



Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Curso de Matemática

# Colinearidade e Concorrência na Geometria Euclidiana Plana

Klaryssa Junckes Gualberto

Orientador: Ms. José Luiz Rosas Pinho

Florianópolis

2 de dezembro de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Curso de Matemática

# Colinearidade e Concorrência na Geometria Euclidiana Plana

Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

**Klaryssa Junckes Gualberto**

Florianópolis

2 de dezembro de 2007

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 73/CCM/07.

---

**Prof<sup>a</sup>. Ms. Carmen Suzane Comitre Gimenez**

Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

---

**Prof. Ms. José Luiz Rosas Pinho**

Depto. de Matemática\ UFSC (Orientador)

---

**Prof. Ms. Antônio Vladimir Martins**

Depto. de Matemática\ UFSC

---

**Prof. Ms. Nereu Estanislau Burin**

Depto. de Matemática\ UFSC

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me dar saúde e forças para enfrentar e superar todos os obstáculos e desafios enfrentados durante esses quatro anos de caminhada.

A toda a minha família, em especial, aos meus pais, por todo o apoio, incentivo, amor e carinho dedicados sempre.

Aos meus amigos, em especial, ao meu namorado, pela compreensão, companheirismo e pelas palavras de conforto e incentivo.

Ao meu orientador, professor Pinho, por todo o seu conhecimento, apoio, disponibilidade e dedicação.

Enfim, a todos que colaboraram com a realização deste trabalho e, sobretudo, que contribuíram com a minha formação.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Resultados Básicos</b>	<b>9</b>
1.1 Paralelismo . . . . .	9
1.2 Teorema da base média para triângulos . . . . .	11
1.3 Principais centros de um triângulo . . . . .	13
1.3.1 O Baricentro . . . . .	13
1.3.2 O Circuncentro . . . . .	15
1.3.3 O Ortocentro . . . . .	15
1.3.4 O Incentro . . . . .	16
1.3.5 Os Excentros . . . . .	17
1.3.6 Incírculo, Circuncírculo e Excírculos . . . . .	18
1.4 Teorema das bissetrizes . . . . .	22
1.4.1 Teorema das bissetrizes internas: . . . . .	22
1.4.2 Teorema das bissetrizes externas: . . . . .	24
1.5 Tangência ( retas e circunferências ) . . . . .	25
1.5.1 Segmentos tangentes a uma circunferência . . . . .	26
1.5.2 Tangentes comuns a duas circunferências . . . . .	26
1.5.3 Um teorema sobre tangentes . . . . .	31
1.6 Ângulos na circunferência . . . . .	32
1.6.1 Ângulo central . . . . .	32
1.6.2 Ângulo inscrito . . . . .	33
1.6.3 Ângulo semi-inscrito ou ângulo de segmento . . . . .	35

1.7	Potência de ponto . . . . .	36
1.8	Eixo radical . . . . .	38
1.9	Conjugados harmônicos . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Colinearidade</b>	<b>46</b>
2.1	Teorema de Menelaus . . . . .	46
2.2	Teorema de Desargues . . . . .	50
2.3	Teorema de Pascal . . . . .	52
2.4	Teorema de Pappus . . . . .	54
2.5	Reta de Simson . . . . .	56
2.6	Reta de Euler . . . . .	57
2.7	Outras Aplicações do Teorema de Menelaus . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Concorrência</b>	<b>66</b>
3.1	Teorema de Ceva . . . . .	66
3.2	Teorema de Brianchon . . . . .	69
3.3	Ponto de Gergonne . . . . .	72
3.4	Ponto de Nagel . . . . .	72
3.5	Outras Aplicações do Teorema de Ceva . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Circunferência dos nove pontos</b>	<b>77</b>
4.1	A Circunferência dos nove pontos . . . . .	77
4.2	Inversão . . . . .	79
4.2.1	Definição . . . . .	79
4.2.2	Equivalências para inversão. . . . .	80
4.2.3	Inversão de retas e circunferências . . . . .	83
4.2.4	Invariância por inversão . . . . .	85
4.2.5	Inversão como uma transformação conforme . . . . .	86
4.3	Teorema de Feuerbach . . . . .	87
	<b>Conclusão</b>	<b>91</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>92</b>

# Introdução

Resultados de colinearidade e concorrência muitas vezes não são vistos no Ensino Médio nem em cursos de licenciatura em Matemática, pois suas demonstrações são consideradas longas e complicadas. Para que se possa provar um teorema é preciso que se tenha uma compreensão razoável da exposição contida nele, bem como alguns argumentos básicos e adequados. Assim com a ajuda de dois teoremas clássicos, o teorema de Menelaus e o teorema de Ceva, que serão apresentados no decorrer do trabalho, e com alguns resultados básicos de Geometria, elas podem ser simplificadas tornando-se mais curtas e simples.

A Geometria Euclidiana, é estudada nas escolas desde o Ensino Fundamental, e foi construída baseada no texto do matemático grego Euclides, Elementos, escrito por volta do ano 300 a.C. Esta geometria usa o método dedutivo (ou axiomático), que consiste em iniciar com certas afirmações chamadas "axiomas" ou "postulados", as quais aceitamos sem justificativas, e deduzir, através das demonstrações, outras afirmações, como os teoremas.

Com o objetivo de apresentar aos interessados alguns teoremas da Geometria Euclidiana que não são vistos na graduação, e utilizar argumentos que facilitem suas demonstrações, pretende-se com este trabalho levantar questões e discussões que proporcionarão o desenvolvimento de assuntos da geometria, complementando e auxiliando no seu aprendizado.

O trabalho está dividido em quatro capítulos, sendo que no primeiro é feita uma abordagem de alguns resultados básicos da geometria plana como paralelismo, tangência, potência de ponto, eixo radical, entre outros, que serão úteis no decorrer dos capítulos seguintes.

No segundo capítulo será apresentado um importante teorema da Geometria Euclidiana, o teorema de Menelaus, e a partir deste mostraremos outros resultados de colinearidade como o teorema de Desargues, o teorema de Pascal, o teorema de Pappus e outras aplicações.

No terceiro capítulo apresentaremos alguns casos de concorrência, como o ponto de Gergone e de Naguel, além dos pontos de encontro das medianas, bissetrizes e alturas de um triângulo que podem rapidamente ser demonstrados utilizando-se mais um importante teorema da Geometria Euclidiana, o teorema de Ceva. Ainda neste capítulo demonstraremos o teorema de Brianchon, o teorema dual ao teorema de Pascal na Geometria Projetiva, que é apresentado aqui em uma versão euclidiana para o caso de circunferências. Optamos por fazer este tipo de abordagem, evitando utilizar os resultados da Geometria Projetiva, que seriam por si só assunto suficiente para um outro trabalho.

No quarto capítulo estudaremos a circunferência dos nove pontos e acrescentaremos o conceito de Inversão, uma transformação não isométrica que preserva ângulos e possui algumas propriedades especiais, para em seguida demonstrarmos um belíssimo teorema devido ao matemático alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), o teorema de Feuerbach, que envolve a circunferência dos nove pontos e as circunferências inscrita e excritas de um triângulo. Este capítulo foi acrescentado no trabalho pensando em uma extensão do termo Colinearidade como sendo pontos comuns a uma mesma curva.

No decorrer do texto o leitor poderá encontrar ainda, em notas de rodapé, um pouco da história e da biografia de alguns dos nomes citados que o ajudarão a compreender melhor o momento em que estes teoremas surgiram, qual a sua repercussão na época e qual a sua importância atual.

# Capítulo 1

## Resultados Básicos

Daremos aqui alguns resultados básicos da Geometria Euclidiana que serão utilizados nos capítulos seguintes na demonstração de alguns teoremas e proporcionarão uma melhor exploração dos resultados apresentados no decorrer do trabalho.

### 1.1 Paralelismo

O postulado das paralelas, segundo Euclides (versão de John Playfair) nos diz:

*Por um ponto fora de uma reta passa uma, e somente uma, paralela àquela reta.*

A existência de paralela pode ser provada, na versão axiomática de Hilbert, a partir do Teorema do ângulo externo (veja a primeira parte do Teorema 1.1 a seguir). Assim, naquela versão, enuncia-se o Axioma das Paralelas como:

*Por um ponto não incidente a uma reta passa, no máximo, uma paralela àquela reta.*

Este axioma separa a Geometria Euclidiana da Geometria Hiperbólica.

O resultado prático do postulado (ou do axioma) das paralelas é o seguinte:

**Teorema 1.1** *Duas retas cortadas por uma transversal  $t$  formam dois ângulos alternos internos congruentes se e somente se as retas são paralelas.*

**Demonstração.**( $\Rightarrow$ ) Sejam  $r$  e  $s$  duas retas cortadas por uma transversal nos pontos

$P$  e  $Q$  respectivamente. Sejam  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  ângulos alternos internos congruentes.

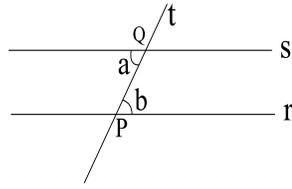


Figura 1

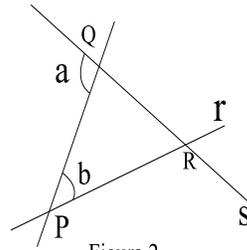


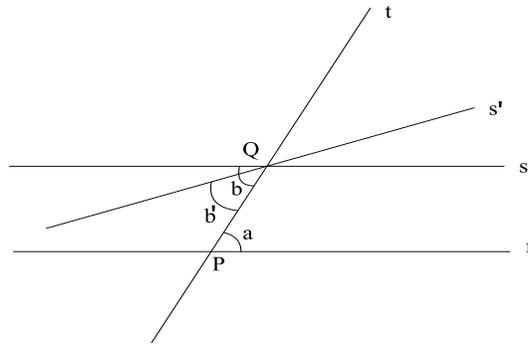
Figura 2

Se  $r$  e  $s$  se interceptassem em algum ponto  $R$ , como na figura 2, elas formariam um triângulo  $\triangle RQP$  do qual  $\hat{a}$  é um ângulo externo, sendo  $\hat{b}$  um ângulo interno não adjacente a ele.

Pelo Teorema do Ângulo Externo  $\hat{a} > \hat{b}$ , o que contradiz nossa hipótese.

Logo  $r$  e  $s$  são paralelas.

( $\Leftarrow$ ) Consideremos as retas paralelas  $r$  e  $s$ , e uma transversal  $t$  que as corta nos pontos  $P$  e  $Q$  respectivamente.



Suponhamos que os ângulos alternos internos  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  não sejam congruentes.

Seja  $s'$  uma reta que passa por  $Q$  formando com  $r$  e  $t$  os ângulos alternos internos  $\hat{a}$  e  $\hat{b}'$  congruentes.

Pela primeira parte deste teorema, a reta  $s'$  é paralela à reta  $r$ . Disso e da hipótese temos, pois, passando por  $Q$ , duas retas distintas  $s$  e  $s'$ , ambas paralelas à reta  $r$ .

Isto contradiz o Postulado das Paralelas. Logo  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são congruentes.



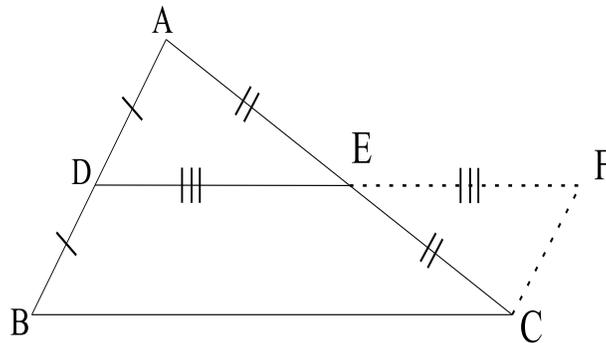
**Colorolário 1.1.1** *Dois ângulos que têm seus lados respectivamente paralelos são congruentes ou são suplementares. Reciprocamente, se dois ângulos são congruentes ou suplementares, e têm um de seus lados respectivamente paralelos, então os outros lados são também paralelos.*

## 1.2 Teorema da base média para triângulos

O teorema a seguir pode ser demonstrado facilmente usando semelhança de triângulos. Apresentaremos aqui uma demonstração que, embora mais trabalhosa, utiliza somente resultados de congruência.

**Teorema 1.2 (Teorema da base média)** *O segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a medida igual a metade do comprimento daquele lado.*

**Demonstração.** Consideremos o triângulo  $\triangle ABC$  com  $D$  e  $E$  pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente.



Vamos mostrar que  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  e que  $DE = \frac{1}{2}BC$ . Seja  $F$  o ponto da semi-reta oposta a  $\overline{ED}$  tal que  $EF = DE$ . Pelo caso de congruência de triângulos *L.A.L.*, temos  $\triangle EFC \cong \triangle EDA$ . Portanto  $\widehat{DAE} \cong \widehat{FCE}$ .

Pelo Teorema (1.1) obtemos  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ . Como por hipótese  $AD = BD$ , e da congruência dos triângulos  $\triangle EFC$  e  $\triangle EDA$  vale  $DA = FC$ , então  $BD = FC$ .

Logo  $BDFC$  é um paralelogramo, e daí  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ . Além disso, temos

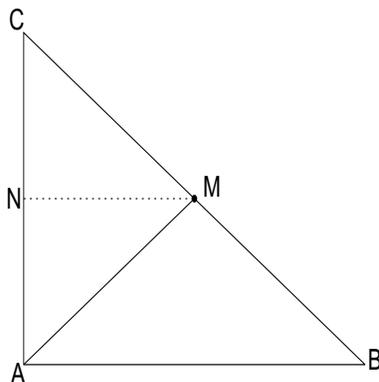
$$BC = DF = DE + EF = 2 \cdot DE.$$

Logo,  $DE = \frac{1}{2}BC$ . ■

O seguinte resultado é consequência do teorma 1.2:

**Colorolário 1.2.1** *Um triângulo possui uma mediana relativa a um lado com medida igual à medida desse lado se, e somente se esse triângulo for retângulo.*

**Demonstração.** Seja  $\triangle ABC$  triângulo retângulo com  $\hat{A} = 90^\circ$ , e sejam  $M$  o ponto médio da hipotenusa  $\overline{BC}$  e  $N$  o ponto médio ao cateto  $\overline{AC}$ .

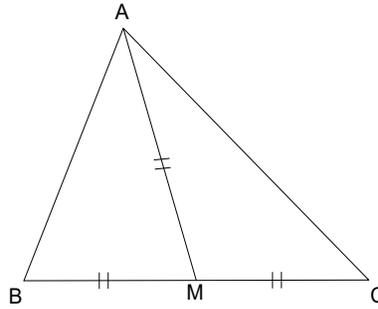


Então, pelo teorema (1.2),  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ . Segue-se que  $\overline{MN}$  é mediana e altura relativa ao lado  $\overline{AC}$  do triângulo  $\triangle ACM$ . Logo, este triângulo é isósceles com  $AM = CM = BM$ , ou seja,  $AM = \frac{BC}{2}$ .

Reciprocamente, suponha que em um triângulo  $\triangle ABC$  tenhamos  $AM = \frac{BC}{2}$ , onde  $M$  é o ponto médio de  $BC$ .

Então os triângulos  $\triangle ABM$  e  $\triangle ACM$  são isósceles co  $AM = BM$  e  $AM = CM$ . Segui-se que  $\hat{B\hat{A}M} = \hat{A\hat{B}M}$  e  $\hat{C\hat{A}M} = \hat{A\hat{C}M}$ . Mas  $\hat{B\hat{A}C} + \hat{A\hat{B}M} + \hat{A\hat{C}M} = 180^\circ$  e, como  $\hat{B\hat{A}C} = \hat{B\hat{A}M} + \hat{C\hat{A}M}$ , temos:

$$2(\hat{B\hat{A}M} + \hat{C\hat{A}M}) = 180^\circ \quad \text{ou} \quad \hat{A} = \hat{B\hat{A}M} + \hat{C\hat{A}M} = 90^\circ.$$



## 1.3 Principais centros de um triângulo

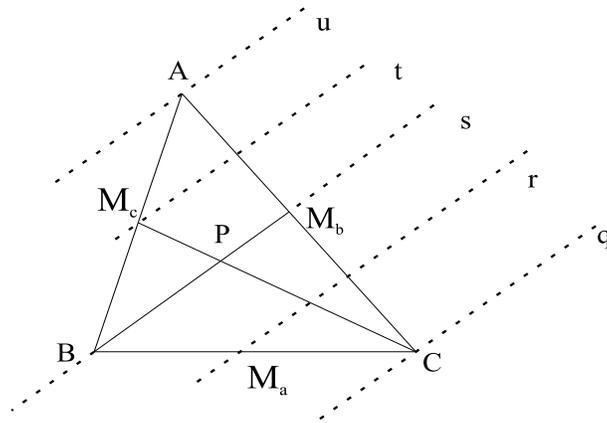
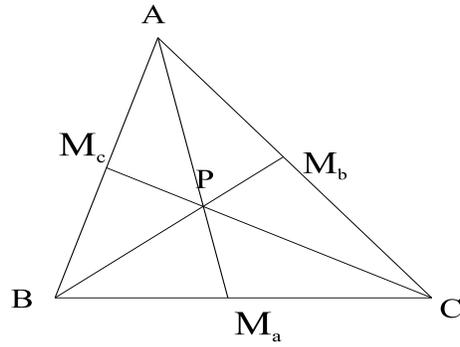
Nesta seção iremos falar sobre os principais centros de um triângulo, alguns deles determinados por cevianas como o ortocentro, o baricentro e o incentro. Vale observar que uma ceviana é qualquer segmento que une um vértice a qualquer ponto do lado oposto.

### 1.3.1 O Baricentro

**Teorema 1.3** *As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto. Este ponto é denominado **baricentro** do triângulo.*

**Demonstração.** Consideremos, no triângulo  $ABC$ , os pontos  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  como pontos médios de  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Vamos demonstrar que existe um ponto  $P$  que está em  $\overline{AM_a}$ ,  $\overline{BM_b}$  e  $\overline{CM_c}$ , respectivamente, tal que  $AP = \frac{2}{3}AM_a$ ,  $BP = \frac{2}{3}BM_b$  e  $CP = \frac{2}{3}CM_c$ .

Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  com  $s = \overleftrightarrow{BM_b}$  retas paralelas que dividem o lado  $\overline{AC}$  em quatro segmentos congruentes. Consideramos as retas  $u$  e  $q$ , ambas paralelas a  $r$ ,  $s$  e  $t$ , passando por  $A$  e  $C$ , respectivamente.



A reta  $t$  divide o segmento  $AB$  em dois segmentos congruentes, e, portanto, o ponto  $M_c$  está na reta  $t$ ; além disso, as retas  $r$  e  $s$  dividem a mediana  $CM_c$  em três segmentos congruentes, e portanto, se  $P$  é o ponto de intersecção das medianas  $\overline{BM_b}$  e  $\overline{CM_c}$ , temos  $CP = \frac{2}{3}CM_c$ .

Do mesmo modo, com retas paralelas a  $\overleftrightarrow{AM_a}$  mostramos que se  $P'$  é a intersecção das medianas  $\overline{CM_c}$  e  $\overline{AM_a}$ , então  $CP' = \frac{2}{3}CM_c$ .

Portanto, pelo Teorema da Localização de Pontos obtemos  $P' = P$ , e assim as três medianas são concorrentes.

Como sabemos agora que a mediana  $\overline{AM_a}$  passa po  $P$  e que a mediana  $\overline{BM_b}$  passa por  $P'$ , podemos concluir que  $AP = \frac{2}{3}AM_a$  e  $BP = \frac{2}{3}BM_b$ .

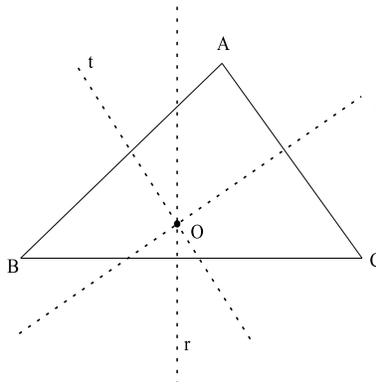
■

### 1.3.2 O Circuncentro

As mediatrizes de um segmento tem a seguinte propriedade: ela é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidades do segmento.

**Teorema 1.4** *As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um ponto equidistante dos três vértices do triângulo. Este ponto é denominado **circuncentro**, o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.*

**Demonstração.** Consideremos o triângulo  $\triangle ABC$ .



Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  as mediatrizes dos três lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Se  $r$  e  $s$  fossem paralelas, então  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  seriam paralelos, e não teríamos um triângulo. Portanto  $r$  e  $s$  interceptam-se num ponto  $O$ .

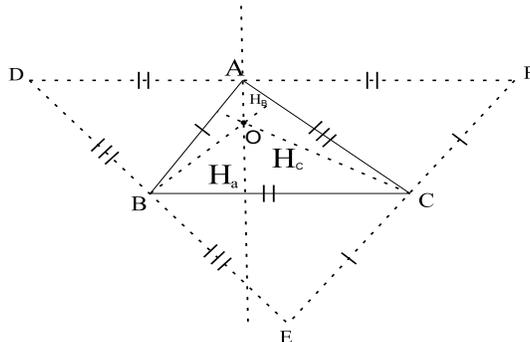
Pela propriedade da mediatriz temos que  $OB = OC$ , pois  $O$  pertence a  $r$ , e  $OC = OA$ , pois  $O$  pertence a  $s$ . Portanto temos  $OA = OB$ . Novamente pela propriedade da mediatriz temos que  $O$  pertence a  $t$ . Assim,  $O$  pertence às três mediatrizes e  $OA = OB = OC$ .

■

### 1.3.3 O Ortocentro

**Teorema 1.5** *As três alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado **ortocentro**.*

**Demonstração.** Consideremos o triângulo  $ABC$  e a reta suporte  $AH_a$  da altura correspondente ao lado  $a$  do triângulo.



Tracemos por cada vértice do triângulo  $ABC$  uma reta paralela ao lado oposto. Estas três retas determinam um triângulo  $DEF$ , como na figura. Dessa construção, os quadriláteros  $BCFA$  e  $BCAD$  são paralelogramos e, portanto,  $BC = AF$  e  $BC = DA$ . Logo,  $A$  é ponto médio de  $\overline{DF}$ . Concluimos que a altura  $\overleftrightarrow{AH_a}$ , no triângulo  $ABC$  é a mediatriz de  $\overline{DF}$ . Analogamente, as outras duas alturas do triângulo  $ABC$  são as mediatrizes dos outros dois lados do triângulo  $DEF$ . Como as mediatrizes são concorrentes, temos que também as três alturas são concorrentes.

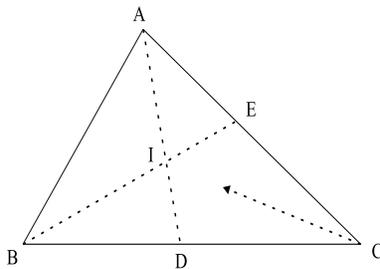
■

### 1.3.4 O Incentro

A bissetriz de um ângulo apresenta a seguinte propriedade: a bissetriz de um ângulo exceto sua origem, é o lugar geométrico dos pontos do interior do ângulo equidistante dos lados do ângulo.

**Teorema 1.6** *As bissetrizes dos ângulos de um triângulo são concorrentes em um ponto equidistante dos três lados do triângulo. Chamado **incentro**, o centro da circunferência inscrita no triângulo.*

**Demonstração.** Consideremos o triângulo  $ABC$ .



Seja  $I$  a intersecção das bissetrizes  $\overrightarrow{AD}$  e  $\overrightarrow{BE}$ . Dos ângulos  $\angle A$  e  $\angle B$  respectivamente. Pela propriedade da bissetriz, temos que  $I$  equidista de  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  por estar na bissetriz de  $\hat{A}$ , e equidista de  $\overleftrightarrow{BA}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  por estar na bissetriz de  $\hat{B}$ . Portanto,  $I$  equidista de  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ . Novamente, pela propriedade da bissetriz, temos que  $I$  pertence à bissetriz de  $\hat{C}$ . Assim, Temos que as três bissetrizes têm o ponto  $I$  em comum e  $I$  equidista de  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ .

■

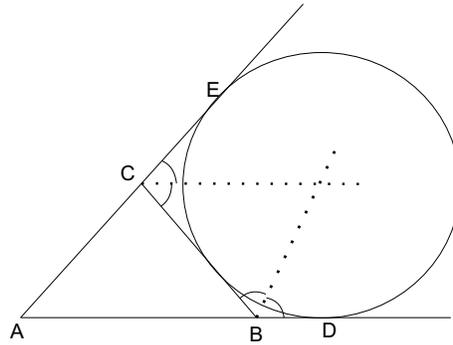
### 1.3.5 Os Excentros

Considere num triângulo  $ABC$  os seus ângulos externos nos vértices  $B$  e  $C$  e que têm não só os lados como intersecção com o ângulo  $\hat{A}$  e que denotaremos por  $\widehat{B'}$  e  $\widehat{C'}$ . De outra forma: se tivermos  $D$  no prolongamento  $\overrightarrow{AB}$ , deixando  $B$  entre  $A$  e  $D$ , então  $\widehat{B'} = C\hat{B}D$ . E, para  $E$  no prolongamento  $\overrightarrow{AC}$ , deixando  $C$  entre  $A$  e  $E$ , então  $\widehat{C'} = B\hat{C}E$ .

**Teorema 1.7** *As bissetrizes dos ângulos  $\widehat{B'}$  e  $\widehat{C'}$  são concorrentes em um ponto denominado excentro relativo ao vértice  $A$  e isto acontece num ponto que equidista lado  $BC$  e dos lados do ângulo  $\hat{A}$ .*

**Demonstração.** Vamos mostrar que tais bissetrizes não podem ser paralelas. Posto que, se isto fosse verdadeiro, figura abaixo, por ser ângulos colaterais internos, teríamos:

$$m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) = 360^\circ. \quad (1.1)$$



E, pela propriedade do ângulo externo de um triângulo,  $m(\widehat{B'}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})$  e  $m(\widehat{C'}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$  e que, ao substituirmos em 1.1, dis que:  $2m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ .

Isto é,

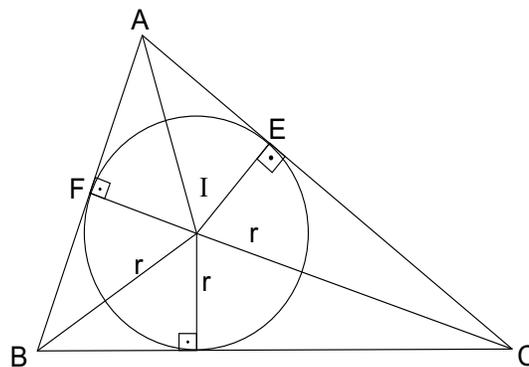
$$m(\widehat{A}) + \overbrace{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}^{\text{soma dos ângulos internos} = 180^\circ} = 360^\circ \iff m(\widehat{A}) = 180^\circ,$$

o que é um absurdo. E a outra conclusão segue por propriedade da bissetriz.

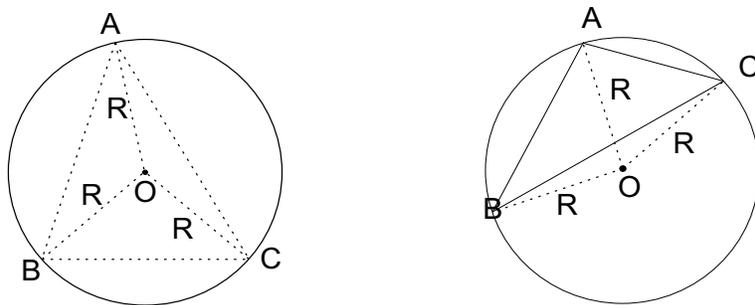
### 1.3.6 Incírculo, Circuncírculo e Excírculos

Definição 1.1 :

- 1) O **incírculo** de um triângulo  $ABC$  é o círculo cuja circunferência tangência os 3 lados deste triângulo. Esta circunferência é denominada **inscrita** a este triângulo; o centro e o raio desta circunferência são denominados respectivamente de **incentro** e **inraio** do triângulo  $ABC$ . Na figura abaixo  $I$  é o **incentro** e  $r$  é o **inraio**.



- 2) O **circuncírculo** de um triângulo  $ABC$  é o círculo cuja circunferência tangência "passa" pelos 3 vértices deste triângulo. Esta circunferência é denominada de **circunscrita** a este triângulo; o centro e o raio desta circunferência são denominados respectivamente de **circuncentro** e **circunraio** do triângulo  $ABC$ . Na figura abaixo  $O$  é o **circuncentro** e  $R$  é o **circunraio**



- 3) O **excírculo** de um triângulo  $ABC$  é o círculo cuja circunferência é exterior ao triângulo  $ABC$ , mas tangente a um lado e aos prolongamentos dos outros dois lados.

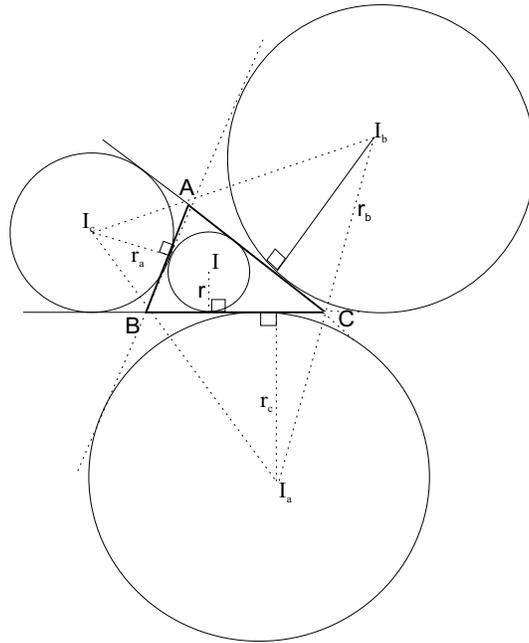
Esta circunferência é denominada de **exinscrita** ao triângulo  $ABC$ .

O centro e o raio desta circunferência são respectivamente denominados de **excentro** e **exraio** do triângulo  $ABC$ .

Na figura abaixo temos:

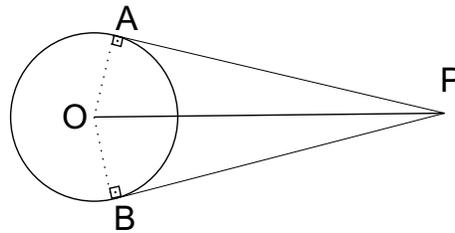
Onde  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  são os centros das exinscritas ao triângulo  $ABC$  tangentes respectivamente aos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Onde  $r_a$ ,  $r_b$  e  $r_c$  são os raios das exinscritas ao triângulo  $ABC$  tangentes respectivamente aos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . O ponto  $I$  é o centro do incírculo e  $r$  o seu inraio.



**Propriedades:**

**P1.** Os segmentos tangentes a uma circunferência conduzidos por ponto qualquer externo são congruentes.



**P2.** O centro do **incírculo** do triângulo  $ABC$  é a intersecção das bissetrizes internas.

**P3.** O centro do **circuncírculo** do triângulo  $ABC$  é a intersecção das mediatrizes dos lados deste triângulo.

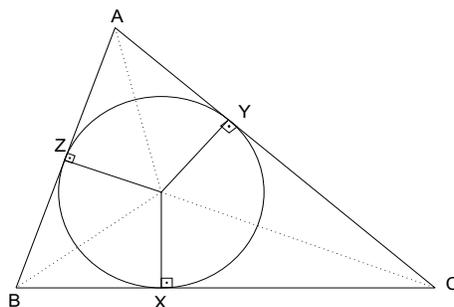
**P4.** O centro de um **excírculo** do triângulo  $ABC$  é a intersecção de suas bissetrizes externa e uma interna.

**P5.** Seja  $ABC$  um triângulo com incírculo tangenciando os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  em  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  respectivamente. Se este triângulo tem lados de comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ , e semiperímetro  $p$  então:

$$\overline{AY} = \overline{AZ} = p - a$$

$$\overline{BZ} = \overline{BX} = p - b$$

$$\overline{CX} = \overline{CY} = p - c$$

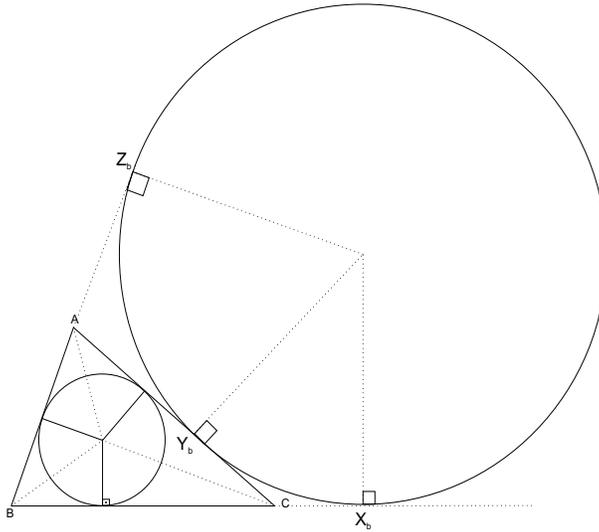


**P6.** Seja  $ABC$  um triângulo com um excírculo tangenciando o lado  $CA$  em  $Y_b$ , o prolongamento de  $BC$  em  $X_b$  e o prolongamento de  $BA$  em  $Z_b$ . Se este triângulo tem lados de comprimento  $a$ ,  $b$  e  $c$  com  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ , e semiperímetro  $p$ , então:

$$\overline{CY_b} = \overline{CX_b} = p - a$$

$$\overline{AY_b} = \overline{AZ_b} = p - c$$

$$\overline{BZ_b} = \overline{BX_b} = p$$

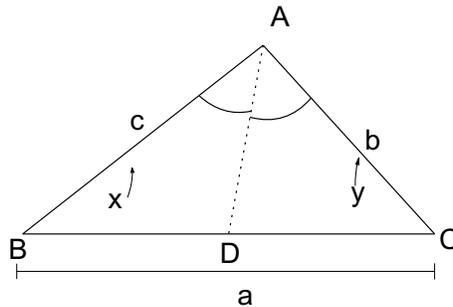


## 1.4 Teorema das bissetrizes

### 1.4.1 Teorema das bissetrizes internas:

**Teorema 1.8** *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.*

O teorema deve ser entendido da seguinte maneira.



Seja  $ABC$  o triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ ,  $\overline{AD}$  uma bissetriz interna (conforme a figura),  $DB = x$  e  $DC = y$ , teremos:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{x} = \frac{b}{y}.$$

O lado  $BC = a$  é dividido em dois segmentos aditivos, pois  $\overline{DB} + \overline{DC} = \overline{BC}$ , ou seja,  $x + y = a$ .

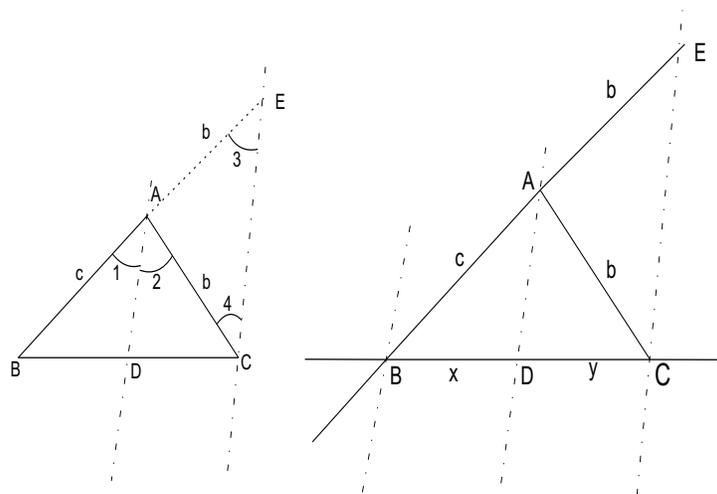
E com esta nomenclatura temos, então:

*Hipótese*

*Tese*

$$\overline{AD} \text{ bissetriz interna do } \triangle ABC \implies \frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

**Demonstração.**



Conduzimos por  $C$  uma paralela à bissetriz  $\overline{AD}$ , determinando um ponto  $E$  na reta  $\overleftrightarrow{AB}$  ( $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ ).

Fazendo  $\widehat{BAD} = \widehat{1}$ ,  $\widehat{DAC} = \widehat{2}$ ,  $\widehat{AEC} = \widehat{3}$  e  $\widehat{ACE} = \widehat{4}$ , temos:

$$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \implies \widehat{1} \equiv \widehat{3} \text{ (correspondentes)}$$

$$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \implies \widehat{2} \equiv \widehat{4} \text{ (alternos internos).}$$

Como por hipótese  $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$ , decorre que  $\widehat{3} \equiv \widehat{4}$ .

$$\widehat{3} \equiv \widehat{4} \implies \triangle ACE \text{ é isósceles de base } \overline{CE} \implies \overline{AE} \equiv \overline{AC} \implies AE = b.$$

Considerando  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{BE}$  como transversais de um feixe de reta paralelas (identificado por  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ ) e aplicando o Teorema de Tales, vem:

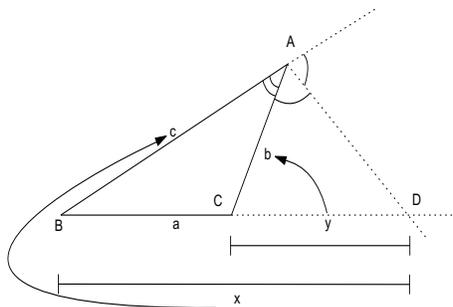
$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} \quad \text{ou seja} \quad \frac{c}{x} = \frac{b}{y}.$$

■

## 1.4.2 Teorema das bissetrizes externas:

**Teorema 1.9** *Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto então ela divide este lado oposto externamente em segmentos cuja razão é igual à razão dos lados adjacentes.*

Em outras palavras;



sendo  $ABC$  o triângulo de lados  $a, b$  e  $c$ ,  $\overline{AD}$  uma bissetriz externa com  $D$  na reta  $\overleftrightarrow{BC}$  (conforme a figura),  $DB = x$  e  $\overline{DC} = y$ , teremos:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

O lado  $BC = a$  é dividido externamente em segmentos subtrativos, pois  $\overline{DB} - \overline{DC} = \overline{BC}$ , ou seja,  $x - y = a$ .

Com esta nomenclatura, temos:

*Hipótese*

*Tese*

$$\overline{AD} \text{ bissetriz externa do } \triangle ABC \implies \frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

**Demonstração.**

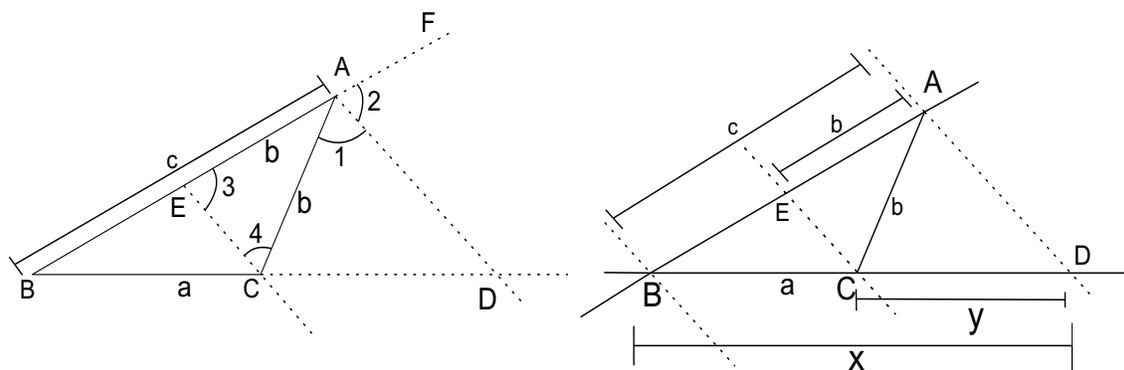
Conduzimos por  $C$  uma paralela à bissetriz  $\overline{AD}$ , determinando um ponto  $E$  na reta  $\overleftrightarrow{AB}$  ( $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ ).

Fazendo  $\widehat{CAD} = \widehat{1}$ ,  $\widehat{DAF} = \widehat{2}$ ,  $\widehat{AEC} = \widehat{3}$  e  $\widehat{ACE} = \widehat{4}$ , temos:

$$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \implies \widehat{2} \equiv \widehat{3} \text{ (correspondentes)}$$

$$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \implies \widehat{1} \equiv \widehat{4} \text{ (alternos internos).}$$

Como por hipótese  $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$ , decorre que  $\widehat{3} \equiv \widehat{4}$ .



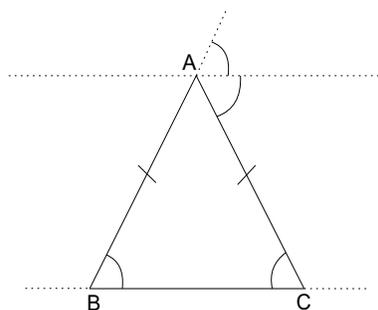
$\widehat{3} \equiv \widehat{4} \implies \triangle ACE$  é isósceles de base  $\overline{CE} \implies \overline{AE} \equiv \overline{AC} \implies AE = b$ .

Considerando  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{BE}$  como transversais de um feixe de reta paralelas (identificado por  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ ) e aplicando o Teorema de Tales, vem:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \quad \text{ou seja} \quad \frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

■

**Nota:** Se o triângulo  $ABC$  é isósceles de base  $\overline{BC}$ , então a bissetriz do ângulo externo em  $A$  é paralela à base  $\overline{BC}$  e reciprocamente.



## 1.5 Tangência ( retas e circunferências )

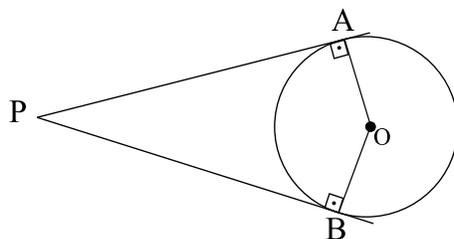
Uma tangente a uma circunferência é uma reta no plano da circunferência que a intercepta em um único ponto. Tal ponto é chamado de ponto de tangência da

reta com a circunferência. (Esta definição de tangência é exclusiva para circunferências, o caso geral de tangente a uma curva qualquer é mais complexo e exige conceitos de cálculo).

Uma reta é tangente a uma circunferência, se e somente se, ela é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de tangência.

### 1.5.1 Segmentos tangentes a uma circunferência

**Teorema 1.10** *Os segmentos tangentes a uma circunferência passando por um mesmo ponto externo têm o mesmo comprimento.*



**Demonstração.** Seja  $P$  um ponto exterior a circunferência de centro  $O$ . Sejam  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  os segmentos tangentes à circunferência de centro  $O$ . Temos os triângulos retângulos  $\triangle POA$  e  $\triangle POB$ . Como os lados  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  são concorrentes (raio da circunferência) e o lado  $\overline{OP}$  é comum, então pelo caso hipotenusa-cateto de semelhança de triângulos retângulos, temos que  $\triangle POA \cong \triangle POB$ , e portanto  $\overline{PA} = \overline{PB}$ . Além disso, temos que  $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$  e  $\widehat{APO} = \widehat{BPO}$ .

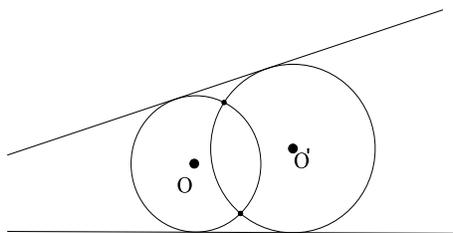
■

### 1.5.2 Tangentes comuns a duas circunferências

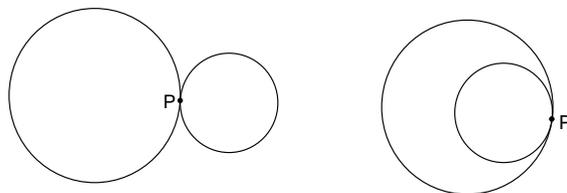
Considere duas circunferências de centros  $O$  e  $O'$  e raios  $r$  e  $r'$  respectivamente.

Uma reta que é tangente a duas circunferências é denominada tangente comum a estas circunferências. Temos os seguintes casos:

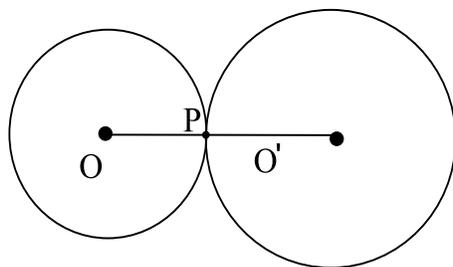
- a) Se duas circunferências se interceptam em dois pontos, então elas possuem duas retas tangentes comuns:



- b) Se duas circunferências se interceptam em um único ponto, então elas são ditas circunferências tangentes. Neste caso o ponto comum é chamado ponto de tangência. Se as duas circunferências possuem raios e são tangentes, então elas podem se tangenciar externamente ou internamente.



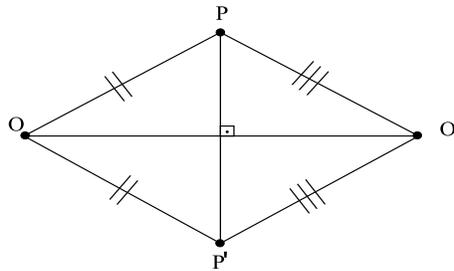
**Teorema 1.11** *Seja  $O$  e  $O'$  os centros de duas circunferências tangentes e seja  $P$  o ponto de tangência. Mostre que  $P$ ,  $O$  e  $O'$  são colineares.*



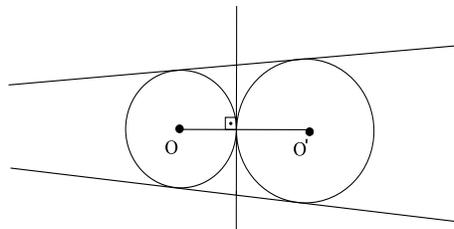
a demonstração a seguir é válida tanto para o caso de circunferências tangentes exteriormente como interiormente.

**Demonstração.** Suponha que  $O$ ,  $O'$  e  $P$  não sejam colineares. Então, se  $P'$  é o

ponto simétrico de  $P$  em relação a reta  $\overleftrightarrow{OO'}$ , teremos que  $OP' = OP$  e  $O'P' = O'P$  (por congruência de triângulos). Logo  $P'$  seria ponto comum, distinto de  $P$ , às duas circunferências, e essas circunferências não seriam tangentes.

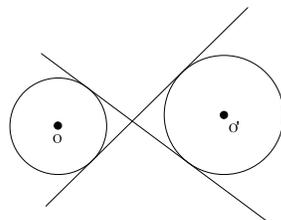


No caso das circunferências tangentes, existem três retas tangentes comuns a elas: duas externas e uma é perpendicular à parte dos centros das circunferências no ponto de tangência.

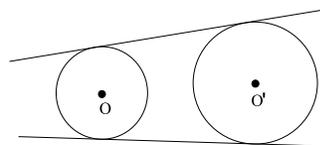


c) Se duas circunferências forem exteriores então há dois casos de tangentes comuns: duas internas e duas externas.

Tangentes comuns internas

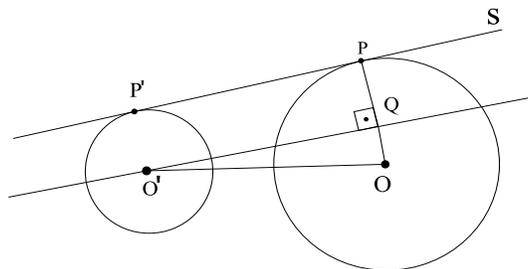


Tangentes comuns externas



**Teorema 1.12** *Se duas circunferências são exteriores então os segmentos das tangentes comuns internas são iguais e os segmentos das tangentes comuns externas são iguais.*

**Demonstração.** Sejam  $O$  e  $O'$  on centros de duas circunferências exteriores de raio  $r$  e  $r'$  respectivamente e seja  $s$  uma reta tangente comum externa às duas circunferências respectivamente nos pontos  $P$  e  $P'$ . Suponha  $r > r'$ .

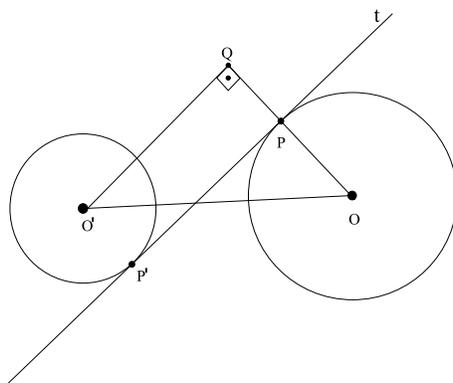


Seja  $\overleftrightarrow{O'Q}$  uma reta paralela a  $s$  com  $Q$  pertencente a  $\overline{OP}$ .

Do  $\triangle OO'Q$  temos:  $(OO')^2 = (O'Q)^2 + (OQ)^2 = (PP')^2 + (r - r')^2$ . Logo,  $(PP')^2 = (OO')^2 - (r - r')^2$ . O resultado é o mesmo para a outra tangente externa.

No caso em que  $r = r'$   $OO'P'P$  será um retângulo e  $PP' = OO'$ .

Seja agora  $t$  uma reta tangente comum interna às duas circunferências de centro  $O$  e  $O'$  respectivamente nos pontos  $P$  e  $P'$ .



Seja  $\overleftrightarrow{O'Q}$  uma reta paralela a  $t$  com  $Q$  um ponto pertencente a  $\overleftrightarrow{OP}$ .

Então  $OQ = OP + PQ = OP + O'P' = r + r'$ .

Do  $\triangle OO'Q$  temos:  $(O'Q)^2 + (OQ)^2 = (PP')^2 + (r + r')^2 = (OO')^2$ .

Logo,  $(PP')^2 = (OO')^2 - (r + r')^2$ .

O resultado é análogo para a outra tangente interna.

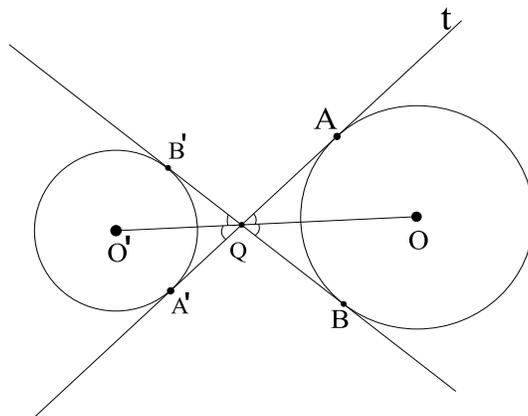
■

**Obs:** Note que as tangentes internas e externa só dependem das distâncias dos centros e dos raios das circunferências. Note ainda que, pelos resultados obtidos acima os segmentos de tangentes externas serão sempre maiores do que os segmentos de tangentes internas.

O resultado a seguir é o primeiro caso de colinearidade que apresentamos e que não necessita de teorema de Menelaus para sua demonstração.

**Teorema 1.13** *Os centros de duas circunferências externas e os pontos de intersecção das tangentes comuns internas são colineares. Além disso, se os raios das circunferências forem distintos então os centros das circunferências e os pontos de intersecção das tangentes comuns, internas e externas, são colineares.*

**Demonstração.** Considere  $Q$  o ponto de intersecção das duas tangentes comuns internas às duas circunferências.



Sabemos que  $\widehat{AQO} = \widehat{BQO}$  e que  $\widehat{A'QO'} = \widehat{B'QO'}$ .

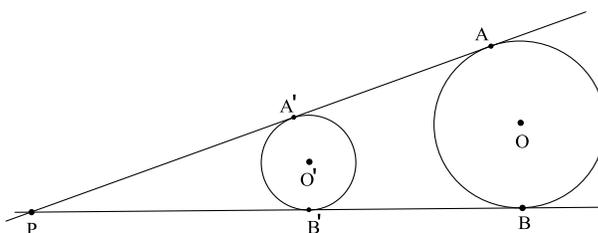
Como  $\widehat{AQB} = \widehat{A'QB'}$  (opostos pelo vértice).

Então  $\widehat{AQO} = \widehat{BQO} = \widehat{A'QO'} = \widehat{B'QO'}$ .

Segue que:  $\widehat{B'QO'} + \widehat{B'QA} + \widehat{AQO} = \widehat{B'QA} + \widehat{AQO} + \widehat{BQO} = 180^\circ$ .

Logo os pontos  $O'$ ,  $Q$  e  $O$  são colineares.

Considere agora  $P$  o ponto comum às duas tangentes comuns externas às duas circunferências.



Sabemos que  $\widehat{APO} = \widehat{BPO}$  e que  $\widehat{A'PO'} = \widehat{B'PO'}$ .

Segue-se que a reta  $\overleftrightarrow{PO'}$  passa por  $O$ , ou seja,  $P$ ,  $O'$  e  $O$  são colineares.

■

os pontos de intersecção das tangentes externas e internas são chamados **centros de semelhança** externo e interno respectivamente.

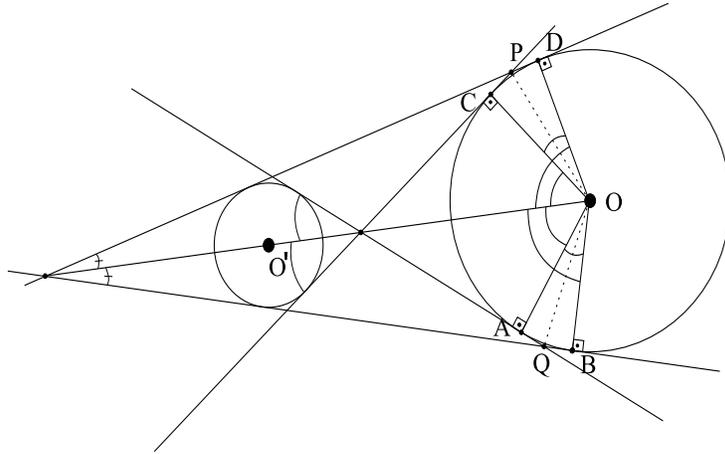
### 1.5.3 Um teorema sobre tangentes

**Teorema 1.14** *Sejam  $P$  e  $Q$  respectivamente pontos de intersecção de cada uma das tangentes internas e cada uma das tangentes externas comuns a duas circunferências de centros  $O$  e  $O'$ .*

*Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  os pontos de tangência representados na figura.*

*Então  $PC = PD = QA = QB$ .*

**Demonstração.** Sabemos que  $PC = PD$  e que  $QA = QB$ .



Temos que  $O'\hat{O}B = O'\hat{O}D$  e  $O'\hat{O}A = O'\hat{O}C$ .

Logo  $A\hat{O}B = O'\hat{O}B - O'\hat{O}A = O'\hat{O}D - O'\hat{O}C = C\hat{O}D$ .

Mas  $A\hat{O}Q = B\hat{O}Q$  e  $C\hat{O}P = D\hat{O}P$ .

Tomando os triângulos  $\triangle AOQ$  e  $\triangle COP$  temos:

$$\begin{cases} OA = OC & \text{(raios);} \\ A\hat{O}Q = C\hat{O}P \\ O\hat{A}Q = O\hat{C}P = 90^\circ \end{cases} .$$

Logo pelo caso cateto-ângulo agudo de triângulos retângulos temos que

$\triangle AOQ \cong \triangle COP$ .

Assim  $QA = PC$ .

Portanto  $PC = QA = QB = PD$ .

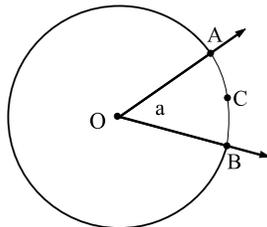


## 1.6 Ângulos na circunferência

### 1.6.1 Ângulo central

Em uma circunferência, o ângulo central é aquele cujo vértice é o centro da circunferência. Na figura, o ângulo  $a$  é um ângulo central. Em uma circunferência de centro  $O$ , um ângulo central determina em seu interior um arco  $AB$ , e dizemos que  $AB$

é o arco correspondente ao ângulo  $\widehat{AOB}$ . A medida de um arco  $AB$  correspondente a um ângulo central  $\angle AOB$  é a medida  $\widehat{AOB}$  desse ângulo.



## 1.6.2 Ângulo inscrito

**Definição 1.2** *um ângulo é dito **inscrito** numa circunferência se seu vértice é um ponto da circunferência e seus lados interceptam a circunferência em dois pontos distintos do vértice.*

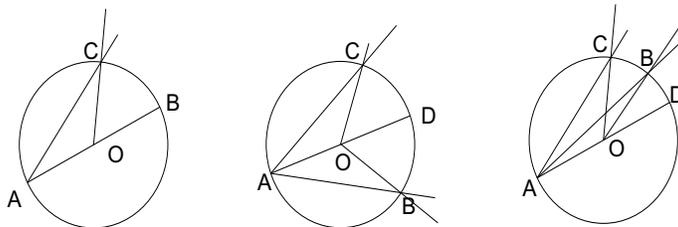
*O arco determinado pelos dois pontos distintos e que não contém o vértice do ângulo inscrito é dito **arco subentendido pelo ângulo** ou que **o ângulo subentende o arco**.*

**Teorema 1.15** *A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é igual a metade da medida do arco subentendido por este ângulo.*

**Demonstração.** A demonstração será feita considerando três casos particulares, a saber:

- (i) um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro,
- (ii) o ângulo é dividido pelo diâmetro com extremidade em seu vértice,
- (iii) o ângulo inscrito é dividido pelo diâmetro com extremidade em seu vértice.

**Caso (i).** Seja  $\widehat{BAC}$  o ângulo inscrito com vértice em  $A$ . Suponhamos que  $AB$  é o diâmetro, isto é,  $O \in AB$ . Assim  $m(\widehat{BC}) = \widehat{BOC}$ . Como  $\overline{CO} = \overline{AO}$ , o triângulo  $AOC$  é isósceles com vértices em  $O$  e daí  $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ . Como  $\widehat{BOC}$  é ângulo externo ao triângulo  $AOC$ , temos que  $\widehat{BOC} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} = 2 \cdot \widehat{OAC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$ . Logo:



$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}m(\widehat{BC}).$$

Provamos assim o teorema no caso (i).

Suponhamos agora que nenhum dos lados do ângulo inscrito contenha um diâmetro. Seja  $AD$  o diâmetro com extremidade no vértice  $A$  do ângulo inscrito. Pelo caso (i) temos que

$$\frac{1}{2}B\widehat{OD} = B\widehat{AD} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}D\widehat{OD} = D\widehat{AC}. \quad (1.2)$$

Temos nesta situação que considerar os casos (ii) e (iii).

**Caso (ii):**  $AD$  divide o ângulo inscrito. Neste caso,  $B\widehat{AC} = B\widehat{AD} + D\widehat{AC}$ .

Daqui e de (1.2), segue que

$$B\widehat{AC} = \frac{1}{2}B\widehat{OD} + \frac{1}{2}D\widehat{OC} = \frac{1}{2}(B\widehat{OD} + D\widehat{OC}) = \frac{1}{2}B\widehat{OC}$$

e, daí,  $B\widehat{AC} = \frac{1}{2}m(\widehat{BC})$ , provando o caso (ii).

**Caso (iii):**  $AD$  não divide o ângulo inscrito. No caso em que  $AB$  divide o ângulo  $D\widehat{AC}$  temos que  $D\widehat{AC} = D\widehat{AB} + B\widehat{AC}$ . Daqui e de (1.2), segue que  $\frac{1}{2}D\widehat{OC} = \frac{1}{2}B\widehat{OD} + B\widehat{AC}$ . Como  $D\widehat{OC} = D\widehat{OB} + B\widehat{OC}$ , obtemos

$$\frac{1}{2}(D\widehat{OB} + B\widehat{OC}) = \frac{1}{2}B\widehat{OD} + B\widehat{AC},$$

logo,

$$B\widehat{AC} = \frac{1}{2}B\widehat{OC} = \frac{1}{2}m(\widehat{BC}).$$

O caso em que é  $AC$  que divide o ângulo  $B\widehat{AD}$  pode ser tratado de forma análoga e é deixada para o leitor como exercício.

■

### 1.6.3 Ângulo semi-inscrito ou ângulo de segmento

**Definição 1.3** *Ângulo semi-inscrito* relativo a uma circunferência é um ângulo que tem vértice na circunferência, um lado secante e outro lado tangente à circunferência.

Sejam  $A, B$  pontos distintos de  $C(O, r)$  e  $t$  a reta tangente à  $C(O, r)$  em  $A$ . Seja  $C$  um ponto de  $t$  distinto de  $A$ ; o ângulo com vértice  $A$  e lados definidos pelas semi-retas  $S_{(AB)}$  e  $S_{(AC)}$  é um ângulo semi-inscrito e o denotaremos por  $\widehat{tAB}$ . O arco  $\widehat{AB}$  que tem um ponto no interior de  $\widehat{tAB}$  é chamado **arco correspondente** ao ângulo  $\widehat{tAB}$ .

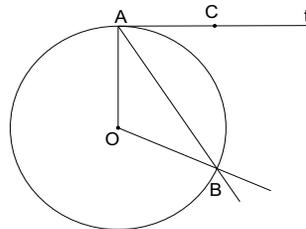
**Teorema 1.16** *A medida de um ângulo semi-inscrito é igual à metade da medida do seu arco correspondente.*

**Demonstração.** *Vamos dividir a demonstração em três casos:*

- (i)  $\widehat{CAB}$  é agudo;
- (ii)  $\widehat{CAB}$  é reto;
- (iii)  $\widehat{CAB}$  é obtuso.

**Caso (i):**  $\widehat{CAB}$  é agudo. O triângulo  $AOB$  é isósceles e  $\widehat{BAO} + \widehat{AOB} + \widehat{OBA} = 180^\circ$ . Como  $\widehat{BAO} = \widehat{OBA}$ , segue que  $2 \cdot \widehat{BAO} = 180^\circ - \widehat{AOB}$  e, então,

$$\widehat{BAO} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOB}. \quad (1.3)$$



Sendo  $t$  tangente à circunferência em  $A$ , temos que  $\widehat{CAB} + \widehat{BAO} = 90^\circ$  ou

$$\widehat{BAO} = 90^\circ - \widehat{CAB}. \quad (1.4)$$

De (1.3) e (1.4), vem que

$$C\hat{A}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{1}{2}m(\hat{A}B)$$

e o caso (i) está provado.

**Caso (ii):**  $C\hat{A}B$  é reto. Neste caso,  $AB$  é diâmetro e  $m(\hat{A}B) = 180^\circ$ . Isto prova (ii).

**Caso (iii):**  $C\hat{A}B$  é obtuso. Como o suplemento de  $t\hat{A}B$  é agudo, aplicando a este o caso (i), concluímos a demonstração. ■

## 1.7 Potência de ponto

A partir de agora, representaremos uma circunferência  $C$  de centro  $O$  e raio  $r$  por  $C = C(O; r)$ .

**Definição 1.4** *Seja  $C$  uma circunferência,  $P$  um ponto e  $s$  uma reta que corta  $C$  em  $A$  e  $B$  (incluindo os casos  $A = B$ ). A potência de  $P$  com relação a  $C$  é  $\pm PA \cdot PB$ , onde usamos  $+$  para o caso em que  $P$  seja exterior a  $C$  e  $-$  para o caso em que  $P$  seja interior a  $C$ .*

**Teorema 1.17 (Potência de Ponto)** *Dados uma circunferência  $C$  e um ponto  $P$ . se uma reta  $s$  passa por  $P$  e corta  $C$  nos pontos  $A$  e  $B$ , então o produto  $PA \cdot PB$  é constante.*

**Demonstração.** Seja  $O$  o centro de  $C$  e  $R$  o seu raio. Seja  $P$  um ponto não pertencente a  $C$  com  $PO = d$ . Consideremos uma secante  $PAB$  e o ponto  $M$ , médio de  $AB$ . Façamos  $MA = MB = m$  e, observando que  $OM$  é perpendicular a  $AB$ , podemos escrever:

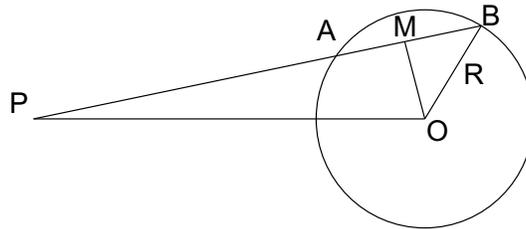
a) se  $P$  é exterior a  $C$ ,

$$PA \cdot PB = (PM - m)(PM + m)$$

$$PA \cdot PB = PM^2 - m^2$$

$$PA \cdot PB = PM^2 + OM^2 - (m^2 + OM^2)$$

$$PA \cdot PB = d^2 - R^2$$



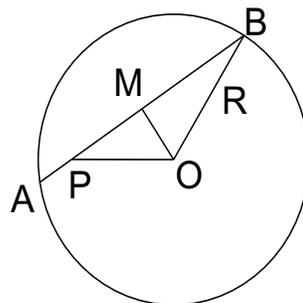
b) se  $P$  é interior a  $C$ ,

$$-PA \cdot PB = -(PM - m)(PM + m)$$

$$PA \cdot PB = PM^2 - m^2$$

$$PA \cdot PB = PM^2 + OM^2 - (m^2 + OM^2)$$

$$PA \cdot PB = d^2 - R^2$$



Se  $P$  pertence à circunferência, então ou  $A$  ou  $B$  coincide com  $P$ , um dos dois segmentos tem comprimento zero e a potência de  $P$  é igual a zero.

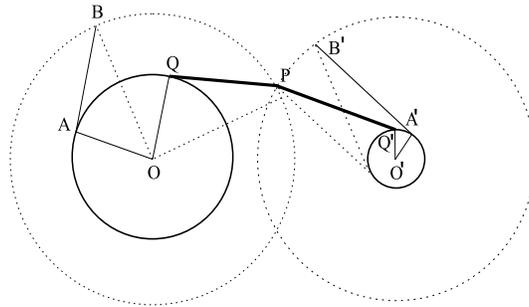
Na realidade, o fato que o produto  $PA \cdot PB$  é constante para qualquer secante passando por  $P$  é conhecido desde a antigüidade, mas o termo "potência" foi utilizado pela primeira vez por *Jacob Steiner* (1796-1863), matemático suíço que deu uma enorme contribuição ao desenvolvimento da Geometria. Observamos ainda que, se  $P$  é exterior à circunferência e se  $PT$  é tangente em  $T$ , decorre da definição (e do teorema de Pitágoras) que a potência do ponto  $P$  em relação a circunferência é  $PT^2$ .

É claro que o conjunto dos pontos que possuem determinada potência em relação a uma circunferência  $C$  é uma outra circunferência concêntrica com  $C$

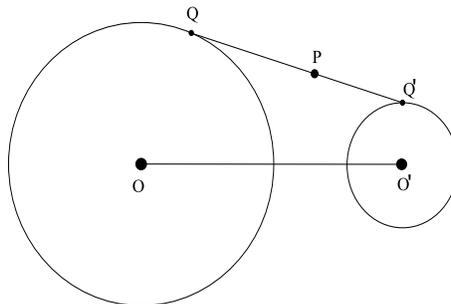
## 1.8 Eixo radical

Dadas duas circunferências não concêntricas pode-se perguntar se existe algum ponto no plano cujos segmentos tangentes a cada uma dessas circunferências (ou seja, segmentos contidos em retas tangentes a essas circunferências com extremidades no ponto e nos pontos de tangência respectivamente) tenham o mesmo comprimento. Pode-se perguntar ainda se, caso existam pontos com essa propriedade, qual é o conjunto dos pontos no plano que satisfaz essa propriedade, ou seja, qual o lugar geométrico dos pontos no plano cujos segmentos tangentes a essas circunferências têm o mesmo comprimento.

A primeira pergunta pode ser respondida por construção, com um certo cuidado, justificada por um argumento de congruência: tome um segmento tangente, suficientemente grande (o quão grande pode ser percebido experimentalmente), a uma das circunferências e trace um segmento tangente de mesmo comprimento à outra. Traçando-se agora duas circunferências de centros nas circunferências originais, passando pelas respectivas extremidades dos dois segmentos tangentes, obter-se-á dois (ou um) pontos que satisfarão a propriedade.

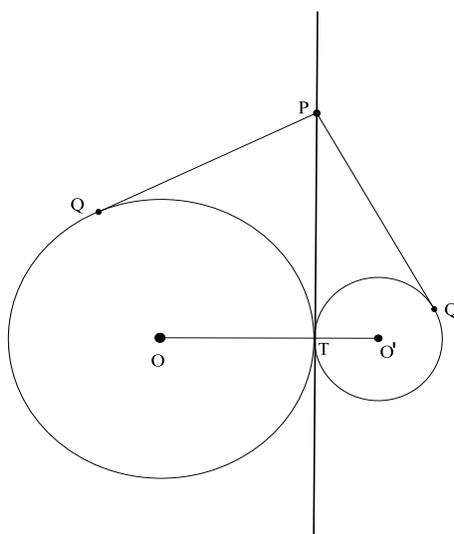


Na figura acima as tangentes  $\overline{PQ}$  e  $\overline{P'Q'}$  têm o mesmo comprimento. Note que os triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OQP$  são congruentes, e também  $\triangle O'A'B'$  e  $\triangle O'Q'P$  são congruentes. Se as circunferências não são interiores (isto é, se uma não estiver contida no interior da outra), então uma resposta mais simples à primeira pergunta seria: basta traçar um segmento tangente comum às duas circunferências e achar o ponto médio deste segmento.



Respondida a primeira pergunta vamos analisar a segunda e respondê-la por partes.

Se as duas circunferências forem tangentes (externa ou internamente) então todos os pontos da reta tangente (exceto o ponto de tangência) comum a ambas no ponto de tangência dessas circunferências satisfarão a propriedade dos segmentos tangentes de mesmo comprimento.

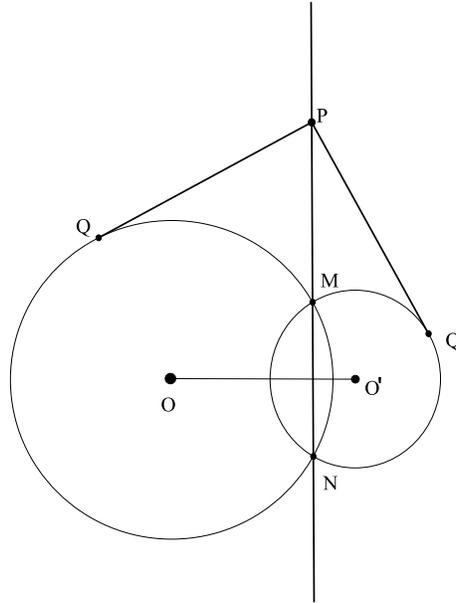


Na figura acima tem-se  $PQ = PT = PQ'$ .

Se as duas circunferências forem secantes (interceptando-se em dois pontos  $M$  e  $N$ ) então todos os pontos da reta que passa por  $M$  e  $N$  (exceto o os pontos do segmento  $\overline{MN}$ ) satisfarão a propriedade dos segmentos tangentes de mesmo comprimento.

Na figura acima tem-se, por potência de ponto, que  $PQ^2 = PM \cdot PN = PQ'^2$ .

Observemos ainda que, em ambas as figuras, as retas obtidas são perpendiculares à reta dos centros das duas circunferências. Falta provar ainda que essas retas contêm os lugares geométricos dos pontos que satisfazem a propriedade dos segmentos

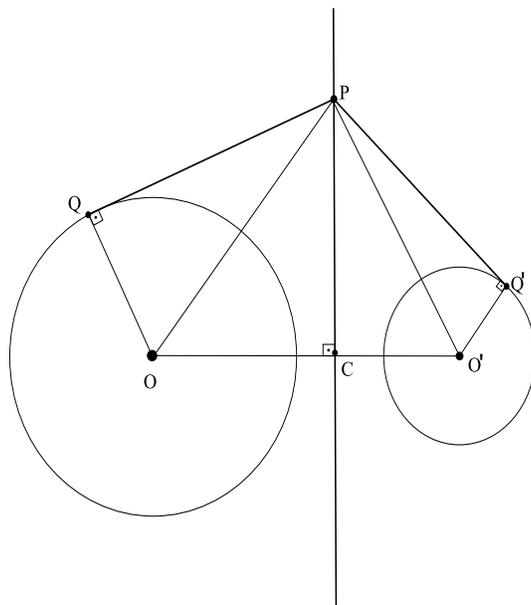


tangentes de mesmo comprimento, ou seja, nenhum ponto fora daquelas retas possui essas propriedades.

Para provar o exposto acima, e para provar o caso das circunferências que não possuem ponto comum (exceto no caso em que elas são concêntricas, em que nenhum ponto do plano tem a propriedade das tangentes de mesmo comprimento) vamos enunciar e demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema 1.18** *Os pontos que satisfazem a propriedade dos segmentos tangentes de mesmo comprimento a duas circunferências não concêntricas dadas estão contidos em uma determinada reta perpendicular à reta dos centros daquelas circunferências. Reciprocamente, todo ponto daquela reta, que não seja ponto comum às duas circunferências ou ponto interior a essas circunferências, possui a propriedade dos segmentos tangentes de mesmo comprimento.*

**Demonstração.** Vamos demonstrar para o caso de duas circunferências externas, mas o argumento é o mesmo nos outros casos. Sejam então  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PQ'}$  dois segmentos de mesmo comprimento, respectivamente tangentes às circunferências de centros  $O$  e  $O'$  traçados por um ponto  $P$  exterior a ambas as circunferências. Seja  $C$  o pé da perpendicular à reta dos centros traçada por  $P$ .



Então, chamando  $PO = d$ ,  $PO' = d'$  e  $R$  e  $R'$ , respectivamente, os raios das circunferências teremos, de  $PQ = P'Q'$  e do teorema de Pitágoras para os triângulos retângulos  $\triangle OQP$  e  $\triangle O'Q'P'$  que

$$PQ^2 = d^2 - R^2$$

$$P'Q'^2 = d'^2 - R'^2$$

Segue-se que

$$d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2$$

ou

$$d^2 - d'^2 = R^2 - R'^2.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos  $\triangle OCP$  e  $\triangle O'CP$  obtemos

$$d^2 = PC^2 + OC^2 \quad \text{e} \quad d'^2 = PC^2 + O'C^2,$$

e daí temos

$$OC^2 - O'C^2 = d^2 - d'^2 = R^2 - R'^2,$$

ou seja, como  $OC + O'C = OO'$ ,

$$(OC - O'C)(OC + O'C) = R^2 - R'^2.$$

Obtemos assim o sistema

$$OC - O'C = \frac{R^2 - R'^2}{OO'} \quad (1.5)$$

$$OC + O'C = OO' \quad (1.6)$$

o que nos dá

$$OC = \frac{OO'^2 + R^2 - R'^2}{2OO'} \quad \text{e} \quad O'C = \frac{OO'^2 - R^2 + R'^2}{2OO'} \quad (1.7)$$

e portanto  $C$  está unicamente determinado na reta dos centros das duas circunferências, ou seja, todo ponto que satisfaz a propriedade dos segmentos tangentes de mesmo comprimento está na reta perpendicular à reta dos centros que passa pelo ponto  $C$ .

Reciprocamente, se  $P$  é um ponto qualquer na reta perpendicular à reta dos centros das circunferências que passa por  $C$  (determinado pelas distâncias  $OC$  e  $O'C$  nas equações acima) e não está nas circunferências nem em seus interiores, então da equação (1.7) acima obtemos as equações (1.5) e (1.6) que, multiplicadas nos dá

$$OC^2 - O'C^2 = R^2 - R'^2$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $\triangle OCP$  e  $\triangle O'CP$  obtemos

$$d^2 = PC^2 + OC^2 \quad \text{e} \quad d'^2 = PC^2 + O'C^2,$$

e daí

$$OC^2 - O'C^2 = d^2 - d'^2.$$

Segue-se que

$$d^2 - d'^2 = R^2 - R'^2,$$

ou seja,

$$d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2.$$

Mas, se  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PQ'}$  são os segmentos tangentes às circunferências de centros  $O$  e  $O'$  respectivamente, então dos triângulos  $\triangle OQP$  e  $\triangle O'Q'P$  obtemos

$$PQ^2 = d^2 - R^2$$

$$PQ'^2 = d'^2 - R'^2$$

Portanto temos  $PQ = PQ'$ .

A reta perpendicular à reta dos centros que passa pelo ponto  $C$  acima é chamada **eixo radical** das duas circunferências.

Dadas três circunferências, não concêntricas duas a duas, temos três eixos radicais correspondentes a cada par dessas circunferências.

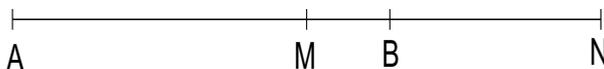
Um resultado fácil de provar é o seguinte: os três eixos radicais são paralelos (no caso em que os centros das três circunferências são colineares), ou são concorrentes em um único ponto.

Tal ponto é chamado **centro radical** das circunferências.

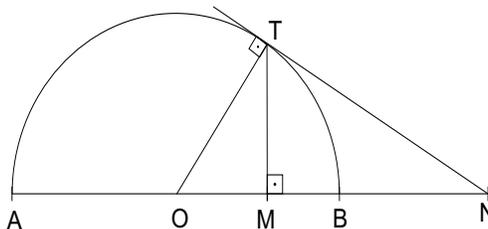
## 1.9 Conjugados harmônicos

**Definição 1.5** Seja  $\overline{AB}$  um segmento de reta. Dizemos que dois pontos  $M$  e  $N$ , pertencentes à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , são conjugados harmônicos em relação a  $A$  e  $B$  se  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$ .

**OBS:** Desta definição é fácil deduzir que, se  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos em relação a  $A$  e  $B$ , então um deles está entre  $A$  e  $B$  e o outro não pertence ao segmento  $\overline{AB}$ .



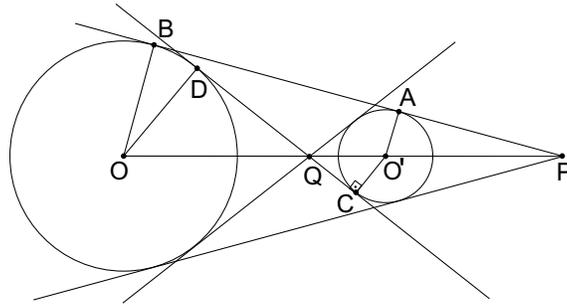
Verifica-se que, se  $N$  é um ponto da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que não pertence ao segmento  $\overline{AB}$ , então seu conjugado harmônico  $M$  pode ser obtido traçando-se por  $N$  uma das tangentes à circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$  e, pelo ponto  $T$  de tangência baixando a perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$ . O pé desta perpendicular em  $\overleftrightarrow{AB}$  é o ponto  $M$ .



Note que, no  $\triangle ONT$  (retângulo) temos  $OT^2 = OM \cdot ON$ , ou  $r^2 = OM \cdot ON$ .

Reciprocamente, se  $M$  é um ponto que está entre  $A$  e  $B$  e distinto do ponto médio de  $\overline{AB}$ , então seu conjugado harmônico  $N$  é obtido levantando-se a perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$  por  $M$ . Em um dos pontos de cruzamento dessa perpendicular com a circunferência obtemos  $T$ . Por  $T$  traça-se a tangente à circunferência, que interceptará  $\overleftrightarrow{AB}$  em  $N$ .

Podemos verificar ainda que os centros de semelhança de duas circunferências são conjugados harmônicos em relação aos seus centros:



$$\triangle PAO' \sim \triangle PBO \Rightarrow \frac{PO}{PO'} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{r}$$

$$\triangle QOD \sim \triangle QO'C \Rightarrow \frac{QO}{QO'} = \frac{OD}{O'C} = \frac{R}{r}.$$

Logo  $\frac{PO}{PO'} = \frac{QO}{QO'}$ .

Portanto os pontos  $P$  e  $Q$  são conjugados harmônicos em relação a  $O$  e  $O'$ .

# Capítulo 2

## Colinearidade

Neste capítulo apresentaremos o teorema de Menelaus, um teorema que envolve colinearidade descoberto por Menelaus de Alexandria (aproximadamente 100 A.C.) e publicado em 1678 por Geovanni Ceva. Apresentaremos também os teoremas de Gerard Desargus, Blaise Pascal e Pappus de Alexandria, além de outros resultados de colinearidade como a Reta de Euler e a Reta de Simson.

### 2.1 Teorema de Menelaus

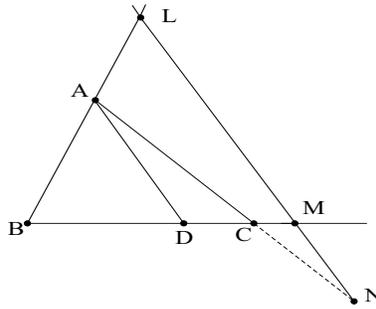
**Teorema 2.1 (Teorema de Menelaus)** <sup>1</sup> *Sejam três pontos,  $L$ ,  $M$  e  $N$  localizados respectivamente nas retas suportes dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$  de um triângulo  $\triangle ABC$  (qualquer). Então  $L$ ,  $M$ , e  $N$  são colineares se, e somente se:*

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

**Demonstração:** Seja o triângulo  $\triangle ABC$ , e sejam  $L$ ,  $M$  e  $N$  pontos colineares pertencentes às retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  respectivamente. Pelo vértice  $A$ , traça-se uma reta  $\overleftrightarrow{AD}$  paralela a transversal  $\overleftrightarrow{LM}$ .

---

<sup>1</sup>Geômetra e astrônomo grego, nascido em Alexandria, Egito, que não só continuou os trabalhos de Hiparco em trigonometria, mas demonstrou interessantíssimo teorema, que leva o seu nome. Defensor da geometria clássica e criador do tradicional teorema de Menelau, escreveu várias obras de trigonometria e geometria. Suas principais obras foram Cordas em círculo, em seis volumes, Elementos de geometria, com vários teoremas, e Sphaera, em três livros sobre esféricos. Nessa obra considerou triângulos na esfera e provou, dentre outros resultados, que a soma dos seus ângulos internos é maior do que 180°. Seu nome foi conhecido através de Pappus e Proclus. Pouco se sabe sobre sua vida, mas teve grande influência na evolução da trigonometria esférica e na astronomia. Também estudou sobre a aceleração da gravidade e morreu em lugar incerto, talvez lá mesmo em Alexandria. A Escola de Alexandria está entre as três maiores escolas de Matemática da antiga civilização mediterrânea, ao lado da Escola Pitagórica, que era sediada na cidade de Crotona, Itália, e da Academia de Platão, sediada em Atenas, Grécia, e sua influência se estendeu por cerca de sete séculos (300 a. C.-400 d. C.).



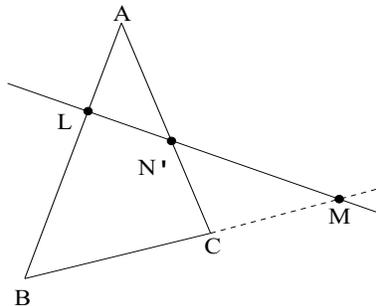
Pelo teorema de Tales as paralelas  $AD$  e  $LM$  cortam as secantes  $AB$  e  $BD$  em partes proporcionais:  $\frac{LA}{MD} = \frac{LB}{MB}$ . Logo,

$$\frac{LA}{MD} \cdot \frac{MB}{LB} = 1. \quad (2.1)$$

Também pelo teorema de Tales as paralelas  $AD$  e  $LM$  cortam as secantes  $AN$  e  $DM$  em partes proporcionais. Assim  $\frac{MD}{NA} = \frac{MC}{NC}$  então,

$$\frac{MD}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1. \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2) temos que  $\frac{LA}{MD} \cdot \frac{MB}{LB} \cdot \frac{MD}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1$  e portanto  $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$ .



Seja agora o  $\triangle ABC$  e sejam  $L$ ,  $M$  e  $N$  os pontos pertencentes as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  respectivamente. Tais que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1. \quad (2.3)$$

Tracemos a reta  $\overleftrightarrow{LM}$ . Seja  $N'$  o ponto de intersecção de  $\overleftrightarrow{LM}$  com  $\overleftrightarrow{AC}$ .

Portanto  $L$ ,  $M$  e  $N'$  são colineares.

Pelo que foi provado anteriormente temos que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{N'C}{N'A} = 1. \quad (2.4)$$

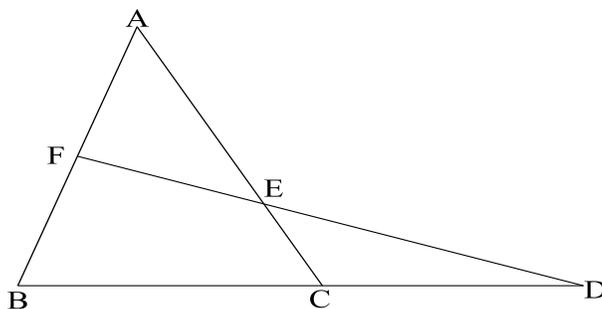
Segue-se, de (2.3) e (2.4) que  $\frac{NC}{NA} = \frac{N'C}{N'A}$ .

Como existe apenas um único ponto que divide o segmento  $\overline{AC}$  numa razão dada temos então que  $N' = N$ .

E portanto  $L$ ,  $M$  e  $N$  são colineares.

**Uma outra demonstração do Teorema de Menelaus**(Ver o artigo a respeito em, [?] do professor Eliézer Batista)

Considere um triângulo  $\triangle ABC$ , um ponto  $D$  em  $\overrightarrow{BC}$ , estendendo-se o lado  $\overline{BC}$ . Considere também um segmento  $\overline{DF}$  com  $F \in \overline{AB}$  que cruza o lado  $\overline{AC}$  no ponto  $E$ , conforme nos mostra a figura abaixo.



O Teorema de Menelau pode ser enunciado da seguinte maneira:

**Teorema 2.2** *Dados os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ , conforme a configuração apresentada na figura anterior, então temos a relação*

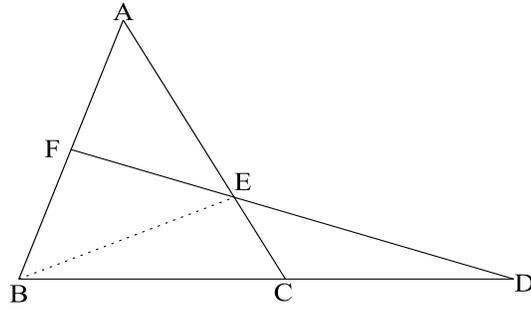
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

A demonstração deste teorema se baseia no resultado que decorre facilmente da fórmula da área de um triângulo, a saber, a razão entre as áreas de dois triângulos com a mesma altura é igual a razão entre suas bases. Assim, na demonstração do teorema de Menelau, basta identificarmos os triângulos apropriados e compararmos as suas áreas.

**Demonstração.** Considere o segmento auxiliar  $\overline{BE}$ , conforme ilustrado na figura abaixo:

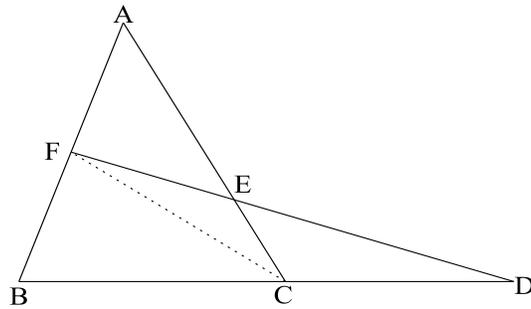
Então, temos:

$$\frac{A(\triangle AEF)}{A(\triangle BEF)} = \frac{AF}{FB},$$



$$\frac{A(\triangle BEF)}{A(\triangle BDF)} = \frac{EF}{DF}.$$

Da mesma forma, considere agora o segmento auxiliar  $\overline{CF}$ , conforme ilustrado na figura a seguir:



Então, temos também,

$$\frac{A(\triangle BDF)}{A(\triangle CDF)} = \frac{BD}{DC},$$

$$\frac{A(\triangle CDF)}{A(\triangle CDE)} = \frac{DF}{ED},$$

$$\frac{A(\triangle CDE)}{A(\triangle CEF)} = \frac{ED}{EF},$$

$$\frac{A(\triangle CEF)}{A(\triangle AEF)} = \frac{CE}{EA}.$$

Multiplicando todas estas razões, temos:

$$1 = \frac{A(\triangle AEF)}{A(\triangle BEF)} \cdot \frac{A(\triangle BEF)}{A(\triangle BDF)} \cdot \frac{A(\triangle BDF)}{A(\triangle CDF)} \cdot \frac{A(\triangle CDF)}{A(\triangle CDE)} \cdot \frac{A(\triangle CEF)}{A(\triangle AEF)} =$$



Multiplicando as três equações acima obtemos, após cancelamento,

$$\frac{QD}{RD} \cdot \frac{RE}{PE} \cdot \frac{PF}{QF} = 1$$

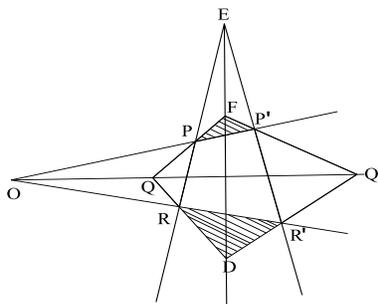
e novamente pelo teorema de Menelaus, aplicado ao triângulo  $\triangle PQR$ , obtemos que os pontos  $E$ ,  $F$  e  $D$  são colineares.

■

## Recíproca do Teorema de Desargues

Se os lados de dois triângulos se cortam dois a dois em três pontos situados em linha reta, os vértices correspondentes estão dois a dois sobre três retas concorrentes.

**Demonstração:**



Sejam os triângulos  $\triangle PQR$  e  $\triangle P'Q'R'$ . Sejam  $E$  o ponto de intersecção de  $\overleftrightarrow{PR}$  e  $\overleftrightarrow{P'R'}$ ,  $F$  o ponto de intersecção de  $\overleftrightarrow{PQ}$  e  $\overleftrightarrow{P'Q}$ , e  $D$  o ponto de intersecção de  $\overleftrightarrow{QR}$  e  $\overleftrightarrow{Q'R'}$ , tais que  $E$ ,  $F$  e  $D$  são colineares.

Seja  $O$  o ponto de intersecção das retas  $\overleftrightarrow{PP'}$  e  $\overleftrightarrow{RR'}$ . Vamos mostrar que a reta  $\overleftrightarrow{QQ'}$  também passa por  $O$ .

Considerando os três triângulos  $\triangle FPP'$  e  $\triangle DRR'$ , notamos que as hipóteses do Teorema de Desargues são satisfeitas, logo, por esse teorema concluímos que  $O$  (ponto de intersecção de  $\overleftrightarrow{PP'}$  e  $\overleftrightarrow{RR'}$ ),  $Q$  (ponto de intersecção de  $\overleftrightarrow{FP'}$  e  $\overleftrightarrow{DR}$ ) e  $Q'$  (ponto de intersecção de  $P'F$  e  $R'D$ ) são colineares e que os dois triângulos possuem os vértices dois a dois sobre três retas concorrentes.

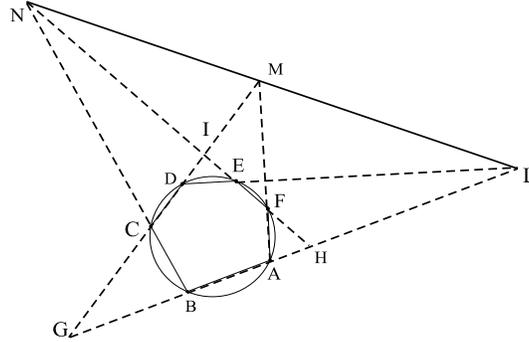
■

## 2.3 Teorema de Pascal

### Teorema 2.4 (Teorema de Pascal) <sup>3</sup>

Em todo hexágono regular (convexo ou não convexo) inscrito em uma circunferência, os pontos de intersecção dos lados opostos estão em linha reta. (A reta que contém esses três pontos, chama-se reta de Pascal).

**Obs:** Em um hexágono definimos lados opostos como sendo os lados que estão separados por dois outros lados.



**Demonstração:** Seja  $\triangle GHI$  o triângulo formado pelos lados  $AB$ ,  $CD$  e  $EF$  do hexágono inscrito  $ABCDEF$ . Estamos assumindo que os lados  $AB$ ,  $CD$  e  $EF$  formam o triângulo  $\triangle GHI$ . Sejam  $AF$ ,  $BC$  e  $DE$  retas transversais ao triângulo  $\triangle GHI$ .

Aplicando o teorema 2.1 ao triângulo  $\triangle GHI$  e às transversais  $AFM$ ,  $BCN$  e  $DEL$  respectivamente obtemos as seguintes relações:

$$\frac{AG}{AH} \cdot \frac{FH}{FI} \cdot \frac{MI}{MG} = 1$$

$$\frac{BG}{BH} \cdot \frac{NH}{NI} \cdot \frac{CI}{CG} = 1$$

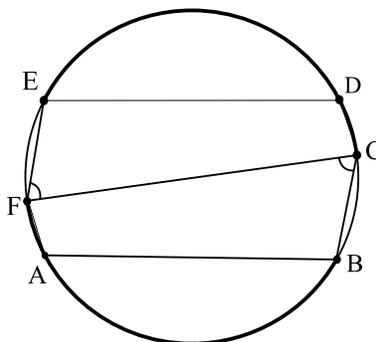
<sup>3</sup>Extraordinário filósofo, físico, escritor e matemático francês nascido em Clermont-Ferrand, Auvergne, que como filósofo e místico criou uma das afirmações mais pronunciadas pela humanidade nos séculos posteriores, "O coração tem razões que a própria razão desconhece", síntese de sua doutrina filosófica: o raciocínio lógico e a emoção. Filho de um professor de matemática, Etienne Pascal, escreveu várias obras religiosas. Seu talento precoce para as ciências físicas levou a família para Paris (1631), onde ele se dedicou ao estudo da matemática. Realizou experiências sobre sons e em 1635 chegou a dedução de 32 proposições de geometria estabelecidas por Euclides. Publicou *Essay pour les coniques* (1640), contendo o célebre teorema de Pascal. Excelente matemático especializou-se em cálculos infinitesimais e criou um tipo de máquina de somar que chamou de La pascaline (1642), a primeira calculadora manual que se conhece. Apesar de sua curta existência, este brilhante cientista francês reuniu em sua personalidade duas características aparentemente antagônicas: o espírito literário uma vez que, sendo grande escritor, é considerado o verdadeiro fundador da prosa literária francesa e o espírito geométrico, que o fez importante físico e matemático.

$$\frac{LG}{LH} \cdot \frac{EH}{EI} \cdot \frac{DI}{DG} = 1$$

Multiplicando estas igualdades membro a membro e cancelando os produtos iguais  $AG \cdot BG = CG \cdot DG$ ,  $FH \cdot EH = AH \cdot BH$  e  $CI \cdot DI = EI \cdot FI$ , obtidos da potência dos pontos  $G$ ,  $H$  e  $I$  respectivamente à circunferência dada, temos  $\frac{MI}{MG} \cdot \frac{NH}{NI} \cdot \frac{LG}{LH} = 1$ .

Portanto  $M$ ,  $N$  e  $L$  são colineares. ■

**Obs:** No caso em que há um par de lados opostos paralelos haverá 2 pontos de concorrência. Se houver dois pares de lados opostos paralelos então o terceiro par também terá lados paralelos.



**Demonstração.** Sejam  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$  e  $\overline{AF} \parallel \overline{CD}$  então  $\hat{A} = \hat{D}$

$$\hat{A} = \frac{F\hat{E}D\hat{C}B}{2} = \frac{\hat{F}E + \hat{E}DC + \hat{C}B}{2} \quad \text{e} \quad \hat{D} = \frac{C\hat{B}A\hat{F}E}{2} = \frac{\hat{C}B + \hat{B}AF + \hat{F}E}{2},$$

os arcos  $\hat{E}DC$  e  $\hat{B}AF$  são iguais e  $C\hat{F}E = B\hat{C}F$ .

Portanto  $\overline{BC}$  é paralelo a  $\overline{EF}$ .

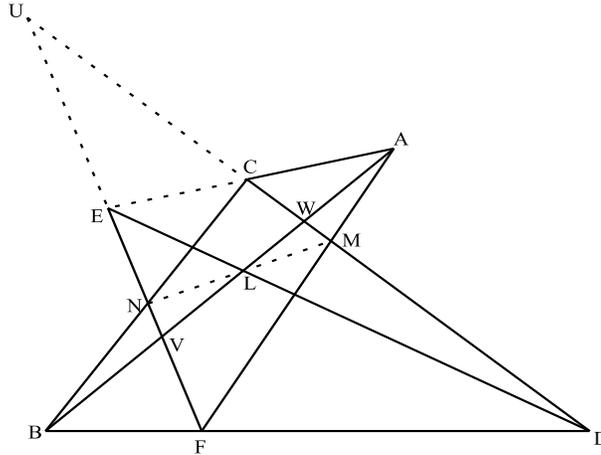
**Obs:** Note que 6 pontos sobre uma circunferência formam 60 hexágonos distintos: são  $(PC)_6 = 120$  permutações circulares, que devemos dividir por 2 devido a orientação.

Esses 60 hexágonos darão no máximo 60 retas de Pascal.

## 2.4 Teorema de Pappus

### Teorema 2.5 (Teorema de Pappus) <sup>4</sup>

Quando um hexágono tem três de seus vértices sobre uma reta, e os outros três vértices sobre outra reta, os três pontos de intersecção dos lados opostos estão em linha reta.



**Demonstração:** Seja o hexágono não convexo  $ABCDEF$  com os vértices  $A, C$  e  $E$  sobre uma reta e  $B, D$  e  $F$  sobre outra reta. Seja  $L$  o ponto de intersecção dos lados opostos  $\overline{AB}$  e  $\overline{ED}$ ,  $M$  o ponto de intersecção dos lados opostos  $\widehat{CD}$  e  $\widehat{AF}$  e  $N$  ponto de intersecção dos lados opostos  $\widehat{BC}$  e  $\widehat{EF}$ .

Seja  $U$  o ponto de intersecção das retas  $CD$  e  $EF$ ,  $V$  ponto de intersecção das retas

---

<sup>4</sup>Considerado o último dos grandes geômetras da antiga civilização grega e talvez nascido em Alexandria, pesquisador e autor de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização grega. Viveu em Alexandria, durante o reinado de Docleciano (284-305) e ficou conhecido como seguidor das idéias matemáticas de Eudoxo e Arquimedes. Entre seus livros o mais famoso foi *Synagoge* (320 d. C.) ou *Coleção Matemática*, um tratado em grego muito importante pois continha informações inéditas para época. Hoje é uma rica fonte histórica da matemática grega pois apresenta provas e lemas suplementares para as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu. Descobriu vários teoremas precursores da Geometria Projetiva, pesquisou o chamado Problema de Dido ou Isoperimétrico e, curiosamente, demonstrou que, dentre as formas que as abelhas poderiam ter empregado para fazer seus favos, a adotada é a que mais economiza cera. Suas conclusões foram o ponto de partida para a invenção da geometria analítica por Descartes, treze séculos depois. Junto com Diofanto, foram os dois principais matemáticos da chamada Idade de Prata da Universidade de Alexandria (250-350). Também escreveu sobre música e hidrostática e morreu em algum lugar da Grécia, provavelmente em Alexandria.

$AB$  e  $EF$ , e  $W$ , o ponto de intersecção das retas  $AB$  e  $CD$ . Estamos assumindo que as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{EF}$  formam o triângulo  $\triangle UVW$ .

Aplicando o Teorema de Menelaus aos cinco trio de pontos:

$$\{L, D, E\}, \{A, M, F\}, \{B, C, N\}, \{A, C, E\} \text{ e } \{B, D, F\}$$

em relação ao triângulo  $\triangle UVW$ , temos:

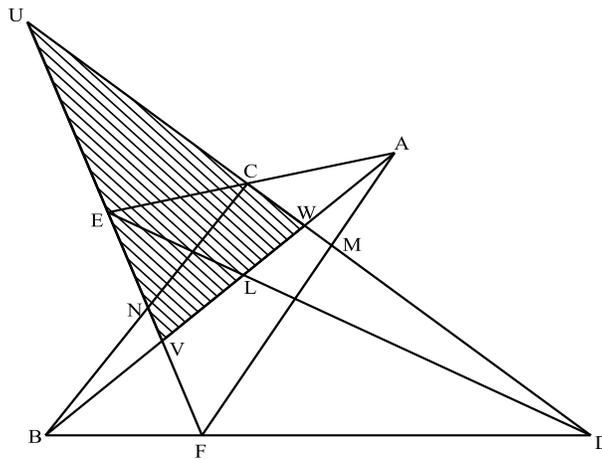
$$\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WD}{DU} \cdot \frac{UE}{EV} = 1 \quad (2.5)$$

$$\frac{VA}{AW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UE}{EV} = 1 \quad (2.6)$$

$$\frac{VB}{BW} \cdot \frac{WC}{CU} \cdot \frac{UN}{NV} = 1 \quad (2.7)$$

$$\frac{VA}{AW} \cdot \frac{WC}{CU} \cdot \frac{UE}{EV} = 1 \quad (2.8)$$

$$\frac{VB}{BW} \cdot \frac{WD}{DU} \cdot \frac{UF}{FV} = 1 \quad (2.9)$$



Dividindo o produto das três primeiras equações pelo produto das duas últimas, obtemos, após cancelamento,

$$\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} = 1$$

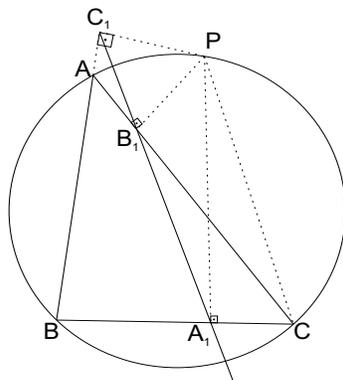
o que nos dá novamente, pelo Teorema de Menelaus, aplicado ao triângulo  $\triangle UVW$ , que os pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$  são colineares.

■

## 2.5 Reta de Simson

**Teorema 2.6** *Seja  $ABC$  um triângulo. Os pés das três perpendiculares traçadas de um ponto  $P$  aos lados do  $\triangle ABC$  são colineares se e somente se o ponto  $P$  pertencer a circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ .*

**Obs:** Nesse caso a reta que contém esses três pontos é chamada de reta de Simpson.



**Demonstração.** Primeiramente vamos provar que se  $P$  está na circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ , então os três pés das perpendiculares aos lados desse triângulo são colineares. Pelo Teorema de Menelaus devemos mostrar que  $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$ .

Temos que

$$P\hat{A}C = \frac{\widehat{PC}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AP}}{2} = \widehat{B} - P\hat{C}A$$

Então

$$\begin{aligned}\widehat{B} + \widehat{C} = C_1\widehat{AC} &= C_1\widehat{AP} + P\widehat{AC} = C_1\widehat{AP} + \widehat{B} - P\widehat{CA} \\ C_1\widehat{AP} &= \widehat{C} + P\widehat{CA} = P\widehat{CB}.\end{aligned}$$

Logo  $\triangle PC_1A \sim \triangle PA_1C$ .

Assim

$$\frac{AC_1}{CA_1} = \frac{PC_1}{PA_1}. \quad (2.10)$$

Temos também que  $P\widehat{BA}_1 = \frac{\widehat{PC}}{2} = P\widehat{AB}$ . Logo  $\triangle PA_1B \sim \triangle PB_1A$ .

Assim

$$\frac{BA_1}{AB_1} = \frac{PA_1}{PB_1}. \quad (2.11)$$

Temos ainda que  $PBC_1 = \frac{\widehat{AP}}{2} = P\widehat{CB}$ . Logo  $\triangle PC_1B \sim \triangle PB_1C$ .

Assim

$$\frac{CB_1}{BC_1} = \frac{PB_1}{PC_1}. \quad (2.12)$$

Multiplicando (2.10), (2.11) e (2.12) temos:

$$\frac{AC_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{BC_1} = \frac{PC_1}{PA_1} \cdot \frac{PA_1}{PB_1} \cdot \frac{PB_1}{PC_1} = 1.$$

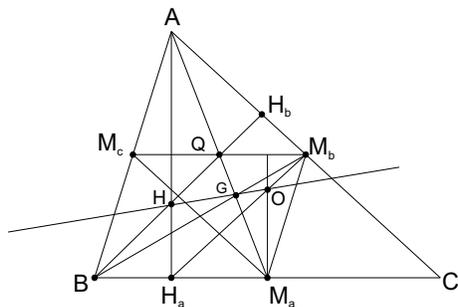
Portanto

$$\frac{AC_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{BC_1} = 1.$$

## 2.6 Reta de Euler

**Teorema 2.7** *O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo são colineares. Além disso, o baricentro divide o segmento cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro, na razão 1 : 2.*

**Demonstração:** Consideremos, no triângulo  $ABC$ , os pontos  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$ , as alturas  $AH_a$  e  $BH_b$ , o ortocentro  $H$  e o baricentro  $G$ .



Consideremos o triângulo  $M_a M_b M_c$ , formado pelos pontos médios dos lados do triângulo  $ABC$ . É fácil ver que o ortocentro  $O$  do triângulo  $M_a M_b M_c$  coincide com o circuncentro do triângulo  $ABC$ .

Além disso, como consequência do teorema da base média, são semelhantes os triângulos  $M_a M_b M_c$  e  $ABC$  com razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ . Dessa maneira, qualquer par de segmentos correspondentes nesses dois triângulos estão na mesma razão.

Como o quadrilátero  $AM_c M_a M_b$  é um paralelogramo, suas diagonais  $\overline{AM_a}$  e  $\overline{M_b M_c}$  biseccionam-se no ponto  $Q$ . Portanto a mediana  $M_a Q$  do triângulo  $M_a M_b M_c$  está contida na mediana  $AM_a$  do triângulo  $ABC$ , o análogo ocorrendo com as outras duas medianas. Logo os dois triângulos possuem o mesmo baricentro  $G$ .

Temos também  $AH = 2M_a O$ , pela semelhança dos triângulos  $M_a M_b M_c$  e  $ABC$ ;  $AG = 2M_a G$ , pelo teorema das medianas que diz que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice  $\frac{2}{3}$  da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto; e  $\widehat{HAG} \cong \widehat{GM_a O}$ , pois as retas  $AH$  e  $OM_a$  são ambas perpendiculares ao lado  $\overline{BC}$ .

Portanto  $\triangle AGH \sim \triangle M_a GO$ , com razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ , e daí  $\widehat{AGH} \cong \widehat{M_a GO}$ .

Isso mostra que  $O$ ,  $G$  e  $H$  são colineares e  $OG = \frac{1}{2}GH$ .

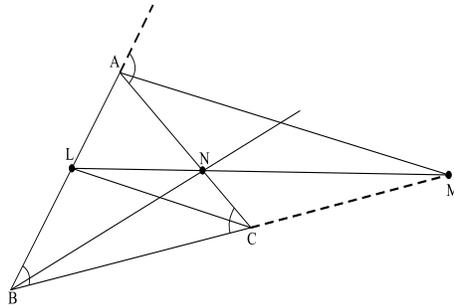
**Observação:** A reta que contém esses três pontos notáveis do triângulo é chamada **reta de Euler**<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Físico-matemático suíço nascido em Basileia, o mais brilhante gênio da matemática pura e aplicada de todos os tempos. De uma

## 2.7 Outras Aplicações do Teorema de Menelaus

**Problema 1** As bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em 3 pontos colineares.

Sejam  $\overline{BN}$  e  $\overline{CL}$  as bissetrizes dos ângulos  $\angle B$  e  $\angle C$  respectivamente e seja  $\overline{AM}$  a bissetriz do ângulo relativo ao ângulo  $\angle A$ .



Devemos provar que  $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$ .

Pelo Teorema das bissetrizes internas temos que:

$$\frac{LA}{CA} = \frac{LB}{CB} \quad \text{e} \quad \frac{NC}{CB} = \frac{NA}{BA}$$

Pelo Teorema das bissetrizes externas temos que:

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{AC}$$

Assim

$$\frac{LA}{CA} \cdot \frac{CB}{LB} = \frac{NC}{CB} \cdot \frac{BA}{NA} = \frac{MB}{AB} \cdot \frac{AC}{MC} = 1$$

Logo, multiplicando as igualdades, obtemos

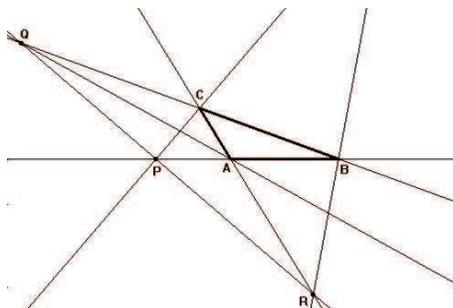
$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

---

família tradicionalmente dedicada à pesquisa científica, estudou matemática com Jean Bernoulli, tornando-se grande amigo dos seus dois filhos Nikolaus e Daniel. Na Rússia casou-se e teve treze filhos, perdeu a vista direita (1733), por excesso de trabalho ou por um problema neurológico. Publicou seu primeiro livro histórico, *Mechanica*, em 1736, e em 1748, publicou o *Introductio in analysin infinitorum*, talvez seu mais importante livro. Em 1771 cegou definitivamente, porém não parou de produzir, normalmente ditando para seus filhos, vivendo assim até que morreu repentinamente (1783), em São Petersburgo. Publicou mais de 500 livros e artigos durante sua vida, mas muitas outras obras foram publicadas postumamente por quase meio século totalizando em torno de 900 publicações conhecidas.

Portanto, pelo teorema de Menelaus temos que  $L$ ,  $M$  e  $N$  são colineares.

**Problema 2** As bissetrizes externas de um triângulo não isósceles cortam os lados opostos em três pontos colineares.



Devemos mostrar que  $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{BQ}{CQ} = 1$ .

Pelo Teorema das bissetrizes externas temos:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \quad \text{e} \quad \frac{CR}{AR} = \frac{BC}{AB} \quad \text{e} \quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{AB}{AC}$$

Multiplicando as igualdades temos:

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{BQ}{CQ} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = 1$$

Cancelando os termos comuns temos:

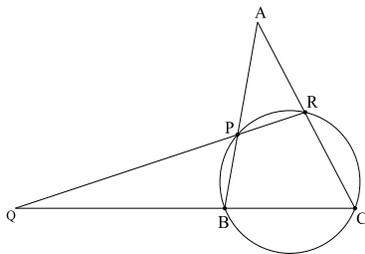
$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{BQ}{CQ} = 1, \text{ o que queríamos demonstrar.}$$

**Problema 3** Um círculo passando pelos vértices  $B$  e  $C$  de um  $\triangle ABC$  corta  $AB$  em  $P$  e  $AC$ , em  $R$ . Se  $PR$  corta  $BC$  em  $Q$ , então  $\frac{QC}{QB} = \frac{RC \times AC}{PB \times AB}$ .

Pelo Teorema da Menelaus aplicado ao triângulo  $\triangle ABC$  e a reta transversal  $\overleftrightarrow{PR}$  temos que  $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{BQ}{CQ} = 1$ .

Logo

$$\frac{QB}{QC} = \frac{BP}{AP} \cdot \frac{AR}{CR}, \text{ ou}$$



$$\frac{QC}{QB} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{CR}{AR}, \text{ ou}$$

$$\frac{QC}{QB} = \frac{RC}{PB} \cdot \frac{AP}{AR}.$$

Como pela potência do ponto em relação ao círculo

$$\begin{aligned} AP \cdot AB &= AR \cdot AC \\ \frac{AP}{AR} &= \frac{AC}{AB} \end{aligned}$$

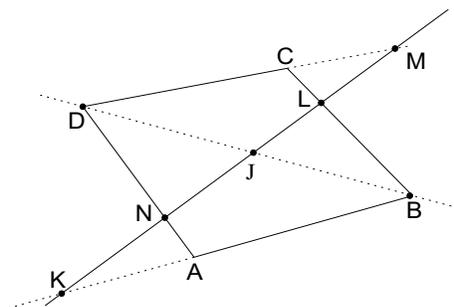
logo

$$\frac{QC}{QB} = \frac{RC}{PB} \cdot \frac{AC}{AB}.$$

Portanto

$$\frac{QC}{QB} = \frac{RC \cdot AC}{PB \cdot AB}.$$

**Problema 4** As retas suportes dos lados  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  de um quadrilátero são cortados por uma reta nos pontos  $K, L, M$  e  $N$ , respectivamente. Prove que  $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{DN}{NA} \cdot \frac{CM}{MD} = 1$ . Seja  $J$  o ponto de intersecção da reta com a diagonal  $BD$ .



**Demonstração.** O Teorema de Menelaus aplicado ao triângulo  $\triangle ABD$  e a transversal  $\overleftrightarrow{KL}$  nos dá:

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BJ}{DJ} \cdot \frac{DN}{AN} = 1. \quad (2.13)$$

Já o Teorema de Menelaus aplicado ao triângulo  $\triangle CDB$  e a transversal  $\overleftrightarrow{KL}$  nos dá:

$$\frac{CM}{DM} \cdot \frac{DJ}{BJ} \cdot \frac{BL}{CL} = 1. \quad (2.14)$$

Multiplicando (2.13) e (2.14) e cancelando os termos comuns  $DJ$  e  $BJ$  temos

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{DN}{NA} \cdot \frac{CM}{MD} = 1 \quad \text{o que queríamos demonstrar.}$$

■

Este problema pode ser generalizado para um polígono de  $n$  lados:

Seja  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  um polígono de  $n$  lados, e seja  $r$  uma reta não paralela a nenhum dos lados do polígono. Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$  os  $n$  pontos de intersecção de  $r$  com os lados  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ . Então:

$$\frac{A_1P_1}{A_2P_1} \cdot \frac{A_2P_2}{A_3P_2} \cdots \frac{A_{n-1}P_{n-1}}{A_nP_{n-1}} \cdot \frac{A_nP_n}{A_1P_n} = 1$$

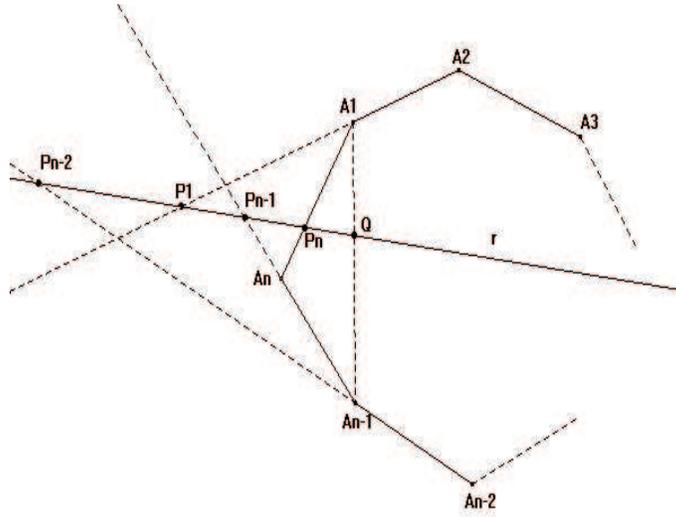
**Demonstração.**

Vamos demonstrar por indução sobre o número de lados do polígono. A afirmação é verdadeira para  $n = 3$  (Teorema de Menelaus). Suponhamos que ela seja verdadeira para  $n - 1$  e vamos provar que é verdadeira para  $n$ .

Considere então um polígono  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  de  $n$  lados. Suponha, sem perda de generalidade, que  $r$  não seja paralela à diagonal  $\overline{A_{n-1}A_1}$  ( $r$  é, necessariamente, não paralela a alguma diagonal do tipo  $\overline{A_{k-1}A_{k+1}}$ ). Seja  $Q$  o ponto de intersecção de  $r$  com a reta suporte de  $\overline{A_{n-1}A_1}$ .

Considere então o polígono de  $n - 1$  lados  $A_1A_2A_3 \dots A_{n-2}A_{n-1}$ . Pela hipótese de indução temos:

$$\frac{A_1P_1}{A_2P_1} \cdot \frac{A_2P_2}{A_3P_2} \cdots \frac{A_{n-2}P_{n-2}}{A_{n-1}P_{n-2}} \cdot \frac{A_{n-1}Q}{A_1Q} = 1. \quad (2.15)$$



Considere agora o triângulo  $\triangle A_{n-1}A_nA_1$ . Pelo Teorema de Menelaus, para o caso do triângulo e a reta  $r$ , temos:

$$\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{A_nP_{n-1}} \cdot \frac{A_nP_n}{A_1P_n} \cdot \frac{A_1Q}{A_{n-1}Q} = 1. \quad (2.16)$$

Multiplicando (2.15) e (2.16) obtemos:

$$\frac{A_1P_1}{A_2P_1} \cdot \frac{A_2P_2}{A_3P_2} \cdots \frac{A_{n-1}P_{n-1}}{A_nP_{n-1}} \cdot \frac{A_nP_n}{A_1P_n} = 1.$$

**Observação:** A recíproca do teorema generalizado de Menelaus não é verdadeira para o caso  $n > 3$ . Contra-exemplo:

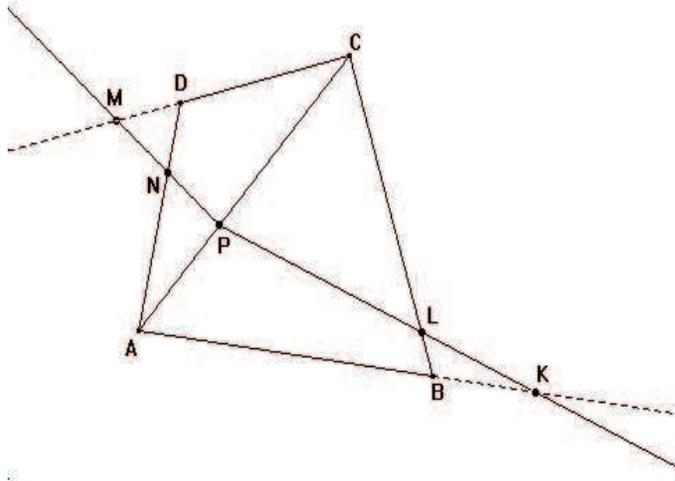
Sejam  $\mathbf{ABCD}$  um quadrilátero,  $\mathbf{P}$  um ponto na diagonal  $\overline{\mathbf{AC}}$ , e sejam duas semi-retas distintas e não opostas com origem  $\mathbf{P}$  tais que uma delas intercepta os lados  $\overline{\mathbf{AB}}$  e  $\overline{\mathbf{BC}}$  nos pontos  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{L}$  respectivamente, e a outra intercepta os lados nos pontos  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  respectivamente.

Então, pelo Teorema de Menelaus aplicado ao triângulo  $\triangle \mathbf{ABC}$  e à reta que passa pelos pontos  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{K}$ , obtemos:

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CP}{AP} = 1 \quad (2.17)$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Menelaus ao triângulo  $\triangle \mathbf{ACD}$  e à reta que passa pelos pontos  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{M}$ , obtemos:

$$\frac{AP}{CP} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} = 1 \quad (2.18)$$

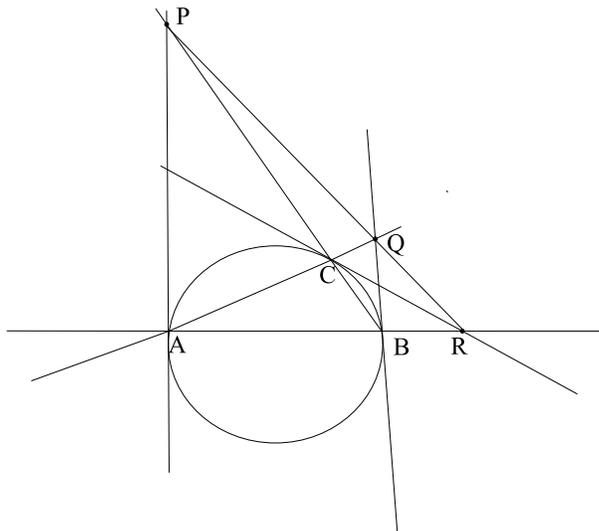


Multiplicando (2.17) e (2.18) obtemos:

$$\frac{AK}{CK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} = 1 \quad (2.19)$$

Portanto, **K**, **L**, **M** e **N** são quatro pontos não colineares sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  respectivamente, satisfazendo (2.19). Assim, não vale a recíproca do teorema de Menelaus para o caso  $n > 3$ .

**Problema 5** Seja  $ABC$  um triângulo não isósceles e  $P$ ,  $Q$  e  $R$  as intersecções das tangentes à circunferência circunscrita nos vértices com as extensões dos respectivos lados opostos. Então os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares.



Pela figura temos:  $\triangle ABQ \sim \triangle BCQ$

pois

$$\begin{cases} B\hat{A}Q = C\hat{B}Q = \frac{\widehat{BC}}{2} \\ A\hat{Q}B = C\hat{Q}B \quad (\text{comum}) \end{cases}$$

Logo

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BQ}{AQ} = \frac{CQ}{BQ} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \frac{CQ}{AQ}. \quad (2.20)$$

Temos também que:  $\triangle ABP \sim \triangle CAP$

$$\text{pois } \begin{cases} A\hat{B}P = C\hat{A}P = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ A\hat{P}B = C\hat{P}A \quad (\text{comum}) \end{cases}$$

logo

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{CP} = \frac{BP}{AP} \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BP}{CP}. \quad (2.21)$$

Ainda,  $\triangle CBR \sim \triangle ACR$ .

$$\text{Pois } \begin{cases} C\hat{B}R = A\hat{C}R = \frac{\widehat{ABC}}{2} \\ B\hat{R}C = C\hat{R}A \quad (\text{comum}) \end{cases}$$

logo

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CR}{BR} = \frac{AR}{CR} \Rightarrow \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AR}{BR}. \quad (2.22)$$

De (2.20), (2.21) e (2.22) temos.

$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1.$$

Portanto  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares.

# Capítulo 3

## Concorrência

Neste capítulo será apresentado o teorema de Ceva, um teorema da geometria elementar provado em 1678 por Geovanni Ceva, que estabelece uma condição necessária e suficiente para três cevianas sejam concorrentes. Apresentaremos também alguns casos de concorrência como o ponto de Gergonne e o ponto de Nagel além dos casos de concorrência que já foram citados como os pontos de encontro das medianas, das bissetrizes e das alturas, que serão demonstrados aqui como aplicações imediatas do teorema de Ceva.

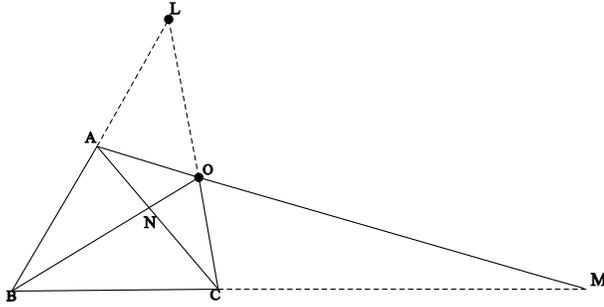
### 3.1 Teorema de Ceva

#### Teorema 3.1 (Teorema de Ceva) <sup>1</sup>

*Num triângulo  $\triangle ABC$ , três cevianas  $AM$ ,  $BN$  e  $CL$  interceptam-se num único ponto  $O$ , se e somente se,  $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$ .*

---

<sup>1</sup>Matemático, físico, geômetra e engenheiro hidráulico italiano nascido em Milão, com destaque em probabilidades e cálculos geométricos, lembrado pelo teorema de Ceva ou das cevianas, ressuscitando um teorema análogo devido a Menelau de Alexandria, o teorema de Menelaus. Foi educado em um colégio jesuíta de Milão, e estudou na universidade de Pisa. Ensinou em Pisa até ser nomeado professor de matemática na Universidade de Mântua (1686), onde permaneceu pelo resto de sua vida e morreu nesta cidade, hoje na Itália. Este matemático italiano publicou o artigo *De lineis rectis* (1678) contendo o teorema das cevianas, demonstrando-o com argumentos relativos a centros de gravidade, considerado um dos mais importantes resultados da geometria sintética do triângulo no período compreendido entre a Matemática da antiga Grécia e o século XIX. Em sua época o trabalho não obteve muita repercussão, mas o matemático francês Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) o redescobriu e o autor ganhou seu devido reconhecimento. Outras publicações importantíssimas de sua autoria foram *Opuscula mathematica* (1682), *Geometria Motus* (1692), *De Re Nummeraria* (1711) e *Opus hydrostaticum* (1728).



**Demonstração 1:**( $\Rightarrow$ ) Consideremos o triângulo  $\triangle AMB$  e a transversal  $LOC$ , temos:  
Pelo Teorema de Menelaus que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \frac{OM}{OA} = 1 \quad (3.1)$$

Consideremos agora o triângulo  $\triangle ACM$  e a transversal  $BON$ , temos pelo Teorema de Menelaus que

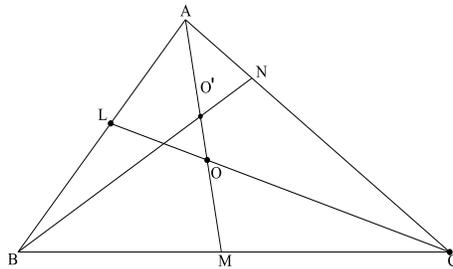
$$\frac{BM}{BC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{OA}{OM} = 1 \quad (3.2)$$

Multiplicando (3.1) por (3.2) temos

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{CB}{CM} \cdot \frac{OM}{OA} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{OA}{OM} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

logo  $\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$ .

( $\Leftarrow$ )



Seja  $O$  o ponto de intersecção de  $\overline{CL}$  com  $\overline{AM}$  e seja  $O'$  o ponto de intersecção de  $\overline{BN}$  com  $\overline{AM}$ . Vamos provar que os pontos  $O$  e  $O'$  são coincidentes. Seja o triângulo  $\triangle AMB$ . Pelo Teorema de Menelaus se  $L$ ,  $O$  e  $C$  são colineares então

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BC}{MC} \cdot \frac{MO}{AO} = 1 \quad (3.3)$$

Seja o triângulo  $\triangle AMC$ . Pelo Teorema de Menelaus se  $B$ ,  $O'$  e  $N$  são colineares então

$$\frac{MB}{CB} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AO'}{MO'} = 1 \quad (3.4)$$

Multiplicando (3.3) e (3.4) temos

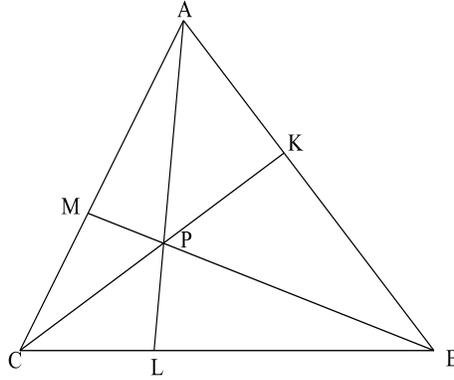
$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BC}{MC} \cdot \frac{MO}{AO} \cdot \frac{MB}{CB} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AO'}{MO'} = 1$$

como pela hipótese  $\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$  então  $\frac{MO}{AO} \cdot \frac{AO'}{MO'} = 1$ . Logo  $\frac{MO}{AO} = \frac{MO'}{AO'}$  e então  $O = O'$ .

Portanto,  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BN}$  e  $\overline{CL}$  se cruzam exatamente no mesmo ponto.

**Outra demonstração do Teorema de Ceva:** Seja um triângulo  $\triangle ABC$ . Sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ , tome, respectivamente, os pontos  $K$ ,  $L$  e  $M$  de tal forma que os segmentos  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CK}$  se cruzem exatamente no mesmo ponto  $P$ , conforme ilustrado na figura abaixo. Mostre que:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \quad (3.5)$$



Novamente, esse é um problema altamente sofisticado e extremamente difícil de ser resolvido utilizando-se apenas de ferramentas tradicionais de geometria. Mas definindo-se,  $A_1 = A(\triangle APK)$ ,  $A_2 = A(\triangle BPK)$ ,  $A_3 = A(\triangle BPL)$ ,  $A_4 = A(\triangle CPL)$ ,  $A_5 = A(\triangle CPM)$  e  $A_6 = A(\triangle APM)$ , temos que

$$\frac{AK}{KB} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 + A_5 + A_6}{A_2 + A_3 + A_4} = \frac{A_5 + A_6}{A_3 + A_4}, \quad (3.6)$$

onde a primeira e a segunda igualdades vêm do fato que estamos comparando triângulos com bases, respectivamente, iguais a  $AK$  e  $KB$ , e de mesma altura. A última igualdade, é decorrente de uma propriedade elementar das proporções. De igual modo, temos as igualdades:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{A_3}{A_4} = \frac{A_3 + A_1 + A_2}{A_4 + A_5 + A_6} = \frac{A_1 + A_2}{A_5 + A_6}, \quad (3.7)$$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{A_5}{A_6} = \frac{A_5 + A_3 + A_4}{A_6 + A_1 + A_2} = \frac{A_3 + A_4}{A_1 + A_2}. \quad (3.8)$$

Utilizando simultaneamente as igualdades (3.6), (3.7) e (3.8), podemos concluir que:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{A_5 + A_6}{A_3 + A_4} \cdot \frac{A_1 + A_2}{A_5 + A_6} \cdot \frac{A_3 + A_4}{A_1 + A_2} = 1. \quad (3.9)$$

■

A demonstração pode ser verificada com mais detalhes em [7].

## 3.2 Teorema de Brianchon

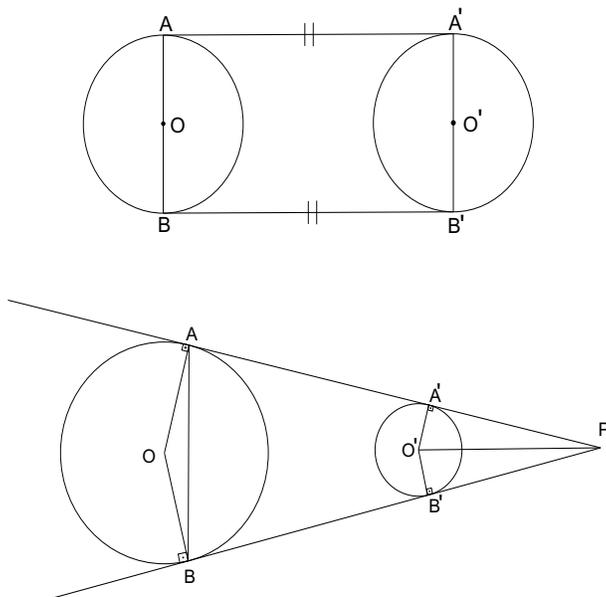
**Teorema 3.2 (Teorema de Brianchon)** *Se um hexágono (convexo ou não) é circunscritível a uma circunferência então as três diagonais com extremidades em vértices opostos são concorrentes em um ponto (ou, possivelmente, paralelas).*

Antes de demonstrarmos o teorema de Brianchon vamos enunciar e provar o seguinte lema:

**Lema 3.1** *Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos em uma circunferência dada, e sejam  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  segmentos tangentes a essa circunferência (no mesmo lado da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ ) tais que  $AA' = BB'$ . Então existe uma circunferência tangente aos dois segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  nos pontos  $A'$  e  $B'$  respectivamente.*

**Demonstração.** Se  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  forem paralelos então a circunferência tangente a esses dois segmentos em  $A'$  e  $B'$  terá o mesmo raio que a circunferência dada:

Se  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  não forem paralelos então as retas que contêm estes segmentos se interceptam em um ponto  $P$ :

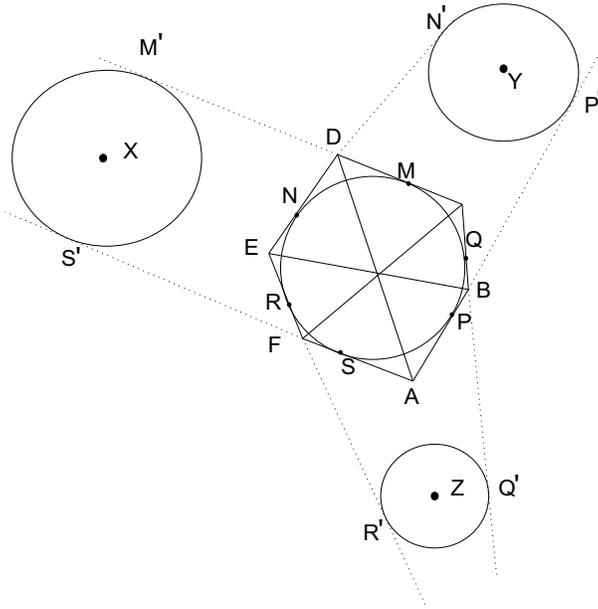


Como  $PA = PB$ , teremos que  $PA' = PB'$ . Seja  $O'$  o ponto de intersecção das perpendiculares aos segmentos  $\overline{PA'}$  e  $\overline{PB'}$  nos pontos  $A'$  e  $B'$  respectivamente. Mas então os triângulos retângulos  $\triangle PA'O'$  e  $\triangle PB'O'$  são congruentes (hipotenusas e um cateto congruentes). Segue-se que  $O'A' = O'B'$ , e portanto a circunferência de centro  $O'$  é tangente aos segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  nos pontos  $A'$  e  $B'$  respectivamente. ■

Agora vamos demonstrar o teorema de Brianchon.

**Demonstração.** Seja  $ABCDEF$  um hexágono circunscrito a uma circunferência, e sejam  $P, Q, M, N, R$  e  $S$  os pontos de tangência dos lados  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$  e  $\overline{FA}$  respectivamente.

Considere os segmentos  $MM''$  e  $SS'$ , respectivamente nas retas que contêm os lados  $\overline{FA}$  e  $\overline{CD}$ , os segmentos  $\overline{NN''}$  e  $\overline{PP'}$ , respectivamente nas retas que contêm os lados



opostos  $\overline{DE}$  e  $\overline{AB}$ , e os segmentos  $\overline{RR'}$  e  $\overline{QQ'}$ , respectivamente nas retas que contêm os lados opostos  $\overline{EF}$  e  $\overline{BC}$ , tais que

$$MM' = SS' = NN' = PP' = RR' = QQ'$$

Então, pelo lema, existem circunferências de centros  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , tangenciando respectivamente  $MM'$  e  $SS'$ ,  $NN'$  e  $PP'$ , e  $RR'$  e  $QQ'$ .

Como  $AP = AS$  segue-se que  $AP' = AS'$ , e portanto  $A$  está no eixo radical das circunferências de centros  $X$  e  $Y$ .

Analogamente pode-se concluir que a diagonal  $\overline{CF}$  está no eixo radical das circunferências de centros  $X$  e  $Z$ , e que a diagonal  $\overline{BE}$  está contida no eixo radical das circunferências de centros  $Z$  e  $Y$ .

Mas então, como os três eixos radicais se interceptam em um mesmo ponto (o centro radical das três circunferências), concluímos que as três diagonais se interceptam em um único ponto.



A recíproca do teorema de Brianchon é verdadeira no contexto da geometria projetiva, no seguinte sentido:

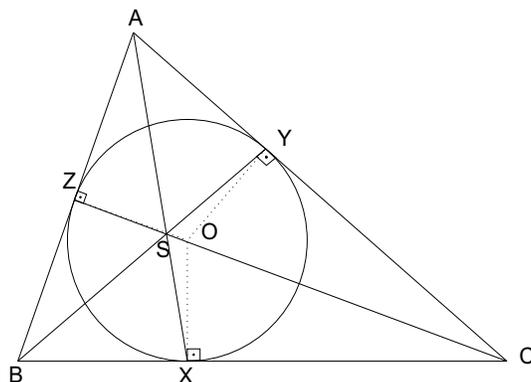
Se as três diagonais de um hexágono, cujas extremidades são vértices opostos, forem concorrentes, então os lados desse hexágono tangenciam uma cônica (que pode se degenerar em um par de pontos).

A recíproca para o caso da circunferência não é verdadeira.

### 3.3 Ponto de Gergonne

Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  pontos de tangência do incírculo do triângulo  $ABC$  com seus lados. Prove que as cevianas  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  são concorrentes, isto é, tem um ponto  $S$  em comum.

**Nota:** Este ponto é denominado de ponto de **Gergonne** em homenagem ao matemático Joseph Dias Gergonne (1771-1859), enquanto que as cevianas  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  são denominadas de cevianas de Gergonne.



**Demonstração.** Temos que  $AZ = AY$ ,  $BZ = BX$  e  $CX = CY$  veja tangência (1.5).

$$\text{Logo } \frac{BX}{CX} \cdot \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

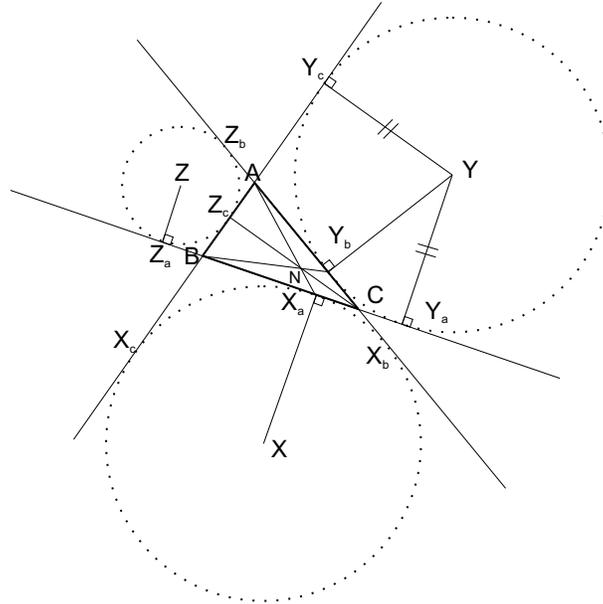
Portanto as cevianas,  $AX$ ,  $BY$  e  $CZ$  são concorrentes em um único ponto: O ponto de Gergonne.

### 3.4 Ponto de Nagel

Sejam  $X_a$ ,  $Y_b$  e  $Z_c$  pontos de tangência dos excírculos do triângulo  $\triangle ABC$  com os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ . Prove que as cevianas  $AX_a$ ,  $BY_b$  e  $CZ_c$  são concorrentes,

isto é, tem um ponto  $N$  em comum.

**Nota:** Este **ponto** é denominado de ponto de **Nagel** enquanto que as cevianas  $AX_a$ ,  $BY_b$  e  $CZ_c$  são denominadas de cevianas de Nagel (1803-1882).



**Demonstração.** Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  o comprimento dos lados do  $\triangle ABC$  com  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ , e seja  $p$  o semiperímetro do triângulo.

Então

$$\overline{AY_b} = \overline{BX_a} = p - c$$

$$\overline{BZ_c} = \overline{CY_b} = p - a$$

$$\overline{CX_a} = \overline{AZ_c} = p - b$$

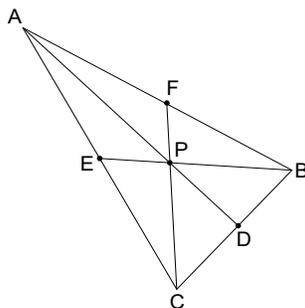
Logo

$$\frac{AY_b}{CY_b} \cdot \frac{BZ_c}{AZ_c} \cdot \frac{CX_a}{BX_a} = \frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-b}{p-c} = 1.$$

Portanto, as cevianas  $AX_a$ ,  $BY_b$  e  $CZ_c$  são concorrentes em um único ponto: o ponto de Nagel.

### 3.5 Outras Aplicações do Teorema de Ceva

**Problema 1** Num triângulo  $\triangle ABC$  as medianas se encontram num ponto chamado baricentro do  $\triangle ABC$ .



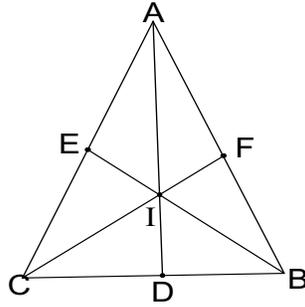
**Demonstração.** Seja o  $\triangle ABC$  e sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos médios dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente.

Temos que  $\overline{CD} = \overline{BC}$ ,  $\overline{AE} = \overline{CE}$  e  $\overline{BF} = \overline{AF}$ .

Logo  $\frac{CD}{BC} \cdot \frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF} = 1$ .

■

**Problema 2** As bissetrizes do triângulo  $\triangle ABC$  passam por um mesmo ponto chamado incentro do  $\triangle ABC$ .



**Demonstração.** Seja o  $\triangle ABC$  e sejam  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  as bissetrizes dos ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  respectivamente. Sejam ainda  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ .

Pelo Teorema das bissetrizes temos que:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{c}{b}, \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{a}{c}.$$

Multiplicando as frações temos

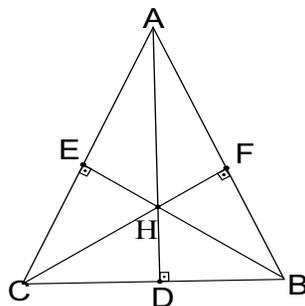
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1.$$

Logo

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1.$$



**Problema 3** As alturas do triângulo  $ABC$  passam pelo ponto  $H$  chamado ortocentro do triângulo  $ABC$ .



**Demonstração.** Seja o  $\triangle ABC$  e sejam  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  as alturas relativas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente. Sejam ainda  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $c = \overline{AB}$ . Temos que os triângulos  $AFC$  e  $AEB$  têm um ângulo agudo comum, o ângulo  $\hat{A}$  e são triângulos retângulos logo são semelhantes.

Assim

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}. \quad (3.10)$$

Temos também que  $\triangle BFC \sim \triangle BDA$  pois são triângulos retângulos e possuem um ângulo comum, o ângulo  $\hat{B}$ .

Assim

$$\frac{BD}{BF} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}. \quad (3.11)$$

Temos ainda que  $\triangle CEB \sim \triangle CDA$ , pois são triângulos retângulos e possuem um ângulo comum, o ângulo  $\hat{C}$ .

Assim

$$\frac{CE}{CD} \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{a}{b}. \quad (3.12)$$

Multiplicando (3.10), (3.11) e (3.12) temos

$$\frac{AF}{AE} \cdot \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CE}{CD} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

Cancelando os termos comuns temos:

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

■

# Capítulo 4

## Circunferência dos nove pontos

### 4.1 A Circunferência dos nove pontos

Neste capítulo vamos estudar a circunferência dos nove pontos, introduzir o conceito de inversão e demonstrar um bellissimo teorema devido ao matemático alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), o teorema de Feuerbach, que envolve a circunferência dos nove pontos e as circunferências inscritas e exscritas de um triângulo.

Em 1821 o matemático francês Poncelet demonstrou que para todo triângulo é possível encontrar uma circunferência passando pelos seguintes pontos:

- Os pontos médios dos lados;
- Os pés das alturas;
- Os pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro (ponto de encontro das alturas).

A esta circunferência damos o nome de circunferência dos nove pontos. Durante o século XIX foram descobertos diversos resultados sobre a circunferência dos nove pontos:

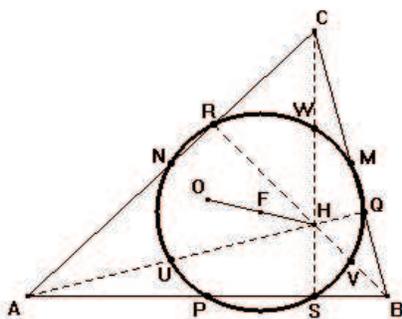
- O raio da circunferência dos nove pontos tem um comprimento igual a metade do comprimento do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.
- O centro da circunferência dos nove pontos está sobre a reta de Euler, a meia distância entre o ortocentro e o circuncentro.

- A circunferência dos nove pontos é tangente à circunferência inscrita e às três circunferências exinscritas do triângulo.

Tais resultados serão apresentados a seguir.

**Teorema 4.1** *Seja  $ABC$  um triângulo de circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ . Então, os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam  $H$  aos vértices (estes chamados pontos de Euler) estão em uma circunferência cujo centro é o ponto médio de  $OH$  e cujo raio é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Tal circunferência é chamada circunferência dos nove pontos do triângulo  $\triangle ABC$ .*

**Demonstração:** Sejam  $P$ ,  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente e  $Q$ ,  $R$  e  $S$  os pés das alturas correspondentes aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo  $\triangle ABC$ . Então  $NP = \frac{1}{2}BC = MS$ , pois  $\overline{NP}$  é a base média do  $\triangle ABC$  relativa ao lado  $BC$  e  $M$  é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo  $\triangle BSC$ . Logo o trapézio  $PSNM$  (note que  $\overline{MN}$  é paralelo a  $\overline{PS}$ ) é isósceles e concluímos que a circunferência  $\mathcal{F}$  que passa por  $M$ ,  $N$  e  $S$ , passa também por  $P$ . Conclui-se analogamente que  $\mathcal{F}$  passa por  $Q$  e  $R$ .



Os pontos  $Q$ ,  $R$  e  $S$  são também os pés das alturas do  $\triangle AHB$ ; o parágrafo acima aplicado ao  $\triangle AHB$ , mostra que o círculo que passa por  $R$ ,  $S$  e  $Q$  também passa pelos pontos médios,  $U$  e  $V$  dos lados  $\overline{AH}$  e  $\overline{BH}$  respectivamente. O ponto médio  $W$  de  $\overline{CH}$  é tratado do mesmo modo e temos os nove pontos em  $\mathcal{F}$ .

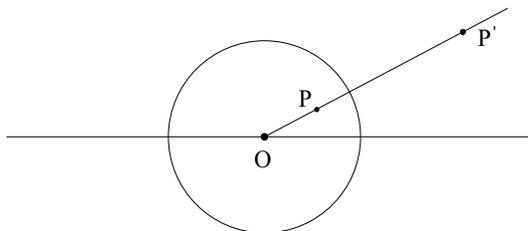
Observamos agora que o trapézio  $OPSH$  é retângulo em  $P$  e  $S$ ; logo a mediatriz de  $\overline{PS}$  passa pelo ponto médio  $F$  de  $\overline{OH}$ , e o mesmo acontece com as mediatrizes de  $\overline{QM}$  e  $\overline{RN}$ . Concluindo assim, que  $F$  é o centro de  $\mathcal{F}$ . Finalmente seja  $U$  o ponto médio de  $\overline{AH}$ ; então  $\overline{UF}$  é um raio de  $\mathcal{F}$  e é também base média do  $\triangle AOH$  relativa ao lado  $\overline{AO}$ . Como  $\overline{AO}$  é um raio do círculo circunscrito ao  $\triangle ABC$ , segue que o raio de  $\mathcal{F}$  é  $UF = \frac{1}{2}OA$ .

## 4.2 Inversão

Nesta seção vamos introduzir o conceito de inversão e estudar algumas propriedades importantes desta transformação para utiliza-las na demonstração do teorema de Feuerbach. No que se segue  $C(O, r)$  denotará a circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  e  $E$  um plano qualquer que contém  $O$ .

### 4.2.1 Definição

**Definição 4.1 (O inverso de um ponto.)** *Seja  $S = C(O, r)$ . Dado  $P \neq O$ , o ponto  $P'$  na semi-reta  $\overrightarrow{OP}$  tal que  $OP \cdot OP' = r^2$  é dito o inverso de  $P$  com relação a  $S$ .*



Observação: Como o produto  $OP \cdot OP'$  deve ser constante, quanto mais próximo um ponto estiver de  $O$ , mais distante de  $O$  o seu inverso estará.

**Definição 4.2 (Inversão.)** *Seja  $S = C(O, r)$ . A transformação  $I : E - \{O\} \rightarrow E - \{O\}$  que leva qualquer ponto  $P \in E - \{O\}$  em seu inverso com relação a  $S$  é dita a inversão com respeito a  $S$ . O ponto  $O$  é dito o centro de inversão e  $r$  a potência de inversão.*

Uma vez fixado o círculo de inversão, o inverso de qualquer figura  $X$  será indicado por  $X'$ , ou seja,  $I(X) = X'$ .

**Observações:** Considerando a inversão com respeito a um círculo  $S$  de centro  $O$ , note que:

1. Se  $P'$  é o inverso de  $P$ , então  $P$  é o inverso de  $P'$ .
2.  $(P')' = P$  para qualquer  $P$ .
3.  $P$  é interno a  $S$  se e somente se  $P'$  é externo a  $S$ .
4. Se  $P \neq Q$  então  $P' \neq Q'$  (pontos distintos possuem inversos distintos)
5. Se  $A, B$  e  $C$  estão nesta ordem em uma semi-reta de origem  $O$  então  $A', B'$  e  $C'$  estão na mesma semi-reta em ordem inversa.
6. Se  $P \in S$  então  $P' = P$  (ou seja, os pontos de  $S$  são pontos fixos da transformação  $I$ ).

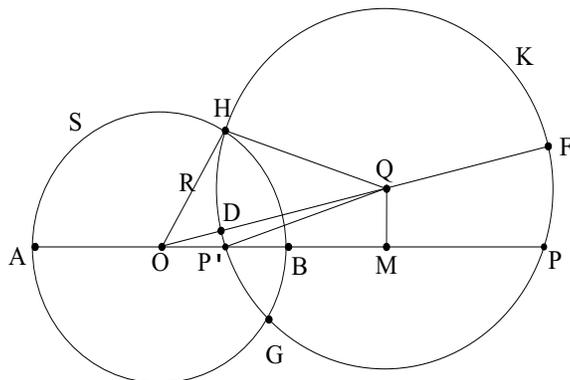
No que se segue, consideremos a inversão em relação a uma circunferência  $S = C(O, r)$ .

#### 4.2.2 Equivalências para inversão.

Sejam  $\overline{AB}$  um diâmetro de  $S$  e  $P, P' \in \overline{OB}$ . Então os teoremas 4.2 e 4.3 a seguir nos dão as seguintes equivalências para inversão:

**Teorema 4.2**  $P$  e  $P'$  são inversos com relação a  $S$  se e somente se qualquer circunferência que passa por  $P$  e  $P'$  é ortogonal a  $S$ .

**Demonstração** Seja  $K = C(Q, k)$ , uma circunferência com centro em  $Q$  e raio  $k$ , que passa por  $P$  e  $P'$ . Sejam  $G$  e  $H$  os pontos de intersecção das circunferências  $S$  e  $K$ , (note que um dos dois pontos,  $P$  ou  $P'$ , é interno a  $S$ , e portanto a circunferências se interceptam.)



Lembramos que duas curvas são ortogonais em um ponto de intersecção se as retas tangentes às curvas nesse ponto forem perpendiculares. Duas circunferências que se interceptam em dois pontos são ortogonais nesses dois pontos, se os seus raios forem respectivamente perpendiculares nesses pontos.

Vamos provar que  $OQ^2 = r^2 + k^2$ , e daí teremos que o  $\triangle OHQ$  é retângulo em  $H$  ( e o  $\triangle OGQ$  é retângulo em  $M$ ).

Seja  $M$  o pé da perpendicular traçada de  $Q$  à reta  $\overleftrightarrow{OP}$ .

$$\text{Temos que, no } \triangle OQM, OQ^2 = OM^2 + QM^2 \quad (4.1)$$

Como:  $OM = OP' + P'M$  então:

$$\begin{aligned} OM &= (OP' + P'M) \\ OM^2 &= \left( OP' + \frac{PP'}{2} \right)^2 \\ &= \left( OP' + \frac{OP - OP'}{2} \right)^2 \\ &= \left( \frac{OP + OP'}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Além disso no  $\triangle QMP'$  temos:

$$QM^2 = OP' - P'M^2$$

$$\begin{aligned}
&= k^2 - \left(\frac{PP'}{2}\right)^2 \\
&= k^2 - \left(\frac{OP - OP'}{2}\right)^2. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.2) e (4.3) em (4.1) obtemos:

$$OQ^2 = OP \cdot OP' + k^2,$$

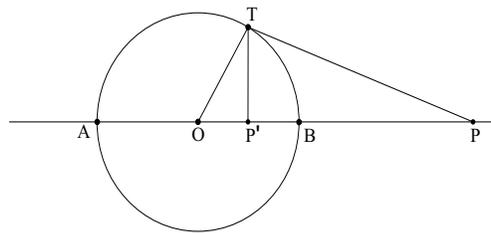
e como pela hipótese  $OP \cdot OP' = r^2$ , então  $OQ^2 = r^2 + k^2$ .

Portanto a circunferência  $K$  é ortogonal a  $S$ .

Suponha agora que  $K$  é uma circunferência ortogonal a  $C$  então  $OQ^2 = r^2 + k^2$ . Sejam  $P$  e  $P'$  em  $K$  tais que  $O$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares. Sejam ainda  $D$  e  $F$  pontos da intersecção de  $K$  com a semi-reta  $\overrightarrow{OQ}$ . Pela potência do ponto  $O$  em relação a circunferência  $K$  temos, de  $OF = OQ + k$  e  $OD = OQ - k$ , que  $OP \cdot OP' = OF \cdot OD = (OQ + k) \cdot (OQ - k) = OQ^2 - k^2 = r^2$ . Portanto  $P$  e  $P'$  são inversos em relação a  $S$ .

**Observação:** A segunda parte do teorema nos mostra que o inverso de uma circunferência ortogonal a  $S$  é essa própria circunferência.

**Teorema 4.3**  $P$  e  $P'$  são inversos em relação a  $S$  se e somente se  $P$  e  $P'$  são conjugados harmônicos em relação a  $A$  e  $B$ .



**Demonstração:** Da figura temos que:

$$\begin{aligned}
PB = OP - r & \quad P'A = r + OP' \\
PA = OP + r & \quad P'B = r - OP'
\end{aligned}
\quad \text{e}$$

então

$$\frac{PA}{PB} = \frac{OP + r}{OP - r} \quad \text{e} \quad \frac{P'A}{P'B} = \frac{OP' + r}{r - OP'}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{PA}{PB} = \frac{P'A}{P'B} &\Leftrightarrow \frac{OP+r}{OP-r} = \frac{OP'+r}{r-OP'} \\
 &\Leftrightarrow (OP+r) \cdot (r-OP') = (OP-r) \cdot (OP'+r) \\
 &\Leftrightarrow 2r^2 = 2OP \cdot OP' \\
 &\Leftrightarrow r^2 = OP \cdot OP'
 \end{aligned}$$

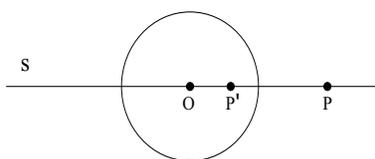
■

### 4.2.3 Inversão de retas e circunferências

**Teorema 4.4 (Retas e inversão)** *Seja  $s$  uma reta. Então o inverso de  $s$  é:*

1. a própria reta  $s$ , se  $s$  passa por  $O$ ;

**Demonstração:** *Seja  $s$  uma reta que passa por  $O$ . Se  $P \neq O$  está em  $s$ , então por definição,  $P'$  está em  $\overrightarrow{OP}$ , e portanto  $P'$  está em  $s$ .*



2. uma circunferência passando por  $O$ , se  $s$  não passa por  $O$ .

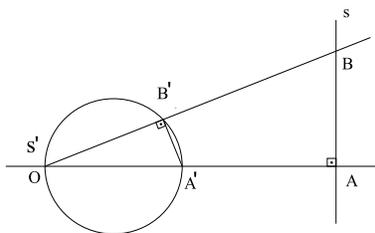


Figura 4.1: O inverso de uma reta que não passa por  $O$ .

**Demonstração:** *Seja  $A$  o pé da perpendicular traçada de  $O$  à reta  $s$ , e  $B$  um ponto qualquer, distinto de  $A$ , pertencente a  $s$ . Sejam  $A'$  e  $B'$  respectivamente os inversos*

de  $A$  e  $B$ . Então  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2 \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$ , e como o ângulo  $\angle AOB \equiv \angle B'OA'$ , temos que os triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OB'A'$  são semelhantes. Logo o ângulo  $\widehat{OB'A'}$  é reto o que nos mostra que  $B'$  pertence a circunferência  $s'$  que tem  $A'O$  como diâmetro.

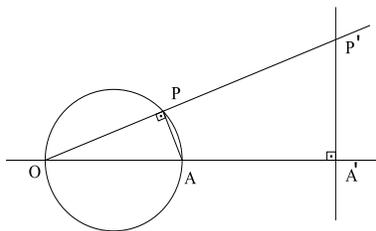
■

### Observações:

1. Note que a tangente a  $s'$  em  $O$  é paralela a  $s$ .
2. Na figura 4.1 acima, obviamente a reta  $s$  não intercepta a circunferência de inversão  $S$  (não desenhada). Se a reta  $s$  interceptar, ou tangenciar a circunferência  $S$  então os pontos de intersecção serão pontos fixos da transformação.

**Teorema 4.5 (Circunferências e inversão)** *Seja  $C$  uma circunferência. Então o inverso de  $C$  é:*

1. *uma reta, se  $C$  passa por  $O$ ;*



2. *uma circunferência, se  $C$  não passa por  $O$ .*

**Demonstração do item 1:** Seja  $A$  o ponto tal que  $\overline{OA}$  é diâmetro de  $C$ . Seja  $A'$  o inverso de  $A$ , e seja  $s$  a reta perpendicular a  $\overleftrightarrow{OA}$  passando por  $A'$ . Seja  $P$  um ponto qualquer de  $C$ . Use então o fato de  $(P')' = P$  e o teorema 4.4, item 2, para mostrar que  $s$  é o mesmo inverso de  $C$ .

**Demonstração do item 2:** Consideremos uma circunferência  $C$  que não passa por

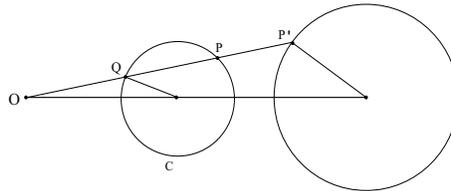


Figura 4.2: O inverso de um círculo

$O$ . Seja  $P$  um ponto de  $C$ ,  $P'$  o seu inverso e  $Q$  o outro ponto em que a reta  $OP$  corta  $C$ .

Uma propriedade fundamental da circunferência é que o produto  $OP \cdot OQ$  é igual a uma constante  $p$  (a potência de  $O$  em relação a  $C$ ) para qualquer posição de  $P$ . Assim,  $\frac{OP'}{OQ} = \frac{OP \cdot OP'}{OP \cdot OQ} = \frac{r^2}{p}$  (Se  $OP$  é tangente a  $C$  então  $Q = P$  e  $OP^2 = p$ ).

Portanto, o ponto  $P'$  é a imagem de  $Q$  pela homotetia de centro  $O$  e razão  $\frac{r^2}{p}$ . Uma homotetia sempre transforma uma figura em outra semelhante (ela faz uma ampliação ou redução da figura, conforme  $\frac{r^2}{p}$  seja maior ou menor que 1). Em particular, o transformado de um círculo por homotetia é sempre um outro círculo. Em resumo: o inverso de um círculo (que não passa pelo centro de inversão  $O$ ) é um outro círculo, obtido através de uma homotetia de centro  $O$ .

**Observação:** Note que, em geral, o centro do círculo transformado não é o inverso do centro do círculo original. Note ainda que  $P'$  não é o inverso de  $Q$  ( exceto se  $Q$  for ponto de tangência de  $\overleftrightarrow{OP'}$  em  $C$ ).

#### 4.2.4 Invariância por inversão

##### Teorema 4.6 (Invariância por inversão)

1. Uma reta  $s$  é invariante por inversão se e somente se  $s$  passa por  $O$ .

**Demonstração:** Provado no teorema 4.4, item 1.

2. Uma circunferência  $C$  é invariante por inversão se e somente se  $C$  é ortogonal a  $S$ .

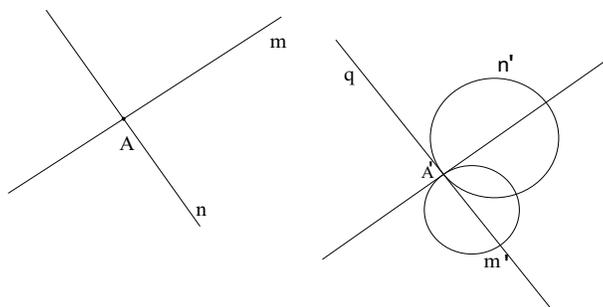
**Demonstração:** Provado no teorema 4.2.

## 4.2.5 Inversão como uma transformação conforme

**Teorema 4.7 (Inversão preserva ângulos entre retas)** *Sejam  $m$  e  $n$  duas retas que se interceptam em  $A$ . Então  $m'$  e  $n'$  se interceptam em  $A'$  fazendo o mesmo ângulo que o de  $m$  e  $n$ .*

*Se  $A$  for o ponto  $O$  então  $m'$  e  $n'$  e  $m$  e  $n$  (Teorema 4.4, item (2)) e a tese é verdadeira.*

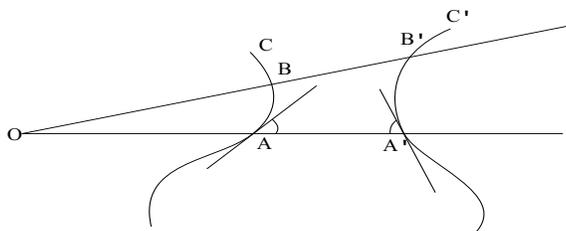
**Demonstração:** Suponhamos que  $A \neq O$  e que as retas em questão não passem por  $O$ . Sabemos que  $m'$  é uma circunferência passando por  $O$  cuja tangente  $p$  em  $O$  é paralela a  $m$ ; o mesmo vale para  $n'$  e sua tangente  $q$  em  $O$ .



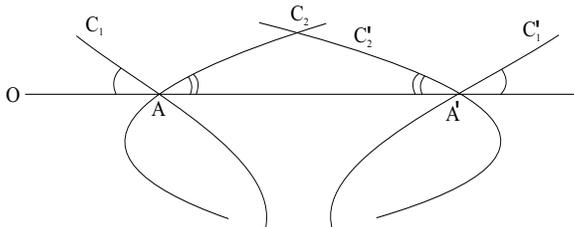
O ângulo entre  $m'$  e  $n'$  é então o ângulo entre  $p$  e  $q$ ; mas este é também o ângulo entre  $m$  e  $n$  em  $A$ , o que queríamos mostrar. ■

Decorrem diretamente do teorema 4.7 as seguintes propriedades:

**Propriedade 1a.** Seja  $A$  um ponto qualquer numa curva  $C$ . O ângulo entre a curva  $C$  e a reta  $\overrightarrow{OA}$  é igual ao ângulo entre a curva  $C'$  e a reta  $\overrightarrow{OA'} \equiv (\overrightarrow{OA})$ .



**Propriedade 1b.** Se duas curvas  $C_1$  e  $C_2$  cortam-se no ponto  $A$  fazendo um ângulo  $\alpha$ , suas inversas  $C_1'$  e  $C_2'$  cortam-se em  $A'$  fazendo o mesmo ângulo  $\alpha$ .



**Corolários.** Inversões transformam circunferências tangentes em circunferências tangentes (ou circunferência e reta tangentes, em circunferência e reta tangentes, ou em retas paralelas), circunferências ortogonais em circunferências ortogonais (ou circunferência e reta ortogonais, em circunferência e reta ortogonais, ou em retas perpendiculares); ...

### 4.3 Teorema de Feuerbach

**Teorema 4.8 (Teorema de Feuerbach.)** *Sejam  $\triangle ABC$  um triângulo e  $\mathcal{F}$  sua circunferência dos nove pontos. Então  $\mathcal{F}$  é tangente às quatro circunferências tritangentes aos lados do triângulo (as circunferências inscrita e as três excritas).*

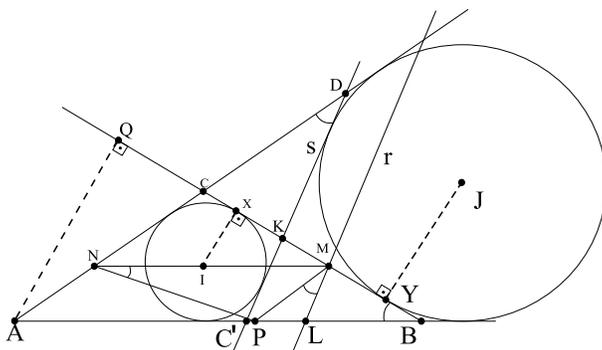
Antes de demonstrar o teorema devido ao matemático alemão Karl Wilhelm Feuerbach<sup>1</sup> (1800-1834), vejamos os seguintes resultados preliminares:

Sejam  $ABC$  um triângulo e  $\mathcal{F}$  a sua circunferência dos nove pontos. Sejam  $I$  o incentro da circunferência inscrita e  $J$  o centro de uma das circunferências excritas ao  $\triangle ABC$ , que escolhermos tangente internamente ao lado  $\overline{BC}$ . Temos determinadas três tangentes comuns a estas circunferências, a saber, as retas  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ . A quarta

<sup>1</sup>Matemático e notável geômetra alemão nascido em Jena, que embora tenha morrido ainda jovem, destacou-se como geômetra tendo publicado um livro com vários teoremas, inclusive tem seu nome lembrado pelo belíssimo teorema do círculo de nove pontos (1822), também chamado de teorema da circunferência de Feuerbach ou circunferência de Euler-Feuerbach. Filho do famoso criminalista alemão Paul Johann Anselm Ritter von Feuerbach (1775-1833), foi um brilhante estudante e aos 22 anos já tinha publicado artigos extremamente importantes em matemática. Recebeu seu doutorado e foi nomeado professor do Gymnasium, em Erlangen, onde havia sido educado. Infelizmente, com a saúde extremamente debilitada, foi obrigado a deixar o ensino (1828) e viveu apenas mais seis anos como um recluso, em Erlangen. Foi um dos inventores das chamadas coordenadas homogêneas e morreu em Erlangen, Alemanha.

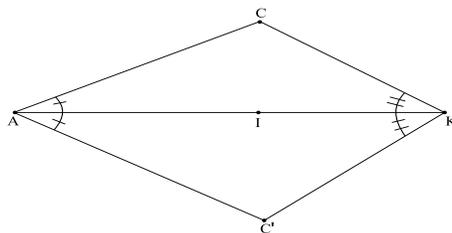
tangente, que denotamos por  $s$ , passa pelo pé da bissetriz  $\overrightarrow{AI}$  em  $\overline{BC}$ , que denotamos por  $K$  (os pontos  $A, I, K$  e  $J$  são colineares - veja os resultados de tangência).

Sejam  $X$  e  $Y$  os pontos de tangência do lado  $\overline{BC}$  com as circunferências inscrita e exorta respectivamente. Na figura abaixo  $M, N$  e  $P$  são os pontos médios dos lados  $\overline{BC}, \overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente,  $Q$  o pé da altura relativa ao vértice  $A$ ,  $D$  e  $C'$  os pontos de interseção de  $s$  com  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  respectivamente.

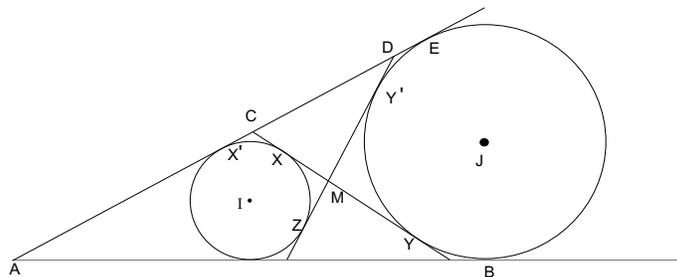


**Lema 4.1** *Seja  $\mathcal{F}$  a circunferência dos nove pontos do triângulo  $\triangle ABC$  e  $r$  a tangente a  $\mathcal{F}$  por  $M$ . Então  $r$  é paralela a  $s$ .*

**Demonstração:** Como  $r$  é tangente a  $\mathcal{F}$  em  $M$ , o ângulo  $\alpha$  que  $r$  faz com a corda  $\overline{PM}$  é igual a  $\widehat{P\hat{N}M}$ , pois  $\alpha$  é um ângulo de segmento. Temos também que  $\widehat{P\hat{N}M} = \widehat{P\hat{B}M}$ , pois  $PBMN$  é um paralelogramo. Por outro lado sejam os triângulos  $\triangle ACK$  e  $\triangle AC'K$ . Então pelo resultado (sobre tangentes a duas circunferências) temos que  $AK$  é bissetriz dos ângulos  $\widehat{C\hat{A}C'}$  e  $\widehat{C\hat{K}C'}$ . Segue-se que  $\triangle ACK \cong \triangle AC'K$  (caso ALA) e então  $\widehat{A\hat{C}K} = \widehat{A\hat{C}'K}$  e  $AC = AC'$ . Daí  $\triangle ADC' \cong \triangle ABC$  (pelo caso ALA). Portanto,  $\widehat{A\hat{B}C} = \widehat{A\hat{D}K}$ . Deste modo  $r$  e  $s$  fazem ângulos iguais com as retas paralelas  $\overline{AC}$  e  $\overline{PM}$ , e segue que  $r$  e  $s$  são paralelas. ■



**Lema 4.2**  $M$  é o ponto médio de  $XY$ .



**Demonstração.** Sejam  $DX'$  e  $DZ$  tangentes à circunferência de centro  $I$  por  $D$  e sejam  $DY'$  e  $DE$  tangentes à circunferência de centro  $J$  por  $D$ . Logo  $DX' = DZ$  e  $DY' = DE$ . Como,

$$DX' = EX' - DE \text{ e } DZ = ZY' + DY'$$

então

$$ZY' + DY' = EX' - DE$$

fazendo  $DY' = DE = m$  temos que

$$2m = EX' - ZY' \tag{4.4}$$

Sejam  $CE$  e  $CY$  tangentes à circunferência de centro  $J$  por  $C$  e sejam  $CX$  e  $CX'$  tangentes à circunferência de centro em  $I$ . Logo  $CE = CY$  e  $CX = CX'$ . Como,

$$CY = XY + CX \text{ e } CE = EX' - CX'$$

então

$$XY + CX = EX' - CX'$$



# Conclusão

A idéia de fazer um trabalho em Geometria Euclidiana que pudesse atingir tanto os alunos do Ensino Médio quanto os alunos da Graduação foi o que me motivou a escolher e escrever sobre este assunto, que após muito esforço e dedicação repercutiu no que acabamos de apresentar.

Dentro da geometria tínhamos um leque muito grande de conteúdos a serem estudados, porém tivemos que selecioná-los para aprofundarmos o assunto escolhido e para que o trabalho não ficasse muito extenso.

Assim focamos o trabalho nos resultados que envolvem Colinearidade e Concorrência dando destaque aos teoremas de Menelaus e de Ceva que simplificam demonstrações muitas vezes consideradas "difíceis" ou extensas.

Espera-se que os objetivos propostos tenham sido atingidos com a realização deste trabalho ao tornar mais conhecidos alguns teoremas da Geometria Euclidiana Plana e suas aplicações.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.
- [2] Coxeter, H.S.M., Greitzer, S.L. *Geometry Revisited, The Mathematical Association of America*. Washington, 1967.
- [3] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- [4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana..* 6<sup>a</sup> ed. São Paulo: Atual, 1985.
- [5] F.I.C. *Elementos de Geometria*. F. Briguier & Cia., Rio de Janeiro, 1945, 12<sup>a</sup> ed.
- [6] *Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina*. Universidade Federal de Santa Catarina. Centro de Ciências físicas e matemática.- n.1(2004)-.- Florianópolis:[s.u], 2004-v.:3(2006);v.:4(2007).
- [7] Pinho, J.L.R.; Batista, E., Carvalho, N.T.B. *Geometria I*. Curso EaD, UFSC, 2005.
- [8] REZENDE, Eliane Quelho Frota; de QUEIROZ, Maria Lúcia Bonterim. *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Editora da Unicamp; São Paulo- SP: Imprensa Oficial, 2000.