetilde{Ad}_w = \widetilde{Ad}_{vw}$. Mas $vw \in Spin(V,q) \Rightarrow \widetilde{Ad}_v \circ \widetilde{Ad}_w \in \widetilde{Ad}(Spin(V,q)) \Rightarrow SO(V,q) \subseteq \widetilde{Ad}(Spin(V,q))$.

A injetividade das aplicações $F \to Spin(V,q)$ e $F \to Pin(V,q)$ é facilmente verificada enviando cada elemento a de F(em ambos os casos) em $a \cdot 1$, onde 1 é a identidade dos grupos $Spin(V,q)$ e $Pin(V,q)$.

■

Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita, $dimV = n$, e q uma forma quadrática ***não-degenerada*** em V. Já que V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ escolhemos[4] uma base tal que $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$, onde $x = (x_1, \cdots, x_n), r + s = n$ e $0 \leqslant r \leqslant n$.

Notação:

Neste caso, denotaremos

$q_{r,s} \equiv q$

$O(r,s) \equiv O(V,q); O(n) \equiv O(n,0)$

$SO(r,s) \equiv SO(V,q); SO(n) \equiv SO(n,0)$

$Pin_{r,s} \equiv Pin(V,q); Pin_n \equiv Pin_{n,0}$

$Spin_{r,s} \equiv Spin(V,q); Spin_n \equiv Spin_{n,0}$

$P_{r,s} \equiv P(V,q)$

$\widetilde{P}_{r,s} \equiv \widetilde{P}(V,q)$

$\mathcal{C}\ell_{r,s} \equiv \mathcal{C}\ell(V,q)$

$\mathcal{C}\ell_n \equiv \mathcal{C}\ell_{n,0}; \mathcal{C}\ell_n^* \equiv \mathcal{C}\ell_{0,n}$.

É possível mostrar que a álgebra de clifford $\mathcal{C}\ell_{r,s}$ tem dimensão 2^{r+s}. A prova pode ser vista na referência [4].

Teorema 2.0.4 *Existem sequências exatas curtas*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_{r,s} \longrightarrow SO(r,s) \longrightarrow 1$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Pin_{r,s} \longrightarrow O(r,s) \longrightarrow 1$$

$\forall (r,s)$. *Além disso, se* $(r,s) \neq (1,1)$, *este recobrimento duplo de* $SO(r,s)$ *é não trivial. Portanto, no caso especial*

[4]Vide Referência [5]

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_n \xrightarrow{\xi_0} SO(n) \longrightarrow 1$$

a aplicação $\xi_0 = \widetilde{Ad}$ *representa o homomorfismo de recobrimento universal de* $SO(n), \forall n \geqslant 3$.

A parte algébrica deste teorema segue do Teorema 2.0.3. A parte topológica será desenvolvida nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Fundamentos Topológicos

Discutiremos neste capítulo algumas das ferramentas necessárias para entender os aspectos topológicos do Teorema 2.0.4. Nossa apresentação será concisa. Para maiores detalhes e exemplos, veja a referência [8].

3.1 Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento

Definição 3.1.1 *Sejam X um espaço topológico e $I = [0,1]$. Um* ***caminho*** *de $x_0 \in X$ a $x_1 \in X$ é uma aplicação contínua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Um caminho é dito* ***fechado*** *em x_0 se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, e é fechado se é fechado em algum $x \in X$.*

Definição 3.1.2 *Para $x \in X$,* ***caminho constante*** *em x é definido por $c_x : I \to X, c_x(s) = x, \forall s \in I$.*

Note que um caminho constante é um caminho fechado.

Vamos definir no conjunto dos caminhos fechados em um ponto x_0 do espaço topológico X uma estrutura de grupo.

Definição 3.1.3 *Sejam $\alpha, \beta : I \to X$ caminhos fechados tais que $\alpha(1) = \beta(0)$. O* ***produto*** *de α e β, denotado por $\alpha * \beta$, é um caminho em X definido por*

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

Note que $\alpha * \beta$ é uma aplicação contínua, e de fato um caminho fechado.

Vemos que o produto de α e β, consiste em percorrer α e depois β. Como o tempo que dispomos ainda é 1, precisamos dobrar a velocidade em α e β.

Definição 3.1.4 *Seja $\alpha : I \to X$ um caminho fechado em x_0. O* ***caminho inverso*** *α^{-1} de α é definido por $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$.*

Definição 3.1.5 *Sejam $\alpha, \beta : I \to X$ caminhos de x_0 a x_1. Eles são ditos* ***homotópicos****, $\alpha \sim \beta$, se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que*

$$H(s,0) = \alpha(s), H(s,1) = \beta(s), \forall s \in I$$
$$H(0,t) = x_0,\ H(1,t) = x_1, \forall t \in I.$$

A aplicação H é dita ser uma ***homotopia*** *entre α e β.*

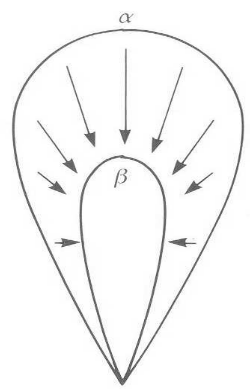

Figura 3.1: A imagem de α sendo continuamente deformada na imagem de β, onde α e β são caminhos fechados.(A figura foi retirada da referência [10])

Proposição 3.1.1 *A relação $\alpha \sim \beta$ é relação de equivalência no conjunto dos caminhos fechados em x_0.*

Demonstração:

i) Reflexiva:

Seja $\alpha : I \to X$ um caminho fechado em x_0. Defina $H : I \times I \to X, H(s,t) = \alpha(s)$.

Então,

$$H(s,0) = \alpha(s), H(s,1) = \alpha(s), \forall s \in I$$
$$H(0,t) = \alpha(0) = x_0 = \alpha(1) = H(1,t), \forall t \in I.$$

Logo, $\alpha \sim \beta$.

ii) Simétrica:

Seja $\alpha \sim \beta$ com uma homotopia H, defina $G : I \times I \to X, G(s,t) = H(s, 1-t)$.

Note que

$$\begin{aligned} G(s,0) = H(s,1) = \beta(s) \\ G(s,1) = H(s,0) = \alpha(s), \forall s \in I \\ G(0,t) = H(0,1-t) = x_0 \\ G(1,t) = H(1,1-t) = x_0, \forall t \in I. \end{aligned}$$

Logo, $\beta \sim \alpha$.

iii) Transitiva:

Sejam $\alpha \sim \beta$ e $\beta \sim \gamma$. Se G é uma homotopia entre α e β e H é uma homotopia entre β e γ Defina

$$F(s,t) = \begin{cases} G(s,2t) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ H(s,2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

Vemos que

$$\begin{aligned} F(s,0) = G(s,0) = \alpha(s) \\ F(s,1) = H(s,1) = \gamma(s), \forall s \in I \end{aligned}$$

$$F(0,t) = \begin{cases} G(0,2t) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ H(s,2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \forall t \in I \end{cases}.$$

Logo $H(0,t) = x_0, \forall t \in I$.

Analogamente para $H(1,t)$.

Portanto, $\alpha \sim \gamma$.

■

Definição 3.1.6 *A classe de equivalência dos caminhos fechados em x_0 é denotada por $[\alpha]$, onde α é um caminho fechado, e é chamada* ***classe de homotopia*** *de α.*

Definição 3.1.7 *Sejam $\mathcal{C}(X,x_0) = \{\alpha : I \to X; \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$. O conjunto das classes de homotopia dos caminhos fechados em x_0 é denotado por $\pi_1(X,x_0)$ e é chamado de* ***grupo fundamental*** *de X em x_0, ou seja, $\pi_1(X,x_0) = \{[\alpha] : \alpha \in \mathcal{C}(X,x_0)\}$. O* ***produto*** *das classes de homotopia $[\alpha]$ e $[\beta]$ é definido por $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.*

Lema 3.1.1 *O produto das classes de homotopia independe do caminho representante, isto é, se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$ então $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.*

Demonstração: Sejam F uma homotopia entre α e α' e G uma homotopia entre β e β'. Defina

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \forall t \in I \end{cases}.$$

Vemos que

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2s-1,0) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \forall t \in I \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \forall t \in I \end{cases} = (\alpha * \beta)(s).$$

Analogamente, $H(s,1) = \alpha'\beta'(s)$. E vemos que $H(0,t) = F(0,t) = x_0 = G(1,t) = H(1,t)$.

Portanto, $\alpha * \beta \sim \alpha'\beta'$.

■

O teorema seguinte mostra que o grupo fundamental é um grupo com a operação produto, e identidade $[c_{x_0}]$.

Teorema 3.1.1 *Sejam α e β caminhos fechados em $x \in X$, então*

i) $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$

ii) $[\alpha] * [c_{x_0}] = [\alpha] = [c_{x_0}] * [\alpha]$

iii) $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_{x_0}]$ *e* $[\alpha^{-1}] * [\alpha] = [c_{x_0}]$. *ou seja,* $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$

Demonstração:

i) Vemos que

$$([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = ([\alpha * \beta]) * \gamma = [(\alpha * \beta) * \gamma]$$
$$\text{e } [\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = [\alpha] * [\beta * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)].$$

Então para mostrarmos a associatividade precisamos mostrar que $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.

Para isto, defina

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(4s/(1+t)) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1+t}{4} \\ \beta(4s-t-1) & \frac{1+t}{4} \leqslant s \leqslant \frac{2+t}{4} \\ \gamma((4s-t-2)/2-t) & \frac{2+t}{4} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}.$$

Segue que,

$$F(s,0)=\begin{cases} \alpha(4s) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1+t}{4} \\ \beta(4s-1) & \frac{1}{4}\leqslant s\leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma((2s-1) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}.$$

Mas,

$$(\alpha*\beta)*\gamma(s)=\begin{cases} \alpha*\beta(2s)) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma(2s-1) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4s)) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{4} \\ \beta(4s-1) & \frac{1}{4}\leqslant s\leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma(2s-1) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}.$$

Logo, $F(s,0)=(\alpha*\beta)*\gamma(s)$.

Analogamente, $F(s,1)=\alpha*(\beta*\gamma)(s)$.

Vemos ainda que $F(0,t)=\alpha(0)=x_0=\gamma(1)=F(1,t)$.

ii) Sabemos que $[\alpha]*[c_{x_0}]=[\alpha*c_{x_0}]$.

Queremos mostrar que $\alpha*\gamma*c_{x_0}\sim\alpha$.

Defina

$$F(s,t)=\begin{cases} \alpha(2s/(1+t)) & 0\leqslant s\leqslant \frac{t+1}{2} \\ x_0 & \frac{t+1}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}.$$

Vem que,

$$F(s,0)=\begin{cases} \alpha(2s) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2} \\ x_0 & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} = \alpha*c_{x_0}(s),$$

$$F(s,1)=\begin{cases} \alpha(s) & 0\leqslant s\leqslant 1 \\ x_0 & s=1 \end{cases} = \alpha(s).$$

E $F(0,t)=\alpha(0)=x_0=F(1,t)$.

Analogamente,

$$F'(s,t)=\begin{cases} x_0 & 0\leqslant s\leqslant \frac{1-t}{2} \\ \alpha(2s-1+t/(1+t)) & \frac{1-t}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}$$

é homotopia entre $c_{x_0}*\alpha$ e α.

iii) Defina

$$F(s,t)=\begin{cases} \alpha(2s/(1-t)) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-s)(1-t)) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases}.$$

Segue que,

$$F(s,0)=\begin{cases}\alpha(2s) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ \alpha(2(1-s)) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\alpha(2s) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ \alpha^{-1}(2s-1) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}=\alpha*\alpha^{-1}(s),$$

$$F(s,1)=\begin{cases}\alpha(0) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ \alpha(0) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}=c_{x_0}(s).$$

Logo, $\alpha*\alpha^{-1}\sim c_{x_0}$.

Defina

$$F'(s,t)=\begin{cases}\alpha((1-2s)(1-t)) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ \alpha((2s-1)(1-t)) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}.$$

Daí

$$F'(s,0)=\begin{cases}\alpha((1-2s) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ \alpha(2s-1) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\alpha^{-1}(2s) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ \alpha(2s-1) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}=\alpha^{-1}*\alpha(s),$$

$F'(s,1)=x_0=c_{x_0}(s)$.

Logo, $\alpha^{-1}*\alpha\sim c_{x_0}$.

Portanto, $[\alpha^{-1}]=[\alpha]^{-1}$.

■

O próximo teorema nos diz que o grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$ de um espaço topológico X conexo por caminhos, independe da escolha do ponto $x_0\in X$.

Teorema 3.1.2 *Sejam X um espaço topológico conexo por caminhos e $x_0,x_1\in X$. Então $\pi_1(X,x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$.*

Demonstração: Seja $\eta:I\to X$ um caminho tal que $\eta(0)=x_0$ e $\eta_1=x_1$. Defina

$$\begin{array}{rrl} P_\eta: & \pi_1(X,x_0)\to & \pi_1(X,x_1)\\ & [\alpha]\mapsto & [\eta^{-1}*\alpha*\eta]\end{array}.$$

Vamos mostrar que $\eta^{-1}*\alpha*\eta$ é um caminho fechado em x_1.

De fato, se $\alpha(0)=\alpha(1)=x_0$,

$$(\eta^{-1}*\alpha)*\eta=\begin{cases}\eta^{-1}*\alpha(2s) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ \alpha(2s-1) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\eta^{-1}(4s) & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{4}\\ \alpha(4s-1) & \frac{1}{4}\leqslant s\leqslant \frac{1}{2}\\ \eta(2s-1) & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases},$$

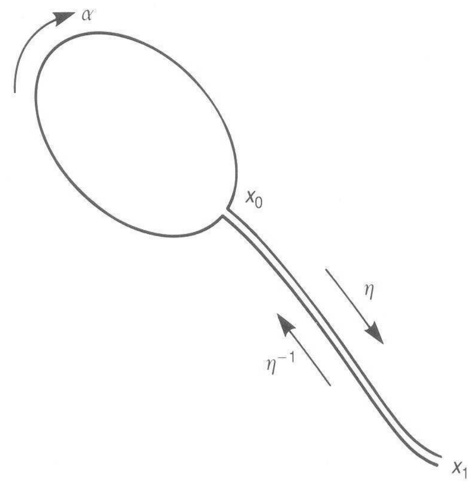

Figura 3.2: A partir de um caminho fechado em x_0, é construído um caminho $\eta^{-1} * \alpha * \eta$ fechado em x_1.(A figura foi retirada da referência [10])

$$(\eta^{-1} * \alpha) * \eta(0) = \eta^{-1}(0) = \eta(1) = x_1,$$
$$(\eta^{-1} * \alpha) * \eta(1) = \eta(1) = x_1.$$

O fato de que não precisamos nos preocupar com parênteses pode ser visto na referência [8].

Defina, agora,

$$\begin{array}{rcl} P_\eta^{-1}: \ \pi_1(X, x_1) & \to & \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] & \mapsto & [\eta * \alpha * \eta^{-1}] \end{array}.$$

Vejamos que P_η^{-1} é a inversa de P_η.

$$\begin{array}{rcl} P_\eta(P_\eta^{-1}([\alpha])) & = & P_\eta^{-1}([\eta^{-1} * \alpha * \eta]) = [\eta * \eta^{-1} * \alpha * \eta * \eta^{-1}] = \\ & = & [\alpha], \end{array}$$

$$P_\eta^{-1}(P_\eta([\alpha])) = P_\eta([\eta * \alpha * \eta^{-1}]) = [\alpha].$$

Logo, P_η é bijeção.

Para verificarmos que P_η é homomorfismo de grupos, sejam $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, então

$$\begin{array}{rcl} P_\eta([\alpha] * [\beta]) & = & P_\eta([\alpha * \beta]) = [\eta^{-1} * \alpha\beta\eta] = \\ & = & [\eta^{-1} * \alpha] * [\beta * \eta] = \\ & = & [\eta^{-1} * \alpha] * [\eta] * [\eta^{-1}] * [\beta * \eta] = \\ & = & [\eta^{-1} * \alpha\eta] * [\eta^{-1} * \beta * \eta] = \\ & = & P_\eta([\alpha]) * P_\eta([\beta]). \end{array}$$

$\blacksquare$

Logo, se X é conexo por caminhos, escrevemos simplesmente $\pi_1(X)$.

Definição 3.1.8 *Um espaço topológico X é dito* ***simplesmente conexo*** *se é conexo por caminhos e $\pi_1(X) = \{1\}$ (grupo trivial).*

Proposição 3.1.2 *Sejam X e Y espaços topológicos e $\phi : X \to Y$ uma aplicação contínua. A aplicação $\phi_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), y_0 = \phi(x_0), \phi_\#([\alpha]) = [\phi \circ \alpha]$, é homomorfismo de grupos.*

Demonstração: Vejamos primeiramente que $\phi_\#$ está bem definida.

Sejam $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ tais que $[\alpha] = [\beta]$. Então, $\alpha \sim \beta$, donde existe uma aplicação contínua $F : I \times I \to X$ tal que $F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s), F(0, t) = F(1, t) = x_0$.

Defina $G : I \times I \to Y, G(s, t) = \phi(F(s, t)), \forall s, t \in I$.

Note que G é contínua. Vemos ainda que $G(0, t) = \phi(\alpha(s)), G(s, 1) = \phi(\beta(s))$ e $G(0, t) = \phi(F(0, t)) = \phi(x_0) = y_0 = \phi(F(1, t)) = G(1, t)$.

Logo, $\phi \circ \alpha \sim \phi \circ \beta$. Daí, $[\phi \circ \alpha] = [\phi \circ \beta]$. Portanto, $\phi_\#([\alpha]) = \phi_\#([\beta])$.

E também, $(\phi \circ \alpha)(0) = \phi(x_0) = y_0$ e $(\phi \circ \alpha)(1) = \phi(x_0) = y_0$. Donde $[\phi \circ \alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$.

Portanto, $\phi_\#$ está bem definida.

Vejamos que $\phi_\#$ é de fato homomorfismo,

$$\begin{aligned}
\phi_\#([\alpha] * [\beta]) &= \phi_\#([\alpha * \beta]) = [\alpha \circ (\alpha * \beta)] = \\
&= [\phi \circ \alpha * \phi \circ \beta] = [\phi \circ \alpha] * [\phi \circ \beta] = \\
&= \phi_\#([\alpha]) * \phi_\#([\beta]).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Observação 3.1.1 *Se $\phi : X \to Y$ é homeomorfismo então $\phi_\#$ é isomorfismo. De fato, $(\phi^{-1})_\#$ é a inversa de $\phi_\#$.*

Definição 3.1.9 *Uma aplicação contínua $k : \widetilde{X} \to X$ chama-se uma* ***aplicação de recobrimento*** *quando para cada $x \in X$ existe um aberto $V \subseteq X$ conexo por caminhos tal que $k^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ é uma reunião de abertos, dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica homeomorficamente sobre V. V é chamado de* ***vizinhança distinguida*** *e $\widetilde{X}$ de* ***espaço de recobrimento*** *de X.*

Lema 3.1.2 *Se $k : \widetilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento e X é conexo por caminhos então o número de pontos em $k^{-1}(x)$ - inteiro ou ∞ - é o mesmo para todo $x \in X$. (Este número é chamado a multiplicidade do espaço de recobrimento.)*

Demonstração: Para cada $m \leqslant \infty$, seja $O_m = \{x \in X : k^{-1}(x)$ tem exatamente m pontos$\}$.

Afirmação: O_m é aberto.

Dado $x \in O_m$. Então $|k^{-1}(x)| = m$. Seja $V \subseteq X$ aberto tal que $x \in V$. Então, $k^{-1}(V) = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \forall \lambda k : U_\lambda \to V$ é homeomorfismo $\Rightarrow \forall p \in V, k^{-1}(p) \in U_\lambda, \lambda \in \Lambda \Rightarrow |k^{-1}(p)| = |\Lambda|, \forall p \in V$. Em particular, $|k^{-1}(x)| = |k^{-1}(p)| \Rightarrow p \in O_m$. Ou seja, $V \subseteq O_m$. O que completa a afirmação.

Então, $X = O_m$ para algum m.

■

Lema 3.1.3 *Seja $k : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Dados um caminho $\alpha : I \to X$ e um ponto $q \in \widetilde{X}$ tal que $k(q) = \alpha(0)$, existe um único caminho $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ tal que $k \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ e $\widetilde{\alpha}(0) = q$.*

Demonstração: Cada $x \in Im(\alpha) \subseteq X$ pertence a um aberto $V \subseteq X$ tal que $k^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Logo. $Im(\alpha) \subseteq \cup_{x \in Im(\alpha)} V_x$. mas como α é compacto e α é contínua, $Im(\alpha)$ é compacto. Daí existem $V_{x_1}, \cdots, V_{x_n}$ tais que $Im(\alpha) \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Logo, $\alpha(0)$ pertence a algum V_{x_i}, chamemos de V.

Então $q \in k^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Logo, $q \in U_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$, onde U_{λ_0} se aplica homeomorficamente sobre V.

Defina $\widetilde{\alpha} = k|_{U_{\lambda_0}}^{-1} \circ \alpha$.

Vemos que $\widetilde{\alpha}(0) = k|_{U_{\lambda_0}}^{-1}(k(q)) = q, (k|_{U_{\lambda_0}} \circ \widetilde{\alpha})(t) = \alpha(t), \forall t \in \alpha^{-1}(V)$.

Vejamos que $\widetilde{\alpha}$ é única.

Suponha que existe $\overline{\alpha}$ tal que $\overline{\alpha}(0) = q$ e $k \circ \overline{\alpha} = \alpha$. Então, $(k \circ \overline{\alpha})(t) = \alpha(t) \in V, \overline{\alpha}(t) \in k^{-1}(\alpha(t)) \subseteq U_{\lambda_0}$ pela conexidade. Então, $k|_{U_{\lambda_0}}^{-1} \circ \alpha(t) = k|_{U_{\lambda_0}}^{-1} \circ k|_{U_{\lambda_0}} \circ \overline{\alpha}(t) \Rightarrow \widetilde{\alpha}(t) = k|_{U_{\lambda_0}}^{-1} \circ \alpha(t), \forall t \in \alpha^{-1}(V)$. Como α é contínua, $\alpha^{-1}(V)$ é aberto em I. Se $\alpha^{-1}(V) = I$ não há mais o que fazer.

Se não, tome $\alpha^{-1}(V_1), V_1 \in \{V_{x_1}, \cdots, V_{x_{i-1}}, V_{x_{i+1}}, \cdots, V_{x_n}\}$, é aberto de I e intersecta $alpha^{-1}(V)$ por conexidade.

Seja $t_1 \in \alpha^{-1}(V) \cap \alpha^{-1}(V_1)$ e $\alpha(t_1) = k(q_1), q_1 \in \widetilde{X}$.

Repetindo o processo, concluiremos o resultado pois há um número finito de passos.

■

Definição 3.1.10 *Dadas aplicações contínuas $\pi : E \to M$ e $\phi : P \to M$, um* `levantamento` *de ϕ por π é uma aplicação contínua $\widetilde{\phi} : P \to E$ tal que $\pi \circ \widetilde{\phi} = \phi$.*

Por uma construção análoga ao lema anterior em duas dimensões, segue que se H é uma homotopia em X e $k(q) = H(0,0)$ então existe uma única aplicação $\widetilde{H}$ tal que $k \circ \widetilde{H} = H$ e $\widetilde{H}(0,0) = q$.

Corolário 3.1.1 *Sejam $k : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento, α, β caminhos em X com $\alpha \sim \beta$. Se $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ são levantamentos de α e β por k tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$, então $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ são homotópicos. Em particular, $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $\widetilde{H}$ definida acima é homotopia entre $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$.

Vemos que $k \circ \widetilde{H}(t,0) = H(t,0) = \alpha(t)$, mas pelo lema anterior $\widetilde{H}(t,0) = \widetilde{\alpha}(t), \forall t \in I$.

Analogamente, $\widetilde{H}(t,1) = \widetilde{\beta}(t), \forall t \in I$.

$k \circ \widetilde{H}(0,s) = H(0,s) = x_0 \Rightarrow \widetilde{H}(0,s) \in k^{-1}(x_0), x_0 \in U$ tal que $k^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$. Logo, pela conexidade das vizinhanças, $\widetilde{H}(0,s) \in V_{j_0}$ para algum $j_0 \in J, \forall s \in I$.

$k \circ H(0,0) = H(0,0) = \alpha(0) = \beta(0) \Rightarrow q = \widetilde{H}(0,0) = \widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$.

$k \circ \widetilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = \beta(1) \Rightarrow \widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$.

Afirmação: $\widetilde{H}(0,s) = q, \forall s \in I$.

Se $\widetilde{H}(0,s) = q'$ para algum $s \in I$ então $k(q') = k \circ \widetilde{H}(0,s) = H(0,s) = x_0 \Rightarrow q = q'$ pois k é injetora numa vizinhança.

Então $\widetilde{H}(0,s) = q = \widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$.

Analogamente, $\widetilde{H}(1,s) = \widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$.

■

Corolário 3.1.2 *Se $k : \widetilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento, então $k_\# : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$ é injetora.*

Demonstração: Sejam $[\widetilde{\alpha}] = [\widetilde{\beta}]$ tal que $k_\#([\widetilde{\alpha}]) = k_\#([\widetilde{\beta}])$. Então

$$[k \circ \widetilde{\alpha}] = [k \circ \widetilde{\beta}] \Rightarrow [\alpha] = [\beta] \Rightarrow [\widetilde{\alpha}] = [\widetilde{\beta}].$$

■

Lema 3.1.4 *Sejam P um espaço topológico simplesmente conexo, $p_0, p \in P$. Se α e β são caminhos de p_0 a p, então α e β são homotópicos.*

Demonstração: Notemos que $\alpha\beta^{-1} \sim c_{p_0}$. Então existe $H : [0,1] \times [0,1] \to P$ contínua, tal que $H(t,0) = \alpha * \beta^{-1}(t), H(t,1) = p_0$ e $H(0,s) = H(1,s) = p_0$.

Defina $\gamma_s : [0,1] \to P$ como $\gamma_s(t) = H(t,s)$. Vemos que $\gamma_s(0) = H(0,s) = p_0 = H(1,s) = \gamma_s(1)$. Logo, γ_s é caminho fechado em p_0. Seja $\widehat{\gamma}_s : [0,1] \to P, \widehat{\gamma}_s(t) = \gamma * \beta$. Defina agora $F : [0,1] \times [0,1] \to P$ por $F(t,s) = \widehat{\gamma}_s(t)$.

É fácil ver que F é contínua. Vemos ainda que

$$F(t,0) = \widehat{\gamma_0}(t) = \gamma_0 * \beta(t) = \alpha(t)$$

$$F(t,1) = \widehat{\gamma_1}(t) = \gamma_1 * \beta(t) = \beta(t)$$

$$F(0,s) = \widehat{\gamma_s}(0) = \gamma_s * \beta(0) = p_0 = \alpha(0) = \beta(0)$$

$$F(1,s) = \widehat{\gamma_s}(1) = \gamma_s * \beta(1) = p = \alpha(1) = \beta(1).$$

Logo, F é homotopia entre α e β.

■

Proposição 3.1.3 *Seja $k : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $\phi : P \to X$ contínua. Sejam $p_0 \in P$ e $q_0 \in \widetilde{X}$ tais que $\phi(p_0) = k(q_0)$.*

Então,

i) se P é conexo por caminhos, existe no máximo um levantamento $\widetilde{\phi}$ de ϕ por k tal que $\widetilde{\phi}(p_0) = q_0$.

ii) se P é simplesmente conexo, tal levantamento existe. Além disto, se ϕ é aplicação de recobrimento, $\widetilde{\phi}$ também o será.

Demonstração:

i) Sejam $\widetilde{\phi}$ e $\overline{\phi}$ levantamentos de ϕ por k tais que $\overline{\phi}(p_0) = \widetilde{\phi}(p_0) = q_0$. Então $k \circ \widetilde{\phi} = \phi = k \circ \overline{\phi}$. Seja $p \in P$. Como P é conexo por caminhos, existe um caminho $\alpha : I \to P$ tal que $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p$.

Note que $\phi \circ \alpha$ é um caminho de $k(q_0)$ a $\phi(p)$.

De fato,

$$(\phi \circ \alpha)(0) = \phi(p_0) = k(q_0)$$

$$(\phi \circ \alpha)(1) = \phi(p).$$

Afirmação: $\widetilde{\phi} \circ \alpha$ e $\overline{\phi} \circ \alpha$ são levantamentos de $\phi \circ \alpha$.

De fato,

$$k \circ \overline{\phi} \circ \alpha = \phi \circ$$

$$k \circ \widetilde{\phi} \alpha = \phi \circ \alpha$$

$$\overline{\phi} \circ \alpha(0) = \overline{\phi}(p_0) = q_0$$

$$\widetilde{\phi} \circ \alpha(0) = \widetilde{\phi}(p_0) = q_0.$$

Mas pelo Lema 3.1.3, $\overline{\phi} \circ \alpha = \widetilde{\phi} \circ \alpha$.

Portanto, $\overline{\phi} = \widetilde{\phi}$.

ii) Seja $p \in P$ e α um caminho de p_0 a p. Seja β o levantamento de $\phi \circ \alpha$ por k, então $k \circ \beta = \phi \circ \alpha, \beta(0) = q_0$.

Defina $\widetilde{\phi} : P \to \widetilde{X}, \widetilde{\phi}(p) = \beta(1), \forall p \in P$.

Vemos que $k \circ \widetilde{\phi}(p) = k(\beta(1)) = (\phi \circ \alpha)(1) = \phi(p)$.

Vejamos que a definição de $\widetilde{\phi}$ independe da escolha do caminho α.

Seja α' um caminho de p_0 a p. Então, pelo Corolário 3.1.1, $\alpha \sim \alpha'$. Donde existe uma homotopia H entre α e α'.

Afirmação: $\phi \circ H : [0,1] \times [0,1] \to X$ é homotopia entre $\phi \circ \alpha$ e $\phi \circ \alpha'$.

De fato,

$$(\phi \circ H)(t, 0) = (\phi \circ \alpha)(t)$$

$$(\phi \circ H)(t, 1) = (\phi \circ \alpha')(t)$$

$$\phi \circ H(0, s) = \phi(p_0) = k(q_0)$$

$$\phi \circ H(1, s) = \phi(p).$$

Sejam β e β' os levantamentos de α e α', respectivamente, então $\beta \sim \beta'$ e $\beta(1) = \beta'(1)$. Portanto, $\widetilde{\phi}$ está bem definida.

Agora temos que mostrar que $\widetilde{\phi}(p_0) = q_0$.

Temos que $(k \circ \beta)(0) = (\phi \circ \alpha)(0) = \phi(p_0)$.

Como a imagem de β é conexo e k é uma aplicação de recobrimento, então $\beta(0) = \beta(1)$. Donde β é um caminho constante em q_0. Portanto, $\widetilde{\phi}(p_0) = \beta(1) = q_0$.

Vamos mostrar agora que ϕ é contínua.

Seja $p \in P$. Seja $\mathcal{U}_p \subseteq X$ uma vizinhança distinguida de $\phi(p) \in X$. Seja $U_p \subseteq P$ a componente conexa de $\phi^{-1}(\mathcal{U}_p)$ que contém p.

Afirmação: $\widetilde{\phi}(U_p)$ está contido em uma única componente conexa por caminhos, $\mathcal{V}_p$, de $k^{-1}(\mathcal{U}_p)$. Inicialmente, note que $k \circ \widetilde{\phi}(p) = \phi(p) \in \mathcal{U}_p \Rightarrow \widetilde{\phi}(p) \in k^{-1}(\mathcal{U}_p)$.

Seja $\mathcal{V}_p$ a componente conexa por caminhos de $k^{-1}()\mathcal{U}_p$ contendo $\widetilde{\phi}(p)$.

Seja $q \in U_p$. Queremos mostrar que $\widetilde{\phi}(q) \in \mathcal{V}_p$. Como U_p é conexo por caminhos, existe $\gamma : [0,1] \to P, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Para todo $p \in P$, denote por α_p o caminho de p_0 a p.

Note que $\alpha_q \sim \alpha_p * \gamma \Rightarrow \phi \circ \alpha_q \sim \phi\alpha_p * \gamma = (\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)$.

Seja $\widetilde{\phi \circ \gamma} : [0,1] \to \widetilde{X}$, o (único) levantamento de $\phi \circ \gamma$ tal que $\widetilde{\phi \circ \gamma}(0) = \widetilde{\phi}(p)$.

Afirmação: $\widetilde{\phi \circ \gamma}(1) = \widetilde{\phi}(q)$.

Sejam $\widetilde{\phi \circ \alpha_q}$ e $\widetilde{(\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)}$ levantamentos de $\phi \circ \alpha_q$ e $(\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)$ tais que $\widetilde{\phi \circ \alpha_q}(0) = \widetilde{\phi}(p_0) = \widetilde{(\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)}(0.)$

Temos $\widetilde{\phi \circ \alpha_q} \sim \widetilde{(\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)}$, em particular $\widetilde{\phi \circ \alpha_q}(1) = \widetilde{(\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)}(1)$. Vamos provar que $\widetilde{(\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)} = (\widetilde{\phi \circ \alpha_p}) * (\widetilde{\phi \circ \gamma})$.

Notemos primeiramente que $(\widetilde{\phi \circ \alpha_p}) * (\widetilde{\phi \circ \gamma})(0) = (\widetilde{\phi \circ \alpha_p})(p) = \beta_p(0) = q_0 = \widetilde{\phi}(p_0)$.

E vejamos, agora, que $(\widetilde{\phi \circ \alpha_p}) * (\widetilde{\phi \circ \gamma})$ é levantamento de $(\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)$.

De fato, $k \circ [(\widetilde{\phi \circ \alpha_p}) * (\widetilde{\phi \circ \gamma})] = [k \circ (\phi \circ \alpha_p)] * [k \circ (\widetilde{\phi \circ \gamma})] = (\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)$, e o resultado segue pela unicidade do levantamento. Portanto,

$$\widetilde{\phi}(q) = \widetilde{\phi \circ \alpha_q}(1) = \widetilde{(\phi \circ \alpha_p) * (\phi \circ \gamma)}(1) = (\widetilde{\phi \circ \alpha}) * (\widetilde{\phi \circ \gamma})(1) = \widetilde{\phi \circ \gamma}(1).$$

Como queríamos.

Ora, $k \circ (\widetilde{\phi \circ \gamma})(t) = \phi(\gamma(t)) \in \mathcal{U}_p, \forall t \in [0,1]$. Logo, $Im(\widetilde{\phi \circ \gamma}) \subseteq k^{-1}(\mathcal{U}_p)$. Como $Im(\widetilde{\phi \circ \gamma})$ é conexa por caminhos, está contida em uma única componente conexa por caminhos de $k^{-1}(\mathcal{U}_p)$. Mas $\widetilde{\phi \circ \gamma}(0) = \widetilde{\phi}(p) \in \mathcal{V}_p$.

Portanto, $\widetilde{\phi \circ \gamma}([0,1]) \subseteq \mathcal{V}_p$. Em particular, $\widetilde{\phi}(q) = \widetilde{\phi \circ \gamma}(1) \in \mathcal{V}_p$.

Mostramos assim que $\widetilde{\phi}(U_p) \subseteq \mathcal{V}_p$.

Logo, $k \circ \widetilde{\phi}|_{U_p} = \phi|_{U_p} \Rightarrow \widetilde{\phi}|_{U_p} = k|_{\mathcal{V}_p}^{-1} \circ \phi|_{U_p}$. Donde $\widetilde{phi}$ é contínua.

Finalmente, se ϕ é aplicação de recobrimento e dada uma vizinhança distinguida $\mathcal{U}_p$ de $\phi(p)$, tomamos U_p como a componente conexa de $\phi^{-1}(\mathcal{U}_p)$ contendo p' com $\phi(p') = \phi(p)$ como antes.

Em $U_{p'}, \phi|_{U_p}$ é homeomorfismo sobre $\mathcal{U}_{p'}$. Portanto, $\widetilde{\phi}|_{U_p}$ é também homeomorfismo. Logo, $\mathcal{V}_p$ é vizinhança distinguida de $\widetilde{\phi}(p)$ para $\widetilde{\phi}$.

Vejamos que $\widetilde{\phi}$ é sobrejetora.

$q \in \widetilde{X} \Rightarrow k(q) \in X \Rightarrow \phi(p) = k(q)$ para algum $p \in P$ para $\mathcal{U}_p$ vizinhança distinguida de $\phi(p)$. Então, $\widetilde{\phi}|_{U_p} = k|_{\mathcal{V}_p}^{-1} \circ \phi|_{U_p}$. Portanto, $\widetilde{\phi}(p) = k|_{\mathcal{V}_p}^{-1} \circ \phi(p) = k|_{\mathcal{V}_p}^{-1} \circ k|_{\mathcal{V}_p}(q) = q$.

Portanto, $\widetilde{\phi}$ é aplicação de recobrimento.

■

Definição 3.1.11 *Seja X um espaço topológico e $\widetilde{X}$ espaço de recobrimento de X. Se $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, $\widetilde{X}$ é dito ser um* **`recobrimento universal`** *de X.*

Proposição 3.1.4 *Seja X um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo. Dados $x_0 \in X$ e um subgrupo $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$, existe um recobrimento $k : \widetilde{X} \to X$, com $\widetilde{X}$ conexo por caminhos, e um ponto $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ tais que $k_{\#}\pi_1(X, x_0) = H$.*

A demostração deste teorema pode ser encontrada na referência [8].

Corolário 3.1.3 *Todo espaço topológico X conexo por caminhos admite um recobrimento $k : \widetilde{X} \to X$ onde $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo. Dois desses recobrimentos são homeomorfos.*

Demonstração: Pelo Teorema anterior, dado $H = \{1\}$ existe uma aplicação de recobrimento $k : \widetilde{X} \to X$ com $\widetilde{X}$ conexo por caminhos tal que $k_{\#}(\pi_1(\widetilde{X})) = \{1\}$. Como $k_{\#}$ é injetora, $\pi_1(\widetilde{X}) = \{1\}$. Logo, $\widetilde{X}$ é espaço de recobrimento simplesmente conexo de X.

Sejam $k_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ e $k_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ recobrimentos universais de X. Dados $p_0 \in \widetilde{X}_2$ e $q_0 \in \widetilde{X}_1, k_2(p_0) = k_1(q_0)$. Então pela Proppposição 3.1.3, existe um único $\widetilde{k_2}$ levantamento de k_2 por k_1 tal que $\widetilde{k_2}(p_0) = q_0$. Analogamente, existe um único $\widetilde{k_1}$ levantamento de k_1 por k_2 tal que $\widetilde{k_1}(q_0) = p_0$. Então,

$$k_1 \circ \widetilde{k_2} = k_2 \Rightarrow k_1 \circ \widetilde{k_2} \circ \widetilde{k_1} = k_2 \circ \widetilde{k_1} = k_1 \Rightarrow \widetilde{k_2} \circ \widetilde{k_1} = id_{\widetilde{X}_1}$$

$$k_2 \circ \widetilde{k_1} = k_1 \Rightarrow k_2 \circ \widetilde{k_1} \circ \widetilde{k_2} = k_1 \circ \widetilde{k_2} = k_2 \Rightarrow \widetilde{k_1} \circ \widetilde{k_2} = id_{\widetilde{X}_2}.$$

Logo, $\widetilde{k_1}$ é bijeção. Portanto, $\widetilde{X}_1$ e $\widetilde{X}_2$ são homeomorfos.

■

Vamos mostrar que $\widetilde{Ad}$ é contínua.

Seja $\| \cdot \|$ uma norma em $\mathcal{C}\ell(V, q)$, com respeito a cuja topologia, a aplicação produto

$$\begin{array}{rrcl} \cdot : & \mathcal{C}\ell(V, q) \times \mathcal{C}\ell(V, q) & \longrightarrow & \mathcal{C}\ell(V, q) \\ & (a, b) & \mapsto & a \cdot b \end{array}$$

é contínua. $(\mathcal{C}\ell(v, q) \times \mathcal{C}\ell(v, q))$ com a topologia produto)

Sejam $(E, \| \cdot \|_E)$ e $(F, \| \cdot \|_F)$ espaços normados.

Definição 3.1.12 *Uma aplicação linear $T : E \to F$ é dita ser* **`limitada`** *se existe $K > 0$ tal que $\| Tx \|_F \leqslant K \| x \|_E$.*

Proposição 3.1.5 *Seja $T : E \to F$ linear, são equivalentes:*

i) T *é contínua*

ii) T *é contínua em* 0_E

iii) *O conjunto* $\{\| Tx \|_F : \| x \|_E \leqslant 1\}$ *é limitado em* $\mathbb{R}$

iv) T *é limitada.*

Demonstração:
$(i) \Rightarrow (ii)$ É imediato.
$(ii) \Rightarrow (iv)$ Existe $\delta > 0$ tal que $\| x \|_E < \delta \Rightarrow \| Tx \|_F < 1$. Seja $y \in E$. Se $y \neq 0$, escreva $x = \dfrac{\delta}{2}\dfrac{y}{\| y \|_E}$. Logo, $\| x \| = \dfrac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \| T\left(\dfrac{\delta}{2}\dfrac{y}{\| y \|_E}\right) \| < 1 \Rightarrow \| Ty \|_F < \dfrac{2}{\delta} \| y \|_E$.

Faça $K = \dfrac{2}{\delta}, \forall y \in E, \| Ty \|_F \leqslant \| y \|_E$.
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$
$(\Rightarrow)$ Seja $y \in E$. Escreva $\hat{y} = \begin{cases} \dfrac{y}{\| y \|_E} & sey \neq 0 \\ 0 & sey = 0 \end{cases}$

Claro que $\| \hat{y} \|_E \leqslant 1$.

Se $y = 0$, então $0 = \| Ty \|_F \leqslant \| y \|_E = 0$.

Se $y \neq 0$, por hipótese existe $K > 0$ tal que $\| T\hat{y} \|_F \leqslant K \Leftrightarrow \| Ty \|_F \leqslant K \| y \|_E$.
$(\Leftarrow)$ Existe $K > 0$ tal que $\forall x \in E, \| Tx \|_F \leqslant K \| x \|_E$. Para $\| x \|_E \leqslant 1, \| Tx \|_F \leqslant K$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Existe $K > 0$ tal que $\| Tx \|_F \leqslant K \| x \|_E, \forall x, y \in E,\ \| Tx - Ty \|_F =$ $= \| T(x - y) \|_F \leqslant K \| x - y \|_E$. Logo, T é lipschitz, logo uniformemente contínua e portanto contínua.

$\blacksquare$

Seja $\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \to F : T$ é linear tal que T é limitada$\}$.

Não é difícil ver que $\mathcal{L}(E, F)$ é espaço vetorial.

Defina $\| T \| := \sup\{\| Tx \|_F : \| x \|_E \leqslant 1\}$.

Seja $x \in E, x \neq 0, \| T\left(\dfrac{x}{\| x \|}\right) \|_F \leqslant \| T \|$. Portanto, $\| Tx \|_F \leqslant \| T \| \| x \|_E$.

Seja $K > 0$ tal que $\| Tx \|_F \leqslant K \| x \|_E, \forall x \in E$, para $\| x \|_E \leqslant 1 \ \| Tx \|_F \leqslant x \Rightarrow$ $\Rightarrow \| T \| \leqslant K$.

Agora, considere $\widetilde{Ad} : \mathcal{C}\ell^{\times}(V, q) \to GL(\mathcal{C}\ell(V, q))$. Em $\mathcal{C}\ell^{\times}(V, q)$ considere a topologia induzida por $\mathcal{C}\ell(V, q)$ e em $GL(\mathcal{C}\ell(V, q))$ a topologia dada pela norma de uma transformação liner definida acima.

Note que $\| \widetilde{Ad}_{\varphi} x \| = \| \alpha(\varphi) \cdot x \cdot \varphi^{-1} \| \leqslant K \| \alpha(\varphi) \| \cdot \| \varphi^{-1} \| \| x \|$.

$GL(\mathcal{C}\ell(V, q)) = \{T : \mathcal{C}\ell(v, q) \to \mathcal{C}\ell(V, q) : T$ é linear, limitada e com inversa limitada$\}$ é grupo com a operação de composição.

Vemos que $\| (T\circ S)x \| \leqslant \| T \| \| Sx \| \leqslant \| T \| \| S \| \| x \|$. Logo, $\| T\circ S \| \leqslant \| T \| \cdot \| S \|$.

Teorema 3.1.3 *i) $\mathcal{C}\ell^{\times}(V,q)$ é aberto em $\mathcal{C}\ell(v,q)$*

ii) Se o espaço vetorial V tem dimensão finita, então $\widetilde{Ad} : \mathcal{C}\ell^{\times}(V,q) \to GL(\mathcal{C}\ell(V,q))$ é contínua.

Demonstração:

Afirmação: Existe $K > 0$ tal que $\forall a, b \in \mathcal{C}\ell(v,q), \| a \cdot b \| \leqslant K \| a \| \cdot \| b \|$.

Como $\cdot$ é contínua em $(0,0) \in \mathcal{C}\ell(V,q) \times \mathcal{C}\ell(V,q)$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in \mathcal{C}\ell(V,q)$ com $\| x \|, \| y \| < \delta \Rightarrow \| xy \| < 1$.

Fixe um tal δ. Então, $\forall a, b \in \mathcal{C}\ell(V,q)$, se $a \neq 0$, e $b \neq 0$, escolha $x = \dfrac{\delta}{2}\dfrac{a}{\| a \|}$ e $y = \dfrac{\delta}{2}\dfrac{b}{\| b \|}$.

Claro que $\| x \| = \| y \| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$. Portanto, $\| x \cdot y \| < 1 \Rightarrow \dfrac{\delta^2}{4 \| a \| \| b \|} \| ab \| < 1$. Pondo $K = \dfrac{4}{\delta^2}$, $\| a \cdot b \| \leqslant K \| a \| \| b \|$. Desigualdade válida ainda que $a = 0$ ou $b = 0$.

i) Seja $\varphi \in \mathcal{C}\ell^{\times}(V,q)$. Escreva $r = \dfrac{1}{K \| \varphi^{-1} \|}$. Provaremos que $B_r(\varphi) \subseteq \mathcal{C}\ell^{\times}(V,q)$.

Afirmação: Se $\psi \in B_r(\varphi)$, então a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1 - \varphi^{-1}\psi)^n$ converge absolutamente.

De fato, basta notar que esta é a série geométrica e $\| 1 - \varphi^{-1}\psi \| = \| \varphi^{-1}(\varphi - \psi) \| \leqslant$
$\leqslant K \| \varphi^{-1} \| \| \varphi - \psi \| < 1$.

Afirmação: Se $\psi \in B_r(\varphi), \psi$ é invertível e $\psi^{-1} = (\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1 - \varphi^{-1}\psi)^n) \cdot \varphi^{-1}$.

De fato,

$$\psi(\sum_{n=0}^{\infty}(1 - \varphi^{-1}\psi)^n\varphi^{-1}) = \varphi[\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-1}\psi(1 - \varphi^{-1}\psi)^n]\varphi^{-1} = \varphi \cdot 1 \cdot \varphi^{-1} = 1.$$

Por outro lado,

$$\sum_{n=0}^{\infty}((1 - \varphi^{-1}\psi)^n\varphi^{-1})\psi = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - \varphi^{-1}\psi)^n\varphi^{-1}\psi = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - \varphi^{-1}\psi)^n(1 - (1 - \varphi^{-1}\psi)) = 1.$$

ii) É possível mostrar que a aplicação

$$^{-1} : \mathcal{C}\ell^{\times}(V,q) \longrightarrow \mathcal{C}\ell^{\times}(V,q)$$

é contínua.[1]

Queremos mostrar que se $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{C}\ell^{\times}(V,q)$ e $\varphi_n \to \varphi_0$ em $\mathcal{C}\ell^{\times}(V,q)$ então $\widetilde{Ad}_{\varphi_n} \to \widetilde{Ad}_{\varphi_0}$. Mas, $\forall y \in \mathcal{C}\ell(V,q)$,

$$\begin{aligned}
\| (\widetilde{Ad}_{\varphi_n} - \widetilde{Ad}_{\varphi})y \| &= \| \widetilde{Ad}_{\varphi_n}y - \widetilde{Ad}_{\varphi}y \| = \| \alpha(\varphi_n)y\varphi_n^{-1} - \alpha(\varphi_0)y\varphi_0^{-1} \| = \\
&= \| \alpha(\varphi_n)y\varphi_n^{-1} - \alpha(\varphi_0)y\varphi_0^{-1} + \alpha(\varphi_n)y\varphi_0^{-1} \| \leqslant \\
&= \leqslant \| \alpha(\varphi_n)y(\varphi_n^{-1} - \varphi_0^{-1}) \| + \| (\alpha(\varphi_n) - \alpha(\varphi_0))y\varphi_0^{-1} \| \leqslant \\
&\leqslant [\| \alpha(\varphi_n) \| \| \| \varphi_n^{-1} \| + \| \alpha(\varphi_n) - \alpha(\varphi_0) \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \|] \cdot \| y \|,
\end{aligned}$$

logo $\| \widetilde{Ad}_{\varphi_n} - \widetilde{Ad}_{\varphi} \| \leqslant \| \alpha(\varphi_n) \| \| \| \varphi_n^{-1} \| + \| \alpha(\varphi_n) - \alpha(\varphi_0) \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \| \to 0, \ n \to \infty$. A dimensão finita foi importante para garantir a continuidade de α.

■

Para provar que $\widetilde{Ad}$ é aplicação de recobrimento, usaremos o seguinte teorema[2] sem demonstrá-lo.

Teorema 3.1.4 *Seja $f : G \to H$ um homomorfismo contínuo sobrejetivo entre grupos topológicos. A fim de que f seja uma aplicação de recobrimento é necessário e suficiente que f seja contínua, aberta e seu núcleo seja um subgrupo discreto.*

Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_n \xrightarrow{\widetilde{Ad}} SO(n) \longrightarrow 1 \ .$$

Vamos considerar em $Spin_n$ a topologia induzida por $\mathcal{C}\ell(V,q)$. Considere em $\mathbb{Z}_2$ e no grupo trivial a topologia discreta.

Provamos que $\widetilde{Ad}$ é uma aplicação contínua. É possível provar que $\widetilde{Ad}$ é uma aplicação aberta, mas não o faremos aqui. Logo, pelo teorema 3.1.4 $\widetilde{Ad}$ é aplicação de recobrimento.

Logo, da sequência exata acima obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \pi_1(Spin_n) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} \pi_1(SO(n)) \longrightarrow 1 \ .$$

Mas, $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$. (Referência [8]) Portanto, $\pi_1(Spin_n) = \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 = \{1\}$.

Como $Spin_n$ é espaço de recobrimento de $SO(n)$ e $\pi_1(SO(n))$ é trivial, segue que $Spin_n$ é recobrimento universal de $SO(n)$.

---

[1] Ver referência [9]

[2] O leitor poderá encontrá-lo na referência [8]

Capítulo 4

Grupo de Spin de SO(3)

Neste capítulo vamos ver que $SU(2)$ é recobrimento universal de $SO(3)$, e portanto $Spin_3$ é isomorfo ao grupo $SU(2)$.

Assumiremos do leitor conhecimentos de Geometria Diferencial e Topologia ao nível do curso de graduação em Matemática.

4.1 Aspectos Geométricos e Topológicos do Grupo O(r,s)

Fixado $n \geq 2$, considere a matriz formada por s -1's e r 1's na diagonal, $n = r + s$.

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Seja $O(r,s) = \{A \in M_n : A\eta A^t = \eta\}$, onde M_n é o conjunto das matrizes n por n com entradas em $\mathbb{R}$. Note que $\det A \neq 0$. Denotaremos por $GL(n)$ o grupo das matrizes n por n invertíveis com entradas em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.1.1 *$O(r,s)$ é subgupo de $GL(n)$.*

Demonstração: Sejam $A, B \in O(r,s)$. Então $AB\eta(AB)^t = A(B\eta B^t)A^t = A\eta A^t = \eta$, logo $AB \in O(r,s)$ e $A\eta A^t = \eta \Rightarrow A^{-1}\eta(A^{-1})^t = \eta$, donde $A^{-1} \in O(r,s)$.

$\blacksquare$

Note que $GL(n)$ é aberto em $\mathbb{R}^{n^2}$,[1], pois $\det : M_n \to \mathbb{R}^{n^2}$ é uma função contínua e $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$.

Teorema 4.1.1 *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^k$. Seja $c \in \mathbb{R}^m$ um valor regular de f, isto é, $\forall x \in f^{-1}(c), Df(x)$ é sobrejetora. Então $f^{-1}(c)$ é superfície de classe $\mathcal{C}^k$ e dimensão n.*

O leitor encontrará uma prova deste teorema nas referências [2] e [6].

Teorema 4.1.2 *O(r,s) é superfície de classe $\mathcal{C}^\infty$ e dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ (em $\mathbb{R}^{n^2}$).*

Demonstração: Sejam $S(n)$ o conjunto das matrizes n por n simétricas e

$$\begin{array}{rrl} f: & M_n(=\mathbb{R}^{n^2}) \to & S(n)(=\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}) \\ & x \mapsto & x\eta x^t \end{array}.$$

Note que $x\eta x^t \in S(n)$, f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e $O(r,s) = f^{-1}(\eta)$.

Afirmação: Para todo $x \in M_n, Df(x) = T$, onde T é uma aplicação linear

$$\begin{array}{rrl} T: & \mathbb{R}^{n^2} \to & \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ & v \mapsto & v\eta x^t + x\eta v^t \end{array}.$$

Usaremos a norma do sup. $\forall v \in \mathbb{R}^{n^2}, v \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x+v) - f(x) - T(v)\|}{\|v\|} &= \frac{\|(x+v)\eta(x+v)^t - x\eta x^t - v\eta x^t - x\eta v^t\|}{\|v\|} = \\ &= \frac{\|v\eta v^t\|}{\|v\|} \leqslant \frac{\|v\|^2\|\eta\|}{\|v\|} = \|v\|\|\eta\| \to 0, \text{ para } \|v\| \to 0. \end{aligned}$$

Afirmação: T é sobrejetora, $\forall x \in O(r,s)$.

Seja $s \in S(n)$. Escolha $v_s = \dfrac{s\eta x}{2}$. Então,

$$T(v_s) = \frac{s\eta x}{2}\eta x^t + x\eta\left(\frac{s\eta x}{2}\right)^t = \frac{s}{2} + x\eta\frac{x^t\eta s}{2} = s.$$

O resultado agora segue do teorema anterior.

$\blacksquare$

Proposição 4.1.2 *O(r,s) é fechado(em $\mathbb{R}^{n^2}$).*

[1]Utilizaremos, sem mais comentários, a identificação natural de M_n com $\mathbb{R}^{n^2}$, e subconjuntos de M_n terão a topologia e estrutura diferenciável induzidas pelas de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Demonstração: Como $O(r,s) = f^{-1}(\eta)$, sendo $\{\eta\} \subseteq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ fechado, e como f é contínua, $O(r,s)$ é fechado.

$\blacksquare$

A partir de agora tomaremos $r = n$ e $s = 0$. Em particular, $\eta = Id_n$.

Proposição 4.1.3 *$O(n)$ é compacto.*

Demonstração: Seja $A \in O(n)$, e escreva $A = [a_{ij}]$. Nesse caso, $AA^t = Id_n$, e então $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \forall i,j \in \{1, \cdots, n\}$. Em particular,

$$|a_{ij}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} = \delta_{ii} = 1.$$

Então, $|a_{ij}| \leqslant 1$. Portanto, $\|A\| \leqslant 1$.

Segue que $O(n) \subseteq \overline{B_1^{\mathbb{R}^n}(0)}$. Daí, $O(n)$ é limitado e tendo em vista a Proposição anterior, compacto.

$\blacksquare$

Observação 4.1.1 *A aplicação $(x,y) \mapsto x\eta y^t = \langle x,y\rangle$ é uma forma bilinear.*

Definição 4.1.1 *Se $|\langle x,x\rangle| = 1, x$ é dito unitário.*

Notação: e_i denotará o i-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Vamos provar que $O(n)$ tem duas componentes conexas por caminhos, para isto precisamos do seguinte lema.

Lema 4.1.1 *Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, se $\|v\| = 1$, então $\exists \alpha : [0,1] \to O(n)$ contínua tal que $\alpha(0) = Id_n, \alpha(1)v = e_1$ e $\det(\alpha(t)) = 1, \forall t \in [0,1]$.*

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução.

Seja $n = 2$. Considere $v = (a,b)$ onde $a^2 + b^2 = 1$. Então existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $a = \cos\theta, b = \sin\theta$.

Defina

$$\begin{aligned} \alpha : \ [0,1] &\to \ O(2) \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & \sin(\theta t) \\ -\sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Claro que $\det(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall t \in [0,1]$, e $\alpha(1)v = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1.$$

Suponha, agora o resulatado válido para n.

Escreva $v = (v_0, v_1, \cdots, v_n), v_0^2 + \cdots + v_n^2 = 1$. Sejam $\overline{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ e $\widetilde{v} = \dfrac{\overline{v}}{\|\overline{v}\|}$. Então, pela hipótese de indução, existe $\alpha : [0,1] \to O(n)$ com $\alpha(0) = Id_n$ e $\alpha(1)\widetilde{v} = e_1$ (em $\mathbb{R}^n$) e $\det(\widetilde{\alpha}(t)) = 1$.

Então pomos

$$\begin{aligned} \alpha: \quad [0,1] \to & \quad O(n+1) \\ t \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{\alpha}(t) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vemos que $\alpha(0) = Id_{n+1}$, $\det(\alpha(t)) = 1 \cdot \det(\widetilde{\alpha}(t)) = 1, \forall t \in [0,1]$ e $\alpha(1)v =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{\alpha}(1) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \widetilde{\alpha}(1) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \|\overline{v}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ponha $w = \begin{pmatrix} v_0 \\ \|\overline{v}\| \end{pmatrix}$. Pelo caso $n = 2, \exists \widetilde{\beta} : [0,1] \to O(2)$ tal que $\widetilde{\beta}(0) = Id_2, \widetilde{\beta}(1)w = (1,0)$ e $\det(\widetilde{\beta}(t)) = 1, \forall t \in [0,1]$.

Então defina

$$\begin{aligned} \beta: \quad [0,1] \to & \quad O(n+1) \\ t \mapsto & \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Id_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que $\det(\beta(t)) = \det(\widetilde{\beta}(t)) \cdot \det(Id_{n-1}) = 1, \beta(0) = Id_{n+1}$ e $\beta(1) \begin{pmatrix} v \\ \|\overline{v}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}(1)w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1.$$

Finalmente, ponha $\gamma : [0,1] \to O(n+1), \gamma(t) = \beta(t)\alpha(t)$.

■

Teorema 4.1.3 *$O(n)$ tem duas componentes conexas por caminhos.*

Demonstração: Sejam

$$\begin{aligned} SO(n) &= det^{-1}(1) \cap O(n) \\ O^{-}(n) &= det^{-1}(-1) \cap O(n). \end{aligned}$$

Suponha, por absurdo, que existe uma aplicação contínua $\alpha : [0,1] \to O(n)$ tal que $\alpha(0) \in SO(n)$ e $\alpha(1) \in O^{-}(n)$.

Nesse caso, $\det \circ \alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$, sendo contínua, teria $t \in (0,1)$ tal que $\det \circ \alpha(t) = 0$, uma contradição com $\alpha(t) \in O(n)$.

Afirmação: $SO(n)$ (respectivamente, $O^{-}(n)$) é conexo por caminhos.

Inicialmente, note que $[a_{ij}] \in O(n) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ik}$.

Seja $\mathcal{F}(n) = \{(v_1, \cdots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}$.

Temos então uma bijeção $\varphi : \mathcal{F}(n) \to O(n), \varphi(v_1, \cdots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, v_i = (v_{i1}, \cdots, v_{in})$.

Agora, procedemos por indução sobre n.

Para $n = 2$. Sejam $A, B \in SO(2)$(respectivamente $O^{-}(2)$).

Escreva $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Tome $v_1 = (a_{11}, a_{12}), v_2 = (a_{21}, a_{22}), w_1 = (b_{11}, b_{12}), w_2 = (b_{21}, b_{22}) \in \mathbb{R}^2$. Temos $\|v_i\| = \|w_i\| = 1$. Pelo lema, exsitem aplicações contínuas $\alpha, \beta : [0,1] \to SO(2)$ tal que

$$\alpha(0) = \beta(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \alpha(1)v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta(1)w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Defina $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to SO(2), \widetilde{\alpha}(t) = A \cdot \alpha(t)^t$(respectivamente $O^{-}(2)$).

Note que $\widetilde{\alpha}$ está bem definida, pois $\widetilde{\alpha}(t)^t \widetilde{\alpha}(t) = \alpha(t) A^t A \alpha(t)^t = Id_2$ e $\det(\widetilde{\alpha}(t)) = \det(A)\det(\alpha(t)) = \det(A)$.

Vemos ainda que

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}(t) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t)_{11}a_{11}+\alpha(t)_{12}a_{12} & \alpha(t)_{21}a_{11}+\alpha(t)_{22}a_{12} \\ \alpha(t)_{11}a_{21}+\alpha(t)_{12}a_{22} & \alpha(t)_{21}a_{21}+\alpha(t)_{22}a_{12} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(t)v_1 \\ \alpha(t)v_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ora, $\forall t \in [0,1]$ temos

$$\langle \alpha(t)v_i, \alpha(t)v_j\rangle = v_i^t\alpha(t)^t\alpha(t)v_j = v_i^tv_j = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Em particular, $\widetilde{\alpha}(1) = \begin{pmatrix} \alpha(1)v_1 \\ \alpha(1)v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(1) & v_2 \end{pmatrix}$.

Ora, $\langle \alpha(1)v_2, (1,0)\rangle = 0$ e $\|\alpha(1)v_2\| = 1$. então, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Portanto, $\widetilde{\alpha}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Mas, como vimos, $A \in SO(2) \Leftrightarrow \widetilde{\alpha}(1) \in SO(2)$. Sendo $A \in SO(2), \widetilde{\alpha}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$(respct. $O^-(2)$).

De forma inteiramente análoga, definindo $\widetilde{\beta} : [0,1] \to SO(2), \widetilde{\beta}(t) = B\beta(t)^t$(respc. $O^-(2)$).

Concluímos que $\widetilde{\beta}(t) \in SO(2)$, (respectivamente $O^-(2)$), $\widetilde{\beta}$ é contínua e $\widetilde{\beta}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (respectivamente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$). Como existe um caminho entre A e B e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (respectivamente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) em $SO(2)$ (respectivamente $O^-(n)$), então existe $\gamma : [0,1] \to SO(2)$(respectivamente $O^-(n)$) é contínua com $\gamma(0) = A, \gamma(1) = B$.

Assumindo o resultado para n, tome $A, B \in SO(n+1)$(respectivamente $O^-(n)$).

Escreva $A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e $v_i = (a_{i0}, \cdots, a_{in}), 0 \leqslant i \leqslant n$.

Pelo lema, existe $\alpha : [0,1] \to SO(n+1)$ contínua com $\alpha(0) = Id_{n+1}$ e $\alpha(1)v_0 = (1, 0, \cdots, 0)$.

Novamente, defina $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to SO(n+1), \widetilde{\alpha}(t) = A\alpha(t)^t$ (respectivamente $O^-(n+1)$).

Verificar que $\widetilde{\alpha}$ está bem definida é análogo ao caso $n = 2$. Note também que $\widetilde{\alpha}(0) = A$

e $\widetilde{\alpha}(1) = \begin{pmatrix} \alpha(1)v_0 \\ \vdots \\ \alpha(1)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \alpha(1)v_2 & & \\ & \vdots & & \\ & \alpha(1)v_n & & \end{pmatrix}$, onde $\langle \widetilde{\alpha}(t)v_i, \widetilde{\alpha}(t)v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Mas note que $0 = \langle (1, 0, \cdots, 0), \alpha(1)v_i \rangle = (\alpha(1)v_i)_1$. Logo, $\widetilde{\alpha}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widehat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$,

onde $\widehat{A} \in M_n$.

Mas, $\widetilde{\alpha}(1) \in O(n+1)$, então $\widetilde{\alpha}(1)\widetilde{\alpha}(1)^t = Id_{n+1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widehat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widehat{A}^t & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Id_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \widehat{A}\widehat{A}^t = Id_n$. Logo, $\widehat{A} \in O(n)$. Mais ainda, $\det(\widetilde{\alpha}(1)) = \det(\widehat{A})$.

Portanto, $\widehat{A} \in SO(n)$ (respectivamente $O^-(n)$).

Analogamente, existe $\widetilde{\beta} : [0, 1] \to SO(n+1)$ (respectivamente $O^-(n+1)$) contínua com

$\widetilde{\beta}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widehat{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, com $\widehat{B} \in SO(n)$ (respectivamente $O^-(n)$).

Pela hipótese de indução, existe $\gamma : [0, 1] \to SO(n)$ (respect. $O^-(n)$) com $\gamma(0) = \widehat{A}$ e $\gamma(1) = \widehat{B}$.

Defina $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to SO(n+1)$ (respectivamente $O^-(n+1)$) pondo $\widetilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \gamma(0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

Temos $\widetilde{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \gamma(0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \widetilde{\alpha}(1)$ e $\widetilde{\gamma}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \gamma(1) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \widetilde{\beta}(1)$.

Justapondo $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ e $\widetilde{\gamma}$construímos um caminho $\Gamma : [0,1] \to SO(n+1)$(respectivamente $O^-(n+1)$) com $\Gamma(0) = A$ e $\Gamma(1) = B$.

■

4.2 SU(2) é recobrimento universal de SO(3)

Definição 4.2.1

$$SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : AA^t = A^tA = 1_{2\times 2}, \det(A) = 1\},$$

onde A^t denota a matriz trasposta conjugada de A.

Proposição 4.2.1 *Se $A \in SU(2)$, então $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1$.*

Demonstração: Dada $A \in SU(2), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det(A) = ad - bc = 1, AA^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então, $|a|^2 + |b|^2 = 1, |c|^2 + |d|^2 = 1$ e $a\overline{c} + b\overline{d} = 0$.

Se $a \neq 0, \overline{c} = -\dfrac{b\overline{d}}{a} \Rightarrow c = -\dfrac{\overline{b}d}{\overline{a}} \Rightarrow 1 = ad - bc = ad + \dfrac{b\overline{b}d}{a} \Rightarrow \overline{a} = |a|^2 d + |b|^2 d = (|a|^2 + |b|^2)d = d \Rightarrow \overline{a} = d \Rightarrow c = -\overline{b}$.

Se $a = 0$, então $b \neq 0$. Então,

$\overline{d} = -\dfrac{a\overline{c}}{b} \Rightarrow d = -\dfrac{\overline{a}c}{\overline{b}} \Rightarrow 1 = ad - bc = -\dfrac{|a|^2 c}{\overline{b}} - bc \Rightarrow \overline{b} = -|a|^2 c - |b|^2 c \Rightarrow \overline{b} = (-|a|^2 - |b|^2)c \Rightarrow \overline{b} = -c \Rightarrow d = \overline{a}$.

Portanto, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1$.

■

Proposição 4.2.2 *$SU(2)$ é difeomorfo a esfera S^3.*

Demonstração: Seja $C = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A = \begin{pmatrix} x+iy & u+iv \\ -u+iv & x-iy \end{pmatrix}, x, y, u, v \in \mathbb{R}\}$.

Defina $f : \mathbb{R}^4 \to C$ pondo $f(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x + iy & u + iv \\ -u + iv & x - iy \end{pmatrix}$.

Note que f é bijetora. Então, $SU(2) \subseteq C \equiv \mathbb{R}^4$.

Defina $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ g(x, y, u, v) = x^2 + y^2 + u^2 + v^2$.

Temos que $SU(2) = g^{-1}(1)$ e 1 é valor regular de g. Então, $SU(2)$ é difeomorfa a S^3.

■

Corolário 4.2.1 *$SU(2)$ é simplesmente conexo.*

Demonstração: Segue da Proposição anterior e da Observação 3.1.1

■

A fim de construir a aplicação de recobrimento de $SU(2)$ em $SO(3)$, usaremos uma caracterização da esfera S^3 como grupo (isomorfo a $SU(2)$) com a operação de produto de quatérnios.

Lema 4.2.1 *Se o quatérnio w comuta com todo imaginário puro então w é real. Se, além disso, $w \in S^3$, então $w = \pm 1$.*

Demonstração: Se $w = a+bi+cj+dk$ então $iw = -b+ai-dj+ck$ e $wi = -b+ai+dj-ck$. De $wi = iw$ concluímos que $c = d = 0$, isto é, $w = a + bi$. Logo, $wj = aj + bk$ e $jw = aj - bk$. Daí resulta (usando $wj = jw$) que $b = 0$. Portanto, $w = a \in \mathbb{R}$. Então se $w \in S^3, |w|^2 = a^2 = 1$, donde $w = \pm 1$.

■

Proposição 4.2.3 *Existe um homomorfismo contínuo sobrejetivo $\varphi : S^3 \to SO(3)$, cujo núcleo é $\{1, -1\}$.*

Demonstração: Primeiramente, observe que $SO(3) = \{T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineares tais que $\det T = 1, \langle Tv, Tv \rangle\} = \| v \|^2, \forall v \in \mathbb{R}^3$.

A cada $u \in S^3$ associaremos a transformação linear $\varphi_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $\varphi_u(w) = uwu^{-1}$.

Considerando inicialmente como definida em $\mathbb{R}^4$, como $|u \cdot w \cdot u^{-1}| = |w|, \varphi_u$ é ortogonal e vemos que φ_u é linear. Além disso, como $\varphi_u(1) = 1, \varphi$ deixa invariante o subespaço $\mathbb{R}$, formado pela parte real, logo deixa também invariante seu complemento ortogonal $\mathbb{R}^3$, formado pelos imaginários puros. Ou seja, se $w = xi + yj + zk$ é imaginário puro, então $u \cdot w \cdot u^{-1}$ também o é e portanto a transformação ortogonal φ_u está bem definida. A matriz de φ_u tem colunas $u \cdot i \cdot u^{-1}, u \cdot j \cdot u^{-1}$ e $u \cdot k \cdot u^{-1}$, que dependem continuamente de

$u \in S^3$. Temos $\det \varphi_u = \pm 1, \forall u \in S^3$. Como S^3 é conexa e, para $u = 1$, vale $\det \varphi_u = 1$, segue-se que $\det \varphi_u = 1$. Logo, $\varphi_u \in SO(3), \forall u \in S^3$, o quer nos dá a função contínua

$$\varphi : S^3 \to SO(3).$$

Evidentemente, $\varphi_{uv} = \varphi_u \circ \varphi_v$, de modo que φ é homomorfismo de grupos. O núcleo de φ é formado pelos quatérnios $u \in S^3$ tais que $u \cdot w \cdot u^{-1} = w$, ou seja, $u \cdot w = w \cdot u, \forall w \in \mathbb{R}^3$. Pelo lema anterior, concluímos que o núcleo de φ possui apenas os quatérnios 1 e -1, ou seja $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow y = \pm x$. Agora vamos mostrar que φ é sobrejetora.

Como S^3 é compacta e $SO(3)$ é conexo, basta mostrar que φ é uma aplicação aberta. De fato, então $\varphi(S^3)$ será um subconjunto fechado e aberto de SO(3) e portanto deve ser $SO(3)$.

Começamos observando que φ é uma aplicação de classe C^∞, pois para cada $u \in S^3$ os elmentos da matriz são funções C^∞ de u. Como φ é um homomorfismo de grupos, seu posto é constante. Pelo Teorema do Posto[2], como φ é localmente injetora, seu posto é máximo, isto é, igual a 3. Em particular φ é submersão e portanto uma aplicação aberta.

■

Agora considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow SU(2) \xrightarrow{\varphi} SO(3) \longrightarrow 1 \, .$$

Proposição 4.2.4 *A aplicação $\varphi : SU(2) \to SO(3)$ é aplicação de recobrimento.*

Demonstração: Pela proposição 4.2.3, a aplicação satisfaz as hipóteses do teorema 3.1.4. Logo φ é uma aplicação de recobrimento.

■

Logo, da sequência exata acima obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \pi_1(SU(2)) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(SO(3)) \longrightarrow 1 \, .$$

Mas, $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ (Referência [8]). Portanto, $\pi_1(SU(2)) = \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 = \{1\}$.

Como $SU(2)$ é espaço de recobrimento de $SO(3)$ e $\pi_1(SU(2))$ é trivial, segue que $SU(2)$ é recobrimento universal de $SO(3)$.

Então, pela unicidade do recobrimento universal, temos que $Spin_3$ é isomorfo à $SU(2)$.

[2] Ver referência [7]

Conclusão

Vimos a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V,q)$, onde V é um espaço vetorial e q é uma forma quadrática fixada em V, através de uma propriedade universal, provamos unicidade a menos de ismomorfismo e existência.

Estudamos uma importante subestrutura da álgebra de Clifford, o subgrupo $Spin$ do grupo das unidades. Mostramos que no caso em que V tem dimensão finita n, $Spin_n$ é recobrimento universal de $SO(n)$. Em particular para $n = 3$, mostramos que $Spin_n$ é isomorfo ao grupo $SU(2)$.

A álgebra de Clifford é uma estrutura riquíssima. Exploramos vários aspectos, mas ainda há várias coisas interessantes a serem feitas.

Apêndice 1: Produto Tensorial

Para estudarmos álgebra de Clifford é importante alguns conhecimentos básicos de produto tensorial de espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Neste Apêndice, daremos a definição de produto tensorial entre espaços vetoriais através de uma propriedade universal, bem como mostraremos a existência e unicidade a menos de isomorfismo de um tal produto. Provaremos também algumas propriedades básicas. Todos os espaços vetoriais são sobre um corpo $\mathbb{K}$ fixado.

Definição 4.2.2 *Um* ***produto tensorial*** *entre dois espaços vetoriais V e W é um par (T, φ) em que T é um espaço vetorial e $\varphi : V \times W \to T$ é uma aplicação bilinear tal que para qualquer aplicação bilinear $f : V \times W \to U$ existe uma única aplicação linear $\bar{f} : T \to U$ tal que $f = \bar{f} \circ \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Analogamente ao que fizemos provamos para álgebras de Clifford, prova-se que o produto tensorial de dois espaços vetoriais é único a menos de isomorfismo.

Construção de um Produto Tensorial

Tome o espaço vetorial gerado por $V \times W$

$$\langle V \times W \rangle = \left\{ \sum_i a_i(v_i, w_i), v_i \in V, w_i \in W, a_i \in \mathbb{K} \text{ e } a_i = 0 \text{ quase sempre} \right\}.$$

Sejam

$J_1 = \{(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) : v_i \in V, w \in W\}$;

$J_2 = \{(v_1, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) : v \in V, w_i \in W\}$;

$J_3 = \{a(v, w) - (av, w) : v \in V, w \in W, a \in \mathbb{K}\}$;

$J_4 = \{a(v, w) - (v, aw) : v \in V, w \in W, a \in \mathbb{K}\}$;

$J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$ e $S = \langle J \rangle \leqslant \langle V \times W \rangle$.

Defina $V \otimes W = \langle V \times W \rangle / S$, e denote a classe $[(v, w)]$ por $v \otimes w$.

Proposição 4.2.5 *A aplicação $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ com $\varphi((v, w)) = v \otimes w$ é bilinear.*

Demonstração: Como os elementos de S são levados em 0, em particular para os elementos de J, temos que

$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$,

$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$ e

$(av) \otimes w = v \otimes (aw) = a(v \otimes w)$.

■

Proposição 4.2.6 *$(V \otimes W, \varphi)$ é produto tensorial.*

Demonstração: Seja $f : V \times W \to U$ aplicação bilinear.
Defina $\bar{f} : V \otimes W \to U, \bar{f}(\sum_i v_i \otimes w_i) = \displaystyle\sum_i f(v_i, w_i)$.

Dados $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i, \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j \in V \otimes W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Chame $\lambda x_j = v_{j+i}$ e $y_j = w_{j+i}$. Então,

$$\bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i + \lambda \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j\right) = \bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n+m} v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^{n+m} f(v_i, w_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(v_i, w_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda f(x_j, y_j) = \bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) + \lambda \bar{f}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j\right).$$

Portanto, $\bar{f}$ é linear.

Vemos que $(\bar{f} \circ \varphi)(v, w) = \bar{f}(v \otimes w) = f(v, w), \forall (v, w) \in V \times W$.

Seja $g : V \otimes W \to U$ linear tal que $g \circ \varphi = f$. Então,
$g(\sum a_{ij} v_i \otimes w_j) = \sum a_{ij} g(v_i \otimes w_j) = \sum a_{ij} (g \circ \varphi)(v_i, w_j) = \sum a_{ij} f(v_i, w_j) =$
$= \bar{f}(\sum a_{ij} v_i \otimes w_j)$. Logo, $\bar{f}$ é única.■

Note que, para um dado um elemento qualquer de $V \otimes W$ não podemos afirmar que ele possa ser escrito como $v \otimes w, v \in V, w \in W$ mas, como combinação linear de elementos desta forma.

De fato,

$$v \otimes w = [(v, w)] = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i (v_i, w_i), v_i \in V, w_i \in W\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i [(v_i, w_i)] = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \otimes w_i.$$

Exemplo 4.2.1 $\mathbb{K} \otimes V \simeq V$.

Vamos mostrar que V é produto tensorial de $\mathbb{K}$ e V.

Seja

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v \end{array}.$$

Claramente, φ é bilinear.

Para toda aplicação bilinear $f : \mathbb{K} \times V \to U$, defina

$$\begin{array}{rcc} \overline{f}: & V \to & U \\ & v \mapsto & f(1, v) \end{array}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \times V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Note que $\bar{f}$ é linear, pois f é bilinear.

Vemos que, $(\bar{f} \circ \varphi)(\lambda, v) = \bar{f}(\varphi(\lambda, v)) = \bar{f}(\lambda v) = f(1, \lambda v) = f(\lambda, v), \forall (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V$. Então $\bar{f} \circ \varphi = f$.

Suponha que existe $g : V \to U$ linear tal que $g \circ \varphi = f$. Então,

$g(v) = g(1 \cdot v) = g(\varphi(1, v)) = f(1, v) = \bar{f}(v), \forall v$. Portanto, $\bar{f}$ é única.

Teorema 4.2.1 *Sejam $\{e_i\}_{i \in I}$ base de U e $\{f_j\}_{j \in J}$ base de V. Então $\{e_i \otimes f_j\}_{i,j}$ é base de $U \otimes V$.*

Demonstração:

Defina

$$\begin{array}{rcc} \pi_i: & U \times V \to & V \\ & (u, v) \mapsto & u_i v \end{array}, \text{ onde } u = u_1 e_1 + \cdots + u_i e_i + \cdots + u_n e_n.$$

Não é difícil ver que π_i é bilinear. Logo, pela definição de produto tensorial, existe uma única $\overline{\pi}_i : U \otimes V \to V$ linear tal que $\overline{\pi}_i \circ \varphi = \pi_i$.

Seja $t = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{k} u_\alpha \otimes v_\alpha \in U \otimes V$. Então,

$t = \displaystyle\sum_\alpha \left(\sum_i u_\alpha^i e_i \right) \otimes \left(\sum_j v_\alpha^j f_i \right) = \sum_\alpha \sum_i \sum_j u_\alpha^i v_\alpha^j e_i \otimes f_j = \sum \lambda_{ij} e_i \otimes f_j$. Logo, $\{e_i \otimes f_j\}$ gera $U \otimes V$.

Seja $\sum \lambda_{ij} e_i \otimes f_j = 0_{U \otimes V}$. Para todo $l \in I, \overline{\pi}_l \left(\displaystyle\sum_{i,j} e_i \otimes f_j \right) = \overline{\pi}_l(0_{U \otimes V}) = 0_V$. Então, $\displaystyle\sum_{i,j} \lambda_{ij} \overline{\pi}_l(e_i \otimes f_j) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} \lambda_{ij} \overline{\pi}_l(\varphi(e_i \otimes f_j)) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} \lambda_{ij} \pi_l(e_i, f_j) = 0 \Rightarrow \sum_j \lambda_{lj} f_j = 0 \Rightarrow \lambda_{lj} = 0$. Logo, $\{e_i \otimes f_j\}$ é linearmente independente.■

Proposição 4.2.7 *i) Sejam $((U \otimes V), \varphi)$ produto tensorial de U e V e $((V \otimes U), \psi)$ produto tensorial de V e U. Então, $U \otimes V \simeq V \otimes U$.*

ii) Sejam $((V\otimes W)\otimes U,\eta)$ produto tensorial de $V\otimes W$ e U e $((V\otimes(W\otimes U)),\mu)$ produto tensorial de V e $W\otimes U$. Então, $(V\otimes W)\otimes U\simeq V\otimes(W\otimes U)$.

Demonstração:

i) Defina

$$\begin{array}{rrl} t_1: & U\times V\to & V\times U \\ & (u,v)\mapsto & (v,u) \end{array}.$$

Vejamos que $\psi\circ t_1$ é bilinear:

$(\psi\circ t_1)(u+\lambda u',v)=\psi(v,u+\lambda u')=v\otimes(u+\lambda u')=v\otimes u+v\otimes\lambda u'=\psi(v,u)+\lambda(v\otimes u')=$
$=\psi(v,u)+\lambda\psi(v,u')=\psi(t_1(u,v))+\lambda\psi(t_1(u',v))$.

Analogamente, $(\psi\circ t_1)(u,v+\lambda v')=(\psi\circ t_1)(u,v)+\lambda(\psi\circ t_1)(u',v')$.

Logo, existe uma única aplicação $f:U\otimes V\to V\otimes U$ linear tal que $f\circ\varphi=\psi\circ t_1$.

Vemos que $f(\sum_i u_i\otimes v_i)=f(\varphi(\sum_i(u_i,v_i)))=(\psi\circ t_1)(\sum_i(u_i,v_i))=\sum_i\psi(v_i,u_i)=\sum_i v_i\otimes u_i$.

De forma análoga, defina

$$\begin{array}{rrl} t_1: & V\times U\to & U\times V \\ & (v,u)\mapsto & (u,v) \end{array},$$

vemos que $\psi\circ t_2$ é bilinear. Existe uma única aplicação $g:V\otimes U\to U\otimes V$ linear tal que $g\circ\psi=\varphi\circ t_2$.

Vemos que $g(\sum_i v_i\otimes u_i)=g(\psi(\sum_i(v_i,u_i)))=(\varphi\circ t_2)(\sum_i(v_i,u_i))=\sum_i\varphi(u_i,v_i)=\sum_i u_i\otimes v_i$.

Segue que $(f\circ g)(\sum_i v_i\otimes u_i)=f(g(\sum_i v_i\otimes u_i))=f(\sum_i u_i\otimes v_i)=\sum_i v_i\otimes u_i$. Logo, $f\circ g=id_{V\otimes U}$.

Analogamente, $g\circ f=id_{U\otimes V}$.

Portanto, $U\otimes V\simeq V\otimes U$.

ii) Defina

$$\begin{array}{rrl} f: & V\times(W\otimes U)\to & (U\otimes W)\otimes U \\ & (v,\sum_i w_i\otimes u_i)\mapsto & \sum_i(v\otimes w_i)\otimes u_i \end{array}.$$

Vejamos que f é bilinear. Sejam $v, v' \in V$ e $\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i, \sum_{j=1}^{m} w'_j \otimes u'_j$, chame $w'_j = w_{n+j}$ e $u'_j = u_{n+j}$, então

$$f(v+\lambda v', \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i + \sum_{j=1}^{n} w'_j \otimes u'_j) = f(v+\lambda v', \sum_{i=1}^{n+m} w_i \otimes u_i) = \sum_{i=1}^{m+n} [(v+\lambda v') \otimes w_i] \otimes u_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(v+\lambda v') \otimes w_i] \otimes u_i + \sum_{j=1}^{m} [(v+\lambda v') \otimes w'_j] \otimes u'_j = \sum_{i=1}^{n} (v \otimes w_i) \otimes u_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} (v' \otimes w_i) \otimes u_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (v + \otimes w'_j) \otimes u'_j + \lambda \sum_{j=1}^{m} (v' \otimes w'_j) \otimes u'_j = f(v, \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i) + \lambda f(v', \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i) + f(v, \sum_{j=1}^{m} w'_j \otimes u'_j) +$$

$+\lambda f(v', \sum_{j=1}^{m} w'_j \otimes u'_j)$.

Pela propriedade universal, existe um única aplicação linear $\overline{f} : V \otimes (W \otimes U) \to (V \otimes W) \otimes U$ tal que $\overline{f}(v \otimes (w \otimes u)) = f(v, w \otimes u)$.

Defina $g : (V \otimes W) \times U \to V \otimes (W \otimes U)$, $g(\sum_i v_i \otimes w_i, u) = \sum_i v_i \otimes (w_i \otimes u)$.

De maneira a como mostramos que f é linear, mostra-se que g é bilinear.

Portanto, existe uma única $\overline{g} : (V \otimes W) \otimes U \to V \otimes (W \otimes U)$ linear tal que $\overline{g}((v \otimes w) \otimes u) = g(v \otimes w, u)$.

Vamos mostrar que $\overline{g}$ é a inversa de $\overline{f}$,

$$\begin{aligned}
(\overline{f} \circ \overline{g})((v \otimes w) \otimes u) &= \overline{f}(g(v \otimes w, u)) = \overline{f}(v \otimes (w \otimes u)) = f(v, w \otimes u) = \\
&= (v \otimes w) \otimes u, \forall v \in V, w \in W, u \in U,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overline{g} \circ \overline{f})(v \otimes w(\otimes u)) &= \overline{g}(f(v, w \otimes u)) = \overline{g}((v \otimes w) \otimes u) = g(v \otimes w, u) = \\
&= v \otimes (w \otimes u), \forall v \in V, w \in W, u \in U.
\end{aligned}$$

Portanto, $(V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U)$.

■

Apêndice 2: Álgebra de Lie

Seja $\mathbb{K}$ um corpo.

Definição 4.2.3 *Uma $\mathbb{K}$-álgebra de Lie é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V com uma operação $[\,,\,] : V \times V \to V$ chamada* ***`colchete de Lie`****, tal que*

i) $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in V$

ii) $[ax + by, cz + dz] = ac[x, y] + ad[x, w] + bc[y, z] + bd[y, w], \forall a, b, c, d \in \mathbb{K}, x, y, z, w \in V$

iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in V$*, chamada Identidade de Jacobi.*

Exemplo 4.2.2 $(\mathbb{R}^3, \times)$*, onde $\times$ é o produto vetorial, é $\mathbb{K}$-álgebra de Lie.*

De fato, Sejam $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

i) $x \times y = (x_2y_3 - y_2x_3, y_1x_3 - x_1y_3, x_1y_2 - y_1x_2) = -(y_2x_3 - x_2y_3, x_1y_3 - y_1x_3, y_1x_2 - -x_1y_2) = -(y \times x)$.

ii) $(ax+by)\times(cz+dw) = (ax_1+by_1, ax_2+by_2, ax_3+by_3)\times(cz_1+dw_1, cz_2+dw_2, cz_3+dw_3) = ((ax_2 + by_2) \times (cz_3 + dw_3) - (cz_2 + dw_2)(ax_3 + by_3), (cz_1 + dw_1)(ax_3 + by_3) - (ax_1 + by_1)(cz_3+dw_3), (ax_1+by_1)(cz_2+dw_2)-(cz_1+dw_1)(ax_2+by_2)) = ac(x_2z_3-z_2x_3, z_1x_3-x_1z_3, x_1z_2 - z_1x_2) + ad(x_2w_3 - w_2x_3, w_1x_3 - x_1w_3, x_1w_2 - w_1x_2) + bc(y_2z_3 - z_2y_3, z_1y_3 - y_1z_3, y_1z_2 - z_1y_2) + bd(y_2w_3 - w_2y_3, w_1y_3 - y_1w_3, y_1w_2 - w_1y_2)) = ac(x \times z) + ad(x \times w) + bc(y \times z) + bd(y \times w)$.

iii) $(x \times (y \times z)) + (y \times (z \times x)) + (z, (x \times y)) = (x_2(y_1z_2 - z_1y_2) - (z_1y_3 - y_1z_3)x_3, (y_2z_3 - z_2y_3)x_3 - x_1(y_1z_2 - z_1y_2), x_1(z_1y_3 - y_1z_3) - (y_2z_3 - z_2y_3)x_2) + (y_2(z_1x_2 - x_1z_2) - (x_1z_3 - z_1x_3)y_3, (z_2x_3 - x_2z_3)y_3 - y_1(z_1x_2 - x_1z_2), y_1(x_1z_3 - z_1x_3) - (z_2x_3 - x_2z_3)y_2) + (z_2(x_1y_2 - y_1x_2) - (y_1x_3 - x_1y_3)z_3, (x_2y_3 - y_2x_3)z_3 - z_1(x_1y_2 - y_1x_2), z_1(y_1x_3 - x_1y_3) - (x_2y_3 - y_2x_3)z_2) = 0$

Exemplo 4.2.3 *$(M_n(\mathbb{K}), [,])$, onde $[A, B] = AB - BA$, é $\mathbb{K}$-álgebra de Lie.*

Este exemplo é um caso particular da proposição seguinte.

Proposição 4.2.8 *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. A operação comutador $[,] : A \times A \to A$, dada por $[x, y] = xy - yx$ é colchete de Lie.*

Demonstração: Sejam $\forall x, y, z, w \in A, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

i) $[x, y] = xy - yx = -(yx - xy) = -[y, x]$

ii) $[x + \lambda_1 z, y + \lambda_2 w] = (x + \lambda_1 z)(y + \lambda_2 w) - (y + \lambda_2 w)(x + \lambda_1 z) = [x, y] + \lambda_2[x, w] + \lambda_1[z, y] + \lambda_1\lambda_2[z, w]$

iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = x[y, z] - [y, z]x + y[z, x] - [z, x]y + z[x, y] - [x, y]z = x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) - (zx - xz)y + z(xy - yx) - (xy - yx)z = 0$

Definição 4.2.4 *Sejam $(A, [,])$ e $(B, [[,]])$ $\mathbb{K}$-álgebras de Lie. Dizemos que $\alpha : A \to B$ é* ***homomorfismo de álgebras de Lie*** *se α é $\mathbb{K}$-linear e $\alpha([x, y]) = [[\alpha(x), \alpha(y)]], \forall x, y \in A$.*

Definição 4.2.5 *Sejam B uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa e A uma subálgebra de B. Uma* ***derivação*** *de A em B é um homomorfismo $\mathbb{K}$-linear D de A em B tal que $D(ab) = aD(b) + D(a)b, \forall a, b \in A$.*

Notação: $Der_{\mathbb{K}}(A, B)$ denota o conjunto das derivações de A em B. Se A=B, denotamos $Der_{\mathbb{K}}(A)$.

Proposição 4.2.9 *Se A é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa, $Der_{\mathbb{K}}(A)$ é álgebra de Lie.*

Demonstração: Sejam $D_1, D_2 \in Der_{\mathbb{K}}(A), \alpha \in \mathbb{K}$.
$(\alpha D_1)(ab) = \alpha D_1(ab) = \alpha(aD_1(b) + D_1(a)b) = a(\alpha D_1)(b) + (\alpha D_1)(a)b.$

Logo, $\alpha D_1 \in Der_{\mathbb{K}}(A)$.
$(D_1 + D_2)(ab) = D_1(ab) + D_2(ab) = aD_1(b) + D_1(a)b + aD_2(b) + D_2(a)b = a(D_1 + D_2)(b) + (D_1 + D_2)(a)b$. Logo, $D_1 + D_2 \in Der_{\mathbb{K}}(A)$.

$(D_1 + D_2)(ab) = a(D_1 + D_2)(b) + (D_1 + D_2)(a)b = a(D_1(b) + D_2(b)) + (D_1(a) + D_2(a))b = a(D_2(b) + D_1(b)) + (D_2(a) + D_1(a))b = a(D_2 + D_1)(b) + (D_2 + D_1)(a)b = (D_1 + D_2)(ab)$.
Analogamente, prova-se que $(D_1 + D_2) + D_3 = D_1 + (D_2 + D_3)$, $(\alpha + \beta)D = \alpha D + \beta D$ e $\alpha(D_1 + D_2) = \alpha D_1 + \alpha D_2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall D, D_1, D_2, D_3 \in Der_{\mathbb{K}}(A)$.

O elemento neutro é o homomorfismo nulo e a unidade da multiplicação é $1_{\mathbb{K}}$.

Portanto, $Der_{\mathbb{K}}(A)$ é $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Defina $[,] : Der_{\mathbb{K}}(A) \times Der_{\mathbb{K}}(A) \to Der_{\mathbb{K}}(A)$, por $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Vejamos que está bem definido,

$(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(ab) = (D_1 \circ D_2)(ab) - (D_2 \circ D_2)(ab) = D_1(aD_2(b) + D_2(a)b) - D_2(aD_1(b) + D_1(a)b) = a(D_1 \circ D_2)(b) + (D_1 \circ D_2)(a)b - a(D_2 \circ D_1)(b) - (D_2 \circ D_1)(a)b = a((D_1 \circ D_2) - (D_2 \circ D_1))(b) + ((D_1 \circ D_2) - (D_2 \circ D_1))(a)b.$

Não é difícil verificar que é colchete de Lie.

■

Referências Bibliográficas

[1] ARTIN, E. *Geometric Algebra*, New York: Interscience Publishers, 1957.

[2] DO CARMO, M.P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Rio de Janeiro, IMPA, 2006.

[3] LANG, S. *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[4] LAWSON, H.B., Michelson, M.L. *Spin Geometry*, Fortaleza, UFCE, 1983.

[5] LIMA, E.L. *Álgebra Linear*, Rio de Janeiro, IMPA, 2003.

[6] LIMA, E.L. *Análise Real, v2*, Rio de Janeiro, IMPA, 2004.

[7] LIMA, E.L. *Curso de Análise, v2*, Rio de Janeiro, IMPA, 1999.

[8] LIMA, E.L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro, IMPA, 1993.

[9] MURPHY, G.J. *C*-algebras and operator theory*, Boston, Academic Press, 1990.

[10] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltda, 1990.

[11] O'NEILL,B. *Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity*, Orlando: Academic Press, 1983.

[12] SATTINGER, D.H.,WEAVER, O.L. *Lie Groups and Algebras with aplications to Physics, Geometry and Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[13] THAYER, J. *Operadores Auto-adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, IMPA, 1987.