

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Curso de Matemática

## **As Equações de Maxwell e Aplicações**

**Ana Paula Bertoldi Oberziner**

**Orientador: Dr. Mauricio Valencia Ferreira da Luz**

Florianópolis

7 de julho de 2008

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Curso de Matemática

## **As Equações de Maxwell e Aplicações**

Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para obtenção de grau de licenciado em Matemática.

**Ana Paula Bertoldi Oberziner**

Florianópolis

7 de julho de 2008

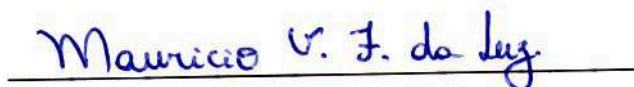
Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 27/CCM/08



**Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez**

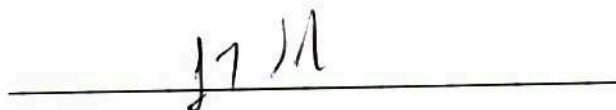
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:



**Prof. Dr. Mauricio Valencia Ferreira da Luz**

Depto de Engenharia Elétrica\ UFSC (orientador)



**Prof. Ms. José Luiz Rosas Pinho**

Depto de Matemática\ UFSC



**Prof. Ms. Nereu Estanislau Burin**

Depto de Matemática\ UFSC

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por todas as bênçãos que me concedeu e por ter me dado saúde e força durante meu período de graduação.

Aos meus pais, Mirian B. B. Oberziner e Gilberto José Oberziner, ao meu irmão André Luiz B. Oberziner e ao meu namorado Henrique C. Monteiro pelo amor, carinho, incentivo e paciência que nunca me faltaram.

A toda minha família, avós, tios, tias e primos por sempre acreditar que daria certo e pela compreensão pelos momentos em que não pude estar presente.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Mauricio Valencia Ferreira da Luz pelas horas de dedicação, incentivo, amizade que muito me ajudaram a seguir nessa caminhada.

Aos professores que contribuíram de alguma forma na minha graduação, em particular o Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva que desde a primeira fase foi construindo conosco o significado da “Matemática” e o Prof. Ms. José Luiz Rosas Pinho, que muito sabiamente me deu grandes lições de vida e de humanidade.

Aos colegas de graduação, em especial a Marina O. Búrigo, pela amizade e companheirismo que foi muito além do curso.

Aos meus pais.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 As Equações de Maxwell</b>	<b>10</b>
1.1 Introdução: um pouco de história .....	10
1.2 As Grandezas Fundamentais do Eletromagnetismo .....	12
1.2.1 O Campo Elétrico $\mathbf{e}$ .....	13
1.2.2 O Campo Magnético $\mathbf{h}$ .....	13
1.2.3 A Indução Magnética $\mathbf{b}$ e a Permeabilidade Magnética $\mu$ .....	13
1.2.4 A Indução Elétrica $\mathbf{d}$ e a Permissividade Elétrica $\epsilon$ .....	14
1.2.5 A Densidade Superficial de Corrente $\mathbf{j}$ .....	15
1.2.6 A Condutividade Elétrica $\sigma$ .....	15
1.3 As Equações de Maxwell sob Forma Local .....	16
1.3.1 Comentário das equações .....	17
1.4 Equações de Maxwell na Forma Integral .....	18
1.5 Relações Constitutivas .....	20
1.6 Condições de Transmissão .....	20
1.6.1 Condição de Transmissão do Fluxo Elétrico .....	22
1.7 Condições Homogêneas .....	24
1.8 Equação de Onda Eletromagnética .....	25
<b>2 Modelos Estáticos Completos</b>	<b>28</b>
2.1 Divisões do Eletromagnetismo .....	28
2.2 Modelos Estáticos Completos .....	30
2.2.1 Modelo Eletrostático .....	30
2.2.2 Modelo Eletrocinético .....	31
2.3 As Formulações em Potenciais .....	32

2.4	As Formulações em Potencial Escalar .....	33
2.4.1	Formulação Eletrostática em Potencial Escalar .....	33
2.4.2	Formulação Eletrocinética em Potencial Escalar .....	36
2.5	As Formulações em Potencial Vetor .....	36
2.5.1	Formulação Eletrocinética em Potencial Vetor .....	36
2.5.2	Formulação Eletrostática em Potencial Vetor .....	38
2.6	Os Espaços Funcionais dos Campos .....	39
2.7	Expressões Integrais .....	40
2.8	Formulações Fracas do Problema Eletrocinético .....	42
2.9	Formulações Fracas do Problema Eletrostático .....	46
<b>3</b>	<b>Método de Elementos Finitos</b> .....	<b>47</b>
3.1	O Método de Galerkin .....	47
3.1.1	Estabelecimento do Problema .....	47
3.1.2	O Triângulo de Primeira Ordem.....	48
3.1.3	Método dos Resíduos Ponderados.....	51
3.1.4	Aplicação do Método de Elementos Finitos para o Problema Eletrocinético e Solução .....	54
3.1.5	Aplicação do Método de Elementos Finitos para o Problema Eletrostático e Solução .....	55
3.1.6	Obtenção da Matriz Global .....	58
3.2	A Axissimetria nos Problemas .....	60
<b>4</b>	<b>Aplicações dos Modelos Eletrocinético e Eletrostático</b> .....	<b>62</b>
4.1	Modelagem de uma Calha Condutora .....	62
4.2	Modelagem de Isolador Elétrico .....	64
	<b>Apêndice A</b> .....	<b>70</b>
	<b>Considerações Finais</b> .....	<b>72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>73</b>

# Introdução

Maxwell dedicou-se a formular matematicamente as teorias sobre eletromagnetismo, conseguindo obter equações simples que permitem descrever fenômenos elétricos e magnéticos. Formou-se, então, a teoria do eletromagnetismo que tem como base as quatro equações de Maxwell.

Com o objetivo de estudar esta teoria, apresentaremos, no decorrer do trabalho, as equações de Maxwell na forma local e integral, as relações constitutivas, a equação de onda elétrica e magnética, que foi uma grande contribuição de Maxwell para a humanidade, os modelos eletrocinético e eletrostático, o método de elementos finitos para a resolução dos modelos citados e por fim a modelagem de uma calha condutora e de um isolador elétrico.

Este trabalho é constituído por quatro capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo analisaremos as grandezas fundamentais do eletromagnetismo, as equações de Maxwell em sua forma local e integral, cada uma com suas vantagens e desvantagens, as relações constitutivas ou leis de comportamento, que exprimem as propriedades dos materiais, as condições de transmissão de um meio para outro, as condições de contorno e uma importante contribuição de Maxwell, a equação de onda elétrica e magnética.

No segundo capítulo apresentaremos os modelos eletrostático e eletrocinético originado do desacoplamento das equações de Maxwell. Para estes modelos, as equações de Maxwell são resolvidas por meio da definição de potenciais escalar e vetor. Teremos as formulações tanto na forma forte quanto na forma fraca.

O terceiro capítulo é dedicado ao método de elementos finitos (MEF). Utilizaremos as formulações fortes e fracas obtidas no segundo capítulo para



estabelecer e conceituar o método. Chegaremos também à solução numérica do problema eletrostático e eletrocinético.

No quarto capítulo apresentaremos aplicações dos modelos eletrostático e eletrocinético. Usaremos uma calha condutora para fazermos a modelagem do problema eletrocinético e um isolador elétrico para o problema eletrostático. No primeiro exemplo, teremos a solução analítica e a solução pelo MEF. No segundo exemplo, somente a solução através do MEF.

Com relação ao apêndice, a intenção é fornecer subsídios para um melhor entendimento do texto, através de definições do cálculo vetorial e alguns teoremas.

# Capítulo 1

## As Equações de Maxwell

Neste capítulo, analisaremos as grandezas fundamentais do eletromagnetismo, discutiremos as Equações de Maxwell em sua forma local e integral, as relações constitutivas, as condições de transmissão e de contorno e uma das contribuições muito importantes das equações de Maxwell.

### 1.1 Introdução: um pouco de história

James Clerk Maxwell foi um físico matemático escocês. Nasceu em 1831 em Edimburgo, na Escócia e faleceu em 1879 em Cambridge, na Inglaterra.

Desde cedo mostrou ter habilidade com matemática. Com apenas quinze anos redigiu um trabalho apresentando um método para traçar curvas ovais. Aos dezenove anos foi estudar matemática na Universidade de Cambridge, mais precisamente no Trinity College. Em 1854 graduou-se entre os melhores alunos do seu ano e logo após apresentou um brilhante artigo à Sociedade Filosófica de Cambridge, com o título “On the Transformation of Surfaces by Bending”. Este foi um dos poucos artigos puramente matemáticos que escreveu [6].

Depois de sua graduação tornou-se professor na Marischal College em Aberdeen (1856) e, pouco depois, no King’s College em Londres (1860).

Neste período realizou desde estudos sobre as cores até a natureza dos anéis de Saturno (1857), onde demonstrou teoricamente que eles deviam ser constituídos por partículas sólidas, pois se fossem formados por líquidos ou gases não teriam estabilidade para se manter em rotação.

Estudou matematicamente o comportamento dos gases e chegou a importantes conclusões como a teoria de que as moléculas se movem em todas as direções e com todas as possíveis velocidades, chocando elasticamente entre si e contra os obstáculos. Mostrou que a maioria delas, porém, se moveria com velocidades intermediárias, ou seja, o melhor indicador do estado de agitação interna de um gás seria a velocidade média de suas moléculas. Isso permitiu concluir que a temperatura de um corpo podia ser interpretada em termos dessa velocidade média molecular [7]. O cálculo da velocidade média só foi possível fazendo uso de funções estatísticas, idéia de Maxwell que foi uma grande novidade na época. A partir disso, também foi possível calcular outras propriedades como pressão, coeficiente de viscosidade, entre outros.

Para completar o trabalho do Maxwell, o físico Ludwig Boltzmann publicou a conhecida distribuição Maxwell-Boltzmann, que explica a condução de calor em gases.

Aos 30 anos, Maxwell tornou-se o primeiro professor da cadeira de Física Experimental em Cambridge [7].

A partir de 1864 dedicou-se a formular matematicamente as teorias de Faraday sobre o eletromagnetismo, conseguindo obter equações simples que permitiam descrever tanto os fenômenos elétricos quanto os magnéticos. São quatro equações diferenciais parciais que foram reveladas pela primeira vez em 1873, tendo sido conhecidas desde então como as “equações de Maxwell”. Ficou assim demonstrado que a eletricidade e o magnetismo fazem parte de uma mesma teoria.

Maxwell percebeu que a oscilação de uma carga elétrica produz um campo magnético e ao tentar calcular a velocidade de propagação desse campo, obteve o valor aproximado de  $300\,000\,000\text{ m/s}$ , que é a velocidade da luz já calculada experimentalmente por Fizeau e Foucault.

Assim, afirmou que a luz nada mais era do que uma radiação eletromagnética, mais ainda, que se as cargas elétricas podiam oscilar com

qualquer velocidade, poderiam dar origem a radiações de todos os comprimentos de onda, sendo a luz apenas uma variedade específica dessas variações [7].

É interessante ressaltar que todas as conclusões acima foram baseadas em cálculos teóricos, ou seja, não houve nenhum experimento prático que as confirmassem.

Na época, conheciam somente a luz visível, radiações infravermelhas e ultravioletas, mas Maxwell previu que existiam outras de comprimento de onda diferentes, sendo a luz apenas uma variedade específica dessas radiações [7]. Vinte anos depois, estas foram detectadas experimentalmente pelo físico alemão Heinrich Hertz, que construiu aparelhos detectores e emissores de ondas de rádio.

Em Cambridge, Maxwell publicou os trabalhos experimentais desconhecidos de Henry Cavendish sobre eletricidade, onde também foi criado o Laboratório Cavendish. Após estabelecer o laboratório como centro de excelência científica, Maxwell morre prematuramente.

## 1.2 As Grandezas Fundamentais do Eletromagnetismo

As equações de Maxwell formam um conjunto de quatro equações diferenciais lineares sobre o tempo e o espaço, aplicadas às grandezas ditas “eletromagnéticas”. Estas equações são, na verdade, postulados, pois até hoje elas nunca foram provadas, ou seja, não há garantia de que as equações de Maxwell sejam exatas. Todavia, até hoje as precisas medições experimentais nunca as contradisseram.

As grandezas fundamentais do eletromagnetismo são [1]:

- O campo elétrico **e**;
- O campo magnético **h**;
- A indução magnética **b**;
- A indução elétrica **d**;
- A densidade superficial de corrente **j**;
- A densidade volumétrica de carga  $\rho$ ;

- A permeabilidade magnética  $\mu$ ;
- A permissividade elétrica  $\epsilon$ ;
- A condutividade elétrica  $\sigma$ ;

Agora faremos uma breve explicação do significado de cada uma das grandezas citadas.

### 1.2.1 O Campo Elétrico $\mathbf{e}$

Uma carga ou um conjunto de cargas  $q$ , sem movimento no espaço tem a propriedade de criar, no volume que a envolve, uma grandeza chamada campo elétrico  $\mathbf{e}$ .

O campo elétrico  $\mathbf{e}$  (V/m, Volts por metro) é uma grandeza vetorial e tem o caráter de um campo de vetores [1].

### 1.2.2 O Campo Magnético $\mathbf{h}$

Suponhamos uma carga, ou um conjunto de cargas possua uma velocidade de deslocamento. Neste caso, haverá a formação do campo magnético  $\mathbf{h}$  (A/m, Ampères por metro).

Um conjunto de cargas em deslocamento nos conduz à noção de corrente elétrica e esta última cria então o campo de vetores  $\mathbf{h}$ .

### 1.2.3 A Indução Magnética $\mathbf{b}$ e a Permeabilidade Magnética $\mu$

Chama-se indução magnética  $\mathbf{b}$ (T, Tesla) ou densidade de fluxo magnético em um ponto ao produto da permeabilidade magnética  $\mu$  (H/m, Henry por metro) do meio pelo campo magnético  $\mathbf{h}$  nesse ponto. Ou seja,

$$\mathbf{b} = \mu\mathbf{h} \quad (1.2)$$

Podemos observar que quanto maior a permeabilidade do meio, maior sua indução e maior o fluxo que poderá passar em uma determinada superfície  $S$ . Em outras palavras,  $\mathbf{b}$  é chamado “indução”, pois esta grandeza expressa a capacidade de induzir fluxo em um dado meio. Geralmente uma alta indução está associada à alta permeabilidade  $\mu$ . Utilizando o sentido literal das expressões “indução” e “permeabilidade”, podemos dizer que se um meio “induz” mais fluxo é porque ele o “permite” mais [1].

Sendo  $\mathbf{b}$  um vetor, podemos calcular seu fluxo  $\phi$  através de uma superfície  $S$ .

$$\phi = \int_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1)$$

Este fluxo  $\phi$  é chamado de fluxo magnético.

#### 1.2.4 A Indução Elétrica $\mathbf{d}$ e a Permissividade Elétrica $\epsilon$

Chama-se indução elétrica  $\mathbf{d}$  (C/m<sup>2</sup>, Coulomb por metro quadrado) ou densidade de fluxo elétrico em um ponto ao produto da permissividade elétrica  $\epsilon$  (F/m, Farad por metro) do meio pelo campo elétrico  $\mathbf{e}$  nesse ponto. Ou seja,

$$\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e} \quad (1.4)$$

Observa-se novamente que quanto maior a permissividade do meio, maior a indução elétrica e maior o fluxo que passa através da superfície.

Da mesma forma que foi feito para as grandezas  $\mathbf{b}$  e  $\mu$ , podemos observar que  $\mathbf{d}$  é um vetor e assim calcular o fluxo  $\psi$  através de uma superfície  $S$ .

$$\psi = \int_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.3)$$

### 1.2.5 A Densidade Superficial de Corrente $\mathbf{j}$

A densidade superficial média de corrente  $\mathbf{j}$  (A/m<sup>2</sup>, Ampère por metro quadrado) através de uma superfície  $S$  é definida por:

$$j = \frac{i}{S}$$

Definindo um vetor  $\mathbf{j} = j\mathbf{u}$ , sendo  $\mathbf{u}$  um vetor unitário perpendicular à secção  $S$ , o fluxo de  $\mathbf{j}$  por  $S$  nos fornece a corrente elétrica  $i$ :

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5)$$

### 1.2.6 A Condutividade Elétrica $\sigma$

Em geral, nos problemas de campos elétricos podemos ter meios dielétricos (ou isolantes) e meios condutores. Os isolantes são caracterizados pela permissividade elétrica  $\epsilon$  e por sua rigidez dielétrica. Os meios condutores são caracterizados por sua condutividade elétrica  $\sigma$ , que expressa a capacidade do meio conduzir mais ou menos corrente elétrica [1]. Podemos observar este fato na relação abaixo, conhecida como Lei de Ohm sob forma local.

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (1.6)$$

### 1.3 As Equações de Maxwell sob Forma Local

As quatro equações de Maxwell são as seguintes [1]:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{div } \mathbf{d} = \rho \quad (1.10)$$

As equações (1.7), (1.8), (1.9) e (1.10) são, respectivamente, a *Lei generalizada de Ampère*, *Lei de Faraday*, *Lei de Gauss Magnética* e a *Lei de Gauss Elétrica*. Os quatro vetores  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{d}$  juntos formam a representação matemática do mesmo fenômeno físico: o campo eletromagnético.

Das equações acima, podemos deduzir outra equação aplicando o divergente na equação (1.7) [1]:

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{h}) = \text{div} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right)$$

Como  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{h}) = 0$ , obtemos:

$$0 = \text{div } \mathbf{j} + \text{div} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$$

Utilizando a equação (1.10), obtemos a chamada *equação da continuidade elétrica* [1]:



$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.11)$$

### 1.3.1 Comentário das equações

O desenvolvimento das equações de Maxwell como generalizações das relações do circuito, envolve tanto um raciocínio indutivo como físico. Como já havíamos comentado, as equações de Maxwell justificam-se pelo fato de serem conclusões baseadas em experimentação. As equações (1.7) e (1.8) significam que os campos magnéticos e elétricos variando com o tempo são capazes de gerar um ao outro, ou seja, um campo magnético variável é capaz de gerar um campo elétrico e vice-versa. Este fenômeno é chamado de acoplamento eletromagnético. No caso da equação (1.7), o termo  $\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$  que gera o campo magnético é chamado de *densidade de deslocamento de corrente*. Este termo é o centro da teoria das radiações das ondas eletromagnéticas.

A conclusão disto é que o campo eletromagnético variando no tempo propaga a energia através do espaço vazio com a velocidade da luz e ainda que a luz é de natureza eletromagnética. As ondas de rádio eram desconhecidas na época e isto foi quinze anos antes de Hertz demonstrar que as ondas eletromagnéticas (ou de rádio) eram possíveis, como foi predito por Maxwell [2].

Na equação (1.9), o fato do divergente ser igual a zero significa que o fluxo magnético é conservativo. Pode-se entender então que o fluxo magnético que entra em um volume é idêntico ao que sai do mesmo.

Já na equação (1.10), o fluxo elétrico não é conservativo. Teremos, então, uma variação do fluxo que entra e sai de um volume que é gerada por uma fonte que no caso é  $\rho$ .

Agora iremos escrever as equações de Maxwell na forma integral.

## 1.4 Equações de Maxwell na Forma Integral

As equações de Maxwell na forma local são mais convenientes para fazermos operações matemáticas, pois elas envolvem operações com gradiente, divergentes e rotacionais que estão bem definidas no cálculo vetorial. Já quando desejamos calcular o campo elétrico  $\mathbf{e}$  criado pela indução magnética  $\mathbf{b}$ , fica mais conveniente utilizarmos a forma integral da equação de Maxwell.

Veremos agora as equações de Maxwell na forma integral.

Vamos utilizar a equação (1.7) e definir uma superfície  $S$  onde queremos estudar as correntes e os campos magnéticos. Chamemos  $L$  a borda desta superfície. Integrando a equação (1.7) na superfície, obtemos:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.12)$$

Utilizando o teorema de Stokes no lado esquerdo da equação (1.12), temos:

$$\oint_L \mathbf{h} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.13)$$

Esta relação é chamada a forma integral da *equação de Maxwell obtida da lei generalizada de Ampère*.

Para a equação (1.8), vamos aplicar novamente a integral numa superfície  $S$  onde o campo elétrico  $\mathbf{e}$  e a indução magnética  $\mathbf{b}$  estejam definidos. Obtemos então a equação:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{e} \cdot d\mathbf{S} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.14)$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\oint_L \mathbf{e} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.15)$$

onde  $L$  é a linha que envolve esta superfície.

A equação (1.15) é chamada a forma integral da *equação de Maxwell obtida da lei de Faraday*.

Para obtermos equação (1.9) na forma integral, vamos aplicar o teorema do divergente que associa a integral do volume  $V$  e da superfície  $S$  que envolve este volume, onde a indução magnética  $\mathbf{b}$  está bem definida. Assim obtemos a equação:

$$\int_V \text{div } \mathbf{b} \, dV = \oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.16)$$

Ou seja,

$$\oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.17)$$

A equação (1.17) é chamada a forma integral da *equação do campo magnético de Maxwell obtida da lei de Gauss*.

Enfim, para a equação (1.10), faremos a integração no volume  $V$  onde a indução elétrica  $\mathbf{d}$  e a densidade volumétrica de carga  $\rho$  estão bem definidas, obtendo:

$$\int_V \text{div } \mathbf{d} \, dV = \int_V \rho \, dV \quad (1.18)$$

Aplicando novamente o teorema do divergente no volume  $V$  e na superfície  $S$  que envolve este volume obtemos a seguinte equação:

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (1.19)$$

A equação (1.19) é chamada a forma integral da *equação do campo elétrico de Maxwell obtida da lei de Gauss*.

## 1.5 Relações Constitutivas

Um segundo conjunto de equações é necessário para completar a informação contida no sistema construído pelas equações (1.7) à (1.10): as *relações constitutivas*. Essas relações, também conhecidas como leis de comportamento, exprimem as propriedades dos materiais [3]. Se  $\mu$  representa a permeabilidade magnética,  $\varepsilon$  a permissividade elétrica e  $\sigma$  a condutividade elétrica, as leis de comportamento se enunciam como segue:

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (1.22)$$

A equação (1.22) é também conhecida como lei Ohm.

## 1.6 Condições de Transmissão

As equações de Maxwell supõem que as propriedades (caracterizadas por  $\mu$ ,  $\varepsilon$  e  $\sigma$ ) do meio material são consideradas variando de forma contínua nesse

meio. Na prática, entretanto, é freqüente ocorrer o estudo dos fenômenos eletromagnéticos se produzindo em vários meios contínuos. Nesse caso,  $\mu$ ,  $\varepsilon$  e  $\sigma$  são descontínuos sobre a fronteira  $\Sigma$  separando dois meios diferentes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , conforme a figura 1.

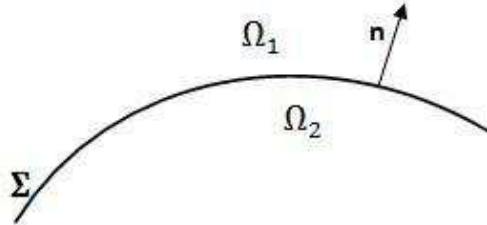


Figura 1 – Interface entre os meios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$

Por consequência da passagem do meio  $\Omega_1$  ao meio  $\Omega_2$ , os campos eletromagnéticos sofrem descontinuidades. As quatro condições de transmissão ou condições de passagem, deduzidas das equações de Maxwell se escrevem [3]:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1)|_{\Sigma} = \mathbf{j}_l \quad (1.23)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)|_{\Sigma} = 0 \quad (1.24)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)|_{\Sigma} = 0 \quad (1.25)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1)|_{\Sigma} = \rho_s \quad (1.26)$$

onde  $\mathbf{j}_l$  e  $\rho_s$  representam, respectivamente, a densidade linear de corrente e densidade superficial de carga concentradas sobre a superfície  $\Sigma$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal a  $\Sigma$ .

As relações (1.24) e (1.25) acarretam que a componente tangencial do campo elétrico  $\mathbf{e}$  e a componente normal da indução magnética  $\mathbf{b}$  são contínuas através da superfície  $\Sigma$ . Todavia, se  $\mathbf{j}_l$  e  $\rho_s$  são diferentes de zero, as relações (1.23) e (1.26) acarretam as descontinuidades da componente tangencial do campo

magnético  $\mathbf{h}$  e da componente normal da indução elétrica  $\mathbf{d}$ . As componentes que não figuram nas equações (1.23) a (1.26) são descontínuas. Em geral, considera-se o caso onde  $\mathbf{j}_1$  e  $\rho_s$  são nulos, isto é, que a condutividade e a frequência de excitação não são infinitas. Neste caso, a componente tangencial de  $\mathbf{h}$  e a componente normal de  $\mathbf{d}$  são contínuas na interface [3].

### 1.6.1 Condição de Transmissão do Fluxo Elétrico

Veremos agora como encontrar, por exemplo, a condição (1.26), que é a condição de passagem da densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{d}$  por uma fronteira  $\Sigma$  que separa os meios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , com características  $\sigma_1, \mu_1$  e  $\varepsilon_1$  para o meio  $\Omega_1$  e  $\sigma_2, \mu_2$  e  $\varepsilon_2$  para o meio  $\Omega_2$ .

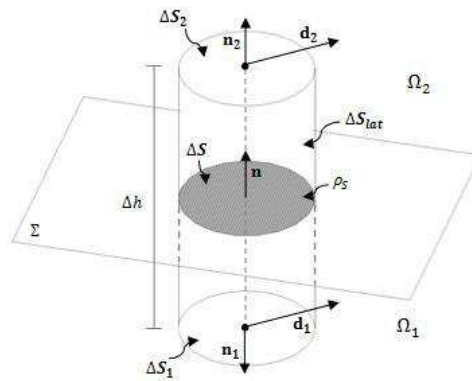


Figura 2 – Condição de transmissão de  $\mathbf{d}$  por uma fronteira  $\Sigma$  que separa os meios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$

Na figura 2, percebemos que o vetor normal à superfície de fronteira  $\Sigma$  está apontando do meio  $\Omega_1$  para o meio  $\Omega_2$ . Aplicando a equação (1.19), que é a equação de Maxwell na forma integral obtida da lei de Gauss, ao elemento cilíndrico da figura 2, obtemos:

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S_2} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta S_{lat}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (1.27)$$

No limite, quando  $\Delta h \rightarrow 0$  e onde  $\bar{d}$  é a densidade média na superfície lateral, temos:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{S}_2 + \bar{d} \cdot \Delta \mathbf{S}_{lat}) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \rho \Delta S \Delta h \quad (1.28)$$

Desta forma, a terceira integral e o lado direito da equação anulam-se. Observando que  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_2$ , sendo  $\mathbf{n}_1$  o vetor normal à superfície  $\Delta \mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  o vetor normal à superfície  $\Delta \mathbf{S}_2$  e  $\mathbf{n}$  o vetor normal à fronteira entre os meios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , obtém-se:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) = 0 \quad (1.29)$$

Observa-se que as componentes normais da densidade de fluxo elétrico são contínuas ao longo da interface de separação dos dois meios, mesmo havendo uma distribuição *volumétrica* de carga ( $\rho$ ).

Se houver uma distribuição superficial de carga, a equação (1.28) pode ser reescrita como:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{S}_2 + \bar{d} \cdot \Delta \mathbf{S}_{lat}) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \rho_S \Delta h \quad (1.30)$$

e obtemos a equação (1.26):

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) = \rho_S$$

Nesta equação percebemos que se há uma distribuição *superficial* de carga sobre a interface de separação entre os dois meios, ocorre uma descontinuidade por uma quantidade de  $\rho_S$  das componentes normais da densidade de fluxo elétrico.

## 1.7 Condições Homogêneas

Condições de fronteiras ou de contorno adequadas devem ser dadas sobre a fronteira do domínio de estudo  $\Omega$  de forma a assegurar a unicidade das soluções [3]. Elas podem ser, segundo o problema considerado, relativas às componentes tangenciais de campo elétrico  $\mathbf{e}$  e do campo magnético  $\mathbf{h}$  e às componentes normais da indução elétrica  $\mathbf{d}$ , da densidade de corrente  $\mathbf{j}$  e da indução magnética  $\mathbf{b}$ .

Na fronteira  $\Gamma$  do domínio global  $\Omega$ , considera-se certas condições de contorno freqüentemente encontradas, que são as condições homogêneas.

Para as grandezas elétricas, sobre as porções complementares da superfícies  $\Gamma_e$  e  $\Gamma_d$  (ou  $\Gamma_j$ ) de  $\Gamma$ , eventualmente não conexa, são definidas as condições [3]:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_e} = 0 \quad (1.31)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|_{\Gamma_d} = 0 \quad (1.32)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = 0. \quad (1.33)$$

Para as grandezas magnéticas, sobre as porções complementares das superfícies  $\Gamma_h$  e  $\Gamma_b$  de  $\Gamma$ , eventualmente não conexa, são definidas as condições [3]:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (1.34)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_b} = 0 \quad (1.35)$$

As condições homogêneas de contorno sobre os campos ocorrem por:



- i. Razões de simetria: fixando as direções dos campos;
- ii. Razões físicas: condições no infinito ou associadas aos materiais idealizados como, por exemplo, a equação (1.31) para os materiais condutores perfeitos (condutividade infinita) e a equação (1.34) para os materiais magnéticos perfeitos (permeabilidade infinita).

## 1.8 Equação de Onda Eletromagnética

Uma das contribuições mais importantes das equações de Maxwell são as equações da propagação das ondas eletromagnéticas num meio linear.

Sabemos que no vácuo não há matéria, portanto a densidade superficial de corrente  $\mathbf{j}$  e a densidade volumétrica de carga  $\rho$  são nulas.

Usando as relações constitutivas  $\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e}$  e  $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ , e sabendo que neste caso  $\epsilon = \epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$  podemos reescrever as equações de Maxwell da seguinte forma [1]:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \quad (1.36)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad (1.37)$$

$$\text{div } \mathbf{h} = 0 \quad (1.38)$$

$$\text{div } \mathbf{e} = 0 \quad (1.39)$$

A equação de onda para o campo magnético é deduzida tomando o rotacional da equação (1.36):

$$\text{rot} (\text{rot } \mathbf{h}) = \text{rot} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right) \quad (1.40)$$

Sabendo que:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{h}) = -\text{div}(\text{grad } \mathbf{h}) + \text{grad}(\text{div } \mathbf{h})$$

e que  $\text{div}(\text{grad } \mathbf{h}) = \nabla^2 \mathbf{h}$  é o operador Laplaciano aplicado em  $\mathbf{h}$ , temos:

$$-\nabla^2 \mathbf{h} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{h}) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{e}) \quad (1.41)$$

Substituindo as equações (1.37) e (1.38) na equação (1.41), temos:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.42)$$

A equação (1.42) é a *equação de onda* eletromagnética deduzida em função do campo magnético.

Sendo a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas, ou seja, a velocidade da luz dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (1.43)$$

Podemos reescrever a equação de onda da seguinte forma:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.44)$$

De forma análoga, calculando o rotacional da equação (1.37) e usando as equações (1.36) e (1.39), podemos encontrar a equação de onda em função do campo elétrico, que fica [5]:

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.45)$$

O que podemos concluir pelas equações (1.44) e (1.45) é que o campo elétrico e magnético podem se propagar como ondas no espaço. Os campos são os componentes da onda. A razão para a sua propagação mesmo no vácuo é relacionada com o fenômeno da indução no eletromagnetismo. Um campo elétrico variando com o tempo induz um campo magnético variando com o tempo e esse último ao variar induz um campo elétrico variando com o tempo e assim sucessivamente.

## Capítulo 2

### Modelos Estáticos Completos

Neste capítulo apresentaremos os modelos eletrostático e eletrocinético originado do desacoplamento das equações de Maxwell. As equações de Maxwell para estes modelos são resolvidas por meio da definição de potenciais escalar e vetor. Durante o texto apresentaremos as formulações matemáticas tanto na forma forte quanto na forma fraca.

#### 2.1 Divisões do Eletromagnetismo

O eletromagnetismo é dividido em duas partes: *eletromagnetismo em altas frequências e eletromagnetismo em baixas frequências*.

O eletromagnetismo em altas frequências corresponde exatamente às equações de Maxwell (1.7 – 1.10) apresentadas no capítulo 1.

Já o eletromagnetismo em baixas frequências ocorre quando a densidade de corrente  $\mathbf{j}$  é muito maior do que a densidade de corrente de deslocamento  $\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$ . Assim as equações de Maxwell simplificam-se da seguinte forma [3]:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \rho \quad (2.4)$$

Matematicamente, a aproximação que consiste em desprezar as correntes de deslocamento, substituem um problema hiperbólico de segunda ordem, caracterizando propagação, por um elíptico ou parabólico, por exemplo, que caracterizam fenômenos de uma natureza próxima dos fenômenos de difusão.

Podemos encontrar aplicações onde o campo elétrico  $\mathbf{e}$  é fraco (ou confinado em estruturas de dimensões pequenas) e para este caso, a corrente de deslocamento se torna fraca quando comparada à corrente de condução. Dizemos, então, que as frequências dos fenômenos estudados estão nos limites razoáveis, de tal forma que as dimensões do domínio de estudo sejam desprezíveis em relação ao comprimento de onda correspondente. Por exemplo, seja a equação de comprimento de onda dada por:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (2.5)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e  $f$  a frequência. No caso onde a frequência é  $50\text{Hz}$ , o comprimento de onda é  $6 \times 10^{-6}\text{m}$ , ou seja, largamente superior às dimensões dos aparelhos estudados [3].

O eletromagnetismo em baixas frequências ainda é subdividido em duas partes: a *estática*, onde não há variação temporal, e a *quase-estática* ou *magnetodinâmica*.

A estática é dividida em três partes: a *magnetostática*, a *eletrostática* e a *eletrocinética*, das quais a eletrostática e eletrocinética são as que iremos abordar neste capítulo.

Na *eletrostática*, temos as equações [3]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \rho \quad (2.7)$$

Acompanhado pela equação constitutiva:

$$\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e} \quad (2.8)$$

E na *eletrocinética* as equações ficam [3]:

$$\text{rot } \mathbf{e} = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (2.10)$$

Acompanhado pela equação constitutiva:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (2.11)$$

Percebe-se, então, que quando os fenômenos estudados são invariantes no tempo, as derivadas temporais se anulam nas equações de Maxwell e não temos mais o fenômeno de que um campo gera outro, ou seja, aparece um desacoplamento entre os fenômenos elétricos e magnéticos.

## 2.2 Modelos Estáticos Completos

Analisaremos os modelos eletrostáticos e eletrocinéticos completos, os quais envolvem equações diferenciais, condições de contorno e condições de passagem de um meio a outro.

### 2.2.1 Modelo Eletrostático

A eletrostática consiste no estudo da distribuição espacial do campo elétrico  $\mathbf{e}$  devido a uma distribuição de cargas elétricas.

Feita a aproximação, o modelo eletrostático aplicado ao domínio de estudo  $\Omega$  e de fronteira  $\Gamma$  é caracterizado pelas equações diferenciais representadas nas

equações (2.12) e (2.13), pela lei de comportamento representada pela equação (2.14) e pelas condições de contorno representadas pelas equações (2.15) e (2.16) [3]:

$$\text{rot } \mathbf{e} = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{div } \mathbf{d} = \rho \quad (2.13)$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_e} = 0 \quad (2.15)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|_{\Gamma_d} = 0 \quad (2.16)$$

com  $\Gamma = \Gamma_j \cup \Gamma_e$ .

As restrições globais definidas são relativas à carga elétrica total  $q$  dada pela equação (2.17) e à diferença de potencial  $v$  dada pela equação (2.18).

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \, ds = q_i \quad (2.17)$$

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = v_i \quad (2.18)$$

Podemos ainda definir uma capacitância quando relacionamos a carga e o potencial elétrico da seguinte forma:

$$C = \frac{q_i}{v_i} \quad (2.19)$$

### 2.2.2 Modelo Eletrocinético

A eletrocinética consiste no estudo da distribuição espacial da densidade de corrente  $\mathbf{j}$  nos materiais condutores.

O modelo eletrocinético aplicado ao domínio de estudo  $\Omega$  e de fronteira  $\Gamma$  é caracterizado pelas equações diferenciais representadas nas equações (2.20) e (2.21), pela lei de comportamento representada pela equação (2.22) e pelas condições de contorno representadas pelas equações (2.23) e (2.24) [3]:

$$\text{rot } \mathbf{e} = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_e} = 0 \quad (2.23)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2.24)$$

com  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_e$ .

As restrições globais definidas são relativas à corrente elétrica  $i$  dada pela equação (2.25) e pela diferença de potencial  $v$  já vista na equação (2.18).

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} dS = i_i \quad (2.25)$$

A relação entre a corrente elétrica e o potencial elétrico define o inverso de uma resistência  $R$ :

$$\frac{i_i}{v_i} = \frac{1}{R} \quad (2.26)$$

### 2.3 As Formulações em Potenciais

Qualquer que seja o problema formulado, seja eletrostática, eletrocinética ou magnetostática, procura-se dois campos vetoriais definidos por uma



divergência, um rotacional e as condições de contorno. Além disso, esses campos de vetores são ligados por uma lei de comportamento.

A solução do problema formulado, ou seja, da equação diferencial com a condição de contorno associada, deve pertencer a um campo de vetores que chamamos de *campo admissível* [3]. Este campo contém as possíveis soluções da equação diferencial e também a solução particular para nosso problema.

No nosso caso, é possível verificar que a introdução da noção de potencial vetor ou escalar equivale a propor, sob certas condições, um campo admissível. Isto é, tanto mais verdadeiro se o domínio é simplesmente conexo com fronteira conexa. Em efeito, a partir da teoria dos espaços funcionais, mostra-se então que o espaço imagem do gradiente é igual ao núcleo do rotacional. Da mesma maneira, o espaço imagem do rotacional é igual ao núcleo da divergência [3].

Em seguida, veremos a *formulação forte* em potencial escalar e em potencial vetor dos modelos eletrostático e eletrocinético.

## 2.4 As Formulações em Potencial Escalar

### 2.4.1 Formulação Eletrostática em Potencial Escalar

Considere o problema eletrostático definido anteriormente. A partir da equação (2.12), pode-se introduzir um potencial escalar elétrico  $v$  tal que:

$$\mathbf{e} = -\text{grad } v \quad (2.27)$$

Este fato se deve, pois a definição do potencial é dada por:

$$v = - \int \mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.28)$$

Sendo assim, temos que:

$$dv = -\mathbf{e} \cdot d\mathbf{l} = -e_x dx - e_y dy - e_z dz \quad (2.29)$$

Mas,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (2.30)$$

Comparando as equações (2.29) e (2.30), obtemos:

$$e_x = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad e_y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = -\frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.31)$$

Portanto, obtemos exatamente a equação (2.27). O sinal negativo mostra que a direção do campo elétrico é oposta à direção em que o potencial  $v$  cresce.

Como o rotacional do gradiente de uma função escalar é sempre zero ( $\text{rot grad } v = 0$ ), a equação (2.12) implica que  $\mathbf{e}$  deve ser o gradiente de uma função escalar. Então, a equação (2.27) também pode ser obtida da equação (2.12). É importante ressaltar que o estado físico desta equação foi observado muitos anos antes e somente com o avanço do cálculo vetorial que foi possível escrever o fenômeno desta forma.

Note que o campo elétrico assim definido representa, pela equação (2.12), um campo admissível. Na relação acima, o potencial  $v$  não é único. Em efeito, considerando os potenciais  $v_1$  e  $v_2$  definidos tal que  $v_1 = v_2 + k$ , onde  $k$  é uma constante, eles conduzem ao mesmo valor de campo elétrico  $\mathbf{e}$  [3]. Para haver unicidade de solução, é necessário impor uma restrição ou uma condição de calibre sobre  $v$ . Na prática, a unicidade da solução é geralmente obtida com a ajuda das soluções de contorno.

Substituindo a equação (2.27) em (2.14) e em (2.13), temos [3]:

$$\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} v) = -\rho \quad (2.32)$$

Ou, em outra notação para o caso de duas dimensões,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho \quad (2.33)$$

A equação (2.32) deve ser resolvida em todo domínio levando em conta as condições de contorno. A condição (2.15), para o campo elétrico, se escreve para a formulação em potencial escalar [3]:

$$v|_{\Gamma_e} = v_0 \quad (2.34)$$

Sendo  $v_0$  uma constante.

Além do mais, essa condição pode ser diretamente religada à relação (2.18) que impõe a circulação do campo elétrico sobre um contorno. Supondo que esse contorno liga duas fronteiras denotadas  $\Gamma_A$  e  $\Gamma_B$ , como deve-se impor uma diferença de potencial, é possível escolher arbitrariamente  $v = 0$  sobre a fronteira  $\Gamma_A$  do domínio e  $v = v_i$  sobre a fronteira  $\Gamma_B$ .

Para a densidade de campo elétrico, como  $\mathbf{d} = -\varepsilon \operatorname{grad} v$ , a relação (2.16) se enuncia sob a forma [3]:

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} v|_{\Gamma_d} = 0 \quad (2.35)$$

Dizemos que as equações (2.32), (2.34) e (2.35) juntas formam a *formulação eletrostática forte em potencial escalar*.

## 2.4.2 Formulação Eletrocinética em Potencial Escalar

No caso da eletrocinética, a formulação do problema em potencial escalar se obtém utilizando o mesmo procedimento usado para a eletrostática.

Substituindo a equação (2.27) em (2.2.2) e em (2.21), obtemos [3]:

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} v) = 0 \quad (2.36)$$

Ou, em outra notação para o caso de duas dimensões,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.37)$$

Para essa formulação, as condições de contorno sobre  $\Gamma_e$  se enunciam como no caso da eletrostática e permitem impor uma diferença de potencial. Da mesma forma que foi feito para a densidade de campo elétrico, a condição de contorno sobre a densidade de corrente (2.24) se escreve [3]:

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} v|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2.38)$$

Portanto, a *formulação eletrocinética forte em potencial escalar* é constituída pelas equações (2.36), (2.34) e (2.38).

## 2.5 As Formulações em Potencial Vetor

### 2.5.1 Formulação Eletrostática em Potencial Vetor

Para resolver as equações da eletrostática, pode-se introduzir a noção de campo fonte. Defini-se  $\mathbf{d}_s$  uma densidade de campo elétrico fonte que verifique

$div \mathbf{d}_s = \rho$  com as condições de contorno associadas. O campo  $\mathbf{d}_s$  pode ser obtido numericamente ou analiticamente, resolvendo a lei de Gauss.

Considerando o termo fonte conhecido, tomemos a densidade de campo elétrico como na equação abaixo [3]:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_s + rot \mathbf{p} \quad (2.39)$$

Na equação (2.39),  $\mathbf{p}$  representa o potencial vetor eletrostático ao qual se deve associar, além das condições de contorno, uma condição de calibre que pode ser o calibre de Coulomb,  $div \mathbf{p} = 0$  [3, 4].

Quando escolhermos a densidade de campo elétrico da forma acima, podemos observar que, matematicamente, ela realmente soluciona a equação (2.13), pois quando substituimos (2.39), obtemos:

$$div(\mathbf{d}_s + rot \mathbf{p}) = \rho \quad (2.40)$$

Mas  $div \mathbf{d}_s = \rho$  e  $div(rot \mathbf{p}) = 0$ , satisfazendo a equação (2.13).

Finalmente, para chegarmos à formulação eletrostática forte em potencial vetor, devemos substituir a equação (2.14) em (2.12), obtendo:

$$rot \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{d} = 0 \quad (2.41)$$

E então substituir a equação (2.39) em (2.41):

$$rot \left[ \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{d}_s + rot \mathbf{p}) \right] = 0 \quad (2.42)$$

As condições de contorno tomam a seguinte forma [3]:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{d}_s + \text{rot } \mathbf{p})|_{\Gamma_e} = 0 \quad (2.43)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{p}|_{\Gamma_d} = 0 \quad (2.44)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_s|_{\Gamma_d} = 0 \quad (2.45)$$

Dizemos que a equação (2.42) e as condições de contorno (2.43), (2.44) e (2.45) formam a *formulação eletrostática forte em potencial vetor*.

## 2.5.2 Formulação Eletrocinética em Potencial Vetor

Para a eletrocinética, a formulação em potencial vetor se obtém definindo um potencial vetor elétrico  $\mathbf{t}$  e o relacionando com a densidade de corrente  $\mathbf{j}$  através de:

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{t} \quad (2.46)$$

Substituindo a equação (2.22) em (2.20) e depois a equação (2.46), obtemos:

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{t} \right) = 0 \quad (2.47)$$

Para haver unicidade de solução, além das condições de contorno, é necessário impor uma condição de calibre para o potencial vetor. Para esta formulação, as novas condições de contorno se enunciam da seguinte forma [3]:

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{t}|_{\Gamma_e} = 0 \quad (2.48)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{t}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2.49)$$

Portanto, a *formulação eletrocinética forte em potencial vetor* é constituída pela equação (2.47) e suas condições de contorno (2.48) e (2.49).

## 2.6 Os Espaços Funcionais dos Campos

De forma geral, resolvem-se, em um domínio  $\Omega$ , as equações diferenciais fazendo intervir os operadores diferenciais particulares: gradiente, divergente e rotacional. Tais equações regem a distribuição espacial dos campos vetoriais (campo magnético, campo elétrico, etc.) ou escalares.

O domínio  $\Omega$  é um conjunto aberto e limitado do espaço euclidiano refinado, em geral em três dimensões, cujos elementos são chamados de pontos. Esse conjunto pode ser conexo, isto é, sem interrupções, ou não conexo. Sua fronteira  $\partial\Omega$  é denotada por  $\Gamma$ .

Define-se uma estrutura matemática apta a hospedar esse tipo de equações. Trata-se principalmente dos operadores e de seus domínios de definição. Estes últimos são os espaços funcionais dos campos escalares e vetoriais definidos sobre  $\Omega$  que será preciso caracterizar de forma precisa, de modo que eles acolham os campos considerados.

Considera-se uma estrutura formada de quatro espaços funcionais e de três operadores diferenciais. Os quatro espaços são subconjuntos de  $L^2(\Omega)$  e  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , que são, respectivamente, o espaço dos campos escalares de quadrado integrável sobre  $\Omega$  e o espaço dos campos de vetores cujos quadrados da norma euclidiana são integráveis em  $\Omega$ . Eles são denotados como  $E^p$ , onde  $p = 0, 1, 2, 3$ . Os três operadores são o gradiente (*grad*), divergente (*div*) e rotacional (*rot*). Seus domínios de definição são definidos de forma restrita, no sentido que eles são os subespaços de  $L^2(\Omega)$  e  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , para os quais as condições de contorno dadas devem ser satisfeitas [3].

Os operadores dependem, então, de uma parte da fronteira  $\Gamma$  dada por  $\Gamma_u$  do domínio  $\Omega$ . Sendo  $c$  uma constante, os domínios desses três operadores, *grad*, *div* e *rot* são respectivamente [3]:

$$E_u^0(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega); \text{grad } u \in \mathbf{L}^2(\Omega), u|_{\Gamma_u} = c \} \quad (2.50)$$

$$E_u^1(\Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = 0 \} \quad (2.51)$$

$$E_u^2(\Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = 0 \} \quad (2.52)$$

Os domínios dos operadores foram construídos de forma a satisfazerem as relações [3]:

$$\text{grad } E_u^0 \subset E_u^1 \quad \text{e} \quad \text{rot } E_u^1 \subset E_u^2$$

Isto é,  $\text{cod}(\text{grad}) \subset \text{dom}(\text{rot})$  e  $\text{cod}(\text{rot}) \subset \text{dom}(\text{div})$ , tendo  $E_u^3 = \text{cod}(\text{div})$ .

Assim, os operadores podem ligar-se entre si de forma a formarem a seqüência [3]:

$$E_u^0 \xrightarrow{\text{grad}} E_u^1 \xrightarrow{\text{rot}} E_u^2 \xrightarrow{\text{div}} E_u^3$$

## 2.7 Expressões Integrais

Para não deixar as expressões integrais muito carregadas quando obtemos a forma fraca para os modelos eletrostático e eletrocinético, serão definidas as seguintes notações relativas às integrais sobre um volume  $\Omega$  e uma superfície  $\Gamma$  [3]:



$$(u, v)_\Omega = \int_{\Omega} uv \, d\Omega \quad (2.53)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (2.54)$$

$$\langle u, v \rangle_\Gamma = \int_{\Gamma} uv \, d\Gamma \quad (2.55)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (2.56)$$

Com  $u$ ,  $v$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  definidos sobre  $\Omega$  e  $\Gamma$  tal que essas integrais tenham um sentido.

De forma geral, elas podem ser definidas nos espaços de Sobolev, de campos escalar e vetorial, isto é [3],

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega); \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Para estabelecer as formulações fracas associadas aos problemas de eletrostática e eletrocinética, que nada mais são que problemas de derivadas parciais, são necessárias duas fórmulas ditas *fórmulas de Green* [3]:

$$(\mathbf{u}, \text{grad } s)_\Omega + (\text{div } \mathbf{u}, s)_\Omega = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}, s \rangle_\Gamma, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ e } \forall s \in H^1(\Omega) \quad (2.57)$$

$$(\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{s})_\Omega - (\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{s})_\Omega = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle_\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{s} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (2.58)$$

Estas relações são estabelecidas na análise vetorial.

O fato de encontrarmos a forma fraca da equação diferencial é onde se baseia o método de elementos finitos.

Os campos  $\mathbf{u}$  e  $s$  (respectivamente  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{s}$ ) colocados em (2.57) (respectivamente em (2.58)), pertencem aos espaços funcionais tais como definidos anteriormente.

## 2.8 Formulações Fracas do Problema Eletrocinético

Para ilustrar a noção da formulação fraca, considere o problema de eletrocinética, limitado ao domínio  $\Omega$ , cujas equações são (2.20), (2.21) e (2.22), isto é,  $\text{rot } \mathbf{e} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  e  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$ , e com condições de contorno sobre as porções complementares  $\Gamma_e$  e  $\Gamma_j$  de  $\Gamma$  dadas pelas equações (2.23) e (2.24), ou seja,  $\mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_e} = 0$  e  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = 0$ , respectivamente.

Considere a fórmula de Green (2.57) no domínio  $\Omega$  aplicada ao campo vetorial  $\mathbf{j}$  e a um campo escalar  $v'$  a definir, isto é,

$$(\mathbf{j}, \text{grad } v')_{\Omega} + (\text{div } \mathbf{j}, v')_{\Omega} = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, v' \rangle_{\Gamma}, \quad \forall v' \in E_{e_0}^0(\Omega) \quad (2.59)$$

Onde  $E_{e_0}^0$  é um espaço do tipo (2.50) o qual  $v'|_{\Gamma_e} = 0$ . O último termo da equação (2.59) se reduz então a  $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, v' \rangle_{\Gamma_j}$  que também se anula quando é introduzida a condição (2.24). Da mesma maneira, o segundo termo dessa equação se anula quando se introduz a equação (2.21). Assim, a equação (2.59) se reduz a [3]:

$$(\mathbf{j}, \text{grad } v')_{\Omega} = 0, \quad \forall v' \in E_{e_0}^0(\Omega) \quad (2.60)$$

Essa é a forma que se nomeia formulação fraca da equação (2.36). Ela foi estabelecida a partir da fórmula de Green. Todavia, também é possível obtê-la

diretamente da equação (2.21) aplicando sobre ela a fórmula de Green (2.57), resultando em:

$$(\operatorname{div} \mathbf{j}, v')_{\Omega} = \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, v' \rangle_{\Gamma}, \quad \forall v' \in E_{e_0}^0(\Omega) \quad (2.61)$$

Esta equação é verificada para toda função  $v' \in E_{e_0}^0(\Omega)$ , chamada função teste e, então, em particular para toda função  $v'$  de traço nulo sobre  $\Gamma$ . Resulta, então, que  $(\operatorname{div} \mathbf{j}, v')_{\Omega} = 0$  para toda função  $v'$  desse gênero e, por consequência, que  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  em  $\Omega$ , isto é, que a equação (2.21) é verificada. Assim, a equação (2.61) se reduz a  $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, v' \rangle_{\Gamma}$  e considerando agora todas as funções  $v' \in E_{e_0}^0(\Omega)$  sem restrições e que podem variar livremente sobre  $\Gamma_j$ , resulta finalmente que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = 0$ , isto é, a condição (2.24) é verificada [3].

É possível obter ainda mais informações da formulação fraca, particularmente no que concernem as condições de transmissão que aparecem sobre as superfícies interiores à  $\Omega$ . Considere para isso dois subdomínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  de  $\Omega$  separados por uma interface  $\Sigma$  conforme a figura 3.

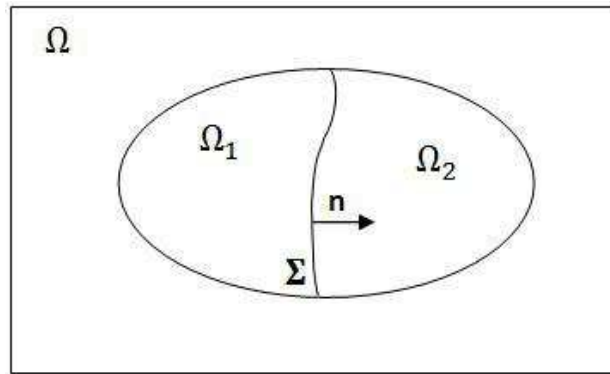


Figura 3 – Interface entre os meios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$

Aplicando a fórmula de Green do (2.57) aos campos  $\mathbf{j}$  e  $v'$  sucessivamente nos subdomínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , depois somando as relações obtidas, tem-se [3]:

$$(\mathbf{j}, \text{grad } v)_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \langle \mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2), v \rangle_{\Sigma} + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, v \rangle_{\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)}, \quad \forall v' \in E_{e_0}^0(\Omega) \quad (2.62)$$

Na equação acima,  $\mathbf{j}_1$  e  $\mathbf{j}_2$  representam o campo da densidade superficial de corrente  $\mathbf{j}$  nos respectivos domínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Considerando as funções de teste  $v'$  de suporte  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  e nulas sobre  $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , subsiste de (2.62) a condição de transmissão  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1)|_{\Sigma} = 0$ . Note que o primeiro termo da equação (2.62) se anula devido à equação (2.21): o domínio de integração  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  pode se estender a  $\Omega$  pelo fato das funções testes escolhidas.

Finalmente, substituindo em (2.60) a lei de comportamento (2.22) e utilizando a definição (2.27), tem-se:

$$(\sigma \text{ grad } v, \text{grad } v)_{\Omega} = 0, \quad \forall v' \in E_{e_0}^0(\Omega) \quad (2.63)$$

Esta é a *formulação fraca eletrocinética em potencial escalar*. Ela contém o problema (2.20 – 2.24) em sua totalidade. O potencial  $v$  é a incógnita e os outros campos podem ser deduzidos de  $v$  graças às equações que permanecem sob forma forte. Ele também pertence ao mesmo espaço que as funções teste ou ao menos a um espaço  $E_e^0(\Omega)$  que lhe é paralelo, isto é, onde a condição de contorno  $v$  sobre  $\Gamma_e$  não é necessariamente homogênea ( $v|_{\Gamma_e} = c$ ).

De forma geral, a condição de contorno resultando de um termo integral na formulação fraca, neste caso  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = 0$  é chamada de *condição natural* (condição de contorno do tipo Neumann), enquanto que a condição expressa em um espaço funcional diretamente utilizado para a expressão de incógnita e da função teste, neste caso  $v|_{\Gamma_e} = c$ , é chamada de condição essencial (condição de contorno do tipo Dirichlet) [3].

Note que levando em conta a condição de contorno natural não homogênea, aqui  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s|_{\Gamma_j}$ , conduziria a estender a equação (2.60) sob a forma:

$$-(\mathbf{j}, \text{grad } v')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s, v' \rangle_{\Gamma_j} = 0, \quad \forall v' \in E_{e_0}^0(\Omega) \quad (2.64)$$

E então, a equação (2.64) se torna [3]:

$$(\sigma \text{ grad } v, \text{ grad } v')_{\Omega} + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s, v' \rangle_{\Gamma_j} = 0, \quad \forall v' \in E_{e_0}^0(\Omega) \quad (2.65)$$

Uma formulação fraca pode ser considerada como um sistema de uma infinidade de equações com uma infinidade de incógnitas. Durante o texto será visto como é possível aproximar um determinado problema a fim de permitir sua resolução numérica. Essa aproximação consistirá a fase da discretização. Note que esse é o fato de reduzir o número de funções teste a um valor finito que é responsável pelo caráter aproximado da solução.

No nível contínuo, a solução de uma formulação fraca é a mesma que aquela da formulação forte.

Ainda para o problema da eletrocinética, uma formulação fraca pode ser estabelecida a partir da equação (2.20), isto é,  $\text{rot } \mathbf{e} = 0$ , considerando a fórmula de Green (2.58), temos:

$$(\mathbf{e}, \text{rot } \mathbf{t}')_{\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{t}' \in E_j^1(\Omega) \quad (2.66)$$

Substituindo na equação acima a lei de comportamento (2.22) e utilizando a definição (2.46) do potencial vetor elétrico  $\mathbf{t}$ , tem-se a *formulação fraca eletrocinética em potencial vetor elétrico*:

$$\left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{t}, \text{rot } \mathbf{t}' \right)_{\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{t}' \in E_j^1(\Omega) \quad (2.67)$$

## 2.9 Formulações Fracas do Problema Eletrostático

Da mesma forma como foi obtida a formulação fraca eletrocinética em potencial escalar e vetor, podemos obter para o caso da eletrostática.

Utilizando a equação (2.32) e a fórmula de Green (2.57), obtemos:

$$(\varepsilon \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v')_{\Omega} = (\rho, v')_{\Omega}, \quad \forall v' \in E_{e_0}^0(\Omega) \quad (2.68)$$

Esta é a *formulação fraca eletrostática em potencial escalar*.

Já a *formulação fraca eletrostática em potencial vetor* é obtida utilizando a equação (2.47) e a fórmula de Green (2.58):

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{p}, \operatorname{rot} \mathbf{p}' \right)_{\Omega} = - \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{d}_s, \operatorname{rot} \mathbf{p}' \right)_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{p}' \in E_d^1(\Omega) \quad (2.69)$$

Novamente, as formulações em potencial escalar e vetor contêm o problema (2.12 – 2.16) em sua totalidade.

# Capítulo 3

## Método de Elementos Finitos

Neste capítulo utilizaremos das formulações fortes e fracas obtidas no capítulo anterior para estabelecer e conceituar o método de elementos finitos (MEF). Através do MEF chegaremos a uma solução numérica do problema eletrostático e eletrocinético.

### 3.1 O Método de Galerkin

Faremos uma explicação sobre o Método de Galerkin, mas aplicado à equação eletrocinética e depois para a eletrostática, que se conclui de maneira análoga. Todos os passos estabelecidos serão para o domínio de duas dimensões.

#### 3.1.1 Estabelecimento do Problema

Já foi visto anteriormente que conseguimos relacionar o campo elétrico  $\mathbf{e}$  com o potencial escalar  $v$  da seguinte forma:

$$\mathbf{e} = -\text{grad } v$$

Para a *eletrocinética*, a equação de Maxwell a ser resolvida é

$$\text{div } \mathbf{j} = 0$$

Ao substituir a equação constitutiva  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$ , como já mencionamos anteriormente, na equação acima, temos:

$$\text{div} (\sigma \text{grad } v) = 0 \quad (3.1)$$

Esta equação é interessante, pois conseguimos, através da solução que tem como incógnita o potencial elétrico, encontrar os outros campos como, por exemplo, o campo elétrico  $\mathbf{e}$  e a densidade superficial de corrente  $\mathbf{j}$ .

### 3.1.2 O Triângulo de Primeira Ordem

No MEF, o domínio da solução é subdividido ou discretizado em pequenas regiões chamadas “elementos finitos” [4,8]. Para aplicações em duas dimensões, as áreas divididas podem ser triângulos. Os pontos que definem os triângulos são os *nós* ou *grau de liberdade*, enquanto o triângulo em si é o *elemento*. O conjunto desses elementos é chamado de *malha*.

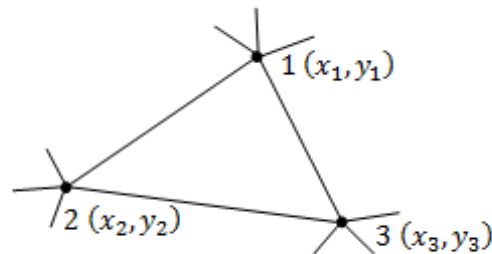


Figura 4 – Um elemento numa malha triangular

Pelo fato do elemento ser de primeira ordem, o potencial varia linearmente dentro do triângulo. Para este tipo de elemento, a expansão do potencial é [4]:

$$v(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (3.2)$$



Esta equação deve estar relacionada com cada nó do elemento. Para o caso da figura 4, temos [4]:

$$v_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 \quad (3.3a)$$

$$v_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 \quad (3.3b)$$

$$v_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 \quad (3.3c)$$

Pela Regra de Cramer e utilizando das equações (3.3a), (3.3b) e (3.3c), podemos encontrar os valores dos coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ :

$$a_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} v_1 & x_1 & y_1 \\ v_2 & x_2 & y_2 \\ v_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.4a)$$

$$a_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & v_1 & y_1 \\ 1 & v_2 & y_2 \\ 1 & v_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.4b)$$

$$a_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & v_1 \\ 1 & x_2 & v_2 \\ 1 & x_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.4c)$$

O valor de  $D$  é igual a duas vezes a área do elemento, que pode ser calculado da seguinte forma:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

De fato, substituindo os valores de  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  na equação (3.2), temos [4]:

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{D} (p_i + q_i x + r_i y) v_i \quad (3.6)$$

onde,

$$p_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad q_1 = y_2 - y_3 \quad r_1 = x_3 - x_2 \quad (3.7)$$

Os outros termos  $p_2$ ,  $q_2$ ,  $r_2$ ,  $p_3$ ,  $q_3$  e  $r_3$  são obtidos permutando ciclicamente os índices.

Note que, para duas dimensões:

$$\mathbf{e} = -grad v = -\mathbf{i} \frac{\partial v}{\partial x} - \mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.8)$$

Utilizando a equação (3.6), a expressão acima fica:

$$\mathbf{e} = -grad v = -\mathbf{i} \frac{1}{D} (q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3) - \mathbf{j} \frac{1}{D} (r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3) \quad (3.9)$$

A equação (3.6) também pode ser escrita na forma [4]:

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^3 \phi_i(x, y) v_i = \phi_1(x, y) v_1 + \phi_2(x, y) v_2 + \phi_3(x, y) v_3 \quad (3.10)$$

onde,

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{D} (p_1 + q_1 x + r_1 y) \quad (3.11a)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{D}(p_2 + q_2x + r_2y) \quad (3.11b)$$

$$\phi_3(x, y) = \frac{1}{D}(p_3 + q_3x + r_3y) \quad (3.11c)$$

Estas funções são chamadas *funções de base* e como as funções (3.3) devem ser verificadas, observam-se que as seguintes situações:

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, y_1) &= 1 & \phi_2(x_1, y_1) &= 0 & \phi_3(x_1, y_1) &= 0 \\ \phi_1(x_2, y_2) &= 0 & \phi_2(x_2, y_2) &= 1 & \phi_3(x_2, y_2) &= 0 \\ \phi_1(x_3, y_3) &= 0 & \phi_2(x_3, y_3) &= 0 & \phi_3(x_3, y_3) &= 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Desta forma, teremos, por exemplo,  $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$ . Portanto,  $\phi_1$  varia linearmente até 1 no nó 1 e para 0 nos nós 2 e 3.

### 3.1.3 Método dos Resíduos Ponderados

Quando utilizamos métodos numéricos para resolver problemas, devemos lembrar que não encontramos uma solução exata. Na equação (3.1), a solução exata seria

$$\text{div}(\sigma \text{ grad } v) = 0$$

No entanto, utilizando o método de elementos finitos, encontra-se uma solução aproximada da solução exata. Quando substituimos a solução aproximada na equação (3.1), encontraremos um *resíduo*  $R$ :

$$\text{div}(\sigma \text{ grad } v) = R \quad (3.13)$$

Para forçar  $R$  a ser 0, será usado o método dos resíduos ponderados [4,8]:

$$\int_{\Omega} WR d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

onde  $W$  é uma determinada função peso e  $\Omega$  representa o domínio em que a condição está envolvida. No nosso caso, substituindo a equação (3.13) em (3.14), temos:

$$\int_{\Omega} W[\text{div}(\sigma \text{grad } v)] d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Utilizando a fórmula de Green (2.57) fazendo  $\mathbf{u} = \sigma \text{grad } v$  e  $s = W$ , a equação (3.15) fica:

$$\int_{\Omega} \sigma \text{grad } v \cdot \text{grad } W d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

Na outra notação,

$$(\sigma \text{grad } v, \text{grad } W)_{\Omega} = 0 \quad (3.17)$$

Agora, a discretização será associada ao método residual. Para facilitar a compreensão, faremos uma analogia com elementos em uma dimensão, onde o elemento é um segmento de reta e os nós são os pontos que limitam o segmento. A equação (3.14) fica [4]:

$$\sum_{k=1,K} \int_{\Omega_k} W_k R_k d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

Onde  $W_k$  é a função peso no nó  $k$ ,  $K$  é o número total de nós e  $\Omega_k$  o domínio parcial que cada nó  $k$  pertence.

Aqui temos  $K$  equações para  $K$  potenciais desconhecidos, pois eles são calculados nos nós.

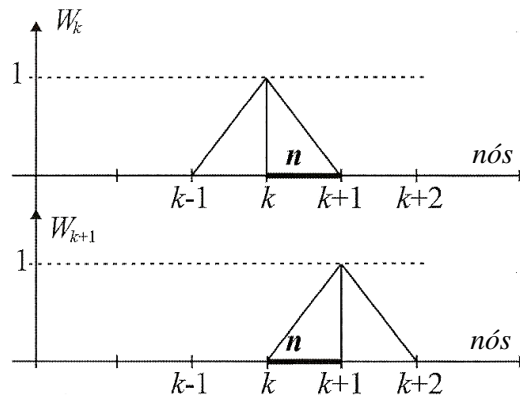


Figura 5 – Função peso  $W_k$  e  $W_{k+1}$

As funções peso são estabelecidas como mostra a figura 5, onde as funções  $W_k$  e  $W_{k+1}$  correspondem aos nós  $k$  e  $k + 1$  no elemento  $n$ . Pela figura, percebe-se que a função peso  $W_k$  age no nó  $k$ , onde é igual a 1, e decresce linearmente até 0 nos nós  $k - 1$  e  $k + 1$ . Como a função (3.18) representa a soma das funções pesos de um elemento, a situação da figura 6 pode ser verificada, ou seja, a soma das funções peso confere [4].

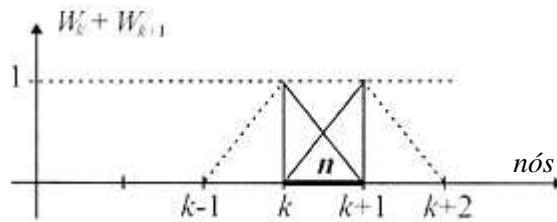


Figura 6 – Soma das funções peso para o elemento  $n$

Apesar de podermos associar nó por nó, pode-se também associar elemento a elemento. Isto acontece quando escolhemos as funções  $\phi_i$  como as funções peso. Este fato caracteriza o Método de Galerkin, que é a escolha

particular da função peso que acaba particularizando o método dos resíduos ponderados também.

### 3.1.4 Aplicação do Método de Elementos Finitos para o Problema Eletrocinético e Solução

A integral no domínio  $\Omega$  e substituindo a função peso  $W$  por  $\phi_i$ , temos a seguinte expressão integral [4,8]:

$$\sum_{n=1,N} \int_{\Omega_n} \sigma \text{grad } v \cdot \text{grad } \phi_n d\Omega = 0 \quad (3.19)$$

onde  $n$  representa um elemento qualquer e  $N$  é o número de elementos que pertencem no domínio de solução.

Vimos anteriormente que

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{D} (p_i + q_i x + r_i y) v_i$$

e que

$$\text{grad } v = \mathbf{i} \frac{1}{D} (q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3) + \mathbf{j} \frac{1}{D} (r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3)$$

Através das equações (3.11a – c), obtemos:

$$\text{grad } \phi_1 = \mathbf{i} \frac{1}{D} q_1 + \mathbf{j} \frac{1}{D} r_1 \quad (3.20a)$$

$$\text{grad } \phi_2 = \mathbf{i} \frac{1}{D} q_2 + \mathbf{j} \frac{1}{D} r_2 \quad (3.20b)$$

$$\text{grad } \phi_3 = \mathbf{i} \frac{1}{D} q_3 + \mathbf{j} \frac{1}{D} r_3 \quad (3.20c)$$

Substituindo as equações (3.9) e (3.20) na integral (3.19), temos:

$$\frac{\sigma}{D^2} (\mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}r_1) \cdot [\mathbf{i}(q_1v_1 + q_2v_2 + q_3v_3) + \mathbf{j}(r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3)] \int_{S_n} ds \quad (3.21)$$

Note que a integral em  $S_n$  é igual à área do elemento  $n$  que é igual a  $\frac{D}{2}$ . Assim, encontramos a forma matricial [4,8]

$$\frac{\sigma}{2D} \begin{bmatrix} q_1q_1 + r_1r_1 & q_1q_2 + r_1r_2 & q_1q_3 + r_1r_3 \\ q_2q_1 + r_2r_1 & q_2q_2 + r_2r_2 & q_2q_3 + r_2r_3 \\ q_3q_1 + r_3r_1 & q_3q_2 + r_3r_2 & q_3q_3 + r_3r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A equação (3.22) é obtida para um único elemento. Montando a matriz global, levando em conta todos os elementos e aplicando as condições de contorno, se encontra os potenciais elétricos em todos os nós da malha de elementos finitos.

### 3.1.5 Aplicação do Método de Elementos Finitos para o Problema Eletrostático e Solução

A forma forte do problema de eletrostática, como vimos anteriormente, é a seguinte:

$$\text{div} (\varepsilon \text{grad } v) + \rho = 0$$

Como sabemos, quando utilizamos o método de elementos finitos para resolver a equação, não encontramos uma solução exata.

No caso da eletrostática, ao usarmos o método dos resíduos ponderados e escolhermos a função peso como a  $\phi_n$ , obtemos:

$$\sum_{n=1,N} \int_{\Omega_n} (\varepsilon \text{grad } v \cdot \text{grad } \phi_n - \rho \phi_n) d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

O primeiro termo da equação acima fica [4,8]:

$$\frac{\varepsilon}{2D} \begin{bmatrix} q_1 q_1 + r_1 r_1 & q_1 q_2 + r_1 r_2 & q_1 q_3 + r_1 r_3 \\ q_2 q_1 + r_2 r_1 & q_2 q_2 + r_2 r_2 & q_2 q_3 + r_2 r_3 \\ q_3 q_1 + r_3 r_1 & q_3 q_2 + r_3 r_2 & q_3 q_3 + r_3 r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Agora precisamos avaliar o segundo termo da equação (3.23) dado por:

$$\int_{S_n} \rho \phi_n ds \quad (3.25)$$

Cada função  $\phi_i$  é igual a 1 no nó  $i$  e decresce até 0 nos outros nós do elemento. No exemplo da figura 7, temos a função  $\phi_i$  que é igual a 1 no nó 1 e zero nos nós 2 e 3.

Portanto, calcular a integral (3.25) corresponde em calcular o volume da pirâmide de altura 1 como mostra, por exemplo, a figura 7 [4].

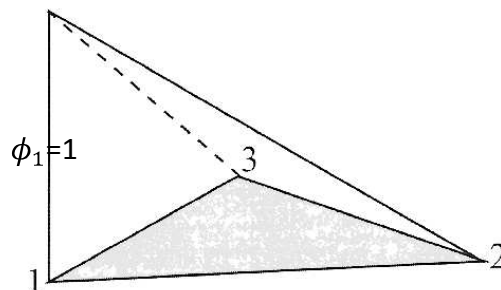




Figura 7 – Função  $\phi_1$  para um elemento triangular

Para  $\phi_1$ , obtemos:

$$\frac{1}{3} \rho \frac{D}{2}$$

Da mesma forma, calcula-se a integral para  $\phi_2$  e  $\phi_3$  e obtemos o segundo termo da equação (3.23) [4,8]:

$$\frac{\rho D}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz local resultante para um elemento triangular é dado por [4,8]:

$$\frac{\varepsilon}{2D} \begin{bmatrix} q_1 q_1 + r_1 r_1 & q_1 q_2 + r_1 r_2 & q_1 q_3 + r_1 r_3 \\ q_2 q_1 + r_2 r_1 & q_2 q_2 + r_2 r_2 & q_2 q_3 + r_2 r_3 \\ q_3 q_1 + r_3 r_1 & q_3 q_2 + r_3 r_2 & q_3 q_3 + r_3 r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{\rho D}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Montando a matriz global que leva em conta todos os elementos, aplicando as condições de contorno do problema e resolvendo o sistema final, obtêm-se os potenciais em todos os nós da malha de elementos finitos.

De forma geral, podemos reescrever os sistemas (3.22) e (3.26) da seguinte forma [8]:

$$SSV = Q$$

Sendo:

**SS** - matriz rigidez contendo as contribuições de cada elemento;

**V** - matriz dos potenciais elétricos (incógnitas);

**Q** - matriz contendo as fontes de densidade de carga elétrica.

### 3.1.6 Obtenção da Matriz Global

Para aplicar as equações (3.19) e (3.23) dos problemas eletrocinético e eletrostático, respectivamente, as contribuições de todos os elementos devem ser consideradas. A parcela correspondente a cada elemento deve ser inserida num sistema global de forma a levar em conta todos os elementos.

Faremos a montagem de um sistema global correspondente à equação (3.23) através de um exemplo de uma malha constituída de três elementos e cinco nós, como mostra a figura 8.

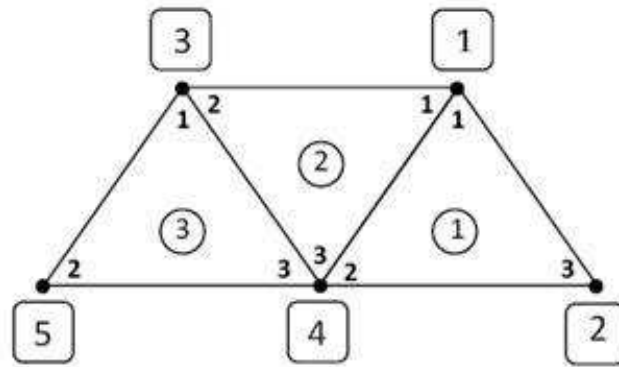


Figura 8 – Malha de três elementos

Na figura,  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  e  $\textcircled{3}$  são os elementos,  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$ ,  $\boxed{4}$  e  $\boxed{5}$  é o número global de nós e 1, 2 e 3 é o número global de nós por elemento. Com isso, podemos observar que existe a numeração local, indicada pelos três nós internos do elemento e a numeração global, que corresponde à numeração de todos os nós da malha.

Como há cinco nós na malha, o sistema global correspondente à equação (3.23) é dado por [8]:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Para o elemento ①, a numeração local é 1, 2 e 3 e a global é ①, ④ e ②. A matriz local resultante deste elemento é [8]:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_4 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Para o elemento ②, a matriz local resultante é [8]:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

E para o elemento ③, a matriz local resultante fica [8]:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} \\ a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} \\ a_{31}^{(3)} & a_{32}^{(3)} & a_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_5 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Na matriz global,  $a_{ij}$  vem do acoplamento entre os nós globais  $i$  e  $j$ . Obtém-se  $a_{ij}$  utilizando o fato de que o potencial deve ser contínuo ao longo das fronteiras dos elementos. A contribuição ao elemento  $a_{ij}$  da matriz global vem de todos os elementos contendo os nós globais  $i$  e  $j$ .

Para obter  $a_{11}$ , por exemplo, nota-se que o nó global  $\boxed{1}$  pertence aos elementos  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$ , correspondente em ambos ao nó local **1**, conforme mostrado na figura 8. Dessa forma [8],

$$a_{11} = a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)}$$

Para obter  $a_{14}$ , a ligação entre os nós globais  $\boxed{1}$  e  $\boxed{4}$  corresponde às ligações locais **1 – 2** e **1 – 3** nos elementos  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$ , respectivamente. Logo [8],

$$a_{14} = a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(2)}$$

Dessa forma, podemos encontrar todos os termos da matriz global, reescrevendo o sistema (3.27) da seguinte forma [8]:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)} & a_{13}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & (a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(2)}) & 0 \\ a_{31}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & 0 & a_{32}^{(1)} & 0 \\ a_{21}^{(2)} & 0 & (a_{22}^{(2)} + a_{11}^{(3)}) & (a_{23}^{(2)} + a_{13}^{(3)}) & a_{12}^{(3)} \\ (a_{21}^{(1)} + a_{31}^{(2)}) & a_{23}^{(1)} & (a_{32}^{(2)} + a_{31}^{(3)}) & (a_{22}^{(1)} + a_{33}^{(2)} + a_{33}^{(3)}) & a_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{21}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & a_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

## 3.2 A Axissimetria nos Problemas

Em problemas de eletrocinética, eletrostática e magnetostática, algumas estruturas possuem simetria de revolução, como, por exemplo, os solenóides e até mesmo os isoladores.

Estes problemas são, de fato, tridimensionais. No entanto, existe uma simetria *axial* ou *de rotação* nesta estrutura. Dessa forma, os problemas podem ser

abordados de forma bidimensional e apenas aplicando um fator de correção na formulação numérica, podemos obter a solução do problema tridimensional.

Para fazermos a correção, devemos multiplicar por um fator  $2\pi r_0$  os termos do sistema.

Para o problema eletrostático, a matriz rigidez ficará da seguinte forma [1]:

$$\frac{\pi r_0 \varepsilon}{D} \begin{bmatrix} q_1 q_1 + r_1 r_1 & q_1 q_2 + r_1 r_2 & q_1 q_3 + r_1 r_3 \\ q_2 q_1 + r_2 r_1 & q_2 q_2 + r_2 r_2 & q_2 q_3 + r_2 r_3 \\ q_3 q_1 + r_3 r_1 & q_3 q_2 + r_3 r_2 & q_3 q_3 + r_3 r_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

E o termo relativo à carga elétrica fica [1]:

$$\frac{\pi r_0 \rho D}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Para o problema eletrocinético, a matriz rigidez será [1]:

$$\frac{\pi r_0 \sigma}{D} \begin{bmatrix} q_1 q_1 + r_1 r_1 & q_1 q_2 + r_1 r_2 & q_1 q_3 + r_1 r_3 \\ q_2 q_1 + r_2 r_1 & q_2 q_2 + r_2 r_2 & q_2 q_3 + r_2 r_3 \\ q_3 q_1 + r_3 r_1 & q_3 q_2 + r_3 r_2 & q_3 q_3 + r_3 r_3 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

O  $r_0$  é a distância do baricentro do triângulo (elemento) ao eixo de rotação. Temos então que  $r_0 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ , onde  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são as distâncias dos três nós do elemento em questão em relação ao eixo de rotação.

## Capítulo 4

# Aplicações dos Modelos Eletrocinético e Eletrostático

Neste capítulo faremos duas aplicações, uma do modelo eletrocinético e outra do modelo eletrostático. Para o primeiro modelo, faremos a solução analítica do potencial em uma calha condutora e também através do MEF, no segundo modelo, a aplicação será em um isolador elétrico tipo pino.

### 4.1 Modelagem de uma Calha Condutora (modelo eletrocinético)

Considere uma calha condutora de comprimento  $a = 3\text{ cm}$  e altura  $b = 2,5\text{ cm}$ . Na placa é aplicada uma diferença de potencial elétrico de  $10\text{ Volts}$ . Entre os pontos 2 e 3, tem-se  $10\text{ Volts}$  e entre os pontos 1 e 4, têm-se  $0\text{ Volt}$ .

Devemos determinar a função potencial e o campo elétrico na região interna da calha retangular indicada na figura 9(a).

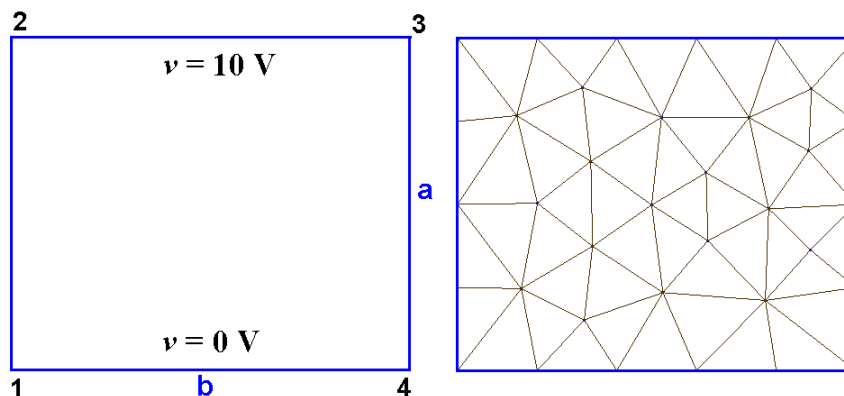


Figura 9 – (a) Domínio de estudo e (b) Malha de elementos finitos

A equação que rege este fenômeno é a equação (2.36), do modelo eletrocinético, dita equação de Laplace:

$$\text{div} (\sigma \text{ grad } v) = 0 \quad (4.1)$$

Esta equação também pode ser escrita na forma da equação (2.37) e considerando que o campo elétrico só varia na direção  $y$  e que a condutividade elétrica  $\sigma$  é constante, a equação (2.37) se torna:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (4.2)$$

As condições de contorno para este problema são:  $v = 10 \text{ V}$  em  $y = 2,5 \text{ cm}$  e  $v = 0 \text{ V}$  em  $y = 0$ .

Aplicando as condições de contorno mostradas na figura 9(a), determina-se a solução analítica dada por:

$$v(y) = 400y \quad (4.3)$$

Para  $0 \leq y \leq 2,5 \text{ cm}$ .

Como vimos no capítulo 2 é possível determinar o campo elétrico, sabendo o potencial elétrico através de:

$$\mathbf{e} = -\text{grad } v \quad (4.4)$$

Assim, também podemos calcular as componentes  $e_x$  e  $e_y$  a partir de  $v$ :

$$e_x = 0 \text{ e } e_y = -400 \text{ V/m} \quad (4.5)$$

Este problema também é resolvido pelo método de elementos finitos em duas dimensões. A figura 9(b) mostra a malha de elementos finitos utilizada.

A figura 10 mostra a distribuição do potencial elétrico (*esquerda*) e do campo elétrico (*direita*) no interior da calha. Na figura do campo elétrico é mostrada a malha, para evidenciar que o campo elétrico é calculado em cada elemento.

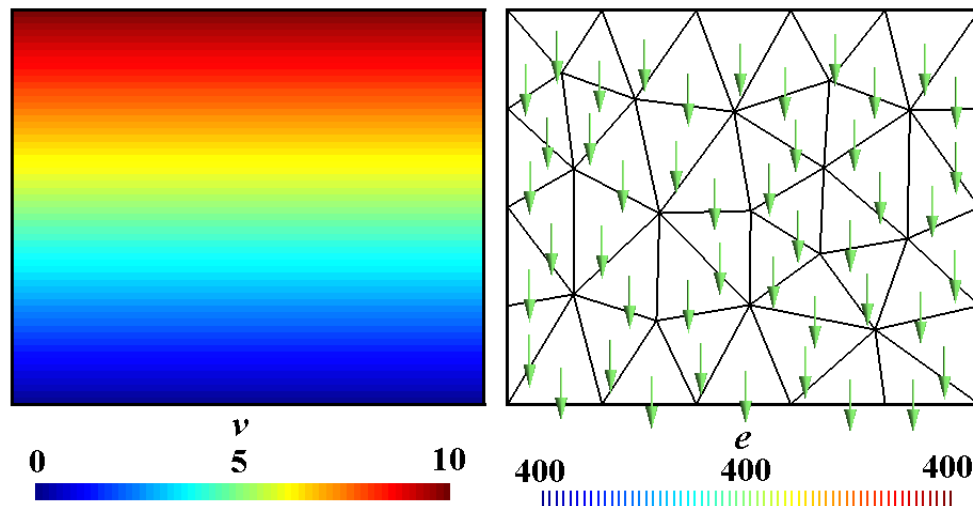


Figura 10 – Distribuição do potencial elétrico (esquerda) e do campo elétrico (direita) na placa condutora retangular.

## 4.2 Modelagem de Isolador Elétrico (modelo eletrostático)

Os isoladores para linhas de alta e baixa tensão são dispositivos que têm a função de dar suporte mecânico rígido ou flexível para condutores elétricos ou equipamentos e mantê-los isolados do aterramento, de outras partes condutoras e das próprias estruturas de suporte. Podem ser constituídos de ferragens, porcelana, vidro, polímero ou material compósito e cimento, para manter as partes integradas (ferragens e saias). Para realizar as funções mecânicas e elétricas desejadas, há uma série de condições técnicas exigíveis.

Os isoladores podem ser fabricados de acordo com o meio ambiente onde serão utilizados. Sabe-se que em ambientes cuja atmosfera é normalmente



carregada de poluentes, é necessário construir isoladores com características geométricas específicas que dificultem as fugas de correntes para a estrutura.

Existem os isoladores *roldana*, os isoladores de *disco* ou de *suspensão*, os isoladores de *apoio* e os isoladores tipo *pino*. Este último é predominantemente utilizado em redes de distribuição rural e urbana primária.

Neste item apresentaremos a modelagem de um isolador elétrico tipo pino. As figuras 11 e 12 mostram a foto dos isoladores tipo pino de porcelana e vidro, e o desenho tridimensional do isolador tipo pino em CAD, respectivamente.



Figura 11 – Foto dos isoladores tipo pino de porcelana (esquerda) e de vidro (direita).

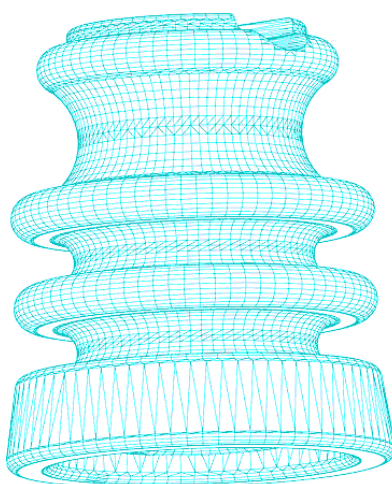


Figura 12 – Desenho tridimensional do isolador tipo pino em CAD.

As figuras 13 e 14 mostram, respectivamente, o domínio de estudo de elementos finitos. Na figura 13, o arco “a” em vermelho representa a linha onde o potencial elétrico é  $9,79kV$ , a linha “c” em verde representa a linha onde o potencial elétrico é  $0kV$ . A linha “b” em azul é a linha utilizada para comparar o módulo da componente do campo elétrico, considerando que o isolador é fabricado de três tipos de isolantes: ar, vidro e porcelana. A área em cinza é a superfície do isolador que girando  $2\pi$  forma, aproximadamente, o volume da figura 14.

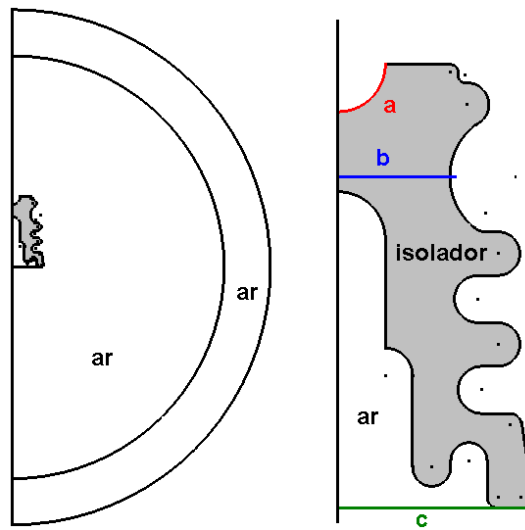


Figura 13 – Domínio axissimétrico do isolador elétrico tipo pino.

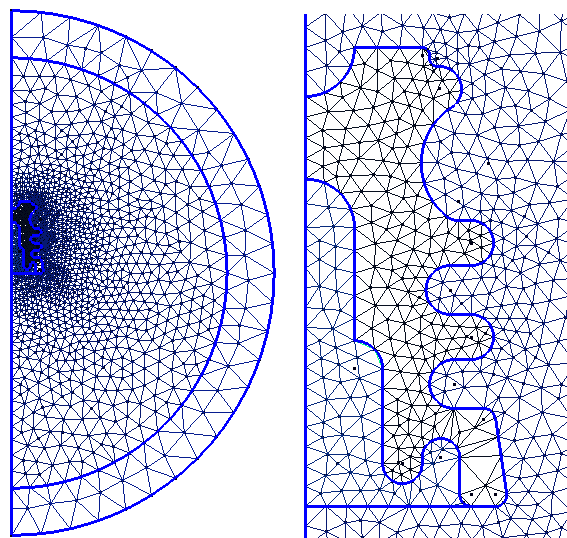


Figura 14 – Malha de elementos finitos do domínio de estudo.

As figuras 15, 16 e 17 mostram, respectivamente, os resultados das simulações usando o método de elementos finitos. O isolador foi modelado considerando que o mesmo é fabricado de três tipos de isolantes: ar, vidro e porcelana.

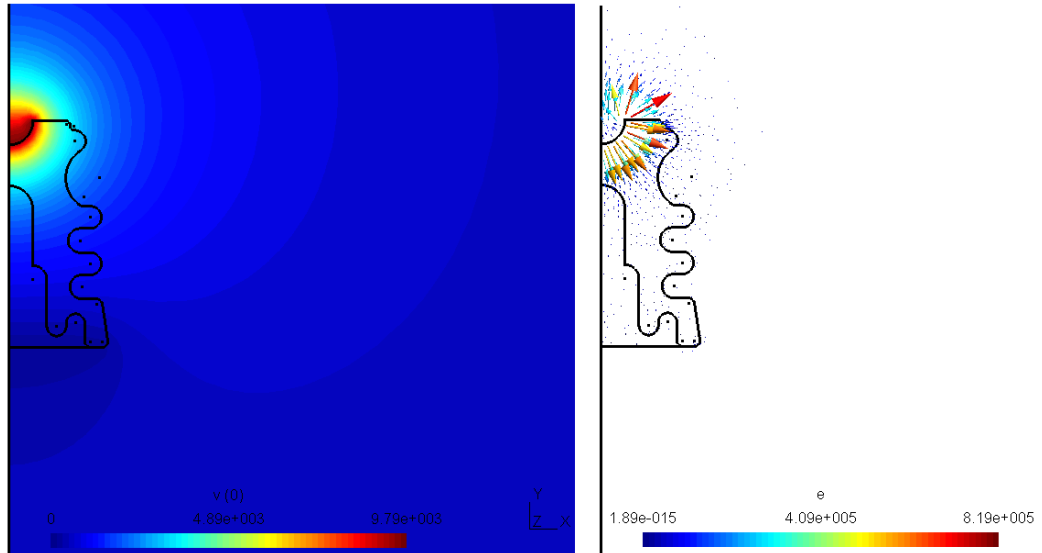


Figura 15 – Distribuição do potencial elétrico (esquerda) e do campo elétrico (direita) para o isolador de **ar** (ou seja, sem nenhum isolador).

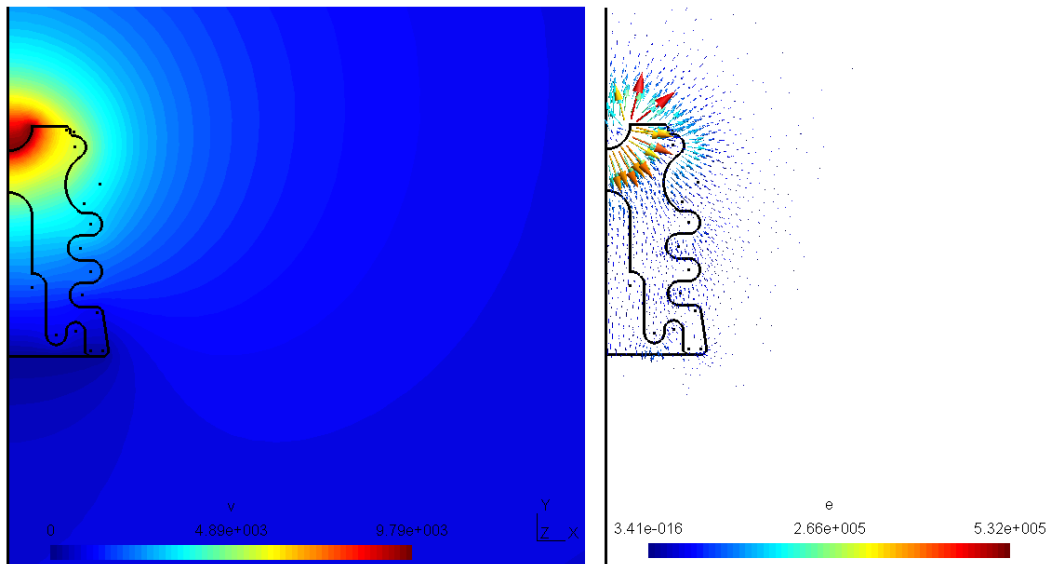


Figura 16 – Distribuição do potencial elétrico (esquerda) e do campo elétrico (direita) para o isolador de **vidro**.

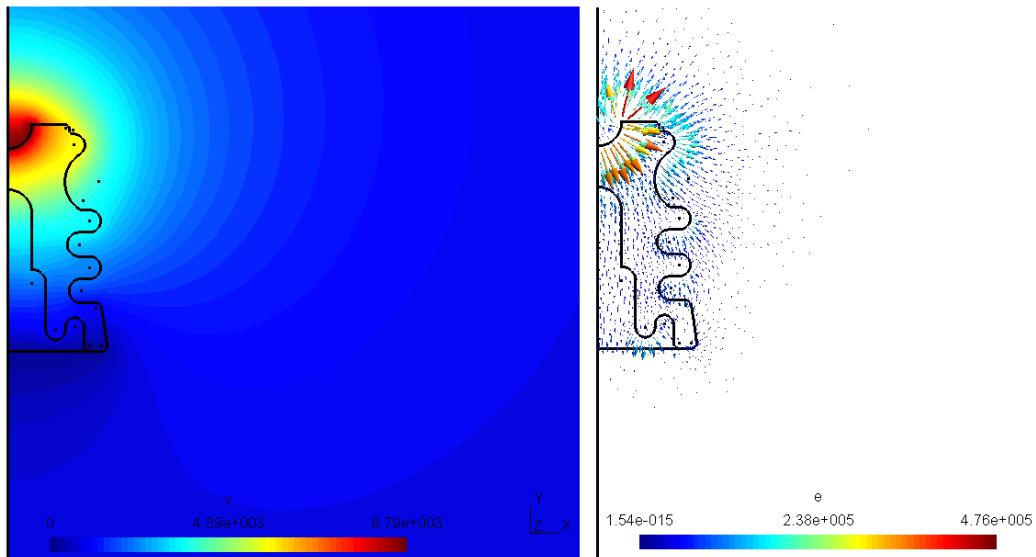


Figura 17 – Distribuição do potencial elétrico (esquerda) e do campo elétrico (direita) para o isolador de **porcelana**.

Note que o potencial elétrico fica distribuído de maneira mais uniforme com o aumento da permissividade relativa do material do isolador. Isso acarreta na redução do campo elétrico total no interior do isolador, tornando o isolador mais eficiente. Deve-se ressaltar que uma variável importante do isolador é sua rigidez dielétrica. Se o campo elétrico dentro do isolador exceder o valor da rigidez dielétrica do material isolante, o isolante se rompe e haverá o surgimento de um arco elétrico, danificando o isolador. Sendo assim, quanto menor o campo elétrico ou mais longe do valor da rigidez dielétrica do material do isolante, melhor para o funcionamento do isolador.

A tabela 1 apresenta os valores mínimos e máximos dos campos elétricos totais, permissividade relativa e rigidez dielétrica para os três materiais.

Material do Isolador	Valor da permissividade relativa	Rigidez dielétrica em V/m	Valor mínimo do campo elétrico em V/m	Valor máximo do campo elétrico em V/m
<b>Ar</b>	1	$3,0 \times 10^6$	$1,89 \times 10^{-15}$	$8,19 \times 10^5$
<b>Vidro</b>	6	$3,0 \times 10^7$	$3,41 \times 10^{-16}$	$5,32 \times 10^5$
<b>Porcelana</b>	7	$2,0 \times 10^7$	$1,54 \times 10^{-15}$	$4,76 \times 10^5$

Tabela 1 – Comparação do campo elétrico total considerando o isolador fabricado com três tipos de materiais isolantes.

A figura 18 mostra o módulo da componente em  $y$  do campo elétrico ao longo da linha “ $b$ ” em azul da figura 13. Observe que os valores máximos do módulo da componente  $y$  do campo elétrico são menores à medida que a permissividade relativa do isolador aumenta. Além disso, o campo elétrico fica distribuído de maneira mais uniforme ao longo do raio  $R$  com aumento da permissividade relativa do isolador.

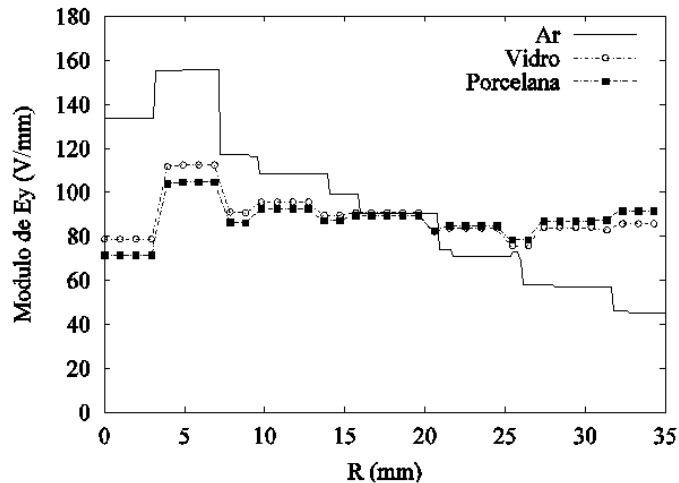


Figura 18 – Variação do módulo da componente  $y$  do campo elétrico ao longo da linha “ $b$ ” em azul da figura 13.

O aspecto “escadinha” do campo elétrico, mostrado na figura 18, é devido ao fato de termos utilizado um polinômio de primeira ordem para aproximar a função do potencial elétrico em cada elemento finito. Assim, o campo elétrico é constante dentro de cada elemento. Caso quiséssemos deixar os gráficos da componente  $y$  do campo elétrico da figura 18 mais “suaves” é preciso aumentar o número de elementos ou usar um polinômio de ordem mais elevada para aproximar a função do potencial elétrico em cada elemento finito.

A análise desse problema eletrostático usando o método de elementos finitos é importante, pois devido à complexidade do problema, não é possível encontrar uma solução analítica da equação de Laplace que rege este fenômeno.

# Apêndice A

## Fundamentos do Cálculo Vetorial

**Definição A.1.** Se  $f$  é uma função de três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , o **gradiente** de  $f$  é a função vetorial  $\text{grad } f$  (ou  $\nabla f$ ) definida por

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

**Definição A.2.** Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$  e as derivadas parciais de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  existem, então o **rotacional** de  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

**Definição A.3.** Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  é o campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e existem  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  e  $\frac{\partial R}{\partial z}$ , então a **divergência** de  $\mathbf{F}$  é a função de três variáveis definida por

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

**Teorema A.4.** Se  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^3$  e  $P$ ,  $Q$  e  $R$  têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$$

**Teorema A.5.** *Se  $f$  é uma função de três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  que tem derivadas parciais, então*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$$

**Teorema de Stokes A.6.** *Seja  $S$  uma superfície orientada, suave, cuja fronteira é formada por uma curva simples  $C$ , fechada, suave, com orientação positiva. Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas na região aberta de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ . Então,*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

**Teorema da Divergência A.7.** *Seja  $E$  uma região sólida simples e seja  $S$  a superfície fronteira de  $E$ , orientada positivamente (para fora). Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha  $E$ . Então*

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

## Considerações Finais

A idéia inicial era somente fazer um trabalho de conclusão de curso numa área aplicada de forma que fosse possível aplicar conhecimentos obtidos durante a graduação.

Ao optar pelo estudo das equações de Maxwell e suas aplicações foi muito mais interessante do que imaginei, pois percebi que esta imensa teoria do eletromagnetismo baseia-se somente em quatro equações relativamente simples, as equações de Maxwell.

A experiência que na área da engenharia elétrica foi muito proveitosa, pois ela vai muito além de resultados práticos. É necessário muito conhecimento físico e matemático para desempenhar um bom trabalho.

Durante o desenvolvimento do TCC notou-se que o método de elementos finitos é uma ferramenta numérica muito utilizada na engenharia para solução das equações diferenciais provenientes das equações de Maxwell. Sua aplicação é muito utilizada onde não se tem soluções analíticas. A análise dos resultados obtidos com o método de elementos finitos auxilia no projeto dos dispositivos elétricos e magnéticos, evitando a fabricação de muitos protótipos até se chegar no produto final dentro dos padrões exigidos pela empresa.

Espera-se que os objetivos propostos tenham sido atingidos com a realização do trabalho ao estudar as equações de Maxwell, os modelos eletrocinético e eletrostático e as aplicações dos mesmos.



## Referências Bibliográficas

[1] BASTOS, J. P. A. *Eletromagnetismo e Cálculo de Campos*. 3ª ed. São Paulo: UFSC, 1996.

[2] KRAUS, J. D.; CARVER, Keith R. *Eletromagnetismo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986.

[3] FERREIRA DA LUZ, M. V. *Modelagem Numérica II*. Notas de aula. Florianópolis: UFSC, 2008.

[4] BASTOS, J. P. A; SADOWSKI, N. *Eletromagnetic Modeling by Finite Elements*. New York: Marcel Dekker, 2003.

[5] LORRAIN, P.; CORSON, D.; LORRAIN, F. *Campos e Ondas Electromagnéticas*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

[6] Site [http://pt.wikipedia.org/wiki/James\\_Clerk\\_Maxwell](http://pt.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell)

[7] Site <http://www.colegiosaofrancisco.com.br/alfa/james-clerk-maxell/james-clerk-maxwell-2.php>

[8] IDA, N.; BASTOS, J.P.A. *Eletromagnetism and Calculation of Fields*, New York: Springer-Verlag, 1992.

[9] HAYT Jr, W. H. *Eletromagnetismo*. Rio de Janeiro: LTC, 1978.

- [10] REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Rio de Janeiro: Campus, 1982.
- [11] SADIKU, M. N. O. *Elements of Eletromagnetics*. 2<sup>a</sup> ed. Philadelphia: Saunders College, 1994.
- [12] HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Fundamentos da Física 3: eletromagnetismo*. Rio de Janeiro: LTC, 1991.
- [13] STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Thomson, 2006.
- [14] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [15] MAMEDE FILHO, J. *Manual de Equipamentos Elétricos*. 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: LTC, 2005.