Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática
Curso de Matemática

Existência e Regularidade de Soluções de Equações Diferenciais Parciais Uniformemente Elípticas

Maicon José Benvenutti

Orientador: Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Florianópolis
novembro de 2007

Maicon José Benvenutti

Existência e Regularidade de Soluções de Equações Diferenciais Parciais Uniformemente Elípticas

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Curso de Matemática - Habilitação Bacharelado da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador:
Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

Bacharelado em Matemática
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis – SC

Novembro / 2007

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática-Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca examinadora designada pela portaria n°60/CCM/07.

Profª. Carmen Suzane Comitre Gimenez,
Departamento de Matemática - UFSC
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira,
Departamento de Matemática - UFSC
Orientador

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira
Departamento de Matemática - UFSC

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Departamento de Matemática - UFSC

Dedico esta monografia à
Juliana Dias de Oliveira da Rocha.

Agradecimentos

A Deus, que provê todas as coisas.

Ao meus pais, Lúcia Inês Benvenutti e Sérgio Benvenutti, pelo apoio, incentivo e confiança que sempre depositam em mim.

Ao meu orientador, Jáuber Cavalcante de Oliveira, pelo conhecimento transmitido e pelos seus valiosos conselhos.

Aos amigos que fiz e que me acompanharam durante os anos de graduação.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a existência e regularidade de soluções de equações diferenciais uniformemente elípticas de segunda ordem em H_o^1. Para compreender o espaço das possíveis soluções, expomos a teoria dos espaços L_p e de Sobolev $W^{p,k}$, bem como alguns resultados de operadores em espaços de Hilbert usados durante o estudo de tais equações.

Sumário

Introdução

Equações diferenciais parciais aparecem em todos os campos da ciência em que há necessidade de modelagem de fenômenos naturais. Conseqüentemente, o desejo de entender as soluções dessas equações sempre foi de enorme importância na matemática.

Equações diferenciais com dados suaves não possuem geralmente soluções suaves. Portanto é essencial criar algum tipo de noção de solução mais geral e entender seu comportamento. Há uma grande quantidade de ramos dentro dessa teoria utilizando variadas técnicas. Neste trabalho generalizamos as soluções das equações diferencias parciais lineares uniformemente elípticas ao espaço de Sobolev H_o^k. Com isto, ganhamos muitas propriedade nos espaços das possíveis soluções, mas perdemos noções intuitivas sobre as soluções, como suas regularidades. Porém, impondo algumas condições adicionais sobre o operador, isto é , impondo algumas hipóteses de regularidade sobre os coeficientes dos operadores, é de se esperar que estas influenciem nas suas soluções. Deduzir estas influências não é uma tarefa fácil. Por isto, nos restringimos apenas aos operadores de segunda ordem para estudar a regularidade de suas soluções.

No capítulo 1, desenvolvemos a teoria de operadores necessária para tratarmos equações diferenciais parciais como operadores; no capítulo 2 expomos os conceitos sobre os espaços L_p e de Sobolev $W^{p,k}$, essenciais para trabalharmos com soluções generalizadas; no capítulo 3 mostramos o teorema da partição da unidade, ferramenta importante na obtenção de regularidade das soluções de uma equação diferencial parcial; e finalmente no capítulo 4 demonstramos a existência e regularidade de soluções generalizadas das equações diferenciais parciais uniformemente elípticas de segunda ordem.

1 Espaços Normados e Operadores Lineares

1.1 Espaços Normados

Definição 1.1.1. *Um espaço normado $\mathbb{X}$ é um espaço vetorial (sobre o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com uma função $\|\cdot\| : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$
2. $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$
3. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{X}$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$*(ou* $\mathbb{R}$ *)*
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,\, y \in \mathbb{X}$

A função $\|\cdot\|$ é chamada norma em $\mathbb{X}$.

Um espaço normado é um espaço métrico com a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Usando a desigualdade $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ vemos que $\|\cdot\|$ é uma função contínua.

Definição 1.1.2. *Um espaço de Banach é um espaço normado completo, isto é, toda sequência de Cauchy, nesse espaço, é convergente.*

Definição 1.1.3. *Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial $\mathbb{X}$ são ditas equivalentes se existem constantes $C, c > 0$ tais que $c \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \cdot \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{X}$.*

1.2 Operadores Lineares Limitados

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ espaços normados sobre o mesmo corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ um operador linear. O operador T é dito limitado se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$\forall x \in \mathbb{X}$ *temos* $\|T(x)\| \leq c \cdot \|x\|$.

Seja

$$\|T\| = \begin{cases} 0 & se \quad \mathbb{X} = \{0\} \\ \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, x \neq 0} \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} & se \quad \mathbb{X} \neq \{0\} \end{cases}$$

Note que $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

Lema 1.2.2. *Seja T um operador limitado. Então:*

1. $\|T\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|}$.

2. $\|T\|$ *satisfaz as propriedades de norma.*

Demonstração. 1. Por definição, temos que $\|T\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, x \neq 0} \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, x \neq 0} \|\dfrac{T(x)}{\|x\|}\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, x \neq 0} \|T(\dfrac{x}{\|x\|})\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \|T(x)\|$.

2. As condições $\|T\| \geq 0$, $\|T\| = 0 \Longrightarrow T \equiv 0$ e $\|\alpha \cdot T\| = |\alpha| \cdot \|T\|$ são óbvias. Vamos mostrar que $\|T + H\| \leq \|T\| + \|H\|$. De fato $\sup\limits_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \|(T + H)(x)\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \|T(x) + H(x)\| \leq \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} (\|T(x)\| + \|H(x)\|) = \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \|T(x)\| + \sup\limits_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \|H(x)\|$. Logo, o lema é válido.

□

Proposição 1.2.3. *Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ espaços normados e $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ um operador linear. Então:*

1. *T é contínuo $\Longleftrightarrow$ T é limitado.*

2. *T é contínuo em um ponto $\Longleftrightarrow$ T é contínuo.*

Demonstração. Se $T \equiv 0$ então a prova é trivial. Vamos assumir que T não é o operador nulo.

1. Suponha que T seja limitado. Como T não é o operador nulo, temos que $\|T\| > 0$. Seja $x_0 \in \mathbb{X}$. Seja $\epsilon > 0$. Seja $\delta = \dfrac{\epsilon}{\|T\|}$ e $x \in \mathbb{X}$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$. Então $\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \cdot \|x - x_0\| < \|T\| \cdot \delta = \epsilon$. Logo T é contínuo em x_0. Como x_0 é arbitrário, temos que T é contínuo. Agora suponha

que T seja contínuo em x_0. Seja $\epsilon > 0$. Logo existe $\delta^o > 0$ tal que se $x \in \mathbb{X}$ e $\|x - x_0\| < \delta^o$, então $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$. Sejam $0 < \delta < \delta^o$, $y \in \mathbb{X}$ tal que $y \neq 0$ e seja $z = x_0 + \dfrac{\delta}{\|y\|} \cdot y$. Logo $\|z - x_0\| = \|\dfrac{\delta}{\|y\|} \cdot y\| = \delta < \delta^o$. Portanto $\epsilon > \|T(z) - T(x_0)\| = \|T(z - x_0)\| = \|T(\dfrac{\delta}{\|y\|} \cdot y)\| = \dfrac{\delta}{\|y\|} \cdot \|T(y)\|$. Logo $\|T(y)\| < \|y\| \cdot \dfrac{\epsilon}{\delta}$. Escolhendo $c = \dfrac{\epsilon}{\delta}$, obtemos que $\|T(y)\| \leq \|y\| \cdot c \quad \forall y \in \mathbb{X}$, e portanto T é um operador limitado.

2. Suponha que T seja contínuo, então T é contínuo em um ponto. Agora suponha que T seja contínuo em um ponto. Vimos na demonstração do item 1 que T é limitado, e portanto, pelo item 1, T é contínuo.

□

Corolário 1.2.4. *Seja $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ um operador limitado. Então:*

1. *Se $x_n \to x$ em $\mathbb{X}$ temos $T(x_n) \to T(x)$ em $\mathbb{Y}$.*

2. *O núcleo de T ($N(T) := \{x \in \mathbb{X}$ tal que $T(x) = 0\}$) é fechado em relação a $\mathbb{X}$.*

Demonstração. 1. Se $x_n \to x$ então $\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq c \cdot \|x_n - x\| \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $T(x_n) \to T(x)$.

2. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset N(T)$ tal que $x_n \to x$ em $\mathbb{X}$. Por 1 temos que $T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Logo $x \in N(T)$.

□

Proposição 1.2.5. *Sejam $T : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{Z}$ e $H : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ operadores lineares limitados. Então $T \circ H : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Z}$ é um operador linear limitado e $\|T \circ H\| \leq \|T\| \cdot \|H\|$.*

Demonstração. Obviamente $T \circ H$ é linear. Além disso, $\|T \circ H(x)\| \leq \|T\| \cdot \|H(x)\| \leq \|T\| \cdot \|H\| \cdot \|x\|$. Logo $\dfrac{\|T \circ H(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\| \cdot \|H\| \quad \forall x \in \mathbb{X}, \|x\| \neq 0$. Portanto $\|T \circ H\| = \sup_{x \in \mathbb{X}, x \neq 0} \dfrac{\|T \circ H(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\| \cdot \|H\|$.

□

Definição 1.2.6. *Um funcional é um operador cujo contradomínio é $\mathbb{R}$.*

Definição 1.2.7. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço vetorial real (ou complexo). Seja $\mathbb{X}^0 := \{f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tal que f é linear $\}$. O conjunto $\mathbb{X}^0$ é chamado de espaço dual algébrico de $\mathbb{X}$. O conjunto $(\mathbb{X}^0)^0$ é chamado de segundo dual algébrico.*

$\mathbb{X}^0$ é um espaço vetorial Real (ou Complexo) com as operações $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ e $(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x)$.

Definição 1.2.8. *Seja* $\mathbb{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) := \{f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *tal que* f *é linear e limitado*$\}$.

Observe que $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ devem estar sobre o mesmo corpo. O conjunto $\mathbb{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ é um espaço vetorial com as operações $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ e $(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x)$.

Pelo Lema 1.2.2, temos que $\|T\|$ é uma norma em $\mathbb{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Proposição 1.2.9. *Seja* $\mathbb{Y}$ *um espaço de Banach e* $\mathbb{X}$ *um espaço normado. Então* $\mathbb{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Pelo que já vimos, temos que $\mathbb{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ é um espaço normado. Seja $((T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Seja $\epsilon > 0$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m,n \geq n_0$ então $\|T_n - T_m\| < \epsilon$. Seja $x \in \mathbb{X}$ e $m,n \geq n_0$. Então $\|T_n(x) - T_m(x)\| < \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \epsilon \cdot \|x\|$. Logo $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Y}$. Como $\mathbb{Y}$ é completo, existe um $y = y(x) \in \mathbb{Y}$ tal que $T_n(x) \to y(x)$ quando $n \to \infty$. Seja $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ onde $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = y(x)$. Observe que T está bem definida. Vamos mostrar que $T \in \mathbb{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. De fato $T(x) + \alpha \cdot T(y) = \lim\limits_{n\to\infty}(T_n(x) + \alpha \cdot T_n(y)) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x+\alpha \cdot y) = T(x+\alpha\cdot y)$, pois T_n é um operador linear limitado. Logo T é linear. Usando que $\|\cdot\|$ é contínua e fazendo $m \to \infty$ em $\|T_n(x) - T_m(x)\| < \|x\| \cdot \epsilon$, obtemos $\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|x\| \cdot \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{X}$ e $\forall n \geq n_0$. Logo $T_n - T$ é limitado com $n > n_0$. Como T_n é limitado, obtemos $\|T(x)\| \leq \|T_n(x)\| + \|T_n(x) - T(x)\| \leq \hat{c} \cdot \|x\|$. Logo T é limitado. Portanto $T \in \mathbb{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Como $\|T_n(x) - T(x)\| < \|x\| \cdot \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{X}$ e $\forall n \geq n_0$, temos que $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ se $n > n_0$. Então $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

□

Definição 1.2.10. *Seja* $\mathbb{X}' := \{f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) tal que* f *é linear e limitado* $\}$. *O conjunto* $\mathbb{X}'$ *é chamado de espaço dual topológico de* $\mathbb{X}$.

Como $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, temos que $(\mathbb{X}', \|\cdot\|_{\mathbb{X}'})$ é um espaço de Banach se $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ é um espaço normado.

1.3 Espaços com Produto Interno

Definição 1.3.1. *Um espaço com um produto interno é um espaço vetorial* $\mathbb{X}$, *real ou complexo, com uma função* $\langle , \rangle : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{C}($ *ou* $\mathbb{R})$ *tal que:*

1. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \quad \forall x,y,z \in \mathbb{X}$

2. $\langle \alpha \cdot y, z\rangle = \alpha \cdot \langle y,z\rangle \quad \forall y,z \in \mathbb{X}$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$*)*

3. $\langle y,z\rangle = \overline{\langle z,y\rangle} \quad \forall y,z \in \mathbb{X}$

4. $\langle y,y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{X}$

5. $\langle y,y\rangle = 0 \Longrightarrow y = 0$

$\langle , \rangle$ *é chamado de produto interno em* $\mathbb{X}$.

Temos que $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle x,y\rangle$, e $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ é uma norma em $\mathbb{X}$. Esta norma é dita norma induzida pelo produto interno.

Definição 1.3.2. *Um espaço vetorial* $\mathbb{X}$ *com produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é um espaço de Hilbert se* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.*

Lema 1.3.3. *Seja* $\mathbb{X}$ *um espaço com produto interno. Então vale:*

1. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(identidade do paralelogramo)*

2. $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)*

3. $\dfrac{1}{2} \cdot (\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle) = \dfrac{1}{4} \cdot (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

Demonstração. 1. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

2. Se $y = 0$ então é trivial, pois $\langle x, 0\rangle = 0$. Suponha $y \neq 0$. Então $0 \leq \|x - \alpha \cdot y\|^2 = \langle x - \alpha \cdot y, x - \alpha \cdot y\rangle = \langle x,x\rangle - \overline{\alpha} \cdot \langle x,y\rangle - \alpha \cdot [\langle y,x\rangle - \overline{\alpha} \cdot \langle y,y\rangle]$. Seja $\overline{\alpha} = \dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$, logo $0 \leq \langle x,x\rangle - \dfrac{\langle x,y\rangle \cdot \langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle} = \|x\|^2 - \dfrac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$. Portanto $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

3. $\dfrac{1}{4} \cdot (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \dfrac{1}{4} \cdot (\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle) = \dfrac{1}{2} \cdot (\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle)$.

□

1.4 Complemento Ortogonal

Definição 1.4.1. *Dizemos que* x *é ortogonal a* y*, e denotamos por* $x \perp y$*, se* $\langle x,y\rangle = 0$*. Se* $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ *e* $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{X}$*, dizemos que* $\mathbb{A}$ *é ortogonal a* $\mathbb{B}$*, e denotamos por* $\mathbb{A} \perp \mathbb{B}$*, se* $\langle x,y\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{A}$ *e* $\forall y \in \mathbb{B}$.

Definição 1.4.2. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Seja $\emptyset \neq \mathbb{M} \subseteq \mathbb{X}$ e $x \in \mathbb{X}$. A distância de x à $\mathbb{M}$ é definida por $\delta = \inf_{y \in \mathbb{M}} \|x - y\|$.*

Definição 1.4.3. *Um segmento ligando x,$y \in \mathbb{X}$ é o conjunto $\{z \in \mathbb{X}$ tal que $z = \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 1\}$*
$\mathbb{M} \subseteq \mathbb{X}$ é dito convexo se $\forall x$, $y \in \mathbb{X}$ o segmento ligando x e y está contido em $\mathbb{M}$.

Temos que todo subespaço é convexo e que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Proposição 1.4.4. *Seja $\mathbb{X}$ um espaço com produto interno e $\emptyset \neq \mathbb{M} \subseteq \mathbb{X}$, $\mathbb{M}$ convexo e completo. Então $\forall x \in \mathbb{X}$ existe único $y \in \mathbb{M}$ tal que $\delta = \inf_{z \in \mathbb{M}} \|x - z\| = \|x - y\|$.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro a existência de tal y. Como $\delta = \inf_{z \in \mathbb{M}} \|x - z\|$, então existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{M}$ tal que $\delta_n \to \delta$ e $\delta_n = \|x - y_n\|$. Seja $v_n = y_n - x$. Logo $\|v_n\| = \delta_n$. Como $\mathbb{M}$ é convexo, temos que $\frac{1}{2} \cdot (y_n + y_m) \in \mathbb{M}$. Logo $\|v_n + v_m\| = 2 \cdot \|\frac{1}{2} \cdot (y_n + y_m) - x\| \geq 2.\delta$. Pela identidade do paralelogramo, obtemos $\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2 \cdot (\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) \leq -(2 \cdot \delta)^2 + 2 \cdot ((\delta_n)^2 + (\delta_m)^2)$. Como $\delta_n \to \delta$, temos que y_n é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{M}$. Desde que $\mathbb{M}$ é completo, existe $y \in \mathbb{M}$ tal que $y_n \to y$. Como $y \in \mathbb{M}$, temos que $\|x - y\| \geq \delta$. Também $\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta$ quando $n \to \infty$. Portanto $\|x - y\| = \delta$. Resta mostrar a unicidade. Sejam y, $y_0 \in \mathbb{M}$ tais que $\|x - y\| = \|x - y_0\| = \delta$. Pela identidade do paralelogramo, temos $\|y - y_0\|^2 = \|y - x - (y_0 - x)\|^2 = 2 \cdot (\|y - x\|^2 + \|y_0 - x\|^2) - \|y - x + (y_0 - x)\|^2 = 2 \cdot (\delta^2 + \delta^2) - 2^2 \cdot \|\frac{1}{2} \cdot (y - y_0) - x\|^2$. Como M é convexo, então $\frac{1}{2} \cdot (y + y_0) \in \mathbb{M}$. Logo $\|\frac{1}{2} \cdot (y + y_0) - x\| \geq \delta$. Portanto $\|y - y_0\|^2 \leq 0$, e então $y_0 = y$.

□

Lema 1.4.5. *Seja X um espaço com produto interno e $\emptyset \neq \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ um subespaço completo. Seja $x \in \mathbb{X}$. Então existe único $y \in \mathbb{Y}$ tal que $\delta = \inf_{w \in \mathbb{M}} \|x - w\| = \|x - y\|$. Além disso $z := x - y$ é ortogonal a $\mathbb{Y}$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior existe único $y \in \mathbb{Y}$ tal que $\delta = \|x - y\|$. Então devemos mostrar apenas que $z \perp \mathbb{Y}$. Suponha que isto não vale, isto é, que z não é ortogonal a $\mathbb{Y}$. Então existe $y_1 \neq 0 \in \mathbb{Y}$ tal que $\langle z, y_1 \rangle \neq 0$. Temos que $\|z - \alpha \cdot y_1\|^2 = \langle z - \alpha \cdot y_1, z - \alpha \cdot y_1 \rangle = \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \cdot \langle z, y_1 \rangle - \alpha \cdot [\langle y_1, z \rangle - \overline{\alpha} \cdot \langle y_1, y_1 \rangle] \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$. Escolhendo $\overline{\alpha} = \frac{\overline{\langle z, y_1 \rangle}}{\langle y_1, y_1 \rangle}$, temos que $\|z - \alpha \cdot y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\langle z, y_1 \rangle|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} = \delta^2 - \frac{|\langle z, y_1 \rangle|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle}$. Portanto temos que $\|z - \alpha \cdot y_1\| < \delta$. Mas $\|z - \alpha \cdot y_1\| = \|x - (y + \alpha \cdot y_1)\| \geq \delta$ pois $\mathbb{Y}$ é um subespaço vetorial e $y + \alpha \cdot y_1 \in \mathbb{Y}$. Portanto temos que $\|z - \alpha \cdot y_1\| \geq \delta$ e $\|z - \alpha \cdot y_1\| < \delta$, o que é uma contradição. Logo $z \perp \mathbb{Y}$.

□

Definição 1.4.6. *Um espaço vetorial $\mathbb{X}$ é dito ser soma direta de $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ são subespaços de $\mathbb{X}$, e escrevemos $\mathbb{X} = \mathbb{Y} \oplus \mathbb{Z}$, se $\forall x \in \mathbb{X}$ existe única representação $x = y + z$ onde $y \in \mathbb{Y}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Quando $\mathbb{X}$ é um espaço de Hilbert, dizemos que $\mathbb{Y}^{\perp} = \{x \in \mathbb{X}$ tal que $x \perp \mathbb{Y}\}$ é o complemento ortogonal a $\mathbb{Y}$.*

Vê-se que $\mathbb{Y}^{\perp}$ é um subespaço de $\mathbb{X}$.

Proposição 1.4.7. *Seja $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathbb{Y}$ um subespaço fechado. Então $\mathbb{H} = \mathbb{Y} \oplus \mathbb{Y}^{\perp}$.*

Demonstração. Como $\mathbb{H}$ é completo e $\mathbb{Y}$ é fechado, temos que $\mathbb{Y}$ é completo. Seja $x \in \mathbb{X}$. Pelo lema 1.4.5 existe $y \in \mathbb{Y}$ tal que $z := x - y \in \mathbb{Y}^{\perp}$. Logo $x = y + z$ onde $y \in \mathbb{Y}$ e $z \in \mathbb{Y}^{\perp}$. Suponha que $x = y + z = y_1 + z_1$ onde y, $y_1 \in \mathbb{Y}$ e z, $z_1 \in \mathbb{Y}^{\perp}$. Então, $y - y_1 = z_1 - z \in \mathbb{Y} \cap \mathbb{Y}^{\perp} = \{0\}$. Portanto $y = y_1$ e $z = z_1$.

□

1.5 Teorema da Representação de Riesz

Teorema 1.5.1 (Representação de Riesz)**.** *Todo funcional linear limitado sobre um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ pode ser representado em termos de produto interno, isto é, existe $z \in \mathbb{H}$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle$, onde z depende de f, e é unicamente determinado. Além disso, $\|z\| = \|f\|$.*

Demonstração. Se $f \equiv 0$ o teorema é trivial. Suponha f não identicamente nulo. Então $N(f) \neq \mathbb{H}$ e pela proposição 1.4.7 $\mathbb{H} = N(f) \oplus N(f)^{\perp}$. Portanto $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$. Seja $0 \neq z_0 \in N(f)^{\perp}$, $x \in \mathbb{H}$ e $v := f(x) \cdot z_0 - f(z_0) \cdot x$. Então $f(v) = 0$. Logo $v \in N(f)$ e portanto $0 = \langle v, z_0 \rangle = f(x).\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0).\langle x, z_0 \rangle$. Então temos que $f(x) = \dfrac{f(z_0) \cdot \langle x, z_0 \rangle}{\langle z_0, z_0 \rangle}$. Escolhendo $z = \dfrac{\overline{f(z_0)} \cdot z_0}{\langle z_0, z_0 \rangle}$, obtemos $f(x) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in \mathbb{H}$. Agora, suponha que $f(x) = \langle x, z \rangle = \langle x, z_1 \rangle \quad \forall x \in \mathbb{H}$. Então, escolhendo $x = z - z_1$, obtemos que $\|z - z_1\|^2 = 0$. Logo $z = z_1$. Falta mostrar que $\|z\| = \|f\|$. Observe que $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\| \cdot \|z\|$. Como $z \neq 0$, pois supomos $f \neq 0$, temos que $\|z\| \leq \|f\|$. Mas pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \cdot \|z\|$, portanto $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\|$.

□

1.6 Formas Bilineares e o Teorema de Lax-Milgram

Teorema 1.6.1 (Lax-Milgram[1]). *Seja $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert e $h : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear limitada, isto é,*

1. *$h(x, y)$ é um funcional linear de x se y é fixo, e $h(x, y)$ é um funcional antilinear de y se x é fixo.*
2. *h é limitado, isto é, existe uma constante α tal que $\forall x, y \in \mathbb{H}$, $|h(x, y)| \leq \alpha \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.*

Suponha também que h é coerciva, isto é, existe uma constante β positiva tal que $\forall y \in \mathbb{H}$, $|h(y, y)| \geq \beta \cdot \|y\|^2$.

Então cada funcional linear limitado f sobre $\mathbb{H}$ é da forma $f(x) = h(x, x_0)$, onde x_0 é um elemento de $\mathbb{H}$ unicamente determinado.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{H}$. Seja $\tilde{h} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ tal que $\tilde{h}(x) = h(x, y)$. Vemos claramente que $\tilde{h}$ é um funcional linear limitado. Pelo teorema da representação de Riesz existe único $w = w(y) \in \mathbb{H}$ tal que $h(x, y) = \langle x, w \rangle \quad \forall x \in \mathbb{H}$. Seja $g : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ tal que $g(y) = w$, onde este é o w dado acima. Observe que esta função está bem definida. Observe também que $h(x, z) = \langle x, g(z) \rangle \quad \forall x,z \in \mathbb{H}$. Vamos mostrar que g é um operador linear limitado. De fato, sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x,z \in \mathbb{H}$. Então $\langle r, g(\alpha \cdot x + z) \rangle = h(r, \alpha \cdot x + z) = \overline{\alpha} \cdot h(r, x) + h(r, z) = \overline{\alpha} \cdot \langle r, g(x) \rangle + \langle r, g(z) \rangle = \langle r, \alpha \cdot g(x) + g(z) \rangle \quad \forall r \in \mathbb{H}$. Logo $g(\alpha \cdot x + z) = \alpha \cdot g(x) + g(z)$. Portanto g é linear. Como h é limitado, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\|g(x)\|^2 = \langle g(x), g(x) \rangle = h(g(x), x) \leq \alpha \cdot \|x\| \cdot \|g(x)\| \quad \forall x \in \mathbb{H}$. Portanto g é limitada. Agora vamos mostrar que g é bijetora. De fato, por Cauchy-Schwarz, temos que $0 \leq \beta \|x\|^2 \leq h(x, x) = \langle x, g(x) \rangle \leq \|g(x)\| \cdot \|x\|$. Portanto $\beta \|x\| \leq \|g(x)\|$. Logo $N(g) = 0$ e consequentemente g é injetora. Para mostrar que g é sobrejetora, primeiro devemos mostrar que $R(g)$ (isto é, a imagem de g) é fechado em $\mathbb{H}$. Seja $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $R(g)$ tal que $g(x_n) \to s \in \mathbb{H}$ quando $n \to \infty$. Como $\mathbb{H}$ é completo, $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como $\beta \|x_n - x_m\| \leq \|g(x_n - x_m)\| = \|g(x_n) - g(x_m)\| \leq \epsilon$ para n e m grandes, temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{H}$. Logo, existe $k \in \mathbb{H}$ tal que $x_n \to k$ quando $n \to \infty$. Lembrando que g é um funcional linear limitado,

[1]Lax, P.D., Milgram, A., Parabolic Equations Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. Annals of Math. Studies, 33. Princeton University Press, Princeton, 1954.

temos que $g(k) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{x\to\infty} g(x_n) = s$. Logo, $s \in R(g)$. Concluimos que $R(g)$ é fechado. Portanto $\mathbb{H} = R(g) \oplus R(g)^{\perp}$. Agora suponha que exista $x \in \mathbb{H}$ tal que $x \notin R(g)$. Então $w = a + b$ cujo $a \in R(g)$, $b \in R(g)^{\perp}$ e $b \neq 0$. Mas, como $\beta \cdot \|b\|^2 \leq h(b,b) = \langle b, g(b)\rangle = 0$, temos que $b = 0$, o que é uma contradição. Com isso, concluimos que $\mathbb{H} = R(g)$ e, consequentemente, g é bijetora. Por outro lado, usando novamente o teorema da representação de Riesz temos que existe único $\tilde{w} \in \mathbb{H}$ tal que $f(z) = \langle z, \tilde{w}\rangle \quad \forall z \in \mathbb{H}$. Seja $\tilde{u} \in \mathbb{H}$ tal que $g(\tilde{u}) = \tilde{w}$. Então temos que $h(z,\tilde{u}) = \langle z, g(\tilde{u})\rangle = \langle z, \tilde{w}\rangle = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{H}$. Portanto a existência está garantida. Agora suponha que existam $\tilde{w}$, $\hat{w} \in \mathbb{H}$ tais que $f(z) = h(z,\tilde{w}) = h(z,\hat{w}) \quad \forall z \in \mathbb{H}$. Logo, para $z = \tilde{w} - \hat{w}$ temos que $\beta\|\tilde{w} - \hat{w}\|^2 \leq h(\tilde{w} - \hat{w}, \tilde{w} - \hat{w}) = 0$. Isso prova que $\tilde{w} = \hat{w}$.

$\square$

2 Espaços L_p e Espaços de Sobolev

2.1 Espaços L_p

Definição 2.1.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto mensurável à Lebesgue. Denotamos por $L(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tais que $\int_\Omega |f(x)|dx < \infty$.*

Definição 2.1.2. *Duas funções em $L(\Omega)$ são ditas equivalentes, se elas são iguais a menos de um conjunto de medida nula (ie, se são iguais quase sempre). A classe de equivalência de f em $L(\Omega)$ pela igualdade quase sempre será denotada por $[f]$. O espaço de Lebesgue $L_1(\Omega)$ consiste de todas as classes de equivalência em $L(\Omega)$.*

Temos que $L_1(\Omega)$ é um espaço vetorial real com as operações $\alpha \cdot [f] := [\alpha \cdot f]$ e $[f] + [g] := [f + g]$.

Proposição 2.1.3. *A função $\|[f]\|_{L_1} := \int_\Omega |f(x)|dx$ é uma norma em $L_1(\Omega)$.*

Demonstração. Note que $\|[f]\|_1$ está bem definida. De fato se $f,\ g \in [f]$, então $f = g$ quase sempre. Portanto $\int_\Omega |f(x)|dx = \int_\Omega |g(x)|dx$, e $\|[f]\|_{L_1} = \|[g]\|_{L_1}$. Também $\|[f]\|_{L1} \geq 0$. Se $\|[f]\|_{L_1} = 0$ então $\int_\Omega |f(x)|dx = 0$, o que implica $f = 0$ quase sempre, e então $[f] = [0]$. As propriedades $\|\alpha \cdot [f]\|_{L_1} = |\alpha| \cdot \|[f]\|_{L_1}$ e $\|[f]+[g]\|_{L_1} \leq \|[f]\|_{L_1} + \|[g]\|_{L_1}$ são facilmente verificadas usando a lineariedade da integral.

□

Definição 2.1.4. *Seja $1 < p < \infty$. Definimos $L_p(\Omega)$ como o conjunto das classes de equivalência (pela igualdade quase sempre) das funções mensuráveis $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tais que $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$.*

Provaremos que $L_p(\Omega)$ é um espaço vetorial normado, com a norma dada por $\|[f]\|_{L_p} := (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

De agora em diante vamos escrever f para nos referirmos a $[f]$.

Proposição 2.1.5 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L_p$, $g \in L_q$ tais que $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f \cdot g \in L_1$ e $\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}$.*

Demonstração. Se $\|f\|_{L_p} = 0$ ou $\|g\|_{L_q} = 0$ a proposição é óbvia. Suponha que $\|f\|_{L_p} \neq 0$ e $\|g\|_{L_q} \neq 0$. Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $h(t) = \alpha \cdot t - t^{\alpha}$ para $t \geq 0$. Usando $h^{'}(t)$, vemos que $h(t) > h(1)$ se $t \neq 1$. Logo $\alpha - 1 \leq \alpha \cdot t - t^{\alpha} \quad \forall t \geq 0$, e portanto $t^{\alpha} \leq \alpha \cdot t - \alpha + 1$. Escolhendo $t = \dfrac{a}{b}$ com a,$b \geq 0$, $b \neq 0$, $\alpha = \dfrac{1}{p}$, com p e q como na hipótese e multiplicando ambos os lados por b, obtemos $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \dfrac{1}{p} \cdot a + \dfrac{1}{q} \cdot b$. Sejam $A = a^{\frac{1}{p}}$, $B = b^{\frac{1}{q}}$. Logo $A \cdot B \leq \dfrac{1}{p} \cdot A^p + \dfrac{1}{q} \cdot B^q$ para A, $B \geq 0$. Agora escolha $A = \dfrac{|f|}{\|f\|_{L_p}}$ e $B = \dfrac{|g|}{\|g\|_{L_q}}$. Substituindo na equação e integrando obtemos $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{|f|}{\|f\|_{L_p}} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_{L_q}} \leq \int_{\Omega} \frac{1}{p} \cdot (\frac{|f|}{\|f\|_{L_p}})^p + \int_{\Omega} \frac{1}{q} \cdot (\frac{|g|}{\|g\|_{L_q}})^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Com isso, obtemos $\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}$.

□

Dois números positivos p e q satisfazendo a igualdade $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ são chamados de índices conjugados. Neste caso, note que vale $(p-1) \cdot q = p$.

A desigualdade $A \cdot B \leq \dfrac{1}{p} \cdot A^p + \dfrac{1}{q} \cdot B^q$ para A, $B \geq 0$, é chamada desigualdade de Young. Selecionando $a \cdot b = ((p \cdot \epsilon)^{\frac{1}{p}} \cdot a) \cdot (\dfrac{b}{(p \cdot \epsilon)^{\frac{1}{p}}})$, obtemos $A \cdot B \leq \epsilon A^p + C(\epsilon) \cdot B^q \quad \forall \epsilon > 0$, cujo $C(\epsilon) = \epsilon^{-\frac{q}{p}} \cdot q^{-1}$. Esta última é chamada de desigualdade de Young com ϵ.

Proposição 2.1.6 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz). *Se f, $g \in L_2$, então $f \cdot g \in L_1$ e $\displaystyle\int_{\Omega} |f(x).g(x)|dx \leq \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2}$.*

Demonstração. Escolha $p = q = 2$ na proposição anterior. □

Proposição 2.1.7 (Desigualdade de Minkowski). *Se f, $h \in L_p$ e $p \geq 1$, então $f + h \in L_p$ e $\|f + h\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|h\|_{L_p}$.*

Demonstração. Para o caso $p = 1$, o teorema já foi visto. Seja $p > 1$. Como $\displaystyle\int_{\Omega} |f(x) + h(x)|^p dx \leq 2^p \cdot \int_{\Omega} |f(x)|^p + |h(x)|^p dx < \infty$, temos que $f + h \in L_p$. Também $|f + h|^p = |f + h| \cdot |f + h|^{p-1} \leq |f| \cdot |f + h|^{p-1} + |h| \cdot |f + h|^{p-1}$. Seja q o índice conjugado de p. Como $(|f + h|^{p-1})^q = |f + h|^p$, então temos que $|f + h|^{p-1} \in L_q$. Pela desigualdade de Hölder temos que $|f| \cdot |f + h|^{p-1} \in L_1$ e $\displaystyle\int_{\Omega} |f| \cdot |f + h|^{p-1} dx \leq \|f\|_{L_p} \cdot (\|f + h\|_{L_p})^{\frac{p}{q}}$.Analogamente, temos que $\int_\Omega |h|\cdot|f+h|^{p-1}dx \leq \|h\|_{L_p}\cdot(\|f+h\|_{L_p})^{\frac{p}{q}}$. Logo $(\|f+h\|_{L_p})^p = \int_\Omega |f+h|^p dx \leq (\|f\|_{L_p}+\|h\|_{L_p})\cdot(\|f+h\|_{L_p})^{\frac{p}{q}}$. Se $\|f+h\|_{L_p} = 0$ a desigualdade desejada é trivial. Suponha $\|f+h\|_{L_p} \neq 0$. Então $\frac{(\|f+h\|_{L_p})^p}{(\|f+h\|_{L_p})^{\frac{p}{q}}} \leq (\|f\|_{L_p}+\|h\|_{L_p})$. Observando que $p-\frac{p}{q} = 1$, temos $\|f+h\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|h\|_{L_p}$.

□

Com a desigualdade de Minkowski, temos que L_p é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$.

Pode-se provar as seguintes versões discretas das desigualdades de Hölder e Minkowski (veja (KREYSZIG,1978)):

$(\sum_{i=1}^{n}|x_i\cdot y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$, e $(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ para $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ e q índice conjugado de p.

Usando que $0 \leq (a-b)^2$, obtemos $a\cdot b \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$. Esta desigualdade é chamada desigualdade de Cauchy. Selecionando $a\cdot b = ((2\cdot\epsilon)^{\frac{1}{2}}\cdot a)\cdot(\frac{b}{(2\cdot\epsilon)^{\frac{1}{2}}})$, obtemos $a\cdot b \leq \epsilon\cdot a^2 + \frac{b^2}{4\cdot\epsilon}$ $\forall\epsilon > 0$, que é chamada de desigualdade de Cauchy com ϵ.

2.2 Completude de L_p

Teorema 2.2.1 (Riesz-Fischer)**.** *Se $1 \leq p < \infty$, então $L_p(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Resta provar que $L_p(\Omega)$ é completo. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em L_p e $\epsilon > 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ temos $\|f_n - f_m\|_{L_p} < \epsilon$. Logo existe uma subsequência $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|g_{k+1}-g_k\|_{L_p} < 2^{-k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Seja $g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty}|g_{k+1}(x)-g_k(x)|$. Pelo lema de Fatou, temos $(\int_\Omega |g|^p dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_\Omega(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty}|g_{k+1}(x)-g_k(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n\to\infty}\{(\int_\Omega(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n}|g_{k+1}(x)-g_k(x)|)^p dx)^{\frac{1}{p}}\}$. Agora, usando a desigualdade de Minkowski, obtemos $(\int_\Omega |g|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq \|g_1\|_{L_p} + \liminf_n\{\sum_{k=1}^{n}\|g_{k+1}(x)-g_k(x)\|_{L_p} \leq \|g_1\|_{L_p} + \liminf_n\{\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\} = \|g_1\|_{L_p}+1$. Logo $\|g\|_{L_p} \leq \|g_1\|_{L_p}+1$. Portanto $g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty}|g_{k+1}(x)-g_k(x)|$

converge quase sempre em Ω. Seja $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+1}(x) - g_k(x)$. Vamos redefinir f por zero no conjunto de medida nula em Ω, cujo $g(x) = \infty$. Note que $f(x)$ é uma função real bem definida. De fato, se $g(x) < \infty$ para $x \in \Omega$, temos que $g_k(x)$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$, e portanto $f(x) < \infty$. Também, temos que $|g_k(x)| = |\sum_{j=k}^{\infty} g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq g(x)$ em Ω e portanto pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que $\int_\Omega |f|^p dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |g_k(x)|^p dx < \infty$. Logo $f \in L_p$. Além disso, temos $|f(x) - g_k(x)|^p \leq (|f(x)| + |g_k(x)|)^p \leq (g(x) + g(x))^p = (2 \cdot g(x))^p$ em Ω. Novamente pelo teorema da convergência dominada de Lesbegue, temos $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f(x) - g_k(x)|^p dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |f(x) - g_k(x)|^p dx = \int_\Omega 0 dx = 0$. Logo $g_k \to f$ em L_p. Portanto temos que uma subseqüência da seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy converge para f. Mas, $\|f_n - f\|_{L_p} \leq \|f_n - g_k\|_{L_p} + \|g_k - f\|_{L_p} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para n e k grandes. Portanto $f_k \to f$ em L_p, o que demonstra que L_p é completo.

□

Vemos que $L_2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle f, h\rangle := \int_\Omega f(x) \cdot h(x) dx$.

2.3 Espaço L_∞

Definição 2.3.1. *Uma função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é dita ser essencialmente limitada se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K$ quase sempre em Ω. O ínfimo de tais K é chamado de supremo essencial de $|f|$ e é denotado por $supess_{x\in\Omega}|f(x)|$. Seja $L_\infty(\Omega)$ a classe de equivalência pela igualdade quase sempre das funções $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ mensuráveis e essencialmente limitadas.*

Seja $\|f\|_{L\infty} := supess_{x\in\Omega}|f(x)|$.

Vemos que $L_\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial real normado com a norma $\|f\|_{L\infty}$.

Teorema 2.3.2. *O espaço $L_\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L_\infty(\Omega)$ e $\epsilon > 0$. Seja $K_n \subset \Omega$ tal que f_n é limitada em Ω/K_n e K_n tem medida nula. Então temos que $K := \bigcup K_n$ também tem medida nula (pois união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula). Logo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções limitadas em Ω/K. Como $f_n - f_m \in L_\infty$, existem $N_{n,m} \subset \Omega$ com medida nula tais que $|f_n(x)-f_m(x)| \leq \|f_n-f_m\|_{L_\infty} \quad \forall x \in \Omega/N_{n,m}$. Então $N := \bigcup K_{n,m}$ também terá medida nula, e conseqüentemente $M := N \bigcup K$ terá medida nula. Portanto temos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções limitadas em Ω/M e $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{L_\infty} \quad \forall x \in \Omega/M$. Logo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ restrita a Ω/M é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Portanto existe $f(x)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente em Ω/M e $f \equiv 0$ em M. Logo $supess_{x\in\Omega}|f(x) - f_m(x)| = supess_{x\in\Omega/M}|f(x) - f_m(x)| < \epsilon$ para m grande. Com isto, concluimos que $L_\infty(\Omega)$ é completo.

□

Observe que a desigüaldade de Minkowski vale para $p = \infty$.

Vamos mostrar que a desigualdade de Hölder vale para $p = 1$ e $q = \infty$. De fato $\int_\Omega |f \cdot g| dx = \int_\Omega |f| \cdot |g| dx \leq \int_\Omega \|f\|_{L_\infty} \cdot |g| dx = \|f\|_{L_\infty} \cdot \int_\Omega |g| dx = \|f\|_{L_\infty} \|g\|_{L_1}$, se $f \in L_\infty$ e $g \in L_1$.

Proposição 2.3.3. *Suponha que* $vol(\Omega) := \int_\Omega 1 dx < \infty$ *e* $1 \leq r \leq s \leq \infty$. *Se* $f \in L_s$ *então* $f \in L_r$ *e* $\|f\|_{L_r} \leq (vol(\Omega))^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \cdot \|f\|_{L_s}$. *Se* $f \in L_\infty$, *então* $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_\infty}$. *Finalmente, se existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall p \in [1, \infty)$ *temos que* $f \in L_p$ *e* $\|f\|_{L_p} \leq k$, *então* $f \in L_\infty$ *e* $\|f\|_{L_\infty} \leq k$.

Demonstração. Se $r = s$ então a primeira afirmação é óbvia. Seja $r < s$. Então, pela desigualdade de Hölder, $\|f(x)\|^r_{L_r} = \|1 \cdot f(x)\|^r_{L_r} \leq \|f(x)\|^r_{L_s} \cdot \|1\|^{1-\frac{r}{s}}_{L_1}$. Então $\|f(x)\|_{L_r} \leq \|f(x)\|_{L_s} \cdot (vol\Omega)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}$. Logo a primeira afirmação é válida para o caso geral. Se $f \in L_\infty$, obtemos $\limsup_n \|f\|_{L_n} \leq \|f\|_{L_\infty}$. Por outro lado, $\forall \epsilon > 0$ existe $A \subset \Omega$ com medida positiva tal que $|f(x)| \geq (\|f\|_{L_\infty} - \epsilon) \quad \forall x \in A$. Logo $\int_\Omega |f(x)|^p dx \geq \int_A |f(x)|^p dx \geq \int_A (\|f\|_{L_\infty} - \epsilon)^p dx = (\|f\|_{L_\infty} - \epsilon)^p \cdot vol(A)$. Logo $\|f\|_{L_p} \geq vol(A)^{\frac{1}{p}} \cdot (\|f\|_{L_\infty} - \epsilon) \quad \forall \epsilon > 0$. Logo $\liminf_n \|f\|_{L_n} \geq \|f\|_{L_\infty}$. Portanto temos $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_\infty}$. Logo a segunda afirmação está demonstrada. Agora suponha que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \ p \in [1, \infty)$ temos $\|f\|_{L_p} \leq k$. Suponha que $f \notin L_\infty$ ou que $\|f\|_{L_\infty} > k$. Então existem $k_1 > k$ e $A \subset \Omega$ com medida positiva tais que $|f(x)| \geq k_1 \quad \forall x \in A$. Analogamente ao argumento acima, temos que $\liminf_n \|f\|_{L_n} \geq k_1 > k$, o que contradiz a hipótese.

□

2.4 Funções Localmente Integráveis

Definição 2.4.1. *Dizemos que um conjunto A está compactamente contido em Ω, e denotamos por $A \subset\subset \Omega$, se $\overline{A} \subset \Omega$ e $\overline{A}$ é compacto como subconjunto do $\mathbb{R}^n$.*

Definição 2.4.2. *Dizemos que uma função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tem suporte compacto em Ω se $suppf := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}} \subset\subset \Omega$. O conjunto $suppf$ é chamado de suporte de f. Sejam $C_o^p(\Omega) := \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tal que f tem suporte compacto em Ω e é derivável até a ordem p, com p-ésimas derivadas contínuas $\}$ e $C_b^p(\Omega) := \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tal que f é limitada e derivável até a ordem p, com as derivadas contínuas e limitadas $\}$.*

Definição 2.4.3. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Seja $L_p^{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f \in L_p(A) \quad \forall A \subset\subset \Omega$, A mensurável $\}$. O conjunto $L_1^{loc}(\Omega)$ é chamado de conjunto das funções localmente integráveis.*

Assim como $L_1(\Omega)$, temos que $L_1^{loc}(\Omega)$ é um espaço vetorial real.

Note que $L_p(\Omega) \subset L_p^{loc}(\Omega)$.

Proposição 2.4.4. *Se $1 \leq p \leq \infty$, temos que $L_p(\Omega) \subset L_1^{loc}(\Omega)$*

Demonstração. Seja $f \in L_p(\Omega)$ e $K \subset\subset \Omega$, K mensurável. Vê-se que $\|f\|_{L_p(K)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}$. Seja

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in K \\ 0 & se \quad x \in \Omega/K \end{cases}$$

$\chi(x)$ é chamada de função característica do conjunto K. Então , pela desigualdade de Hölder $\|f(x)\|_{L_1(K)} = \|f(x) \cdot \chi(x)\|_{L_1(K)} \leq \|f\|_{L_p(K)} \cdot \|\chi\|_{L_q(K)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \cdot vol(K)^{\frac{1}{q}} < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

□

Note que se $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ e $g \in C_o^{\infty}(\Omega)$, então $f \cdot g \in f \in L_1(\Omega)$. Para tal, temos que g é limitada, e portanto $\displaystyle\int_{\Omega} f(x) \cdot g(x)dx = \int_{suppg} f(x) \cdot g(x)dx \leq C \cdot \int_{suppg} f(x)dx < \infty$.

Teorema 2.4.5 (Dubois-Reymond)**.** *Se $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ e $\displaystyle\int_{\Omega} f(x).g(x)dx = 0$, $\forall g \in C_o^{\infty}(\Omega)$, então $f = 0$ quase sempre em Ω.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em (ADAMS,1975) e (BREZIS,1983).

2.5 Derivada Fraca

Definição 2.5.1. *Seja* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *um multi-índice. Definimos* $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$ *e* $D^\alpha f(x) := \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$. *Definimos também* $\alpha! := \alpha_1!..., \alpha_n!$ *e se* β *é outro multi-índece tal que* $\beta \leq \alpha$, *isto é* $\beta_i \leq \alpha_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$, *então* $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \dfrac{\alpha!}{\beta! \cdot (\alpha - \beta)!}$, *com* $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$.

Convencionamos que se $|\alpha| = 0$, então $D^\alpha f = f$.

Definição 2.5.2. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto ,* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *um multi-índíce e* $f, g \in L_1^{Loc}(\Omega)$. *Dizemos que* g *é a* α*-ésima derivada fraca de* f *em* Ω, *e escrevemos*

$$D^\alpha f = g \text{ se } \int_\Omega f(x) \cdot D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega g(x) \cdot \phi(x) dx \quad \forall \phi(x) \in C_o^\infty(\Omega).$$

Se f for derivável no sentido clássico em Ω, então f é derivável no sentido fraco. Com efeito, para $f \in C^1(\Omega)$ e $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, usando integração por partes, obtemos $\int_\Omega f_{x_i}(x)\phi(x)dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\phi(x)V_i(x)dS - \int_\Omega f(x)\phi_{x_i}(x)dx = -\int_\Omega f(x)\phi_{x_i}(x)dx$, com $V(x) = (V_1(x), ..., V_n(x))$ o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Aplicando repetidas vezes este método, temos que se f é de classe $C^k(\Omega)$ e α um multi-índece tal que $|\alpha| \leq k$, então $\int_\Omega f(x) \cdot D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega g(x) \cdot \phi(x) dx$, $\forall \phi(x) \in C_o^\infty(\Omega)$.

Lema 2.5.3 (Unicidade da derivada fraca)**.** *Uma* α*-ésima derivada fraca é única, a menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Sejam $f, h, g \in L_1^{Loc}(\Omega)$ tais que $D^\alpha f = g$ e $D^\alpha f = h$ no sentido fraco. Então $(-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega h(x) \cdot \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega g(x) \cdot \phi dx \quad \forall \phi \in C_o^\infty(\Omega)$, e portanto $\int_\Omega (g(x) - h(x)) \cdot \phi dx$, $\forall \phi \in C_o^\infty(\Omega)$. Então pelo teorema 2.4.5, temos que $h = g$ quase sempre em Ω.

$\square$

Exemplo 2.5.4. *Para* $n = 1$, $\Omega = (0, 2)$, u *e* v *dadas por:*

$$u(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & se \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & se \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Mostra-se que $u' = v$ *no sentido fraco, mas* u *não é derivável no sentido clássico em* $(0,2)$.

Exemplo 2.5.5. *Para* $n = 1$, $\Omega = (0,2)$ *e* u *dada por:*

$$u(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 2 & se \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Mostra-se que não existe $v \in L_1^{Loc}((0,2))$ *tal que* $u' = v$ *no sentido fraco.*

A demonstração desses dois exemplos encontra-se em (Evans,1998).

2.6 Espaços de Sobolev

Definição 2.6.1. *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Então* $W^{k,p}(\Omega) := \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R};\quad f \in L_1^{Loc}(\Omega)$ *e* $\forall\alpha$ *multi-índice tal que* $|\alpha| \leq k,\quad D^\alpha f$ *existe e* $D^\alpha f \in L_p(\Omega)\}$. *O conjunto* $W^{k,p}(\Omega)$ *é chamado de espaço de Sobolev. Se* $p = 2$, *definimos* $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Observamos que em $W^{k,p}(\Omega)$ duas funções que são iguais quase sempre são consideradas como uma mesma função em $W^{k,p}(\Omega)$, isto é, os elementos de $W^{k,p}(\Omega)$ são classes de equivalência de funções, assim como em $L^p(\Omega)$.

Proposição 2.6.2 (Propriedades da derivada fraca)**.** *Sejam* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in W^{k,p}(\Omega)$ *e* α *um multi-índice tal que* $|\alpha| \leq k$. *Então:*

1. $D^\alpha f \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ *e* $D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f)$, $\forall\beta$ *multi-índice tal que* $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
2. $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ *temos* $\lambda \cdot f + g \in W^{k,p}(\Omega)$ *e* $D^\alpha(\lambda \cdot f + g) = \lambda \cdot D^\alpha f + D^\alpha g$.
3. *Se* $U \subset \Omega$, U *aberto, então* $f \in W^{k,p}(U)$.
4. *Se* $\zeta \in C_o^\infty(\Omega)$, *então* $\zeta \cdot f \in W^{k,p}(\Omega)$ *e* $D^\alpha(f \cdot \zeta) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta\zeta \cdot D^{\alpha-\beta} f$ *(fórmula de Leibniz).*

Demonstração. 1. Seja $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$. Então temos que $D^\beta\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, $\forall\beta$ multi-índice. Se $|\beta| \leq k - |\alpha|$, então $\int_\Omega D^\alpha f(x) \cdot D^\beta\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega f(x) \cdot D^\alpha(D^\beta\phi) dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega f(x) \cdot D^{\beta+\alpha}\phi dx = (-1)^{|\alpha|+|\alpha+\beta|} \cdot \int_\Omega D^{\beta+\alpha} f(x) \cdot \phi dx = (-1)^{|\beta|} \cdot \int_\Omega D^{\beta+\alpha} f(x) \cdot \phi dx$. Logo, $D^\beta D^\alpha f$ existe e $D^\beta D^\alpha f = D^{\beta+\alpha} f$. Logo, $D^\alpha f \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$.

2. $\int_\Omega D^\alpha(\lambda \cdot f + g)\cdot \phi dx = (-1)^{|\alpha|}\cdot \int_\Omega (\lambda\cdot f+g)\cdot D^\alpha \phi dx = \lambda\cdot(-1)^{|\alpha|}\cdot \int_\Omega f\cdot D^\alpha\phi dx +$ $(-1)^{|\alpha|}\cdot \int_\Omega g\cdot D^\alpha \phi dx = \int_\Omega (\lambda\cdot D^\alpha f + D^\alpha g)\cdot \phi dx \quad \forall \phi \in C_o^\infty(\Omega)$. Pelo teorema 2.4.5 temos $\lambda\cdot D^\alpha f + D^\alpha g = D^\alpha(\lambda\cdot f+g)$ quase sempre.

3. Seja $U \subset \Omega$, aberto. Logo $D^\alpha f \in L_p(\Omega) \subset L_p(U)$ e $\int_U f(x)\cdot D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|}\cdot$ $\int_U g(x)\cdot \phi dx \quad \forall \phi \in C_o^\infty(U)$. Portanto, $f \in W^{k,p}(U)$.

4. Vamos usar indução sobre $|\alpha|$. Sejam $\zeta, \phi \in C_o^\infty(\Omega)$. Então $\zeta\cdot f \in L_1^{Loc}(\Omega)$. Seja $|\alpha| = 1$. Então $\int_\Omega \zeta\cdot f\cdot D^\alpha\phi dx = \int_\Omega f\cdot D^\alpha(\zeta\cdot\phi) - f\cdot\phi\cdot D^\alpha\zeta dx = (-1)^{|\alpha|}\cdot \int_\Omega (D^\alpha f)\cdot\zeta\cdot$ $\phi dx - \int_\Omega f\cdot\phi\cdot D^\alpha\zeta dx = (-1)^{|\alpha|}\cdot \int_\Omega (D^\alpha f)\cdot\zeta\cdot\phi + f\cdot\phi\cdot D^\alpha\zeta dx$ pois $|\alpha|=1$. Observe que $(D^\alpha f)\cdot\zeta + f\cdot D^\alpha\zeta \in L_p(\Omega)$. Logo $D^\alpha(f\cdot\zeta) = (D^\alpha f)\cdot\zeta + f\cdot D^\alpha\zeta = \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^\beta\zeta\cdot$ $D^{\alpha-\beta}f$. Seja $l < k$. Suponha que a fórmula de Leibniz vale para $|\omega| \le l$ e toda função $\zeta \in C_o^\infty(\Omega)$. Seja α um multi-índice tal que $|\alpha| = l+1$. Escolha multi-índices β e γ tais que $\alpha = \beta+\gamma$ e $|\beta| = l$, $|\gamma| = 1$. Logo $\int_\Omega \zeta\cdot f\cdot D^\alpha\phi dx = \int_\Omega \zeta\cdot f\cdot D^\beta D^\gamma\phi dx =$ $(-1)^{|\beta|}\cdot \int_\Omega \sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}(D^\sigma\zeta\cdot D^{\beta-\sigma}f)\cdot D^\gamma\phi dx = (-1)^{|\beta|+|\gamma|}\cdot \int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma} D^\gamma(D^\sigma\zeta\cdot$ $D^{\beta-\sigma}f)\cdot\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\cdot\int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}(D^{\gamma+\sigma}\zeta\cdot D^{\beta-\sigma}f + D^\sigma\zeta\cdot D^{\beta-\sigma+\gamma}f)\cdot\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\cdot$ $\int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}(D^{\gamma+\sigma}\zeta\cdot D^{\beta-\sigma}f)\cdot\phi dx + (-1)^{|\alpha|}\cdot\int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}(D^\sigma\zeta\cdot D^{\alpha-\sigma}f)\cdot\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\cdot$ $\int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta+\gamma}\binom{\beta}{\sigma-\gamma}(D^\sigma\zeta\cdot D^{\beta-(\sigma-\gamma)}f)\cdot\phi dx + (-1)^{|\alpha|}\cdot\int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}(D^\sigma\zeta\cdot D^{\alpha-\sigma}f)\cdot\phi dx =$ $(-1)^{|\alpha|}\cdot\int_\Omega\sum_{\sigma\le\alpha}\binom{\beta}{\sigma-\gamma}(D^\sigma\zeta\cdot D^{\alpha-\sigma}f)\cdot\phi dx + (-1)^{|\alpha|}\cdot\int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}(D^\sigma\zeta\cdot D^{\alpha-\sigma}f)\cdot$ $\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\cdot\int_\Omega\sum_{\sigma\le\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}(D^\sigma\zeta)\cdot(D^{\alpha-\sigma}f)\cdot\phi dx$, pois $\binom{\beta}{\sigma-\gamma}+\binom{\beta}{\sigma}=\binom{\alpha}{\sigma}$. Logo temos o desejado. Para verificar a última afirmação, basta notar que se $\gamma_i = 0$ então $\binom{\beta_i}{\sigma_i-\gamma_i}+\binom{\beta_i}{\sigma_i}=\binom{\alpha_i}{\sigma_i}+\binom{\alpha_i}{\sigma_i} = 2\cdot\binom{\alpha_i}{\sigma_i}$, e se $\gamma_i = 1$ então $\binom{\beta_i}{\sigma_i-\gamma_i}+$ $\binom{\beta_i}{\sigma_i}=\binom{\alpha_i-1}{\sigma_i-1}+\binom{\alpha_i-1}{\sigma_i}=\binom{\alpha_i}{\sigma_i}$.

□

Teorema 2.6.3 (Espaço de Sobolev como espaço de funções)**.** *Seja* $k\in\mathbb{N}$, $1\le p\le\infty$.

Então, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|f\|_{W^{k,p}} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}} & se \quad 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_\infty} & se \quad p = \infty \end{cases}$$

Demonstração. Pela proposição 2.6.2, item 2, sabemos que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Vamos mostrar que $\|f\|_{W^{k,p}}$ é uma norma. De fato, seja $f, g \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $1 \leq p < \infty$, então $\|\lambda \cdot f\|_{W^{k,p}} = (\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha \lambda \cdot f\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p \cdot \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}} = \lambda \cdot \|f\|_{W^{k,p}}$. Claro que $\|f\|_{W^{k,p}} \geq 0$. Se $\|f\|_{W^{k,p}} = 0$ então $(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}} = 0$. Tomando $|\alpha| = 0$, obtemos que $\|f\|_{L_p} = 0$, o que resulta em $f = 0$ quase sempre em Ω. Usando a desigualdade de Minkowski, obtemos que $\|f + g\|_{W^{k,p}} = (\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(f + g)\|_{L_p}^p)\|^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{|\alpha|\leq k} (\|D^\alpha(f)\|_{L_p} + \|D^\alpha(g)\|_{L_p})^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(f)\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(g)\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{W^{k,p}} + \|g\|_{W^{k,p}}$. Portanto, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial normado. Resta mostrar que $W^{k,p}(\Omega)$ é completo. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$ e $\epsilon > 0$. Então, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_r - f_s\|_{W^{k,p}} < \epsilon$ se $r, s \geq l$. Logo, temos que $\|D^\alpha f_r - D^\alpha f_s\|_{L_p} \leq \|f_r - fs\|_{W^{k,p}} < \epsilon$ se $r, s \geq l$ e portanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L_p(\Omega)$. Como $L_p(\Omega)$ é completo, existem $h_\alpha \in L_p(\Omega)$ tais que $D^\alpha f_n \to h_\alpha$ na norma de $L_p(\Omega)$. Em particular, tomando $|\alpha| = 0$, temos que $f_n \to h$ na norma $L_p(\Omega)$. Agora vamos mostrar que $h \in W^{k,p}(\Omega)$ e que $D^\alpha h = h_\alpha$. De fato, seja $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$. Então $\int_\Omega h(x) \cdot D^\alpha \phi(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) \cdot D^\alpha \phi(x) dx = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega D^\alpha f_n(x) \cdot \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega h_\alpha(x) \cdot \phi(x) dx \quad \forall \phi(x) \in C_o^\infty(\Omega)$. Logo $D^\alpha f = h_\alpha$. Então $D^\alpha f_n \to D^\alpha h$ na norma de $L_p(\Omega)$, $\forall |\alpha| \leq k$, α muiti-índice, de onde conclui-se que $f_n \to h$ em $W^{k,p}(\Omega)$. O caso $p = \infty$ é análogo.

□

Temos que $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha f(x) \cdot D^\alpha g(x) dx$$

.

Definição 2.6.4. *Seja $W_o^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_o^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Seja $H_o^k(\Omega) = W_o^{k,2}(\Omega)$.*

Portanto, $f \in W_o^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_o^\infty(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ na norma de $W^{k,p}(\Omega)$.

Observe que $W_o^{k,p}(\Omega)$ também é um espaço de Banach e $H_o^k(\Omega)$ um espaço de Hilbert com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$ e denotada por $\|\cdot\|_{W_o^{k,p}}$ e $\|\cdot\|_{H_o^k}$ respectivamente.

Definição 2.6.5. *Dizemos que uma função $f \in W_{Loc}^{k,p}(\Omega)$ se $f \in W^{k,p}(U)$, $\forall U$ aberto tal que $U \subset\subset \Omega$. Escrevemos $f_n \to f$ em $W_{Loc}^{k,p}(\Omega)$ se $f_n \to f$ em $W^{k,p}(U)$, $\forall U$ aberto tal que $U \subset\subset \Omega$. Também denotamos $W_{Loc}^{k,2}(\Omega)$ por $H_{Loc}^k(\Omega)$.*

Teorema 2.6.6. *Seja $H^{-k}(\Omega)$ o dual topológico de $H_o^k(\Omega)$. Se $u \in H^{-1}(\Omega)$, então existem $f_0, ..., f_n \in L_2(\Omega)$ tais que $u(f) = \displaystyle\int_\Omega f_0 f + \sum_{i=1}^n f_i D^{\alpha_i} f dx$, $\forall f \in H_o^1(\Omega)$, com $\alpha_i = (0, 0, ...0, 1, 0, ...0)$, isto é $\alpha_i = e_i$.*

Demonstração. Como $H_o^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, pelo teorema da representação de Riesz, existe único $h \in H_o^1(\Omega)$ tal que $u(f) = \langle f, h\rangle \quad \forall f \in H_o^1(\Omega)$, isto é $u(f) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 1} D^\alpha h \cdot D^\alpha f dx$, $\forall f \in H_o^1(\Omega)$. Escolhendo $f_0 = h$ e $f_i = D^{\alpha_i} h$, obtemos $u(f) = \displaystyle\int_\Omega f_0 f + \sum_{i=1}^n f_i D^{\alpha_i} f dx$, $\forall f \in H_o^1(\Omega)$.

□

Definindo $\|\nabla f(x)\|_{L_p} := (\displaystyle\sum_{i=1}^n \|f_{x_i}\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}}$, podemos escrever $\|f\|_{W^{1,p}} = (\|\nabla f(x)\|_{L_p}^p + \|f\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}}$.

Proposição 2.6.7. *Seja $\subset \mathbb{R}^n$. Considerando a seguinte norma em $W^{k,p}(\Omega)$:*

$$\|f\|^{W^{k,p}} := \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p} & se \quad 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_\infty} & se \quad p = \infty \end{cases}$$

Temos que $\|f\|^{W^{k,p}}$ e $\|f\|_{W^{k,p}}$ são normas equivalentes em $W^{k,p}(\Omega)$.

Demonstração. A prova de que $\|f\|^{W^{k,p}}$ é uma norma em $W^{k,p}$ é análoga a prova de que $\|f\|_{W^{k,p}}$ é uma norma em $W^{k,p}$. Se $1 \leq p < \infty$, então $\|f\|^{W^{k,p}} = \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p} = ((\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p})^{\frac{1}{p}})^p \leq ((\sum_{|\alpha|\leq k} \max_{|\beta|\leq k} \|D^\beta f\|_{L_p})^{\frac{1}{p}})^p \leq C \cdot (\sum_{|\alpha|\leq k} (\|D^\alpha f\|_{L_p})^{\frac{1}{p}})^p = C \cdot \|f\|_{W^{k,p}}$, para algum $C > 0$. Também $\|f\|_{W^{k,p}} = (\displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{|\alpha|\leq k} (\max_{|\beta|\leq k} \|D^\beta f\|_{L_p})^p)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot$

$\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L_p} = c\cdot\|f\|^{W^{k,p}}$ para algum $c > 0$. Portanto $\|f\|^{W^{k,p}}$ e $\|f\|_{W^{k,p}}$ são equivalentes.
O caso $p = \infty$ é similar.

□

Definição 2.6.8. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e $f \in L_1^{Loc}(\Omega)$. Seja $U \subset\subset \Omega$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |k| < dist(U, \partial\Omega)$. Definimos $D_i^k f(x) = \dfrac{f(x + ke_i) - f(x)}{k}$, $\forall x \in U$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. A função $D_i^k f$ é chamada de quociente de diferenças de u. Definimos ainda $D^k f(x) := (D_1^k f(x), ..., D_n^k f(x))$.*

Lema 2.6.9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e $f \in L_1^{Loc}(\Omega)$. Seja $U \subset\subset \Omega$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |k| < dist(U, \partial\Omega)$. Seja $g \in C_o^\infty(U)$. Então:*

1. $D_i^k(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot D_i^k g(x) + D_i^k f(x) \cdot g(x + ke_i)$.
2. $\displaystyle\int_\Omega D_i^k f(x) \cdot g(x)dx = -\int_\Omega f(x) \cdot D_i^{-k} g(x)dx$.

Demonstração. Para a primeira afirmação, temos: $D_i^k fg(x) = \dfrac{fg(x + ke_i) - fg(x)}{k} = \dfrac{fg(x + ke_i) - fg(x) + f(x)g(x + ke_i) - f(x)g(x + ke_i)}{k} = \dfrac{f(x)(g(x + ke_i) - g(x))}{k} + \dfrac{g(x + ke_i)(f(x + ke_i) - f(x))}{k} = f(x) \cdot D_i^k g(x) + D_i^k f(x) \cdot g(x + ke_i)$.

Para a segunda parte, observe que: $\displaystyle\int_\Omega D_i^k f(x) \cdot g(x)dx = \int_U \frac{f(x + ke_i) - f(x)}{k} \cdot g(x)dx = \int_U \frac{f(x + ke_i)}{k} \cdot g(x)dx - \int_U \frac{f(x)}{k} \cdot g(x)dx = \int_{U+ke_i} \frac{f(x)}{k} \cdot g(x - ke_i)dx - \int_U \frac{f(x)}{k} \cdot g(x)dx$. Seja $x \in \Omega/(U + ke_i)$, então temos que $x - ke_i \in \Omega/U$, e portanto $g(x - ke_i) = 0$. Logo $\displaystyle\int_{U+ke_i} \frac{f(x)}{k} \cdot g(x - ke_i)dx = \int_\Omega \frac{f(x)}{k} \cdot g(x - ke_i)dx$. Então, $\displaystyle\int_\Omega D_i^k f(x) \cdot g(x)dx = \int_\Omega \frac{f(x)}{k} \cdot g(x - ke_i)dx - \int_U \frac{f(x)}{k} \cdot g(x)dx = -\int_U \frac{f(x)}{k} \cdot (g(x) - g(x - ke_i))dx = -\int_\Omega f(x) \cdot D_i^{-k} g(x)dx$.

□

Proposição 2.6.10 (Quociente de diferenças e derivada fraca)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto. Então:*

1. *Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Então, para cada $U \subset\subset \Omega$ e $0 < |k| < dist(\partial\Omega, U)$ temos que $D_i^k f \in L_p(U)$ e $\|D_i^k f\|_{L_p(U)} \leq \|f_{xi}\|_{L_p(\Omega)}$.*
2. *Se $1 < p \leq \infty$, $U \subset\subset \Omega$, $f \in L_p(U)$, $D_i^k f \in L_p(U)$ e existe uma constante C tal que $\|D_i^k f\|_{L_p(U)} \leq C \quad \forall 0 < |k| < \frac{1}{2} dist(\partial\Omega, U)$. Então, f_{x_i} existe, $f_{x_i} \in L_p(U)$ e $\|f_{x_i}\|_{L_p(U)} \leq C$.*

O resultado anterior continua válido para $i \in \{1,2,...,n-1\}$ se tomarmos $\Omega = B^o(0,1) \cap \{x_n > 0\}$ e $U = B^o(0,\frac{1}{2}) \cap \{x_n > 0\}$.

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada em (EVANS,1998) e (RENARDY,1992).

Definição 2.6.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $\partial\Omega$ é de classe C^k se $\forall x_0 \in \partial\Omega$, existe $r > 0$ e $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$, γ de classe C^k, tal que, reorientando e renomeando os eixos coordenados, se necessário, temos $\Omega \cap B(x_0,r) = \{x = (x_1,...x_n) \in B(x_0,r); \quad x_n > \gamma(x_1,...x_{n-1})\}$. Temos que $\partial\Omega$ é de classe C^∞ se $\partial\Omega$ é de classe $C^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, e $\partial\Omega$ é analítica se γ é analítica.*

Sejam $\partial\Omega$ de classe C^1, $x_0 \in \partial\Omega$ e r e γ como na definição. Sejam $\Phi(x_1,...x_n) := (x_1,...x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1,...x_{n-1}))$ e $\psi(y_1,...y_n) := (y_1,...y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1,...y_{n-1}))$. Observe que $(\psi)^{-1} = \Phi$. Vê-se também que $detJ(\psi) = detJ(\Phi) = 1$.

Seja $\partial\Omega$ de classe C^1. Então existe uma medida de superfície induzida sobre $\partial\Omega$ do $\mathbb{R}^{n-1}$. Definimos $L_p(\partial\Omega)$ como a classe de funções $f : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ mensuráveis que na potência p são integráveis.

Seja $C^p(\overline{\Omega}) := \{f \in C^p(\Omega)$ tal que $\forall |\alpha| \leq p$, $D^\alpha f$ é uniformemente contínua em subconjuntos limitados de Ω $\}$. Se $f \in C^p(\overline{\Omega})$, então $D^\alpha f$ pode ser estendida continuamente para $\overline{\Omega}$, $\forall |\alpha| \leq p$.

Teorema 2.6.12 (traço em $\boldsymbol{W^{1,p}}$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado e $\partial\Omega$ de classe C^1. Então existe um operador linear limitado $T : W^{1,p}(\Omega) \mapsto L_p(\partial\Omega)$ tal que*

1. *$T(f) = f\,|_{\partial\Omega}$ se $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*
2. *Existe $k = k(p,\Omega)$ tal que $\|T(f)\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq k \cdot \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall f \in W^{1,p}(\Omega)$.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em (EVANS,1998).

A função $T(f)$ é chamada traço de f na $\partial\Omega$.

Teorema 2.6.13 (traço zero em $\boldsymbol{W^{1,p}}$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado e $\partial\Omega$ de classe C^1. Seja $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $f \in W^{1,p}_o(\Omega)$ se e somente se $T(f)(x) = 0$ q.s. na $\partial\Omega$.*

Se $f \in W^{1,p}_o(\Omega)$, então existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_o$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ na norma de $W^{1,p}_o(\Omega)$. Pelo teorema do traço, temos que $T(f_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Como T é um operador linear limitado, temos que $T(f) = \lim\limits_{n\to\infty} T(f_n) = 0$.

A demonstração completa do teorema acima pode ser encontrada em (EVANS,1998).

3 Partições da Unidade

Lema 3.0.14. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω aberto, existe uma sequência de conjuntos compactos $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n$ tais que $K_i \subset int(K_{i+1})$, $\forall i \in \mathbb{N}$, e $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega$.*

Demonstração. Seja $K_i = \{x \in \mathbb{R}^n; B^o(x, \frac{1}{i}) \subset \Omega\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq i\}$. Temos que K_i é limitado. Vamos mostrar que K_i é fechado. Observe que $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq i\}$ é fechado. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n/\{x \in \mathbb{R}^n; B^o(x, \frac{1}{i}) \subset \Omega\}$. Logo existe $y \in B^o(x_0, \frac{1}{i})/\Omega$. Seja $\delta = \frac{1}{i} - d(x_0, y)$ e $z \in B^o(x_0, \delta)$. Então $d(y, z) \leq d(y, x_0) + d(x_0, z) < \frac{1}{i}$, e portanto $B^o(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n/\{x \in \mathbb{R}^n; B^o(x, \frac{1}{i}) \subset \Omega\}$. Então $\mathbb{R}^n/\{x \in \mathbb{R}^n; B^o(x, \frac{1}{i}) \subset \Omega\}$ é aberto e $\{x \in \mathbb{R}^n; B^o(x, \frac{1}{i}) \subset \Omega\}$ é fechado. Então K_i é compacto. Observe que $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subset \Omega$. Sejam $x \in \Omega$, $n > 0$ e $i_0 \in \mathbb{N}$ tais que $B^o(x, n) \subset \Omega$ e $\max\{\frac{1}{n}, \|x\|\} < i_0$. Então $B^o(x, \frac{1}{i_0}) \subset \Omega$ e $\|x\| < i_0$, e portanto $x \in K_{i_0}$. Concluimos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \Omega$. Falta mostrar $K_i \subset int(K_{i+1})$. Sejam $x \in K_i$, $k = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{i\cdot(i+1)}\}$ e $y \in B^o(x, k)$. Então $\|y\| < \|x\| + k \leq \|x\| + \frac{1}{2} < i + 1$. Seja $z \in B^o(y, \frac{1}{i+1})$, então $d(x, z) \leq d(y, x) + d(y, z) < k + \frac{1}{i+1} \leq \frac{1}{i\cdot(i+1)} + \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i}$. Logo $z \in B^o(x, \frac{1}{i}) \subset \Omega$. Portanto $B^o(y, \frac{1}{i+1}) \subset \Omega$. Logo $B^o(x, k) \subset K_{i+1}$, e portanto $x \in int(K_{i+1}) \quad \forall x \in K_i$.

□

Lema 3.0.15. *Dado $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ uma coleção de subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ e $\bigcup_{i\in I} \Omega_i = \Omega$. Então existe uma sequência de bolas abertas $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ do $\mathbb{R}^n$ tais que:*

1. *$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \Omega$.*
2. *$\forall j \in \mathbb{N}$, existe $l \in I$ tal que $\overline{U}_j \subset \Omega_l$.*
3. *Para cada compacto $K \subset \Omega$, temos $K \cap U_i = \emptyset$, exceto para uma quantidade finita de $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a sequência do lema 3.0.14 para Ω. Seja $K_0 = \emptyset$ e $M_i = K_{i+1}/int(K_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Note que $M_i \cap K_{i-1} = \emptyset$, pois $K_{i-1} \subset int(K_i)$. Vamos mostrar que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \Omega$. Seja $x \in \Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Logo existe o menor i_0 tal que $x \in K_{i_0}$. Então $x \in M_{i_0-1}$ pois $x \notin K_{i_0-1}$, (pela minimalidade de i_0). Logo $\Omega \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. A outra inclusão é trivial. Seja $x \in M_i$, então existe $l \in I$ tal que $x \in \Omega_l$. Como Ω_l e $\mathbb{R}^n/K_{i-1}$ são abertos e $x \notin K_{i-1}$, existe $\delta > 0$ tal que $\overline{B^o(x,\delta)} \subset \Omega_l$ e $\overline{B^o(x,\delta)} \cap K_{i-1} = \emptyset$. Note que cada $M_i = K_{i+1} \cap (\mathbb{R}^n/int(K_i))$ é compacto. Note também que $\{B^o(x,\delta(x)); x \in M_i\}$ é uma cobertura para M_i. Portanto existe uma subcobertura finita, isto é, existe $F_i \subset M_i$, finito, tal que $M_i \subset \displaystyle\bigcup_{x\in F_i} B^o(x,\delta(x))$. Seja $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$, que é enumerável. Portanto $\{B^o(x,\delta(x)); x \in F\}$ é uma coleção enumerável de bolas abertas que cobre Ω. Vamos denotar estas bolas por $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Como vimos, $\forall j \in \mathbb{N}$, existe $l \in I$ tal que $\overline{U}_j \subset \Omega_l$. temos também que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \Omega$. Resta mostrar o item 3, Seja $K \subset \Omega$, K compacto. Logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_m$, pois $(int(K_i))_{i\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura para K, e como K é compacto, existem $i_0, .., i_p$ tais que $K \subset \displaystyle\bigcup_{j=0}^{p} int(K_{i_j}) \subset K_{\max\limits_{0\le j\le p}\{i_j\}}$. Note que $B^o(x,\delta(x)) \cap K_m \subset B^o(x,\delta(x)) \cap K_{i-1} = \emptyset$ para $x \in M_i$ e $i > m$. Portanto $K \cap U_i = \emptyset$, exceto para uma quantidade finita de $i \in \mathbb{N}$.

□

Lema 3.0.16. *Seja $y \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. então existe uma função $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) > 0$, $\forall x \in B^o(y,\delta)$ e $\psi(x) = 0$, $\forall x \notin B^o(y,\delta)$.*

Demonstração. Seja $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \le 0 \\ e^{\frac{-1}{t}} & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}$$

Temos que $g(t) > 0$ se $t > 0$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Seja $\psi(x) = g(1 - \frac{\|x-y\|^2}{\delta^2})$. Como $\|\cdot\|^2 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ (pois é uma função polinomial), temos que $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Note que se $x \in B^o(y,\delta)$, então $\psi(x) > 0$ e se $x \notin B^o(y,\delta)$ então $\psi(x) = 0$.

□

Teorema 3.0.17. *Sejam $\{\Omega_l\}_{l\in I}$ uma coleção de conjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ e $\Omega = \displaystyle\bigcup_{l\in I} \Omega_l$. Então existe uma sequência $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ de funções com as seguintes propriedades:*

1. *cada $\phi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e anula-se fora de um subconjunto compacto de Ω_l, para algum $l = l(i) \in I$.*
2. *Para cada subconjunto compacto K de Ω, $\phi_j \equiv 0$ sobre K para todos os $j \in \mathbb{N}$, exceto para uma quantidade finita.*
3. *Para cada $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq \phi_j(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$.*

Demonstração. Seja $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ a sequência de bolas abertas do lema 3.0.15. Para cada U_i, seja $\psi_i(x)$ dado pelo lema 3.0.16. Logo $\psi_i(x) > 0$, $\forall x \in U_i$ e $\psi_i(x) = 0$, $\forall x \notin U_i$. Seja $K \subset \Omega$ um compacto, pelo lema 3.0.15 apenas uma quantidade finita de U_i tem intercesão não vazia com K. Portanto $\psi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)$ está bem definida e é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\psi(x) > 0$ se $x \in \Omega$. Seja

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi_i(x)}{\psi(x)} & \text{se} \quad \text{x} \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad \text{x} \notin \Omega \end{cases}$$

Temos que $(\phi_i)_{i=1}^{\infty}$ tem as propriedades desejadas.

□

O conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ denomina-se partição de Ω subordinado a cobertura $\{\Omega_l\}_{l\in I}$.

Corolário 3.0.18. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$, K compacto, e $U \subset \mathbb{R}^n$, U aberto e limitado tal que $K \subset U$. Então existe $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi \equiv 1$ sobre K, $\phi \equiv 0$ sobre $\mathbb{R}^n/U$ e $0 \leq \phi(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Considere a cobertura de $\mathbb{R}^n$ consistindo de $\{U, \mathbb{R}^n/K\}$, e a partição de $\mathbb{R}^n$ subordinado a esta cobertura. Logo, pelo teorema 3.0.17, existe $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que anula-se fora de um subconjunto compacto de U ou $\mathbb{R}^n/K$, $0 \leq \phi_j(x) \leq 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall j \in \mathbb{N}$, e para cada subconjunto compacto M, $\phi_j \equiv 0$ sobre M, exceto por uma quantidade finita de $j \in \mathbb{N}$. Portanto $\phi_j \equiv 0$ em K ou $\phi_j \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n/U$. Seja $\overline{\phi} = \sum \phi_i$ tal que $\phi \equiv 0$ em K e $\phi = \sum \phi_i$ tal que $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n/U$. Logo ϕ é a função desejada.

□

A função ϕ assim constituída é denominada um função de corte com relação ao conjunto compacto K.

Corolário 3.0.19. *Sejam $U,V \subset \mathbb{R}^n$, abertos, tais que $V \subset\subset U$. Então, existe uma função de corte ϕ tal que:*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in V \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}^n/U \end{cases} \quad , \ 0 \leq \phi \leq 1$$

Demonstração. Tome $K := \overline{V}$ e aplique o corolário 3.0.18.

$\square$

Tomando $U,V,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$, abertos, tais que $V \subset\subset U \subset\subset \Omega$, e aplicando o corolário 3.0.19, vemos que a o conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ está bem servido de funções de corte.

4 Equações Lineares Elípticas

4.1 Operadores Elípticos

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω aberto e limitado. Consideremos o seguinte operador diferencial parcial linear de ordem l:

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha(x) \cdot D^\alpha(\cdot)$$

cujos coeficientes $a_\alpha(x)$ são funções reais definida em Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-índice. A parte principal de L é o operador formado apenas pelas derivadas de ordem l, isto é:

$$L^o(x, D) = \sum_{|\alpha| = l} a_\alpha(x) \cdot D^\alpha(\cdot)$$

Associado a L, consideremos o seguinte polinômio homogêneo em $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ de grau l:

$$L^o(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = l} a_\alpha(x) \cdot \xi^\alpha$$

Definição 4.1.1. *Dizemos que L é elíptico em $x_0 \in \Omega$ se $L^o(x_0, \xi) \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n / \{0\}$.*

Lema 4.1.2. *Se um operador diferencial parcial L de ordem l é elíptico em $x_0 \in \Omega$, $n > 1$, então l é par ($l = 2 \cdot k$) e $\xi \mapsto L^o(x_0, \xi)$ assume apenas um sinal para $\xi \neq 0$.*

Demonstração. Por definição, temos que $\xi \mapsto L^o(x_0, \xi)$ é contínuo e assume 0 para $\xi = 0$. Suponha que existam ξ_1 e ξ_2 tais que $L^o(x_0, \xi_1) < 0$ e $L^o(x_0, \xi_2) > 0$. Considere uma curva contínua Υ ligando ξ_1 a ξ_2 que não passe pela origem. Pela continuidade, $L^o(x_0, \Upsilon)$ passa pela origem, o que é uma contradição. Segue que $L^o(x_0, \xi)$ e $L^o(x_0, -\xi) = (-1)^l \cdot L^o(x_0, \xi)$ devem ter o mesmo sinal, o que mostra que l é par.

□

Em vista deste resultado, iremos usar a seguinte definição restrita de operador elíptico.

Definição 4.1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω aberto e limitado. Dizemos que um operador diferencial parcial $L(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2\cdot k} a_\alpha(x) \cdot D^\alpha(\cdot)$ é elíptico em Ω se:*

$$(-1)^k \cdot \sum_{|\alpha|=2\cdot k} a_\alpha(x) \cdot \xi^\alpha > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n/\{0\}$$

Dizemos que L é uniformemente elíptico em Ω se existe $\theta > 0$ tal que:

$$(-1)^k \cdot \sum_{|\alpha|=2\cdot k} a_\alpha(x) \cdot \xi^\alpha \geq \theta|\xi|^{2\cdot k},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \Omega$$

Temos que todo operador uniformemente elíptico é um operador elíptico.

Os operadores lineares negativo do Laplaciano ($-\Delta = -\partial_{x_1x_1} - ... - \partial_{x_nx_n}$, ordem 2) e biharmônico (Δ^2, ordem 4) são uniformemente elípticos com $\theta = 1$.

Definição 4.1.4. [1] *Dizemos que um operador diferencial parcial linear complexo L (isto é, os $a_\alpha(x)$ assumem valores complexo) é fortemente elíptico em Ω se existe uma função $\gamma : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ tal que $Re(\gamma(x) \cdot L^o(x,\xi)) > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n/\{0\}$, $\forall x \in \Omega$.*

L é fortemente uniformemente elíptico em Ω se existem $\gamma : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ e $\theta > 0$ tais que $Re(\gamma(x) \cdot L^o(x,\xi)) \geq \theta|\xi|^l$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \Omega$.

L é propriamente elíptico em Ω se l for par ($l = 2 \cdot k$) e se o polinômio em t, $L^o(x, \xi + t \cdot \mu)$, para cada $x \in \Omega$ e para cada par de vetores $\xi, \mu \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes, tiver k raízes com parte imaginária positiva e k raízes com parte imaginária negativa.

Note que todo operador real elíptico é fortemente elíptico e que todo operador real uniformemente elíptico é fortemente uniformemente elíptico. Basta escolher $\gamma = (-1)^k$.

Um operador de segunda ordem no espaço n dimensional da forma $L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\partial_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} + c(x)$ é uniformemente elíptico em Ω se existe $\theta > 0$ tal que $\xi^T \cdot A(x) \cdot \xi \geq \theta|\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Aqui $A(x)$ é uma matrix $n_x n$ com componentes $-a_{ij}(x)$.

[1] O interesse nos operadores fortemente elípticos provêm do fato que foi para eles que primeiro se estabeleceu uma teoria geral do problema de Dirichlet, a chamada teoria de Garding. Posteriormente, provou-se que o problema de Dirichlet é bem posto na classe mais geral dos operadores propriamente elípticos. Essa classe é também adequada para o tratamento de outros problemas de fronteira.

Para a discussão de existência e regularidade de EDP, é conveniente colocar os operadores numa forma para o qual seja mais conveniente a integração por partes.

Definição 4.1.5. *Dizemos que um operador L está na forma divergente se existem funções $a_{\sigma,\gamma} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tais que*

$$L(x, D) = \sum_{0 \leq |\sigma|, |\gamma| \leq k} (-1)^{|\sigma|} D^{\sigma}(a_{\sigma,\gamma}(x) D^{\gamma}(\cdot))$$

Um operador na forma divergente é elíptico se e somente se $\sum_{|\sigma|,|\gamma|=k} \xi^{\sigma} a_{\sigma,\gamma}(x) \cdot \xi^{\gamma} > 0$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n/\{0\}$, e é uniformemente elíptico se e somente se existe $\theta > 0$ tal que $\sum_{|\sigma|,|\gamma|=k} \xi^{\sigma} a_{\sigma,\gamma}(x) \cdot \xi^{\gamma} \geq \theta \cdot |\xi|^{2 \cdot k}$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Se os coeficientes a_{α} de um operador linear forem suficientemente suaves, então podemos colocar o operador na forma divergente (veja (RENARDY,1992)).

Definição 4.1.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω aberto e limitado, com fronteira Γ, L um operador diferencial parcial linear e f uma função real. O problema de Dirichlet é a seguinte EDP com condição de contorno:*

$$Lu = f \ \ em \ \Omega$$

$$u = 0 \ \ em \ \Gamma$$

Daqui em diante vamos considerar apenas os operadores uniformemente elípticos na forma divergente.

Definição 4.1.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω aberto e limitado, com fronteira Γ, e $f \in C_b(\Omega)$. Uma função $u \in C_b^{2 \cdot k}(\Omega) \cap C_b^{2 \cdot k - 1}(\overline{\Omega})$ é dita uma solução clássica para o problema de Dirichlet se:*

$$L(x, D)u(x) = \sum_{0 \leq |\sigma|, |\gamma| \leq k} (-1)^{\sigma} D^{\sigma}(a_{\sigma,\gamma}(x) D^{\gamma} u(x)) = f(x) \ \ em \ \Omega$$

$$D^{\alpha} u = 0 \ \ em \ \Gamma, \ para \ |\alpha| \leq k - 1$$

Uma das mais importantes idéias da análise moderna é de que se quisermos garantir a existência de solução de um problema, é conveniente procurá-la em um espaço maior apropriado.

Definição 4.1.8. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω aberto e limitado, com fronteira Γ, e $f \in L_2(\Omega)$. Uma função $u \in H^{2 \cdot k}(\Omega) \cap H_0^k(\Omega)$ é dita uma solução forte para o problema de Dirichlet se*

$$L(x, D)u(x) = \sum_{0 \leq |\sigma|, |\gamma| \leq k} (-1)^{|\sigma|} D^\sigma (a_{\sigma,\gamma}(x) D^\gamma u(x)) = f(x) \ \textit{em} \ \Omega.$$

Se u é uma solução forte, então $\forall \phi(x) \in C_o^\infty(\Omega)$, temos que:

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = \int_\Omega L(x, D)u(x)\phi(x)dx = \int_\Omega \sum_{0 \leq |\sigma|, |\gamma| \leq k} (-1)^\sigma D^\sigma (a_{\sigma,\gamma}(x) D^\gamma u(x))\phi(x)dx =$$
$$\int_\Omega \sum_{0 \leq |\sigma|, |\gamma| \leq k} (a_{\sigma,\gamma}(x) D^\gamma u(x)) D^\sigma(\phi(x))dx.$$

Por densidade, temos que

$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = \int_\Omega \sum_{0 \leq |\sigma|, |\gamma| \leq k} (a_{\sigma,\gamma}(x) D^\gamma u(x)) D^\sigma(v(x))dx \quad \forall \ v(x) \in H_0^k(\Omega)$$

Definição 4.1.9. *A forma bilinear $B[\cdot, \cdot]$ associada a um operador linear elíptico divergente é:*

$$B[\cdot, \cdot] := \int_\Omega \sum_{0 \leq |\sigma|, |\gamma| \leq k} a_{\sigma,\gamma}(x) D^\gamma(\cdot) D^\sigma(\cdot)dx$$

Definição 4.1.10. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω aberto e limitado, com fronteira Γ, e $f \in H^{-k}(\Omega)$. Uma função $u \in H_0^k(\Omega)$ é dita uma solução fraca para o problema de Dirichlet se*

$$B[u, v] = f(v) \quad \forall v \in H_0^k(\Omega)$$

Se $k = 1$, isto é, se o operador é de segunda ordem, temos que a solução fraca para $f \in L_2(\Omega)$ é dada por $B[u, v] = \int_\Omega f v dx$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Daqui em diante consideraremos apenas operadores lineares uniformemente elípticos na forma divergente de segunda ordem e $f \in L_2(\Omega)$.

Observe que se u é uma solução fraca para o problema de Dirichlet e $\Gamma \in C^1$, então pelo teorema 2.6.13 temos $T(u) = 0$.

Neste caso, podemos também estabelecer o seguinte problema:

$$Lu = f \text{ em } \Omega$$

$$u = g \text{ em } \Gamma$$

Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca se $B[u,v] = \langle f, v\rangle_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ e $T(u) = g$. Neste caso, seja $w \in H^2(\Omega)$ tal que $T(w) = g$ e $\overline{u}$ solução fraca da EDP $L\overline{u} = f - Lw$ em Ω e $\overline{u} = 0$ em Γ. Então $u := \overline{u} + w$ é a solução do nosso problema original.

Como a EDP

$$Lu = f \text{ em } \Omega$$

não impõe restrições em Γ, dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é solução desta se

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

4.2 Existência de Soluções

Para o operador diferencial uniformemente elíptico de segunda ordem na forma divergente:

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}(x)\partial_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} + c(x).$$

Assumiremos que $a_{i,j}, b_i, c \in L_\infty(\Omega)$, $\forall 0 \leq i,j \leq n$. Também assumiremos que a função $f \in L_2(\Omega)$ no problema de Dirichlet. Portanto as integrais anteriores estão bem definidas para $v \in H_0^1(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$.

Teorema 4.2.1 (Estimativa para a energia)**.** *Existem $\lambda, \omega > 0$ e $\gamma \geq 0$, tais que:*

1. $|B[u,v]| \leq \lambda \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$
2. $\omega \cdot \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[u,u] + \gamma \cdot \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$

Demonstração. Se $u, v \in H_0^1(\Omega)$, então $|B[u,v]| = \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} v + cvudx \right|$
$\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}||u_{x_i}||v_{x_j}| + \sum_{i=1}^{n} |b_i||u_{x_i}||v| + |c||v||u|dx \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{L_\infty} \int_\Omega |u_{x_i}||v_{x_j}| + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty} \cdot$
$\int_\Omega |u_{x_i}||v| + \|c\|_{L_\infty} \int_\Omega |v||u|dx \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{L_\infty} \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty} \int_\Omega |\nabla u||v| + \|c\|_{L_\infty} \cdot$
$\int_\Omega |v||u|dx \leq \lambda_o \cdot \left(\int_\Omega |\nabla u||\nabla v| + \int_\Omega |\nabla u||v| + \int_\Omega |v||u|dx \right)$ com $\lambda_o = max \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{L_\infty} \right.,$

$\left.\sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty}, \|c\|_{L_\infty}\right\}$. Agora usando a desigualdade de Hölder, obtemos $|B[u,v]| \leq \lambda_o \cdot (\|\nabla u\|_{L_2}\|\nabla v\|_{L_2} + \|\nabla u\|_{L_2}\|v\|_{L_2} + \|u\|_{L_2}\|v\|_{L_2}) \leq \lambda \cdot (\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1})$ com $\lambda > 0$, pois os coeficientes do operador L associado a B não são todos iguais a zero quase sempre, pela condição de elipticidade. Portanto 1 está provado.

Vamos provar 2. Usando a condição de elipticidade uniforme, obtemos que existe $\theta > 0$ tal que $\theta|\nabla u|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} \quad \forall x \in \Omega$. Portanto $\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} dx = B[u,u] - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} u + cu^2 dx \leq B[u,u] + \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} u + cu^2 dx \right| \leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty} \cdot \int_\Omega |\nabla u||u| + \|c\|_{L_\infty} \cdot \int_\Omega u^2 dx$. Usando a desigualdade de Cauchy com ϵ, obtemos $\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty} \cdot \left(\epsilon \cdot \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4 \cdot \epsilon} \int_\Omega u^2\right) + \|c\|_{L_\infty} \cdot \int_\Omega u^2 dx$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty} < \frac{\theta}{2}$. Logo $\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq B[u,u] + \frac{\theta}{2} \cdot \int_\Omega |\nabla u|^2 + \overline{k} \int_\Omega u^2 + \|c\|_{L_\infty} \cdot \int_\Omega u^2 dx$ onde $\overline{k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L_\infty}}{4\epsilon}$. Portanto $\frac{\theta}{2} \cdot \int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2 dx \leq B[u,u] + k \cdot \int_\Omega u^2 dx$ onde $k = \overline{k} + \|c\|_{L_\infty} + \frac{\theta}{2}$. Escolhendo $\gamma = k \geq 0$ e $\omega = \frac{\theta}{2} > 0$, obtemos o resultado.

□

No caso $L = -\Delta$, pode-se verificar que o teorema acima vale para $\gamma = 0$. De fato, pode-se provar que vale $\gamma = 0$ se $L = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}(x)\partial_{x_i})_{x_j} + c(x)$ com $c \geq 0$ em Ω. Para maiores detalhes, veja (EVANS,1998).

Teorema 4.2.2 (Primeiro teorema de existência para soluções fracas)**.** *Existe $\gamma \geq 0$ tal que se $\mu \geq \gamma$ e $f \in L_2(\Omega)$ então o problema de Dirichlet*

$$Lu + \mu u = f \ \text{em} \ \Omega$$

$$u = 0 \ \text{em} \ \Gamma$$

tem única solução fraca.

Demonstração. Sejam γ e ω como no teorema anterior. Sejam $\mu \geq \gamma$ e $L_\mu := L + \mu$, que é um operador diferencial parcial uniformemente elíptico. Além disso $\omega \cdot \|u\|_{H_0^1} \leq B[u,u] + \gamma \cdot \|u\|_{L_2}^2 \leq B_\mu[u,u]$. Pelo teorema anterior, existe $\alpha > 0$, tal que $|B_\mu[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$. Logo B satisfaz as hipóteses do teorema de Lax-Milgram.

Seja $\overline{f} : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ dado por $\overline{f}(v) = \langle f, v \rangle_{L_2}$. Claro que $\overline{f}$ é um funcional linear. Também $|\overline{f}(v)| = |\langle f, v \rangle_{L_2}| = |\int_\Omega fvdx| \leq \int_\Omega |f||v|dx$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz, obtemos $|\overline{f}(v)| \leq \|f\|_{L_2}\|v\|_{L_2}$. Portanto $\overline{f}$ é limitado. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram, existe único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $B_\mu[u, v] = \overline{f}(v) = \langle f, v \rangle_{L_2}$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, u é a única solução fraca do problema de Dirichlet.

□

Pela observação anterior, ficou provado a existência e unicidade de soluções fracas para operadores do tipo $L = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_{x_i})_{x_j} + c$ com $c \geq 0$, em particular o negativo do Laplaciano.

Usando teoria de operadores compactos, pode-se obter o seguinte teorema (veja (EVANS,1998) e (RENARDY,1992)):

Teorema 4.2.3 (Segundo teorema de existência para soluções fracas)**.** *Precisamente uma das seguintes afirmações ocorre:*

1. *Para cada $f \in L_2(\Omega)$, existe única solução fraca u do problema*

$$Lu = f \ \text{em}\ \Omega$$

$$u = 0 \ \text{em}\ \Gamma.$$

2. *Existe uma solução fraca u não identicamente nula do problema homogêneo*

$$Lu = 0 \ \text{em}\ \Omega$$

$$u = 0 \ \text{em}\ \Gamma.$$

A dicotomia acima é chamada de alternativa de Fredholm.

A teoria de existência acima é estendida de modo análogo para soluções complexas, com as seguintes definições:

$\forall u, v \in H^1(\Omega)$, u e v assumindo valores complexos, $\langle u, v \rangle_{L_2} := \int_\Omega u.\overline{v}$, $\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{v} + u\overline{v}dx$ e $B[u, v] := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}u_{x_i}\overline{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}u_{x_i}\overline{v} + cu\overline{v}dx$.

4.3 Regularidade no Interior

Teorema 4.3.1 (Regularidade $\boldsymbol{H^2}$ no interior)**.** *Suponha $a_{i,j} \in C^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $b_i, c \in L_\infty(\Omega)$ e $f \in L_2(\Omega)$. Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca da EDP elíptica de segunda ordem na forma divergente*

$$Lu = f \text{ em } \Omega$$

Então $u \in H^2_{Loc}(\Omega)$ e para cada aberto $U \subset\subset \Omega$, temos

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \cdot (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

cujo $C = C(\Omega, L, U)$.

Demonstração. Sejam U aberto, tal que $U \subset\subset \Omega$ e V aberto tal que $U \subset\subset V \subset\subset \Omega$. Seja ζ uma função de corte, isto é, uma função de classe $C^\infty(\Omega)$ que satisfaz:

$$\zeta \equiv 1 \text{ em } U,\ \zeta \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}^n/V$$

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

Como $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca das EDP, temos $B[u,v] = \langle f, v\rangle_{L_2}$, $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ e, portanto $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_\Omega \overline{f} v dx$ onde $\overline{f} = f - \displaystyle\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} - cu$. Vamos estender u a todo $\mathbb{R}^n$ tal que $u(x) = 0$ se $x \notin \Omega$. O mesmo seja feito para os $a_{i,j}(x)$. Sejam $h \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |h| < dist(V, \partial\Omega)$ e $k \in \{1, ..., n\}$. Escolha

$$v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$$

Como $v = \dfrac{-1}{h^2}\left(\zeta^2(x - he_k)[u(x) - u(x - he_k)] - \zeta^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]\right)$, e as funções $\zeta(x - he_k)$ e $\zeta(x)$ anulam-se próximo a $\partial\Omega$, temos que $v \in H^1_0(\Omega)$.

Sejam

$$A := \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} dx$$

$$B := \int_\Omega \overline{f} v dx$$

Vamos primeiro fazer uma estimativa para A. De fato, pelo lema 2.6.9 temos:

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j} u_{x_i} (-D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u))_{x_j} dx =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j} u_{x_i} (-D_k^{-h}((\zeta^2 D_k^h u)_{x_j})) dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} (D_k^h(a_{i,j} u_{x_i}))(\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} dx =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j}^h (D_k^h u_{x_i})(\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} + (D_k^h a_{i,j}) u_{x_i} (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} dx =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \{a_{i,j}^h (D_k^h u_{x_i})(D_k^h u_{x_j})\zeta^2 + a_{i,j}^h (D_k^h u_{x_i})(D_k^h u) 2\zeta\zeta_{x_j} + (D_k^h a_{i,j}) u_{x_i} (D_k^h u_{x_j})\zeta^2 +$$

$$(D_k^h a_{i,j}) u_{x_i} (D_k^h u) 2\zeta\zeta_{x_j}\} dx,$$

onde $w^h(x) = w(x + he_k)$.

Sejam

$$A_1 := \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j}^h (D_k^h u_{x_i})(D_k^h u_{x_j})\zeta^2 dx$$

$$A_2 := \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j}^h (D_k^h u_{x_i})(D_k^h u) 2\zeta\zeta_{x_j} + (D_k^h a_{i,j}) u_{x_i} (D_k^h u_{x_j})\zeta^2 + (D_k^h a_{i,j}) u_{x_i} (D_k^h u) 2\zeta\zeta_{x_j} dx$$

Logo $A = A_1 + A_2$. Da condição de elipticidade uniforme, temos que existe $\theta > 0$ tal que $\sum_{i,i=1} \xi_i a_{i,j}(x) \cdot \xi_j > \theta \cdot |\xi|^2$, $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Escolha $\xi_i = D_k^h u_{x_i}$. Logo,

$$\sum_{i,j=1}^{n} (D_k^h u_{x_i})(a_{i,j}^h(x))(D_k^h u_{x_j}) > \theta \cdot |D_k^h \nabla u|^2.$$

Portanto

$$A_1 := \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{i,j}^h (D_k^h u_{x_i})(D_k^h u_{x_j})\zeta^2 \geq \theta \int_{\Omega} \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2.$$

Utilizando as hipóteses de regularidade dos coeficientes $a_{i,j}$ e da função de corte, obtemos:

$$|A_2| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} |a_{i,j}^h||D_k^h u_{x_i}||D_k^h u|2\zeta|\zeta_{x_j}|+|D_k^h a_{i,j}||u_{x_i}||D_k^h u_{x_j}|\zeta^2+|D_k^h a_{i,j}||u_{x_i}||D_k^h u|2\zeta|\zeta_{x_j}|dx$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} |a_{i,j}^h||D_k^h \nabla u||D_k^h u|2\zeta|\zeta_{x_j}| + |D_k^h a_{i,j}||\nabla u||D_k^h \nabla u|\zeta^2 + |D_k^h a_{i,j}||\nabla u||D_k^h u|2\zeta|\zeta_{x_j}|dx$$

$$\leq \overline{C}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} |D_k^h \nabla u||D_k^h u|\zeta + |\nabla u||D_k^h \nabla u|\zeta + |\nabla u||D_k^h u|\zeta dx\right)$$

Temos que $\overline{C}$ pode ser escolhido de forma a não depender de h. De fato, como $a_{i,j} \in C^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, temos que $D_k^h(a_{i,j})(x) := \dfrac{a_{i,j}(x+he_k) - a_{i,j}(x)}{h}$ é limitado em V.

Utilizando a desigualdade de Cauchy com ϵ, observando que $supp(\zeta) \subset \overline{V}$ e escolhendo $\epsilon = \dfrac{\theta}{\overline{C}4}$ obtemos

$$|A_2| \leq \overline{C}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_{V} |D_k^h \nabla u||D_k^h u|\zeta + |\nabla u||D_k^h \nabla u|\zeta + |\nabla u||D_k^h u|dx\right)$$

$$\leq \int_V \frac{\theta}{2}\zeta^2|D_k^h \nabla u|^2 + \overline{\overline{C}}(|\nabla u|^2 + |D_k^h u|^2)dx = \int_\Omega \frac{\theta}{2}\zeta^2|D_k^h \nabla u|^2 + \int_V \overline{\overline{C}}(|\nabla u|^2 + |D_k^h u|^2)dx$$

Pela proposição 2.6.10, temos que $\|D_k^h u\|_{L_2(V)} \leq \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$.

Logo

$$|A_2| \leq \int_\Omega \frac{\theta}{2}\zeta^2|D_k^h \nabla u|^2 + \overline{E}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Portanto

$$A = A_1 + A_2 \geq A_1 - |A_2| \geq \int_\Omega \frac{\theta}{2}\zeta^2|D_k^h \nabla u|^2 - \overline{E}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Agora vamos fazer uma estimativa para B. De fato,como b_i, $c \in L_\infty(\Omega)$, segue que

$$|B| = \left|\int_\Omega \left(f - \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} - cu\right) v dx\right| \leq \int_\Omega \left(|f| + \sum_{i=1}^{n} |b_i||u_{x_i}| + |c||u|\right)|v|dx \leq$$

$$\overline{C}\int_\Omega\left(|f|+\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|+|u|\right)|v|dx\leq C\int_\Omega(|f|+|\nabla u|+|u|)|v|dx$$

Escolha $W\subset\mathbb{R}^n$ tal que $V\subset\subset W\subset\subset\Omega$, e $supp(\zeta(x))$ e $supp(\zeta(x-he_k))$ estejam contidas em W.

Pela proposição 2.6.10 , temos que $\|v\|_{L_2(W)}\leq\|\nabla(\zeta^2D_k^hu)\|_{L_2(\Omega)}$.

Logo

$$\int_\Omega|v|^2=\int_W|v|^2\leq\int_\Omega|\nabla(\zeta^2D_k^hu)|^2\leq\int_\Omega|(\nabla(\zeta^2))D_k^hu|^2+\int_\Omega|\zeta^2\nabla(D_k^hu)|^2+$$

$$2\int_\Omega|(\nabla\zeta^2)D_k^hu||\zeta^2(\nabla D_k^hu)|$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy, obtemos

$$\int_\Omega|v|^2\leq C\left(\int_\Omega|(\nabla\zeta^2)D_k^hu|^2+\int_\Omega|\zeta^2(\nabla D_k^hu)|^2\right)=C\left(\int_V|(\nabla\zeta^2)D_k^hu|^2+\int_V|\zeta^2(\nabla D_k^hu)|^2\right)$$

$$\leq\overline{C}\left(\int_V(D_k^hu)^2+\int_V\zeta^2|(\nabla D_k^hu)|^2\right),$$

pois $\zeta\in C_o^\infty(\overline{V})$.

Portanto,

$$\int_\Omega|v|^2\leq C\left(\int_V(D_k^hu)^2+\int_V\zeta^2|D_k^h\nabla u|^2\right)\leq\overline{C}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2+\int_V\zeta^2|D_k^h\nabla u|^2\right).$$

Usando a desigualdade de Cauchy com ϵ, a desigualdade anterior e escolhendo ϵ apropriado, obtemos

$$|B|\leq\frac{\theta}{4}\int_\Omega\zeta^2|D_k^h\nabla u|^2+C\int_\Omega(f^2+u^2+|\nabla u|^2).$$

Como $A=B$, temos que $A\leq|B|$. Dessa desigualdade, da estimaiva para $|B|$, e da cota inferior para A, obtemos que:

$$\frac{\theta}{2}\int_\Omega\zeta^2|D_k^h\nabla u|^2\leq\overline{C}\int_\Omega(f^2+u^2+|\nabla u|^2).$$

Como $\zeta \equiv 1$ em U, obtemos:

$$\frac{\theta}{2}\int_U |D_k^h \nabla u|^2 \leq \overline{C}\int_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2)$$

para $k \in \{1, ..., n\}$, $h \neq 0$ e $|h|$ suficientemente pequeno.

Pela proposição 2.6.10 obtemos

$$u_{x_i} \in H^1(U),\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ e } \int_U \sum_{i,j=1}^{n} (u_{x_i x_j})^2 \leq C\int_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2)$$

Como $U \subset\subset \Omega$ é arbitrário, temos que $u_{x_i} \in H^1_{Loc}(\Omega)$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Logo,

$$u \in H^2_{Loc}(\Omega).$$

Também

$$\left(\int_U |\sum_{i,j=1}^{n} (u_{x_i x_j})^2 + u^2 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_\Omega f^2 + u^2 + |\nabla u|^2 dx + \int_U u^2 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$C\left(\int_\Omega f^2 + u^2 + (\nabla u)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_\Omega f^2\right)^{\frac{1}{2}} + C\left(\int_\Omega u^2 + (\nabla u)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Logo

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}) \text{ com } C = C(\Omega, U, L).$$

Como $U \subset\subset V \subset\subset \Omega$, um argumento análogo mostra que

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|u\|_{H^1(V)} + \|f\|_{L_2(V)}).$$

Seja ξ uma função de corte tal que:

$$\xi \equiv 1 \text{ em } V \text{ e } supp(\xi) \subset \Omega$$

$$0 \leq \xi \leq 1$$

Seja

$$v := \xi^2 u \in H_0^1(\Omega)$$

Temos que

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} u_{x_i} ((\xi^2 u)_{x_j}) dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} u_{x_i} \xi^2 u_{x_j} dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} u_{x_i} u \xi^2_{x_j} dx := A_1 + A_2$$

Também

$$A_1 \geq \overline{C} \int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 dx \text{ pela condição de elipticidade,}$$

e

$$|A_2| \leq C \int_\Omega \xi |\nabla u||u| dx \leq \epsilon \int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 + \frac{C}{\epsilon} \int_\Omega u^2 \text{ pela desigualdade de Cauchy com } \epsilon.$$

Escolhendo $\epsilon = \dfrac{\overline{C}}{2}$, obtemos $A \geq \overline{\overline{C}} \int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 - C \int_\Omega u^2$.

Também

$$|B| \leq \int_\Omega |f||u|\xi^2 + C \int_\Omega |\nabla u||u|\xi^2 + \overline{C} \int_\Omega \xi^2 u^2 \leq$$

$$\int_\Omega |f|^2 + |u|^2 + \int_\Omega \epsilon \xi^2 |\nabla u|^2 + \frac{C}{4\epsilon}|u|^2 + D \int_\Omega u^2 \leq C \int_\Omega |f|^2 + |u|^2 + \frac{\overline{C}}{4} \int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2$$

para ϵ conveniente.

Como $A \leq |B|$, obtemos

$$\frac{\overline{C}}{2} \int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 \leq C \int_\Omega (u^2 + f^2)$$

Portanto,

$$\|u\|_{H^1(V)} \leq C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}).$$

Logo,

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}).$$

$\square$

Como $u \in H^2_{Loc}(\Omega)$, temos que $Lu = f$ quase sempre em Ω. De fato $B[u,v] = \langle f, v\rangle$, $\forall v \in H^1_0(\Omega)$. Em particular, escolha $v \in C^\infty_o(\Omega)$. Então,

$$\int_\Omega fvdx = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}u_{x_i}v_{x_j}dx + \sum_{i,1}^n \int_\Omega b_i u_{x_i} vdx + \int_\Omega cuvdx =$$

$$\int_\Omega -\sum_{i,j=1}^n (a_{i,j}u_{x_i})_{x_j} v + \sum_{i,1}^n b_i u_{x_i} v + cuvdx$$

.

Pelo lema de Dubois-Reymond, temos que

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{i,j}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i,1}^n b_i u_{x_i} + cu = f$$

quase sempre em Ω.

Teorema 4.3.2 (Regularidade de maior ordem no interior)**.** *Sejam $m \in \mathbb{N}$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado. Suponha $a_{i,j}, b_i, c \in C^{m+1}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ e $f \in H^m(\Omega)$. Seja $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca da EDP elíptica de segunda ordem na forma divergente*

$$Lu = f \text{ em } \Omega$$

Então, $u \in H^{m+2}_{Loc}(\Omega)$ e para cada aberto $U \subset\subset \Omega$ temos

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

com $C = C(\Omega, U, L, m)$.

Demonstração. Vamos aplicar indução sobre m.

O caso $m = 0$ retorna ao teorema anterior.

Suponha que o teorema seja válido para algum $m - 1$ e para todo aberto e limitado Ω.

Supomos então que $a_{i,j}$, b_i, $c \in C^{m+1}(\Omega)$, $f \in H^m(\Omega)$ e que $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca da EDP $Lu = f$ em Ω.

Pela hipótese de indução, temos que $u \in H^{m+1}_{Loc}(\Omega)$ e para cada aberto $U \subset\subset \Omega$ temos $\|u\|_{H^{m+1}(U)} \leq C(\|f\|_{H^{m-1}(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$.

Sejam $U \subset\subset \Omega$, $U \subset\subset V \subset\subset \Omega$ e α um multi-índice tal que $|\alpha| = m$.

Considere

$$\overline{v} \in C_o^\infty(V)$$
$$v = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{v} \in H_0^1(\Omega)$$

Então

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle_{L_2}$$

Com isto, obtemos

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u_{x_i} (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \overline{v}_{x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{v} + cu(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{v} = \int_\Omega f(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{v}$$

Logo

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (D^\alpha(a_{i,j} u_{x_i}))(\overline{v}_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (D^\alpha(b_i u_{x_i}))\overline{v} + (D^\alpha cu)\overline{v} = \int_\Omega (D^\alpha f)\overline{v}$$

Portanto

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} a_{i,j})(D^\beta u_{x_i})(\overline{v}_{x_j}) + \sum_{i=1}^n \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} b_i)(D^\beta u_{x_i})\overline{v} +$$

$$\sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} c)(D^\beta u)\overline{v} = \int_\Omega (D^\alpha f)\overline{v}.$$

Conseqüentemente

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (a_{i,j})(D^\alpha u_{x_i})(\overline{v}_{x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(D^\alpha u_{x_i})\overline{v} + c(D^\alpha u)\overline{v} = \int_\Omega (D^\alpha f)\overline{v}$$

$$-\sum_{i,j=1}^n \sum_{\beta \le \alpha, \alpha \ne \beta} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} a_{i,j})(D^\beta u_{x_i})(\overline{v}_{x_j}) - \sum_{i=1}^n \sum_{\beta \le \alpha, \alpha \ne \beta} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} b_i)(D^\beta u_{x_i})\overline{v}$$

$$-\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}(D^{\alpha-\beta}c)(D^{\beta}u)\overline{v}=\int_{\Omega}(D^{\alpha}f)\overline{v}+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}((D^{\alpha-\beta}a_{i,j})(D^{\beta}u_{x_i}))_{x_j}\overline{v}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}(D^{\alpha-\beta}b_i)(D^{\beta}u_{x_i})\overline{v}-\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}(D^{\alpha-\beta}c)(D^{\beta}u)\overline{v}.$$

Sejam

$$\overline{f}=(D^{\alpha}f)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}((D^{\alpha-\beta}a_{i,j})(D^{\beta}u_{x_i}))_{x_j}-$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}(D^{\alpha-\beta}b_i)(D^{\beta}u_{x_i})-\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}(D^{\alpha-\beta}c)(D^{\beta}u)\in L^2(V)$$

e

$$\overline{u}=D^{\alpha}u\in H^1(V)$$

Temos $B[\overline{u},\overline{v}]=\langle\overline{f},\overline{v}\rangle$, $\forall\overline{v}\in C_o^{\infty}(V)$.

Por densidade, obtemos

$$B[\overline{u},v]=\langle\overline{f},v\rangle,\ \forall v\in H_0^1(V).$$

Logo, $\overline{u}$ é uma solução fraca da EDP $L\overline{u}=\overline{f}$ em V.

Temos também

$$\|\overline{f}\|_{L_2(V)}=\|(D^{\alpha}f)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}((D^{\alpha-\beta}a_{i,j})(D^{\beta}u_{x_i}))_{x_j}+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}(D^{\alpha-\beta}b_i)(D^{\beta}u_{x_i})+\sum_{\beta\leq\alpha,\alpha\neq\beta}\binom{\alpha}{\beta}(D^{\alpha-\beta}c)(D^{\beta}u)\|_{L_2(V)}\leq$$

$$\|D^{\alpha}f\|_{L_2(V)}+C(\|u\|_{H^{m+1}(V)})\leq\|D^{\alpha}f\|_{L_2(U)}+C(\|f\|_{H^{m-1}(\Omega)}+\|u\|_{L_2(\Omega)})\leq$$

$$C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

Pelo teorema anterior temos que $\overline{u} \in H^2_{Loc}(\Omega)$ e

$$\|\overline{u}\|_{H^2(U)} \leq C(\|\overline{f}\|_{L_2(V)} + \|\overline{u}\|_{L_2(V)})$$

Logo

$$u \in H^{m+2}_{Loc}(\Omega)$$

Além disso,

$$\|\overline{u}\|_{H^2(U)} \leq C(\|\overline{f}\|_{L_2(V)} + \|\overline{u}\|_{L_2(V)}) \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|\overline{u}\|_{L_2(V)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}) \leq$$

$$C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^m(V)}) \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{H^{m-1}(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

$$\leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}).$$

Logo

$$\|D^\alpha u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}) \quad \forall \alpha \text{ multi-index, tal que } |\alpha| = m.$$

Portanto

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

$\square$

Se tivermos $a_{i,j}, b_i, c \in C^\infty(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca da EDP $Lu = f$ em Ω, pode-se mostrar que $u \in C^\infty(\Omega)$ (veja (EVANS,1998)).

4.4 Regularidade na Fronteira

Teorema 4.4.1 (Regularidade $\boldsymbol{H^2}$ na fronteira)**.** *Suponha $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega}) \cap L_\infty(\Omega)$, $b_i, c \in L_\infty(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ e $\Gamma \in C^2$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca da EDP elíptica de segunda ordem na forma divergente*

$$Lu = f \ \text{em } \Omega$$

$$u = 0 \ \text{em } \Gamma$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \cdot (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

cujo $C = C(\Omega, L)$.

Demonstração. Começamos com o particular

$$\Omega = B^o(0,1) \cap \mathbb{R}^n_+$$

cujo $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$.

Sejam

$$U := B^o(0, \tfrac{1}{2}) \cap \mathbb{R}^n_+ \text{ e } V = B^o(0, \tfrac{2}{3}).$$

Seja ζ uma função de corte tal que

$$\zeta = 1 \text{ em } B^o(0, \tfrac{1}{2})$$

$$\zeta = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n / V$$

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

Observe que $\zeta = 1$ em U e ζ anula-se perto da parte curva de Γ.

Temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} = \int_\Omega f v$$

para

$$f' = f - \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} - cu$$

Vamos estender u e $a_{i,j}$ a $\mathbb{R}^n$ por zero.

Defina

$$A := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j}$$

$$B := \int_\Omega f' v$$

Para $k \in \{1, ..., n-1\}$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |h| < \frac{1}{2}$, seja

$$v = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u).$$

Como $v = \dfrac{-1}{h^2}\big(\zeta^2(x - he_k)[u(x) - u(x - he_k)] - \zeta^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]\big)$, as funções $\zeta(x - he_k)$ e $\zeta(x)$ anulam-se próximo a parte curva de $\partial\Omega$ e a função traço T anula $u(x)$, $u(x - he_k)$ e $u(x + he_k)$ no conjunto $\{x_n = 0\} \cap \Gamma$, temos que $v \in H_0^1(\Omega)$.

Como na demonstração do teorema 4.3.1, obtemos que existe $\theta > 0$ tal que

$$A \geq \frac{\theta}{2} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 - C \int_\Omega |\nabla u|^2$$

$$|B| \leq \frac{\theta}{4} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 + C \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2 + f^2)$$

Portanto, para $k \in \{1, ..., n-1\}$ e $|h|$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_U |D_k^h \nabla u|^2 \leq \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \leq \int_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2)$$

Pela observação após a proposição 2.6.10, temos $u_{x_k} \in H^1(U)$ para $k \in \{1, ..., n-1\}$ e

$$\sum_{i,j=1, i+j<2n}^{n} \|u_{x_i x_j}\|_{L_2(U)} \leq C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})$$

Também pela observação após o teorema 4.3.1, temos que $Lu = f$ quase sempre em Ω.

Portanto

$$f = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{i,j}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}u_{x_ix_j} + \sum_{i,1}^{n}\overline{b_i}u_{x_i} + cu$$

com $\overline{b_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})_{x_j}$.

Logo

$$a_{n,n}u_{x_nx_n} = -f - \sum_{i,j=1,i+j<2n}^{n} a_{i,j}u_{x_ix_j} + \sum_{i,1}^{n}\overline{b_i}u_{x_i} + cu$$

Pela elipticidade uniforme, e escolhendo $\xi = e_n = (0, ..., 0, 1)$, existe $\theta > 0$ tal que $a_{n,n}(x) \geq \theta$, $\forall x \in \Omega$.

Logo, para quase todo $x \in \Omega$, temos

$$|u_{x_nx_n}| \leq C\left(\sum_{i,j=1,i+j<2n}^{n} |u_{x_ix_j}| + |\nabla u| + |u| + |f|\right)$$

Com isto, $u \in H^2(U)$ e

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \cdot (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})$$

Definindo $W := B^o(0, \frac{2}{3}) \cap \mathbb{R}^n_+$, de modo análogo obtemos

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \cdot (\|f\|_{L_2(W)} + \|u\|_{H^1(W)})$$

Como na demonstração do teorema 4.3.1, obtemos que $\|u\|_{H^1(W)} \leq C \cdot (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$.

Portanto

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \cdot (\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

Para $\Omega = B^o(y_o, s) \cap \mathbb{R}^n_+$ a prova do resultado é idêntica.

Vamos ao caso geral:

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω aberto e limitado, com fronteira $\Gamma \in C^2$ e $x_o \in \Gamma$.

Reorientando e reordenando os eixos, se necessário, temos que existem $r > 0$ e $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$, $\gamma \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tais que $B^o(0, r) \cap \Omega = \{(x_1, ..., x_n) \in B^o(x_o, r); x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}$.

Sejam

$$y = \Phi(x) = (x_1, ...x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, ...x_{n-1}))$$

$$x = \Psi(y) = (y_1, ...y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, ...y_{n-1}))$$

Tome $s > 0$ pequeno suficiente para $\hat{\Omega} := B(\Phi(x_o), s) \cap \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n; y_n > 0\} \subset \Phi(\Omega \cap B^o(x_o, r))$ e seja $\hat{U} := B(0, \frac{s}{2}) \cap \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n; y_n > 0\}$ e $\hat{u}(y) := u(\Psi(y))$, $y \in \hat{\Omega}$.

Temos que $\hat{u} \in H^1(\hat{\Omega})$ e $T(\hat{u}) = 0$ em $\hat{\Gamma} \cap \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n; y_n = 0\}$.

Seja

$$\hat{L}\hat{u} := -\sum_{k,l=1}^{n} (\hat{a}_{k,l}\hat{u}_{y_k})_{y_l} + \sum_{k=1}^{n} \hat{b}_k \hat{u}_{y_k} + \hat{c}\hat{u} \text{ com}$$

$$\hat{a}_{k,l} = \sum_{r,s=1}^{n} a_{r,s}(\Psi(y))\Phi^k_{x_r}(\Psi(y))\Phi^l_{x_s}(\Psi(y)),$$

$$\hat{b}_k = \sum_{r=1}^{n} b_r(\Psi(y))\Phi^k_{x_r}(\Psi(y)),$$

$$\hat{c}_k = c(\Psi(y)),$$

$$\hat{f} = f(\Psi(y)).$$

Vamos mostrar que $\hat{u}$ é uma solução da EDP $\hat{L}\hat{u} = \hat{f}$ em $\hat{\Omega}$.

De fato, se $\hat{v} \in H^1_0(\hat{\Omega})$ e $\hat{B}[\quad,\quad]$ é a forma bilinear associada a $\hat{L}$, então

$$\hat{B}[\hat{u}, \hat{v}] = \int_{\hat{\Omega}} \sum_{k,l=1}^{n} \hat{a}_{k,l}\hat{u}_{y_k}\hat{v}_{y_l} + \sum_{k=1}^{n} \hat{b}_k \hat{u}_{y_k}\hat{v} + \hat{c}\hat{u}\hat{v}.$$

Seja $v(x) := \hat{v}(\Phi(x))$, então $\hat{v}(y) = v(\Psi(y))$.

Logo

$$\hat{B}[\hat{u}, \hat{v}] = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \int_{\hat{\Omega}} \hat{a}_{k,l} u_{x_i} \Psi^i_{y_k} v_{x_j} \Psi^i_{y_l} dy + \sum_{i}^{n} \sum_{k,1}^{n} \int_{\hat{\Omega}} \hat{b}_k u_{x_i} \Psi^i_{y_k} v dy + \int_{\hat{\Omega}} \hat{c} u v dy$$

Como $J\Phi = (J\Psi)^{-1}$, então obtemos

$$\sum_{k,l=1}^{n} \hat{a}_{k,l} \Psi^i_{y_k} \Psi^j_{y_l} = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{r,s=1}^{n} a_{r,s} \Phi^k_{x_r} \Phi^l_{x_s} \Psi^i_{y_k} \Psi^j_{y_l} = a_{i,j}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{b}_k \Psi^i_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} b_r \Phi^k_{y_r} \Psi^i_{y_k} = b_i$$

Como $|J\Phi| = 1$, fazendo a mudança de variável, obtemos

$$\hat{B}[\hat{u}, \hat{v}] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} v + cuv \right) dx = B[u, v] = \int_{\Omega} f v dx = \int_{\hat{\Omega}} \hat{f} \hat{v} dy$$

Logo

$$\hat{B}[\hat{u}, \hat{v}] = \int_{\hat{\Omega}} \hat{f} \hat{v} dy, \quad \forall \hat{v} \in H_0^1(\hat{\Omega}).$$

Logo $\hat{u}$ é uma solução fraca da EDP $\hat{L}\hat{u} = \hat{f}$ em $\hat{\Omega}$.

Vamos mostrar que $\hat{L}$ é uniformemente elíptico em $\hat{\Omega}$. De fato se $y \in \hat{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, então:

$$\sum_{k,l=1} \hat{a}_{k,l}(y) \xi_k \xi_l = \sum_{r,s=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} a_{r,s}(\Psi(y)) \Phi_{x_r}^k \Phi_{x_s}^l \xi_k \xi_l = \sum_{r,s=1}^{n} a_{r,s}(\Psi(y)) \eta_r \eta_s \geq \theta |\eta|^2$$

para $\eta = \xi J(\Phi)$, isto é $\eta_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_r}^k \xi_k$.

Como $(J\Phi) \cdot (J\Psi) = I$, temos $\xi = \eta(J\Psi)$ e então existe $C > 0$ tal que $|\xi| \leq C|\eta|$.

Logo existe $\hat{\theta} > 0$ tal que

$$\sum_{k,l=1}^{n} \hat{a}_{k,l}(y) \xi_k \xi_l \geq \theta |\xi|^2, \ \forall y \in \hat{\Omega}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto L é um operador uniformemente elíptico. Temos que $\hat{a}_{k,l} \in C^1(\hat{\Omega})$, pois Φ, $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Aplicando o caso particular, obtemos que $\hat{u} \in H^2(\hat{U})$ e

$$\|\hat{u}\|_{H^2(\hat{U})} \leq C(\|\hat{f}\|_{L_2(\hat{\Omega})} + \|\hat{u}\|_{L_2(\hat{\Omega})}).$$

Logo, obtemos $u \in H^2(U)$ e

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}) \text{ para } U = \Psi(\hat{\Omega})$$

Como Γ é compacto, podemos cobrí-lo com conjuntos finitos da forma $U_{x_o} = \Psi(\hat{U}_{x_o})$ tal que $x_o \in \Gamma$ tal que $\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$.

Com esta estimativa, mais o teorema 4.3.1 para a estimativa no interior de Ω, obtemos que $u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}), \text{ com } C = C(\Omega, L).$$

□

Pode-se provar, usando indução e o teorema anterior, que se $a_{i,j}, b_i$ e $c \in C^{m+1}(\overline{\Omega}) \cap L_\infty(\Omega)$, $f \in H^m(\Omega)$, $\Gamma \in C^{m+2}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca da EDP elíptica de segunda ordem na forma divergente

$$Lu = f \text{ em } \Omega$$

$$u = 0 \text{ em } \Gamma.$$

Então, $u \in H^{m+2}(\Omega)$, e

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \cdot (\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

com $C = C(\Omega, L, m)$.

Se $a_{i,j}, b_i, f$ e $c \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap L_\infty(\Omega)$ e $\Gamma \in C^\infty$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (veja (EVANS,1998)).

Apêndice

Integral de Lebesgue

As demonstrações das seguintes afirmações e proposições podem ser encontradas em (ODEN,1996), (BARTLE,1966) e (MEDEIROS,2003).

Definição 4.0.2. *Seja $\mathbb{X}$ um conjunto. Dizemos que $\emptyset \neq S \subset \mathbb{P}(\mathbb{X})$ é uma σ-álgebra se:*

1. $A \in S \Rightarrow \mathbb{X}/A \in S$.
2. $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset S \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in S$.

Prova-se facilmente que a interseção de σ-álgebras é uma σ-álgebra. Com isto dado $K \subset \mathbb{P}(\mathbb{X})$ definimos $S(K)$ como a menor σ-álgebra contendo K.

A menor σ-álgebra contendo todos os abertos e fechados do $\mathbb{R}^n$ é chamada de σ-álgebra de Borel e denotada por $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$. Os conjuntos de $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ são chamados de conjuntos de Borel.

Definição 4.0.3. *Seja S uma σ-álgebra. Dizemos que $\mu : S \mapsto [o, \infty]$ é uma medida em S se:*

1. $\mu(x) \neq \infty$ *para algum* $x \in S$.
2. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ *se* $E_i \in S$ *e* $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ *e* $i \neq j$.

Uma tripla $(\mathbb{X}, S, \mu)$ é chamada espaço de medida.

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\zeta_k^n = \{\zeta_v := [\frac{v_1}{2^k}, \frac{v_1+1}{2^k})x \cdots x[\frac{v_n}{2^k}, \frac{v_n+1}{2^k}); (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ uma partição do $\mathbb{R}^n$. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, definimos a partição de Ω, e denotamos por $\zeta_k^n(\Omega)$, como a família de todos os cubos $\zeta_v \in \zeta_k^n$ tais que o fecho esteja contido em Ω, isto é $\zeta_k^n(\Omega) = \{\zeta_v \in \zeta_k^n; \overline{\zeta_v} \subset \Omega\}$. Definimos a medida de Ω como $\mu(\Omega) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{kn}} \#\zeta_k^n(\Omega)$, cujo $\#\zeta_k^n(\Omega)$ denota o número de cubos em $\zeta_k^n(\Omega)$. Pode-se mostrar que este limite sempre existe e é finito se Ω é limitado. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário, definimos a medida externa de E como $\mu^*(E) := inf\{m(\Omega); \Omega$ aberto e $E \subset \Omega\}$.

Proposição 4.0.4. *Os seguintes conjuntos são idênticos e formam uma σ-álgebra:*

1. $\{E \subset \mathbb{R}^n; \inf_{E \subset G,\ G\ aberto} \mu(G - E) = 0\}$.
2. $\{E \subset \mathbb{R}^n; \inf_{F \subset E,\ F\ fechado} \mu(E - F) = 0\}$.
3. $\{E \subset \mathbb{R}^n; \inf_{F \subset E \subset G,\ G\ aberto\ e\ F\ fechado} \mu(G - F) = 0\}$.

Esta família definida acima é chamada de família de conjuntos mensuráveis a Lebesgue e é denotada por $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ e μ^* restitro a este conjunto é uma medida, a de medida de Lebesgue μ. Pode-se provar que $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n) = S(\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \cup \{E \subset \mathbb{R}^n; \mu^*(E) = 0\})$.

Definição 4.0.5. *Dizemos que* $f : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ *é uma função mensurável se:*

1. *E é um conjunto mensurável em* $\mathbb{R}^n$.
2. $\{(x, y) \in E \otimes \mathbb{R}; y < f(x)\}$ *é um conjunto mensurável em* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 4.0.6. *As seguintes propriedades valem:*

1. *Se* $f : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *é uma função mensurável e* $G \subset E$ *é um conjunto mensurável, então f restrita a G é uma função mensurável.*
2. *Se* $\{f_i : E \mapsto \overline{\mathbb{R}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ *é uma família de funções mensuráveis, então* $\limsup f_i$, $\liminf f_i$, $\sup f_i$ *e* $\inf f_i$ *são mensuráveis. Em particular, se* $\lim f_i$ *existe, então* $\lim f_i$ *é mensurável.*
3. *Se* $f : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *é contínua e E aberto, então f é mensurável.*

Uma propriedade $P(x)$, $x \in E$ é dita ser válida quase sempre (q.s.) em E se P falha apenas em um subconjunto de medida zero (nula), isto é $P(x)$ vale, $\forall x \in E - A$ e $\mu(A) = 0$.

Proposição 4.0.7. *Sejam* $f_i : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$ *tais que* $f_1 = f_2$ *quase sempre em E. Se* f_1 *é mensurável, então* f_2 *também será.*

Definição 4.0.8. *Sejam* $f : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *não negativa, mensurável e* $S(f) := \{(x, y) \in Ex\mathbb{R}; 0 < y < f(x)\}$. *A medida de* $S(f)$ *irá ser chamada de integral de Lebesgue de f sobre E e será denotada por* $\int_E f(x)dx := \mu(S(f))$.

Se $f : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *é mensurável, qualquer, então definimos a integral de Lebesgue de* f *sobre* E*, e denotamos por* $\int_E f(x)dx$*, como o número real extendido* $\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$*, caso pelo menos uma das parcelas seja finita, cujo* $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ *e* $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$*. Neste caso dizemos que* f *é integrável.*

Proposição 4.0.9. *Sejam* $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *integráveis. Então:*

1. *Se* $m(E) = 0$ *então* $\int_E f(x)dx = 0$.
2. *Se* $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *é uma família de subconjuntos mensuráveis de* E *tal que* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$ *então* $\int_{\bigcup E_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(x)dx$ *se o lado esquerdo existir.*
3. *Se* $f = g$ *quase sempre em* E *então* $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$.
4. $f \leq g$ *q.s. em* E *então* $\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$.
5. *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *então* $\int_E (f + \lambda \cdot g)dx = \int_E f(x)dx + \lambda \cdot \int_E g(x)dx$ *se o lado direito e* $f + g$ *existirem.*
6. $\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E |f(x)|dx$.
7. *Se* $f \geq 0$ *e* $\int_E f(x)dx = 0$ *então* $f = 0$ *q.s. em* E.

Lema 4.0.10 (lema de Fatou)**.** *Seja* $\{f_i : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções não negativas e integráveis, então* $\int_E \liminf f_i(x)dx \leq \liminf \int_E f_i(x)dx$.

Teorema 4.0.11 (Teorema de convergência dominada de Lebesgue)**.** *Seja* $\{f_i : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções integráveis que converge q.s. para* f*. Se existir uma função integrável* $g : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *tal que* $|f_i| \leq g$ *q.s em* E*,* $\forall i \in \mathbb{N}$*, então* f *será integrável e* $\int_E f(x)dx = \lim \int_E f_i(x)dx$.

Teorema 4.0.12 (Teorema da mudança de variável)**.** *Sejam* $G, E \subset \mathbb{R}^n$ *dois abertos e* $h : G \mapsto E$ *uma bijeção de classe* C^1*. Seja* $f : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *uma função integrável. Então* $\int_E f(x)dx = \int_G (h \circ f)(x)|Jh(x)|dx$.

Conclusões

Estudou-se, nesse trabalho, operadores lineares, espaços L_p e de Sobolev $W^{p,k}$, partições da unidade, e aplicações dessa ferramentas as equações diferenciais parciais. Fica evidente que, no estudo das equações diferenciais, necessita-se de vários ramos da matemática para montar as teorias, em especial da análise funcional, que enfoca a análise dos espaços de funções. Apesar de ser uma área antiga de pesquisa matemática, as equaçôes diferenciais vem, ainda, incorporando e inspirando muitas das técnicas mais modernas desenvolvidas muitas áreas da matemática. Portanto, outras ferramentas mais sofisticadas, como, por exemplo, teoria das distribuições, podem ser usadas na teoria das equações diferenciais parciais.

Referências

ADAMS, Robert A. *Sobolev Spaces*, Academic Press,1975.

BARTLE, Robert G. *The Elements of Integration*, Wiley,1966.

BREZIS, Haïm *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson,1983.

EVANS, Lawrence C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society,1998.

FIGUEIREDO, Djairo G. *Equações Elípticas não Lineares*, IMPA,1977.

GILBARG, David e TRUDINGER, Neil S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1983.

KREYSZIG, Erwin *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wilei,1978.

MEDEIROS, Luiz Adauto e MELLO, Eliel Amancio de *A Integral de Lebesgue*, UFRJ,2003.

ODEN, J. Tinsley e DEMKOWICZ, Leszek F. *Applied Functional Analysis*, CRC,1996.

RENARDY, Michael e ROGERS Robert C. *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag,1992.