VANESSA NASCIMENTO MENDES

DIFERENTES FORMAS DE CONCEITUAR FUNÇÃO EM SALA DE AULA

FLORIANÓPOLIS
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

VANESSA NASCIMENTO MENDES

DIFERENTES FORMAS DE CONCEITUAR FUNÇÃO EM SALA DE AULA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura como parte dos requisitos para a obtenção do título de graduado em Matemática

Sob a orientação do
Prof. Nereu Estanislau Burin

FLORIANÓPOLIS
2007

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela banca examinadora designada pela Portaria nº 71/ CCM / 07

____
Prof.ª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

____
Prof. Nereu Estanislau Burin
Orientador

____
Prof.ª Carmem Suzane Comitre Gimenez

____
Prof. Méricles Thadeu Moretti

AGRADECIMENTOS

A Deus:

Por ter me abençoado com o milagre da vida, por não ter ficado à margem e, através das oportunidades, ter chegado até aqui.

Aos nossos pais:

Dorival Nascimento Mendes e Maria Júlia Mendes Nascimento, que me ensinaram a viver com dignidade, que me iluminaram nos caminhos obscuros, com afeto e dedicação, que renunciaram aos seus sonhos, para que muitas vezes eu pudesse realizar os meus. Minha vitória é, antes de tudo, vossa.

Aos meus amores:

Alexsandro Costa de Oliveira, Raíssa Nascimento de Oliveira, pelo amor, pelas palavras de incentivo, amizade e companheirismo, pela compreensão nos momentos de ausência, por confiarem em meu potencial e me fazer crescer, sendo muitas vezes motivos de inspiração em minha caminhada.

Aos nossos familiares:

Pelo carinho, incentivo, apoio, por acreditarem em minha capacidade e compartilharem de meus ideais.

Aos meus amigos e colegas de turma:

Pelo companheirismo e amizade, por compartilharem do meu aprendizado e me proporcionarem felizes momentos nesta trajetória. Levarei comigo o exemplo e o brilho de uma amizade construída que jamais se perderá no tempo.

Ao meu orientador:

Nereu Estanislau Burin, pela disponibilidade, sabedoria, otimismo, confiança, incentivando-me à independência na aquisição de novas experiências. Obrigado por me estimular à busca da satisfação plena de meus ideais profissionais e humanos.

Aos professores da Graduação:

Por repartirem conosco os seus conhecimentos, colocando em nossas mãos os instrumentos com os quais abriremos nossos horizontes.

RESUMO

O presente trabalho trata de alguns aspectos ligados à origem do conceito de função e a maneira como a qual é desenvolvida. O estudo se deu em duas etapas: a primeira consistiu em um levantamento histórico da origem do conceito, através de uma pesquisa bibliográfica. Acredito que o conhecimento de tais aspectos é de grande valia na elaboração da linguagem matemática, proporcionando uma compreensão mais profunda de tal conceito. A segunda etapa utiliza como ferramenta principal, a elaboração e aplicação de um questionário (ANEXO 1) com dez perguntas discursivas. Fundamentado nisso pude conhecer as várias facetas do desenvolvimento deste conteúdo perante os professores do Ensino Médio.

O enfoque deste trabalho tem como base as informações obtidas através do questionário feitas com esses professores, o que permite apresentar alguns resultados relacionados ao uso da linguagem matemática no ensino de funções.

Dentre várias particularidades pude perceber o uso de uma linguagem simples e de exemplos do cotidiano que evidenciam a sociedade nos dias atuais e o meio em que os alunos estão inseridos.

ABSTRACT

This work approaches some aspects related to the origin of function concept and the way through which it was developed. The study was divided into two stages: the first consisted of a historical survey of the concept origin by a bibliographical research. I believe that the knowledge of such aspects is of great worthiness for the elaboration of the mathematical language, providing a deeper comprehension of this concept. The second stage uses as main tool the elaboration and application of a questionary (APPENDIX 1) with ten discoursive questions, based on this I could get to know several facets of this content for Senior High School teachers.

The focus of this work is based on the information obtained from the questionary answered by those teachers, it allows us to present some results related to the usage of the mathematical language in the function teaching. Among diverse particularities, I could notice the usage of a simple language and of day-by-day examples that emphasize the society in the current days and the mean in which the students are inserted.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A escola normalmente adota a definição formal de função, baseada na teoria dos conjuntos, talvez pensando na uniformidade e unicidade da Matemática e, articulando bem tudo isso, temos a impressão de que sempre foi assim.

Ao conhecer o desenvolvimento histórico de determinados conceitos na Matemática, o professor percebe que a criação na Matemática não se dá em um único momento. Existem fatores socioculturais que acabam influenciando essa criação, e todos dependem dos problemas que as diferentes sociedades de cada época propõem.

Ao se apropriar da história da Matemática, o professor pode fazer com que a mesma tenha um papel mais útil em sala de aula, mais do que o de simples curiosidade. Dessa forma, o professor tem a oportunidade de “sair” um pouco dos livros didáticos, preparar uma linguagem matemática e criar seu próprio planejamento. O ensino de funções não foge à regra.

Considerando a complexidade de relações que a concepção de função como objeto mental exige, faz-se necessário o estudo de aspectos históricos e epistemológicos como caminho para a compreensão da melhor forma de organizar e desenvolver o conteúdo junto aos estudantes.

Nesse trabalho, não há a pretensão de se fazer uma análise detalhada de todos os aspectos relacionados ao desenvolvimento histórico do conceito de função. Minha intenção é destacar alguns momentos da origem histórica desse conceito.

A fim de enriquecer esse trabalho, procurei trazer na última parte uma pequena reflexão. A mesma tem como objetivo mostrar o que realmente acontece em sala de aula. Que tipo de linguagem nossos professores utilizam a fim de conceituar função.

2. OBJETIVOS

2.1.OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo apontar as diferentes formas de como o conceito de função é elaborado em sala de aula, levando em conta o desenvolvimento histórico de cada época da sociedade.

2.2.OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conhecer a diversidade de conceituação de função ao longo da história e assim poder definir a melhor maneira de organizar e desenvolver o conteúdo junto aos alunos.

- Elaborar e aplicar um instrumento de entrevista, que permita perceber nuances do trabalho dos professores, no que tange o conteúdo de funções apresentado atualmente nos PCNs e na prática em sala de aula.

- Conhecer os diferentes tipos de linguagem matemática que estão sendo usados pelos professores e como os alunos assimilam e constroem tal conhecimento.

- Expor as principais dificuldades encontradas tanto pelo professor quanto pelos alunos nesse processo.

3. DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Não existe um consenso em relação à origem do conceito de função. Para alguns autores, esse conceito já se apresentava nos babilônios (2000 a.c) através de seu instinto de funcionalidade, para outros a noção de função não é muito antiga, seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objeto de estudo corrente em Matemática, remonta apenas aos finais do Século XVII. A origem da noção de função confunde-se assim com os primórdios do Cálculo Infinitesimal.

A utilização da idéia de dependência funcional na Antiguidade tem como precursoras duas civilizações: os babilônios e os gregos. Entretanto, a noção de função não era tratada de forma generalizada, mas sim utilizada em casos particulares de dependências entre duas quantidades. Não havia também a noção de quantidade variável. Nesse período, a idéia de função matemática esteve sempre ligada com a evolução do conhecimento de fenômenos físicos, e neste aspecto o progresso feito pelos babilônios na tabulação e interpretação de dados relacionados à Astronomia.

Segundo Boyer (1974) os matemáticos mesopotâmicos eram hábeis no desenvolver processos algoritmos, destacando-se entre os quais, um algoritmo para extrair a raiz quadrada. Apesar da eficiência de sua regra para raízes quadradas, os mesopotâmicos preferiram organizar tais informações em tabelas. Embora isso trouxesse uma idéia mais geral de função, era possível identificar em tais tabelas um instinto de funcionalidade.

Uma das tabelas apresentava os seguintes valores: $n^3 + n^2$, para n= 1, 2, 3,...,20, 30, 40 e 50. Obviamente, não seria forçado associá-la à função f cujo domínio é {1, 2, 3,..., 29, 30, 40, 50} e que está definida por $f(x)= x^3+ x^2$. Provavelmente essa tabela (tábua) foi construída para permitir a resolução de equações do tipo $x^3+ x^2= c$, e pode-se identificar nela indícios da idéia de função inversa. Pois ao se resolver uma equação do tipo $x^3 + x^2= 12$, por exemplo, o que se procura é o número n tal que f(n) =12, ou seja, a “imagem” de 12 pela “função inversa” de f.

Na Grécia Antiga o conceito de função propriamente dito não foi desenvolvido, mas nos estudos de Aristóteles aparecem idéias sobre quantidades variáveis e nos trabalhos de cônicas de Arquimedes e Apolônio é introduzido o ”Symptom” de uma curva, que é definido por eles como a condição para que um ponto pertencesse à cônica, isto é, uma espécie de dependência funcional.

Os Pitagóricos também estabeleceram relações entre grandezas físicas, como por exemplo, "alturas dos sons e comprimentos das cordas vibrantes" na descoberta de algumas leis da Acústica.

Os astrônomos na época Alexandrina construíram tabelas para os comprimentos de cordas de um círculo, conhecido o raio. O registro de algumas destas tabelas estão na obra "Almagesto" do matemático Ptolomeu, publicada entre os anos 125 e 150 d.C.

No 1º volume de Almagesto - são 13 ao todo, há uma tábua (tabela) com as cordas dos arcos de 0,5 º a 180º em intervalos de 1/ 2º. Essas cordas seriam, na verdade, uma espécie de ancestral mais remoto de nossos senos. Ptolomeu usou também suas tábuas em sentido contrário, para achar, por exemplo, o arco de uma dada corda; é possível dizer que a idéia de função inversa já estava presente em sua obra. O grande feito de Ptolomeu foi de mostrar como interpolar linhas em sua tábua, independente do valor da "variável independente" (o arco), dessa forma, sugerindo um caminho para um estudo computacional de fenômenos contínuos.

Após o declínio da civilização grega, o conceito de função teve que esperar em torno de treze séculos para receber novas e decisivas contribuições.

Na idade média podemos constatar o ressurgimento da matemática como objeto de preocupação dos cientistas. Foi nesse período que os matemáticos buscaram maneiras de generalizar o conceito de função, entretanto não conseguiram formalizar adequadamente tal conceito. Ainda nesse período, vale lembrar que as noções eram expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas em que ainda prevaleciam, em cada caso concreto, as descrições verbais ou gráficas; nesse último podemos citar a importância do bispo francês Nicole d' Oresme (1323-1382), para o desenvolvimento do conceito de função.

Em 1361, Oresme fez um esboço daquilo que hoje chamamos de representação gráfica de funções, ao traçar um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com velocidade constante. Vale ressaltar que o trabalho de Oresme resumia-se em descrever aspectos qualitativos, sem fazer uso de medidas.

Para alguns autores, foi na Idade Moderna em que o conceito de função teve o seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objeto de estudo corrente em Matemática. A partir desta época, surge uma nova teoria, o Cálculo Infinitesimal, e que acabou sendo de grande importância no desenvolvimento da

Matemática contemporânea. A noção de função é um dos fundamentos do Cálculo Infinitesimal.

Alguns fatores que tiveram lugar no século XVI foram responsáveis pelo desenvolvimento verificado no século XVII. Alguns deles:

- O desenvolvimento dos primeiros métodos computacionais, que muito facilitaram os cálculos feitos posteriormente;
- Grandes avanços obtidos na trigonometria
- Em 1591, através dos trabalhos desenvolvidos pelo matemático Viéte, foi criada a álgebra simbólica e a mesma, deu origem a toda simbologia matemática usada até hoje.
- Descobrimento dos logaritmos, cuja primeira tábua foi publicada em 1614 por Napier, onde os cálculos são feitos sem o conceito de função, e são baseados apenas na clara observação de uma relação funcional específica.

Neste século, surgiram outros contribuintes para o desenvolvimento da noção de função, na procura das leis dos movimentos. Podemos citar como exemplos: Keppler (1571 – 1630) com a descoberta das leis sobre as trajetórias planetárias e Galileu com o estudo da queda dos corpos e a relação entre espaço e tempo.

Galileu Galilei (1564-1642) deu também sua contribuição para o desenvolvimento da definição de função, e aplicou seu método científico principalmente ao estudo do movimento. Incorporou o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Por esse motivo, alguns historiadores atribuem a Galileu Galilei a criação do conceito de função.

Em 1638 Galileu Galilei publicou "Duas Novas Ciências", nesse livro as relações funcionais eram expressas por palavras e na linguagem das proporções, mas Galileu deixava claro o trato com variáveis e funções, tanto que bastou apenas a evolução do simbolismo algébrico para que estas relações fossem escritas na forma simbólica. Nesta obra, encontrava-se a seguinte lei: “Os espaços percorridos por um corpo que sai do repouso em movimento uniformemente acelerado estão entre si como os quadrados dos tempos gastos para percorrê-los”. Ou seja, se para percorrer determinado espaço s_1 o tempo gasto é t_1 e se para percorrer um espaço s_2 o tempo gasto é t_2, então:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2}$$

Com o desenvolvimento e a difusão da simbologia algébrica (ignorada por Galileu), essa lei passaria a se escrever assim: $s = k.t^2$; em que:

$$k = \frac{s_1}{t_1^2}$$

Destacando-se o espaço em termos do tempo.

Na primeira metade do século XVII, Fermat (1601-1665) e Descartes (1646-1716), inauguraram uma nova era na matemática, ao apresentarem o método analítico para se introduzir função. Esse método consistia no uso de equações para representar e analisar as relações entre as variáveis conectadas com uma curva.

A análise cartesiana era centrada basicamente nas curvas, e estas eram vistas apenas como uma materialização da relação entre x e y e não como o gráfico de uma função $y = f(x)$.

Descartes acabou restringindo o tratamento analítico às funções algébricas, deixando de fora inclusive as curvas mecânicas. Entretanto, objetivava uma maneira única para se representar todas as funções. Uma solução temporária para este problema foi conseguida com o trabalho de vários matemáticos que, independentemente uns dos outros, descobriram como desenvolver funções em séries de potências infinitas, o que possibilitou a representação analítica de todas as relações funcionais conhecidas na época.

Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) propuseram uma nova Matemática, na qual, a teoria de desenvolvimento de funções em séries de potências foi a mais notável componente dessa nova proposta. Um dos principais trabalhos de Newton chama-se "O Método dos Fluxos e Séries Infinitas".

Newton aproxima-se bastante do sentido atual de função com a utilização dos termos "relatia quantias" para designar variável dependente, e "genita" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais. Defendia a tese de que as várias variáveis de uma curva eram vistas como dependentes de uma única variável independente, pois para ele o tempo era a variável independente da qual todas as outras dependiam. Nessa época, tal conceito era uma exceção.

Em termos físicos esta tese mostrou-se bastante frágil, uma vez que foi totalmente destruída pela teoria da inseparabilidade entre o espaço e tempo de Einstein (só que mais de 200 anos depois). Contudo, ela teve uma importância crucial no desenvolvimento do pensamento funcional, pois materializava as noções de variáveis independentes e dependentes.

Leibniz, contemporâneo de Newton, trabalhou paralelamente, mas independentemente de Newton; chegou às noções básicas do Cálculo desenvolvendo-as a partir da geometria das curvas.

Foi Leibniz quem primeiro usou o termo "função" em 1673. Utilizava o termo apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais. Introduziu igualmente a terminologia de "constante", "variável" e “parâmetro". Leibniz se refere às funções como partes de linhas retas, isto é: segmentos obtidos pela construção de linhas retas infinitas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada.

Jakob Bernoulli (1654--1705) usa esse sentido no seu “Acta Eruditorum”. Tanto Leibniz quanto Jakob gostariam de usar o termo função para representar expressões analíticas, tanto que o próximo passo foi a compreensão de função como expressões analíticas arbitrárias. O primeiro a fazer isso foi Johann Bernoulli (1667-1748) que se reporta à função como uma expressão analítica arbitrária em seu artigo sobre a solução do problema isoperimétrico.

Em 1697, Johann introduz a notação X ou ξ para uma função da variável x, alguns anos mais tarde, em um artigo de 1718 revê sua posição e sugere a letra grega Φ para caracterizar funções. Mas o argumento ainda era escrito sem os atuais parênteses: Φx. Neste mesmo artigo de 1718, Johann apresenta a definição explícita de função mais remota de que se tem notícia: "Definição: chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer modo da variável e de constantes quaisquer".

Johann Bernoulli estava interessado em funções que fossem “comportadas”, devido à natureza dos problemas para os quais contribuiu com o aprimoramento da utilização da regra de L'Hospital para formas indeterminadas de limite, que envolviam funções diferenciáveis.

O matemático Leonhard Euler (1707-1783) que era discípulo de Johann Bernoulli, trouxe também sua contribuição para o desenvolvimento do conceito de função.

Segundo Boyer (1974), ao avaliar o desenvolvimento da Matemática, devemos sempre ter em mente que as idéias atrás das notações são de longe a melhor metade; quanto a isso a obra de Euler marcou época. Sua obra Introductio in analysin infinitorum (1748) pode ser considerada como chave de abóbada da análise.

Euler elaborou esse importante tratado em dois volumes, servindo como fonte para o desenvolvimento da matemática durante toda a segunda metade do século dezoito; sua obra organizou o Cálculo Diferencial, ampliando a idéia de "fluentes" de Newton. Foi dessa época em diante que a idéia de função tornou-se fundamental na análise, enquanto esteve implícita na Geometria Analítica de Fermat e Descartes, e nos estudos de Newton e Leibniz.

O quarto parágrafo de Introductio define função de uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". Todavia, Euler não esclareceu o que é uma "expressão analítica".

De acordo com o seu método de trabalho, Euler diagnosticou esta necessidade de uma formalização do conceito de função, e elaborou definições bem detalhadas, como:

- Constante: quantidade definida que assume sempre um e apenas um valor;
- Variável: quantidade indeterminada, ou universal, que comporta em si mesma todos os valores determinados;

Paralelamente ao trabalho de tentar definir corretamente o conceito de função, Euler também contribuiu decisivamente para que esta busca se tornasse um objetivo primordial. A necessidade de generalização ficou mais flagrante ainda quando o próprio Euler introduziu as funções de uma variável complexa. Estas, ao contrário das funções reais de uma variável real, não tinham o apelo geométrico imediato de curvas ou gráfico, e sem o apoio da visualização aumenta a necessidade de definições mais precisas e cuidadosas, uma vez que um grau muito mais alto de abstração é exigido. Com isso, o tratamento isolado de funções torna-se um procedimento totalmente ultrapassado. É importante ainda destacar que foi Euler quem introduziu a notação f(x) para denotar uma função de x, sem esquecer da letra e, para a base de logaritmos naturais, π para o perímetro da circunferência dividido por seu diâmetro, $\sum$ para somatório, i para $\sqrt{-1}$, etc.

Euler estudou em particular as funções exponenciais e os logaritmos. Foi ele quem esclareceu que os logaritmos de números negativos não são números reais. Apresentava uma certa imprecisão ao definir o limite de uma função. Apresentava incertezas em relação aos diferenciais, definindo-os como símbolos para "quantidades que são zero" e também "quantitativamente diferentes de zero". Tal proposta foi criticada por D'Alembert, que tentou melhorar o conceito de limite.

Euler também trabalhou com as funções seno e cosseno para números complexos, o que mais tarde serviria para o desenvolvimento da teoria de funções de variáveis complexas de Cauchy, no século XIX.

Em sua obra, Euler cita o que seria a idéia de continuidade. Para ele, Continuidade significava invariabilidade, imutabilidade da equação que determina a relação funcional sobre todo o domínio de valores da variável independente, enquanto que descontinuidade significava uma alteração na lei analítica, a existência de pelo menos duas leis diferentes em dois intervalos de seu domínio.

Outra definição de função interessante foi a do matemático Jean-Louis Lagrange (1736-1813): "Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira quaisquer, misturadas ou não com outras quantidades, que se vêem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções considera-se somente as quantidades que sejam variáveis, sem consideração às constantes que podem estar aí misturadas."

Foi Lagrange quem utilizou as notações $f'(x)$, $f''(x)$,...,$f^n(x)$ para a 1ª., 2ª,..., n-ésima derivadas de uma função f(x).

Em 1817, Bolzano (1781-1848) apresenta sua definição de continuidade: "a função f(x) é contínua em um intervalo se, em qualquer x do intervalo, a diferença f(x+w)- f(x) pode se tornar tão pequena quanto se deseje".

A maioria dos estudos desenvolvidos por Bolzano, não foi levada em consideração, muitos dos seus resultados tiveram que ser redescobertos mais tarde. Entre estes estava a percepção de que existem funções que não se comportam como os matemáticos tinham sempre esperado que se comportassem. Newton, por exemplo, tinha assumido que as curvas são geradas por movimentos lisos e contínuos. Ocasionalmente poderiam existir mudanças abruptas na direção ou até algumas descontinuidades em pontos isolados; mas durante toda a primeira metade do século dezenove foi assumido em geral que uma função real contínua deve ter derivada em quase todos os pontos. Em 1834, porém, Bolzano tinha inventado uma função contínua num intervalo, mas que, apesar da intuição física indicar o contrário, não tinha derivada em ponto algum do intervalo. Este exemplo, infelizmente não se tornou conhecido; por isso o crédito por construir a primeira função contínua, mas não derivável em algum ponto foi dado a Weirstrass um terço de século mais tarde. Conhecemos hoje como teorema de Bolzano-Weierstrass aquele segundo o qual um conjunto limitado contendo infinitos elementos, pontos ou números, tem ao menos um ponto de acumulação.

Em 1821 o matemático Cauchy (1789-1857) desenvolveu uma definição parecida com a que foi anunciada por Bolzano. O grande passo dado por Bolzano e Cauchy foi ter dado à continuidade o seu caráter local, ao contrário do caráter global a ela atribuído por Euler.

A definição de Cauchy era: “Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes ou variáveis”. Tal definição não parecia muito precisa, uma vez que não esclarece qual seria a natureza das operações feitas sobre as variáveis. Apesar desse fato, o matemático francês foi o responsável pelo desenvolvimento da teoria de funções de uma variável complexa.

Cauchy apresentou uma definição mais satisfatória de função contínua e sua definição para a derivada deixava claro que as funções descontínuas em um ponto não seriam aí diferenciáveis, embora gráficos descontínuos pudessem determinar uma área bem definida.

Em 1824, Fourier (1768-1830) apresentava seus trabalhos relacionados ao estudo de função. Para ele, qualquer função y = f(x) poderia ser representada por uma série do tipo:

$$Y = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx)$$

Para essa série, bastava que as funções fossem contínuas e diferenciáveis por partes, podendo apresentar, assim, infinitos pontos de descontinuidade na reta.

Foi no século XIX que houve uma das principais conquistas matemáticas, a formalização daquela área da Matemática que trata dos processos infinitos (e infinitesimais), ou seja, a separação da Análise da Geometria. Este processo teve em Weierstrass seu maior expoente, e no conceito de função seu maior protagonista. Deve-se ressaltar também que o passo inicial da aritmetização da Análise foi dado por Euler, que no seu Introducio identifica as funções como o objeto central de estudo, em detrimento das curvas.

Foi ainda no século XIX, que apareceu o significado mais amplo de função definido pelo matemático alemão Peter G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), que trouxe inovações ao restringir o domínio da função a um intervalo.

Definiu uma função da seguinte forma: "Se uma variável *y* está relacionada com uma variável *x* de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a *x*, existe uma regra segundo a qual um valor único de *y* fica determinado, então diz-se que *y* é função da variável *x*".

Na definição de Dirichlet, uma função é um caso especial de uma relação. Relação é um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento do par pertence a um dos conjuntos relacionados. Nas relações não existem restrições quanto à lei de correspondência entre os elementos dos conjuntos, já para as funções é necessário introduzir restrições.

Dirichlet contestava a idéia de Euler dizendo que nem todas as funções podem ser representadas graficamente. Sua definição foi amplamente aceita até meados do século XX e se diferencia da atual pelo fato de que na época ainda não tinha sido precisamente definido os conceitos de "número real" e de "conjuntos".

Por volta de 1870, o matemático G. Cantor (1845-1918) estudava o problema da representação das funções reais por meio de séries trigonométricas. Sua atenção estava centrada na seguinte questão: a natureza do infinito. Esse foi o ponto de partida da criação da teoria dos conjuntos.

Em 1872, cinco matemáticos, inclusive Weierstrass, apresentaram uma teoria de números reais como limites de seqüências de números racionais. Weierstrass sentiu a necessidade de se dar uma definição de número irracional, propôs a existência de um limite para a seqüência convergente e fazendo do limite da mesma seqüência, o número real correspondente.

Ainda em 1872, Dedekind apresentou uma definição precisa de um conjunto infinito. Também nesse ano, Heine forneceu a definição de limites em termos de ε's e δ's que conhecemos hoje, resolvendo o problema de termos ainda imprecisos usados por Cauchy, como : "valores sucessivos", "aproximar indefinidamente" e " tão pequeno quanto se queira".

Segundo Boyer (1974), o ano de 1872 foi crucial para aritmetização da Análise, com a investigação da natureza das funções e da noção de número (faltava, à época, uma definição mais precisa para a frase "número real"), que se iniciou com a proposta das séries de Fourier.

O matemático Giuseppe Peano (1858- 1932) também deixou contribuições à noção de número, que possivelmente, podem ter influenciado na elaboração final do conceito de função. Peano desenvolveu vários símbolos matemáticos que utilizamos ainda hoje, como por exemplo:

$$\in, \cup, \cap \text{ e } \supset$$

A maior contribuição feita por Peano, provavelmente está nos três conceitos primitivos que estabeleceu em seus fundamentos de Aritmética:

- O conceito de Zero;
- O conceito de número (inteiro não-negativo);
- A relação de ser *sucessor de*.

Esses três conceitos associados aos seus cinco postulados, forneceriam uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.

Em sua obra "Sulla definizione de funzione, Atti dei Lincei" (1911), Peano defende a tese de que o conceito de função deveria ser reduzido ao conceito de relação introduzindo assim o conceito de relação unívoca e de par ordenado. Definiu função da seguinte forma: "A relação *f* é uma função de *A* em *B*, se e somente se, para todo elemento **a** pertencente a *A* existe um único elemento **b** pertencente a *B*, tal que o par ordenado (a, b) pertence a *f*".

Bourbaki, em 1939, traz a definição mais formal de função. Porém acredita-se que seria um grupo de matemáticos que resolveram ter em Nicolas Bourbaki um pseudônimo. Em Théorie des Ensembles, Bourbaki conceitua função de duas maneiras:

"Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x ª E, existe um e somente um elemento y ª F que esteja associados a x na relação considerada.

Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento x ª E o elemento y ª F que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função."

E: "Um certo subconjunto do produto cartesiano AxB".

Sob esse aspecto, o conceito de função pode ser trabalhado de uma maneira simbólica, formal e quase sem a necessidade de usar palavras da língua materna. Tudo isso, associado à eliminação dos problemas lógicos que envolviam a construção do conjunto dos números reais, tornou possível elaborar funções muito mais abrangentes.

Tomando como base tudo o que foi descrito acima, podemos concluir que os problemas que envolviam os matemáticos, em cada época, exerceram uma grande influência na elaboração de cada conceito de função. Na antiguidade, havia uma grande preocupação por parte de Aristóteles em descrever mudanças e relações que ocorriam na natureza, de forma qualitativa. Newton e Leibniz trouxeram uma nova visão para as funções; desta vez, os problemas estavam relacionados com funções "bem comportadas" (contínuas e diferenciáveis), levando-se também em consideração seus aspectos quantitativos.

Durante os séculos XVIII e XIX, o que podemos constatar é que a noção de função era identificada na prática como uma expressão analítica. No entanto, já era possível perceber que tal concepção conduzia às diversas incoerências e limitações (de fato, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes). Esta noção, associada às noções de continuidade, e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que lhe alteraram profundamente a sua natureza e significado. A elucidação da questão de definição dos números reais, também contribuiu, tornando-se possível obter outros exemplos que estariam fora do modelo que era originalmente compreendido como função.

Atualmente, o conceito de função, não é concebido como lei, nem como valor, mas sim, como síntese desses dois aspectos, juntamente com os conceitos de domínio e contradomínio.

Na sala de aula, a introdução do conceito de função aos estudantes, baseia-se na idéia elementar de par ordenado e no estabelecimento de relações entre conjuntos (Teoria dos Conjuntos). As definições são elaboradas de forma a atingir as mais recentes propostas históricas de definição de função, muito próximas à de Dirichlet ou de Bourbaki. Ao se tratar de exemplos e resoluções de problemas, as idéias propostas para as funções estão muito mais próximas da definição de Euler.

O constante desenvolvimento da Matemática traz sempre questionamentos sobre conceitos pré-estabelecidos, e as funções não fogem disso, pois a cada dia novas classes de funções são consideradas e os conceitos são permanentemente revistos.

Atualmente, a noção de função é de grande importância na concepção e no estudo de modelos: Dinâmicos, Probabilísticos, Distribuição espacial, etc...

3.1. DEFINIÇÕES HISTÓRICAS

A tabela 1 abaixo apresenta uma "síntese" das principais definições [1] do conceito de função, construídas ao longo do tempo.

MATEMÁTICO	DEFINIÇÃO
Leibniz (1646-1716)	"Certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas".
Jean Bernoulli (1667-1748)	"Função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes".
Leonhard Euler (1707-1783)	"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes". Assim, qualquer expressão analítica a qual, além de variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z.
Louis Lagrange (1736-1813)	"Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que se vêem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções considera-se somente as quantidades que sejam variáveis, sem consideração às constantes que podem estar aí misturadas."
Cauchy (1789-1857)	"Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes ou variáveis".
Peter G. Lejeune Dirichlet (1805-1859)	"Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x".
Giuseppe Peano (1858- 1932)	"A relação *f* é uma função de *A* em *B*, se e somente se, para todo elemento de a pertencente a *A* existe um único elemento b pertencente a *B*, tal que o par ordenado (a, b) pertence a *f*".
Bourbaki (1ª metade do século XX)	"Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x ª E, existe um e somente um elemento y ª F que esteja associados a x na relação considerada.Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento x ª E o elemento y ª F que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função." E: "Um certo subconjunto do produto cartesiano A x B".

Tabela 1

[1] Essas definições foram transcritas de acordo com a bibliografia consultada.

4. CONCEITO DE FUNÇÃO

4.1. A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Em sala de aula, ao se trabalhar com disciplinas que descrevem fenômenos da natureza, necessitamos criar uma linguagem própria para explicar tais fenômenos. A construção inicial de um determinado conceito nessas disciplinas, está condicionada na maioria dos casos, na criação desta linguagem. Geralmente, esses fenômenos naturais (físicos, químicos ou biológicos), podem ser visualizados, tangíveis ou de alguma forma, perceptíveis aos sujeitos (alunos). Desta maneira, torna-se mais fácil para que estes mesmos sujeitos apresentem, sobre tais fenômenos, suas próprias concepções ou explicações, mesmo que não tenham tido algum contato prévio com argumentos e teses científicas.

A construção do conceito de função, em Matemática, está além da compreensão dos fenômenos a que se aplica, pois pode generalizá-los e resolver vários problemas fora do mundo tangível, num mundo de abstrações muito próprias da Matemática. Por exemplo, podemos usar uma função linear para descrever o deslocamento de um corpo, tanto quanto para descrever a transformação de um espaço vetorial – conceito matemático altamente abstrato – em outro.

A análise das concepções de um sujeito sobre o conceito de função só poderá ocorrer depois que ele apresentar um contato com a idéia matematicamente construída, ou por um livro, ou por um professor. Do contrário, estaremos falando apenas de um "instinto de funcionalidade", como já evidenciavam os gregos, na Antiguidade. É claro que a noção de variação é um dos aspectos essenciais ao desenvolvimento desse conceito e, para ela, poderá existir uma concepção espontânea. Entretanto, a idéia de variação não é suficiente para, sozinha caracterizar por completo o conceito matemático de função. Pode estar aí uma das razões pelas qual este apresenta grandes dificuldades de compreensão no processo de aprendizagem.

4.2. COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

De acordo com Bergeron e Herscovics (in Tinoco, 1998) a compreensão do conceito de função se dá em quatro níveis:

- Compreensão intuitiva;
- Matematização inicial;
- Abstração
- Formalização.

Analisando os quatro níveis é possível identificar características próprias. Nesse processo de compreensão deve-se levar em consideração a utilização do conhecimento informal do cotidiano passando pela organização e quantificação das primeiras noções intuitivas, pela generalização que possibilita que o conceito se destaque do procedimento efetuado para alcançá-lo até a utilização da linguagem simbólica que caracteriza a formalização.

Veja quais são os níveis de compreensão do conceito de funções:

- Compreensão Intuitiva – Reconhecimento de dependência (não quantificada), estabelecimento de leis de formação simples e visuais. Construção e interpretação de tabelas e gráficos de coluna e setor;
- Matematização Inicial – Quantificação das leis, reconhecimento de variáveis dependentes e independentes. Interpretação de gráfico cartesiano. Construção de gráficos cartesianos simples. Reconhecimento do Domínio (analisado no contexto);
- Abstração – Escrita de expressões analíticas, distinção entre equações e funções, construção e interpretação de gráficos convencionais e não-convencionais. Caracterização de relações funcionais.
- Formalização - Notação:F: $A \rightarrow B$, $y = f(x)$, Domínio, imagem, Classificação e Operações com funções.

O professor no papel de mediador deve propor atividades e problemas que objetivam proporcionar aos estudantes a passagem por estes níveis como forma de chegar à concepção de função e suas formas de representação.

Segundo Barufi (s.d.) a idéia de função foi “matematicamente estabelecida em tempos mais ou menos recentes, devido a dificuldades intrínsecas e mesmo provavelmente, inerentes à sua formalização bastante sofisticada” e, portanto não se pode ter a pretensão de alcançar rapidamente uma formalização completa “de um conceito que traz dentro de si um grau de dificuldade epistemológica muito grande para os alunos”.

4.3. LINGUAGEM MATEMÁTICA E A INTERDISCIPLINARIDADE

Os PCNs recomendam que os professores trabalhem de forma interdisciplinar em sala de aula; só que para que isso ocorra é fundamental que exista uma interação entre as linguagens próprias utilizadas nas diferentes disciplinas. Na escola, principalmente no ensino médio, observa-se que as idéias sobre funções são utilizadas para introduzir conceitos da Física Clássica, de fenômenos da eletricidade e também com várias aplicações da noção de proporcionalidade, na Química. Portanto, é fácil perceber que a linguagem matemática criada para o conceito de função é também usada em outras áreas, só que infelizmente são repassados de tal forma que a informação chega até ao aluno como se os conceitos matemáticos, físicos ou químicos, não tivessem nada em comum. Isso vai de encontro ao que é proposto nos PCNs, ou seja, uma interdisciplinaridade dos conceitos.

Atualmente, o tema “funções” é trabalhado em sala de aula de forma paralela pelo professor de Matemática, na 1ª série do Ensino Médio, e pelo professor de Física ao introduzir as relações funcionais, caracterizando os movimentos uniformes e uniformemente variados, com o espaço percorrido variando em relação ao tempo, a velocidade variando, ou não, e nas quais entra o conceito de aceleração constante.

Diante desta situação, o que se observa, é que os professores de Física e de Matemática utilizam-se de notações bem diferentes para tratarem das noções de variáveis.

Geralmente, constatamos que os professores de Matemática relutam em usar outras letras, que não “x” e “y”, para as variáveis independente e dependente, respectivamente; os professores de Física usam as notações “s”, para espaço (variável dependente), e “t” (variável independente) para o tempo, para representarem a mesma idéia funcional. Na maioria dos casos, estes fatos podem não estar sendo explicitados, nem por um, nem por outro professor. Desta forma os alunos poderão ter a impressão de que estão lidando com conceitos distintos, totalmente independentes, não percebendo que a idéia de dependência temporal, nos movimentos, caracteriza o que se chamou de função matemática.

Uma atividade que é bastante comum nas aulas de Física, é o fornecimento de gráficos a fim de serem interpretados. Um bom exemplo é o gráfico que representa o deslocamento de um corpo. O que se constata é que muitos dos alunos costumam interpretar a linha reta do gráfico como a trajetória percorrida num plano, pelo corpo em movimento, e não como a relação funcional abstrata entre os valores da posição do corpo $s(t)$ e os instantes t de seu deslocamento.

É possível que, em alguns casos, a linguagem utilizada pelo professor de Matemática sirva para dificultar a interpretação dos gráficos nas aulas de Física. Muitas vezes, ao apresentar as funções aos alunos, acabam retratando-as apenas como objeto visualizável no gráfico, e não como uma relação abstrata entre grandezas, dessa forma, perdendo sua idéia principal, que é a de relação. O gráfico, sendo proposto, na maioria das vezes, como um objeto concreto na Matemática, passaria a se associar na Física, para muitos alunos, também a um aspecto concreto do movimento de um corpo, que seria a sua trajetória.

Ainda com relação à linguagem do professor de Matemática, podemos ressaltar a questão da passagem do discreto ao contínuo, que tem sido feita de maneira bastante automática e insuficiente no tratamento das funções. O professor atribui valores discretizados da função numa tabela, depois traça um gráfico contínuo, sem maiores aprofundamentos sobre o que acontece com os valores intermediários aos que foram previamente escolhidos. Uma boa opção para tentar sanar tal dificuldade, seria que se houvesse uma maior integração entre os professores de Matemática e de Física, os quais poderiam propor as idéias de posição e velocidade instantâneas, e da continuidade envolvida nos movimentos uniformes ou uniformemente variados. Assim, estes problemas poderiam ser distinguidos de outros de natureza discreta, como, por exemplo, as relações funcionais de tabelas de preços, etc. Essa integração entre os dois professores poderia auxiliar o aluno a compreender aspectos da linguagem matemática que são comuns à linguagem utilizada para tratar problemas da Física, ou para resolver problemas da vida diária.

No ensino de Química, a idéia de proporcionalidade poderia estar mais associada à idéia de função linear, colocada nas aulas de Matemática. Mas isto não se vê explicitado, nem pelo professor de Química, nem pelo de Matemática. Ambos parecem tratar deste assunto como algo bem diferenciado. Desta forma a *regra de três*, ou *proporção direta*, para a Química e *função linear*, para a Matemática, podem ser compreendidos por alguns alunos como elementos totalmente distintos.

Na Química podemos verificar que os sinais positivos quando associados aos elementos químicos se relacionam a “perdas” de elétrons, enquanto na Matemática, as perdas são mais freqüentemente representadas pelo sinal negativo. Além disso, no primeiro caso, os índices justapostos às letras indicam soma de átomos, já em Matemática, letras e números justapostos indicam multiplicação. Faz-se necessário atentar aos professores de Química e de Matemática sobre os diferentes significados para as mesmas formas essenciais de notações, envolvidos em cada contexto, e aqueles que são comuns em ambos.

4.4. NOVAS PROPOSTAS

O ensino de funções é freqüentemente ministrado de forma fragmentada, por boa parte dos educadores. Podemos observar que primeiramente, é apresentada a definição de função, em geral, como um tipo especial de relação para, em seguida, apresentar formas de representação de função em uma ordem que vai dos diagramas para a forma algébrica e desta para os gráficos. Na seqüência, começa o estudo dos diversos tipos de função: Polinomiais do 1º e 2º grau, exponencial, Logarítmica, etc... Cada tipo de função é apresentado de forma independente do outro, assuntos como: crescimento, decrescimento, raízes, máximos, mínimos, etc., são exaustivamente repetidos para cada tipo e, mesmo assim, verificamos que esse método não nos garante que o aluno consiga entender o que é proposto. O que podemos constatar é que existem novas propostas nas quais as funções são estudadas sem separação por tipos. Trata-se de estudar todas ao mesmo tempo, através de diversas atividades.

No que diz respeito a essa nova proposta, o estudo de funções pode ser dividido em dois grandes momentos:

- Construção do conceito de função – Feito através de atividades que envolvam situações cotidianas. Nesse momento, busca-se que o aluno comece a perceber relações de dependência entre duas ou mais variáveis, propõe-se aos alunos trabalhar com as diversas características de uma função, tais como: crescimento, raiz, etc... ., estudando-as de uma só vez, com os vários tipos de funções.
- Trabalho com equações – Na realidade, as equações aparecem no primeiro momento como representação de algumas funções: o aluno é levado a perceber que algumas equações podem expressar funções. No segundo momento, ele vai aplicar o conceito de função para achar a solução de equações mais sofisticadas. As atividades levam os alunos a estabelecer relações entre esses dois tópicos: funções e equações.

É importante não deixar que os alunos vejam os conceito de função e equação como algo distinto, como se fossem totalmente desvinculados. Nesse caso, faz-se necessário incentivar os alunos a perceber as equações como igualdades entre duas funções $F(X) = G(X)$. Deve-se discutir com eles quando é possível fazer equivalência desta igualdade com a igualdade $F(X) – G(X) = 0$ de forma a recair em uma equação do tipo $H(X) = 0$.

Ainda com relação às atividades desenvolvidas em sala de aula, as mesmas devem ser realizadas em grupo e discutidas entre os alunos e entre esses e o professor, o qual desempenhará o papel de orientador e questionador. Ressaltamos ainda a importância de se trabalhar com relatórios escritos pelos alunos, desenvolvendo assim o espírito científico de investigação.

Na construção dos gráficos, a utilização do papel quadriculado vem a facilitar as atividades, mas se possível, não devemos abrir mão dos recursos tecnológicos. Existem muitos softwares computacionais disponíveis no mercado que podem ser utilizados na construção dos gráficos de funções. Nesse caso, o papel do computador é o de permitir que o aluno gaste mais tempo observando e levantando hipóteses, do que fazendo cálculos, além de tornar possível a observação de outros diferentes tipos de funções.

É claro que só observar não é suficiente, é preciso que o aluno anote suas conclusões e as defronte com as dos colegas. A escrita matemática é de extrema importância para que o aluno consiga organizar o que está vendo e ir construindo o conceito sobre o que concluiu.

A nova proposta é deixar o aluno pensar, chegar a conclusões por si próprio, construir conhecimento, pois só se aprende quando o objetivo do estudo tem sentido.

5. O QUE DIZEM OS PCNs SOBRE FUNÇÕES

Nos PCNs existe uma grande preocupação em contextualizar os temas abordados, e também a buscar de uma interdisciplinaridade. O tema apresentado tende a ser potencializado de forma que permita conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como quanto à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Com relação às funções, seu ensino isolado não permite a exploração do caráter integrador que esse tema possui. Devemos observar que, uma parte importante da trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em geometria analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Alguns aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.

O conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento como a Física, Geografia ou Economia. Com relação ao ensino de Matemática, é necessário garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de Matemática e de outras áreas, fazendo com que o aluno se sinta incentivado a buscar a solução, aplicando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

6. COMPILAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Um dos objetivos desse trabalho é o de propor uma reflexão a respeito das diferentes formas com que os professores conceituam o tema “Função” em sala de aula. Que tipo de linguagem matemática sobre o conceito é abordado atualmente? Quais suas maiores dificuldades?

Foi partindo da necessidade de entender melhor o que realmente acontece em sala de aula, que resolvi elaborar um questionário (ANEXO 1), afim de que, o mesmo fosse respondido por professores. Acredito que através das respostas apresentadas, podemos ter uma melhor compreensão dos fatos. A aplicação deste questionário, não pode ser considerado como uma amostra, afinal, apresenta um número muito pequeno de entrevistados, não podendo assim generalizar e nem tão pouco ser intitulado de pesquisa. As informações por ele apresentadas, não podem ser caracterizadas como conclusivas.

Os professores que selecionei para responder tal questionário são alunos do Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura da UFSC. Fiz essa opção por parecer mais prática, pois os mesmos lecionam algumas disciplinas comigo, facilitando assim, o nosso contato. Acredito, que por ministrarem aulas em diversas escolas, podem expressar diferentes pontos de vista.

As observações feitas com os professores de Matemática do Ensino Médio permitiram apresentar aqui alguns resultados relacionados ao uso da linguagem matemática no ensino de funções.

Ao total, foram entrevistados nove professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio que lecionam em escolas de Florianópolis e região.

Na tabela 2 há uma breve caracterização do ambiente de trabalho dos professores entrevistados:

Professores	**Tipo de Escola**			**Tipo de Ensino**		**Município em que lecionam**
	Pública	Particular	Cursinho	Fundamental	Médio	
A	X	X		X	X	Florianópolis
B	X	X	X	X	X	Florianópolis, São José
C		X		X		Palhoça
D	X	X		X	X	Biguaçu
E	X			X	X	Florianópolis
F	X			X	X	Florianópolis
G	X	X			X	Florianópolis
H	X	X		X	X	São José
I	X				X	Palhoça

Tabela 2

A tabela 3 busca mostrar quais os recursos utilizados pelos professores ao ministrarem suas aulas:

Professores	**Conhecendo um pouco de suas aulas**							
	Aulas expositivas	Uso de Vídeo	Jogos Matemáticos	Uso de Software Matemáticos	Atividades Extraclasse	Exercícios em grupo	Pesquisa na Internet	Uso de algum material concreto.
A	X		X		X	X		
B	X				X	X		
C	X		X		X			X
D	X		X		X	X		X
E	X				X	X		
F	X		X		X	X		X
G	X				X			
H	X		X	X	X	X		X
I	X				X	X		

Tabela 3

A fim de obter um melhor resultado do meu trabalho, optei em sintetizar essa análise, transcrevendo as repostas de maneira fiel, destacando apenas as que me pareceram relevantes para meus objetivos.

Pergunta 1 - Como você introduz o tema "Função" em sala de aula?

Entrevistado: A

"Quando o valor de uma grandeza depende do valor de outra, dizemos que a primeira é função da segunda. Exemplo: Uma bolinha de gude é solta do alto de um edifício, à distância *d* que ela percorre é função do tempo *t* de queda, então $d = 5.t^2$, depois de 3 segundos $5*3^2 = 45$ m. Também pode ser escrita $f(t)= 5.t^2$ (*d* em metros e *t* em segundos)."

Entrevistado: B

"Usando a idéia de igualdades e utilizando exercícios de raciocínio prático, funções simples como Km/Litro; Vol/Hora".

Entrevistado: C

"Como uma associação de valores, relacionados a dois conjuntos. Onde um deles depende do outro, regidos por uma lei".

Entrevistado: D

"Uma brincadeira da betoneira, que você coloca a água, cimento e brita na máquina, ela mistura e sai o concreto. Utilizo isto pela grande quantidade de profissionais da construção civil no bairro. Após isso passo o conceito utilizando o diagrama de Venn".

Entrevistado: I

"De acordo com o livro adotado pela escola. Produto Cartesiano, Par Ordenado, Relação Binária, Gráficos, etc...".

Pergunta 2 - Que tipo de linguagem matemática, você utiliza em sala de aula, a fim de *definir* o conceito de Função?

Entrevistado: A

"Fatos do dia-a-dia com exemplos práticos e fáceis de assimilação como citado no item 1. Um outro exemplo muito bom de trabalhar é usar veículos (freio e velocidade) , salário mais comissão do funcionário, etc...".

Entrevistado: B

"A mais simples possível e de preferência, as utilizadas pelos alunos".

Entrevistado: G

"Costumo usar uma linguagem simples. Quando possível procuro associar o conteúdo à geometria".

Entrevistado: I

"Uso uma linguagem formal, baseada no livro didático".

Pergunta 3 - Qual a melhor maneira que você encontrou para que seus alunos tenham uma melhor compreensão do tema? Fez uso de exemplos do dia-a-dia? Utilizou algum material concreto? Comente.

Entrevistado: A

"Sempre que possível trago material didático e concreto para a sala de aula e até mesmo vamos para o pátio da escola praticar formas e fatos do ambiente onde a matemática está acontecendo".

Entrevistado: B

"Com exercícios práticos eles começam a entender o que é função, e através de gráficos eles começam a ter noção prática de como e para que serve uma função".

Entrevistado: C

"Através de exemplos do dia-a-dia, situações do cotidiano, onde os próprios alunos tenham vivenciado e calculado intuitivamente o mesmo modelo de uma função. Após a compreensão, defini-la de acordo com a linguagem matemática".

Entrevistado: E

"Usando exemplos práticos. Um deles é o uso de um copo contendo água. O nível da água no copo é função do número de bolinhas de gude. Nesse caso: Nível de água => variável dependente, bolinha de gude => variável independente".

Entrevistado: F

"Normalmente utilizo exemplos do dia-a-dia. Geralmente uso o exemplo de tabelas que trazem como informações o crescimento populacional mundial no decorrer dos anos. Onde o tempo seria minha variável independente e o número da população a variável dependente".

Entrevistado: G

"Até para reforçar nossa geometria, costumo usar como exemplo a Área de um círculo que depende do seu raio".

Entrevistado: H

“Gosto muito de usar o exemplo de função como sendo uma máquina, onde a variável independente ao entrar na máquina será visto como input, e a máquina produzirá um output (variável dependente)”.

Entrevistado: I

“A melhor maneira que encontrei para meus alunos entenderem o conceito é através do diagrama de flechas”.

Pergunta 4 - Como define o conceito de Domínio e Imagem de uma função para seus alunos?

Entrevistado: A

“O tema acontece no 1º ano do ensino médio, devido à faixa etária atribuo o assunto como relações entre namorados (sem tornar pejorativo), chamo o domínio de diagrama Homem e o contra-domínio de Mulher, então faço a relação dos namorados quem pode ou não, quem faz função e quem não faz, todos participam da aula que fica atrativa”.

Entrevistado: B

“Através de brincadeiras, do tipo quem depende de quem. O pai tem o Domínio porque paga as contas e o filho quando crescer quer ser igual, mas como ele ainda é dependente, ele tem apenas a imagem do domínio”.

Entrevistado: D

“Domínio - Valores que x pode assumir na função. Imagem - Valores de y associados a um único x do domínio”.

Entrevistado: F

"Através do diagrama de flechas, conjuntos A e B".

Entrevistado: H

"Domínio - Conjunto de todos os inputs. Imagem - Conjunto de todos os outputs possíveis".

Pergunta 5 - De que forma você caracteriza as variáveis dependentes e independentes? Você utiliza alguns tipos de exemplos? Quais?

Entrevistado: A

"Já não é aplicada os termos variáveis dependentes e independentes, segue-se direto para exemplos usando três formas: tabelas, gráficos e fórmulas, estas sim são mais usadas para representar uma relação entre variáveis. Se eu tenho que dar um exemplo diria que seria bom trabalhar com desemprego, nesta relação o mês é a variável independente e a taxa de desemprego a variável dependente".

Entrevistado: C

"Variáveis dependentes como valores de y, que assumem seus valores na dependência de x, que por sua vez se caracterizam como variáveis independentes. Estas, por sua vez, fazem parte do conjunto domínio, e as independentes como parte do conjunto imagem".

Entrevistado: E

"Utilizando exemplos do tipo: O comprimento de uma circunferência depende do raio (variável independente). A área de um quadrado depende do tamanho dos seus lados (variável independente)".

Entrevistado: F

"Tento caracterizá-las através das relações existentes entre elas".

Pergunta 6 - Ainda com relação às variáveis, que tipo de notação você utiliza?

Entrevistado: C

"Faço exemplos com outros tipos de variáveis, mas explico que e usualmente denotamos como símbolos as letras x e y".

Entrevistado: D

"f(x), y, g(x), etc".

Entrevistado: F

"Variável independente => x, Variável dependente => y".

Pergunta 7 - Você costuma discutir em suas aulas a noção de continuidade/descontinuidade das funções? De que maneira você aborda tal assunto?

Entrevistado: A

"Para saber continuidade é importante saber em que intervalo a função está definida: onde (a,b) é um intervalo de forma: (a,b) aberto, [a,b] fechado, (a,b], [a,b) semi-abertos, (b, +∞) ou (-∞,a) infinitos, ainda podemos mostrá-las em uma reta, mais do que isso é impossível trabalhar. A aplicação das funções fica prejudicada, pois não há tempo com a redução da grade curricular de 4 para 3 aulas, no 1º ano do ensino médio, não dá tempo de trabalhar limites".

Entrevistado: C

"Chego a comentar sobre o assunto, mas como sigo material apostilado e este por sua vez não contempla o conteúdo, não chego a exercitar nem cobrar em provas. O assunto sobre funções é visto na matemática do 1º ano do Ensino médio".

Entrevistados: B, D, E, F, G, H e I.

"Não"

Pergunta 8 - Quais são suas maiores dificuldades com relação à aprendizagem dos seus alunos?

Entrevistado: B

"Entender os conceitos, pois os exercícios práticos eles entendem".

Entrevistado: C

"Falta de matemática básica, operações, propriedades, etc. Falta da matemática concreta, para poder abstraí-la".

Entrevistado: D

"A visualização das funções como representação gráfica, e o processo de construção dos gráficos".

Entrevistado: E

"Os alunos tem dificuldade em distinguir as variáveis dependentes e independentes. Eles têm dificuldade na interpretação de gráficos".

Entrevistado: I

"Eles tem dificuldade em identificar os conjuntos Domínio e Imagem".

Pergunta 9 - Você procurar trazer para sala de aula fatos históricos que possam vir a contribuir para a aprendizagem? Cite exemplos.

Entrevistado: B

"Às vezes. Mas não sobre funções".

Entrevistado: C

"Na introdução de cada assunto, faço uma breve explanação sobre a origem, a necessidade, conseqüência de cada abordagem. Por exemplo: tangram, exemplificação de potência com as pedras de xadrez (o dobro de grãos para a próxima casa); Teorema de Tales, Pitágoras...".

Entrevistado: D

"Sim. Cito Decartes como o matemático que ligou a álgebra com a geometria".

Entrevistados: E, F, G, H e I.

"Não".

Pergunta 10 - Na escola em que você leciona, os professores de Física, Matemática e Química costumam trabalhar com esse tema de forma interdisciplinar? Caso afirmativo, explique de que forma.

Entrevistado: A

"Sim, há reuniões pedagógicas todos os bimestres e procuramos discutir os mesmos temas, damos idéias e opiniões diversas sobre vários assuntos da atualidade para montar em suas disciplinas, e não só na área de ciências exatas, mas num todo, Português, Inglês, História, Geografia, Ed. Física, Artes, Sociologia, etc...".

Entrevistado: C

"Só leciono para o Ensino Fundamental, onde a Física, Biologia e Química são vistas na disciplina de Ciências. Mesmo assim a interdisciplinaridade ocorre na forma de exemplificação. A capacidade para que esta ocorra é limitada pela bagagem de conteúdo, onde poderíamos ir mais a fundo, um pouco mais técnico".

Entrevistado: D

"Normalmente, no início do ano fazemos os planejamentos em conjunto para uma matéria suprir a necessidade da outra".

Entrevistado: E

“Embora os PPP’s citam a interdisciplinaridade, o mesmo não ocorre na prática”.

Entrevistado: H

“Existe a intenção durante as reuniões, só que infelizmente não ocorre na prática”.

Entrevistados: B, F, G e I.

“Não”.

A partir do que foi apresentado acima, percebemos que nem todas as motivações históricas que surgiram para o desenvolvimento do conceito de função estão presentes em sala de aula. O que se vê é uma diversidade de conceituações, que variam de acordo com o contexto em que são propostas. A diversidade também se dá na forma de expressão, através da linguagem matemática.

Dentre várias particularidades pude perceber o uso de uma linguagem simples e de exemplos do cotidiano que evidenciam a sociedade nos dias atuais e o meio em que os alunos estão inseridos.

Diante das respostas apresentadas, podemos destacar alguns aspectos como:

- A associação do conceito de função à geometria, fazendo o uso de exemplos do tipo: área de um círculo que depende de seu raio (Entrevistado G), área de um quadrado que depende de seu lado (Entrevistado E);
- A necessidade de reforçar os exemplos através do uso de material concreto como no caso das bolinhas de gude (Entrevistado E);
- O uso de uma linguagem mais técnica, ao comparar a função a uma máquina – computador (Entrevistado H);
- O predomínio no uso de X e Y como variáveis independentes e dependentes respectivamente;

- Nenhum dos entrevistados tem por costume discutir a idéia de continuidade/descontinuidade;
- A maioria dos entrevistados respondeu **não** à pergunta referente ao uso de fatos históricos da Matemática como complemento de aprendizagem;
- Poucos são aqueles que trabalham com esse tema de forma interdisciplinar.

Embora fuja do tema do meu trabalho, merece um registro, o fato de que, dos nove entrevistados, apenas um respondeu que utilizava software matemático e que nenhum utiliza a pesquisa na Internet como ferramenta complementar em sala de aula (tabela 3). È possível que a não utilização desses recursos seja devido à ausência dos mesmos ou talvez nossas escolas ainda não estejam preparadas para se adaptar à tecnologia.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao pensar em meu trabalho de conclusão de curso, idealizei algo que me proporcionasse um grande aprendizado, um crescimento profissional, que me pudesse deixar alguma contribuição.

A escolha do tema não foi algo simples, várias foram as opções que me vieram à tona. Procurei algo que realmente se identificasse comigo. Não poderia ser diferente, teria que ser algo que me trouxesse ao ambiente da sala de aula.

Na verdade, o tema surgiu a partir de uma experiência pessoal. Uma certa vez, ao dar aula particular para uma aluna percebi que a forma como introduzia o conceito de função não estava sendo compreendido pela mesma. Após algumas tentativas frustradas de esclarecer o assunto, a própria aluna interpretou-o de uma maneira que seria de fácil entendimento. Fez uso de uma linguagem simples, fugindo da minha linguagem um pouco mais formal, utilizou exemplos do cotidiano. Percebi naquele momento que ela havia entendido boa parte do que eu havia ensinado, só que poderia ter sido mais fácil para ela se eu tivesse utilizado uma linguagem mais apropriada.

Fatos como esse citado acima, acontecem com muita freqüência em nossas salas de aulas. O professor precisa perceber as dificuldades de seus alunos, a fim de se fazer entender durante o desenvolvimento do conteúdo, facilitando assim o processo de ensino-aprendizagem.

Acredito que a parte mais interessante desse trabalho foi o questionário. Através dele pude ter uma compreensão melhor dos fatos: as dificuldades encontradas pelos professores e alunos e a necessidade do uso de uma linguagem apropriada. O que mais chamou a atenção nas respostas foram os exemplos utilizados para definir o conceito de função, transparecendo como características relevantes o uso da criatividade e a preocupação de utilizar exemplos do meio em que o aluno está inserido.

O único fator preocupante, é que muitas vezes, embora bem intencionado, o professor possa vir a banalizar o assunto de maneira tal, que o aluno encare a explicação apenas como um macete, fugindo assim do seu objetivo que é a de uma melhor aprendizagem e compreensão.

Acredito que se todos os questionários entregues fossem respondidos, teríamos aqui um trabalho mais rico. Podendo citar como uma das principais dificuldades encontradas durante a realização deste trabalho, a aparente resistência de alguns professores a responderem e me devolverem os questionários, evidenciando assim um desinteresse ou um certo receio de serem avaliados, mesmo sabendo que a identidade seria preservada e que os dados seriam utilizados para a elaboração de um trabalho de conclusão de curso.

8. BIBLIOGRAFIA

BARUFI, Maria C. B.; LAURO, Maira M. Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador. São Paulo: CAEM – IME / USP, [s.d.].

BOYER, C. **História da Matemática**. , 2.ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BERGERON, J. ; HERSOCOVICS, N. Level in the Understanding of Functions Concept, Procedings of the Workshop of functions, Holanda. In: TINOCO, Lucia A. A. Construindo o conceito de função no primeiro grau. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/ UFRJ, 1998.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação.

DOMINGUES, Hygino H. **Álgebra Moderna**. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2003.

http:// www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28. Acesso em maio/2007.

http:// www.tvbrasil.com.br/salto. Acesso em outubro/2007.

ZUFFI, E.M. O tema 'funções' e a linguagem matemática dos professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significados. São Paulo: Faculdade de Educação, USP, 1999. (tese de doutorado)

9. ANEXOS

ANEXO 1

QUESTIONÁRIO

Nome do Entrevistado (opcional): ______________________________________

Quanto tempo já leciona?____________________

LOCAL DE TRABALHO:

Tipo de Escola: ( ) Pública ( ) Particular ( ) Outros

Tipo de Ensino: ( ) Fundamental ( ) Médio ( ) EJA

Quantidade média de alunos por sala de aula: ___

Município em que a escola está localizada: ______________________________

CONHECENDO UM POUCO DE SUAS AULAS

Você costuma utilizar:

( ) Aulas expositivas
( ) Uso de Vídeo
( ) Jogos Matemáticos
( ) Uso de Software Matemático
( ) Atividades Extra-classe
( ) Uso de algum material concreto. Exemplos:Geoplano, Tangran, etc.
( ) Exercícios em grupo.
( ) Pesquisa na Internet

QUESTIONÁRIO

1.Como você introduz o tema “Função” em sala de aula?

R: ____

____

____

____

____

____

____

____.

2. Que tipo de linguagem matemática, você utiliza em sala de aula, a fim de *definir* o conceito de Função?

R: ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____.

3. Qual a melhor maneira que você encontrou para que seus alunos tenham uma melhor compreensão do tema? Fez uso de exemplos do dia-a-dia? Utilizou algum material concreto? Comente.

R:

____

____

____

____

____

____

____

____.

4. Como define o conceito de Domínio e Imagem de uma função para seus alunos?

R: ____

____

____

____

____

5. De que forma você caracteriza as variáveis dependentes e independentes? Você utiliza alguns tipos de exemplos? Quais?

R:

6. Ainda com relação às variáveis, que tipo de notação você utiliza?

R:

7. Você costuma discutir em suas aulas a noção de continuidade/descontinuidade das funções? De que maneira você aborda tal assunto?

R:

8. Quais são suas maiores dificuldades com relação à aprendizagem dos seus alunos?

R: ____

____

____

____

____

____

____

____ .

9. Você procurar trazer para sala de aula fatos históricos que possam vir a contribuir para a aprendizagem? Cite exemplos.

R: ____

____

____

____

____

____

____

____ .

10. Na escola em que você leciona, os professores de Física, Matemática e Química costumam trabalhar com esse tema de forma interdisciplinar? Caso afirmativo, explique de que forma.

R: ____

____

____

____

____

____

____

____.