

Rosilene Beatriz Machado

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares
E O Critério De Estabilidade De
Routh-Hurwitz

Florianópolis – SC

2007

Universidade Federal De Santa Catarina
Centro De Ciências Físicas E Matemáticas
Curso De Licenciatura Em Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares
E O Critério De Estabilidade De
Routh-Hurwitz

Rosilene Beatriz Machado

Florianópolis – SC

2007

Rosilene Beatriz Machado

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares
E O Critério De Estabilidade De
Routh-Hurwitz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática - Habilitação em Licenciatura, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Professor: Antônio Vladimir Martins.

Florianópolis – SC

Novembro 2007

Rosilene Beatriz Machado

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares
E O Critério De Estabilidade De
Routh-Hurwitz

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 67/CCM/07.

Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Vladimir Martins
Orientador

Prof. José Luiz Rosas Pinho

Prof. Paulo Rafael Bösing

AGRADECIMENTOS

A Deus, e a todos que de alguma maneira contribuíram para esta realização, em especial à minha Mãe, ao Jean, à Gabriela e ao meu orientador Prof. Antônio Vladimir Martins.

*“Com abelhas ou sem abelhas, os problemas interessantes da
Matemática têm, para o pesquisador, a doçura do mel.”*

(ARISTÓTELES, filósofo grego considerado o criador do pensamento lógico, 384-322 a.C.)

Sumário

Introdução	4
1 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	5
1.1 Conceitos Fundamentais	6
1.2 Equações Lineares Homogêneas de Ordem n com Coeficientes Constantes .	16
1.3 Problema de Valor Inicial e o Determinante de Vandermonde	26
1.4 Equações Lineares Não-Homogêneas	28
1.4.1 Método dos Coeficientes Indeterminados	30
1.4.2 Método da Variação dos Parâmetros	34
1.5 Sistemas Lineares e Autovalores	39
2 O Critério de Estabilidade de Routh Hurwitz	43
Conclusão	68
Referências Bibliográficas	69

Introdução

Vários problemas físicos são modelados matematicamente sob forma de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n com coeficientes constantes. Essas equações são usadas para construir modelos na dinâmica de fluidos e em mecânica celeste, por exemplo. Deste modo, o estudo de equações diferenciais é um campo extenso tanto na matemática pura quanto na matemática aplicada.

As equações diferenciais têm inúmeras aplicações, como na medicina e na engenharia, e suas soluções são usadas para desenhar pontes, automóveis, aviões, esgotos, dentre outros. Resolver equações desse tipo resume-se a encontrar raízes da equação algébrica de grau n associada à equação diferencial, chamada equação característica. A solução geral da equação diferencial depende das raízes da equação característica, podendo ser reais ou não.

Equações diferenciais são extremamente importantes para as ciências, pois informam como a variação de uma grandeza afeta outras grandezas relacionadas. A lei mais importante da Física Clássica, a segunda lei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, é na verdade uma equação diferencial de segunda ordem

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Neste trabalho os objetivos são estudar equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n com coeficientes constantes e a estabilidade de suas soluções, segundo os critérios de Routh-Hurwitz.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

Lineares

Uma equação diferencial é aquela que contém um função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. Diferentemente das incógnitas das equações algébricas, que são números, as incógnitas das equações diferenciais são funções. O termo equações diferenciais (aequatio differentialis) foi utilizado pela primeira vez por G. W. Leibniz em 1676.

Dizemos que uma equação diferencial é de n -ésima ordem, se a mais alta derivada envolvida na equação é de ordem n .

As equações diferenciais classificam-se em equações diferenciais ordinárias (EDO), que envolvem função de uma variável e suas derivadas, e equações diferenciais parciais (EDP), que envolvem funções de mais de uma variável e suas derivadas parciais.

As EDO's podem ser divididas em duas classes: a das equações lineares e a das equações não-lineares.

Neste trabalho estaremos interessados nas equações diferenciais ordinárias lineares.

1.1 Conceitos Fundamentais

Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n , em um intervalo $[a, b]$, é uma equação da forma:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + f_1(t)y' + f_0(t)y = r(t) \quad (1.1)$$

em que $r, f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ são funções quaisquer de t , y é a variável dependente, t é a variável independente e o símbolo $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função $y = y(t)$.

Uma equação que não tenha a forma da equação (1.1) será uma EDO não linear.

Exemplos:

1. $y''' + (\cos t)y'' + By = \sin t$ é uma EDO linear de ordem 3, em que B é constante;
2. $y'' + y^2 = 3t$ é uma EDO não linear.

Se na equação (1.1) a função $r(t) = 0, \forall t \in [a, b]$, a EDO linear torna-se

$$y^{(n)} + f_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + f_1(t)y' + f_0(t)y = 0 \quad (1.2)$$

e é chamada **equação linear homogênea**. Se $r(t)$ é não nula então a equação é dita **não-homogênea**.

Ao longo desta seção serão enunciados teoremas para equações diferenciais de ordem n e, por simplicidade de apresentação, as provas serão feitas para equações de ordem 2.

Teorema 1 Se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ são soluções da equação (1.2) e $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ são constantes quaisquer, então

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \dots + c_ny_n$$

é também solução da equação (1.2).

Prova: Para $n = 2$ a EDO homogênea assume a forma

$$y'' + f_1(t)y' + f_0(t)y = 0$$

Se y_1 e y_2 são soluções da equação acima observe que

$$y_1'' + f_1(t)y_1' + f_0(t)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + f_1(t)y_2' + f_0(t)y_2 = 0$$

Aplicando as regras de diferenciação temos

$$\begin{aligned} & (c_1y_1 + c_2y_2)'' + f_1(t)(c_1y_1 + c_2y_2)' + f_0(t)(c_1y_1 + c_2y_2) = \\ & = (c_1y_1'' + c_2y_2'') + f_1(t)(c_1y_1' + c_2y_2') + f_0(t)(c_1y_1 + c_2y_2) = \\ & = c_1[y_1'' + f_1(t)y_1' + f_0(t)y_1] + c_2[y_2'' + f_1(t)y_2' + f_0(t)y_2] = \\ & = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo $c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da EDO homogênea de ordem 2. ■

Solução Geral e Solução Particular

Uma solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n constitui uma solução geral se contém n constantes independentes arbitrárias. O termo independente significa que a solução não pode ser reduzida a uma função contendo menos de n constantes arbitrárias.

Quando são atribuídos valores específicos às n constantes na solução geral, então a solução obtida é chamada solução particular.

Por exemplo:

$$y(t) = 2e^t \text{ é uma solução particular de } y' - y = 0, \forall t \in \mathbb{R};$$

$$y(t) = ce^t \text{ com } c \in \mathbb{R} \text{ é solução geral de } y' - y = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Em muitos problemas estamos interessados não em uma solução geral da EDO, mas em uma solução que satisfaça condições iniciais da forma:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad y''(t_0) = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

Esse tipo de problema é chamado Problema de Valor Inicial (PVI).

Exemplo 1 Resolver o problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Sabendo-se que a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \quad (1.1.1)$$

Solução: Diferenciando (1.1.1), obtemos

$$y'(t) = 2c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-3t}$$

Para satisfazer as condições iniciais temos:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \quad (1.1.2)$$

$$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0 \quad (1.1.3)$$

De (1.1.3) temos $c_2 = \frac{2}{3}c_1$, e assim, (1.1.2) resulta em:

$$c_1 + \frac{2}{3}c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{5}; \quad c_2 = \frac{2}{5}$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}$$

Teorema 2 Seja a equação (1.2), $y^{(n)} + f_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + f_1(t)y_0 + f_0(t)y = 0$.

Se f_0, f_1, \dots, f_{n-1} são funções contínuas em um intervalo fechado $[a, b]$, se t_0 é algum ponto pertencente a esse intervalo, e mais ainda, se $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ são números quaisquer, então, (1.2) tem uma única solução $y(t)$ em $[a, b]$, tal que $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, y''(t_0) = y_2, \dots, y^{(n)}(t_0) = y_n$.

O Teorema 2 garante a existência e unicidade de solução para o PVI.

Se y_1, y_2, \dots, y_n são soluções de (1.2), então pelo Teorema 1

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$$

é também solução, com c_1, c_2, \dots, c_n constantes arbitrárias.

A seguir serão apresentadas condições que garantirão que y é solução geral da equação homogênea. Para isso precisamos dos conceitos de dependência e independência linear de funções.

Definição 1 Dizemos que n funções $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ definidas no intervalo $[a, b]$ são linearmente dependentes (LD) se a equação

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$$

tem uma solução não nula, ou seja, se $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0$, $\forall t \in [a, b]$, e pelo menos um dos coeficientes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ é diferente de zero.

Quando um conjunto de funções não é LD, ele é dito linearmente independente (LI).

Uma outra maneira de analisar a dependência ou independência linear de funções é através do Wronskiano que será definido abaixo.

Definição 2 Sejam n funções $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, $(n - 1)$ vezes deriváveis. O Wronskiano dessas funções é o determinante definido por

$$\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Lema 1 Se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ são soluções da equação (1.2) em $[a, b]$, e $\mathcal{W}(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ para algum $t_0 \in [a, b]$, então o Wronskiano nunca é zero para todo $t \in [a, b]$.

Prova: Para $n = 2$, a EDO homogênea assume a forma

$$y'' + f_1(t)y' + f_0(t)y = 0$$

e o Wronskiano é dado por $\mathcal{W}(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1'$.

$$\text{Note que } \mathcal{W}' = y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2y_1'' - y_2'y_1' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

Já que y_1 e y_2 são soluções da EDO segue que

$$y_1'' + f_1(t)y_1' + f_0(t)y_1 = 0$$

e

$$y_2'' + f_1(t)y_2' + f_0(t)y_2 = 0$$

Multiplicando-se a primeira dessas equações por y_2 e a segunda por y_1 , e subtraindo a primeira da segunda, ganhamos

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + f_1(t)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0,$$

que pode ser escrito como

$$\mathcal{W}' + f_1(t)\mathcal{W} = 0.$$

Esta equação é uma equação diferencial de primeira ordem. Reescrevendo-a como: $\frac{d\mathcal{W}}{dt} = -f_1(t)\mathcal{W}$ e, aplicando o método de separações de variáveis, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{W}}{\mathcal{W}} &= -f_1(t)dt \\ \ln \mathcal{W} &= \int -f_1(t)dt \\ \mathcal{W} &= ce^{-\int f_1(t)dt} \end{aligned}$$

em que c é constante arbitrária.

Como o fator exponencial nunca se anula para todo $t \in [a, b]$, então o wronskiano será nulo se $c = 0$. Mas por hipótese existe um ponto $t_0 \in [a, b]$ onde $\mathcal{W}(y_1, y_2) \neq 0$, logo c não pode ser zero.

Portanto $\mathcal{W}(y_1, y_2) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. ■

Do Lema 1 temos que, se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ são soluções da equação (1.2) e se o Wronskiano é zero para algum $t = t_0$, então ele também será zero para qualquer valor $t \in [a, b]$.

Lema 2 Se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ são soluções da equação (1.2) em $[a, b]$, então elas são LD nesse intervalo se e somente se o Wronskiano for nulo.

Prova: (\Rightarrow) Para $n = 2$, sejam y_1 e y_2 linearmente dependentes. Se qualquer uma delas for zero em $[a, b]$ então $\mathcal{W}(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$.

Mas considere que nenhuma delas é nula. Por sua dependência linear uma das soluções é uma constante vezes a outra. Assim $y_1 = c y_2$ para alguma constante c e então $y_1' = c y_2'$.

Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ &= c y_2 y_2' - y_2 c y_2' \\ &= c (y_2 y_2' - y_2 y_2') \\ &= c \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

o que prova meia proposição.

(\Leftarrow) Consideremos agora que o Wronskiano é nulo e vamos provar a dependência linear. Se y_1 for nulo em $[a, b]$ as funções são LD. Mas se a função não se anula no intervalo, pela continuidade, ela também não se anula em algum sub-intervalo $[c, d]$ de $[a, b]$. Como $\mathcal{W}(y_1, y_2) = 0$ em $[a, b]$ podemos dividi-lo por y_1^2 e obtemos:

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0 \quad \text{em } [c, d].$$

Esta expressão pode ser escrita como $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$ e integrando temos $\frac{y_2}{y_1} = k$ ou $y_2(t) = ky_1(t)$ para alguma constante k e para todo t em $[c, d]$. Uma vez que $y_2(t)$ e $ky_1(t)$ têm valores iguais em $[c, d]$, eles têm também derivadas iguais. Assim, pelo Teorema 2, $y_2(t) = ky_1(t)$ para todo t em $[a, b]$, o que finaliza a argumentação. ■

Lema 3 Se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ são soluções LI da equação (1.2) no intervalo $[a, b]$ e $f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_1, f_0$ são funções contínuas em $[a, b]$, então $\mathcal{W}(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Prova: Vamos mostrar por absurdo para $n = 2$.

Suponha que $\mathcal{W}(y_1, y_2) = 0$ para algum $t_0 \in [a, b]$.

Considere o sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

em que c_1 e c_2 são constantes.

Resolvendo o sistema e observando que $\mathcal{W}(y_1, y_2) = 0$, temos que o sistema homogêneo possui infinitas soluções. Assim, existe uma solução não trivial, digamos $c_1 = k_1$ e $c_2 = k_2$ tal que $k_1 \cdot k_2 \neq 0$.

Como y_1 e y_2 são soluções da EDO homogênea de ordem 2, o Teorema 1 garante que

$$y = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

é também solução.

Do sistema acima, temos que: $y(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = 0$. Assim, y é solução do PVI

$$y'' + f_1(t)y' + f_0(t)y = 0$$

$$y(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = 0$$

Mas a função nula $y^* = 0$ também é solução do PVI acima.

Como f_1 e f_0 são funções contínuas em $[a, b]$, pelo Teorema 2, temos $y = y^*$, isto é,

$$k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

Como $k_1 \cdot k_2 \neq 0$ temos que y_1 e y_2 são LD, absurdo!

Logo, se y_1 e y_2 são LI então $\mathcal{W}(y_1, y_2) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. ■

Teorema 3 Se $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ são soluções LI da equação (1.2) em $[a, b]$ então

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

é uma solução geral da equação (1.2) em $[a, b]$, para c_1, c_2, \dots, c_n arbitrários.

Prova: Para $n = 2$, sejam y_1 e y_2 soluções da equação homogênea

$$y'' + f_1(t)y' + f_0(t)y = 0$$

Pelo Teorema 1 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é solução para quaisquer valores de c_1 e c_2 .

A função y é a solução geral da equação homogênea acima. De fato, como y_1 e y_2 são LI, nenhuma delas é múltipla da outra, ou seja, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ não pode ser reduzida a uma forma contendo menos que duas constantes arbitrárias. ■

O Teorema 3 diz que, se conhecemos n soluções particulares LI para (1.2) então temos uma solução geral.

Exemplo 2 Dada a equação diferencial

$$y''' + 4y' = 0$$

$$y(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos(2t) + c_3 \cdot \sin^2 t$$

é a solução geral para quaisquer condições iniciais $y(t_0) = b_0$, $y'(t_0) = b_1$ e $y''(t_0) = b_2$?

Solução: Vamos analisar o Wronskiano $\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3)$.

De $y(t)$ temos $y_1 = 1$, $y_2 = \cos(2t)$ e $y_3 = \sen^2 t$.

$$\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2t & \sen^2 t \\ 0 & -2 \sen 2t & 2 \sen t \cos t \\ 0 & -4 \cos 2t & 2(\cos^2 t - \sen^2 t) \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3) = -4 \sen 2t(\cos^2 t - \sen^2 t) + 8 \cos 2t \sen t \cos t$$

Pelas identidades trigonométricas, temos

$$\sen 2t = 2 \sen t \cos t$$

e

$$(\cos^2 t - \sen^2 t) = \cos 2t.$$

Assim $\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3) = -8 \sen t \cos t \cos 2t + 8 \sen t \cos t \cos 2t = 0$.

Como $\mathcal{W}(y_1, y_2, y_3)$ é nulo, pelo Lema 2, y_1 , y_2 e y_3 são LD, e portanto, pelo Teorema 3,

$$y(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos 2t + c_2 \cdot \sen^2 t$$

não é solução geral da equação diferencial.

Teorema 4 Seja $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ a solução geral da equação (1.2) em um intervalo $[a, b]$, onde $f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_1, f_0$ são contínuas. Além disso, seja $\phi(t)$ uma solução qualquer da equação (1.2) em $[a, b]$, desprovida de constantes arbitrárias. Então $\phi(t)$ é obtida da solução

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

atribuindo valores às constantes c_1, c_2, \dots, c_n .

Prova: Para $n = 2$, seja $\phi(t)$ uma solução qualquer da equação

$$y'' + f_1(t)y' + f_0(t)y = 0$$

que não contêm constantes arbitrárias. Vamos mostrar que existem constantes c_1^* e c_2^* tais que

$$\phi(t) = c_1^* y_1 + c_2^* y_2$$

Seja $t_0 \in [a, b]$. Vamos calcular ϕ e ϕ' em t_0 , e vamos mostrar que existem constantes c_1 e c_2 que satisfazem

$$y(t_0) = \phi(t_0) \quad \text{e} \quad y'(t_0) = \phi'(t_0)$$

isto é,

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = \phi(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = \phi'(t_0) \end{cases}$$

Por hipótese a função $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é a solução geral da equação homogênea de ordem 2, então $\mathcal{W}(y_1, y_2) \neq 0$. Logo, o sistema acima tem solução única, digamos $c_1 = c_1^*$ e $c_2 = c_2^*$.

Para estas constantes obtemos a solução particular

$$y^* = c_1^* y_1 + c_2^* y_2.$$

Temos que y^* satisfaz

$$y^*(t_0) = \phi(t_0) \quad \text{e} \quad y'^*(t_0) = \phi'(t_0)$$

Logo, y^* é solução do PVI

$$y'' + f_1(t)y' + f_0(t)y = 0$$

$$y(t_0) = \phi(t_0) \quad \text{e} \quad y'(t_0) = \phi'(t_0)$$

mas, ϕ é também solução do PVI acima. Logo, pelo Teorema 2, temos $\phi = y^*$, ou seja,

$$\phi(t) = c_1^* y_1 + c_2^* y_2.$$

■

O Teorema 4 mostra que uma solução geral da equação diferencial homogênea com coeficientes contínuos inclui toda solução da equação diferencial linear.

Não existe um método geral para resolver equações lineares com coeficientes variáveis, no entanto, se os coeficientes são constantes temos um método para determinar n soluções particulares LI. A próxima seção trata da apresentação desse método.

1.2 Equações Lineares Homogêneas de Ordem n com Coeficientes Constantes

Considere a equação linear homogênea de ordem n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (1.3)$$

onde a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são constantes reais.

Para encontrar uma solução geral para a equação (1.3), basta encontrar n soluções LI.

Sabemos que a função exponencial $y = e^{rt}$ tem a propriedade de que suas derivadas são todas constantes multiplicadas por si própria. Isto aponta $y = e^{rt}$ como possível solução de (1.3) desde que r seja convenientemente escolhido.

Uma vez que

$$y' = re^{rt}, \quad y'' = r^2e^{rt}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = r^ne^{rt}$$

podemos substituir as expressões acima na equação (1.3) e obtemos:

$$e^{rt} \cdot (r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0) = 0$$

Como e^{rt} nunca se anula, a equação acima tem solução se e somente se

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$$

Esta equação é chamada de **equação característica**.

Se r satisfaz a equação característica, então e^{rt} será uma solução para a equação (1.3).

A equação característica possui n raízes r_1, r_2, \dots, r_n que podem ser reais e distintas, reais e repetidas, ou complexas.

Raízes Reais e Distintas

Se a equação característica possuir n raízes reais e distintas, então teremos n soluções distintas $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$, \dots , $y_n = e^{r_n t}$. Através do wronskiano mostra-se que estas funções são LI. Por exemplo, para $n = 2$,

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t}.$$

\mathcal{W} é diferente de zero pois $r_1 \neq r_2$.

Assim, uma solução geral da equação (1.3) será

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t},$$

em que c_1, c_2, \dots, c_n são constantes arbitrárias.

Exemplo 3 Um cientista colocou duas linhagens de bactérias, X e Y , em um ambiente de cultura. Inicialmente, havia 400 de X e 500 de Y . As duas bactérias competem por alimento e espaço, mas uma linhagem não come a outra. Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representam os números de cada linhagem no instante t , e as taxas de crescimento das duas populações são dadas pelo sistema

$$x' = 1, 2x - 0, 2y \quad (1.1.4)$$

$$y' = -0, 2x + 1, 5y \quad (1.1.5)$$

Determine o que acontece com essas duas populações, resolvendo o sistema de equações diferenciais.

Solução: Temos $x(0) = 400$ e $y(0) = 500$.

Da primeira equação do sistema temos $y = \frac{-x' + 1,2x}{0,2}$

Derivando a equação (1.1.4) obtemos

$$x'' = 1,2x' - 0,2y'$$

e então

$$y' = \frac{-x'' + 1,2x'}{0,2}$$

Substituindo as expressões obtidas para y e y' na equação (1.1.5) ganhamos

$$\frac{-x'' + 1,2x'}{0,2} = -0,2x + 1,5 \left(\frac{-x + 1,2x}{0,2} \right)$$

$$-x'' + 1,2x' = -0,04x - 1,5x' + 1,8x$$

$$x'' - 2,7x' + 1,76x = 0$$

A equação acima é uma EDO homogênea de 2ª ordem, e a equação característica correspondente é

$$r^2 - 2,7r + 1,76 = 0$$

cujas raízes são $r_1 = 1,6$ e $r_2 = 1,1$.

Então temos que uma solução geral da EDO homogênea é

$$x(t) = c_1 e^{1,6t} + c_2 e^{1,1t}$$

Derivando $x(t)$, obtemos

$$x'(t) = 1,6c_1 e^{1,6t} + 1,1c_2 e^{1,1t}$$

Aplicando as condições iniciais temos

$$400 = c_1 + c_2$$

$$x'(0) = 1,6c_1 + 1,1c_2$$

e ainda, de (1.1.4)

$$x'(0) = 1,2 \cdot 400 - 0,2 \cdot 500$$

$$x'(0) = 380$$

que nos dá o sistema

$$\begin{cases} 400 = c_1 + c_2 \\ 380 = 1,6c_1 + 1,1c_2 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $c_1 = -120$ e $c_2 = 520$.

Logo,

$$x(t) = -120e^{1,6t} + 520e^{1,1t}$$

Analogamente para y , temos da 2ª equação do sistema inicial, que

$$x = \frac{-y' + 1,5y}{0,2}$$

Derivando a segunda equação obtemos

$$y'' = 0,2x' + 1,5y'$$

que nos dá

$$x' = \frac{-y'' + 1,5y'}{0,2}$$

Substituindo as expressões obtidas para x e x' na equação (1.1.4) ganhamos

$$\frac{-y'' + 1,5y'}{0,2} = 1,2 \left(\frac{-y' + 1,5y}{0,2} \right) - 0,2y$$

$$y'' - 2,7y' + 1,76y = 0$$

que é uma EDO homogênea de 2ª ordem cuja equação característica é

$$r^2 - 2,7r + 1,76 = 0$$

E as raízes são $r_1 = 1,6$ e $r_2 = 1,1$.

Logo, uma solução geral da EDO homogênea é:

$$y(t) = c_1e^{1,6t} + c_2e^{1,1t}$$

Aplicando as condições iniciais, da mesma forma como procedemos para $x(t)$, encontramos o sistema

$$\begin{cases} 500 = c_1 + c_2 \\ 670 = 1,6c_1 + 1,1c_2 \end{cases}$$

Resolvendo temos $c_1 = 240$ e $c_2 = 260$.

Logo

$$y(t) = 240e^{1,6t} + 260e^{1,1t}.$$

Assim,

$$x(t) = -120e^{1,6t} + 520e^{1,1t}$$

$$y(t) = 240e^{1,6t} + 260e^{1,1t}.$$

$y(t)$ é sempre crescente, portanto a população y continua a crescer.

No entanto $x(t)$ se anula quando

$$120e^{1,6t} = 520e^{1,1t}$$

$$3e^{0,5t} = 13$$

$$e^{0,5t} = \frac{13}{3}$$

$$\ln e^{0,5t} = \ln \left(\frac{13}{3} \right)$$

$$0,5t = \ln \left(\frac{13}{3} \right)$$

$$t \approx 2,93$$

Logo X morre após $\approx 2,93$ unidades de tempo.

Exemplo 4 Seja a equação diferencial de terceira ordem

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$$

sujeita às condições iniciais

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 5.$$

A equação característica da equação diferencial é

$$r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0$$

cujas raízes são $r_1 = 2$, $r_2 = -2$, $r_3 = 1$.

Tomando a solução

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^t$$

e usando as condições iniciais, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 + c_3 \\ -1 = 2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ 5 = 4c_1 + 4c_2 + c_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima temos $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ e $c_3 = 1$, e portanto obtemos a solução $y = e^{-2t} + e^t$ do PVI.

Raízes Reais e Repetidas

Vamos considerar a equação linear homogênea com coeficientes constantes de ordem 2.

Neste caso a EDO assume a forma

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

com a_0 e a_1 constantes reais.

A equação característica associada é

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Se a equação acima tiver uma raiz repetida então

$$r = r_1 = r_2 = \frac{-a_1}{2} \Rightarrow 2r + a_1 = 0 \tag{1.4}$$

Assim, obtemos uma única solução particular dada por

$$y_1 = e^{rt}$$

Precisamos encontrar uma segunda solução particular, y_2 , para a EDO, tal que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes. Vamos verificar que $y_2 = ty_1$ é também uma solução.

Temos que

$$y_2' = e^{rt} + tre^{rt}$$

$$y_2'' = 2re^{rt} + tr^2e^{rt}$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$2re^{rt} + r^2te^{rt} + a_1(e^{rt} + tre^{rt}) + a_0te^{rt} = 0$$

que é equivalente a

$$e^{rt}(2r + a_1) + te^{rt}(r^2 + a_1r + a_0) = 0$$

O termo $(2r + a_1)$ é nulo pela equação (1.4), e o termo $(r^2 + a_1r + a_0)$ também é nulo pois r é uma raiz da equação característica.

Note que y_1 e y_2 são linearmente independentes, pois

$$\mathcal{W}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & tre^{rt} + e^{rt} \end{vmatrix} = rte^{2rt} + e^{2rt} - rte^{2rt} = e^{2rt} \neq 0.$$

Logo, uma solução geral da EDO de ordem 2 terá a forma:

$$y = c_1y_1 + c_2ty_1,$$

isto é,

$$y = c_1e^{rt} + c_2te^{rt}.$$

Considerando agora a equação diferencial de ordem n , a **equação característica** é

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$$

Suponha que a equação característica tenha uma raiz dupla, digamos $r = r_1 = r_2$, e as demais raízes sejam distintas.

Então y_1 é uma solução e uma segunda solução linearmente independente relacionada a y_1 é da forma $y_2 = ty_1$. Assim sendo, uma solução geral para a equação diferencial é

$$y = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} + c_3 e^{r_3 t} + c_4 e^{r_4 t} + \dots + c_n e^{r_n t}.$$

Se a equação característica tem uma raiz tripla, digamos $r = r_1 = r_2 = r_3$, tomamos como soluções linearmente independentes correspondentes à raiz tripla as soluções:

$$y_1, ty_1, t^2 y_1,$$

obtidas de forma semelhante à desenvolvida para a equação de segunda ordem.

Dessa forma, uma solução geral é

$$y = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} + c_3 t^2 e^{rt} + c_4 e^{r_4 t} + \dots + c_n e^{r_n t}$$

De maneira geral, se r é uma raiz de multiplicidade ($s \leq r$), então as soluções

$$y_1, ty_1, t^2 y_1, \dots, t^{s-1} y_1$$

são funções linearmente independentes associadas à raiz r .

Exemplo 5 Resolva a equação diferencial $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$.

Solução: A equação característica correspondente é

$$r^4 - 4r^3 + 4r^2 = 0$$

As raízes são:

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{e} \quad r_3 = r_4 = 2$$

Logo a solução geral é

$$y = c_1 + c_2 + c_3 e^{2t} + c_4 t e^{2t}$$

Raízes Complexas

Se a equação característica $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$ possuir raízes complexas, digamos r_1 e r_2 , então elas aparecem em pares conjugados, $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$. Se não houver repetição de raiz, uma solução geral da equação (1.3) continua sendo

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} + \dots + c_n e^{r_nt},$$

isto é,

$$y = c_1e^{(a+bi)t} + c_2e^{(a-bi)t} + c_3e^{r_3t} + \dots + c_n e^{r_nt}.$$

Usando a fórmula de Euler, podemos reescrever y_1 e y_2 como

$$y_1 = e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt))$$

$$y_2 = e^{(a-bi)t} = e^{at}(\cos(bt) - i \operatorname{sen}(bt))$$

E assim uma solução geral assume a forma:

$$y = c_1e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) + c_2e^{at}(\cos bt - i \operatorname{sen} bt) + c_3e^{r_3t} + \dots + c_n e^{r_nt}$$

Esta é uma **solução complexa**. Porém, em aplicações práticas estamos interessados em soluções reais. Assim sendo, temos, pelo Teorema 1, que as funções reais

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{at} \cos bt$$

e

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{at} \operatorname{sen} bt$$

são soluções da equação (1.3).

Através do Wronskiano, mostra-se que as funções

$$e^{at} \cos bt, e^{at} \operatorname{sen} bt, e^{r_3t}, \dots, e^{r_nt}$$

são linearmente independentes.

Portanto, uma **solução geral real** da equação diferencial é:

$$y = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \operatorname{sen} bt + c_3 e^{r_3 t} + \dots + c_n e^{r_n t}.$$

Exemplo 6 Resolva a equação diferencial

$$y^{(4)} + y = 0$$

Solução: A equação característica é:

$$r^4 + 1 = 0, \quad \text{ou seja, } r = \sqrt[4]{-1}$$

Vamos calcular então as raízes quartas de -1.

O número complexo -1 pode ser escrito na forma polar:

$$z = -1 = 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$$

Utilizando a segunda fórmula de Moivre temos:

$$r = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} \left[\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Logo, as raízes são:

Para $k = 0$

$$r_1 = 1 \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Para $k = 1$

$$r_2 = 1 \left[\cos \left(\frac{\pi + 2\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 2\pi}{4} \right) \right] = \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Para $k = 2$

$$r_3 = 1 \left[\cos \left(\frac{\pi + 4\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 4\pi}{4} \right) \right] = \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Para $k = 3$

$$r_4 = 1 \left[\cos \left(\frac{\pi + 6\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi + 6\pi}{4} \right) \right] = \cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Portanto, a solução geral complexa é:

$$\begin{aligned} y = & c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \right] + \\ & + c_2 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \right] + \\ & + c_3 e^{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \right] + \\ & + c_4 e^{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)t} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \right]. \end{aligned}$$

e a solução geral real tem a forma:

$$y = c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_2 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_3 e^{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)t} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_4 e^{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right).$$

1.3 Problema de Valor Inicial e o Determinante de Vandermonde

Seja a equação diferencial linear homogênea de ordem n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

com todos os coeficientes constantes.

Suponha que queremos obter a solução particular para as condições iniciais

$$y(t_0) = b_1, \quad y'(t_0) = b_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = b_n.$$

A equação característica da equação diferencial tem a forma

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Suponha que a equação característica tenha n raízes reais e distintas. Então uma solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t},$$

para c_1, c_2, \dots, c_n arbitrários.

Concluindo as diferenciações e tomando $t_0 = 0$, obtemos o sistema linear com n equações e n incógnitas

$$\begin{cases} y(0) = b_1 = c_1 + c_2 + \dots + c_n \\ y'(0) = b_2 = r_1 c_1 + r_2 c_2 + \dots + r_n c_n \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = b_n = r_1^{(n-1)} c_1 + r_2^{(n-1)} c_2 + \dots + r_n^{(n-1)} c_n \end{cases}$$

que possui uma única solução, pois o determinante

$$\mathcal{V}(r_1, r_2, \dots, r_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{(n-1)} & r_2^{(n-1)} & \dots & r_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nunca é zero, uma vez que $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$. Tal determinante é chamado Determinante de Vandermonde.

O Determinante de Vandermonde

Vamos mostrar que o determinante de Vandermonde nunca é nulo quando r_1, r_2, \dots, r_n são distintos.

Considere o caso $n = 2$. Então temos

$$\mathcal{V}(r_1, r_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1$$

Como r_1 e r_2 são distintos, o determinante $\mathcal{V}(r_1, r_2)$ é diferente de zero.

Para $n = 3$, temos

$$\mathcal{V}(r_1, r_2, r_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}$$

Subtraindo-se a primeira coluna da segunda e terceira colunas (estas operações não alteram o valor do determinante) temos

$$\mathcal{V}(r_1, r_2, r_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 - r_1 & r_3 - r_1 \\ r_1^2 & r_2^2 - r_1^2 & r_3^2 - r_1^2 \end{vmatrix}$$

Efetuada algumas operações entre as linhas do determinante acima obtemos

$$\mathcal{V}(r_1, r_2, r_3) = (r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & 1 & 1 \\ r_1^2 & r_2 + r_1 & r_3 + r_1 \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & 1 & 1 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

O determinante da matriz de ordem 3 é então

$$\mathcal{V}(r_1, r_2, r_3) = (r_2 - r_1)(r_3 - r_1)(r_3 - r_2),$$

que é sempre diferente de zero, já que r_1 , r_2 e r_3 são distintos.

Continuando este processo indutivamente é possível mostrar que o determinante de Vandermonde de ordem n nunca é zero se r_1, r_2, \dots, r_n são distintos.

O exposto acima é uma outra maneira de mostrar a existência e unicidade do PVI, para um sistema linear com n equações e n incógnitas, com coeficientes constantes.

1.4 Equações Lineares Não-Homogêneas

Seja a equação diferencial linear não-homogênea de ordem n

$$y^{(n)} + f_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + f_1(t)y' + f_0(t)y = r(t) \quad (1.5)$$

A solução geral da equação acima depende da solução da equação homogênea associada, e é determinada pelo teorema seguinte:

Teorema 5 Uma solução geral de uma equação não-homogênea (1.5) é representada como a soma de uma solução particular y_p da equação (1.5) e uma solução geral y_h , da equação homogênea correspondente.

Prova: Vamos mostrar que $y = y_p + y_h$ é solução da equação (1.5).

Temos que

$$\begin{aligned} (y_p + y_h)^{(n)} + f_{n-1}(t)(y_p + y_h)^{(n-1)} + \cdots + f_1(t)(y_p + y_h)' + f_0(t)(y_p + y_h) &= \\ &= (y_p^{(n)} + f_{n-1}(t)y_p^{(n-1)} + \cdots + f_1(t)y_p' + f_0(t)y_p) + \\ &+ (y_h^{(n)} + f_{n-1}(t)y_h^{(n-1)} + \cdots + f_1(t)y_h' + f_0(t)y_h) = \\ &= r(t) + 0 = r(t) \end{aligned}$$

pois y_p é solução de (1.5) e y_h é solução da equação homogênea correspondente.

Portanto, $y = y_p + y_h$ é uma solução da equação (1.5).

Vamos verificar que y é uma solução geral. Temos que y_h é uma solução geral da equação homogênea, logo y_h envolve n constantes arbitrárias. O mesmo ocorre com y . Assim, y é uma solução geral da equação (1.5). ■

Do teorema acima, se conhecemos uma solução particular y_p da solução (1.5) e uma solução geral da equação homogênea associada, conheceremos uma solução geral da equação (1.5).

Precisamos, portanto, de algum método para encontrar uma solução particular para (1.5). Na seqüência mostraremos dois métodos que fornecem uma técnica para encontrar tal solução.

1.4.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

Este método (MCI) é um procedimento utilizado para encontrar y_p quando a equação (1.5) tem coeficientes constantes e $r(t)$ é uma exponencial, um seno ou cosseno, um polinômio ou alguma combinação dessas funções.

Vamos apresentar o método para $n = 2$.

A solução particular da EDO linear não-homogênea de ordem 2

$$y'' + a_1y' + a_0y = r(t)$$

será dada conforme a tabela abaixo:

$r(t)$	$y_p(t)$
$P_n(t) = c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0$	$t^s (C_n t^n + \dots + C_1 t + C_0)$
$P_n(t) \cdot e^{rt}$	$t^s (C_n t^n + \dots + C_1 t + C_0) e^{rt}$
$P_n(t) \cdot e^{rt} \begin{cases} \text{sen } \beta t \\ \text{ou} \\ \text{cos}(\beta t) \end{cases}$	$t^s [(C_n t^n + \dots + C_1 t + C_0) e^{rt} \cdot \cos \beta t + (B_n t^n + \dots + B_1 t + B_0) e^{rt} \cdot \text{sen}(\beta t)]$

O expoente s é o menor inteiro não negativo ($s = 0, 1$, ou 2) que fará com que $y_p(t)$ não seja solução da equação homogênea correspondente.

Exemplo 7 Encontrar a solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-t}$$

através do MCI.

Solução: A equação característica da equação homogênea associada tem a forma:

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

cujas raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = 4$.

Assim, temos $y_1 = e^{-t}$ e $y_2 = e^{4t}$ soluções da EDO homogênea.

A solução particular da EDO não-homogênea é dada, conforme a tabela, por:

$$y_p(t) = t^s \cdot A \cdot e^{-t}, \quad s = (0, 1, \text{ ou } 2).$$

Se $s = 0 \rightarrow y_p(t) = Ae^{-t}$ que satisfaz a equação homogênea, o que não pode ocorrer.

Se $s = 1 \rightarrow y_p(t) = tAe^{-t}$. Neste caso, $y_p(t)$ não é solução da equação homogênea e portanto é a solução particular que procuramos.

Vamos descobrir o valor de A:

Temos:

$$y_p(t) = tAe^{-t}$$

$$y_p'(t) = Ae^{-t}(1 - t)$$

$$y_p''(t) = Ae^{-t}(-2 + t)$$

Substituindo estas expressões na EDO não-homogênea obtemos $A = \frac{-1}{5}$.

Logo, $y_p(t) = \frac{-1}{5}te^{-t}$.

Exemplo 8 Encontrar a solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \operatorname{sen} t$$

através do MCI.

Solução: A equação homogênea associada é a mesma do exemplo anterior.

Assim, $y_1 = e^{-t}$ e $y_2 = e^{4t}$ são soluções da EDO homogênea.

Conforme a tabela, a solução particular da EDO não-homogênea é dada por:

$$y_p(t) = t^s[A \cos t + B \operatorname{sen} t], \quad s = (0, 1, \text{ ou } 2).$$

Se $s = 0 \rightarrow y_p(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t$, que não satisfaz a equação homogênea.

Logo esta é a solução particular que procuramos.

Vamos descobrir os valores de A e B .

Temos:

$$y_p(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t$$

$$y_p'(t) = -A \operatorname{sen} t + B \cos t$$

$$y_p''(t) = -A \cos t - B \operatorname{sen} t$$

Substituindo estas expressões na EDO não-homogênea obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3A - 5B = 2 \\ -5A - 3B = 0 \end{cases},$$

de onde encontramos $A = \frac{9}{51}$ e $B = \frac{-5}{17}$.

Dessa forma,

$$y_p(t) = \frac{9}{51} \cos t - \frac{5}{17} \operatorname{sen} t.$$

Exemplo 9 Encontrar a solução do sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t & (1.1.6) \\ y' = x + y + 2e^t & (1.1.7) \end{cases}$$

através do método dos coeficientes indeterminados.

Solução: Da equação (1.1.6), temos

$$y = x' - 2x - e^t$$

Derivando a equação acima obtemos

$$y' = x'' - 2x' - e^t \quad (1.1.8)$$

substituindo (1.1.8) em (1.1.7) ganhamos

$$x'' - 2x' - e^t = x + y + 2e^t$$

$$x'' - 2x' - e^t = x + (x' - 2x - e^t) + 2e^t$$

$$x'' - 3x' + x = 2e^t \quad (1.1.9)$$

que é uma EDO linear não-homogênea de segunda ordem. A equação homogênea associada é

$$x'' - 3x' + x = 0$$

E a equação característica correspondente é

$$r^2 - 3r + 1 = 0,$$

cujas raízes são: $r_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Então,

$$y_1 = e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)}$$

são soluções da EDO homogênea.

Vamos encontrar uma solução particular da EDO não-homogênea. Esta solução é dada por:

$$y_p(t) = t^s A e^t, \quad s = (0, 1, \text{ ou } 2).$$

Se $s = 0 \rightarrow y_p(t) = A e^t$, que é a solução particular procurada, já que não satisfaz a equação homogênea.

Então temos:

$$y_p(t) = A e^t$$

$$y_p'(t) = A e^t$$

$$y_p''(t) = A e^t$$

Substituindo estas expressões em (1.1.9) obtemos

$$(A e^t - 3A e^t + A e^t) = 2e^t$$

que nos dá $A = -2$. Portanto $x_p = -2e^t$.

Temos que, uma solução geral da equação homogênea é dada por:

$$x_h(t) = c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} + c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)}.$$

E portanto, a solução geral da EDO não-homogênea é

$$x(t) = -2e^t + c_1 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} + c_2 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}$$

Falta encontrar y . Temos de (1.1.6) que:

$$y(t) = x'(t) - 2x(t) - e^t$$

$$\text{Então } y(t) = -2e^t + c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} - 2[-2e^t + c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}] - e^t.$$

Logo,

$$y(t) = e^t + c_1(r_1 - 2)e^{r_1 t} + c_2(r_2 - 2)e^{r_2 t}$$

$$y(t) = e^t + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} + \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)}.$$

1.4.2 Método da Variação dos Parâmetros

O Método da Variação dos Parâmetros (MVP) é utilizado para encontrar uma solução particular para a equação não-homogênea

$$y^{(n)} + f_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + f_1(t)y' + f_0(t)y = r(t).$$

Para aplicá-lo, precisamos conhecer uma solução geral da equação homogênea correspondente, digamos

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

O objetivo é substituir as constantes c_1, c_2, \dots, c_n por funções desconhecidas $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ a serem determinadas de modo que a função resultante

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_n y_n$$

seja uma solução particular da equação não-homogênea.

Precisamos encontrar n funções, e para isso vamos especificar n condições. A primeira condição é que y_p seja uma solução da equação não-homogênea e as outras $(n - 1)$ condições serão escolhidas de modo a facilitar os cálculos.

O MVP impõe que

$$v'_1 y_1 + v'_2 y_2 + \cdots + v'_n y_n = 0$$

Isto reduz y'_p a

$$y'_p = v_1 y'_1 + v_2 y'_2 + \cdots + v_n y'_n$$

Calculando a derivada de y'_p obtemos

$$\begin{aligned} y''_p &= v_1 y''_1 + v'_1 y'_1 + v_2 y''_2 + v'_2 y'_2 + \cdots + v_n y''_n + v'_n y'_n = \\ &= (v_1 y''_1 + v_2 y''_2 + \cdots + v_n y''_n) + (v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 + \cdots + v'_n y'_n). \end{aligned}$$

Vamos impor que

$$v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 + \cdots + v'_n y'_n = 0$$

Continuando este processo de maneira semelhante até a derivada de ordem $(n - 1)$ obtemos

$$y_p^{(n-1)} = (v_1 y_1^{(n-1)} + v_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n y_n^{(n-1)}) + (v'_1 y_1^{(n-2)} + v'_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + v'_n y_n^{(n-2)}).$$

Vamos pedir que

$$v'_1 y_1^{(n-2)} + v'_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + v'_n y_n^{(n-2)} = 0$$

Calculando a derivada de y_p de ordem n , obtemos

$$y_p^{(n)} = (v_1 y_1^{(n)} + v_2 y_2^{(n)} + \cdots + v_n y_n^{(n)}) + (v'_1 y_1^{(n-1)} + v'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + v'_n y_n^{(n-1)})$$

Agora, substituindo as derivadas de y_p na EDO não-homogênea temos

$$(v_1 y_1^{(n)} + v_2 y_2^{(n)} + \cdots + v_n y_n^{(n)}) + (v'_1 y_1^{(n-1)} + v'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + v'_n y_n^{(n-1)}) +$$

$$\begin{aligned}
& f_{n-1}(t)(v_1 y_1^{(n-1)} + v_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n y_n^{(n-1)}) + \cdots \\
& \quad \cdots + f_1(t)(v_1 y_1' + v_2 y_2' + \cdots + v_n y_n') + \\
& \quad + f_0(t)(v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n) = r(t).
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& v_1[y_1^{(n)} + f_{n-1}(t)y_1^{(n-1)} + \cdots + f_0(t)y_1] + v_2[y_2^{(n)} + f_{n-1}(t)y_2^{(n-1)} + \cdots + f_0(t)y_2] + \cdots \\
& \cdots + v_n[y_n^{(n)} + f_{n-1}(t)y_n^{(n-1)} + \cdots + f_0(t)y_n] + v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-1)} = r(t).
\end{aligned}$$

Note que

$$[y_i^{(n)} + f_{n-1}(t)y_i^{(n-1)} + \cdots + f_0(t)y_i] = 0$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$, pois y_1, y_2, \dots, y_n são soluções da equação homogênea.

Logo, temos n equações lineares com as incógnitas v_1', v_2', \dots, v_n' .

$$\begin{cases}
y_1 v_1' + y_2 v_2' + \cdots + y_n v_n' = 0 \\
y_1' v_1' + y_2' v_2' + \cdots + y_n' v_n' = 0 \\
y_1'' v_1' + y_2'' v_2' + \cdots + y_n'' v_n' = 0 \\
\vdots \\
y_1^{(n-1)} v_1' + y_2^{(n-1)} v_2' + \cdots + y_n^{(n-1)} v_n' = r(t)
\end{cases}$$

Resolvendo esse sistema e integrando as expressões resultantes obtêm-se os coeficientes v_1, v_2, \dots, v_n . O determinante dos coeficientes é $\mathcal{W}(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$, pois y_1, y_2, \dots, y_n são soluções linearmente independentes da equação homogênea, o que é condição suficiente para existir uma solução do sistema de equações acima. Assim é possível determinar v_1', v_2', \dots, v_n' .

Assim sendo, utilizando a regra de Cramer chegamos na seguinte solução do sistema de equações:

$$v_n'(t) = \frac{\mathcal{W}_n(t)r(t)}{\mathcal{W}(t)}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

em que $\mathcal{W}(t) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $\mathcal{W}_m(t)$ é o determinante obtido de \mathcal{W} substituindo-se a m -ésima coluna pela coluna $(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$. A partir dessa notação uma solução particular da equação não-homogênea é dada por

$$y_p(t) = \sum_{m=1}^n y_m(t) \int_{t_0}^t \frac{r(t)\mathcal{W}_m(t)}{\mathcal{W}(t)} dt$$

com t_0 arbitrário.

Exemplo 10 Calcule a solução do sistema apresentando no exemplo 9, página 22, seção 1.4.1.

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = x + y + 2e^t \end{cases}$$

através do Método da Variação dos Parâmetros.

Solução: Da seção 1.4.1 sabemos que, por meio de alguns cálculos, encontramos a EDO não-homogênea

$$x'' - 3x' + x = 2e^t$$

cuja equação homogênea correspondente tem uma solução geral da forma:

$$x_h = c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} + c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)}$$

Vamos encontrar então a solução particular da equação não-homogênea através do Método da Variação dos Parâmetros.

Temos

$$\begin{cases} v_1'(t)x_1 + v_2'(t)x_2 = 0 \\ v_1'(t)x_1' + v_2'(t)x_2' = r(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1'(t)e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} + v_2'(t)e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)} = 0 \\ v_1'(t)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} + v_2'(t)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)} = 2e^t \end{cases}$$

$$\mathcal{W} = (y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} & e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)} \\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right) e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} & \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right) e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)} \end{vmatrix}$$

Resolvendo o determinante temos $\mathcal{W}(y_1, y_2) = -\sqrt{5}e^{3t}$.

Por Cramer encontramos

$$v_1'(t) = \frac{2\sqrt{5}}{2} e^{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t\right)}$$

$$v_2'(t) = \frac{-2\sqrt{5}}{2} e^{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t\right)}$$

Integrando obtemos

$$v_1(t) = \frac{-5 + 4\sqrt{5}}{5} e^{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t\right)}$$

$$v_2(t) = \frac{-5 - 4\sqrt{5}}{5} e^{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t\right)}$$

Então a solução particular da EDO não-homogênea é:

$$x_p = e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} \frac{(-5 + 4\sqrt{5})}{5} e^{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t\right)} + e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)} \frac{(-5 - 4\sqrt{5})}{5} e^{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t\right)}$$

$$x_p = e^t \left(\frac{-5 + 4\sqrt{5}}{5} + \frac{(-5 - 4\sqrt{5})}{5} \right)$$

$$x_p = -2e^t.$$

Logo, a solução geral procurada $x(t) = x_h + x_p$ é

$$x(t) = c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} + c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)} - 2e^t.$$

Vamos encontrar $y(t)$.

Temos

$$y = x' - 2x - e^t$$

Substituindo $x(t)$ e sua primeira derivada na equação acima obtemos

$$y(t) = e^t + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}t\right)} + \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\right)}.$$

1.5 Sistemas Lineares e Autovalores

Em Álgebra Linear, por definição, um autovetor de uma matriz A , $n \times n$, é um vetor não nulo \vec{Z} tal que $A\vec{Z} = \lambda\vec{Z}$ para algum escalar λ , chamado autovalor de A .

Assim sendo, λ é um autovalor para A se e somente se a equação característica $(A - \lambda I)\vec{Z} = 0$ tem solução não trivial.

O próximo exemplo ilustra o papel dos autovalores na resolução de sistemas lineares de EDO's.

Exemplo 11 Resolver o problema 3, página 17, apresentado na seção 1.2, através de autovetores e autovalores.

Um cientista colocou duas linhagens de bactérias, X e Y , em um ambiente de cultura. Inicialmente, havia 400 de X e 500 de Y . As duas bactérias competem por alimento e espaço, mas uma linhagem não come a outra. Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representam os números de cada linhagem no instante t , e as taxas de crescimento das duas populações são dadas pelo sistema

$$\begin{aligned}x' &= 1,2x - 0,2y \\y' &= -0,2x + 1,5y\end{aligned}$$

Determine o que acontece com essas duas populações, resolvendo o sistema de equações diferenciais.

Solução: Vamos definir

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \vec{Z}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 \\ -0,2 & 1,5 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema na forma vetorial temos:

$$\vec{Z}' = A\vec{Z} \quad (1.2.1)$$

Procuramos soluções $x(t)$ e $y(t)$ da forma:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad y(t) = y_0 e^{\lambda t},$$

com x_0 e y_0 constantes não-nulas.

Definindo $\vec{Z}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ temos que:

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \implies \vec{Z}' = \begin{bmatrix} \lambda x_0 e^{\lambda t} \\ \lambda y_0 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

Igualando (1.2.2) e (1.2.1) temos

$$\begin{bmatrix} \lambda x_0 e^{\lambda t} \\ \lambda y_0 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 \\ -0,2 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\lambda t} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \end{bmatrix} = A e^{\lambda t} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \implies \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ou seja, $A\vec{Z}_0 = \lambda\vec{Z}_0$. Logo λ é autovalor de A e, \vec{Z} é autovetor de A .

O polinômio característico para λ é:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \implies \begin{vmatrix} 1,2 - \lambda & -0,2 \\ -0,2 & 1,5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante encontramos $\lambda = 1,1$ e $\lambda' = 1,6$.

Falta encontrar \vec{Z}_0 :

Temos que $A\vec{Z}_0 = \lambda\vec{Z}_0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 \\ -0,2 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = 1,1 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$1,2x_0 - 0,2y_0 = 1,1x_0 \implies x_0 = 2y_0$$

Então

$$\vec{Z}_0 = \begin{bmatrix} 2y_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Temos ainda que $A\vec{Z}_0 = \lambda'\vec{Z}_0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1,2 & -0,2 \\ -0,2 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = 1,6 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$1,2x_0 - 0,2y_0 = 1,6x_0 \Rightarrow y_0 = -2x_0$$

Então

$$\vec{Z}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ -2x_0 \end{bmatrix}.$$

Como $\vec{Z} = \vec{Z}_0 e^{\lambda t}$ temos

$$Z = \begin{bmatrix} 2y_0 \\ y_0 \end{bmatrix} e^{1,1t} \text{ e } Z = \begin{bmatrix} x_0 \\ -2x_0 \end{bmatrix} e^{1,6t},$$

que são duas soluções de $\vec{Z}' = A\vec{Z}$.

A combinação linear:

$$\vec{Z} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1,1t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{1,6t},$$

em que $k_1 = c_1 y_0$ e $k_2 = c_2 x_0$ também é solução de $\vec{Z}' = A\vec{Z}$.

De fato,

$$\vec{Z}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 1,1k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1,1t} + 1,6k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{1,6t}.$$

e

$$\begin{aligned} A\vec{Z} &= \begin{vmatrix} 1,2 & -0,2 & 2k_1 e^{1,1t} & k_2 e^{1,6t} \\ -0,2 & 1,5 & k_1 e^{1,1t} & -2k_2 e^{1,6t} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2,4k_1 e^{1,1t} - 0,2k_1 e^{1,1t} & 1,2k_2 e^{1,6t} + 0,4k_2 e^{1,6t} \\ -0,4k_1 e^{1,1t} + 1,5k_1 e^{1,1t} & -0,2k_2 e^{1,6t} - 3k_2 e^{1,6t} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2,2k_1 e^{1,1t} & 1,6k_2 e^{1,6t} \\ 1,1k_1 e^{1,1t} & -3,2k_2 e^{1,6t} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$A\vec{Z} = 1,1k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1,1t} + 1,6k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{1,6t}.$$

Das condições iniciais, para $t = 0$

$$x(0) = 400 \quad \text{e} \quad y(0) = 500$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 400 \\ 500 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1,1t} - k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{1,6t}$$

que nos fornece o sistema

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 = 400 \\ k_1 - 2k_2 = 500 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $k_1 = 260$ e $k_2 = -120$.

Portanto

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 260 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1,1t} - 120 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{1,6t}$$

e então

$$x(t) = 520e^{1,1t} - 120e^{1,6t}$$

$$y(t) = 260e^{1,1t} + 240e^{1,6t}.$$

Capítulo 2

O Critério de Estabilidade de Routh Hurwitz

Vários problemas da engenharia e da física, como a análise de sistemas mecânicos e circuitos elétricos, são descritos por sistemas de equações diferenciais com coeficientes constantes e, em diversos casos, é muito importante saber quando todas as suas soluções tendem a zero. No entanto, pode ser muito difícil resolver as equações diferenciais, e então torna-se útil conhecer maneiras de ganharmos alguma informação sem encontrar a solução do sistema.

Vamos analisar neste capítulo condições que garantem o comportamento das soluções de equações diferenciais sem precisar resolvê-las.

Seja o sistema linear

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{R}(t), \quad (2.1)$$

em que A é uma matriz constante $n \times n$, com elementos reais, sujeito à condição inicial

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0.$$

$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ e $\vec{R}(t)$ é uma função vetorial $n \times 1$.

O sistema homogêneo associado é

$$\vec{y}' = A\vec{y}. \quad (2.2)$$

Várias informações sobre as soluções de (2.2) podem ser obtidas examinando-se os autovalores de A .

O próximo teorema será enunciado sem demonstração. A prova pode ser encontrada no item [4] das referências bibliográficas.

Teorema 6 Seja ρ algum número e $\operatorname{Re}(\lambda)$ a parte real de λ .

Se $\operatorname{Re}(\lambda) < \rho$ para todo autovalor λ de A , então para cada solução de (2.2) existe alguma constante $H > 0$ tal que

$$|y(t)| \leq H e^{\rho t}$$

para $t \geq 0$.

Corolário 1 Toda solução de (2.2) tende a zero com $t \mapsto \infty$ se e somente se todo autovalor de A tem parte real negativa, ou seja,

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Prova: Vamos provar para $n = 2$, para o caso em que os autovalores de A são reais e distintos.

(\Rightarrow) Seja $y(t)$ solução de (2.2):

$$y(t) = \vec{\eta}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{\eta}_2 e^{\lambda_2 t},$$

com $y(t) \neq 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ambos reais.

Se $y(t) \neq 0$, então $\vec{\eta}_1 \neq 0$ ou $\vec{\eta}_2 \neq 0$.

Como, por hipótese $y(t) \mapsto 0$, com $t \mapsto \infty$, temos $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$.

Suponha que $\lambda_1 > 0$ ou $\lambda_2 > 0$. Por exemplo, se $\lambda_1 > 0$. Então

$$\vec{\eta}_1 e^{\lambda_1 t} \mapsto +\infty, \text{ quando } t \mapsto \infty.$$

Mas nesse caso, $y(t) \mapsto \infty$. Contradição!

Logo λ_1 deve ser negativo.

(\Leftarrow) Temos, por hipótese, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, para todo λ . Existem no máximo n autovalores λ (reais ou complexos).

Seja $\operatorname{Re}(\lambda^*) = \max\{\operatorname{Re}(\lambda_1), \dots, \operatorname{Re}(\lambda_n)\} < 0$.

Seja ρ um número real tal que

$$\operatorname{Re}(\lambda^*) < \rho < 0.$$

Então $\operatorname{Re}(\lambda) < \rho < 0$, para todo autovalor λ de A .

Pelo Teorema 6,

$$|y(t)| \leq H e^{\rho t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Como $\rho < 0$, $H e^{\rho t} \mapsto 0$, com $t \mapsto \infty$ e assim

$$y(t) \mapsto 0, \quad \text{com } t \mapsto \infty.$$

■

Se as condições do Corolário 1 forem satisfeitas, a matriz A é chamada **matriz estável**. Se toda solução de (2.2) com coeficientes constantes tende a zero com $t \mapsto \infty$, a solução trivial ($y = 0$) de (2.2) é dita “**assintoticamente estável**”.

Agora, faz-se necessário conhecer alguma maneira de determinação do sinal algébrico das partes reais dos autovalores. Uma vez que os autovalores da matriz A são soluções da equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$, nosso problema é então estudar as raízes da equação característica.

Definição 3 Seja o polinômio

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0$$

A matriz de Hurwitz é definida por

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

Por exemplo:

Para $n = 2$, temos $r^2 + a_1r + a_0$. Então

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix}$$

Para $n = 3$, temos $r^3 + a_2r^2 + a_1r + a_0$, e

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Para $n = 4$, temos $r^4 + a_3r^3 + a_2r^2 + a_1r + a_0$. Assim,

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Na diagonal principal da matriz de Hurwitz estão os coeficientes do polinômio tomados em sua ordem de numeração de a_{n-1} a a_0 . As linhas são formadas sucessivamente por coeficientes só com índices pares ou só ímpares, incluindo também o coeficiente $a_n = 1$.

Todos os outros coeficientes, ou seja, os coeficientes com índices maiores que n ou menores que zero são substituídos por zeros.

Os menores principais da matriz de Hurwitz são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= |a_{n-1}|, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{vmatrix}, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \cdots \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Teorema 7 (Teorema de Routh Hurwitz) A condição necessária e suficiente para que as partes reais de todas as raízes do polinômio

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0$$

com coeficientes reais sejam negativas, é que todos os menores principais da matriz de Hurwitz sejam positivos.

Por exemplo:

Para $n = 2$, temos $r^2 + a_1r + a_0$.

Os menores principais de *Hurwitz* são:

$$\Delta_1 = |a_1| \quad \text{e} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_0 \end{vmatrix}$$

Aplicando as condições do Teorema temos:

$$\Delta_1 > 0 \rightarrow a_1 > 0$$

$$\Delta_2 > 0 \rightarrow a_1 \cdot a_0 > 0.$$

Como $a_1 > 0$, temos que a_0 é obrigatoriamente positivo.

Logo, para $n = 2$ as condições de *Hurwitz* são:

$$a_0 > 0 \text{ e } a_1 > 0$$

Para $n = 3$, temos $r^3 + a_2r^2 + a_1r + a_0$.

Os menores principais são dados por

$$\Delta_1 = |a_2|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} \text{ e } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Aplicando as condições do Teorema temos:

$$\Delta_1 > 0 \rightarrow a_2 > 0$$

$$\Delta_2 > 0 \rightarrow a_2 \cdot a_1 - a_0 > 0$$

$$\Delta_3 > 0 \rightarrow a_0(a_2 \cdot a_1 - a_0) > 0.$$

Como $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_3 = a_0 \cdot \Delta_2 > 0$, a_0 deve ter o mesmo sinal de Δ_2 , ou seja, $a_0 > 0$.

Agora, se $a_0 > 0$ e $a_2 > 0$, então a_1 também é obrigatoriamente positivo, satisfazendo $\Delta_2 > 0$.

Assim, para $n = 3$ as condições de *Hurwitz* se reduzem a:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0 \text{ e } a_2 \cdot a_1 - a_0 > 0.$$

Para $n = 4$, temos $r^4 + a_3r^3 + a_2r^2 + a_1r + a_0$.

Os menores principais são:

$$\Delta_1 = |a_3|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Aplicando as condições do Teorema temos

$$\Delta_1 > 0 \rightarrow a_3 > 0$$

$$\Delta_2 > 0 \rightarrow a_3 \cdot a_2 - a_1 > 0$$

$$\Delta_3 > 0 \rightarrow a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - a_3^2 \cdot a_0 - a_1^2 > 0$$

$$\Delta_4 > 0 \rightarrow a_0(a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - a_3^2 \cdot a_0 - a_1^2) > 0.$$

Como Δ_3 é positivo e $\Delta_4 = a_0 \cdot \Delta_3 > 0$, temos a_0 também positivo.

Agora, de Δ_3 temos $a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 > a_3^2 \cdot a_0 + a_1^2$. O lado direito é claramente positivo, o que implica $a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 > 0$. Já sabemos que $a_3 > 0$, logo a_2 e a_1 devem ter o mesmo sinal.

De Δ_3 temos $a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - a_1^2 > a_3^2 \cdot a_0$, ou seja,

$$a_1(a_3 a_2 - a_1) > a_3^2 \cdot a_0$$

$$a_1 \cdot \Delta_2 > a_3^2 \cdot a_0 > 0$$

Como $\Delta_2 > 0$, a_1 é positivo e portanto a_2 também é positivo.

Logo, para $n = 4$ as condições de *Hurwitz* são:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \text{e} \quad a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - a_3^2 \cdot a_0 - a_1^2 > 0.$$

Vamos provar o Teorema 7 para polinômios de segundo, terceiro e quarto graus.

Prova: Para $n = 2$, temos o polinômio

$$r^2 + a_1 r + a_0$$

e as condições de Hurwitz reduzem-se a $a_1 > 0$ e $a_0 > 0$.

Sejam r_1 e r_2 as raízes do polinômio. Segue que:

$$r^2 + a_1r + a_0 = (r - r_1)(r - r_2)$$

Então,

$$r_1 + r_2 = -a_1 \quad \text{e} \quad r_1 \cdot r_2 = a_0$$

Se r_1 e r_2 são ambas reais (possivelmente idênticas), então elas são ambas negativas se e somente se $a_1 > 0$ e $a_0 > 0$.

Se r_1 e r_2 não são reais, então elas ocorrem em pares conjugados, digamos $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$, onde a é a parte real das raízes.

Logo, temos que:

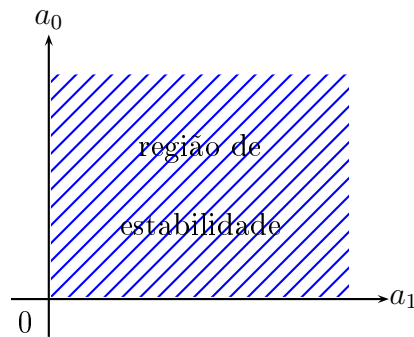
$$2 \cdot a = -a_1,$$

e

$$r_1 \cdot r_2 = a_0, \quad \text{ou seja, } |r_1|^2 = a_0.$$

Assim, $a < 0$ se e somente se $a_1 > 0$. E neste caso, $a_0 > 0$ também. ■

As desigualdades $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ no espaço dos coeficientes a_1 e a_0 determinam o primeiro quadrante. A figura abaixo representa a região de estabilidade assintótica da solução trivial de um sistema de equação (2.2), se $r^2 + a_1r + a_0$ é seu polinômio característico.



Para $n = 3$, temos o polinômio:

$$r^3 + a_2r^2 + a_1r + a_0$$

e as condições de Hurwitz reduzem-se a $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ e $a_2 \cdot a_1 - a_0 > 0$.

Como os coeficientes do polinômio são todos reais e seu grau é ímpar, ao menos uma de suas raízes, digamos r_1 , é real. As outras duas podem ser também reais, ou eventualmente complexas. Neste caso, elas ocorrem em pares conjugados, digamos $r_2 = a + bi$ e $r_3 = a - bi$. Dessa forma, podemos fatorar o polinômio e reescreve-lo da seguinte maneira:

$$(r^2 + b_1r + b_0)(r + c_0) = 0$$

em que b_1 , b_0 , e $c_0 = -r_1$ são reais.

Note que,

$$a_2 = b_1 + c_0, \quad a_1 = b_0 + b_1c_0, \quad a_0 = b_0c_0$$

Então temos:

$$\begin{aligned} a_2a_1 - a_0 &= b_1a_1 + c_0a_1 - b_0c_0 \\ &= b_1(a_1 + c_0)^2 \end{aligned}$$

Uma vez que $a_1 > 0$ e $a_2a_1 - a_0 > 0$, temos b_1 também positivo. Agora, como $a_0 > 0$ e $a_0 = b_0c_0$, temos que b_0 e c_0 devem ter sinais iguais.

Mas eles são obrigatoriamente positivos, caso contrário violariamos a condição $b_0 + b_1c_0 = a_1 > 0$.

Por fim, como $c_0 > 0$, então $r_1 < 0$, e pelo caso $n = 2$, a positividade de b_1 e b_0 garante que a parte real das outras duas raízes do polinômio também são negativas.

Para $n = 4$, temos o polinômio

$$r^4 + a_3r^3 + a_2r^2 + a_1r + a_0$$

e as condições de Hurwitz reduzem-se a

$$a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0 \quad \text{e} \quad a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 > a_3^2 \cdot a_0 + a_1^2.$$

Se o polinômio tiver raízes complexas, então elas devem aparecer em pares conju-

gados. Assim, podemos fatorá-lo e obtemos:

$$(r^2 + b_1r + b_0)(r^2 + c_1r + c_0) = 0,$$

em que b_1 , b_0 , c_1 e c_0 são todos reais.

Note que:

$$a_3 = b_1 + c_1, \quad a_2 = b_1c_1 + b_0 + c_0, \quad a_1 = b_0c_1 + b_1c_0, \quad a_0 = b_0c_0.$$

Então temos:

$$\begin{aligned} a_3a_2a_1 &> a_3^2a_0 + a_1^2 = (a_3a_2 - a_1)a_1 - a_3^2a_0 > 0 \\ &= (b_1^2c_1 + b_1b_0 + b_1c_1^2 + c_1c_0)(b_0c_1 + b_1c_0) - (b_1^2 + 2b_1c_1 + c_1^2)b_0c_0 \\ &= b_0b_1^2c_1^2 + b_1^3c_0c_1 + b_0^2b_1c_1 + b_0b_1^2c_0 + b_0b_1c_1^3 + b_1^2c_0c_1^2 + b_0c_0c_1^2 + \\ &\quad + b_1c_0^2c_1 - b_0b_1^2c_0 - 2b_0b_1c_0c_1 - b_0c_0c_1^2 \\ &= b_1c_1(b_0^2 - 2b_0^2c_0 + c_0^2 + b_1b_0c_1 + b_0c_1^2 + b_1^2c_0 + b_1c_1c_0) \end{aligned}$$

ou

$$a_3a_2a_1 - a_1^2 - a_3^2a_0 = b_1c_1 [(b_0 - c_0)^2 + a_1a_3] > 0$$

Da desigualdade acima temos que $b_1c_1 > 0$. Como $b_1 + c_1 = a_3 > 0$ segue que b_1 e c_1 são ambos positivos.

Uma vez que $b_0c_0 = a_0 > 0$, b_0 e c_0 devem ter o mesmo sinal. Mas como $b_0c_1 + b_1c_0 = a_1 > 0$, temos que b_0 e c_0 são obrigatoriamente positivos.

Portanto, pelo caso $n = 2$, o polinômio de quarto grau tem todas as suas raízes com parte real negativa.

Observação: Podemos observar para os casos $n = 2, 3, 4$, que as condições de Hurwitz exigem $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$.

No entanto, a positividade de todos os coeficientes não é condição suficiente para que as partes reais de todas as raízes sejam negativas.

Por exemplo, para $r^3 + r^2 + r + 2 = 0$, temos:

$$a_3 = 1 > 0;$$

$$a_2 = 1 > 0;$$

$$a_1 = 1 > 0;$$

$$a_0 = 2 > 0.$$

Mas a última condição de Hurwitz para o polinômio de terceiro grau não é satisfeita, pois $a_2 \cdot a_1 - a_0 = 1 \cdot 1 - 2 = -1 < 0$.

Exemplo 12 Para que valores do parâmetro α a solução trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = -3x_1 \\ x_3' = \alpha x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

é assintoticamente estável?

Solução: O sistema pode ser reescrito como

$$\vec{y}' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{y},$$

ou seja, $\vec{y}' = A\vec{y}$.

A equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$ tem a forma:

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & 1 \\ -3 & -r & 0 \\ \alpha & 2 & -1 - r \end{vmatrix} = 0 \implies r^3 + r^2 - \alpha r + 6 = 0$$

Segundo o critério de Hurwitz, as condições de estabilidade assintótica são $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ e $a_2 \cdot a_1 - a_0 > 0$.

Estas condições neste caso se reduzem a $-\alpha - 6 > 0$, o que implica $\alpha < -6$.

Exemplo 13 A solução trivial $y = 0$ da equação

$$y^{(4)} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0$$

é assintoticamente estável?

Solução: A equação característica correspondente é:

$$r^4 + 5r^3 + 13r^2 + 19r + 10 = 0$$

Para um polinômio de quarto grau, as condições de Hurwitz são:

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 > a_3^2 \cdot a_0 + a_1^2.$$

As primeiras quatro condições estão satisfeitas. Vamos analisar então

$$a_3 a_2 a_1 > a_3^2 a_0 + a_1^2$$

Temos

$$5 \cdot 13 \cdot 19 > 5^2 \cdot 10 + 19^2 \Rightarrow 1235 > 611$$

Logo, a solução trivial da equação de quarta ordem é assintoticamente estável.

Exemplo 14 Para que valores dos parâmetros α e β , a solução trivial $y = 0$ da equação

$$y^{(4)} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0$$

é assintoticamente estável?

Solução: Das condições de Hurwitz, é necessário que

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0 \text{ e } a_3 a_2 a_1 > a_3^2 a_0 + a_1^2$$

Então devemos ter

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

e

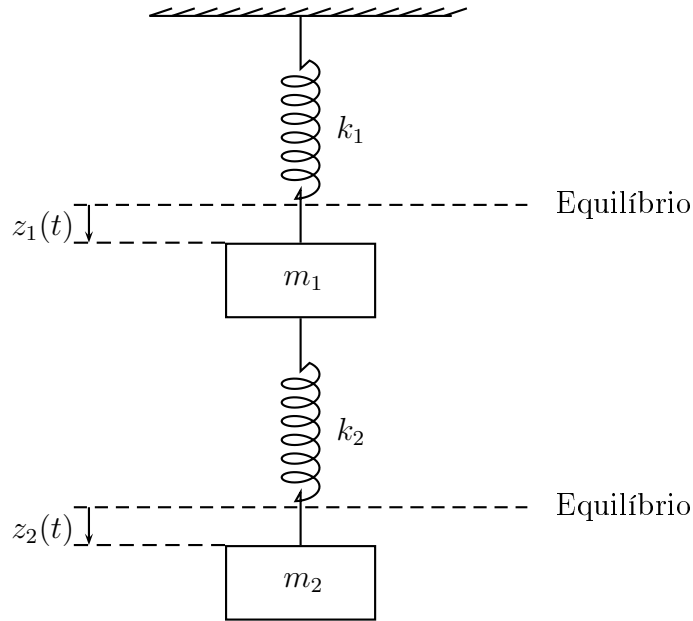
$$3 \cdot \alpha \cdot 2 > 3^2 \cdot \beta + 2^2$$

ou seja,

$$6\alpha > 9\beta + 4 \Rightarrow 9\beta - 6\alpha + 4 < 0$$

Logo, $\alpha > \frac{2}{3}$ e $\beta > 0$.

Exemplo 15 Sejam duas massas, m_1 e m_2 , suspensas conforme a figura a seguir:



z_1 e z_2 são suas respectivas distâncias, no tempo t , às suas posições de equilíbrio, k_1 e k_2 são as constantes das molas e, b_1 e b_2 são os coeficientes de atrito das duas massas. Esses números são todos positivos.

Aplicando a segunda Lei de Newton, obtemos:

$$\begin{cases} m_1 z_1'' = -k_1 z_1 - k_2 z_1 + k_2 z_2 - b_1 z_1' \\ m_2 z_2'' = k_2 z_1 - k_2 z_2 - b_2 z_2' \end{cases}$$

Decidir se as soluções do sistema tendem a zero quando $t \mapsto \infty$.

Solução: Vamos transformar o sistema de equações acima em uma sistema equivalente de equações de primeira ordem:

Seja $y_1 = z_1$, $y_2 = z'_1$, $y_3 = z_2$, $y_4 = z'_2$. Então temos:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1}y_1 - \frac{b_1}{m_1}y_2 + \frac{k_2}{m_1}y_3 \\ y'_3 = y_4 \\ y'_4 = \frac{k_2}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_3 - \frac{b_2}{m_2}y_4 \end{cases}$$

ou

$$\vec{y}' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{vmatrix} \vec{y}$$

em que $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

A equação característica desse sistema é dada por

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} - r & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} - r \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo em cofatores, obtemos:

$$r^4 + \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2}\right)r^3 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right)r^2 + \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \frac{b_2}{m_2}\right)r + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

Temos

$$\begin{aligned} a_3 &= \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2}\right) \\ a_2 &= \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1 \cdot b_2}{m_1 \cdot m_2}\right) \\ a_1 &= \left(\frac{b_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \cdot \frac{b_2}{m_2}\right) \\ a_0 &= \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2} \end{aligned}$$

As condições de Hurwitz $a_3 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ e $a_0 > 0$ são claramente satisfeitas, uma vez que $b_1, b_2, k_1, k_2, m_1, m_2$ são todos positivos.

Falta verificar se $a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 > a^3 \cdot a_0 + a_1^2$, ou seja,

$$(a_3 \cdot a_2 - a_1) \cdot a_1 - a_1^2 \cdot a_0 > 0$$

Vamos analisar então:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2} \right) \cdot \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{b_1 \cdot b_2}{m_1 \cdot m_2} \right) - \left(\frac{b_1}{m_1} \cdot \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \cdot \frac{b_2}{m_2} \right) \right] \cdot \\ & \quad \cdot \left(\frac{b_1}{m_1} \cdot \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \cdot \frac{b_2}{m_2} \right) - \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2} \right)^2 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2} = \\ & = \left[\left(\frac{b_1 k_1}{m_1^2} + \frac{b_1 k_2}{m_1^2} + \frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{b_1^2 b_2}{m_1^2 m_2} + \frac{b_2 k_1}{m_1 m_2} + \frac{b_2 k_2}{m_1 m_2} + \frac{b_2 k_2}{m_2^2} + \frac{b_1 b_2^2}{m_1 m_2^2} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{b_2 k_1}{m_1 m_2} + \frac{b_2 k_2}{m_1 m_2} \right) \right] \cdot \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \cdot \frac{b_2}{m_2} \right) - \\ & \quad - \left(\frac{b_1^2}{m_1^2} + \frac{2b_1 b_2}{m_1 m_2} + \frac{b_2^2}{m_2^2} \right) \cdot \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \\ & = \left(\frac{b_1 k_1}{m_1^2} + \frac{b_1 k_2}{m_1^2} + \frac{b_1^2 b_2}{m_1^2 m_2} + \frac{b_2 k_2}{m_2^2} + \frac{b_1 b_2^2}{m_1 m_2^2} \right) \cdot \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \cdot \frac{b_2}{m_2} \right) - \\ & \quad - \left(\frac{b_1^2}{m_1^2} + \frac{2b_1 b_2}{m_1 m_2} + \frac{b_2^2}{m_2^2} \right) \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = \\ & = \left(\frac{b_1^2 k_1 k_2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1 b_2 k_1^2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1 b_2 k_1 k_2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1^2 k_2^2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1 b_2 k_1 k_2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1 k_2^2 b_2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1^3 b_2 k_2}{m_1^3 m_2^2} + \frac{b_1^2 b_2^2 k_1}{m_1^3 m_2^2} + \right. \\ & \quad \left. \frac{b_1^2 b_2^2 k_2}{m_1^3 m_2^2} + \frac{b_1 b_2 k_2^2}{m_1 m_2^3} + \frac{b_2^2 k_1 k_2}{m_1 m_2^3} + \frac{b_2^2 k_2^2}{m_1 m_2^3} + \frac{b_1^2 b_2^2 k_2}{m_1^2 m_2^3} + \frac{b_1 b_2^3 k_1}{m_1^2 m_2^3} + \frac{b_1 b_2^3 k_2}{m_1^2 m_2^3} \right) - \\ & \quad - \left(\frac{b_1^2 k_1 k_2}{m_1^3 m_2} + \frac{2b_1 b_2 k_1 k_2}{(m_1 m_2)^2} + \frac{b_2^2 k_1 k_2}{m_1 m_2^3} \right), \end{aligned}$$

que pode ser reordenado como:

$$\begin{aligned} & \frac{b_1 b_2 k_1^2}{m_1^3 m_2} - \frac{2b_1 b_2 k_1 k_2}{(m_1 m_2)^2} + \frac{b_1 b_2 k_2^2}{m_2^3 m_1} + \frac{2b_1 b_2 k_1 k_2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1^2 k_2^2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1 b_2 k_2^2}{m_1^3 m_2} + \frac{b_1^3 b_2 k_2}{m_1^3 m_2^2} + \frac{b_1^2 b_2^2 k_1}{m_1^3 m_2^2} + \frac{b_1^2 b_2^2 k_2}{m_1^3 m_2^2} = \\ & = \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \left(\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right)^2 + \frac{b_1 k_2}{m_1^3 m_2} (2b_2 k_1 + b_1 k_2 + b_2 k_2) + \frac{b_1 b_2}{m_1^3 m_2^2} (b_1^2 k_2 + b_1 b_2 k_1 + b_1 b_2 k_2) + \\ & \quad + \frac{b_2^2 k_2^2}{m_1 m_2^3} + \frac{b_1 b_2^2}{m_1^2 m_2^3} (b_1 k_2 + b_2 k_1 + b_2 k_2). \end{aligned}$$

Como $b_1, b_2, k_1, k_2, m_1, m_2$, são todos positivos, a expressão acima é também positiva, satisfazendo a última condição de Hurwitz.

Logo as soluções tendem a zero quando $t \mapsto \infty$.

Exemplo 16 (O Atrator de Lorenz) Um problema importante em meteorologia e em outras aplicações de dinâmica dos fluidos trata do movimento de uma camada de fluido, como a atmosfera da Terra, que apresenta diferenças de temperatura entre as partes inferior e superior

Caso a diferença de temperatura ΔT seja pequena, não há uma movimentação significativa da camada de ar, mas se ΔT é suficientemente grande o ar quente sobe, deslocando o ar frio que está sobre ele, o que resulta em um movimento regular que se propaga. Se as diferenças de temperatura aumentam ainda mais, então o fluxo regular transforma-se em um movimento mais complexo e turbulento.

Edward N. Lorenz, um meteorologista americano, em 1963 ao investigar esse fenômeno, foi levado ao sistema não-linear autônomo de terceira ordem:

$$x'(t) = \sigma(-x + y)$$

$$y'(t) = rx - y - xz$$

$$z'(t) = -bz + xy,$$

em que σ chama-se o número de Prandtl e r chama-se o número de Rayleigh.

Essas equações são geralmente chamadas de equações de Lorenz. A variável x está relacionada à intensidade do movimento do fluido, enquanto as variáveis y e z estão relacionadas às variações de temperatura nas direções horizontal e vertical. Os parâmetros σ , r e b são todos reais e positivos (σ e b dependem do material e das propriedades geométricas da camada de fluido, e r é proporcional à diferença de temperatura ΔT).

Não existe um método direto para resolver as equações de Lorenz, no entanto utilizando o critério de Routh-Hurwitz podemos obter informações qualitativas sobre o comportamento das soluções próximo de um ponto de equilíbrio.

Vamos então encontrar os pontos de equilíbrio correspondentes, resolvendo o sistema algébrico:

$$\sigma x - \sigma y = 0$$

$$rx - y - xz = 0$$

$$-bz + xy = 0$$

Da primeira equação temos $y = x$. Eliminando y da segunda e terceira equações, obtemos

$$x(r - 1 - z) = 0 \quad (2.1.1)$$

$$-bz + x^2 = 0 \quad (2.1.2)$$

Da equação (2.1.1) ou $x = 0$ ou $(r - 1 - z) = 0$. Se $x = 0$, então em (2.1.2) temos $z = 0$.

Se $(r - 1 - z) = 0$, então $z = r - 1$, e aí para satisfazer (2.1.2) temos $x = \pm\sqrt{b(r - 1)}$.

Assim, encontramos três pontos de equilíbrio:

$$P_1 = (0, 0, 0), \quad P_2 = (\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1), \quad P_3 = (-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1).$$

Vamos analisar o comportamento das equações de Lorenz no ponto de equilíbrio P_2 . Análises análogas a que apresentaremos a seguir podem ser feitas com os pontos P_0 e P_3 .

Seja $r = 1 + \lambda$. Então P_2 se reduz a $P_2 = (\sqrt{b\lambda}, \sqrt{b\lambda}, \lambda)$ e o sistema inicial é reescrito como:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = (1 + \lambda - z)x - y \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

Este ainda continua sendo um sistema não-linear na 2ª e 3ª equação. Vamos então obter um sistema linear associado.

Seja

$$y' = g(x, y, z) = (1 + \lambda - z)x - y$$

e

$$z' = h(x, y, z) = xy - bz$$

Aproximando essas funções no ponto $P_2 = (\sqrt{b\lambda}, \sqrt{b\lambda}, \lambda)$ pelo polinômio de Taylor de primeiro grau obtemos:

$$g(x, y, z) \cong g(P_2) + g_x(P_2)(x - x_0) + g_y(P_2)(y - y_0) + g_z(P_2)(z - z_0)$$

Temos que:

$$g(P_2) = (1 + \lambda - \lambda)\sqrt{b\lambda} - \sqrt{b\lambda} = 0;$$

$$g_x(P_2) = 1 + \lambda - \lambda = 1$$

$$g_y(P_2) = -1;$$

$$g_z(P_2) = -\sqrt{b\lambda}$$

Logo,

$$g(x, y, z) \cong 0 + 1(x - \sqrt{b\lambda}) - (y - \sqrt{b\lambda}) - \sqrt{b\lambda}(z - \lambda)$$

$$g(x, y, z) \cong x - y - \sqrt{b\lambda}z + \lambda\sqrt{b\lambda}$$

Utilizando o mesmo procedimento para $h(x, y, z)$ obtemos:

$$h(x, y, z) \cong h(P_2) + h_x(P_2)(x - x_0) + h_y(P_2)(y - y_0) + h_z(P_2)(z - z_0).$$

Temos que:

$$h(P_2) = \sqrt{b\lambda}\sqrt{b\lambda} - b\lambda = 0;$$

$$h_x(P_2) = \sqrt{b\lambda};$$

$$h_y(P_2) = \sqrt{b\lambda};$$

$$h_z(P_2) = -b$$

Logo,

$$h(x, y, z) \cong 0 + \sqrt{b\lambda}(x - \sqrt{b\lambda}) + \sqrt{b\lambda}(y - \sqrt{b\lambda}) + (-b)(z - \lambda)$$

$$h(x, y, z) \cong \sqrt{b\lambda}x + \sqrt{b\lambda}y - bz - b\lambda$$

Dessa forma o sistema linear associado é:

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y + 0z \\ y' = x - y - \sqrt{b\lambda}z \\ z' = \sqrt{b\lambda}x + \sqrt{b\lambda}y - bz \end{cases}$$

e a matriz dos coeficientes $\mathcal{J}\vec{f}(P_2) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b\lambda} \\ \sqrt{b\lambda} & \sqrt{b\lambda} & -b \end{bmatrix}$ é chamada **Matriz Jacobiana** da função $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, com

$$f_1 = x' = \sigma(y - x),$$

$$f_2 = y' = (1 + \lambda - z)x - y,$$

$$f_3 = z' = xy - bz$$

Definição 4 Para uma função vetorial de 3 variáveis reais com valores em \mathbb{R}^3 , $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow R$, $i = 1, 2, 3$, a **Matriz Jacobiana** de \vec{f} em $P = (x_0, y_0, z_0)$ é a matriz:

$$\mathcal{J}\vec{f}(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(P) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(P) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(P) \end{bmatrix}.$$

O próximo teorema será enunciado sem demonstração. A prova pode ser encontrada no item [3] das referências bibliográficas.

Teorema 8 (Critério de Estabilidade Para Sistema Autônomos) Se P é ponto de equilíbrio de $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$, onde as componentes f_1, f_2, f_3 de \vec{f} têm derivadas parciais contínuas em uma vizinhança de P então:

- i) Se os autovalores da matriz jacobiana $\mathcal{J}\vec{f}(P)$ têm parte real negativa, P é ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$;
- ii) Se $A = \mathcal{J}\vec{f}(P)$ tem 1 autovalor com uma parte real positiva, P é ponto de equilíbrio instável para o sistema não linear $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$.

Voltemos às equações de Lorenz.

A equação característica associada aos sistema linear obtido é dada por:

$$\begin{vmatrix} -\sigma - r & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - r & -\sqrt{b\lambda} \\ \sqrt{b\lambda} & \sqrt{b\lambda} & -b - r \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$r^3 + (\sigma + b + 1)r^2 + b(\sigma + \lambda + 1)r + 2\sigma b\lambda = 0$$

Para que as soluções do sistema sejam assintoticamente estáveis as condições de Hurwitz exigem que:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0 \text{ e } a_2 \cdot a_1 > a_0$$

Temos

$$a_0 = 2\sigma b\lambda > 0$$

$$a_1 = b(\sigma + \lambda + 1) > 0$$

$$a_2 = (\sigma + b + 1) > 0,$$

pois σ, b, λ são todos positivos.

Vamos verificar $a_2 \cdot a_1 > a_0$:

$$(\sigma + b + 1)b(\sigma + \lambda + 1) > 2\sigma b\lambda$$

ou seja,

$$\lambda(b + 1 - \sigma) + (\sigma + 1)(\sigma + b + 1) > 0.$$

Assim, sob estas condições, o sistema linear é assintoticamente estável.

No entanto, nosso interesse é estudar o comportamento das soluções do sistema não-linear inicial.

Pelo item i) do Teorema 8, o sistema de Lorenz é assintoticamente estável em P_2 para as mesmas condições do sistema linearizado, ou seja, se $\lambda(b+1-\sigma)+(\sigma+1)(\sigma+b+1) > 0$, o que finaliza nossa análise.

Chama-se atrator o comportamento para o qual um sistema dinâmico converge, independentemente do ponto de partida.

Analisando graficamente as Equações de Lorenz, percebe-se que os trajetos a partir de quase todos os pontos iniciais possíveis acabam por cair em um mesmo conjunto. É por esse motivo que esse sistema também é conhecido por Atrator de Lorenz.

No entanto, por causa dos seus termos não-lineares, uma pequena variação na localização do ponto inicial afeta enormemente o trajeto obtido. Esta é uma característica do comportamento matemático chamado caos, e em um sistema dinâmico, surge quando dois pontos iniciais arbitrariamente próximos divergem exponencialmente de tal modo que o seu comportamento futuro é eventualmente imprevisível. Este fenômeno é também chamado Efeito Borboleta.

Lorenz descobriu que para certos valores dos parâmetros σ , r , e b , o sistema nunca tende para um comportamento previsível a longo prazo e que, por essa razão, não é possível também fazer previsões do tempo meteorológico a prazos extensos. Trata-se de um sistema caótico e a mais ínfima variação nas condições iniciais é capaz de produzir comportamentos futuros muito diferentes. Por isso, é possível, por exemplo, que o bater de asas de uma borboleta hoje em Tóquio possa provocar uma tempestade violenta sobre

Nova York em poucas semanas.

Lorenz também descobriu que, para certos valores de σ , r , e b , as trajetórias nunca acabam em um ponto fixo ou em uma órbita regular e, contudo, nunca divergem para o infinito. O sistema é imprevisível, nunca assume o mesmo estado duas vezes, mas ao mesmo tempo converge para um atrator tridimensional determinado. Por isso, o atrator gerado pelas equações de Lorenz é chamado de **Atrator Estranho**.

Resolvendo as equações de Lorenz através da função **ODE 45** do MATLAB (esta função é um método numérico explícito, de um passo, de Runge Kutta de 4ª e 5ª ordens, para resolver problemas de valor inicial (PVI)) e tomando os valores $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$ obtemos o gráfico a seguir, o qual ilustra o comportamento que descrevemos.

Comandos:

```
function yp=lorenzde(t,y)
```

```
yp=[10*(y(2)-y(1));28*y(1)-y(2)-y(1)*y(3);y(1)*y(2)-(8/3)*y(3)];
```

```
>> t0=0;tf=50;
```

```
>> y0=[0;1;0];
```

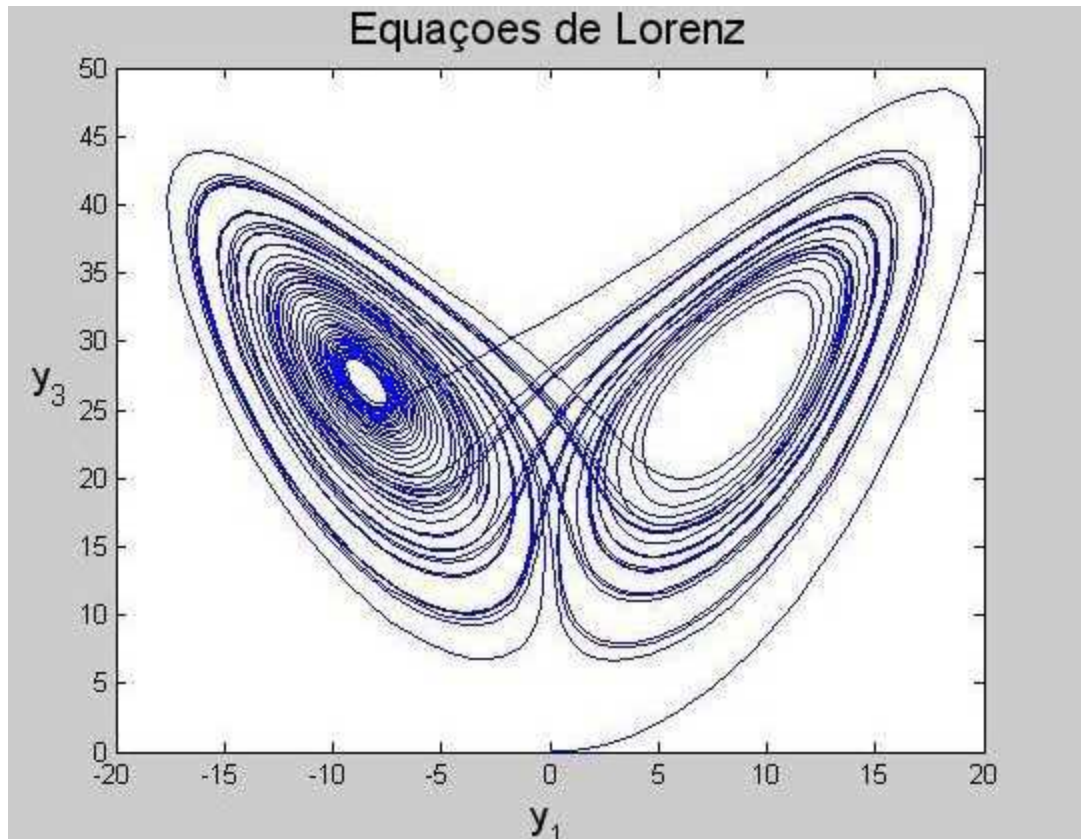
```
>> [t,y]=ode45('lorenzde',[0 50],y0);
```

```
>> plot(y(:,1),y(:,3))
```

```
>> xlabel('y_1','FontSize',14)
```

```
>> ylabel('y_3','FontSize',14,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
```

```
>> title('Equações de Lorenz','FontSize',16)
```



Agora, mantendo os valores $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e tomando $r = 5$ e $r = 15$, respectivamente, obtemos os seguintes gráficos das soluções de Lorenz:

```
function yp=lorenzde(t,y)
```

```
yp=[10*(y(2)-y(1));5*y(1)-y(2)-y(1)*y(3);y(1)*y(2)-(8/3)*y(3)];
```

```
>> t0=0;tf=50;
```

```
>> y0=[0;1;0];
```

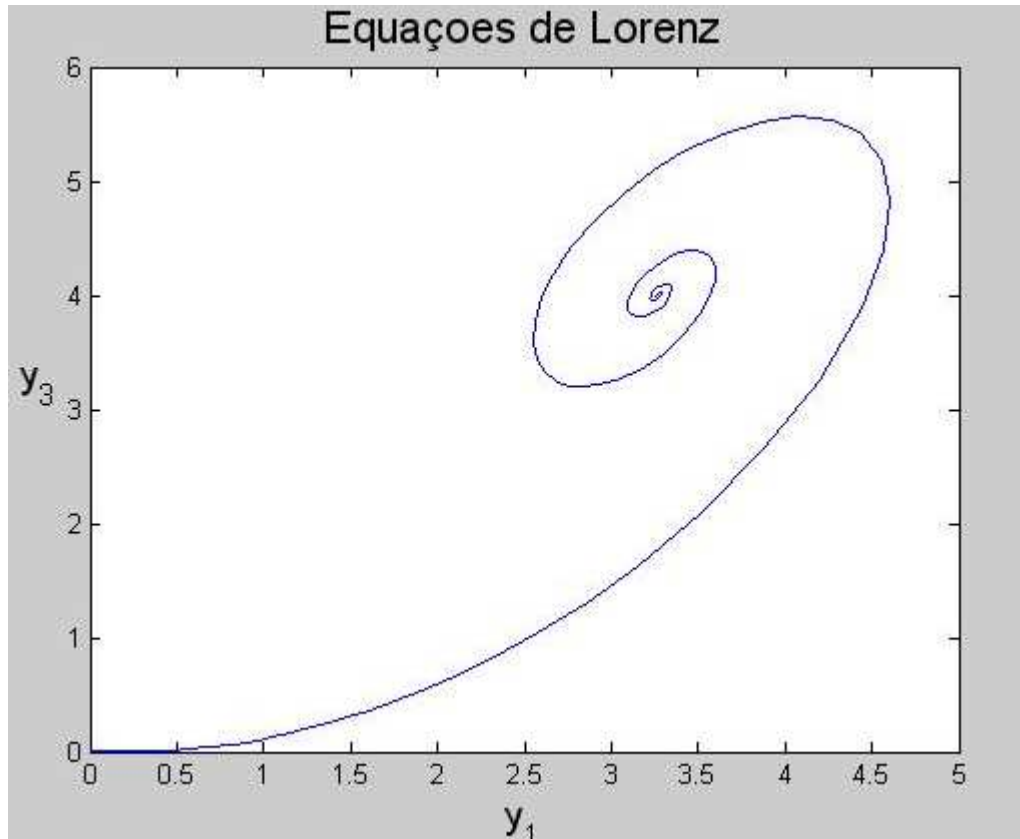
```
>> [t,y]=ode45('lorenzde',[0 50],y0);
```

```
>> plot(y(:,1),y(:,3))
```

```
>> xlabel('y_1','FontSize',14)
```

```
>> ylabel('y_3','FontSize',14,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
```

```
>> title('Equações de Lorenz','FontSize',16)
```



```
function yp=lorenzde(t,y)
```

```
yp=[10*(y(2)-y(1));15*y(1)-y(2)-y(1)*y(3);y(1)*y(2)-(8/3)*y(3)];
```

```
>> t0=0;tf=50;
```

```
>> y0=[0;1;0];
```

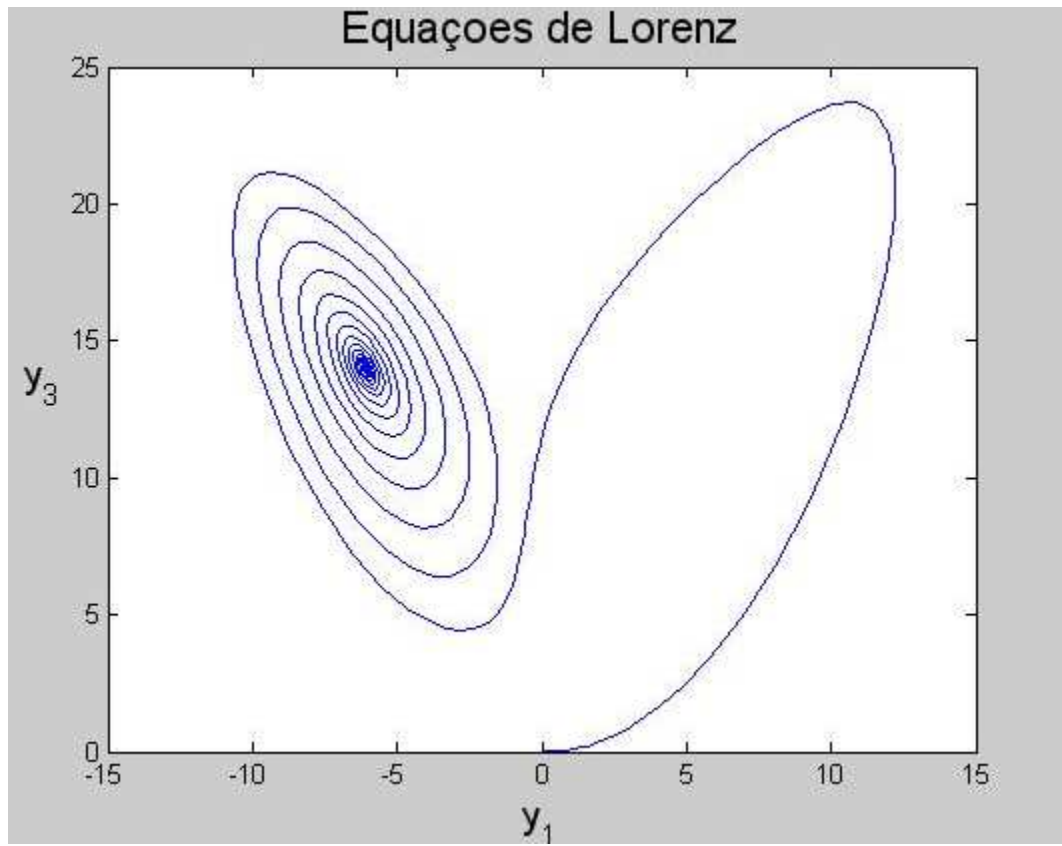
```
>> [t,y]=ode45('lorenzde',[0 50],y0);
```

```
>> plot(y(:,1),y(:,3))
```

```
>> xlabel('y_1','FontSize',14)
```

```
>> ylabel('y_3','FontSize',14,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
```

```
>> title('Equações de Lorenz','FontSize',16)
```



Conclusão

O enfoque sobre equações diferenciais, que foi dado ao final da disciplina de Cálculo III, trouxe-me curiosidade e motivação para aprofundar o conhecimento sobre a resolução desse tipo de equação. Por esse motivo decidi escrever meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) sobre este assunto.

As equações diferenciais abrangem uma área bastante ampla, e por isso o trabalho está focado principalmente no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) Lineares de ordem n , com coeficientes constantes, que são da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

e nas condições de estabilidade de suas soluções.

No Capítulo 1 estudamos os conceitos fundamentais e alguns métodos de resolução de EDO's lineares, sempre ilustrados com exemplos. No Capítulo 2, além de estudarmos a estabilidade de sistemas de EDO's lineares, vimos que é possível prever o comportamento das soluções sem precisar resolver as equações.

Finalizamos o trabalho com um breve estudo sobre o fenômeno descrito pelas Equações de Lorenz, e mostramos como os critérios de estabilidade de Hurwitz podem ser aplicados também em sistemas não-lineares.

Espero que esse trabalho sirva de material de apoio a outros estudantes que pretendam estudar equações diferenciais ordinárias lineares e os critérios de estabilidade de Routh-Hurwitz.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, William; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Editora Guanabara Koogan, Rio de Janeiro: 1990.
- [2] SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica, Vol.I*. Editora McGraw-Hill, São Paulo: 1996.
- [3] BELLMAN, R. E.; COOKE, K. L. *Differential-difference equations*. Academic Press, New York: 1963.
- [4] DRIVER, R. *Introduction to Ordinary Differential Equations*. Harper & Row, Publishers, New York: 1978.
- [5] ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Editora Mir, Moscou: 1969.
- [6] COOK, Peter A. *Nonlinear Dynamical Systems*. Editora Prentice Hall Int. Services, Great Britain: 1986.