

João Carlos Bez Batti

A Equação da Corda Vibrante

Florianópolis – SC

Janeiro de 2008

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

A Equação da Corda Vibrante

João Carlos Bez Batti

Orientador: Gustavo Adolfo Torres da Costa

Florianópolis – SC

Janeiro de 2008

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 01/CCM/08.

Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Gustavo Adolfo Torres da Costa
Orientador

Prof. Eliezer Batista

Prof. Luiz Saeger

Sumário

Introdução	3
1 Equações Diferenciais	5
1.1 Terminologia e Definições Básicas	5
2 EDO's de 1ª e 2ª Ordem	8
2.1 EDO Linear de 1ª Ordem	9
2.2 EDO Linear de 2ª Ordem	11
2.3 Casos Especiais da Equação (2.6)	18
3 Convergência Uniforme e Série de Fourier	20
3.1 Convergência Uniforme	20
3.2 Séries de Fourier	26
3.3 Funções Periódicas de Período $2L$	32
3.4 Extensão Par e Ímpar de Uma Função	33
4 A Equação da Onda	36
4.1 Equação Diferencial Para Pequenas Oscilações de Uma Corda	36
4.2 O Problema Misto	42

	2
4.3 Unicidade de Solução	56
4.4 Harmônicos, Frequência e Amplitude	58
5 Solução de D'Alambert	60
5.1 Solução da Equação da Onda por D'Alambert	60
5.2 Problema de Cauchy	63
Bibliografia	68

Introdução

As Equações Diferenciais possuem uma aplicação muito ampla na área da Modelagem Matemática. Um exemplo que justifica essa afirmação é a Equação da Onda, que é usada para modelar fenômenos ondulatórios como, por exemplo: as ondas no oceano, as vibrações de uma corda, etc.

Este trabalho é constituído por cinco capítulos. O primeiro capítulo possui algumas definições básicas a respeito das equações diferenciais, assim como suas classificações de acordo com tipo, ordem e linearidade.

O segundo capítulo está dividido em três seções. As duas primeiras seções tratam das soluções gerais de EDO's lineares de primeira e segunda ordem, respectivamente. Além disso, apresenta-se na segunda seção dois teoremas. O primeiro teorema é um critério para analisar se duas funções são linearmente dependentes, fato importante para a caracterização das soluções das EDO's lineares, homogêneas de segunda ordem, que é o resultado do segundo teorema. A terceira seção é destinada para alguns casos especiais da solução de EDO's lineares, homogêneas de segunda ordem.

No terceiro capítulo serão enunciados alguns teoremas, sem prova, e definições sobre convergência de funções: pontual e uniforme, que serão úteis no desenrolar dos capítulos seguintes. Além disso, será introduzida a definição de séries de Fourier para funções periódicas de período 2π e $2L$, juntamente com a definição de extensão par e ímpar de funções.

No quarto capítulo será deduzida a equação da onda para pequenas oscilações de

uma corda, usando para tal a Segunda Lei de Newton. Depois disso, encontrar-se-á uma solução para a equação da onda, no caso de uma corda de comprimento finito, usando para tal a técnica de separação de variáveis e através da demonstração de um teorema mostrar-se-á que de fato essa solução é geral. Para finalizar será provada a unicidade dessa solução.

A solução da equação da onda, numa corda infinita, através do método de D'Alambert será o assunto principal do capítulo cinco, porém, também será resolvido o problema de Cauchy.

O estudo da equação da onda em dimensões maiores do que um (equação da membrana retangular, circular,...) merecia uma atenção maior, que devido ao pouco tempo que se tinha disponível não foi possível incorporá-lo nesse trabalho, ficando como sugestão para pesquisas posteriores.

Capítulo 1

Equações Diferenciais

1.1 Terminologia e Definições Básicas

Definição 1.1 Uma igualdade que inclui uma função e as suas derivadas em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de *equação diferencial* (ED). A função é a incógnita na equação.

As equações diferenciais são classificadas de acordo com o seu tipo, ordem e linearidade.

Classificação Pelo Tipo

Em relação ao seu tipo, uma equação diferencial pode ser classificada em: *ordinária* ou *parcial*.

Equação Diferencial Ordinária (EDO): é uma equação que contém apenas derivadas ordinárias totais de uma função de uma variável com relação a esta única variável independente.

São exemplos de EDO:

- a) $\frac{du}{dx} - 5u = 1$
- b) $(u - x) + 4x \frac{du}{dx} = 0$
- c) $\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} = x$
- d) $\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{2u}{dx} + 6u = 0$

Equação Diferencial Parcial (EDP): é uma equação que envolve as derivadas parciais de uma função de várias variáveis em relação a estas variáveis independentes.

São exemplos de EDP:

- a) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$
- b) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$
- c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y}$

Nos exemplos acima, u é a função incógnita ou variável dependente e x, y são as variáveis independentes.

Classificação Pela Ordem

Chama-se ordem de uma equação diferencial, a ordem da derivada de maior ordem da equação.

Considere os seguintes exemplos:

- a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 2y = e^x$

A equação acima é uma equação ordinária de 2ª ordem ou ordem 2.

$$\text{b) } a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Essa equação é uma equação diferencial parcial de 4ª ordem.

Neste trabalho, vamos considerar apenas equações diferenciais de 1ª e 2ª ordem, no caso das EDO e somente de 2ª ordem, no caso das EDP.

Classificação Como Linear ou Não-Linear

Uma equação diferencial é chamada de linear se pode ser colocada na forma

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0.$$

Uma equação que não é linear é chamada *não-linear*

Exemplos de equações não lineares:

$$\text{a) } \frac{d^2 y}{dx^2} + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0$$

$$\text{b) } \frac{dy}{dx} + x \cos y = y^2$$

$$\text{c) } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial y}{\partial t} = \text{sen } y$$

Exemplos de equações lineares:

$$\text{a) } \cos x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

$$\text{b) } y'' - 2y' + y = 0$$

$$\text{c) } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

$$\text{d) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \cos x$$

$$\text{e) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Capítulo 2

EDO's de 1^a e 2^a Ordem

Definição 2.1 (Solução de Uma Equação Diferencial) Chama-se solução de uma equação diferencial num determinado intervalo aberto I , qualquer função definida em I , que satisfaz à equação.

Exemplo 2.1 A função $y = xe^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ é uma solução para a equação linear:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

pois

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^x) + (-2)\frac{d}{dx}(xe^x) + xe^x = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

para todo $x \in (-\infty, +\infty)$. Logo $y = xe^x$ é solução dessa equação diferencial.

Veja que a função $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, também satisfaz a mesma equação e, portanto, é outra solução.

Uma função identicamente nula que é solução de uma equação diferencial num determinado intervalo I é dita solução *trivial*.

Uma equação diferencial, em geral, pode possuir uma infinidade de soluções. Por exemplo, por uma simples substituição verifica-se que para cada valor de $c \in \mathbb{R}$, a função

$$y = ce^{x^2}$$

é uma solução particular da equação

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0.$$

Da mesma forma, verifica-se que para cada valor de $c \in \mathbb{R}$, a função

$$y = cxe^x$$

é uma solução particular da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

2.1 EDO Linear de 1ª Ordem

Definição 2.2 Uma equação diferencial linear, de 1ª ordem, com coeficientes constantes é uma equação da forma:

$$\frac{du}{dx} + au = f(x), \quad x \in I \quad (2.1)$$

onde supomos que f é uma função definida e contínua num intervalo aberto I e $a \in \mathbb{R}$.

Solução Geral

Ao multiplicar ambos os membros da equação (2.1) por e^{ax} obtém-se:

$$e^{ax} \frac{du}{dx} + aue^{ax} = e^{ax} f(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx}(ue^{ax}) = e^{ax} f(x) \quad (2.2)$$

Como f é contínua em I , $e^{ax} f(x)$ admite primitiva em I , então de (2.2), integrando ambos os membros, tem-se:

$$ue^{ax} = k + \int e^{as} f(s) ds.$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Multiplicando ambos os membros por e^{-ax} , obtém-se:

$$u(x) = ke^{-ax} + e^{-ax} \int e^{as} f(s) ds \quad (2.3)$$

com k uma constante. Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, $u(x)$ é uma solução particular da equação (2.3). Portanto, a equação (2.3) admite uma infinidade de soluções. Vamos chamar (2.3) de solução geral da equação (2.1).

Exemplo 2.2 Considere a equação $\frac{du}{dx} - 3u = e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Vamos obter a solução geral e a solução particular que satisfaz $u(0) = 1$.

a) Como foi visto a solução geral é da forma da equação (2.3) com $a = -3$ e $f(x) = e^x$, então tem-se:

$$u(x) = ke^{3x} + e^{3x} \int e^{-3x} \cdot e^x dx$$

$$u(x) = ke^{3x} + e^{3x} \int e^{-2x} dx$$

mas,

$$\int e^{-2x} dx = \frac{-e^{-2x}}{2},$$

logo

$$u(x) = ke^{3x} + e^{3x} \cdot \left(\frac{-e^{-2x}}{2} \right)$$

$$u(x) = ke^{3x} - \frac{e^x}{2}$$

b) Agora precisa-se determinar k para se ter $u(0) = 1$.

$$1 = ke^{3 \cdot 0} - \frac{e^0}{2}$$

$$1 = k \cdot 1 - \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Com isso a solução que satisfaz a condição $u(0) = 1$ é dada por:

$$u(x) = \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{e^x}{2}$$

$$u(x) = \frac{3e^{3x} - e^x}{2}$$

2.2 EDO Linear de 2ª Ordem

Definição 2.3 (Dependência Linear) Diz-se que as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são *linearmente dependentes* (LD) num intervalo I se existem constantes c_1, c_2 não simultaneamente nulas tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad (2.4)$$

para todo x no intervalo I .

Definição 2.4 (Independência Linear) Diz-se que as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são *linearmente independentes* (LI) num intervalo I se a equação (2.4) é satisfeita para todo $x \in I$ apenas para $c_1 = c_2 = 0$.

Teorema 2.1 Suponha que $f_1(x)$ e $f_2(x)$, $x \in I$, sejam deriváveis no intervalo I . Se o determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

em todo ponto do intervalo I , então as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são linearmente independentes nesse intervalo. O determinante acima é denotado por $\mathcal{W}(f_1(x), f_2(x))$ e é chamado de *wronskiano* das funções f_1 e f_2 .

Exemplo 2.3 As funções $f_1(x) = \cos \beta x$ e $f_2(x) = \sin \beta x$, com $\beta \neq 0$, $x \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ são LI.

De fato, f_1 e f_2 são deriváveis e $f_1'(x) = -\beta \sin \beta x$, $f_2'(x) = \beta \cos \beta x$.

Com isso temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ -\beta \sin \beta x & \beta \cos \beta x \end{vmatrix} \\ &= \beta \cos^2 \beta x + \beta \sin^2 \beta x = \beta(\sin^2 \beta x + \cos^2 \beta x) = \beta \cdot 1 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{W}(f_1, f_2) = \beta$.

Como $\beta \neq 0$ tem-se que $\mathcal{W} \neq 0$; logo, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são LI no intervalo I .

Teorema 2.2 Sejam f_1 e f_2 , duas soluções LI de uma EDO linear, homogênea de 2ª ordem num intervalo I . Então toda solução dessa equação é uma combinação linear de f_1 e f_2 . Com isso a solução geral para essa EDO é

$$u(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x), \quad x \in I.$$

Definição 2.5 Uma EDO linear de 2ª ordem, com coeficientes constantes, é uma equação da forma:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + cu = f(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R} \quad (2.5)$$

com $b, c \in \mathbb{R}$, I um intervalo aberto e f é uma função contínua definida em I .

Quando $f(x) = 0$ em todo I , a equação

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + cu = 0 \quad (2.6)$$

é chamada *homogênea*, do contrário, é chamada *não-homogênea*.

Solução Geral da Equação Homogênea

Suponha que para um certo λ , $u = e^{\lambda x}$ é solução de (2.6). Então,

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{\lambda x}) + b \frac{d}{dx}(e^{\lambda x}) + ce^{\lambda x} = 0,$$

o que dá

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0,$$

que só é válida se

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.7)$$

Podemos concluir que, $u = e^{\lambda x}$ é solução da equação (2.6) se λ for raiz da equação (2.7).

Definição 2.6 A equação algébrica (2.7) é chamada *equação característica* de (2.6).

Teorema 2.3 Suponha que (2.7) tenha raízes reais λ_1 e λ_2 . Então:

i) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a equação (2.6) tem solução geral

$$u(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \quad (2.8)$$

com $A, B \in \mathbb{R}$.

ii) Se $\lambda_1 = \lambda_2$ a equação (2.6) tem solução geral

$$u(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}, \quad (2.9)$$

com $A, B \in \mathbb{R}$.

iii) Se as raízes forem complexas, isto é, $\lambda = \alpha \pm \beta i$, nesse caso,

$$u(x) = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x], \quad (2.10)$$

com $A, B \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sejam λ_1 e λ_2 as raízes reais da equação

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Nesse caso,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -b$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = c$$

Substituindo em (2.6):

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{du}{dx} + \lambda_1 \lambda_2 u = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{du}{dx} - \lambda_1 u \right] - \lambda_2 \left[\frac{du}{dx} - \lambda_1 u \right] = 0$$

Defina

$$g(x) = \frac{du}{dx} - \lambda_1 u \quad (2.11)$$

temos:

$$\frac{d}{dx}g(x) - \lambda_2 g(x) = 0 \quad (2.12)$$

Vamos provar que $u(x)$ é solução da equação (2.6) se e somente se $g(x)$ é solução da equação (2.12).

Comparando (2.12) com (2.1), cuja solução geral é dada por (2.3), segue que:

$$g(x) = ke^{\lambda_2 x} \quad (2.13)$$

Então $u(x)$ é solução da equação (2.6), se e somente se, satisfaz

$$\frac{du}{dx} - \lambda_1 u = ke^{\lambda_2 x} \quad (2.14)$$

Comparando esta última equação com as equações (2.1) e (2.3), obtemos que

$$u(x) = Ce^{\lambda_1 x} + ke^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx \quad (2.15)$$

Analisemos a solução (2.15) nos casos:

1º Caso:

Para $\lambda_1 \neq \lambda_2$ segue que

$$u(x) = Ce^{\lambda_1 x} + ke^{\lambda_1 x} \cdot \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} = Ce^{\lambda_1 x} + \left(\frac{k_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{\lambda_2 x}$$

Definindo $A = C$ e $B = \frac{k_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$ tem-se

$$u(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \quad (2.16)$$

2º Caso:

Para $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$u(x) = Ce^{\lambda_1 x} + ke^{\lambda_1 x} \int dx$$

$$u(x) = Ce^{\lambda_1 x} + ke^{\lambda_1 x} [x + D]$$

$$u(x) = Ce^{\lambda_1 x} + ke^{\lambda_1 x} x + kDe^{\lambda_1 x}$$

$$u(x) = (\mathcal{C} + kD)e^{\lambda_1 x} + ke^{\lambda_1 x}x$$

Fazendo $A' = \mathcal{C} + kD$ e $B' = k$, segue que

$$u(x) = A'e^{\lambda_1 x} + B'e^{\lambda_1 x}x$$

$$u(x) = e^{\lambda_1 x}(A' + B'x) \quad (2.17)$$

3º Caso:

Sejam u e g tais que

$$u(x) = e^{-\frac{b}{2}x} \cdot g(x) \quad (2.18)$$

Afirmamos que a função $u(x)$ é solução da equação (2.6) se, e somente se, g é solução da equação

$$\frac{d^2}{dx^2}g + \left(\frac{-\Delta}{4}\right)g = 0 \quad (2.19)$$

onde Δ é o discriminante da equação

$$\lambda^2 - b\lambda + c = 0 \quad (2.20)$$

ou seja,

$$\Delta = b^2 - 4c \quad (2.21)$$

Nesse caso, $\Delta < 0$ e $\lambda = \alpha \pm \beta i$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2}u + b\frac{d}{dx}u + c \\ &= \frac{d^2}{dx^2}[e^{-\frac{b}{2}x}g] + b\frac{d}{dx}[e^{-\frac{b}{2}x}g] + c \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como

$$\frac{d}{dx}[e^{-\frac{b}{2}x}g] = -\frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x}g + e^{-\frac{b}{2}x}\frac{d}{dx}g$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} [e^{-\frac{b}{2}x}g] &= \frac{d}{dx} \left[-\frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x}g + e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d}{dx}g \right] \\
&= -\frac{b}{2} \left[-\frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x}g + e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d}{dx}g \right] - \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d}{dx}g + e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d^2}{dx^2}g \\
&= \frac{b^2}{4}e^{-\frac{b}{2}x}g - \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d}{dx}g - \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d}{dx}g + e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d^2}{dx^2}g \\
&= \frac{b^2}{4}e^{-\frac{b}{2}x}g - be^{-\frac{b}{2}x} \frac{d}{dx}g + e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d^2}{dx^2}g.
\end{aligned}$$

substituindo esses resultados em (2.22) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{4}e^{-\frac{b}{2}x}g - be^{-\frac{b}{2}x} \frac{d}{dx}g + e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d^2}{dx^2}g + b \left[-\frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}x}g + e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d}{dx}g \right] + c \\
= e^{-\frac{b}{2}x} \frac{d^2}{dx^2}g - \frac{b^2}{4}e^{-\frac{b}{2}x}g + c \\
= e^{-\frac{b}{2}x} \left[\frac{d^2}{dx^2}g + \left(c - \frac{b^2}{4} \right) g \right] \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Mas,

$$\Delta = b^2 - 4c \Rightarrow -\frac{\Delta}{4} = c - \frac{b^2}{4}$$

Então,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + c = e^{-\frac{b}{2}x} \left[\frac{d^2}{dx^2}g + \left(-\frac{\Delta}{4} \right) g \right] = 0$$

se, e somente se,

$$\frac{d^2}{dx^2}g - \frac{\Delta}{4}g = 0$$

provando a afirmação.

Vamos no que segue, obter a solução geral da equação (2.19). Observe que:

$$\frac{d}{dx}(\cos \beta x) = -\beta \operatorname{sen} \beta x$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cos \beta x) = -\beta^2 \cos \beta x$$

de modo que a função $\cos \beta x$ é solução da equação (2.19) para

$$-\beta^2 = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow \beta^2 = -\frac{\Delta}{4}$$

Como $\Delta < 0 \Rightarrow -\Delta = |\Delta|$, então $\beta = \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$. Logo, $\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right)$ é solução da equação $\frac{d^2}{dx^2}g - \frac{\Delta}{4}g = 0$.

Analogamente, a função $\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right)$ também é solução da

$$\frac{d^2}{dx^2}g - \frac{\Delta}{4}g = 0.$$

Sejam então $u_1(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right)$ e $u_2(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right)$ duas soluções para a equação (2.19) (EDO linear, homogênea de 2ª ordem) num intervalo I . Do exemplo (2.2) tem-se que $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são linearmente independentes.

Usando o teorema 2.2 pode-se obter a solução geral para a equação (2.6) no caso complexo. Como

$$g(x) = A \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right)$$

deduz-se que

$$u(x) = e^{-\frac{b}{2}x} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}x\right) \right].$$

Mas de (2.7) temos que:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad b^2 - 4c = \Delta < 0$$

$$\therefore \lambda = \underbrace{-\frac{b}{2}}_{\alpha} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}}_{\beta} \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{2} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}.$$

Com isso, escreve-se a solução geral da equação (2.6):

$$u(x) = e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$$

Isso conclui a prova do Teorema 2.3

Observação 2.1 No Teorema 2.3, item i), as funções $f_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $f_2 = e^{\lambda_2 x}$ são funções

LI. De fato,

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(f_1, f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} \\ &= \lambda_2 e^{x(\lambda_1 + \lambda_2)} - \lambda_1 e^{x(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{x(\lambda_1 + \lambda_2)} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

pois $\lambda_2 \neq \lambda_1$, por hipótese.

Para o item item ii) temos que $f_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $f_2 = x e^{\lambda_1 x}$ também são LI, pois

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(f_1, f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & (1 + x \lambda_1) e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} \\ &= (1 + x \lambda_1) e^{2\lambda_1 x} - x \lambda_1 e^{2\lambda_1 x} \\ &= e^{2\lambda_1 x} + x \lambda_1 e^{2\lambda_1 x} - x \lambda_1 e^{2\lambda_1 x} \\ &= e^{2\lambda_1 x} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Analogamente, para o item iii), temos $f_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $f_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$, portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(f_1, f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \sin \beta x) & e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \cos \beta x) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x} \cos \beta x (\alpha \sin \beta x + \cos \beta x) - e^{2\alpha x} \sin \beta x (\alpha \cos \beta x - \sin \beta x) \\ &= e^{2\alpha x} [\alpha \cos \beta x \sin \beta x + \cos^2 \beta x - \alpha \cos \beta x \sin \beta x + \sin^2 \beta x] \\ &= e^{2\alpha x} [\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x] \\ &= e^{2\alpha x} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

logo, f_1 e f_2 são LI.

2.3 Casos Especiais da Equação (2.6)

Na equação (2.6) consideremos os seguintes casos especiais:

a) $b = c = 0$. Com isso sua equação característica é

$$\lambda^2 = 0$$

a qual tem única solução: $\lambda = 0$.

Pelo Teorema 2.3, a solução geral da equação (2.6) é

$$u(x) = A + Bx \quad (2.24)$$

b) $b = 0$ e $c > 0$. Nesse caso, a equação característica é

$$\lambda^2 + c = 0$$

cujas raízes são complexas e distintas:

$$\lambda_1 = i\sqrt{c} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{c}$$

Portanto, a solução geral da equação, pelo Teorema 2.3, item iii), é dada por

$$u(x) = A \cos(\sqrt{c}x) + B \sin(\sqrt{c}x) \quad (2.25)$$

c) Para $b = 0$ e $c < 0$, a equação característica é

$$\lambda^2 + c = 0$$

cujas raízes são reais e distintas pois $-c > 0$:

$$\lambda_1 = \sqrt{-c} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\sqrt{-c}$$

Nesse caso, pelo Teorema 2.3, a solução geral da equação é

$$u(x) = Ae^{\sqrt{-c}x} + Be^{-\sqrt{-c}x} \quad (2.26)$$

Capítulo 3

Convergência Uniforme e Série de Fourier

3.1 Convergência Uniforme

Definição 3.1 (Convergência Pontual) Uma seqüência de funções $(f_n(x))$ converge para a função $f(x)$ no ponto $x \in B$, $B \subseteq \mathbb{R}$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Observação 3.1 O valor de n_0 , depende, em geral, do ponto x (daí o nome convergência pontual) e de ε para garantir que a seqüência f_n convirja no ponto x . Agora, quando n_0 só depende de ε , diz-se que f_n converge uniformemente, pois nesse caso, para um dado ε , n_0 é o mesmo para todo x do intervalo.

Definição 3.2 (Convergência Uniforme) Diz-se que a seqüência de funções (f_n) converge uniformemente para f num intervalo B se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um número natural n_0 (que só depende de ε) tal que, para todo $x \in B$,

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Em ambos os casos de convergência, indica-se:

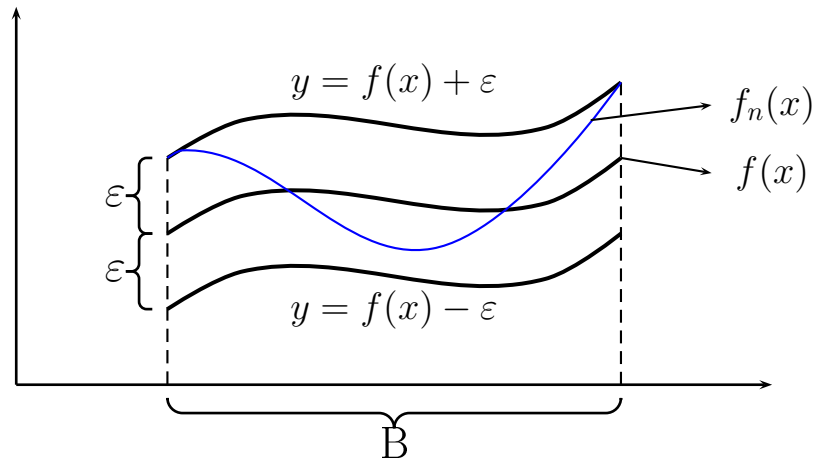
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \quad x \in B.$$

Interpretação Gráfica

Da definição de convergência uniforme num intervalo B tem-se que para todo $x \in B$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Com isso, para que f_n convirja uniformemente em B , o gráfico de $f_n(x)$ quando tomamos $n > n_0(\varepsilon)$, deve permanecer dentro da faixa determinada pelos gráficos das funções: $y = f(x) - \varepsilon$ e $y = f(x) + \varepsilon$, com $x \in B$.



Exemplo 3.1 Considere a seqüência de funções $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$ e seja $f(x) = 0$ para $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Mostrar que a seqüência (f_n) converge uniformemente para f em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Objetivo: Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x^n - 0| < \varepsilon.$$

Como $|x| \leq \frac{1}{2}$, então $|x|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, para todo $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Assim, para que $|x^n| < \varepsilon$, $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, basta tomar $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$, ou seja, $n > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}$.

Escolhendo-se $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que $n_0 \geq \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}$ resulta que

$$n > n_0 \Rightarrow |x^n| < \varepsilon$$

$$\therefore n > n_0 \Rightarrow |x^n - 0| < \varepsilon.$$

Observe que a escolha de n_0 depende apenas de ε e não depende de x .

Portanto, a seqüência $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente para $f(x) = 0$ em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

No que segue, enunciaremos, sem prova, vários resultados importantes sobre convergência uniforme que serão utilizados posteriormente.

Teorema 3.1 Seja f_n uma seqüência convergente de funções e seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

Se f_n converge uniformemente a f em B e se cada f_n for contínua em $x_0 \in B$ então f também será contínua em x_0 .

Teorema 3.2 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

onde cada f_n é suposta contínua em $[a, b]$. Nesta condições, se f_n convergir uniformemente a f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

ou seja,

$$\int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Teorema 3.3 Seja f_n uma seqüência de funções de classe \mathcal{C}^1 no intervalo I e sejam f e g funções de I em \mathbb{R} dadas por:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

e

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

Nessas condições, se a seqüência de funções f'_n convergir uniformemente a g em I então, para todo $x \in I$,

$$f'(x) = g(x)$$

ou seja,

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

Note que o Teorema 3.3 exige que f'_n convirja uniformemente para g em I , mas não exige que f_n convirja uniformemente para f .

Teorema 3.4 (Critério \mathcal{M} de Weierstrass) Seja $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ uma série de funções e suponhamos que exista uma série numérica $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k$ tal que, para todo $x \in B$ e para todo natural k ,

$$|f_k(x)| \leq \mathcal{M}_k.$$

Nestas condições, se a série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k$ for convergente, então a série $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ convirgirá uniformemente, em B , à função $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.

Aplicando o Teorema 3.4:

Exemplo 3.2

Verifique que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}$ converge uniformemente, em \mathbb{R} , à função

$$s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}.$$

Note que para qualquer $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{-1}{k^2} \leq \frac{1}{x^2 + k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Então, $\left| \frac{1}{x^2 + k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$.

Como, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente, pelo Teorema 3.4, segue que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}$ converge uniformemente, em \mathbb{R} , para a função

$$s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}.$$

Teorema 3.5 Seja $s : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Se a série de funções $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ convergir uniformemente para s , em B , e se cada f_k for contínua em $x_0 \in B$, então s também será contínua em x_0 .

Teorema 3.6 (Integração Termo a Termo) Seja $s = s(x)$, $x \in [a, b]$, dada por:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Se cada f_k for contínua em $[a, b]$ e se a série convergir uniformemente a s em $[a, b]$, então

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx,$$

ou seja,

$$\int_a^b \left[\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Teorema 3.7 (Derivação Termo a Termo) Seja $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalo, dada por

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Se cada f_k for de classe \mathcal{C}^1 em I e se a série $\sum_{k=0}^{+\infty} f'_k$ convergir uniformemente em I , então,

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x), \text{ para todo } x \in I, \text{ ou ainda,}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x).$$

Exemplo 3.3 Seja $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{sen } kx}{k^3}$,

a) Qual o domínio de $s(x)$?

b) Justifique:

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

a) Tem-se que

$$-1 \leq \text{sen } kx \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{k^3} \leq \frac{\text{sen } kx}{k^3} \leq \frac{1}{k^3},$$

para todo $k \geq 1$.

$$\text{Logo, } \left| \frac{\text{sen } kx}{k^3} \right| \leq \frac{1}{k^3}.$$

Portanto, pelo Teorema 3.4, $s(x)$ converge uniformemente. Então, temos que sua convergência independe dos valores de x , ou seja, o domínio de $s(x)$ é \mathbb{R} .

b) Note que $\frac{\text{sen } kx}{k^3}$ é de classe \mathcal{C}^1 e que $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen } kx}{k^3} \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$.

Contudo, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \geq 1$

$$\left| \frac{\cos kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

Agora, pelo Teorema 3.4 (Critério \mathcal{M} de Weierstrass), segue que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ converge uniformemente em \mathbb{R} . Com isso, pelo Teorema 3.7 (Derivação Termo a

Termo), tem-se

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k^3} \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} kx}{k^3} \right)',$$

ou seja,

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

3.2 Séries de Fourier

Definição 3.3 (Série Trigonométrica) Chama-se Série Trigonométrica, uma série de funções da forma:

$$\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \quad (3.3)$$

sendo α , a_k , b_k , $k = 1, 2, \dots$ constantes.

Definição 3.4 (Série de Fourier) Seja $u : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[-\pi, \pi]$. A série de Fourier de u é a série (2.1) onde,

$$\alpha = \frac{a_0}{2}, \quad (3.4)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \operatorname{sen} kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Exemplo 3.4 Encontrar a série de Fourier da função $u(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Solução: Determinando a_k :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 |x| \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} |x| \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 x \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \end{aligned}$$

Mas, para $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int x \cos(kx) dx &= x \frac{\text{sen}(kx)}{k} - \int \frac{\text{sen}(kx)}{k} dx \\ &= \frac{x \text{sen}(kx)}{k} - \frac{1}{k} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right] \\ &= \frac{x \text{sen}(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos(kx) dx &= \left[\frac{x \text{sen}(kx)}{k} - \frac{\cos(kx)}{k^2} \right] \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi \text{sen}(k\pi)}{k} + \frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \left(\frac{0 \cdot \text{sen}(k \cdot 0)}{k} + \frac{\cos(k \cdot 0)}{k^2} \right) \\ &= \frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{1}{k^2}, \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right) \\ a_k &= \frac{2}{k^2 \pi} (\cos(k\pi) - 1) \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, 3, \dots$

Para $k = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(0x) dx \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx \\ a_0 &= \pi \end{aligned}$$

Determinando b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \text{sen}(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-x) \text{sen}(kx) dx + \int_0^{\pi} x \text{sen}(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 x \text{sen}(kx) + \int_0^{\pi} x \text{sen}(kx) dx \right] \end{aligned}$$

Fazendo $x = -t$ na 1ª integral:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{\pi}^0 (-t) \operatorname{sen}(-kt)(-dt) + \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} t \operatorname{sen}(kt) dt + \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(kx) dx \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então, a série

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right)$$

é a série de Fourier de $u(x) = |x|$.

Teorema 3.8 (Riemann) Seja u periódica em \mathbb{R} , com período 2π , contínua por partes em $[-\pi, \pi]$. Então, em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ onde u tem derivadas laterais finitas, a Série de Fourier de u converge para

$$\frac{1}{2} [u(x+0) + u(x-0)], \quad (3.7)$$

onde

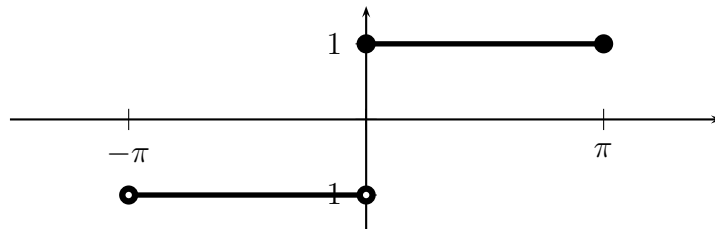
$$u(x \pm 0) = \lim_{h \rightarrow 0} u(x \pm h). \quad (3.8)$$

Exemplo 3.5 Seja f uma função periódica, com período 2π e, em $[-\pi, \pi]$, f é contínua por partes e definida como:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Calcular a série de Fourier de $f(x)$.

Gráfico de $f(x)$ em $[-\pi, \pi]$:



Vamos calcular os coeficientes a_k :

Para $k = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} (1) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} [-(\pi) + \pi] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{\pi}^0 \cos(kt) (-dt) + \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} [0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Calculando os coeficientes b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \operatorname{sen}(kx) dx + \int_0^{\pi} +1 \operatorname{sen}(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{\pi}^0 - \operatorname{sen}(kt) (-dt) + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kx) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{-2}{k\pi} [\cos(k\pi) - 1] \\ &= \frac{-2}{k\pi} [(-1)^k - 1] \end{aligned}$$

Então, a série de Fourier de $f(x)$ é

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) \operatorname{sen}(kx) \right) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \operatorname{sen}[(2n+1)x] \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)x]}{2n+1} \end{aligned}$$

Vejamos agora para que função esta série converge. Em $x = 0$ os limites laterais são:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(0 + h) = +1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(0 - h) = -1$$

Logo, pelo Teorema 3.8, no ponto $x = 0$ a série de Fourier converge para

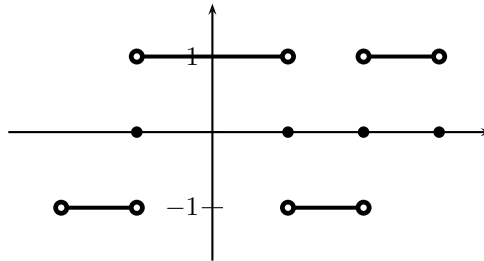
$$\frac{1}{2} [+1 - 1] = 0$$

Analogamente, nos pontos

$$x_k = k\pi.$$

Nos demais pontos x onde f é contínua, a série converge para $f(x)$.

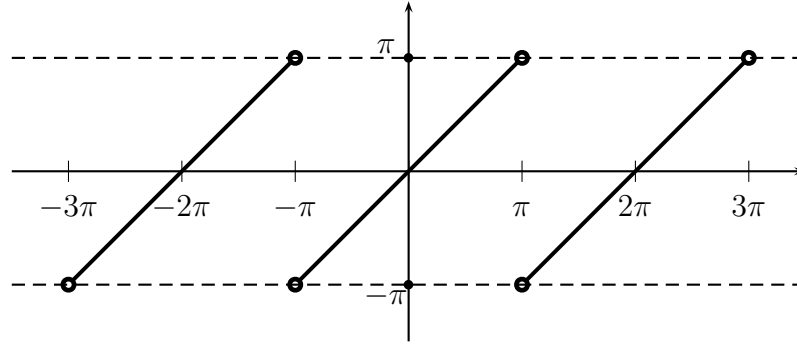
Gráfico da função $\tilde{f}(x)$ para a qual converge a série de Fourier de f .



Corolário 3.1 Se no Teorema de Riemann, a hipótese de que u é contínua por partes em $[-\pi, \pi]$ for substituída pela hipótese de que u é derivável em cada parte de $(-\pi, \pi)$, então u é contínua em $(-\pi, \pi)$. Nesse caso, a série de Fourier converge para $u(x)$ em cada ponto de $(-\pi, \pi)$.

Exemplo 3.6 Seja $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$ e periódica de período 2π . Calcular a série de Fourier de f .

O gráfico da função f é o seguinte:



Os coeficientes a_k e b_k são dados por (3.4), (3.5) e (3.6).

No entanto, $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$, pois

$$f(x) \cos(kx)$$

é uma função ímpar.

Para b_k tem-se

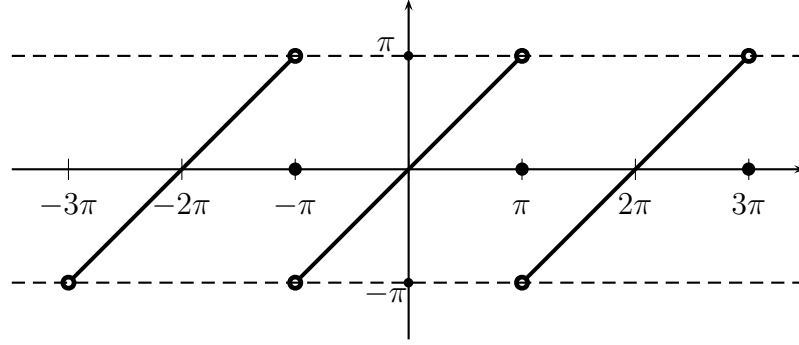
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x \left(-\frac{\cos(kx)}{k} \right) - \int -\frac{\cos(kx)}{k} dx \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-2\pi \frac{\cos(k\pi)}{k} \right) \\ &= -\frac{2}{k} (-1)^k. \end{aligned}$$

Logo, a Série de Fourier da função $f(x)$ é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \operatorname{sen}(kx), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Para todo $x \in (-\pi, \pi)$, $f(x)$ é derivável, e com isso contínua, então pelo Corolário 3.1, do Teorema de Riemann, a Série de Fourier da função $f(x)$ converge para $f(x) = x$ em cada ponto de $(-\pi, \pi)$. Nos pontos $x_n = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a série converge para zero como segue do Teorema (3.8), relações (3.7) e (3.8), pois $f(x_n - 0) = \pi$ e $f(x_n + 0) = -\pi$.

O gráfico da função para a qual a série de Fourier converge é o seguinte:



3.3 Funções Periódicas de Período $2L$

Definição 3.5 No caso de uma função f de período $2L$, $L > 0$, tem-se que sua série de Fourier é dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (3.9)$$

com

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

e

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Importante: Ao considerar-se funções periódicas de período $2L$ ao invés de período 2π , não se perde nenhuma das propriedades, teoremas e corolários anteriores, pois essa extensão de funções de período 2π para período $2L$ é dada pela função

$$s = \frac{\pi x}{L}$$

o qual transforma o intervalo $-L < x < +L$ em $-\pi < s < +\pi$.

Exemplo 3.7 Seja f uma função periódica de período $2L$. Mostre que $a_k = 0$ se f é ímpar e $b_k = 0$ se f é par.

Calculando a_k :

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx$$

$$a_k = \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx + \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \right]$$

Fazendo $x = -t$ e sendo f uma função ímpar, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^0 f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx &= \int_L^0 f(-t) \cos \frac{k\pi(-t)}{L} (-dt) \\ &= - \int_0^L f(t) \cos \frac{k\pi t}{L} dt \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na expressão de a_k obtêm-se $a_k = 0$.

Para b_k tem-se:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx \\ b_k &= \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx + \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx \right] \end{aligned}$$

Fazendo $x = -t$ e sendo agora f uma função par, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^0 f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} dx &= \int_L^0 f(-t) \operatorname{sen} \frac{k\pi(-t)}{L} (-dt) \\ &= - \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{L} dt \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na expressão de b_k , obtêm-se que $b_k = 0$.

3.4 Extensão Par e Ímpar de Uma Função

É comum em certas aplicações ser necessário representar em Série de Fourier uma função contínua por partes num intervalo da forma $(0, L)$. Tal problema fica resolvido quando obtêm-se uma representação em Séries de Fourier de uma função \tilde{f} periódica de período $2L$, cuja restrição ao intervalo $(0, L)$ é igual a f . A função \tilde{f} denomina-se extensão periódica de f .

Quando se deseja obter uma representação de Fourier de f é conveniente fazer sua extensão par ou ímpar, tendo-se em vista a simplificação da Série de Fourier para essas funções como ilustra o Exemplo 3.7.

Definição 3.6 (Extensão Par) A extensão par de $f(x)$ é a função par $\tilde{f}_P(x)$ definida por:

$$\tilde{f}_P(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ f(-x), & -L < x < 0 \\ f(0+0), & \text{para } x = 0 \\ f(L-0), & \text{para } x = L \text{ ou } x = -L \\ f(x-2L), & \text{para } x > L \\ f(x+2L), & \text{para } x < -L \end{cases}$$

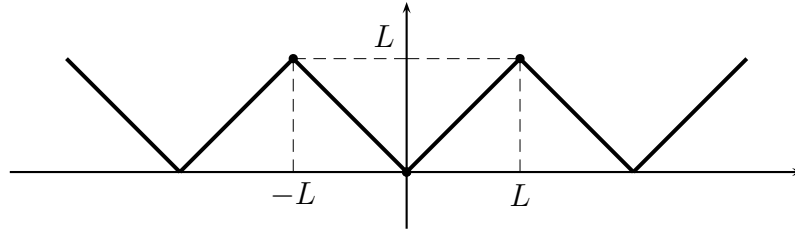
Definição 3.7 (Extensão Ímpar) A extensão ímpar de $f(x)$ é a função $\tilde{f}_I(x)$ definida da seguinte forma:

$$\tilde{f}_I(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \\ -f(0+0), & \text{para } x = 0 \\ f(L-0), & \text{para } x = L \\ -f(L-0), & \text{para } x = -L \\ f(x-2L), & \text{para } x > L \\ f(x+2L), & \text{para } x < -L \end{cases}$$

Exemplo 3.8 Seja $f(x) = x$, $x \in [0, L]$. Encontre uma extensão par para a função $f(x)$.

Considere a extensão par de $f(x)$ dada pela função $\tilde{f}_p(x) = |x|$, $x \in [-L, L]$ e periódica de período $2L$.

O gráfico da extensão $\tilde{f}_p(x)$ é o seguinte:



Usando as fórmulas (3.10) e (3.11) obtemos:

$$a_k = \frac{2L}{k^2\pi^2}(\cos(k\pi) - 1) \quad \text{e} \quad a_0 = L.$$

e

$$b_k = 0$$

Agora, como $\tilde{f}(x)$ é contínua, tem-se pelo Corolário 3.1 que a série de Fourier converge para $\tilde{f}_p(x)$, em cada x . Portanto,

$$\tilde{f}_p(x) = \frac{L}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L}{k^2\pi^2}(\cos(k\pi) - 1)$$

Restringindo o domínio da série para $x \in [0, L]$, e como

$$\tilde{f}_p(x) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

a série obtida é a série de Fourier de $f(x) = x$, em $[0, L]$.

Capítulo 4

A Equação da Onda

4.1 Equação Diferencial Para Pequenas Oscilações de Uma Corda

Chama-se de corda um fio fino e flexível.

Adotando um sistema de coordenadas cartesianas, supomos que, em estado de equilíbrio, a corda coincida com o eixo dos x , tendo suas extremidades fixadas na origem $(0, 0)$ e no ponto $(0, L)$, $L > 0$. Consideraremos aqui apenas o estudo de pequenas oscilações transversais da corda, ou seja, cada ponto da corda se desloca apenas perpendicularmente ao eixo x , no plano xy . No instante t , seja $u(x, t)$ a ordenada do ponto da corda cuja abscissa é x . Portanto, a função $u(x, t)$ representa o deslocamento ou amplitude de cada ponto da corda no instante t , a partir de sua posição de equilíbrio.

Para a realização das considerações posteriores vamos admitir as seguintes hipóteses.

- 1) A função $u(x, t)$, $x \in [0, L]$, $t \geq 0$, é contínua e tem derivadas primeiras e segundas contínuas.

- 2) As amplitudes $u(x, t)$ das oscilações e suas derivadas são supostas pequenas. Seus produtos e seus quadrados não serão considerados nos cálculos comparados com a unidade.

No que segue, o objetivo será o de obter uma equação satisfeita pela função $u(x, t)$.

Para um determinado instante t fixo, suponhamos que o perfil da corda seja o representado na Figura 4.1 abaixo,

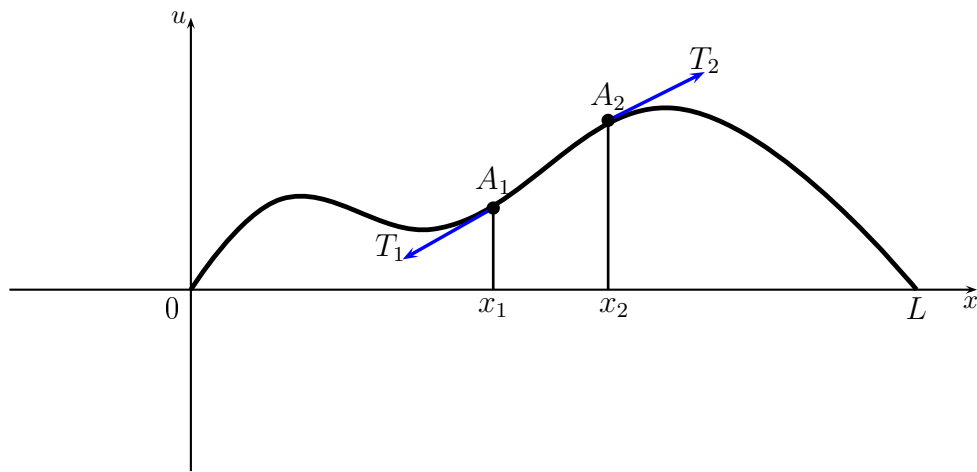


Figura 4.1:

Do curso de cálculo sabemos que o comprimento s do arco $\widehat{A_1A_2}$, no instante fixo t , é dado pela seguinte integral:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} dx$$

Mas, como consideramos a hipótese (2), temos que $\left(\frac{du}{dx}\right)^2$ é muito pequeno, logo o comprimento do arco pode ser escrito da seguinte forma:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1} dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

Pode-se mostrar, também, que a tensão \vec{T} na corda pode ser tomada independente de x , ou seja, pode ser considerada igual a T_0 . Com isso, temos que as forças que atuam no arco $\widehat{A_1A_2}$ são as seguintes:

- i) as tensões nos pontos A_1 e A_2 que são tangenciais à corda.
- ii) forças externas, se existirem.
- iii) forças de inércia.

Devido a consideração feita no início, a qual diz respeito ao movimento de cada ponto da corda ser realizado na direção vertical, isto é, perpendicular ao eixo dos x , juntamente com o fato das forças externas e de inércia terem direções também perpendiculares ao mesmo eixo, conclui-se que a resultante das forças, na direção x , no arco $\widehat{A_1 A_2}$ é nula, ou seja, o arco não tem aceleração na direção x .

Mostrar-se-á agora que \vec{T} não depende de x , ou seja, \vec{T} poderá ser identificada por \vec{T}_0 para todo x e t . Para isso, sejam α e β os ângulos agudos que as direções de \vec{T}_1 e \vec{T}_2 formam com o eixo dos x respectivamente, no instante t :

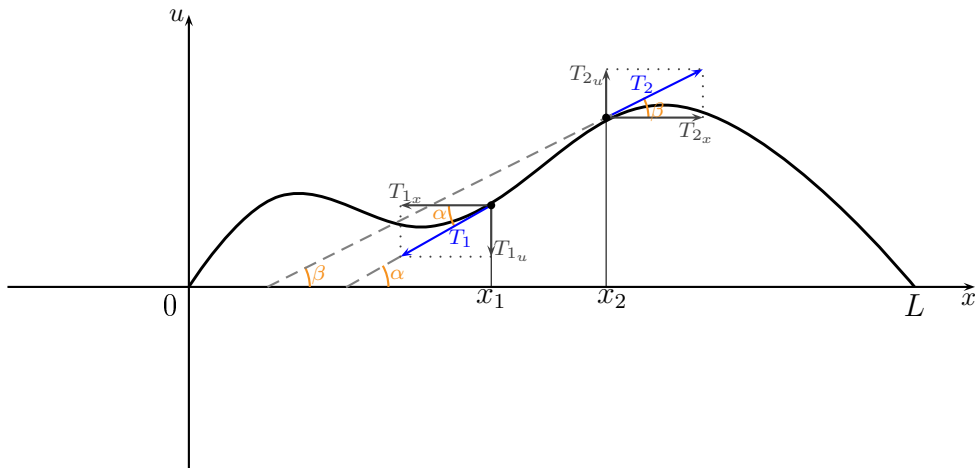


Figura 4.2:

Sendo \vec{T}_{1_u} e \vec{T}_{2_u} as componentes na direção perpendicular ao eixo x das tensões \vec{T}_1 e \vec{T}_2 respectivamente, e \vec{T}_{1_x} e \vec{T}_{2_x} as componentes na direção x das tensões \vec{T}_1 e \vec{T}_2 respectivamente, temos:

$$T_{1_x} - T_{2_x} = 0 \Rightarrow T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0$$

Só que, pelo fato de considerarmos pequenas oscilações, temos que:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} \\ &\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}, \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Mas, $\tan \alpha = \frac{du}{dx}$, então:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 1}},$$

pela hipótese (2), $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \approx 0$, logo:

$$\cos \alpha \approx \frac{1}{\sqrt{0+1}} \approx 1.$$

Com raciocínio análogo para o ângulo β , tem-se que:

$$T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta \cong 0$$

$$T_1 - T_2 \cong 0$$

$$T_1 \cong T_2$$

Pelo fato dos pontos A_1 e A_2 serem genéricos, temos que T não depende de x e o identificaremos por T_0 para todo x e t .

Deduziremos a equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda com a aplicação da 2ª Lei de Newton, segundo a qual, a massa do sistema vezes a sua aceleração é igual à resultante de todas as forças nele aplicadas. Devido às condições impostas, temos que as forças responsáveis pelo movimento são, as componentes das tensões na direção dos deslocamentos u , as forças externas e as forças de inércia. Calculando essas forças, obtemos:

a) Resultante das tensões na direção u :

$$F_{r_u} = T_{2_u} - T_{1_u} = T_0 \sin \beta - T_0 \sin \alpha,$$

sendo

$$\operatorname{sen} \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{\tan \alpha}{\frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}},$$

como $\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}},$$

e pela hipótese (2):

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Usando raciocínio análogo para o ângulo β , tem-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}$$

e

$$\operatorname{sen} \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2}.$$

Então:

$$F_{r_u} = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} \right]$$

$$\stackrel{\text{T.F.C}}{=} T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

- b) Forças externas:** representando-se por $p(x, t)$ a distribuição das forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda na direção u . Daí, temos que a força F_{ext} que atua sobre o arco $\widehat{A_1 A_2}$ é dado por:

$$F_{\text{ext}} = \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx$$

- c) Forças de inércia:** seja $\rho(x)$ a densidade de massa da corda. A massa da corda no arco $\widehat{A_1 A_2} \approx \overline{x_1 x_2}$ é $\rho(x)\Delta x$. Com isso a força de inércia F_I sobre cada ponto desse segmento é dada por:

$$F_I = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Logo, a força resultante de inércia sobre o arco $\widehat{A_1 A_2}$ será:

$$F_{r_I} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

Pela 2ª Lei de Newton, obtemos que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx$$

ou ainda,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) \right] dx = 0, \quad (4.1)$$

Para que a equação (4.1) seja válida é suficiente que se tenha

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) = 0 \quad (4.2)$$

Essa é a equação diferencial para pequenas oscilações de uma corda flexível com densidade de massa $\rho(x)$, tensão constante T_0 , submetida à ação de uma força externa $p(x, t)$.

Vamos, no que segue, estudar alguns casos particulares da equação (4.2), por exemplo, quando $\rho(x)$ é constante, ou seja, não depende de x . Se isso acontecer podemos representar a densidade linear da corda simplesmente por ρ , logo da equação (4.2) temos:

$$\begin{aligned} T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) &= 0 \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p(x, t)}{\rho}. \end{aligned}$$

Então podemos reescrever a nova equação da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (4.3)$$

onde $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ e $F(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}$.

Se não existirem forças externas atuando ($p(x, t) = 0$) na corda, a equação se simplifica mais ainda, sendo escrita como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

Nota: “ a ” possui dimensão de velocidade, pois:

$$\begin{aligned} T_0 &\rightarrow Kg \cdot m/s^2 \\ \rho &\rightarrow Kg/m \end{aligned} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{Kg \cdot m/s^2}{Kg/m}} = \sqrt{m^2/s^2} = m/s.$$

4.2 O Problema Misto

Nosso objetivo, nesta seção, é resolver a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0; \quad (4.5)$$

impondo-se as seguintes condições:

$$\text{i) } u(x, 0) = f(x); \quad (4.6)$$

$$\text{ii) } u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L; \quad (4.7)$$

$$\text{iii) } u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (4.8)$$

Note que $u_t(x, t)$ representa a derivada parcial de u em relação a t .

A função $f(x)$ descreve o perfil inicial da corda e $g(x)$, a velocidade do ponto da corda com abscissa x , no instante $t = 0$. As funções $f(x)$ e $g(x)$ são dadas no problema e devem satisfazer $f(0) = f(L) = 0$ e $g(0) = g(L) = 0$.

Observação 4.1 As condições $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$ são chamadas condições iniciais, enquanto $u(0, t) = u(L, t) = 0$ é chamada de condição de contorno ou de fronteira.

O problema de se resolver a equação (4.5) impondo estas duas condições é chamado de um problema misto.

Para que esse objetivo seja alcançado será usada a **Técnica de Separação de Variáveis**, isto é, a função $u(x, t)$ que é solução do problema será dada sob a forma de variáveis separadas, ou seja,

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.9)$$

onde X é uma função que depende só de x e T é uma função que depende só de t .

Substituindo (4.9) em (4.5), obtêm-se

$$X(x)T'' = a^2 T(t)X''. \quad (4.10)$$

Separando as variáveis, segue que para todo $t > 0$ e todo $x \in (0, L)$, onde as funções X e T não se anulam, vale a equação

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \alpha. \quad (4.11)$$

A constante α segue do fato de que

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{T''}{a^2 T} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{X''}{X} \right). \quad (4.12)$$

Portanto,

$$X'' = \alpha X \quad (4.13)$$

e

$$T'' = \alpha a^2 T \quad (4.14)$$

Precisa-se agora obter as soluções $X(x)$ e $T(t)$ das equações (4.13) e (4.14). Considera-se, inicialmente, a equação

$$X'' - \alpha X = 0 \quad (4.15)$$

Impondo as condições de contorno, obtêm-se

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

e

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0.$$

Portanto, nos pontos onde $T(t) \neq 0$, segue

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Logo, precisa-se resolver

$$\begin{cases} X'' - \alpha X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Considere os três casos seguintes:

i) $\alpha > 0$

Tome $\alpha = k^2$, $k \in \mathbb{R}$. A equação

$$X'' - k^2 X = 0$$

tem solução geral

$$X(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

como foi visto no Capítulo 2, Seção 2.3, item c).

Para $x = 0$: $X(0) = c_1 + c_2 = 0$.

Para $x = L$: $X(L) = c_1 e^{kL} + c_2 e^{-kL} = 0$.

Logo, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{kL} + c_2 e^{-kL} = 0 \end{cases}$$

de onde obtemos $c_1 = -c_2$ e $c_2(e^{-kL} - e^{kL}) = 0$.

Porém,

$$e^{-kL} - e^{kL} \neq 0$$

pois do contrário segue que

$$e^{-kL} = e^{kL}$$

e, portanto,

$$e^{-2kL} = 1 \Leftrightarrow -2kL = 0$$

o que não é possível, pois $L > 0$ e $k = \sqrt{\alpha}$, com $\alpha > 0$.

Logo,

$$c_2 = 0.$$

Por isso, para o caso onde $\alpha > 0$, tem-se que $X(x) = 0$ é a única solução possível, o que resulta em

$$u(x, t) = 0$$

que é solução trivial.

ii) $\alpha = 0$

Com isso,

$$\begin{cases} X'' = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação nesse caso é

$$X(x) = c_1x + c_2.$$

como já considerado no Capítulo 2, seção 2.3, item a).

Impondo-se as condições de contorno tem-se:

$$X(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X(L) = c_1 \cdot L + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 \cdot L = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

pois $L > 0$.

Novamente obtêm-se $X(x) = 0, \forall x$, o que implica em solução trivial,

$$u(x, t) = 0$$

.

iii) $\alpha < 0$

Nesse caso,

$$X'' - \alpha X = 0$$

Substituindo, $\alpha = -k^2, k \in \mathbb{R}$, obtemos

$$X'' + k^2x = 0$$

que tem solução geral

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \operatorname{cos} kx$$

como já visto, também no Capítulo 2, seção 2.3, item b).

Impondo as condições de contorno, obtêm-se

$$X(0) = c_2 = 0.$$

Logo,

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen} kx.$$

Agora,

$$X(L) = 0 \Rightarrow X(L) = c_1 \operatorname{sen} kL = 0.$$

Nesse caso, pode-se tomar $c_1 = 0$ que implica em solução trivial, porém são possíveis soluções não-triviais. Impondo-se $c_1 \neq 0$ e $kL = n\pi$, ou $k = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Logo, } \alpha = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Então, há uma infinidade de soluções possíveis dadas por

$$X_n(x) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.16)$$

Estudar-se-á, agora, a equação

$$T'' + \lambda_n a^2 T = 0$$

onde

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Essa equação, já estudada no Capítulo 2, seção 2.3, item b), tem solução geral

$$T_n(t) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n a^2 t}) + B_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n a^2 t}).$$

Com isso, obtêm-se para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, as seguintes soluções para a equação da onda satisfazendo as condições de contorno:

$$u_n(x, t) = \left[A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} at) + B_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} at) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (4.17)$$

A constante c_1 foi absorvida em A_n e B_n .

Como a equação (4.5) é linear e homogênea, qualquer soma finita de soluções $u_n(x, t)$ dadas por (4.17) é também solução da (4.5) satisfazendo as condições de contorno. Mas uma soma finita pode não caracterizar a solução completa do problema de modo que considera-se a superposição de todas elas, ou seja,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}at\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}at\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (4.18)$$

É parte da solução do problema determinar sob que condições a série (4.18) é convergente e, nesse caso, se a função $u(x, t)$ para a qual ela converge satisfaz a equação e as condições iniciais e de contorno. Cada termo da equação (4.18) satisfaz as condições de contorno de modo que em $x = 0$ e $x = L$ a série converge para zero. Nesse caso, se a série (4.18) for convergente sua soma satisfaz as condições de contorno. O passo seguinte é impor as condições iniciais. Para tal é importante ter condições para que a série possa ser derivada termo a termo. Essas condições são dadas no Teorema 3.3.

Supondo essas condições e derivando (4.18) termo a termo com respeito a t obtêm-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} \left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.19)$$

Tomando $t = 0$ em (4.18) e (4.19) e usando as condições iniciais, obtêm-se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in (0, L) \quad (4.20)$$

e

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.21)$$

Portanto, as condições iniciais serão satisfeitas se as séries (4.20) e (4.21) forem as expansões de Fourier de $f(x)$ e $g(x)$ em $(0, L)$. Nesse caso,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (4.22)$$

e

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (4.23)$$

Disso segue que, a solução do problema é dado por (4.18) onde A_n e B_n são dados por (4.22) e (4.23).

O teorema seguinte fornece as condições que as funções $f(x)$ e $g(x)$ devem satisfazer para que a função $u(x, t)$ dada por (4.18), (4.22) e (4.23) seja de fato solução do problema.

Teorema 4.1 Suponha que

A) $f(x)$ é duas vezes continuamente derivável no intervalo $(0, L)$ e satisfaz as condições

i) $f(0) = f(L) = 0$

ii) $f'(0) = f'(L) = 0$

iii) $f''(0) = f''(L) = 0$

iv) $f'''(x)$ é contínua por partes em $(0, L)$.

B) $g(x)$ é continuamente derivável em $(0, L)$ e $g''(x)$ é contínua por partes em $(0, L)$ e satisfaz

v) $g(0) = g(L) = 0$.

vi) $g''(x)$ é contínua por partes em $(0, L)$.

Então, a função $u(x, t)$ dada pela série (4.18) é duas vezes continuamente derivável em $(0, L) \times (0, +\infty)$ e satisfaz a equação da onda (4.5), as condições iniciais e de contorno. Cada termo da série (4.18) é duas vezes derivável em x e t e a série converge absoluta e uniformemente para todo $x \in [0, L]$ e $t \in [0, +\infty)$.

Demonstração: Considere, inicialmente, a integral

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad (4.24)$$

Como $f(x)$ e $\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$ são funções contínuas em $(0, L)$, isso implica que a integral em (4.24) existe e portanto A_n está bem definido para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Usando integração por partes em (4.24) tem-se

$$A_n = \frac{2}{L} \left\{ f(x) \left[\frac{-\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\frac{n\pi}{L}} \right] \Big|_0^L - \int_0^L f'(x) \left[\frac{-\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\frac{n\pi}{L}} \right] dx \right\} \quad (4.25)$$

Como $f'(x)$ existe e é contínua em $(0, L)$ a relação (4.25) está justificada. Usando (i),

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{n\pi} \int_0^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pode-se integrar por partes a equação (4.24) mais duas vezes, o que dá

$$A_n = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L f'''(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (4.27)$$

Por hipótese $f''(x)$ e $f'''(x)$ são contínua e contínua por partes, respectivamente, o que garante a existência da integral em (4.27).

Os coeficientes

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (4.28)$$

estão bem definidos visto que $g(x)$ é, por hipótese, contínua, o que garante que a integral em (4.28) existe. Agora, usando integração por partes duas vezes em (4.28), obtêm-se

$$B_n = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3 a} \int_0^L g''(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (4.29)$$

As integrações por partes estão bem definidas tendo em vista as hipóteses sobre a função $g(x)$.

Seja agora, $\tilde{f}(x)$ a extensão periódica ímpar de período $2L$ da função $f(x)$, $x \in [0, L]$, no intervalo $[-L, L]$. A função $f(x)$ é contínua em $(0, L)$ e $f(0) = f(L) = 0$ de modo que $\tilde{f}(x)$ também é contínua em $(-L, L)$ e satisfaz

$$\tilde{f}(-L) = \tilde{f}(L) = \tilde{f}(0) = 0.$$

Em $(0, L)$ tem-se que $\tilde{f}'(x) = f'(x)$ e $\tilde{f}''(x) = f''(x)$ o que mostra que $\tilde{f}(x)$ é duas vezes continuamente derivável em $(0, L)$. Em $(-L, 0)$, $\tilde{f}(x) = -\tilde{f}(-x)$ e, portanto,

$$\tilde{f}'(x) = -\frac{d\tilde{f}(-x)}{d(-x)} \cdot \frac{d(-x)}{dx} = \tilde{f}'(-x).$$

Logo,

$$\tilde{f}'(x) = f'(-x)$$

pois $-x \in (0, L)$. Com isso, $\tilde{f}'(x)$ é contínua também em $(-L, 0)$. Também tem-se que

$$\tilde{f}''(x) = \frac{d\tilde{f}'(-x)}{d(-x)} \cdot \frac{d(-x)}{dx} = -f''(-x).$$

Segue então que $\tilde{f}''(x)$ é contínua em $(-L, 0)$.

Conclusão: $\tilde{f}(x)$ é duas vezes continuamente derivável em $(-L, 0)$.

Examina-se, agora, a regularidade de $\tilde{f}(x)$ em $x = 0$. Tem-se que $f(0) = 0$ o que decorre que $\tilde{f}(0) = 0$. Sabe-se que $\tilde{f}(x)$ é contínua em $x = 0$, portanto, verifica-se que $\tilde{f}'(x)$ também é contínua.

De fato,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}'(-(-x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\tilde{f}'(-x) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(-x) = 0,$$

pois $-x \in (0, L)$.

Portanto, $\tilde{f}'(x)$ é contínua em $x = 0$.

Para $\tilde{f}''(x)$ tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}''(-(-x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\tilde{f}''(-x) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(-x) = 0,$$

pois $-x \in (0, L)$. Com isso, $\tilde{f}''(x)$ é contínua em $x = 0$ também.

O mesmo raciocínio se aplica à análise da continuidade nos extremos $-L$ e $+L$. Sendo assim, obtêm-se uma extensão ímpar $\tilde{f}(x)$ em $[-L, L]$ de maneira que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.30)$$

onde

$$\tilde{A}_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (4.31)$$

converge pontualmente para $\tilde{f}(x)$ em $[-L, L]$, já que $\tilde{f}(x)$ satisfaz as condições do Corolário 3.1 do Teorema de Riemann. Em particular, converge para $f(x)$ em $[0, L]$, pois $\tilde{f}(x) = f(x)$ em $[0, L]$, então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.32)$$

onde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (4.33)$$

A série (4.32) também converge uniformemente como será mostrado a seguir. Para tal será aplicado o teste \mathcal{M} de Weierstrass. Tem-se que

$$\left| A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq |A_n|. \quad (4.34)$$

Mas, pela equação (4.27), tem-se

$$|A_n| \leq \left| \frac{-2L^2}{n^3\pi^3} \right| \cdot \left| \int_0^L f'''(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right| \quad (4.35)$$

$$|A_n| \leq \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \cdot \int_0^L |f'''(x)| dx \quad (4.36)$$

A integral em (4.36) existe pois $f'''(x)$ é contínua por partes, então faça

$$c_1 = \int_0^L |f'''(x)| dx \quad (4.37)$$

onde c_1 é uma constante positiva.

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ onde

$$\mathcal{M}_n = \frac{2L^2 c_1}{n^3\pi^3} \quad (4.38)$$

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n = \frac{2L^2 c_1}{\pi^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad (4.39)$$

é convergente pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

é a série harmônica de ordem 3 que converge. Logo, pelo Teorema 3.4, a série dada por (4.32) converge uniformemente em $[0, L]$ para $f(x)$.

Considera-se agora a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.40)$$

onde

$$\tilde{B}_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L \tilde{g}(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (4.41)$$

Seja $\tilde{g}(x)$ a extensão ímpar da função $g(x)$, $x \in [0, L]$, no intervalo $[-L, L]$. A função $g(x)$ é contínua em $(0, L)$ e $g(0) = g(L) = 0$ de modo que $\tilde{g}(x)$ também é contínua em $(-L, L)$ e satisfaz

$$\tilde{g}(-L) = \tilde{g}(0) = \tilde{g}(L) = 0.$$

Em $(0, L)$ tem-se $\tilde{g}'(x) = g'(x)$ o que mostra que $\tilde{g}(x)$ é continuamente derivável em $(0, L)$. Em $(-L, 0)$, $\tilde{g}(x) = -\tilde{g}(-x)$ e, portanto,

$$\tilde{g}'(x) = -\frac{d\tilde{g}'(-x)}{d(-x)} \cdot \frac{d(-x)}{dx} = \tilde{g}'(-x)$$

mas, $-x \in (0, L)$, logo

$$\tilde{g}'(x) = g'(-x).$$

Com isso, constata-se que $\tilde{g}'(x)$ é contínua em $(-L, 0)$. Basta examinar agora a regularidade de $\tilde{g}(x)$ em $x = 0$. Tem-se $g(0) = 0$ o que decorre $\tilde{g}(0) = 0$. Sabe-se que $\tilde{g}(x)$ é contínua em $x = 0$, portanto verifica-se que $\tilde{g}'(x)$ também é contínua.

De fato,

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \tilde{g}'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{g}'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{g}'(-(-x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\tilde{g}'(-x) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{g}'(-x) = 0$$

já que $-x \in (0, L)$.

Portanto, $\tilde{g}'(x)$ é contínua em $x = 0$. Para os extremos do intervalo $-L$ e $+L$ aplica-se o mesmo raciocínio, calculando os limites laterais com $x \rightarrow +L^-$ e $x \rightarrow -L^+$, mostrando assim que $\tilde{g}'(x)$ é continuamente derivável em $(-L, L)$. Com isso, obtêm-se uma extensão ímpar $\tilde{g}(x)$, em $[-L, L]$, para a função $g(x)$, de maneira que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.42)$$

com

$$\tilde{B}_n = \frac{2}{n\pi a} \int_{-L}^L \tilde{g}(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (4.43)$$

converge absolutamente para $\tilde{g}(x)$ em $(-L, L)$, pois $\tilde{g}(x)$ satisfaz as condições do Corolário 3.1 do Teorema de Riemann. Em particular a série converge para $g(x)$ em $[0, L]$, pois $\tilde{g}(x) = g(x)$ em $[0, L]$, então

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.44)$$

onde

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (4.45)$$

A série (4.44) também converge uniformemente como será mostrado a seguir.

Usando o teste \mathcal{M} de Weierstrass tem-se

$$\left| B_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq \left| B_n \frac{n\pi a}{L} \right| \quad (4.46)$$

mas, por (4.29),

$$\left| \frac{n\pi a}{L} \cdot B_n \right| = \left| \frac{n\pi a}{L} \left(\frac{-2L^2}{n^3\pi^3 a} \cdot \int_0^L g''(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right) \right| \quad (4.47)$$

$$\left| \frac{n\pi a}{L} \cdot B_n \right| \leq \left| \frac{-2L}{n^2\pi^2} \right| \int_0^L |g''(x)| dx. \quad (4.48)$$

Tome,

$$c_2 = \int_0^L |g''(x)| dx \quad (4.49)$$

logo

$$\left| \frac{n\pi a}{L} \cdot B_n \right| \leq \frac{2L}{n^2\pi^2} c_2 \quad (4.50)$$

onde c_2 é uma constante positiva. Note também que a integral em (4.49) está bem definida pois $g''(x)$ é contínua por partes, por hipótese.

Então, seja

$$\mathcal{M}_n = \frac{2Lc_2}{n^2\pi^2}. \quad (4.51)$$

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n = \frac{2Lc_2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente pois a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é a série harmônica de ordem 2, que é convergente. Logo, pelo Teorema 3.4, a série dada por (4.44) converge uniformemente para $g(x)$.

Considere agora a série (4.18) com A_n e B_n dados por (4.22) e (4.23), satisfazendo as desigualdades (4.36) e (4.48), respectivamente. Seja $u_n(x, t)$ o n -ésimo termo da série (4.18). Com isso

$$|u_n| \leq |A_n| + |B_n| \quad (4.52)$$

$$\leq \frac{2L^2c_1}{n^3\pi^3} + \frac{2L^2c_2}{n^3\pi^3a} = \frac{c_3}{n^3} \quad (4.53)$$

onde $c_3 = \frac{2L^2}{\pi^3} \left(c_1 + \frac{c_2}{a} \right)$.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n \quad (4.54)$$

onde $\mathcal{M}_n = \frac{c_3}{n^3}$ converge, pois é uma série harmônica de ordem 3. Com isso, pelo teste \mathcal{M} de Weierstrass, a série (4.18) converge uniformemente e absolutamente para a função $u(x, t)$ em $[0, L] \times [0, +\infty)$.

A função $u(x, t)$ é contínua nesse domínio pois as funções $u_n(x, t)$ são contínuas em $[0, L] \times [0, +\infty)$, o que é garantido pelo Teorema 3.1.

Considere, agora, as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) \quad (4.55)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \quad (4.56)$$

onde

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{n\pi}{L} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.57)$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{n\pi a}{L} \left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.58)$$

Note que as funções $u_n(x, t)$ são contínuas e deriváveis em relação a x e t .

Observe que

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq \frac{n\pi}{L} \left| A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \quad (4.59)$$

$$\leq \frac{n\pi}{L} (|A_n| + |B_n|)$$

$$\leq \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{c_3}{n^3} = \frac{c'_3}{n^2} \quad (4.60)$$

onde

$$c'_3 = \frac{\pi}{L} c_3.$$

E também,

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq \frac{n\pi a}{L} \left| -A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right| \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right| \quad (4.61)$$

$$\leq \frac{n\pi a}{L} (|A_n| + |B_n|)$$

$$\leq \frac{n\pi a}{L} \cdot \frac{c_3}{n^3} = \frac{c'_3 a}{n^2} \quad (4.62)$$

As séries com $\mathcal{M}_n = \frac{c'_3}{n^2}$ e $\mathcal{M}'_n = \frac{c'_3 a}{n^2}$, são séries harmônicas de ordem 2, portanto são convergentes. Pelo teste \mathcal{M} de Weierstrass, as séries (4.55) e (4.56) convergem absoluta e uniformemente para $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$, respectivamente, pelo Teorema 3.3.

Procedendo de modo análogo para

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2 \pi^2}{L^2} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.63)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.64)$$

pode-se mostrar que $u \in C^2[(0, L) \times (0, +\infty)]$. Portanto, as séries (4.63) e (4.64) convergem para as funções contínuas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, respectivamente.

Comparando $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ com $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.65)$$

A seguir, será provada a unicidade da solução do problema dado pelas equações (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8).

4.3 Unicidade de Solução

Para demonstrar a unicidade da solução $u(x, t)$, suponha que existem duas funções $u(x, t)$ e $v(x, t)$ que são soluções do problema dado pelas equações (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8). Além disso, considere a função $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. Esta função é solução do problema seguinte:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \quad (4.66)$$

$$w_t(x, 0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.67)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.68)$$

Considere, agora, a seguinte função

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (w_t^2 + a^2 w_x^2) dx \quad (4.69)$$

chamada de função energia da corda.

Vamos mostrar que a derivada de (4.69) é zero, ou seja, a função $\epsilon(t)$ é constante.

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{1}{2} \int_0^L (2w_t w_{tt} + 2a^2 w_x w_{xt}) dx \\ &= a^2 \int_0^L (w_t w_{xx} + w_x w_{xt}) dx \\ &= a^2 \int_0^L (w_t w_x)_x dx \\ &= a^2 (w_t w_x) \Big|_0^L = 0,\end{aligned}$$

pois $w_t(0, t) = w_t(L, t) = 0$.

Então, pelo fato de $\epsilon(t)$ possuir derivada nula é uma função constante.

Como $\epsilon(0) = 0$, tem-se que $\epsilon(t) = 0$, para todo $t > 0$, ou seja,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 0, \quad (4.70)$$

para $0 < x < L$, $t > 0$.

Então,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (4.71)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.72)$$

Logo, pode-se concluir que $w(x, t)$ é constante em relação a x e t , para todo $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$. Impondo a condição inicial $w(x, 0) = 0$, segue que $w(x, t) = 0$ para todo $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$.

Portanto,

$$u = v$$

o que prova que a solução é única.

4.4 Harmônicos, Frequência e Amplitude

Considere as funções

$$u_n(x, t) = [A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.73)$$

que são soluções da equação da onda (4.5) e que satisfazem as condições de fronteira

$$u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Essas funções $u_n(x, t)$ são chamadas *ondas estacionárias*.

Para todo x , tal que

$$x = \frac{kL}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

tem-se

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0.$$

Portanto, conclui-se que esses pontos permanecem parados se a vibração da corda for descrita por $u_n(x, t)$. Tais pontos são chamados de *nós* da corda estacionária. Os pontos médios entre dois nós consecutivos são os *ventres* ou *antinós*. O *comprimento de onda* é denotado pelo dobro da distância entre dois nós consecutivos, logo pode-se calcular o comprimento da onda estacionária da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{2L}{n}.$$

Fazendo uma mudança de coordenadas em (4.73), de maneira que

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

e

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$$

pode-se escrever $u_n(x, t)$ da seguinte forma:

$$u_n(x, t) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi at}{L} + \theta_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.74)$$

onde θ_n é chamado de *fase*.

Da equação (4.74) percebe-se também que para cada t fixado, o perfil da corda é descrito por uma senóide. Para cada valor de t , onde t é dado por

$$t = \frac{L}{na} \left(k - \frac{\theta_n}{\pi} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

a corda passa pela posição de equilíbrio.

Nesses instantes a velocidade da corda $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ é máxima. Para os valores de t onde

$$\text{sen} \left[\left(\frac{n\pi at}{L} \right) + \theta_n \right] = \pm 1,$$

a corda tem seus deslocamentos máximos em relação a posição de equilíbrio, e nesses instantes sua velocidade é zero.

Os movimentos de cada ponto x da corda obedece uma senóide de amplitude

$$\alpha_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

a qual possui período

$$T_n = \frac{2\pi}{\left| \frac{n\pi a}{L} \right|} = \frac{2L}{na}.$$

e frequência

$$f_n = T_n^{-1} = \frac{na}{2L}.$$

Com isso, percebe-se que a frequência do n -ésimo harmônico é múltipla da frequência fundamental

$$f_1 = \frac{a}{2L}.$$

Capítulo 5

Solução de D'Alambert

5.1 Solução da Equação da Onda por D'Alambert

A solução de D'Alambert é obtida mediante uma mudança de variáveis na equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

com o intuito de simplificá-la. Para tal considere novas variáveis:

$$\varepsilon = \alpha x + \beta t$$

$$n = \gamma x + \delta t$$

em que

$$\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \neq 0 \quad (5.2)$$

Derivando a função u obtêm-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} + 2\alpha\gamma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial \eta} + \gamma^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \delta \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} + 2\beta\delta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial \eta} + \delta^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Substituindo em (5.1):

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= a^2 \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ (\beta^2 - a^2\alpha^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} + 2(\beta\delta - a^2\alpha\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial \eta} + (\delta^2 - a^2\gamma^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Porém, a equação (5.3) se simplifica fazendo

$$\begin{aligned} \beta^2 - a^2\alpha^2 &= 0 \\ \delta^2 - a^2\gamma^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

desde que

$$\beta\delta - a^2\alpha\gamma \neq 0. \quad (5.5)$$

De fato (5.5) é válida, pois de (5.4) segue que

$$\beta = \pm a\alpha \quad \text{e} \quad \delta = \pm a\gamma.$$

Escolhendo convenientemente

$$\beta = a\alpha \quad \text{e} \quad \delta = -a\gamma$$

e substituindo em (5.3) tem-se

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

$$\alpha(-a\gamma) - a\alpha\gamma \neq 0$$

$$-2a\alpha\gamma \neq 0$$

$$\alpha\gamma \neq 0$$

uma vez que $a \neq 0$.

Com isso,

$$\beta\delta - a^2\alpha\gamma = a\alpha(-a\gamma) - a^2\alpha\gamma = -2a^2\alpha\gamma \neq 0.$$

Para $\alpha = \gamma = 1$, conclui-se que a equação (5.3) é escrita na forma

$$-4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial \eta} = 0$$

ou melhor,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon \partial \eta} = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \theta(\varepsilon).$$

Portanto,

$$u(\varepsilon, \eta) = \int_0^\varepsilon \theta(s) ds + i(\eta)$$

ou ainda,

$$u(\varepsilon, \eta) = h(\varepsilon) + i(\eta)$$

com h e i funções de classe C^2 quaisquer. Com isso, a solução de D'Alambert é dada por

$$u(x, t) = h(x + at) + i(x - at). \quad (5.6)$$

Essa solução é a solução geral da equação (5.1), ou seja, dadas duas funções quaisquer h e i , de classe C^2 , a função (5.6) é solução da equação da onda (5.1).

Observação 5.1 A solução (4.18) deve ser da forma da (5.6) uma vez que (4.18) é solução da equação da onda. Isso pode ser verificado usando as identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)]$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

na equação (4.18). Obtemos que $u(x, t)$ é da forma da (5.6) com

$$h(x + at) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}(x + at) - b_n \cos \frac{n\pi}{L}(x + at) \right]$$

e

$$i(x - at) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}(x - at) - b_n \cos \frac{n\pi}{L}(x - at) \right]$$

5.2 Problema de Cauchy

No que segue, vamos estudar o problema de Cauchy para a equação (5.1), isto é, à equação (5.1) impõe-se apenas condições iniciais:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \tag{5.7}$$

$$u_t(x, 0) = g(x). \tag{5.8}$$

onde $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$, $f(x)$ de classe C^2 e $g(x)$ de classe C^1 .

Diz-se que o problema de Cauchy é bem proposto quando as seguintes condições são satisfeitas:

- i) existe solução;
- ii) há unicidade de solução;
- iii) há dependência contínua dos dados iniciais $f(x)$ e $g(x)$.

A terceira hipótese do problema de Cauchy consiste em saber se as soluções do problema variarão pouco quando os dados sofrem pequenas modificações.

De (5.6) e (5.7) obtém-se:

$$\begin{cases} u(x, 0) = h(x) + i(x) = f(x) \\ u_t(x, 0) = ah'(x) - ai'(x) = g(x) \end{cases}$$

Supondo-se $f(x)$ de classe C^2 e $g(x)$ de classe C^1 conclui-se

$$\begin{cases} h(x) + i(x) = f(x) \\ h(x) - i(x) = \int_0^x g(s) ds + K \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontra-se

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x g(s)ds + \frac{K}{2}; \\i(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x g(s)ds - \frac{K}{2};\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}h(x+at) &= \frac{1}{2}f(x+at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} g(s)ds + \frac{K}{2}; \\i(x-at) &= \frac{1}{2}f(x-at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 g(s)ds - \frac{K}{2}.\end{aligned}$$

Então,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s)ds \quad (5.9)$$

que é conhecida como solução de D'Alambert para o problema de Cauchy.

Quanto à existência de solução é imediata pois uma solução possível está expressa em (5.9). A unicidade também é imediata.

Seja $v(x,t)$ outra solução. Então, $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\w(x,0) &= 0 \\w_t(x,0) &= 0\end{aligned}$$

A solução deste problema é da forma da equação (5.9) com $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$. Portanto, $w(x,t) = 0$, logo $u = v$.

Para mostrar a dependência contínua dos dados iniciais, considere u_0, u_1 e v_0, v_1 dois pares de dados iniciais, aos quais correspondem as soluções $u(x,t)$ e $v(x,t)$, portanto de (5.8) obtém-se

$$\begin{aligned}|u(x,t) - v(x,t)| &\leq \frac{1}{2}|u_0(x+at) - v_0(x+at)| + \frac{1}{2}|u_0(x-at) - v_0(x-at)| + \\&+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |u_1(s) - v_1(s)|ds.\end{aligned}$$

Mas note que, para todo $\varepsilon > 0$, existe δ tal que, se $|u_k(x,t) - v_k(x,t)| < \delta$, então $|u(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon$.

Portanto,

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}2aT\delta.$$

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq (T + 1)\delta.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + T}$, então $|u(x, t) - v(x, t)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq t \leq T$ sempre que

$$|u_k(x, t) - v_k(x, t)| < \delta, \quad k = 0, 1,$$

o que mostra que há dependência contínua dos dados iniciais.

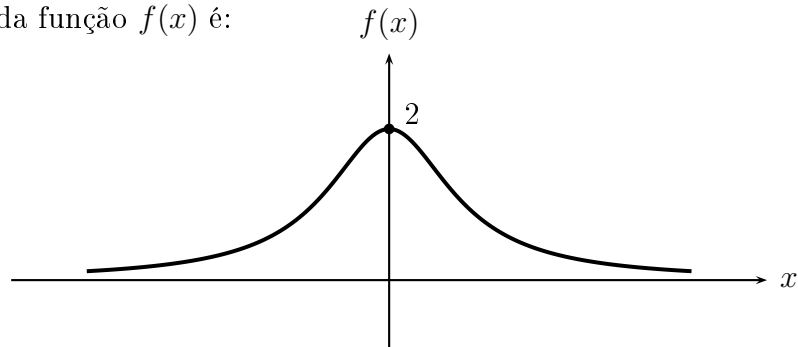
Exemplo 5.1 Considere o problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x, t \in (-\infty, +\infty)$$

$$u(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1} = f(x) \quad \forall x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 0 \quad \forall x$$

O gráfico da função $f(x)$ é:



O maior valor de f ocorre quando $x = 0$, pois nesse ponto o denominador tem o seu maior valor.

Nesse exemplo, a solução de D'Alembert é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct) \\ &= \frac{1}{(x + ct)^2 + 1} + \frac{1}{(x - ct)^2 + 1} \end{aligned}$$

A solução é uma superposição de duas ondas

$$f(x + ct) = \frac{2}{(x + ct)^2 + 1} \quad \text{e} \quad f(x - ct) = \frac{2}{(x - ct)^2 + 1}$$

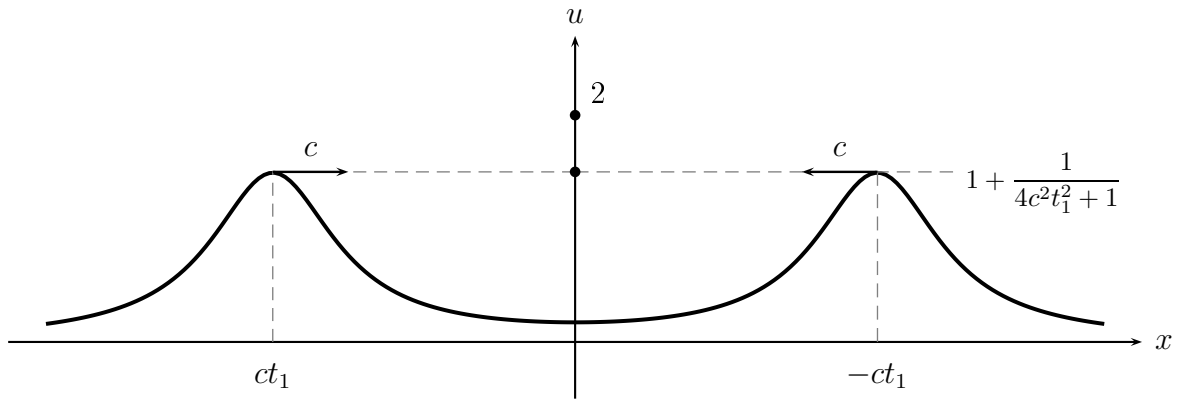
que podem ser interpretadas individualmente como ondas progressivas propagando-se para a esquerda e à direita, respectivamente.

A função $u(x, t)$ é máxima nos pontos $x = \pm ct$ onde seu valor é

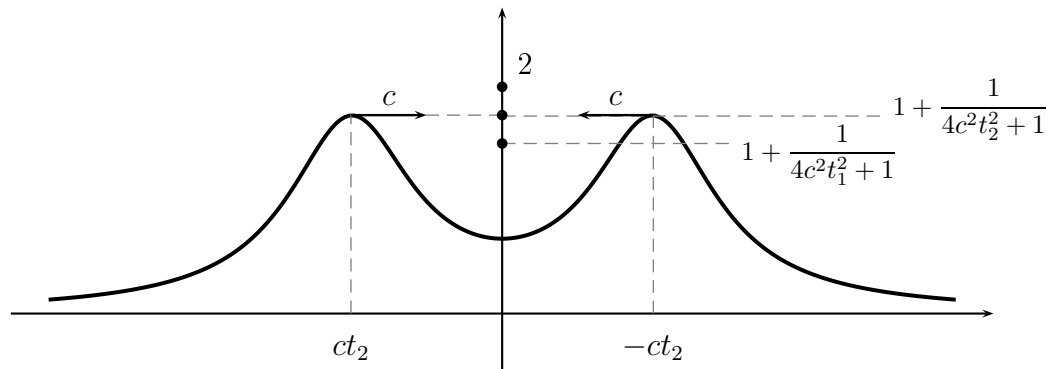
$$u(\pm ct, t) = 1 + \frac{1}{4c^2t^2 + 1}$$

No passado distante e no futuro distante $u_{max} = 1$.

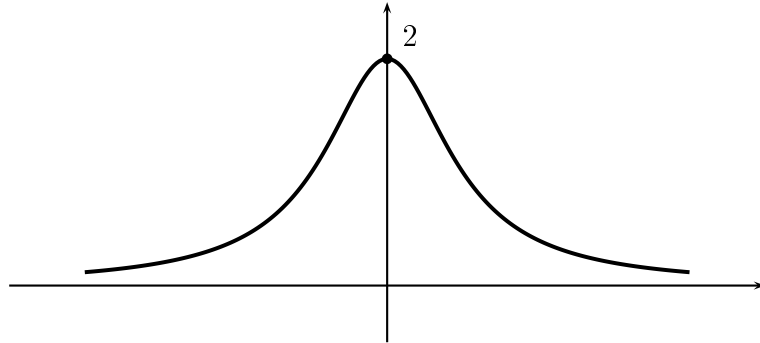
Num instante $t_1 < 0$:



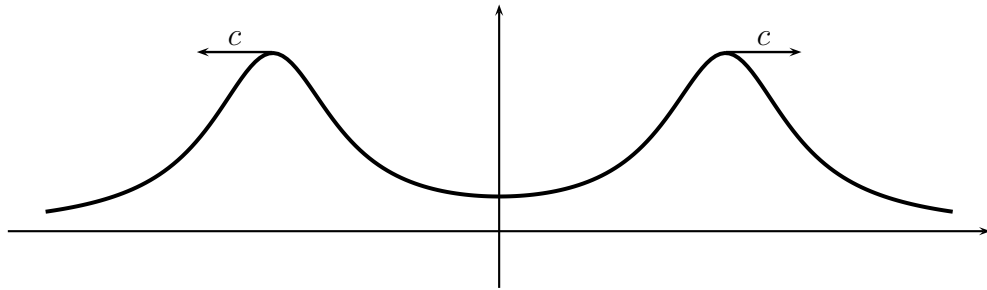
Num instante posterior $t_2 < 0$, $t_2 > t_1$ ($|t_2| < |t_1|$), temos que $1 + (4c^2t_2^2 + 1)^{-1} > 1 + (4c^2t_1^2 + 1)$ e os picos estão mais próximos:



No instante $t_3 = 0$, $u(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1}$:



Posteriormente, os picos se afastam novamente em direções contrárias:



Referências Bibliográficas

- [1] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, Vol.4*, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2002.
- [2] Luiz Adauto Medeiros & Nirzi G. de Andrade. *Iniciação as Equações Diferenciais Parciais*, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 1978.
- [3] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 2ª edição, 1977.
- [4] Dennis G. Zill & Michael R. Cullen. *Equações Diferenciais, Vol.1*, Makron Books LTDA, 3ª edição.
- [5] Dennis G. Zill & Michael R. Cullen. *Equações Diferenciais, Vol.2*, Makron Books LTDA, 3ª edição.