O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

PATRÍCIA DE SOUSA ROSA MARGOTTI

11 de Dezembro de 2007

Conteúdo

AGRADECIMENTOS

Ao Fábio, pelo amor e incentivo que me deram força para que eu não desistisse.

Aos meus pais e irmão, pelo carinho e confiança tão importantes nessa caminhada.

Aos meus familiares, pelo apoio e carinho nos momentos difíceis.

Aos amigos distantes, que no coração estão sempre presentes.

Aos amigos próximos, pela amizade e companheirismo sejam nos momentos de estudo, sejam nos momentos de festa.

Ao professor Rubens, por aceitar ser meu orientador e por estar presente sempre que precisei.

A Professora Rosimary, pelos conselhos e paciência.

Ao professor Nereu, por aceitar participar da banca.

E aos que me viram começar mas já não poderão me ver concluir, saudades...

INTRODUÇÃO

Apresentar uma forma dinâmica para lecionar trigonometria no ensino médio. Foi esta uma das principais motivações para a elaboração deste trabalho. Buscamos elaborar um material a ser utilizado por professores do ensino médio no ensino de trigonometria que não dependa apenas de livros didáticos mas que contemple o uso de recursos computacionais.

Indo de encontro com o que sugere os PCN's, procuramos também relacionar algumas áreas da matemática como trigonometria, geometria e funções.

Usamos como ferramenta para a construção das figuras que aqui serão apresentadas o *software* GeoGebra[1] e incentivamos seu uso por ser este um *software* livre e de fácil acesso para escolas e alunos.

Destacamos que intuito deste trabalho não é ensinar a trabalhar com o *software* GeoGebra, nem tão pouco ensinar trigonometria a quem a desconhece, pois como já enfatizamos, este trabalho é direcionado a docentes de matemática.O leitor precisa conhecer, saber como trabalhar como o GeoGebra para conseguir acompanhar os passos das construções que serão apresentadas, uma vez que descreveremos esses passos sem muitos detalhes. Sobre o GeoGebra apenas apresentaremos alguns dos ícones mais utilizados na construção das figuras contidas neste trabalho.

O presente trabalho divide-se da seguinte forma:

Primeiramente, existe um texto contendo algumas sugestões dos PCN's para o ensino de matemática no ensino e relacionando estas sugestões com o conteúdo aqui abordado.

A seguir, apresentamos as construções referentes ao ensino das razões trigonométricas no ciclo, seguido das construções que visam verificar as reduções ao primeiro quadrante.

Por fim, são apresentados os gráficos das funções trigonométricas e alguns exemplos de variações desses gráficos.

Para que o leitor tenha um melhor acompanhamento do trabalho e das propriedades que podem ser verificadas nas figuras, deixamos em anexo um cd contendo todas as figuras inseridas no texto que devem ser abertas no programa.

[1]Ao leitor que não possui afinidade com o programa, sugerimos a leitura da referência bibliográfica número 7. O *download* do programa pode ser feito no site www.geogebra.com.br

Capítulo 1

Sobre o PCN e o GeoGebra

1.1 Sugestões do PCN para o ensino de Matemática

Os trechos a seguir fazem parte do texto "Conhecimentos de Matemática"contido no PCN Ensino Médio, volume 3[1].

"• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
• promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas,(...)"

"O ensino isolado desse tema (funções) não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos."

"Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras exatas, o que se deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas(...)"

Ao mesmo tempo que o PCN propõe que o ensino de matemática se dê através de problemas e aplicações "*(...) o que se deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas(...)*", nos sugere também que o ensino de matemática não deve ignorar a formalização, pois tem como um de seus objetivos, levar o aluno a "*(...) valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;*"

[1]Referência bibliográfica n° 2.

Acreditamos também que a formalização dos conteúdos deve sempre existir, pois não é possível a um aluno ter "segurança em relação às suas capacidades matemáticas" se não compreender as definições que precisa utilizar. Aplicar os conteúdos matemáticos em problemas reais para dar-lhes maior significado é sim de extrema importância, mas não podemos considerar irrelevante o estudo e a compreensão da origem de fórmulas e valores estabelecidos como os das razões trigonométricas, por exemplo.

Num dos trechos acima lemos que não devemos investir em cálculos repetitivos e sim na análise e compreensão dos conteúdos. No trabalho que aqui será apresentado isso se verifica, pois o aluno não se prenderá em fazer cálculos mas em perceber de onde se originam os valores das razões trigonométricas, focalizando as construções dessas razões e analizando os valores algébricos apresentados pelo programa.

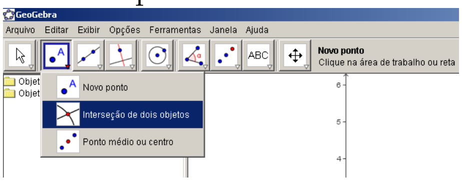
No que se refere às reduções ao primeiro quadrante, o aluno não se limitará a decorar fórmulas, pois terá a possibilidade de compreender como são deduzidas as relações existentes entre os valores de seno, cosseno e tangente de ângulos do primeiro quadrante com os valores dessas mesmas razões em ângulos pertencentes a outros quadrantes.

Em alguns momentos o PCN cita a importância do estudo de funções e dá análise de seus gráficos, o que aqui é bastante valorizado, uma vez que as construções referentes aos gráficos das funções trigonométricas são elaborados de forma a facilitar esta análise por parte dos estudantes. O PCN destaca também a importância da conexão entre conteúdos matemáticos distintos. Como já citamos na introdução, o trabalho foi estruturado de modo a valorizar esta conexão.

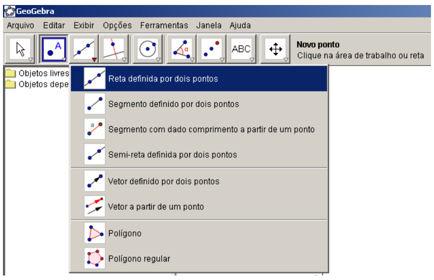
1.2 Principais ícones do GeoGebra utilizados nas construções

O programa GeoGebra trabalha com diversas definições matemáticas e dispõe de duas opções de interação com o programa: a janela geométrica e a janela algébrica, que podem ser apresentadas simultaneamente permitindo ao estudante relacionar as informações que aparecem nas duas. Existe também a opção de esconder uma das janelas e trabalhar apenas com a que for mais conveniente no momento do estudo. O GeoGebra apresenta duas opções de trabalho para estudantes que possuam níveis distintos de conhecimento, sendo elas os ícones e o campo de entrada. Os ícones apresentam entre outras alternativas, diversas opções de conceitos de geometria, enquanto com o campo de entrada podemos definir coordenadas de pontos, gráficos de funções, construir retas definindo suas equações etc.

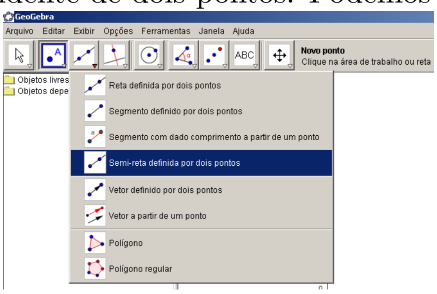
A seguir, apresentaremos os ícones do GeoGebra mais utilizados nas construções que aqui serão expostas:



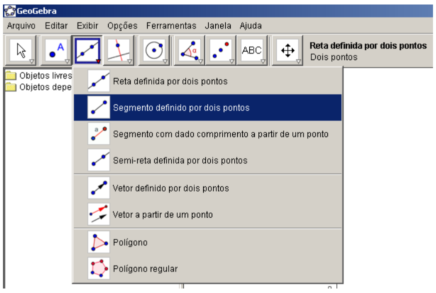
"Interseção de dois objetos". Marca um ponto dependente dos dois objetos selecionados. Foi utilizado em todas as contruções.



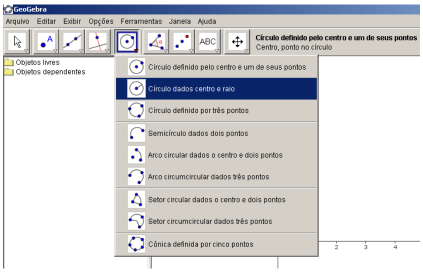
"Reta definida por dois pontos". Traça um reta dependente de dois pontos. Podemos alterar sua espessura, sua cor, seu estilo etc.



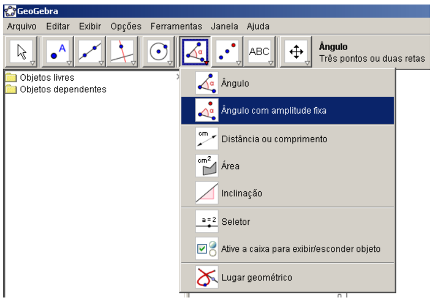
"Semi_reta definida por dois pontos". Para definir um semi–reta também precisamos que dois pontos sejam definidos anteriormente. Também permite alterações cor, espessura, etc. Foi utilizado nas construções referentes as reduções.



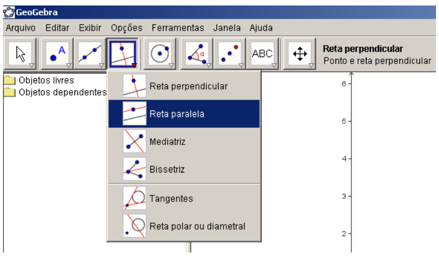
"Segmento definido por dois pontos". O ícone referente ao segmento de reta funciona de forma semelhante aos ícones da reta e da semi-reta. Utilizado e todas as construções.



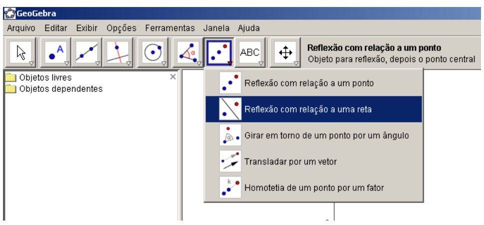
"Círculo dados centro e raio". Para a contrução dos ciclos utilizamos este ícone para que pudessemos definir o raio unitário.



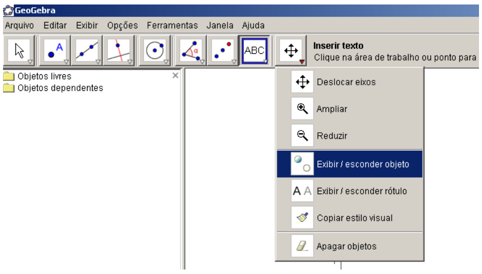
"Ângulo com amplitude fixa". Utilizado na construção de todos os ângulos, pois permite que o valor do ângulo dependa de outro objeto pré definido.



"Reta paralela". Bastante utilizado nas construções para traçar retas paralelas aos eixos.



"Reflexão com relação a uma reta". Faz a reflexão de um ponto em relação a uma reta. Utilizado nas construções referentes as reduções.



"Exibir/esconder objeto". Bastante utilizado para esconder objetos que apenas auxiliam nas construções mas que não devem aparecer.

Capítulo 2

Trigonometria no Ciclo - Razões e Reduções

Alguns livros didáticos iniciam o ensino de trigonometria apresentando problemas que envolvem situações reais como subida de ladeiras, cálculo de altura de prédios, árvores, altura de um avião em relação ao chão após determinado tempo de vôo, entre outras. Essas situações podem ser representadas geometricamente por triângulos retângulos e envolvem medidas de seus lados e ângulos. Essa interpretação geométrica que utiliza triângulos retângulos, dá início ao estudo de trigonometria e necessita das definições de seno, cosseno e tangente.

No ensino fundamental, o estudo de trigonometria se restringe a trabalhar com valores de seno, cosseno e tangente para ângulos agudos e utiliza semelhança de triângulos para construir as definições dessas três razões trigonométricas. A figura 2.1 nos dá uma noção de como são construídos os triângulos em livros didáticos para o início do ensino de trigonometria.

Nosso estudo, no entanto, será voltado ao ensino de trigonometria para o ensino médio, onde se deixa de trabalhar com triângulos retângulos e passa-se a estudar a trigonometria no ciclo trigonométrico. Nessa etapa do ensino surgem mais três razões trigonométricas, sendo elas secante, cossecante e cotangente. Com o auxílio do ciclo trigonométrico passamos a calcular os valores dessas seis razões trigonométricas para um ângulo β qualquer.

A figura 2.1 foi construída com o auxilio do software computacional livre GeoGebra que permite que se possa variar suas dimensões, preservando suas propriedades.

O presente trabalho se baseia em construções feitas neste software que visam auxiliar o ensino de trigonometria, bem como o de funções trigonométricas. Essas construções, quando inseridas no ambiente do programa possuem movimento e o estudante pode observar o que ocorre com as razões trigonométricas e com o gráfico de suas funções à medida que o ângulo varia. Todas as construções podem ser feitas pelo aluno, pois utilizam con-

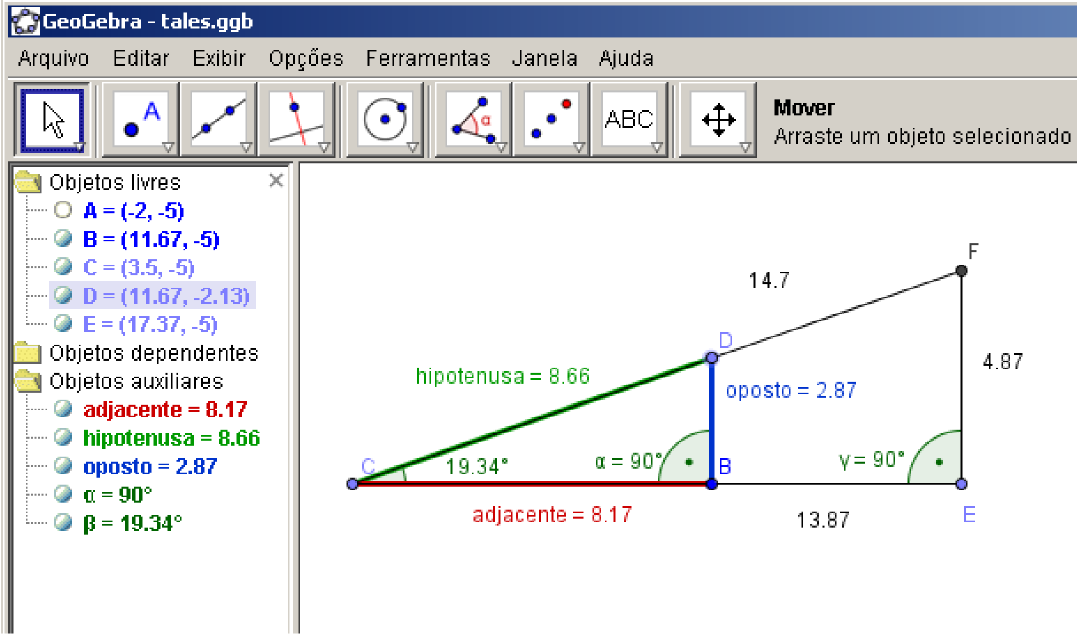


Figura 2.1: Trigonometria no triangulo retangulo

ceitos básicos de geometria como pontos, retas paralelas ou perpendiculares, segmento de reta, circunferência com raio definido, entre outros.

Ao longo do trabalho falaremos um pouco sobre os passos das contruções, porém no anexo deste encontra-se o "protocolo de construção"de todas as figuras que serão aqui apresentadas. O protocolo de construção apenas não mostra os passos referentes a alterações como mudança de cor, de espessura de linha, esconder e mostrar rótulos, etc. Estas alterações são feitas clicando com o botão direito do *mouse* sobre o objeto (reta, circunferência, segmento etc.) e selecionando a opção "propriedades". Lá o leitor encontrará essas e outras opções de alterações que podem ser feitas nos objetos.

2.1 As razões trigonométricas no ciclo

Sabemos que o ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário, com centro na origem do plano cartesiano e com sentido anti-horário de rotação.

Nesta seção serão apresentadas as razões trigonométricas no ciclo trigonométrico, onde poderão ser verificados os valores dessas razões para um ângulo qualquer, tanto na sua representação algébrica quanto na geométrica. Essas razões serão apresentadas através da construção do ciclo trigonométrico no software GeoGebra. O estudante pode interagir com a figura fazendo variar o ângulo e assim encontrar os valores das suas razões trigonométricas bem como visualizar os segmentos que representam essas razões.

As construções possuem um objeto livre denominado α que foi construído através do campo de entrada da seguinte forma: digitamos no campo de entrada $\alpha = 360°$ a apertamos *enter*. Dessa forma α aparecerá na janela algébrica. Com o botão direito do mouse clicamos sobre α, uma janela se abrirá. Selecionamos então a opção "propriedades"e outra janela se abrirá. Nesta segunda janela selecione a opção "seletor"e aparecerá uma opção chamada "intervalo", que permiti que façamos com que α seja um intervalo e não mais apenas um número. Nesta janela "seletor"definimos o mínimo como 0° e o máximo como 360°. Dessa forma α será um intervalo que irá variar entre 0 e 360°. Em algumas figuras α varia entre -2π e 2π. Neste caso a construção é análoga ao caso onde α varia entre 0 e 360°, porém ao definirmos α no campo de entrada fazemos $\alpha = -2pi$.

Novamente clicando com o botão direito sobre α e escolhendo a opção "propriedades"se abrirá uma janela e a opção a ser selecionada agora é "incremento". Foi devido a esta opção que optamos pela construçaõ de α. Já voltaremos a falar sobre esta opção.

Como α foi definido como um intervalo, ou seja, pode variar, todos os ângulos que foram contruídos nas figuras foram definidos de forma a dependerem do valor de α, isto é, os ângulos variam na medida que fazemos α variar. Utilizando a opção "incremento"citada acima, definimos como será essa variação, isto é, podemos definir se α irá variar de 1° em 1°, 0,1° em 0,1°, etc. Como o valor do ângulo depende do valor de α podemos decidir com que precisão os ângulos das figuras irão variar. E foi por essa razão que decidimos contruir α em todas as figuras e por isso tambném utilizamos o ícone "ângulo com amplitude fixa". Este ícone permite que o valor do ângulo dependa do valor de outro objeto, no nosso caso, de α. Ao mover o ponto sobre α fazemos o ângulo β variar e ao mesmo tempo variam os valores na janela algébrica.

Todas as construções desta seção do trabalho se dão da mesma forma até a marcação do ângulo, a partir de então cada razão tem suas particularidades que serão comentadas quando estivermos falando sobre elas.

Nos textos que falam sobre cada uma das figuras em diversos momentos nos referimos aos eixos das abcissas e das ordenadas ou ao eixo x e ao eixo y. O eixo das abcissas, também denominada eixo x é reta horizontal numerada que aparecerá em todas as figuras e o eixo das ordenadas, também denominado eixo y, é a reta vertical numerada que também aparecerá em todas as figuras. Como sabemos, os eixos x e y são perpendiculares.

2.1.1 Seno e Cosseno

Um ponto M sobre o ciclo trigonométrico define um ângulo β através do segmento que liga os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ e o segmento que liga M ao ponto$(0,0)$. Os valores de cosseno e seno de β serão respectivamente a primeira e a segunda coordenada de M.

As projeções desse ponto sobre os eixos coordenados definem os segmentos que representam geometricamente o cosseno e o seno do ângulo em questão. Conforme ilustra a figura 2.2, o segmento AM' é a representação geométrica do cosseno e o segmento AM'' é a representação do seno. Na medida que se faz o ângulo β variar, pode-se verificar na figura os valores de seno e cosseno do ângulo em questão, tanto no ciclo (janela geométrica), como na janela algébrica, de maneira que o aluno pode relacionar as duas formas de linguagens matemática analisando seus valores e sinais.

A construção do ciclo que apresenta as razões seno e cosseno se deu da seguinte forma: após ser definido o ângulo com o ponto M, traça-se paralelas aos eixos passando por este ponto e então marcamos os pontos M' e M". Sobre os eixos construímos os segmentos AM' e AM" e utilizando a opção propriedades destacamos esses segmentos e os renomeamos.

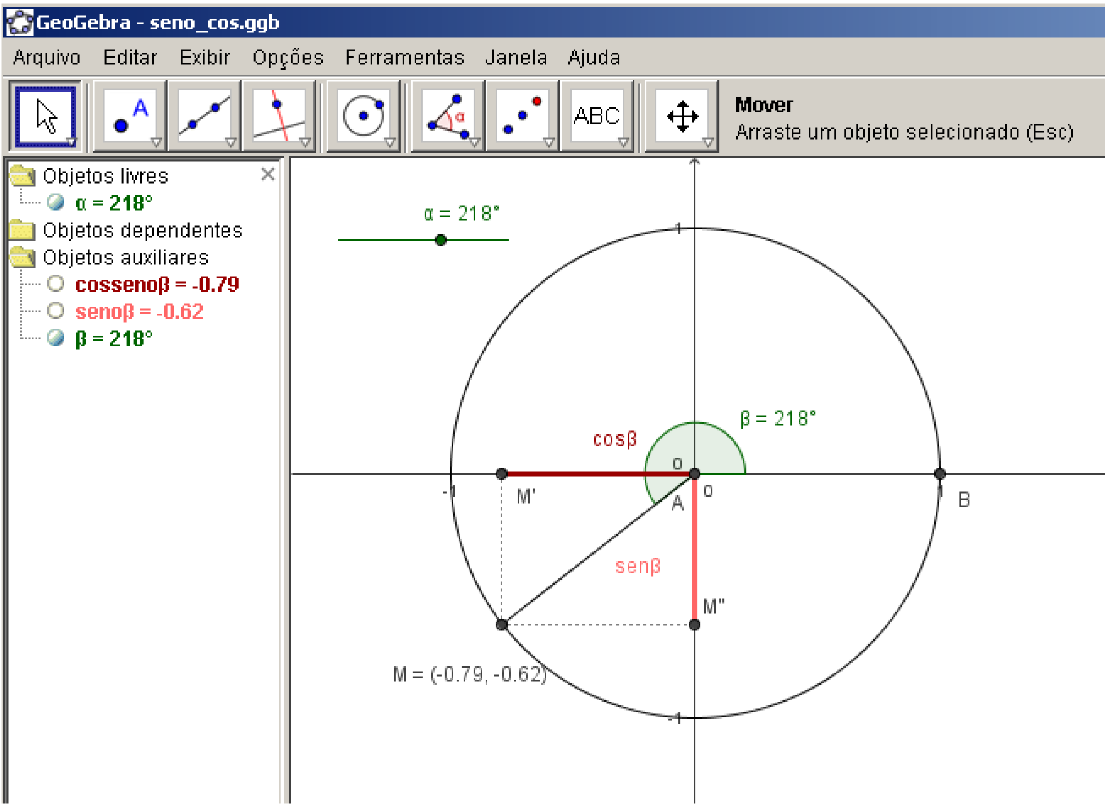


Figura 2.2: Seno e Cosseno

2.1.2 Tangente

Como sabemos, a tangente de um ângulo β é definida como a razão entre os valores de seno e cosseno de β (para cosseno de β diferente de zero). O segmento $\overline{CB}$ da figura 2.3 é a representação geométrica da tangente no ciclo trigonométrico. Quando fazemos o ângulo β variar, a figura nos mostra o valor da tangente desse ângulo, tanto na forma algébrica como na geométrica, permitindo assim que o estudante verifique a relação do valor da tangente com os valores de seno e cosseno.

Para construir o ciclo que representará a tangente apenas fazemos alguns acréscimos na figura 2.2. Traçamos uma reta tangente à circunferência passando pelo ponto B chamado eixo das tangentes e outra sobre o raio AM da circunferência. Um ponto deve ser marcado na interseção dessas retas definindo assim o segmento que representará a tangente, como vemos na figura 2.3.

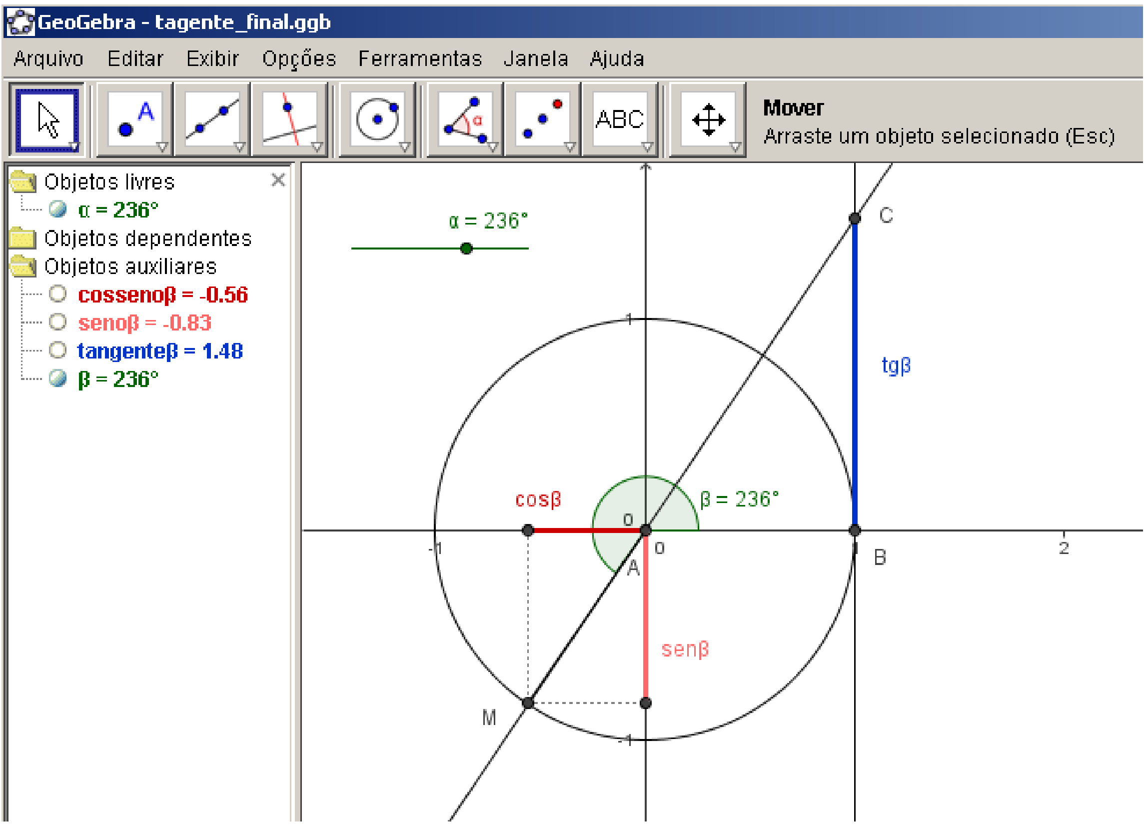


Figura 2.3: Tangente

2.1.3 Cotangente

A cotangente de um ângulo β é definida como a razão entre os valores de cosseno e seno de β (para seno β diferente de zero). O segmento FG da figura 2.4 é a representação geométrica da cotangente de β. Ao fazermos o ângulo variar, podemos observar a cotangente de um ângulo qualquer tanto na sua representação algébrica como na geométrica, permitindo ao estudante associar as informações das duas janelas e perceber a relação dos valores da cotangente com os valores do cosseno e do seno, como nos mostra a figura 2.4.

A construção da figura 2.4 se dá de forma semelhante a da figura 2.3, porém o eixo das tangentes é paralelo ao eixo y, enquanto o eixo das cotangentes, que passa pelo ponto F, é paralelo ao eixo x. Como o programa possui opções de construção de retas paralelas e de retas perpendiculares, as duas opções podem ser exploradas.

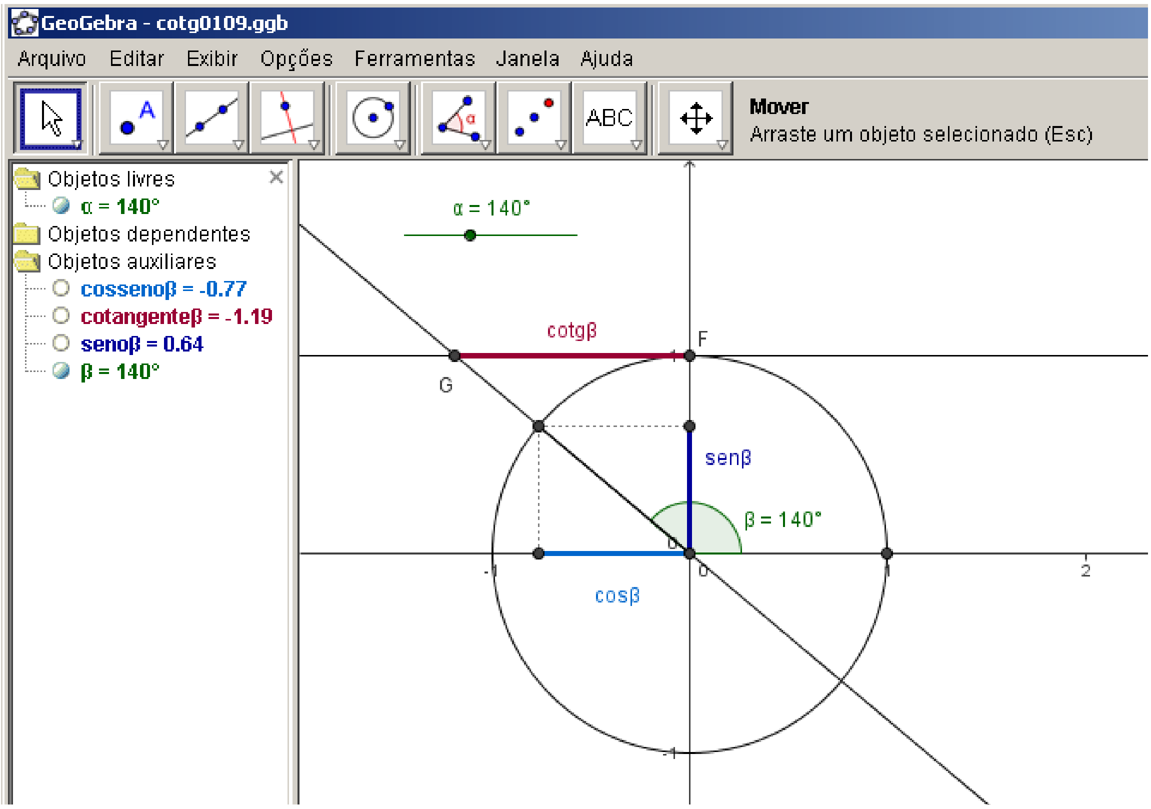


Figura 2.4: Cotangente

2.1.4 Secante

A secante de um ângulo β é definida como a razão entre o número 1 (um) e o valor do cosseno de β (para cosseno de β diferente de zero), ou seja, se o cosseno de β é diferente de zero, então a secante de β é o inverso do cosseno de β. O segmento AF da figura 2.5 nos mostra a representação geométrica da secante de β enquanto seu valor algébrico é apresentado na janela algébrica. A figura 2.5 mostra também os valores do cosseno e sua forma geométrica. Ao fazer a ângulo β variar, tem-se valores da secante de um ângulo qualquer e pode-se relacionar esses valores com os valores do cosseno.

Na construção do ciclo que representa a secante podemos utilizar parte da construção da figura 2.2, pois precisamos da construção relacionada ao cosseno. A partir de então traçamos em reta tangente à circunferência passando pelo ponto que define o ângulo, nesse caso o ponto C. Na interseção dessa reta com o eixo x marcamos um ponto, que irá determinar o segmento que descreve geometricamente a secante.

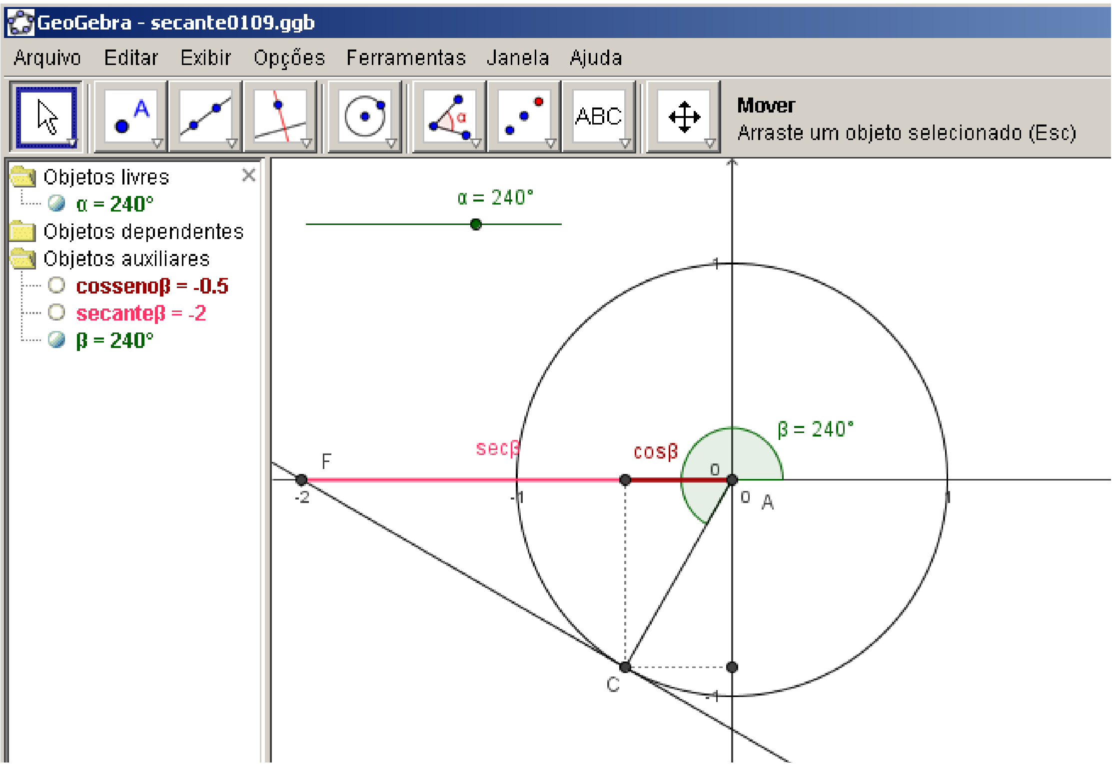


Figura 2.5: Secante.

2.1.5 Cossecante

A cossecante de um ângulo β é definida como a razão entre o número 1 (um) e o seno de β (desde que seno de β seja não nulo), isto é, se o seno de β é diferente de zero, então a cossecante de β é o inverso do seno de β. Podemos verificar a representação geométrica da cossecante de β na figura pelo segmento $\overline{AD}$. Fazendo β variar, teremos além da representação geométrica da cossecante, seus valores algébricos que são apresentados na janela algébrica. A figura 2.6 nos mostra ainda a representação algébrica e geométrica do seno para que se possa verificar sua relação com a cossecante.

Por fim, a construção referente a cossecante é semelhante a construção da figura 2.5, porém aqui mantemos a parte da construção da figura 2.2 referente ao seno e ao traçarmos a reta tangente à circunferência marcamos um ponto sobre sua interseção com o eixo y, definindo assim sobre o eixo y o segmento que representa a cossecante.

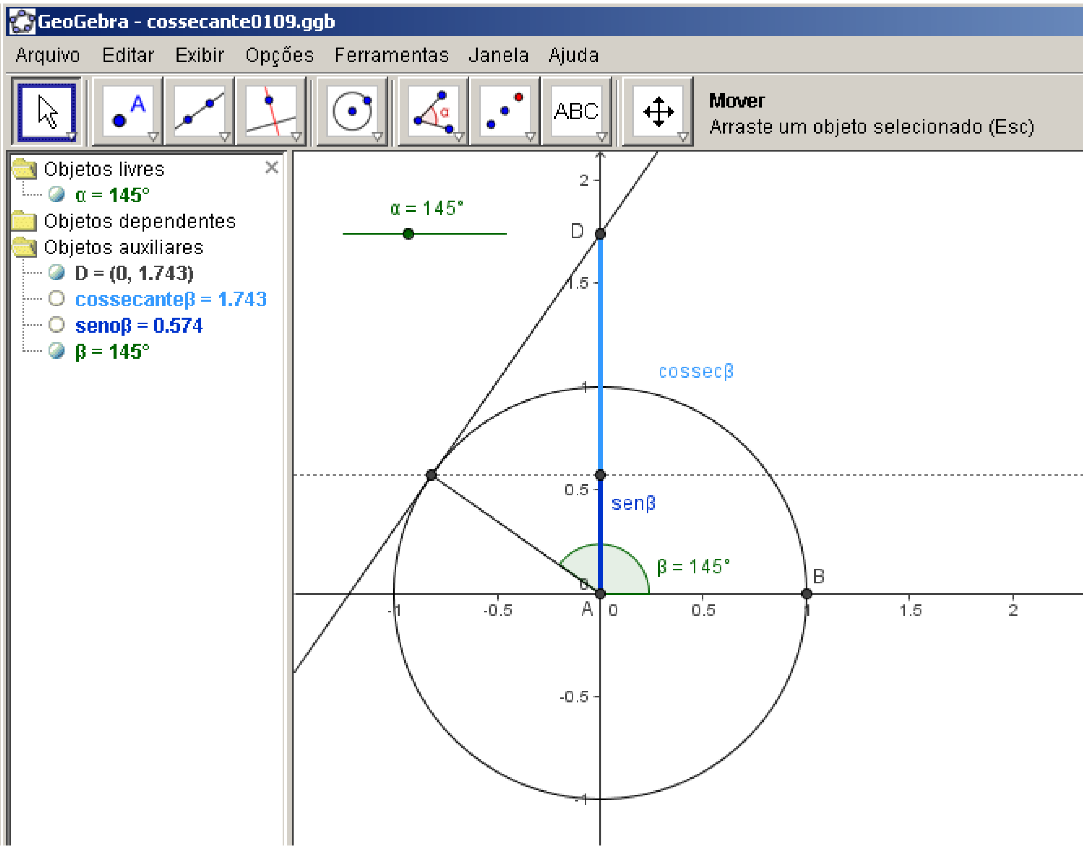


Figura 2.6: Cossecante.

2.2 Redução ao primeiro quadrante

Reduzir um ângulo θ ao primeiro quadrante implica em encontrar um ângulo $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que os valores $seno\,(\theta)$, $cosseno\,(\theta)$ e $tangente\,(\theta)$ sejam iguais, em módulo, aos valores de $seno\,(\beta)$, $cosseno\,(\beta)$ e $tangente\,(\beta)$, respectivamente. O sinal positivo ou negativo é dado de acordo com o quadrante a que pertence o ângulo θ. A seguir, apresentaremos contruções do ciclo trigonométrico feitas no software GeoGebra, onde o estudante poderá relacionar tanto os valores algébricos quanto a forma geométrica das razões trigonométricas de ângulos do primeiro quadrante com ângulos dos outros quadrantes. Interagindo com o programa, o estudante poderá variar dois ângulos ao mesmo tempo, observando assim as relações existentes entre os ângulos do segundo, terceiro e quarto quadrantes com os ângulos do primeiro. Em todas as figuras aparecerá um objeto livre α que pode variar entre 0 e 90° e o ângulo β nas contruções é dependente de α . Movendo o ponto sobre este objeto fazemos os ângulos da figura variar, simultaneamente, variando também os valores na janela algébrica.

2.3 Redução do segundo para o primeiro quadrante

Seja $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ um ângulo qualquer. Vamos verificar que

$$seno\,(\theta) = seno\,(\pi - \theta)\,, \tag{2.1}$$

$$\cos seno\,(\theta) = -\cos seno\,(\pi - \theta)\,, \tag{2.2}$$

$$tangente\,(\theta) = -tangente\,(\pi - \theta) \tag{2.3}$$

e que o ângulo $\pi - \theta$ pertence ao primeiro quadrante.

Verificando:

Primeiramente verificaremos que o ângulo $\pi - \theta$ pertence ao primeiro quadrante.

De fato, se θ pertence ao segundo quadrante então

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Longrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \Longrightarrow -\pi \leq -\theta \leq -\frac{\pi}{2}$$

o que implica em

$$\pi - \pi \leq \pi - \theta \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leq \pi - \theta \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \pi - \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e portanto $\pi - \theta$ pertence ao primeiro quadrante.

2.3.1 Seno

De acordo com a figura 2.7 temos que, após serem construídos o ângulo β e a circunferência , a reta b (paralela ao eixo x) foi traçada por C definindo o ponto D e o ângulo θ. Por construção temos que a ordenada de C possui o mesmo valor que a ordenada de D, ou seja, os ângulos β e θ possuem o mesmo valor para seno e a interseção de b com o eixo y define o segmento que representa geometricamente o seno desses ângulos. Como o programa mostra nas duas janelas o valor dos ângulos, podemos verificar que se um ângulo θ pertencente ao segundo quadrante possui o mesmo valor de seno de um ângulo β pertencente ao primeiro quadrante então $\theta = \pi - \beta$. O ângulo $\pi - \theta$ na figura 2.7 está representado pela letra β.

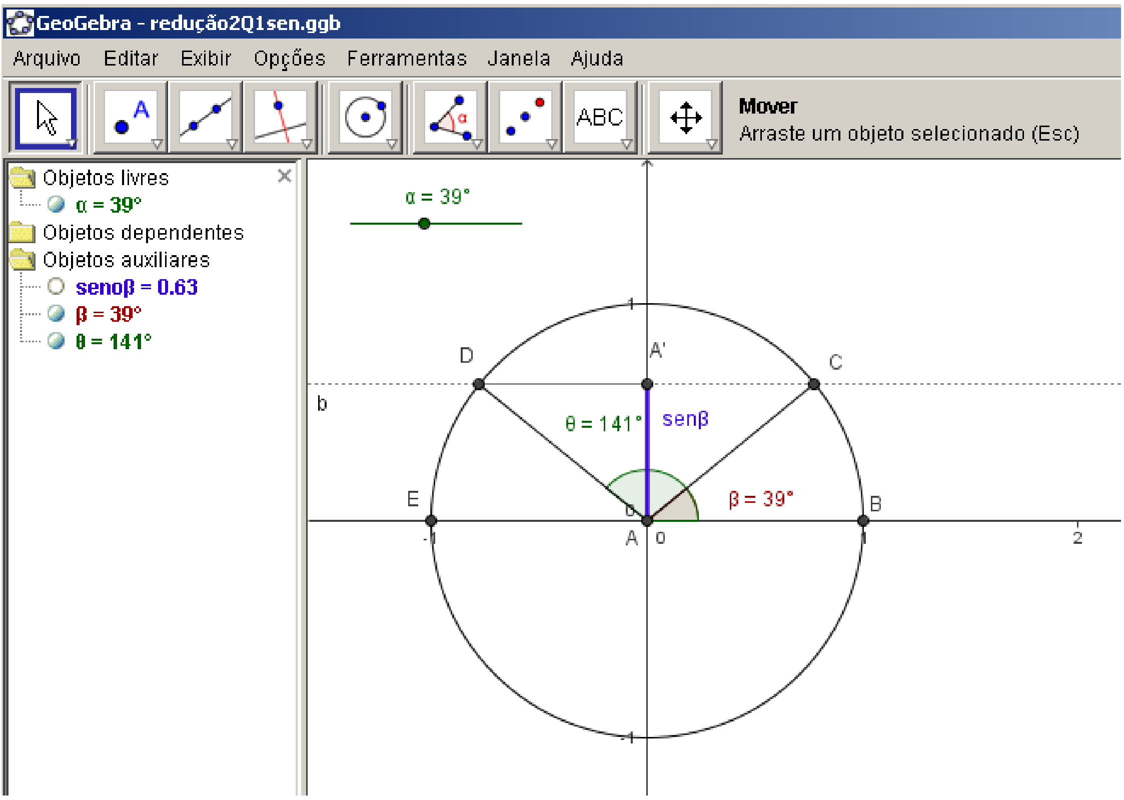


Figura 2.7: Seno de um angulo do segundo quadrante.

2.3.2 Cosseno

Da figura 2.8 temos que o ângulo θ é dependente do ângulo β por construção, pois θ foi definido após a construção da reta b (paralela ao eixo x) que passa por C. Assim vemos na janela algébrica que os pontos C e D possuem abscissa com mesmo valor em módulo mas com sinais opostos, isto é, podemos verificar que o ângulo θ possui o mesmo valor do cosseno do ângulo β porém com sinais contrários. As projeções dos pontos C e D definem sobre o eixo das ordenadas os segmentos que são a representação geométrica do cosseno dos ângulos em questão, o que pode ser visualizado na janela geométrica. Quando o programa nos mostra os valores algébricos dos ângulos θ e β podemos verificar que $\theta = \pi - \beta$, satisfazendo a igualdade 2.2. O ângulo $\pi - \theta$ na figura também está representado pela letra β.

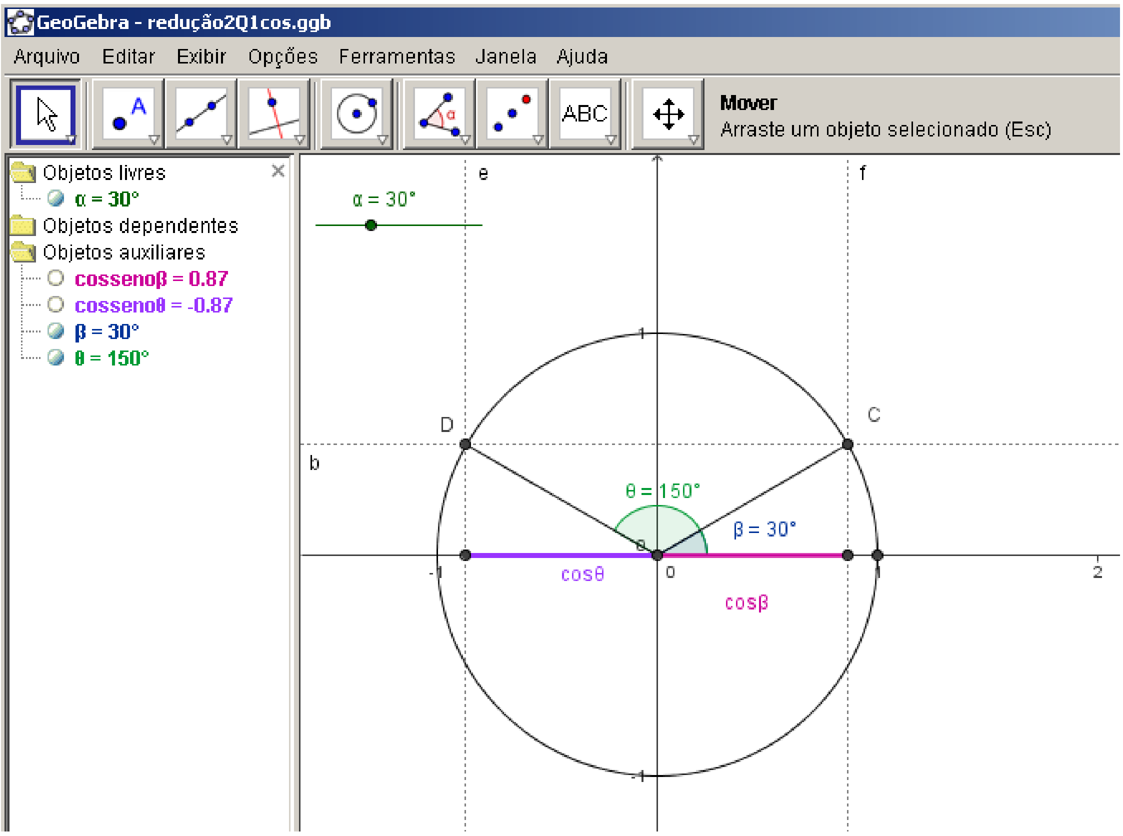


Figura 2.8: Cosseno de um angulo do segundo quadrante.

2.3.3 Tangente

De acordo com a construção da figura 2.9 temos que a reta b, paralela ao eixo x, foi traçada pelo ponto C, e obtendo o ponto D (intersecção da reta b com a circunferência) que define o ângulo θ. Definidos os ângulos θ e β, vemos que eles satisfazem a condição de que o valor de θ deve ser igual ao valor $\pi - \beta$. Construídas as repectivas tangentes dos ângulos θ e β podemos observar na janela algébrica que as ordenadas dos pontos E e F possuem o mesmo valor em módulo, porém, com sinais opostos, ou seja, os valores apresentados pelo programa verificam a igualdade 2.3. Na figura o ângulo $\pi - \theta$ está representado por β.

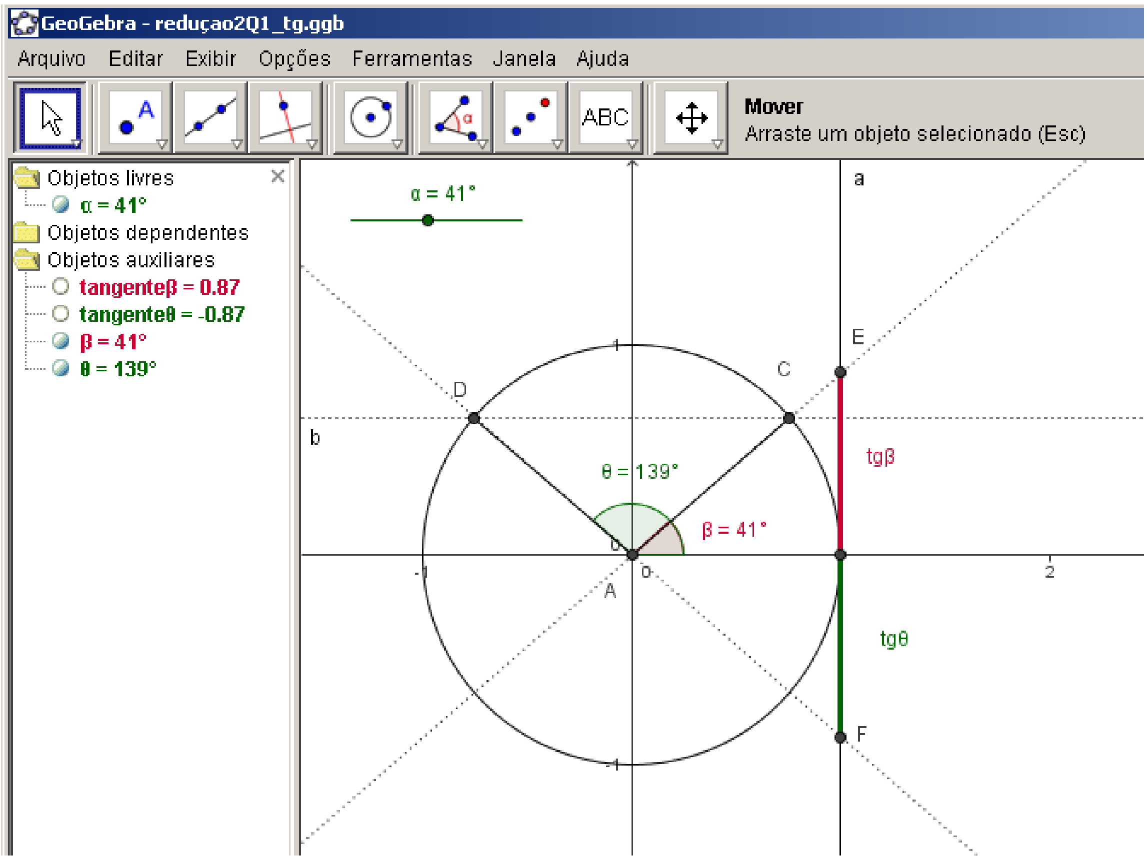


Figura 2.9: Tangente de um angulo do segundo quadrante.

2.4 Redução do terceiro para o primeiro quadrante

Seja $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ um ângulo qualquer. Vamos verificar que

$$seno\,(\theta) = -seno\,(\theta - \pi)\,, \tag{2.4}$$

$$cosseno\,(\theta) = -cosseno\,(\theta - \pi)\,, \tag{2.5}$$

$$tangente\,(\theta) = tangente\,(\theta - \pi) \tag{2.6}$$

e que o ângulo $\theta - \pi$ pertence ao primeiro quadrante.

Verificando:

Primeiramente verificaremos que o ângulo $\theta-\ \pi$ pertence ao primeiro quadrante.

De fato, se θ pertence ao terceiro quadrante então

$$\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Longrightarrow \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

o que implica em

$$\pi - \pi \leq \theta - \pi \leq \frac{3\pi}{2} - \pi \Longrightarrow 0 \leq \theta - \pi \leq \frac{\pi}{2}$$

e portanto $\theta - \pi$ pertence o primeiro quadrante.

Nas figuras que seguem poderão ser verificadas geometricamente as igualdades acima e o ângulo $\theta - \pi$ será representado na figura por β.

2.4.1 Seno

O ciclo que apresentará a relação entre os valores de seno de ângulos do terceiro quadrante com ângulos do primeiro quadrante foi construído da seguinta maneira: definido o ângulo β, traça-se a reta a passando pelo ponto C e pela origem do sistema. A oura interseção da reta a com a circunferência definirá o ponto D e consequentemente o ângulo θ. Traçam-se paralelas ao eixo x passando por C e D, defindo assim os segmentos que representam geometricamente os valores de seno dos ângulos β e θ. Dessa forma podemos verificar nas janelas algébrica e geométrica que esses ângulos possuem o mesmo valor para seno em módulo mas com sinais contrários. Observando os valores que o programa apresenta para θ e β vemos que $seno\,(\theta) = -seno\,(\beta)$ e que $\beta = \theta - \pi$. Assim, com a figura 2.10 verificamos a igualdade 2.4.

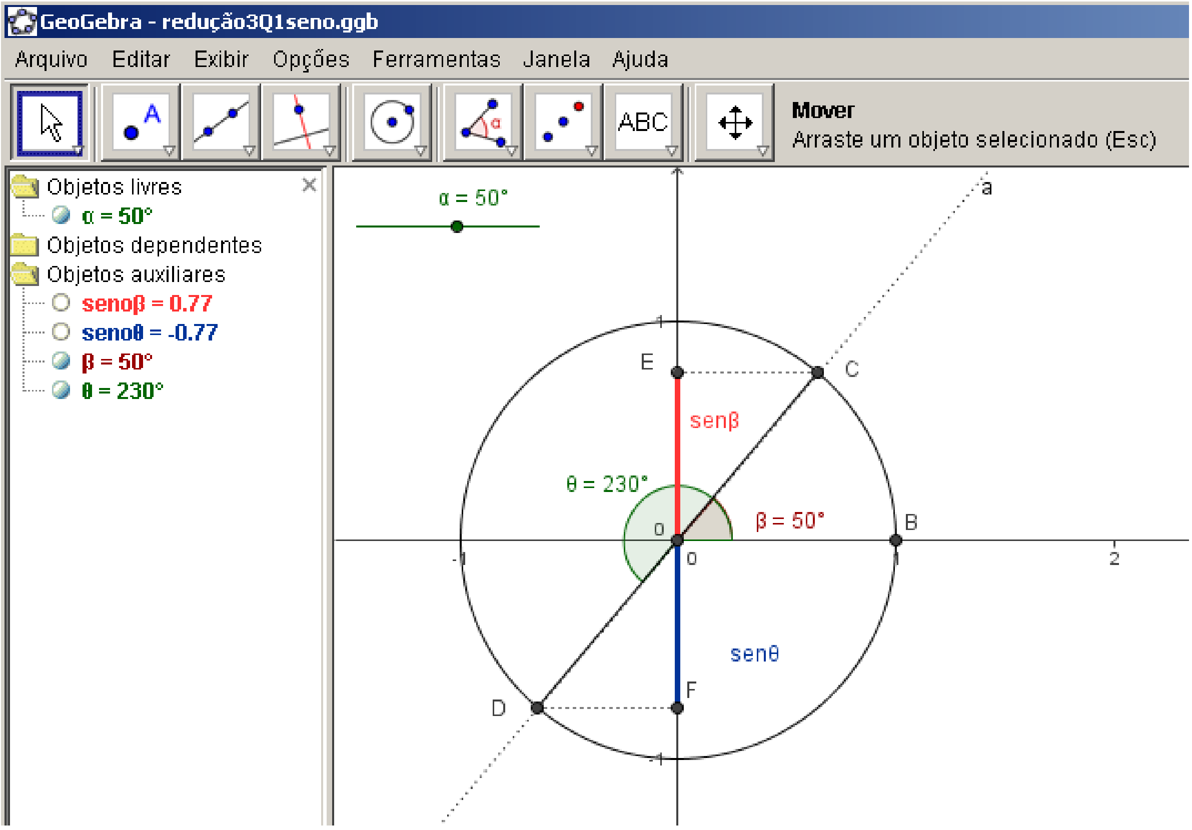


Figura 2.10: Seno de um angulo do terceiro quadrante.

2.4.2 Cosseno

A construção do ciclo trigonométrico que verifica a igualdade 2.5 se dá da seguinte forma: após ser definido o ângulo β, traça-se a reta que passa por C e pelo centro da circunferência. Marca-se o ponto D na outra interseção da reta com a circunferência definindo assim o ângulo θ. Os pontos C e D possuem abcissas com mesmo valor em módulo porém com sinais opostos, o que pode ser verificado tanto na janela algébrica quanto na geométrica. Podemos ver então que $cosseno\,(\theta) = -\cos seno\,(\beta)$. Como os valores algébricos dos ângulos θ e β apresentados pelo programa satifazem a condição de que $\beta = \theta - \pi$, podemos verificar na figura 2.11 que $cosseno\,(\theta) = -cosseno\,(\theta - \pi)$.

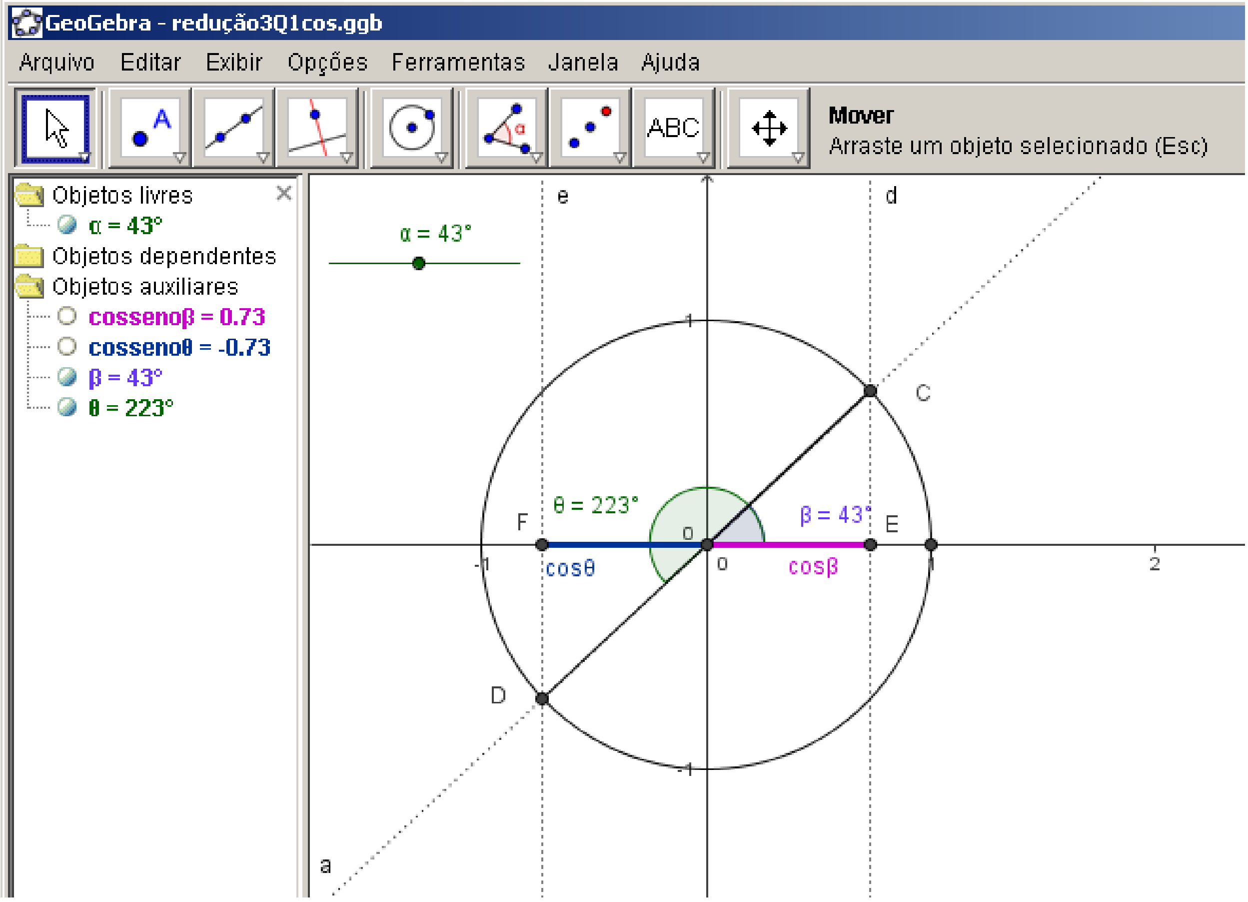


Figura 2.11: Cosseno de um angulo do terceiro quadrante.

2.4.3 Tangente

Após serem construídos o ponto C e o ângulo β da mesma forma que nos dois casos anteriores, traça-se pelo ponto C e pela origem a reta b. Na outra interseção de b com a circunferência marca-se o ponto D e após define-se o ângulo θ. Temos que os segmentos AC e AD formam um diâmentro para a circunferência e seu prolongamento define sobre a reta a o segmento que representa geométricamente a tangente de β e θ. Observando os valores de θ e β apresentados na janela algébrica vemos que $\beta = \theta - \pi$ confirmando assim a igualdade 2.6.

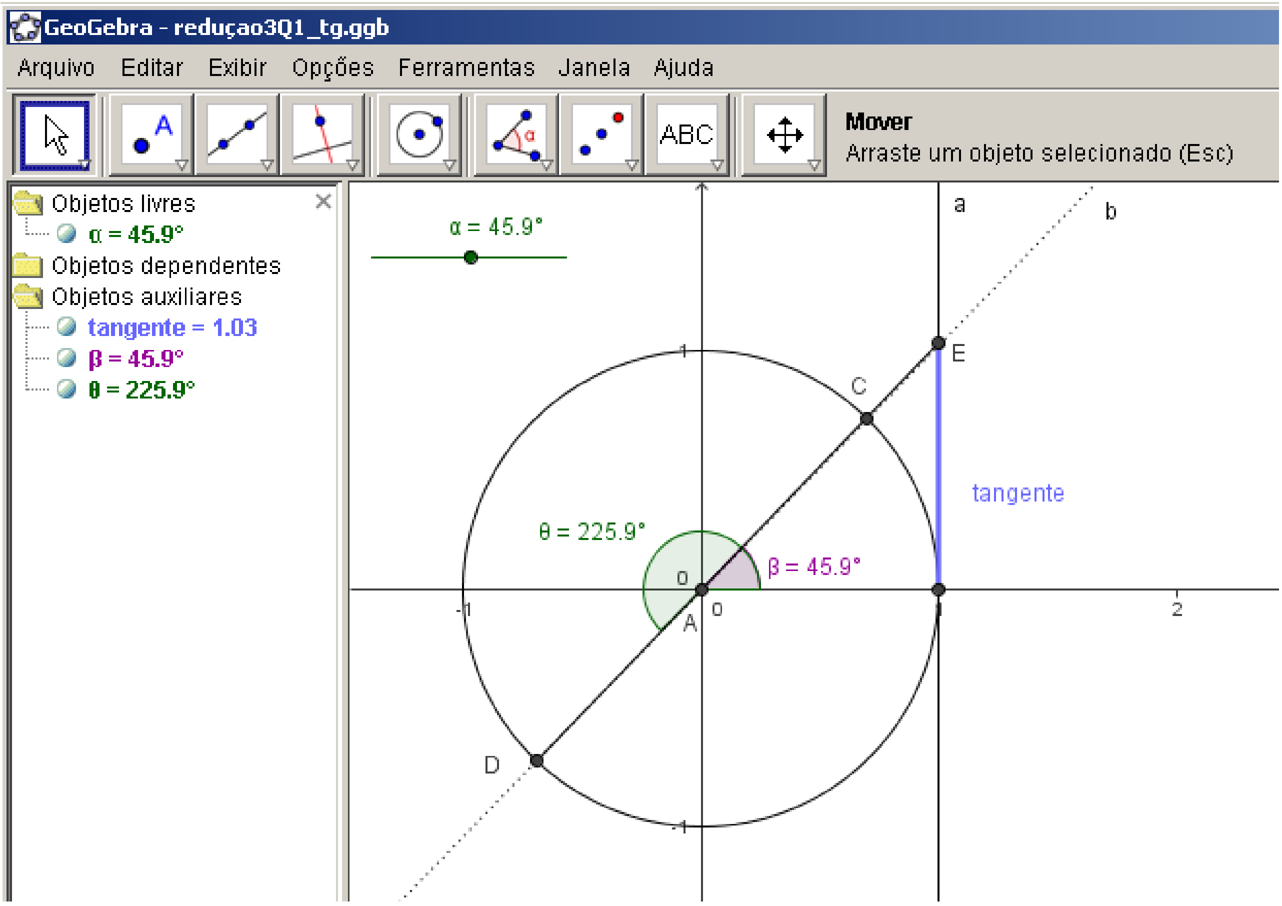


Figura 2.12: Tangente de um angulo do terceiro quadrante.

2.5 Redução do quarto para o primeiro quadrante

Seja $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ um ângulo qualquer. Vamos verificar que

$$seno\,(\theta) = -seno\,(2\pi - \theta)\,, \tag{2.7}$$

$$cosseno\,(\theta) = cosseno\,(2\pi - \theta)\,, \tag{2.8}$$

$$tangente\,(\theta) = -tangente\,(2\pi - \theta) \tag{2.9}$$

e que o ângulo $2\pi - \theta$ pertence ao primeiro quadrante.

Verificando:

Primeiramente verificaremos que o ângulo $2\pi - \theta$ pertence ao primeiro quadrante.

De fato, se θ pertence ao quarto quadrante então

$$\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \Longrightarrow \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \Longrightarrow -2\pi \leq -\theta \leq -\frac{3\pi}{2}$$

o que implica em

$$2\pi - 2\pi \leq 2\pi - \theta \leq 2\pi - \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leq 2\pi - \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

e portanto $2\pi - \theta$ pertence ao primeiro quadrante.

2.5.1 Seno

A construção do ciclo que verifica a igualdade 2.7 se deu conforme a figura 2.13, onde após ser construído o ponto C e definido o ângulo β, foi definido o ponto D através da reflexão de C em relação ao eixo x. O ponto D por sua vez, definiu o ângulo θ, o qual satisfaz a igualdade 2.7, conforme se verifica pela janela algébrica. As retas e e d paralelas ao eixo x, passam por C e D e definem sobre o eixo y os segmentos que representam geometricamente os senos dos ângulos β e θ. Nas figuras que representam a redução do quarto quadrante o ângulo $2\pi - \theta$ é representado por β.

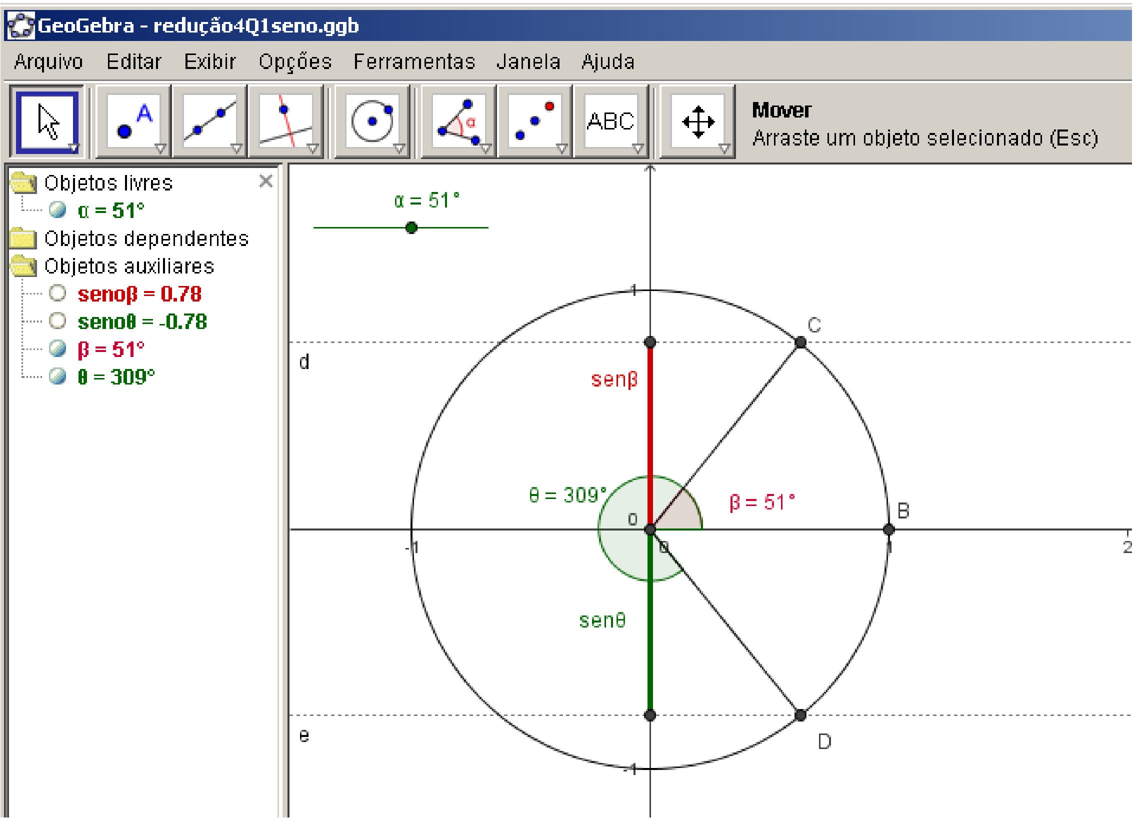


Figura 2.13: Seno de um angulo do quarto quadrante.

2.5.2 Cosseno

Na janela geométrica vemos que, de acordo com a construção da figura 2.14 o ângulo θ varia junto com o ângulo β, pois θ foi definido a partir do ponto D que é a reflexão do ponto C em relação ao eixo x. A reta a foi construída paralela ao eixo y passando pelos pontos C e D e define sobre o eixo x o segmento que representa o cosseno dos dois ângulos. Simultaneamente, a janela algébrica mostra os valores dos ângulos β e θ, onde podemos confirmar que se um ângulo θ pertencente ao quarto quadrante possui o mesmo valor de cosseno que um ângulo β pertencente ao primeiro quadrante, então eles satisfazem a condição de que $\beta = 2\pi - \theta$.

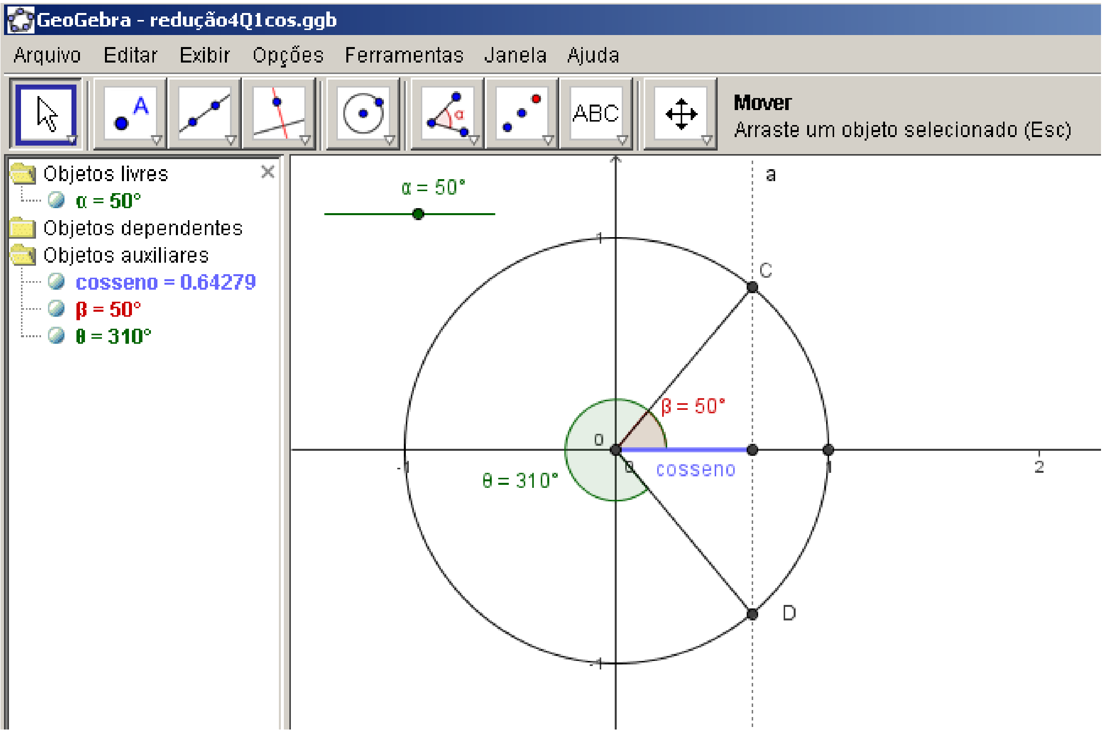


Figura 2.14: Cosseno de um angulo do quarto quadrante.

2.5.3 Tangente

Por fim, a construção do ciclo que verifica a igualdade 2.9 se dá da mesma forma que nos dois itens anteriores até a definição do ângulo θ. Após são construídas a reta a, tangente à circunferência e as semi-retas b e d que ao interceptarem a definem os segmentos que representam a tangente dos ângulos θ e β. Os valores dos ângulos apresentados na janelas algébrica e geométrica confirmam a igualdade 2.9, como vemos na figura 2.15.

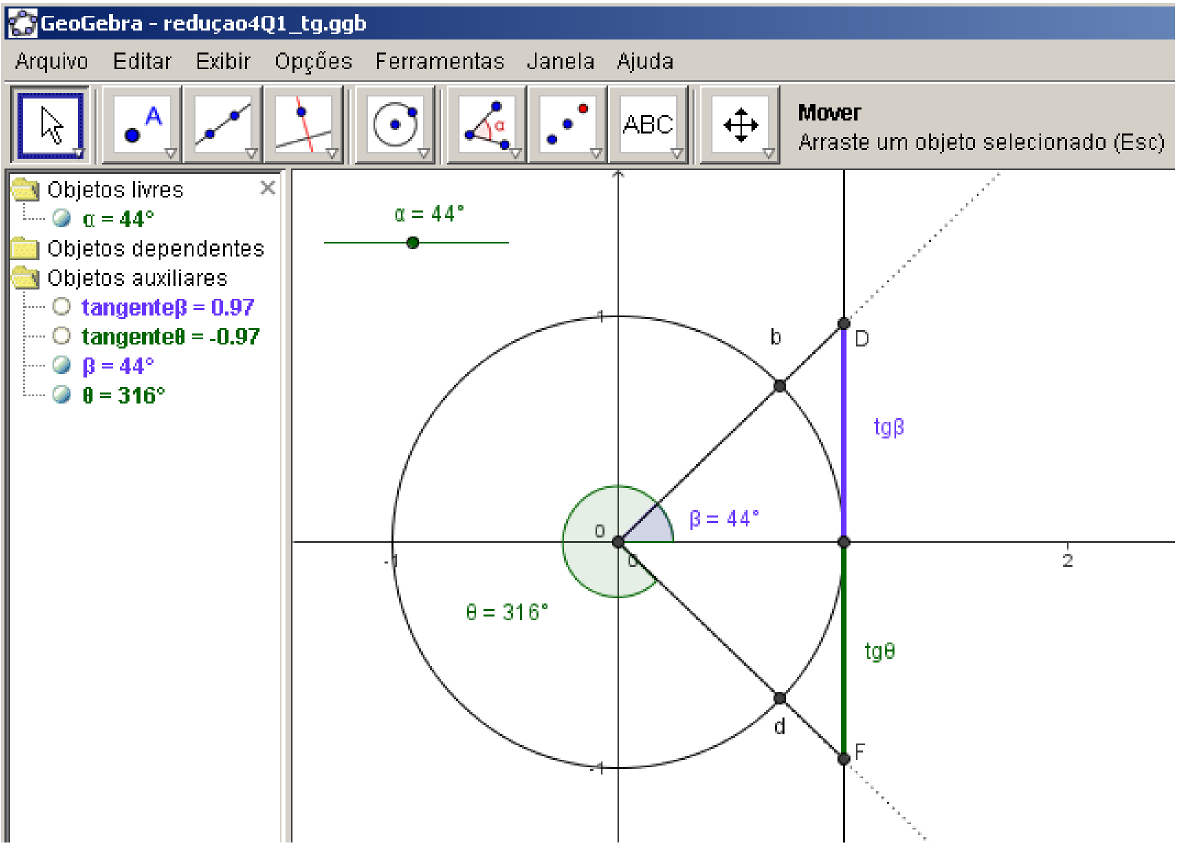


Figura 2.15: Tangente de um angulo do quarto quadrante.

Capítulo 3

Gráficos das Funções Trigonométricas

Nesta etapa do trabalho apresentaremos os gráficos das funções trigonométricas construídos com o auxílio do *software* em estudo. Ao fazer a construção que dará origem ao gráfico de cada função, o estudante poderá observar como se desenvolvem esses gráficos na medida em que se fizer o ângulo β variar. Os gráficos das funções trigonométricas são periódicos, isto é, se repetem após determinado intervalo e aqui serão apresentados no intrervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Em geral, para contruir os gráficos das funções trigonométricas os livros tomam valores de alguns arcos. Por exemplo, para construir a cossenóide tomam valores de cosseno de $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ e $90°$ e a partir desses valores obtém-se o gráfico da função cosseno. O software apresenta qualquer ponto da forma $(x, \cos(x))$, $(x, tg(x))$, etc, facilitando assim a construção e compreensão da formação desse gráfico. Voltamos a lembrar que todos os gráficos que serão apresentados aqui fazem sentido quando inseridos no programa GeoGebra, pois possuem movimento, formando o gráfico na velocidade que o estudante desejar para que se possa observar sua formação. As figuras aqui também possuem um objeto livre α cujo ponto deve ser deslocado para que o ângulo β varie.

3.1 Gráfico da Função Seno - Senóide

Como sabemos, a função seno é limitada, ou seja, $-1 \leqslant sen\,(\theta) \leqslant 1$. Seu período é 2π, isto é, $sen\,(\theta) = sen\,(\theta + 2k\pi)$, para todo inteiro k e seu domínio é o conjunto dos reais.

Na figura 3.1 pode-se observar a senóide em consrução.

De acordo com a construção da figura 3.1, o ponto F se desloca paralelamente ao eixo x numa medida igual a do ângulo β em radianos e paralelamente ao eixo y na medida do seno de β. As coordenadas de F são definidas no "campo de entrada" e para que F ao se mover defina o gráfico precisamos selecionar a opção "habilitar traço". Enquanto vemos a construção da senóide na janela geométrica através do rastro do ponto F a janela algébrica mostra os valores de seno, do ângulo e as coordenadas do ponto F que define o gráfico.

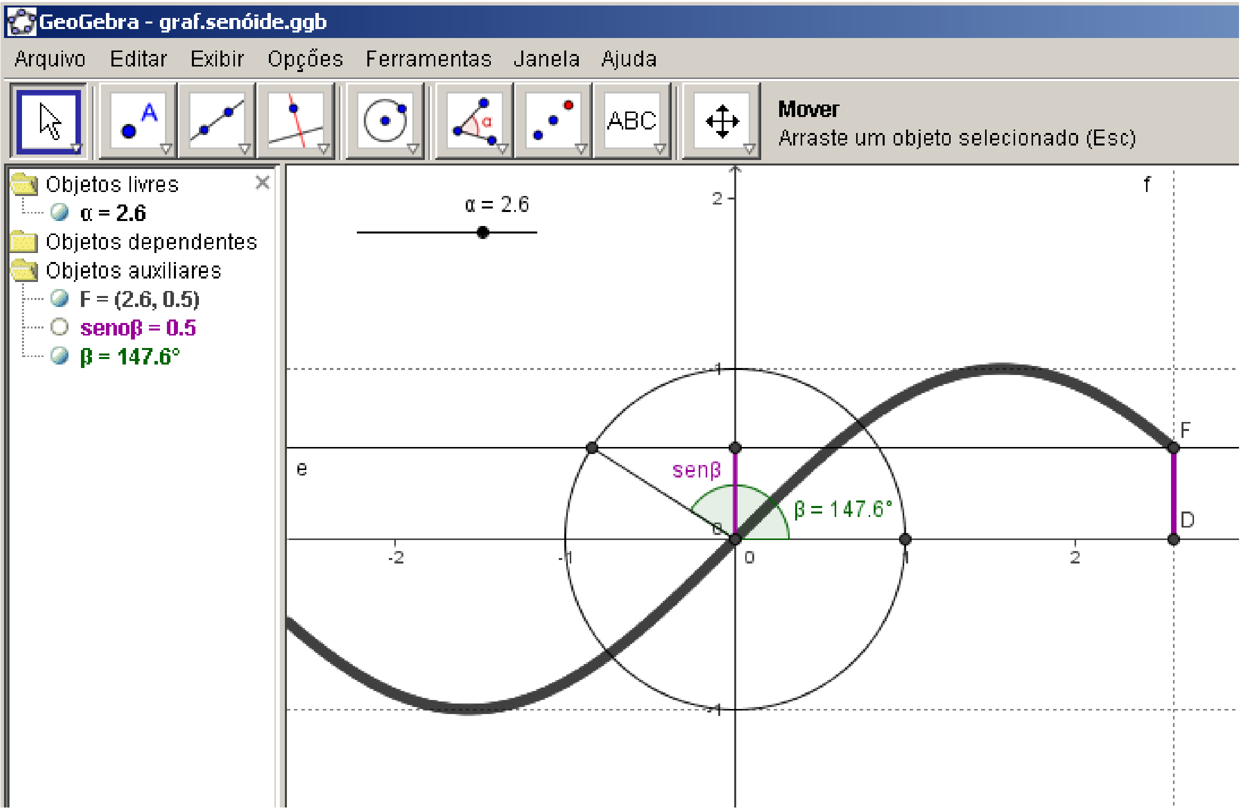


Figura 3.1: Senoide

3.2 Gráfico da Função Cosseno - Cossenóide

A função cosseno também é limitada. Sabemos que $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$ e seu período, assim como o da função seno, também é 2π. Seu domínio é o conjunto dos reais. A figura 3.2 nos mostra parte da contrução da cossenóide.

Na figura 3.2, o ponto G deloca-se na direção do eixo x numa medida igual a do comprimento do arco definido pelo ângulo β em radianos e na direção do eixo y na medida do cosseno de β. As janelas trabalham simultaneamente para que o aluno possa associar o gráfico aos valores apresentados na janela algébrica. A cossenóide se forma a partir do rastro do ponto G.

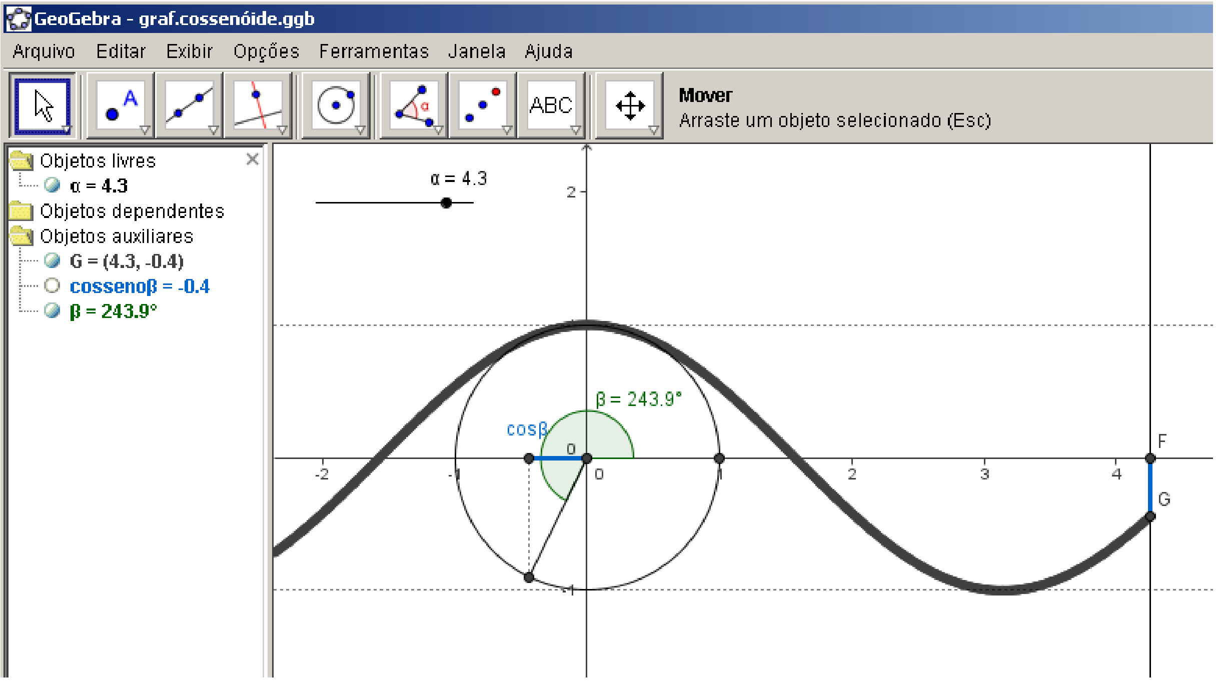


Figura 3.2: Cossenoide

3.3 Gráfico da Função Tangente - Tangentóide

A função tangente tem domínio $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, sua imagem é o conjunto dos reais e seu período é π. Na figura 3.3 pode-se ver parte da formação do gráfico da função tangente.

Na construção da figura 3.3 vemos que o ponto G se desloca horizontalmente numa medida igual a do arco definido pelo ângulo β, ou seja, o valor de α e verticalmente na medida da tangente de β. As coordenadas de G são definidas pelo estudante utilizando a opção "campo de entrada" e para que G construa o gráfico precisamos selecionar a opção "habilitar rastro".

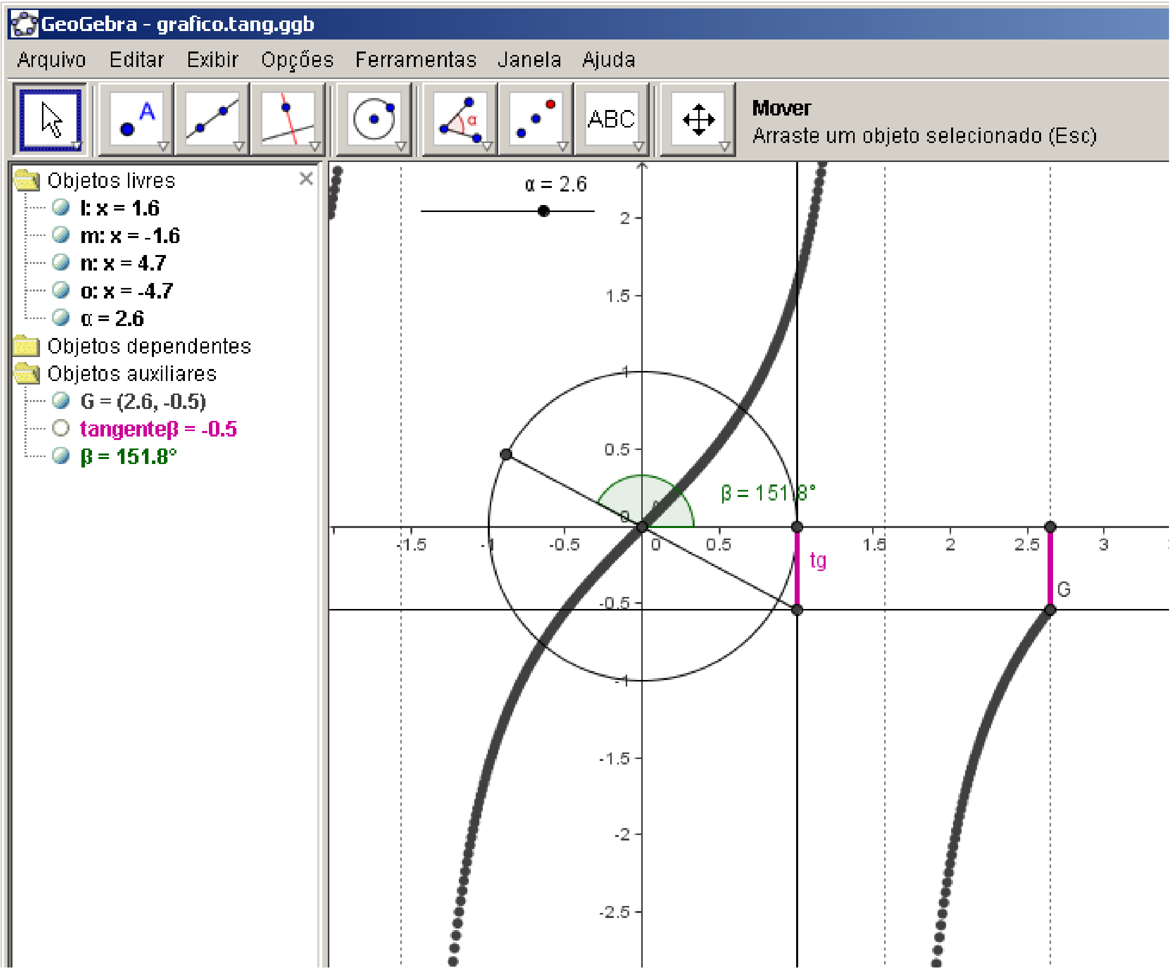


Figura 3.3: Tangentoide

3.4 Gráfico da Função Cotangente

Assim como a função tangente, a função cotangente tem como imagem o conjunto dos reais e seu período também é π. Porém seu domínio é $D = \{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Com a figura 3.4 podemos ver o gráfico da função cotangente.

O gráfico da cotangente na figura 3.4 forma-se a partir do rastro do ponto P que tem deslocamento em relação ao eixo x igual ao do ponto que forma a tangentóide, porém, em relação ao eixo y seu deslocamento é o valor da cotangente de β. As coordenadas de P, o valor do ângulo e seu respectivo valor de tangente são apresentados na janela algébrica enquanto o gráfico se forma na janela geométrica.

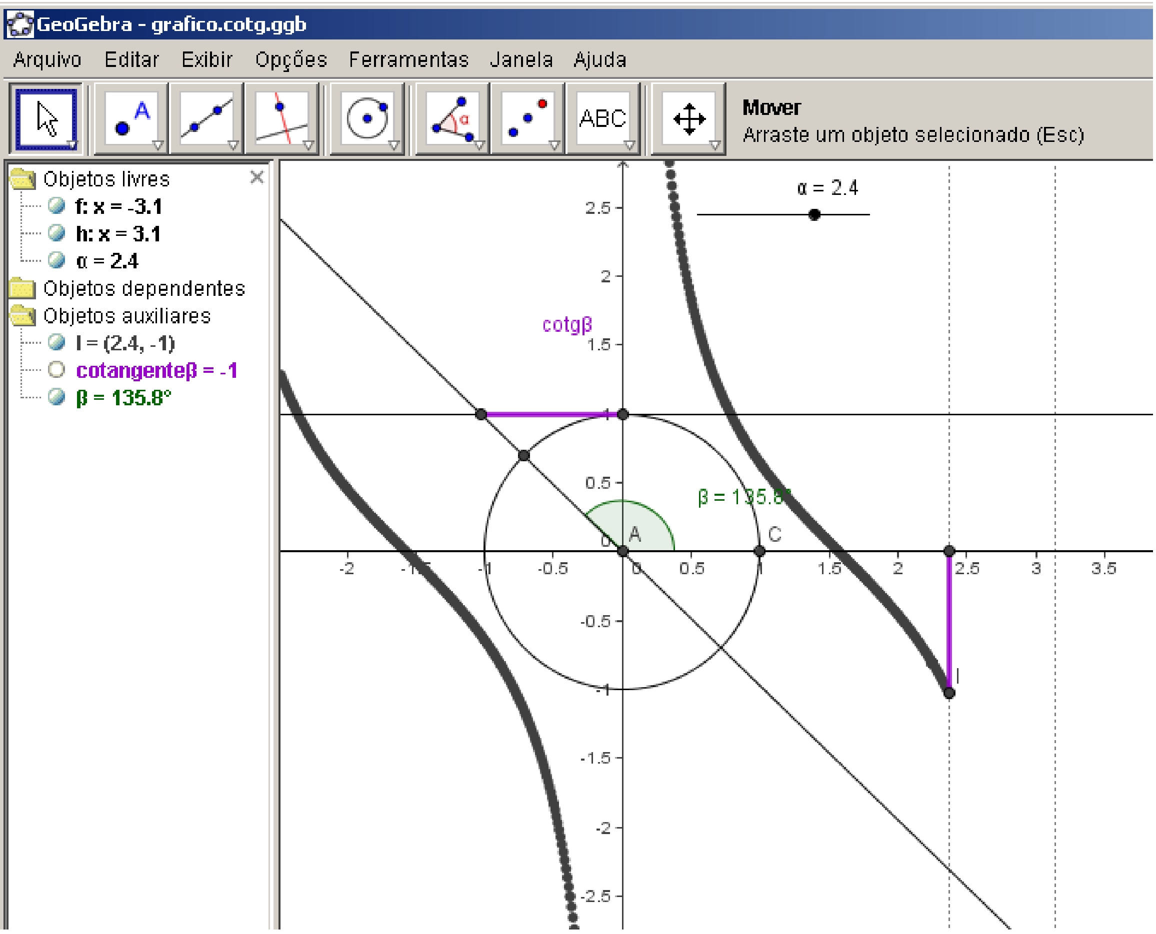


Figura 3.4: Grafico Cotangente.

3.5 Gráfico da Função Secante

O domínio função secante é $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Sua imagem é $\mathbb{R}-]-1,1[$ e seu período é 2π.Podemos observar parte do gráfico da função secante na figura 3.5.

O gráfico da secante é construído de forma similiar aos das funções anteriores, onde o ponto que define seu gráfico tem seu movimento horizontal igual ao dos pontos que formam as outras funções vistas até aqui, porém seu movimento vertical é a medida da secante de β. Definidas as coordenadas de G e habilitado o seu traço, fazemos o ângulo β variar para que o ponto G defina o gráfico da função secante, conforme a figura 3.5.

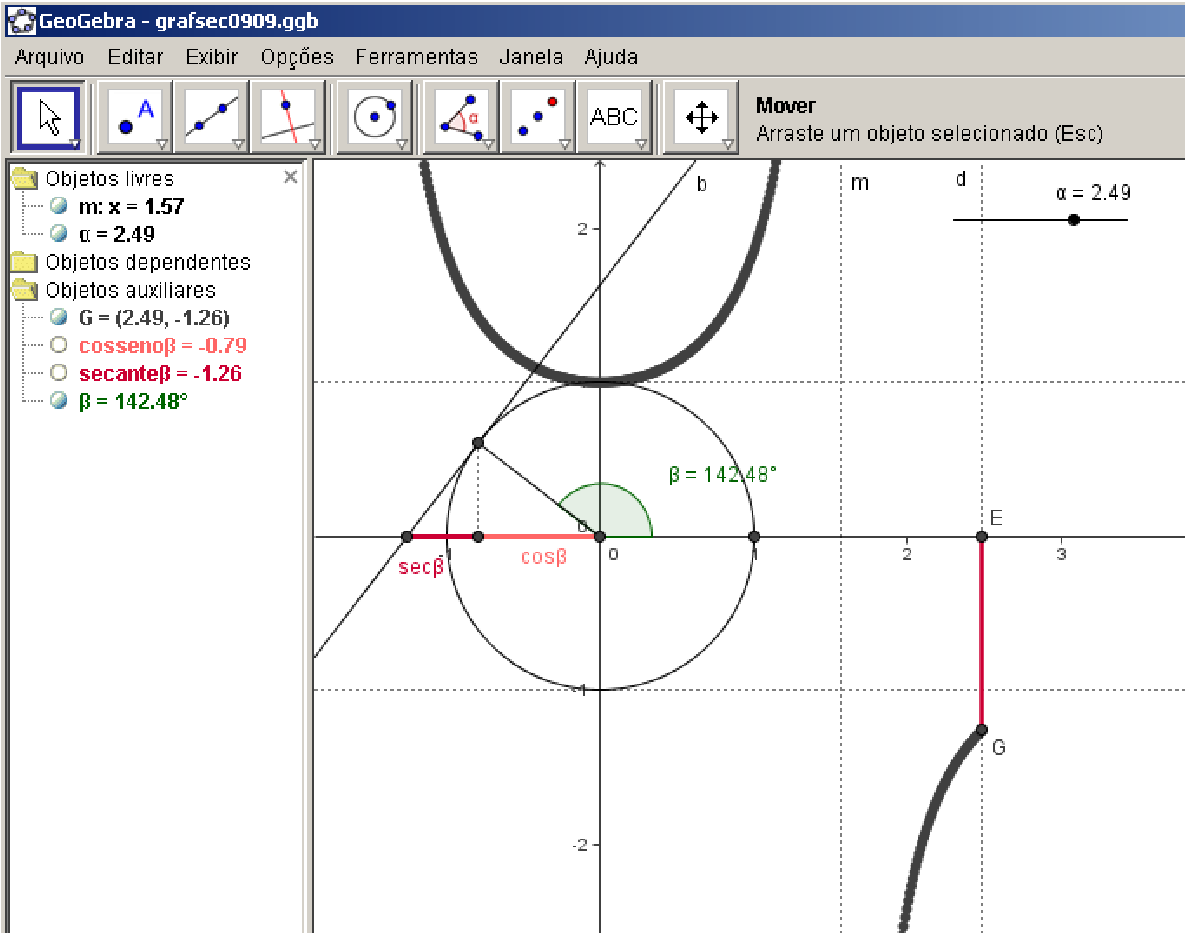


Figura 3.5: Grafico Secante.

3.6 Gráfico da Função Cossecante

Assim como a função secante, a função cossecante tem período 2π e sua imagem é $\mathbb{R}-]-1,1[$. Seu domínio é $D = \{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Na figura 3.6 temos parte do gráfico da função cossecante.

Da mesma forma, o que varia no gráfico da cossecante em relação aos das outras funções é o deslocamneto em relação ao eixo y do ponto que definirá seu gráfico. Aqui, este deslocamento será igual ao valor da cossecante de β. Fazendo variar o ângulo β o ponto G construirá o gráfico da função cossecante enquanto seus respectivos valores algébricos são mostrados na janela algébrica.

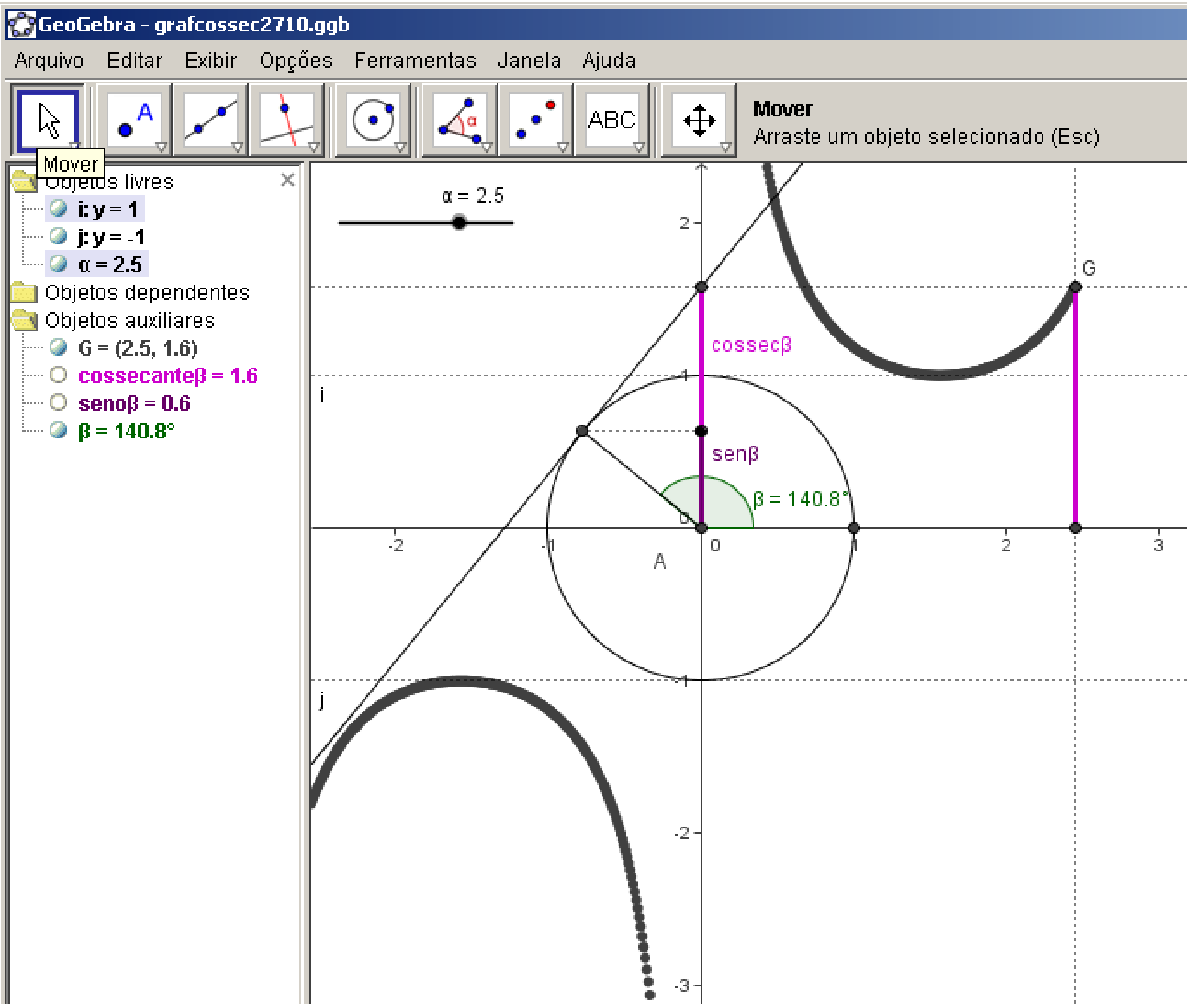


Figura 3.6: Grafico Cossecante

3.7 Exemplos de gráficos de funções que são variações das funções trigonométricas

Neste capítulo apresentaremos alguns gráficos de funções que são variações das funções trigonométricas. Todos foram construídos com o software GeoGebra e possuem movimento. Essas construções podem ser usadas como modelos para que estudantes façam construções que formem gráficos de funções, trignométricas ou não, podendo assim conhecer e explorar tanto o programa como o conteúdo. Para obter esses gráficos, o estudante fará pequenas alterações nas coordenadas (ora na coordenada x, ora na coordenada y) do ponto que determina o gráfico das funções. Com o auxílio do programa em estudo, o estudante poderá observar diversos exemplos de variações de uma mesma funçao sem precisar refazer a construção do ciclo. Por exemplo, para uma função do tipo $sen(x) + a$, onde a é uma constante, pode-se substituir a por diversos valores, sem que isso tome muito tempo do estudante e permitindo com que ele perceba melhor como ocorre esse tipo de varição.

A seguir apresentaremos quatro formas de variações das funçõs trigonométricas.

3.7.1 Variações do tipo a.cos(x),a.tg(x) etc, onde a é uma constante

Obtemos os gráficos dessas funções fazendo uma alteração na coordenada y do ponto que define o gráfico. Até aqui o ponto que define o gráfico possuia coordenada x dependente do valor do comprimento do arco do ângulo em questão e coordenada y com valor igual ao da razão trigonométrica. A partir de agora mantemos a coordenada x, porém variamos a coordenada y, obtendo assim os gráficos de funções do tipo $3cos(x)$, $\frac{1}{3}tg(x)$, $5sen(x)$ etc. Vejamos esses exemplos com as figuras 3.7 e 3.8.

Gráfico da função $3cos(x)$:

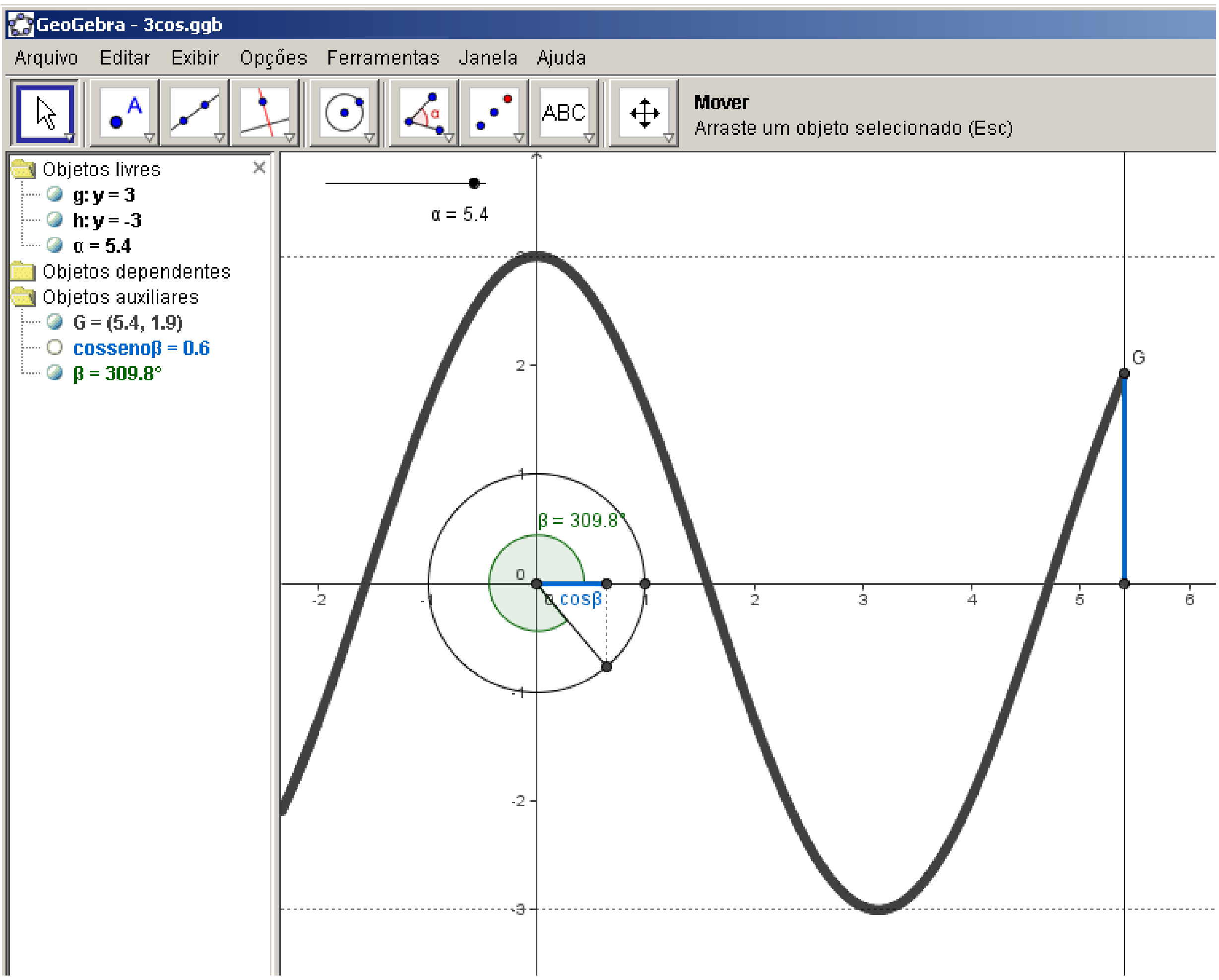


Figura 3.7: Grafico 3cos(x)

Gráfico da função $\frac{1}{2}sen(x)$:

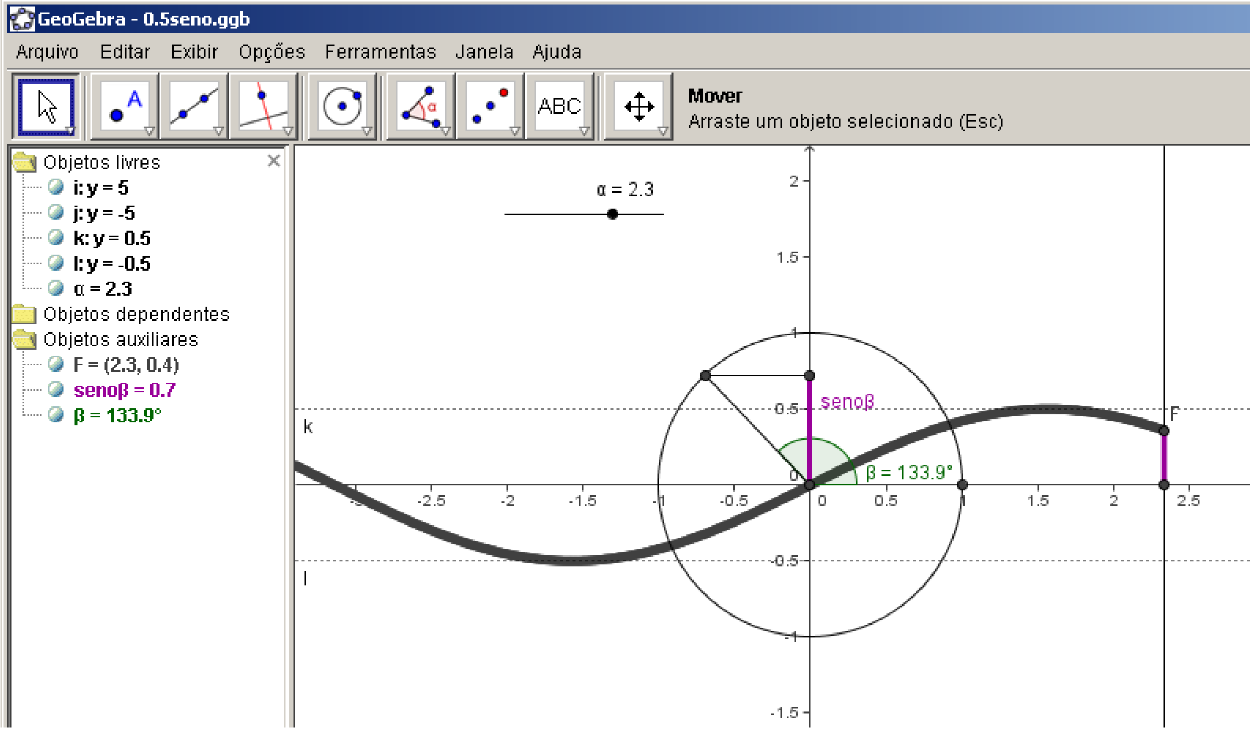


Figura 3.8: Grafico da funcao $\frac{1}{2}$sen(x)

3.7.2 Variações do tipo sen(a.x), sec(a.x) etc, onde a é uma constante

Vimos que o ponto que define o gráfico das funções trigonométricas possuia coordenada x dependente do valor do comprimento do arco do ângulo em questão e coordenada y com valor igual ao da razão trigonométrica. Porém, para obter os gráficos de funções do tipo $sen(ax)$, $tg(ax)$ etc, precisamos fazer uma alteração na coordenada x do ponto que definirá o gráfico desse tipo de função. Essa mudança irá modificar o período do gráfico das funções. Apresentaremos alguns exemplos de gráficos de funções desse tipo com as figuras 3.9 e 3.10.

Gráfico da função $secante(3x)$:

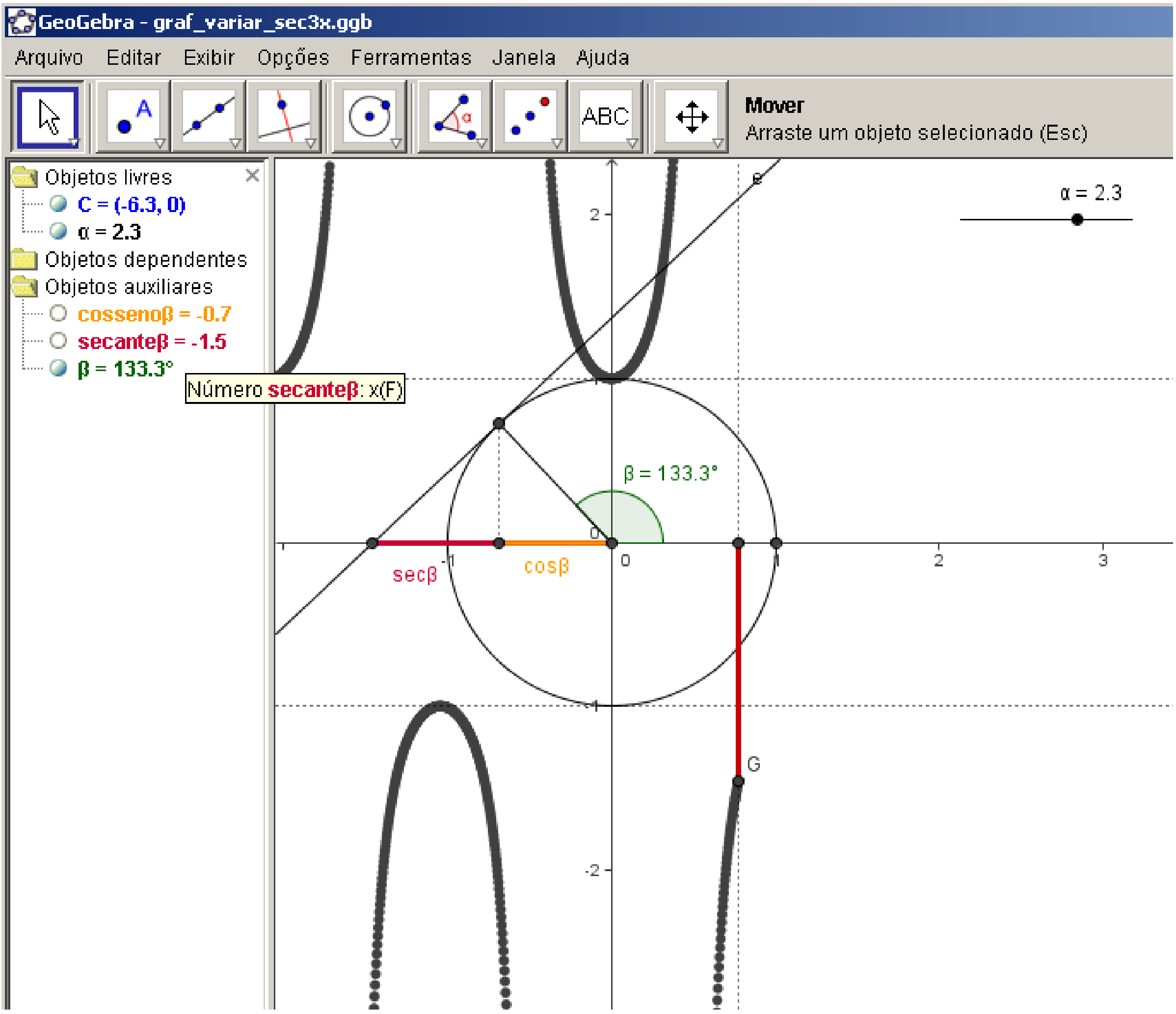


Figura 3.9: Grafico da funcao secante(3x)

Gráfico da função cotangente(2x):

.

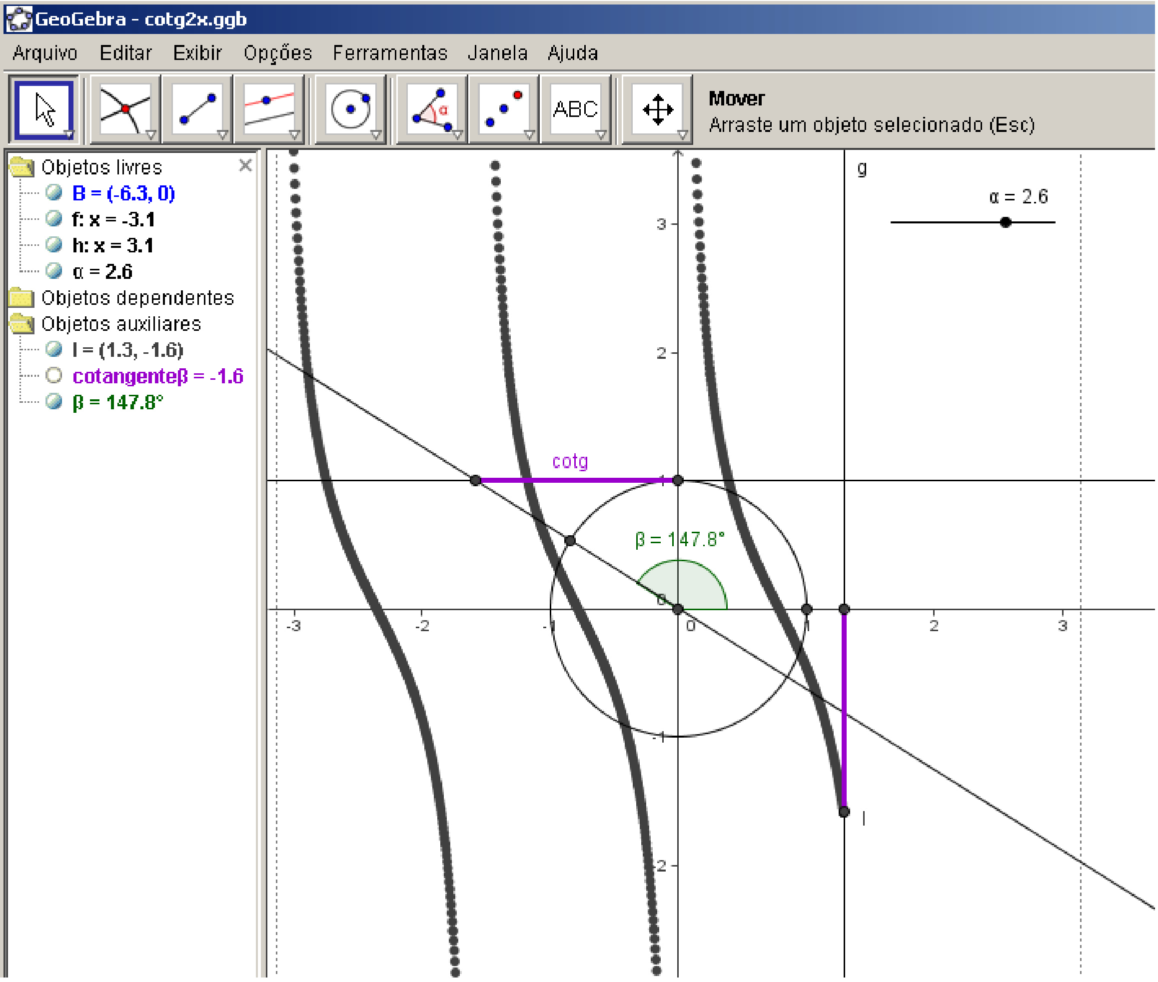


Figura 3.10: Cotangente(2x)

3.7.3 Variações do tipo tg(x) + a, sec(x) - a, etc, onde a é uma constante

Para obter o gráfico de funções do tipo $cos(x)+a$, $sec(x)-a$, etc., faremos uma alteração na coordenada y do ponto que definirá o gráfico dessas funções. Ao definir a coordenada y desse ponto, devemos somar a ela a constante que se anseia (a=3, a=-2, a=7,...) e assim obteremos a variação desejada em relação ao eixo y. As figuras 3.11 e 3.12 nos mostram dois exemplos de gráficos desse grupo de funções.

Gráfico da função $cos(x)+2$:

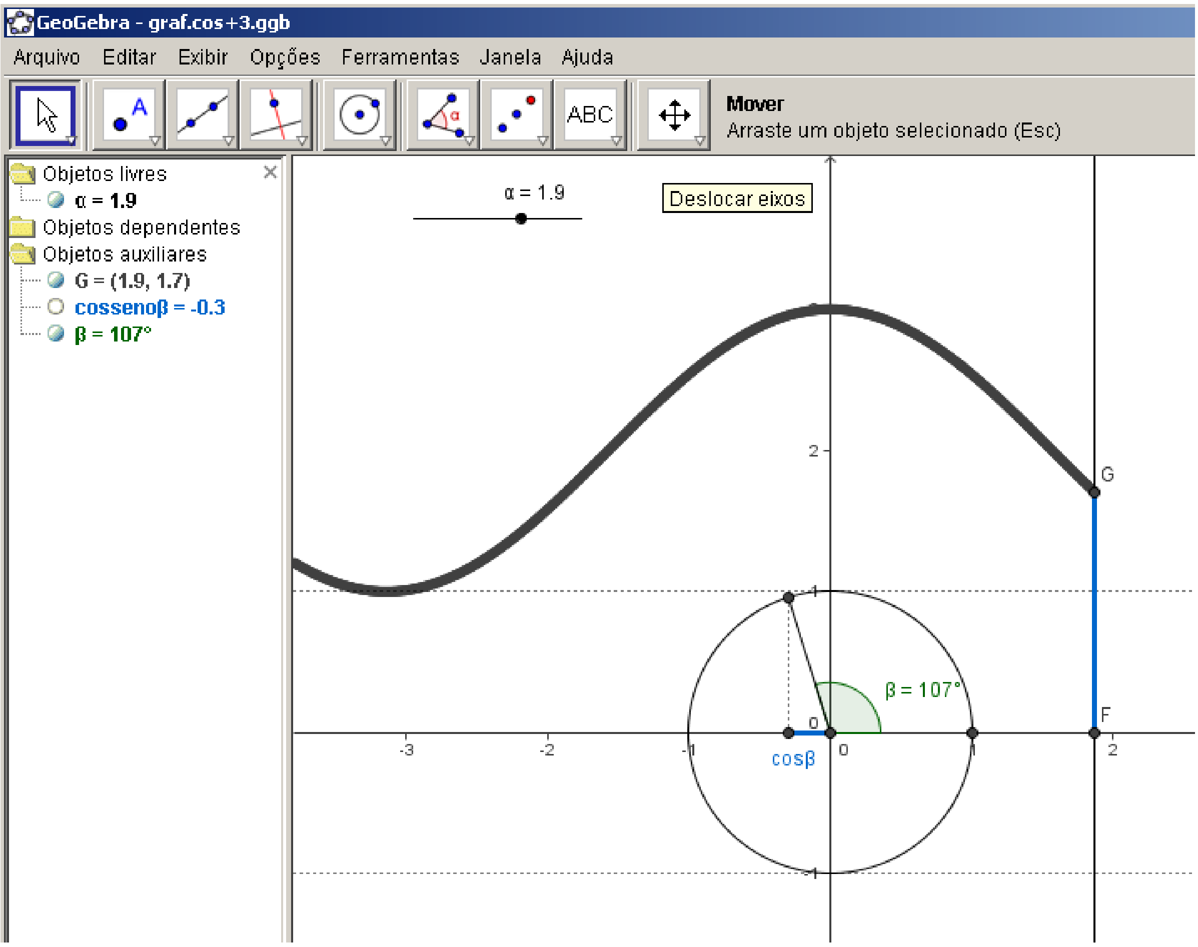


Figura 3.11: Grafico da funcao cos(x) + 2

Gráfico da função $tangente(x) - 1$:

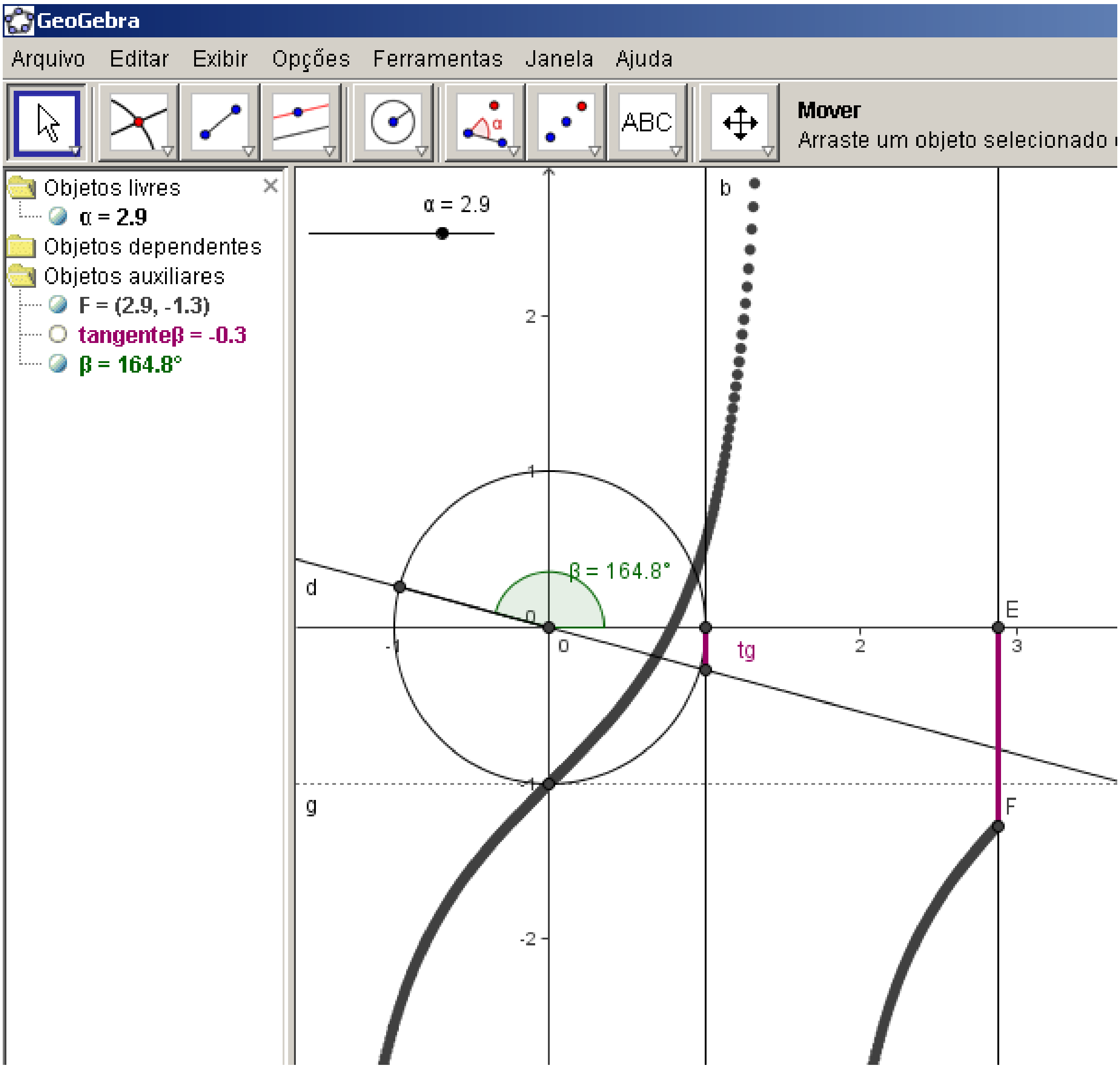


Figura 3.12: Grafico Tangente(x) – 1

3.7.4 Variações do tipo sen(x + a.π), co(x - a.π), etc, onde a é constante

Em funções do tipo $sen(x - \pi)$, $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ fazemos uma pequena alteração no coordenada x do ponto que definirá o gráfico da função, somando ou subtraindo múltiplos de π. Esse tipo de alteração fará com que o gáfico se desloque em relação ao eixo x.

Gráfico da função $sen(x - \frac{1}{2}\pi)$:

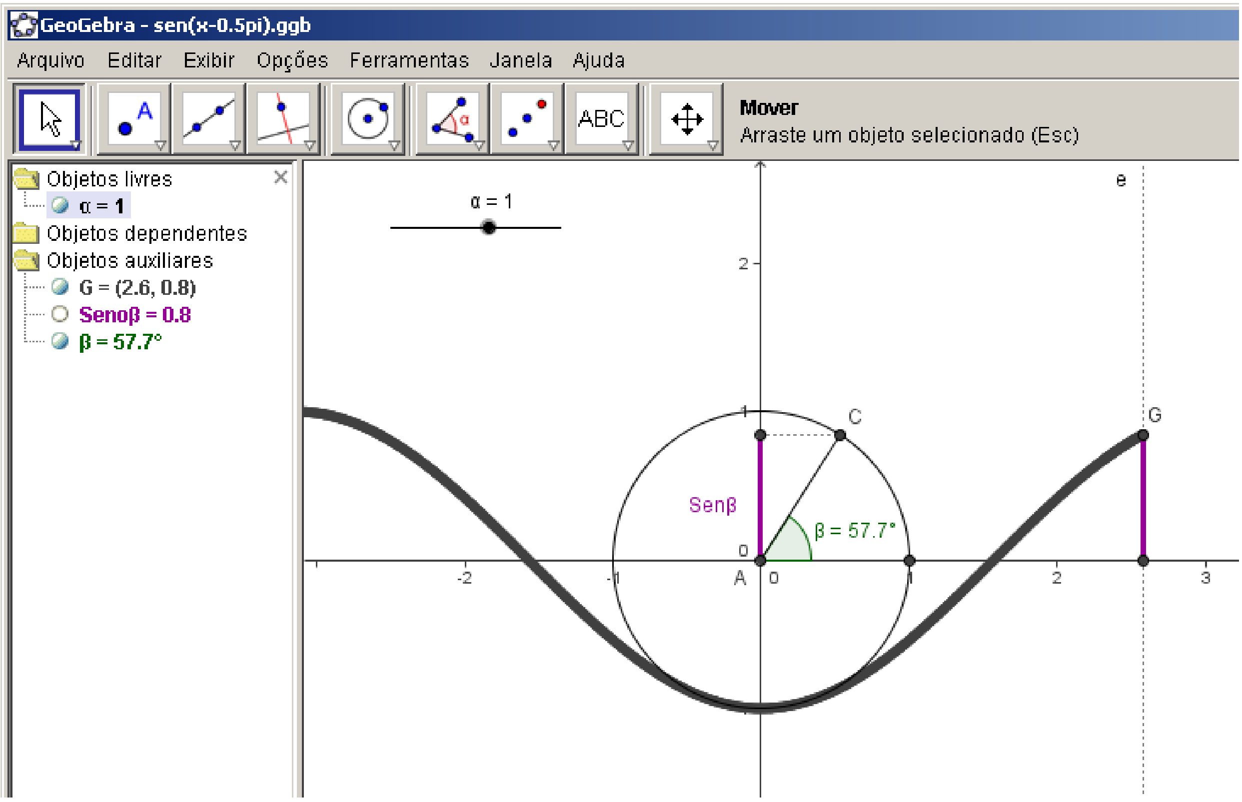


Figura 3.13: Grafico Seno(x $-\frac{1}{2}\pi$)

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A idéia para a elaboração deste trabalho surgiu do meu objetivo em criar uma forma mais dinâmica para lecionar trigonometria. Quando conheci o software GeoGebra vi neste uma possibilidade que me pareceu bastante interessante. Decidi então que este trabalho seria dedicado a elaboração deste material.

Após explorar algumas opções que o programa oferece, comecei a esboçar a construção de alguns ciclos trigonométricos que a princípio não eram como eu gostaria. Um pouco mais de curiosidade e dedicação e as construções que aqui foram apresentadas passaram a ser como imaginei.

Foi criada uma forma mais atrativa para lecionar trigonometria que se basei no uso de recursos tecnológicos tão indispensáveis na educação nos dias atuais.

Embora este trabalho não tenha sido aplicado em uma classe, acredito que o ensino através deste pode gerar uma aprendizagem significatica, pois mostra ao aluno de onde surgem alguns valores e fórmulas da trigonometria, facilitando assim a compreensão do conteúdo. Sendo que todo o material foi elaborado para se trabalhar em computadores, este pode também ser utilizado no ensino a distância.

Acredito ter alcançado os objetivos inicias deste trabalho e também adquirido habilidade para trabalhar com o programa GeoGebra, que poderá servir de ferramenta para vários trabalhos e projetos enquanto professora e também que poderá auxiliar outros colegas de profissão que se interessem pelo material ou até mesmo alunos da gradução que ainda tenham dificuldades com a assunto.

Apêndice A

Protocolos de construção

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 218°
5	Ponto M	B girar pelo ângulo α em torno de A	M = (-0.79, -0.62)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, M	β = 218°
7	Segmento a	Segmento[A, M]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por M paralela a	b: y = -0.62
9	Reta d	Reta passando por M paralela a	d: x = -0.79
10	Ponto M''	ponto de interseção de b, EixoY	M'' = (0, -0.62)
11	Ponto M'	ponto de interseção de d, EixoX	M' = (-0.79, 0)
12	Número cossenoβ	x(M)	cossenoβ = -0.79
13	Segmento f	Segmento[M', M]	f = 0.62
14	Segmento g	Segmento[M, M'']	g = 0.79
15	Número senoβ	y(M)	senoβ = -0.62
16	Segmento cosβ	Segmento[A, M']	cosβ = 0.79
17	Segmento senβ	Segmento[A, M'']	senβ = 0.62

17 / 17

Razoes trigonometricas Seno e Cosseno

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 236°
5	Ponto M	B girar pelo ângulo α em torno de A	M = (-0.56, -0.83)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, M	β = 236°
7	Segmento a	Segmento[A, M]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por M paralela a EixoX	b: y = -0.83
9	Reta d	Reta passando por M paralela a EixoY	d: x = -0.56
10	Ponto M''	ponto de interseção de b, EixoY	M'' = (0, -0.83)
11	Ponto M'	ponto de interseção de d, EixoX	M' = (-0.56, 0)
12	Segmento f	Segmento[M', M]	f = 0.83
13	Segmento g	Segmento[M, M'']	g = 0.56
14	Reta e	Reta passando por B paralela a EixoY	e: x = 1
15	Reta h	Reta passando por A, M	h: 0.83x - 0.56y = 0
16	Ponto D	ponto de interseção de e, h	D = (1, 1.48)
17	Número cossenoβ	x(M)	cossenoβ = -0.56
18	Número senoβ	y(M)	senoβ = -0.83
19	Reta i	Reta passando por B paralela a EixoY	i: x = 1
20	Reta j	Reta passando por A, M	j: 0.83x - 0.56y = 0
21	Ponto C	ponto de interseção de i, j	C = (1, 1.48)
22	Número tangenteβ	y(C)	tangenteβ = 1.48
23	Segmento cosβ	Segmento[A, M']	cosβ = 0.56
24	Segmento senβ	Segmento[A, M'']	senβ = 0.83
25	Segmento tgβ	Segmento[B, C]	tgβ = 1.48

25 / 25

Figura A.1: Tangente

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 140°
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (-0.77, 0.64)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 140°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por C paralela a	b: y = 0.64
9	Reta d	Reta passando por C paralela a	d: x = -0.77
10	Ponto D	ponto de interseção de b, EixoY	D = (0, 0.64)
11	Ponto E	ponto de interseção de d, EixoX	E = (-0.77, 0)
12	Número cossenoβ	x(C)	cossenoβ = -0.77
13	Segmento f	Segmento[E, C]	f = 0.64
14	Segmento g	Segmento[C, D]	g = 0.77
15	Número senoβ	y(C)	senoβ = 0.64
16	Ponto F	ponto de interseção de c, EixoY	F = (0, 1)
17	Reta e	Reta passando por F paralela a	e: y = 1
18	Reta h	Reta passando por A, C	h: -0.64x - 0.77y = 0
19	Ponto G	ponto de interseção de e, h	G = (-1.19, 1)
20	Número cotangenteβ	x(G)	cotangenteβ = -1.19
21	Segmento cosβ	Segmento[E, A]	cosβ = 0.77
22	Segmento senβ	Segmento[A, D]	senβ = 0.64
23	Segmento cotgβ	Segmento[G, F]	cotgβ = 1.19

23 / 23

Figura A.2: Cotangente

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 240°
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (-0.5, -0.866)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 240°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por C paralela a	b: y = -0.866
9	Reta d	Reta passando por C paralela a	d: x = -0.5
10	Ponto D	ponto de interseção de b, EixoY	D = (0, -0.866)
11	Ponto E	ponto de interseção de d, EixoX	E = (-0.5, 0)
12	Número cossenoβ	x(C)	cossenoβ = -0.5
13	Segmento f	Segmento[E, C]	f = 0.866
14	Segmento g	Segmento[C, D]	g = 0.5
15	Reta e	Reta passando por C perpendicular	e: 0.5x + 0.866y = -1
16	Ponto F	ponto de interseção de e, EixoX	F = (-2, 0)
17	Número secanteβ	x(F)	secanteβ = -2
18	Segmento secβ	Segmento[A, F]	secβ = 2
19	Segmento cosβ	Segmento[A, E]	cosβ = 0.5

19 / 19

Figura A.3: Secante

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 145°
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (-0.819, 0.574)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 145°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por C perpendicular a a	b: 0.819x - 0.574y = -1
9	Ponto D	ponto de interseção de b, EixoY	D = (0, 1.743)
10	Reta e	Reta passando por C paralela a EixoX	e: y = 0.574
11	Ponto E	ponto de interseção de e, EixoY	E = (0, 0.574)
12	Número cossec...	y(D)	cossecanteβ = 1.743
13	Número senoβ	y(C)	senoβ = 0.574
14	Segmento coss...	Segmento[A, D]	cossecβ = 1.743
15	Segmento senβ	Segmento[E, A]	senβ = 0.574

15 / 15

Figura A.4: Cossecante

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 39°
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.78, 0.63)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 39°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por C paralela a EixoX	b: y = 0.63
9	Ponto D	ponto de interseção de c, b	D = (-0.78, 0.63)
10	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, D	θ = 141°
11	Segmento d	Segmento[A, D]	d = 1
12	Ponto A'	ponto de interseção de b, EixoY	A' = (0, 0.63)
13	Número senoβ	y(C)	senoβ = 0.63
14	Segmento g	Segmento[A', D]	g = 0.78
15	Segmento senβ	Segmento[A, A']	senβ = 0.63
16	Ponto E	ponto de interseção de c, EixoX	E = (-1, 0)

16 / 16

Figura A.5: Seno do segundo para o primeiro quadrante

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 30°
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.87, 0.5)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 30°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por C paralela a EixoX	b: y = 0.5
9	Ponto D	ponto de interseção de c, b	D = (-0.87, 0.5)
10	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, D	θ = 150°
11	Segmento d	Segmento[A, D]	d = 1
12	Reta e	Reta passando por D paralela a EixoY	e: x = -0.87
13	Reta f	Reta passando por C paralela a EixoY	f: x = 0.87
14	Ponto E	ponto de interseção de f, EixoX	E = (0.87, 0)
15	Ponto F	ponto de interseção de e, EixoX	F = (-0.87, 0)
16	Número cossenoβ	x(C)	cossenoβ = 0.87
17	Segmento cosβ	Segmento[A, E]	cosβ = 0.87
18	Número cossenoθ	x(D)	cossenoθ = -0.87
19	Segmento cosθ	Segmento[F, A]	cosθ = 0.87

19 / 19

Figura A.6: Cosseno do segundo para o primeiro quadrante

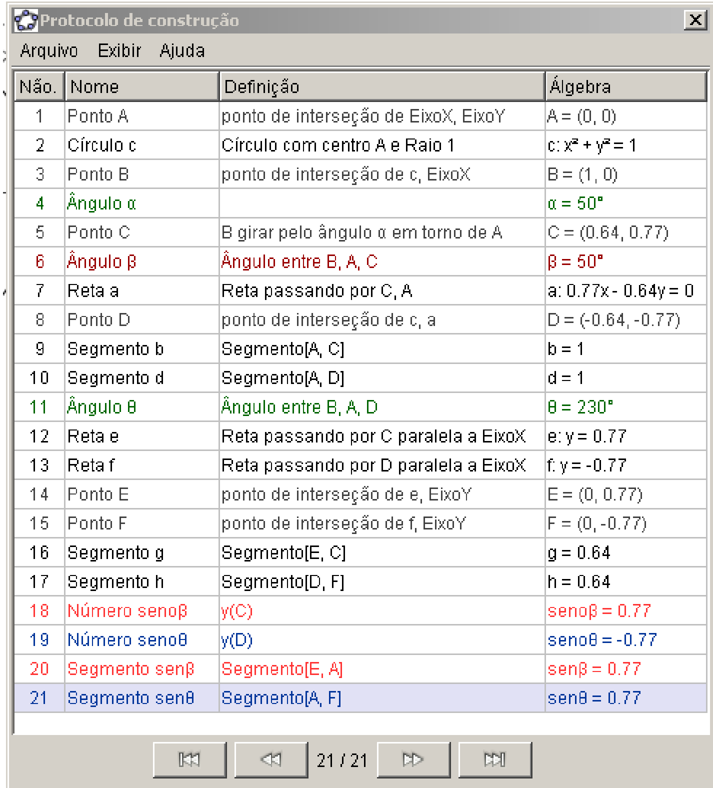
Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 41°
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.75, 0.66)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 41°
7	Reta b	Reta passando por C paralela a	b: y = 0.66
8	Ponto D	ponto de interseção de c, b	D = (-0.75, 0.66)
9	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, D	θ = 139°
10	Reta a	Reta passando por B perpendicular	a: x = 1
11	Segmento d	Segmento[A, C]	d = 1
12	Segmento e	Segmento[A, D]	e = 1
13	Reta f	Reta passando por A, C	f: -0.66x + 0.75y = 0
14	Reta g	Reta passando por D, A	g: 0.66x + 0.75y = 0
15	Ponto E	ponto de interseção de a, f	E = (1, 0.87)
16	Ponto F	ponto de interseção de a, g	F = (1, -0.87)
17	Número tangenteβ	y(E)	tangenteβ = 0.87
18	Número tangenteθ	y(F)	tangenteθ = -0.87
19	Segmento tgβ	Segmento[B, E]	tgβ = 0.87
20	Segmento tgθ	Segmento[B, F]	tgθ = 0.87

20 / 20

Figura A.7: Tangente do segundo para o primeiro quadrante



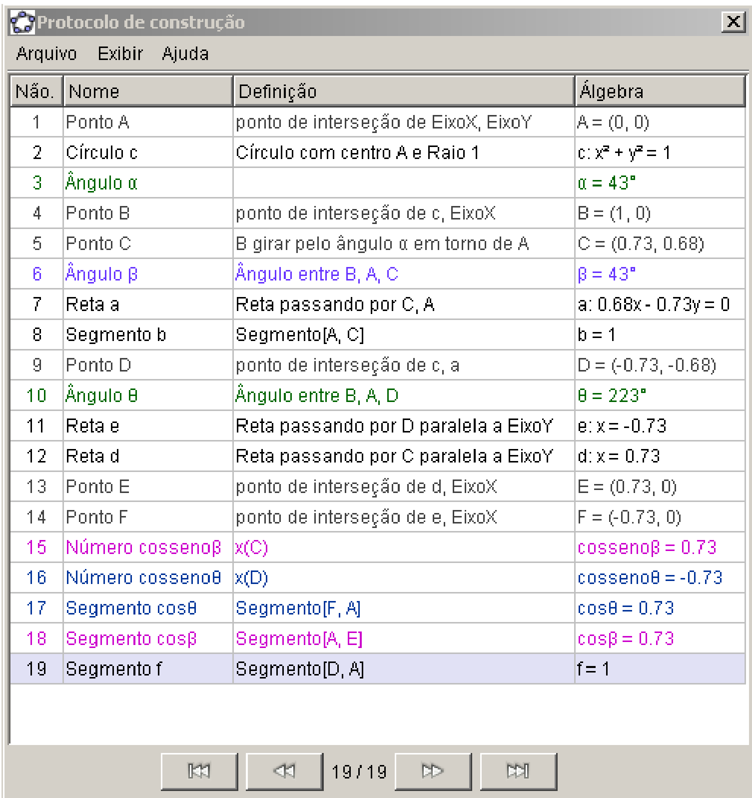
Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 50°
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.64, 0.77)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 50°
7	Reta a	Reta passando por C, A	a: 0.77x - 0.64y = 0
8	Ponto D	ponto de interseção de c, a	D = (-0.64, -0.77)
9	Segmento b	Segmento[A, C]	b = 1
10	Segmento d	Segmento[A, D]	d = 1
11	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, D	θ = 230°
12	Reta e	Reta passando por C paralela a EixoX	e: y = 0.77
13	Reta f	Reta passando por D paralela a EixoX	f: y = -0.77
14	Ponto E	ponto de interseção de e, EixoY	E = (0, 0.77)
15	Ponto F	ponto de interseção de f, EixoY	F = (0, -0.77)
16	Segmento g	Segmento[E, C]	g = 0.64
17	Segmento h	Segmento[D, F]	h = 0.64
18	Número senoβ	y(C)	senoβ = 0.77
19	Número senoθ	y(D)	senoθ = -0.77
20	Segmento senβ	Segmento[E, A]	senβ = 0.77
21	Segmento senθ	Segmento[A, F]	senθ = 0.77

21 / 21

Figura A.8: Seno do terceiro para o primeiro quadrante



Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ângulo α		α = 43°
4	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.73, 0.68)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 43°
7	Reta a	Reta passando por C, A	a: 0.68x - 0.73y = 0
8	Segmento b	Segmento[A, C]	b = 1
9	Ponto D	ponto de interseção de c, a	D = (-0.73, -0.68)
10	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, D	θ = 223°
11	Reta e	Reta passando por D paralela a EixoY	e: x = -0.73
12	Reta d	Reta passando por C paralela a EixoY	d: x = 0.73
13	Ponto E	ponto de interseção de d, EixoX	E = (0.73, 0)
14	Ponto F	ponto de interseção de e, EixoX	F = (-0.73, 0)
15	Número cossenoβ	x(C)	cossenoβ = 0.73
16	Número cossenoθ	x(D)	cossenoθ = -0.73
17	Segmento cosθ	Segmento[F, A]	cosθ = 0.73
18	Segmento cosβ	Segmento[A, E]	cosβ = 0.73
19	Segmento f	Segmento[D, A]	f = 1

19 / 19

Figura A.9: Cosseno do terceiro para o primeiro quadrante

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ângulo α		α = 45.9°
2	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
3	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
4	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.7, 0.72)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 45.9°
7	Reta a	Reta passando por B perpendicular a	a: x = 1
8	Reta b	Reta passando por A, C	b: -0.72x + 0.7y = 0
9	Ponto D	ponto de interseção de c, b	D = (-0.7, -0.72)
10	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, D	θ = 225.9°
11	Ponto E	ponto de interseção de a, b	E = (1, 1.03)
12	Segmento tangente	Segmento[B, E]	tangente = 1.03
13	Segmento d	Segmento[D, E]	d = 2.44

13 / 13

Figura A.10: Tangente do terceiro quadrante para o primeiro

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		α = 51°
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.63, 0.78)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 51°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Ponto D	C reflexão em EixoX	D = (0.63, -0.78)
9	Segmento b	Segmento[A, D]	b = 1
10	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, D	θ = 309°
11	Reta d	Reta passando por C paralela a EixoX	d: y = 0.78
12	Reta e	Reta passando por D paralela a EixoX	e: y = -0.78
13	Ponto E	ponto de interseção de d, EixoY	E = (0, 0.78)
14	Ponto F	ponto de interseção de e, EixoY	F = (0, -0.78)
15	Número senoβ	y(C)	senoβ = 0.78
16	Número senoθ	y(D)	senoθ = -0.78
17	Segmento senβ	Segmento[A, E]	senβ = 0.78
18	Segmento senθ	Segmento[A, F]	senθ = 0.78

18 / 18

Figura A.11: Seno do quarto para o primeiro quadrante

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Ângulo α		$\alpha = 50°$
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.64279, 0.76604)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	$\beta = 50°$
7	Segmento d	Segmento[A, C]	d = 1
8	Ponto D	C reflexão em EixoX	D = (0.64279, -0.76604)
9	Segmento b	Segmento[A, D]	b = 1
10	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, D	$\theta = 310°$
11	Reta a	Reta passando por C paralela a	a: x = 0.64279
12	Ponto E	ponto de interseção de a, EixoX	E = (0.64279, 0)
13	Segmento cosseno	Segmento[A, E]	cosseno = 0.64279

Figura A.12: Cosseno do quarto para o primeiro quadrante

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ângulo α		$\alpha = 44°$
2	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
3	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
4	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
5	Reta a	Reta passando por B paralela a EixoY	a: x = 1
6	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.72, 0.69)
7	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	$\beta = 44°$
8	Semi-reta b	Semi-reta passando por A, C	b: -0.69x + 0.72y = 0
9	Ponto D	ponto de interseção de a, b	D = (1, 0.97)
10	Ponto E	C reflexão em EixoX	E = (0.72, -0.69)
11	Ângulo θ	Ângulo entre B, A, E	$\theta = 316°$
12	Semi-reta d	Semi-reta passando por A, E	d: 0.69x + 0.72y = 0
13	Ponto F	ponto de interseção de a, d	F = (1, -0.97)
14	Número tangenteβ	y(D)	tangenteβ = 0.97
15	Número tangenteθ	y(F)	tangenteθ = -0.97
16	Segmento g	Segmento[A, D]	g = 1.39
17	Segmento h	Segmento[A, F]	h = 1.39
18	Segmento tgβ	Segmento[D, B]	tgβ = 0.97
19	Segmento tgθ	Segmento[B, F]	tgθ = 0.97

Figura A.13: Tangente do quarto para o primeiro quadrante

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Número α		α = 2.6
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (-0.8, 0.5)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 147.6°
7	Ponto D	(α, 0)	D = (2.6, 0)
8	Segmento a	Segmento[C, A]	a = 1
9	Reta b	Reta passando por C paralela a EixoX	b: y = 0.5
10	Ponto E	ponto de interseção de b, EixoY	E = (0, 0.5)
11	Segmento d	Segmento[C, E]	d = 0.8
12	Número senoβ	y(C)	senoβ = 0.5
13	Reta e	Reta passando por C paralela a EixoX	e: y = 0.5
14	Reta f	Reta passando por D paralela a EixoY	f: x = 2.6
15	Ponto F	ponto de interseção de e, f	F = (2.6, 0.5)
16	Segmento j	Segmento[D, F]	j = 0.5
17	Ponto G	ponto de interseção de c, EixoY	G = (0, 1)
18	Ponto H	ponto de interseção de c, EixoY	H = (0, -1)
19	Reta g	Reta passando por H paralela a EixoX	g: y = -1
20	Reta h	Reta passando por G paralela a EixoX	h: y = 1
21	Reta i	Reta passando por G paralela a EixoX	i: y = 1
22	Segmento senβ	Segmento[E, A]	senβ = 0.5

22 / 22

Figura A.14: Senoide

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Número α		α = 4.3
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (-0.4, -0.9)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 243.9°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por C paralela a	b: x = -0.4
9	Ponto D	ponto de interseção de b, EixoX	D = (-0.4, 0)
10	Número cossen...	x(C)	cossenoβ = -0.4
11	Segmento e	Segmento[C, D]	e = 0.9
12	Ponto F	(α, 0)	F = (4.3, 0)
13	Reta d	Reta passando por F paralela a	d: x = 4.3
14	Ponto G	(x(F), x(C))	G = (4.3, -0.4)
15	Segmento f	Segmento[F, G]	f = 0.4
16	Ponto E	ponto de interseção de c, EixoY	E = (0, 1)
17	Ponto H	ponto de interseção de c, EixoY	H = (0, -1)
18	Reta g	Reta passando por H paralela a	g: y = -1
19	Reta h	Reta passando por E paralela a	h: y = 1
20	Reta i	Reta passando por F paralela a	i: x = 4.3
21	Segmento cosβ	Segmento[D, A]	cosβ = 0.4

21 / 21

Figura A.15: Cossenoide

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Número α		α = 2.6
4	Ponto C	ponto de interseção de c, EixoX	C = (1, 0)
5	Ponto D	C girar pelo ângulo α em torno de A	D = (-0.9, 0.5)
6	Ângulo β	Ângulo entre C, A, D	β = 151.8°
7	Ponto E	(α, 0)	E = (2.6, 0)
8	Reta a	Reta passando por A, D	a: -0.5x - 0.9y = 0
9	Reta b	Reta passando por C paralela a EixoY	b: x = 1
10	Ponto F	ponto de interseção de a, b	F = (1, -0.5)
11	Reta d	Reta passando por F paralela a EixoX	d: y = -0.5
12	Reta e	Reta passando por E paralela a EixoY	e: x = 2.6
13	Ponto G	ponto de interseção de d, e	G = (2.6, -0.5)
14	Número tangenteβ	y(F)	tangenteβ = -0.5
15	Segmento g	Segmento[E, G]	g = 0.5
16	Ponto H	ponto de interseção de c, a	H = (0.9, -0.5)
17	Segmento f	Segmento[A, F]	f = 1.1
18	Segmento h	Segmento[D, A]	h = 1
19	Segmento tg	Segmento[C, F]	tg = 0.5
20	Reta l		l: x = 1.6
21	Reta m		m: x = -1.6
22	Reta n		n: x = 4.7
23	Reta o		o: x = -4.7

23 / 23

Figura A.16: Tangentoide

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Número α		α = 2.4
4	Ponto E	(α, 0)	E = (2.4, 0)
5	Ponto C	ponto de interseção de c, EixoX	C = (1, 0)
6	Ponto D	C girar pelo ângulo α em torno de A	D = (-0.7, 0.7)
7	Ângulo β	Ângulo entre C, A, D	β = 135.8°
8	Ponto F	ponto de interseção de c, EixoY	F = (0, 1)
9	Reta a	Reta passando por F perpendicular a	a: y = 1
10	Reta b	Reta passando por A, D	b: -0.7x - 0.7y = 0
11	Ponto G	ponto de interseção de a, b	G = (-1, 1)
12	Reta d	Reta passando por E perpendicular a	d: y = 0
13	Reta e	Reta passando por E paralela a EixoY	e: x = 2.4
14	Ponto I	(α, x(G))	I = (2.4, -1)
15	Número cotangenteβ	x(G)	cotangenteβ = -1
16	Segmento g	Segmento[E, I]	g = 1
17	Segmento cotgβ	Segmento[F, G]	cotgβ = 1
18	Reta f		f: x = -3.1
19	Reta h		h: x = 3.1

19 / 19

Figura A.17: Grafico Cotangente

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: $x^2 + y^2 = 1$
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Número α		α = 2.49
5	Ponto D	B girar pelo ângulo α em torno de A	D = (-0.79, 0.61)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, D	β = 142.48°
7	Ponto E	(α, 0)	E = (2.49, 0)
8	Segmento a	Segmento[A, D]	a = 1
9	Reta b	Reta passando por D perpendicular a a	b: 0.79x - 0.61y = -1
10	Ponto F	ponto de interseção de b, EixoX	F = (-1.26, 0)
11	Ponto G	(x(E), x(F))	G = (2.49, -1.26)
12	Reta d	Reta passando por E paralela a EixoY	d: x = 2.49
13	Segmento e	Segmento[E, G]	e = 1.26
14	Número secanteβ	x(F)	secanteβ = -1.26
15	Ponto H	ponto de interseção de c, EixoY	H = (0, 1)
16	Ponto I	ponto de interseção de c, EixoY	I = (0, -1)
17	Reta g	Reta passando por H paralela a EixoX	g: y = 1
18	Reta h	Reta passando por I paralela a EixoX	h: y = -1
19	Reta f	Reta passando por D paralela a EixoY	f: x = -0.79
20	Ponto J	ponto de interseção de f, EixoX	J = (-0.79, 0)
21	Número cossenoβ	x(D)	cossenoβ = -0.79
22	Segmento i	Segmento[D, J]	i = 0.61
23	Segmento secβ	Segmento[A, F]	secβ = 1.26
24	Segmento cosβ	Segmento[J, A]	cosβ = 0.79
25	Reta m		m: x = 1.57

25 / 25

Figura A.18: Grafico Secante

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Número α		α = 2.3
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (-0.7, 0.7)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 133.9°
7	Ponto D	(α, 0)	D = (2.3, 0)
8	Segmento a	Segmento[C, A]	a = 1
9	Reta b	Reta passando por C paralela a EixoX	b: y = 0.7
10	Ponto E	ponto de interseção de b, EixoY	E = (0, 0.7)
11	Segmento d	Segmento[C, E]	d = 0.7
12	Segmento senoβ	Segmento[E, A]	senoβ = 0.7
13	Reta e	Reta passando por C paralela a EixoX	e: y = 0.7
14	Reta f	Reta passando por D paralela a EixoY	f: x = 2.3
15	Ponto G	ponto de interseção de c, EixoY	G = (0, 1)
16	Ponto H	ponto de interseção de c, EixoY	H = (0, -1)
17	Reta h	Reta passando por G paralela a EixoX	h: y = 1
18	Reta i		i: y = 5
19	Reta j		j: y = -5
20	Ponto F	(α, 1 / 2 y(C))	F = (2.3, 0.4)
21	Segmento g	Segmento[D, F]	g = 0.4
22	Reta k		k: y = 0.5
23	Reta l		l: y = -0.5
24	Segmento m	Segmento[C, E]	m = 0.7

24 / 24

Figura A.21: Grafico $\frac{1}{2}$sen(x)

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

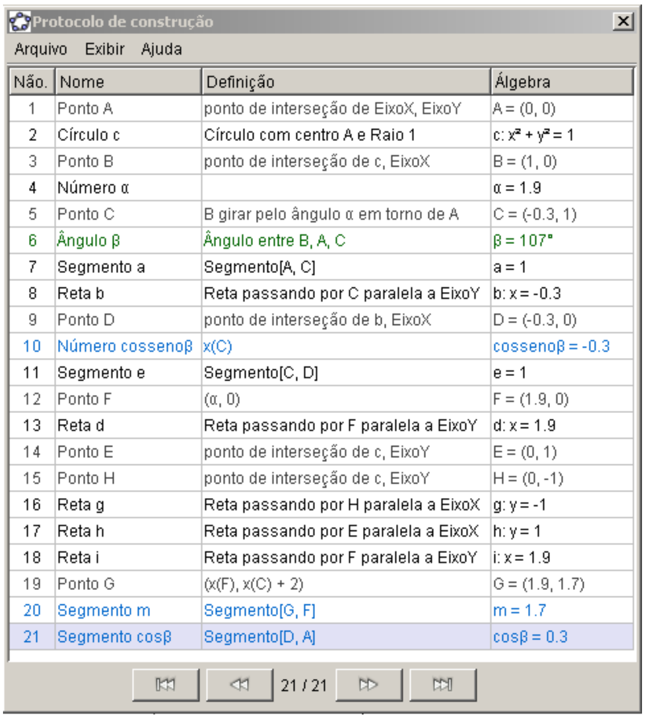
Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Número α		α = 2.3
5	Ponto C		C = (-6.3, 0)
6	Ponto D	B girar pelo ângulo α em torno de A	D = (-0.7, 0.7)
7	Ângulo β	Ângulo entre B, A, D	β = 133.3°
8	Segmento a	Segmento[A, D]	a = 1
9	Reta b	Reta passando por D perpendicular a a	b: 0.7x - 0.7y = -1
10	Ponto F	ponto de interseção de b, EixoX	F = (-1.5, 0)
11	Número secanteβ	x(F)	secanteβ = -1.5
12	Ponto H	ponto de interseção de c, EixoY	H = (0, 1)
13	Ponto I	ponto de interseção de c, EixoY	I = (0, -1)
14	Reta g	Reta passando por H paralela a EixoX	g: y = 1
15	Reta h	Reta passando por I paralela a EixoX	h: y = -1
16	Reta f	Reta passando por D paralela a EixoY	f: x = -0.7
17	Ponto J	ponto de interseção de f, EixoX	J = (-0.7, 0)
18	Segmento i	Segmento[D, J]	i = 0.7
19	Ponto G	(1 / 3 α, x(F))	G = (0.8, -1.5)
20	Reta e	Reta passando por G paralela a EixoY	e: x = 0.8
21	Segmento secβ	Segmento[A, F]	secβ = 1.5
22	Número cossenoβ	x(D)	cossenoβ = -0.7
23	Segmento cosβ	Segmento[J, A]	cosβ = 0.7
24	Ponto K	ponto de interseção de e, EixoX	K = (0.8, 0)
25	Segmento d	Segmento[K, G]	d = 1.5

25 / 25

Figura A.22: Grafico Secante(3x)

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Número α		α = 2.6
4	Ponto B		B = (-6.3, 0)
5	Ponto E	(α, 0)	E = (2.6, 0)
6	Ponto C	ponto de interseção de c, EixoX	C = (1, 0)
7	Ponto D	C girar pelo ângulo α em torno de A	D = (-0.8, 0.5)
8	Ângulo β	Ângulo entre C, A, D	β = 147.8°
9	Ponto F	ponto de interseção de c, EixoY	F = (0, 1)
10	Reta a	Reta passando por F perpendicular a	a: y = 1
11	Reta b	Reta passando por A, D	b: -0.5x - 0.8y = 0
12	Ponto G	ponto de interseção de a, b	G = (-1.6, 1)
13	Ponto H	ponto de interseção de c, EixoY	H = (0, -1)
14	Reta e	Reta passando por E paralela a EixoY	e: x = 2.6
15	Número cotangenteβ	x(G)	cotangenteβ = -1.6
16	Segmento cotg	Segmento[F, G]	cotg = 1.6
17	Reta f		f: x = -3.1
18	Reta h		h: x = 3.1
19	Ponto I	(1 / 2 x(E), x(G))	I = (1.3, -1.6)
20	Reta g	Reta passando por I paralela a EixoY	g: x = 1.3
21	Ponto J	ponto de interseção de g, EixoX	J = (1.3, 0)
22	Segmento d	Segmento[J, I]	d = 1.6

Figura A.23: Grafico Cotangente(2x)



Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Número α		α = 1.9
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (-0.3, 1)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 107°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por C paralela a EixoY	b: x = -0.3
9	Ponto D	ponto de interseção de b, EixoX	D = (-0.3, 0)
10	Número cossenoβ	x(C)	cossenoβ = -0.3
11	Segmento e	Segmento[C, D]	e = 1
12	Ponto F	(α, 0)	F = (1.9, 0)
13	Reta d	Reta passando por F paralela a EixoY	d: x = 1.9
14	Ponto E	ponto de interseção de c, EixoY	E = (0, 1)
15	Ponto H	ponto de interseção de c, EixoY	H = (0, -1)
16	Reta g	Reta passando por H paralela a EixoX	g: y = -1
17	Reta h	Reta passando por E paralela a EixoX	h: y = 1
18	Reta i	Reta passando por F paralela a EixoY	i: x = 1.9
19	Ponto G	(x(F), x(C) + 2)	G = (1.9, 1.7)
20	Segmento m	Segmento[G, F]	m = 1.7
21	Segmento cosβ	Segmento[D, A]	cosβ = 0.3

Figura A.24: Grafico Cosseno(x) + 2

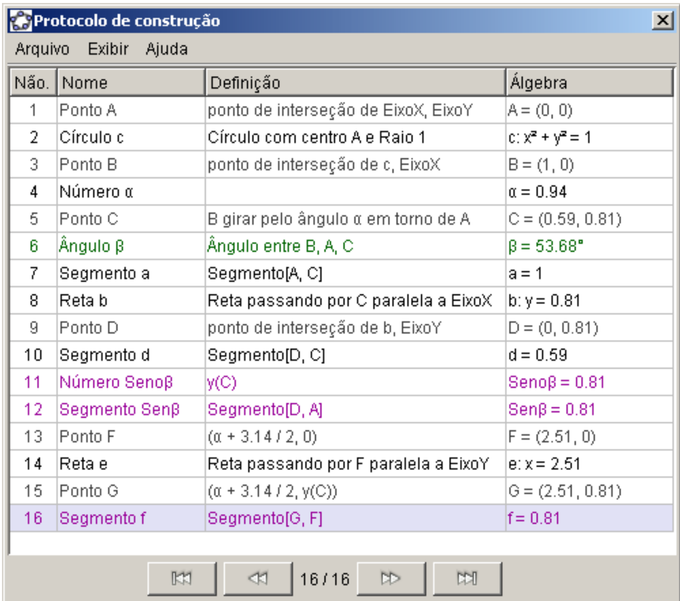
Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Número α		α = 2.9
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (-1, 0.3)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 164.8°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por B paralela a EixoY	b: x = 1
9	Reta d	Reta passando por A, C	d: -0.3x - 1y = 0
10	Ponto D	ponto de interseção de b, d	D = (1, -0.3)
11	Número tangenteβ	y(D)	tangenteβ = -0.3
12	Segmento tg	Segmento[D, B]	tg = 0.3
13	Ponto F	(α, y(D) - 1)	F = (2.9, -1.3)
14	Reta e	Reta passando por F paralela a EixoY	e: x = 2.9
15	Ponto E	ponto de interseção de e, EixoX	E = (2.9, 0)
16	Segmento f	Segmento[E, F]	f = 1.3
17	Ponto G	ponto de interseção de c, EixoY	G = (0, -1)
18	Reta g	Reta passando por G paralela a EixoX	g: y = -1

18 / 18

Figura A.25: Grafico Tangente(x) $-$ 1



Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

Não.	Nome	Definição	Álgebra
1	Ponto A	ponto de interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0)
2	Círculo c	Círculo com centro A e Raio 1	c: x² + y² = 1
3	Ponto B	ponto de interseção de c, EixoX	B = (1, 0)
4	Número α		α = 0.94
5	Ponto C	B girar pelo ângulo α em torno de A	C = (0.59, 0.81)
6	Ângulo β	Ângulo entre B, A, C	β = 53.68°
7	Segmento a	Segmento[A, C]	a = 1
8	Reta b	Reta passando por C paralela a EixoX	b: y = 0.81
9	Ponto D	ponto de interseção de b, EixoY	D = (0, 0.81)
10	Segmento d	Segmento[D, C]	d = 0.59
11	Número Senoβ	y(C)	Senoβ = 0.81
12	Segmento Senβ	Segmento[D, A]	Senβ = 0.81
13	Ponto F	(α + 3.14 / 2, 0)	F = (2.51, 0)
14	Reta e	Reta passando por F paralela a EixoY	e: x = 2.51
15	Ponto G	(α + 3.14 / 2, y(C))	G = (2.51, 0.81)
16	Segmento f	Segmento[G, F]	f = 0.81

16 / 16

Figura A.26: Grafico Seno(x $- \frac{1}{2}\pi$)

Bibliografia

[1] BONJORNO, José R.. GIOVANNI, José R.. GIOVANNI, José R. Jr.. *Matemática Fundamental.* Volume único, 1^a Edição, Editora FTD, São Paulo, 1994.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias*, 1999.

[3] CARMO, Manfredo P. do. MORGADO, Augusto C.. WAGNER, Eduardo. *Trigonometria Números Complexos.* Lamgraf Artesanato Gráfico, Rio de Janeiro, 1992.

[4] DANTE, Luiz R.. *Matemática, Contexto e Aplicações.* 1^a Edição, Editora Ática, São Paulo, 2003.

[5] DANTE, Luiz R.. *Tudo é Matemática.* 1^a Edição, Editora Ática, São Paulo, 2006.

[6] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar - Trigonometria.* Volume 3, 8^a Edição, Editora Atual, São Paulo, 2004..

[7] MARTINS, Marcos H. S.. *Cenários de Aprendizagem para o estudo de cônicas utilizando-se o software GeoGebra.* 2007 (Trabalho de Conclusão de Curso) Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina.