

**Universidade Federal De Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Licenciatura em Matemática**

Interpolação Polinomial

**Autor: Anderson Luis Aimi
Orientador: Prof. Dr. Marcio Rodolfo Fernandes
Florianópolis
Julho 2008**

Anderson Luis Aimi

Interpolação Polinomial

Trabalho acadêmico de graduação apresentado
À disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II,
Do Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura,
Do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da
Universidade Federal de Santa Catarina.

Professor: Marcio Rodolfo Fernandes

Florianópolis
Julho 2008

Agradecimentos

Foram muitos os que contribuíram para que eu pudesse finalizar este trabalho.

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças, e colocado pessoas maravilhosas no meu caminho que tornaram este trabalho menos árduo.

Agradeço à minha família, pela paciência, amor e apoio que me deram. Eles foram essenciais no meu período acadêmico e, sem eles, nada teria sido possível.

Agradeço especialmente aos amigos e companheiros de trabalho da Panificadora Cantinho Doce, que tiveram muita paciência e me ajudaram muito nas horas mais difíceis e foram verdadeiros pilares de sustentação para que eu pudesse enfrentar e vencer mais esta “batalha”.

São muitos os amigos e colegas de Universidade a quem quero agradecer e também à coordenação do curso de matemática e a todos os professores, principalmente ao orientador deste trabalho e aos professores da banca examinadora.

Interpolação Polinomial
por
Anderson Luis Aimi

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 15/CMM/08.



Prof. Dr. Marcio Rodolfo Fernandes

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Aldrovando Luis Azeredo Araujo



Prof. Dr. Felix Pedro Quispe Gomez

Sumário

Introdução	7
1. Interpolação Polinomial	9
1.1 Interpolação Polinomial	9
1.2 Interpretação geométrica.....	10
1.3 Aproximação de funções pelo Método dos Mínimos Quadrados.....	12
1.3.1 Caso Contínuo	14
1.3.2 Caso Discreto.....	24
1.3.3 Erro de Truncamento	31
2. Outros Métodos de Interpolação Polinomial	33
2.1 Método da Matriz.....	33
2.2 Base de Lagrange	36
2.3 Interpolação Polinomial de Lagrange	38
2.4 Análise do Erro de Interpolação Polinomial.....	44
3. Espaços de Elementos Finitos	51
3.1 Espaços de Lagrange Polinomial por Partes.....	51
3.2 Espaço das Funções de Lagrange Lineares	56

3.3	Espaço das Funções de Lagrange Quadráticas.....	59
3.4	Espaço das Funções Cúbicas de Hermite (Parte 1).....	62
3.4.1	Polinômios de Hermite	62
3.4.2	Espaço das Funções Cúbicas de Hermite (Parte 2)	64
3.5	Interpolação Polinomial por Partes.....	68
3.6	Erro da Interpolação Polinomial por Partes	74
	Anexos – Um pouco de História	78
	Alexandre Théophile Vandermonde	78
	Joseph Lagrange.....	80
	Charles Hermite	83
	Conclusão	86
	Bibliografia.....	87

Introdução

Neste trabalho construiremos os polinômios interpolação polinomiais, utilizando principalmente o polinômio interpolador de Lagrange e, outros métodos como os mínimos quadráticos e os polinômios de Hermite. Para atingir este objetivo, o texto foi dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo daremos a definição de polinômio interpolador determinando uma função que assume valores conhecidos em determinados pontos. Estes métodos são utilizados principalmente quando não conhecemos a expressão analítica de f , isto é, sabemos seus valores em apenas alguns pontos ou quando f é extremamente complicada e de difícil manejo.

Consideraremos uma interpretação geométrica para obtermos o polinômio interpolador.

Veremos que o polinômio interpolador que satisfaz as condições de interpolação pura é único.

O primeiro método de obtenção do polinômio a ser considerado é o *método dos Mínimos Quadrados*, assim chamado por Adrien-Marie Legendre (1752 – 1883), que é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajustamento dos dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre a curva ajustada e os dados.

Os dois casos em que será utilizado o método dos Mínimos Quadrados são: o caso contínuo, dado pelas funções reais contínuas e definidas num intervalo fechado e limitado; e o caso discreto onde a função é dada por pares de pontos; bem como o erro de truncamento em ambos os casos.

No segundo capítulo, veremos outros métodos, como o método da matriz, de

Vandermonde, o qual pode ser um método muito trabalhoso, além de ocorrer erros de arredondamento. Portanto, estudaremos o método de Interpolação de Lagrange que é um método também trabalhoso, mas muito mais eficiente que o método de Vandermonde.

Analisaremos um esquema prático, utilizando Lagrange e também o erro da interpolação polinomial, utilizando o Teorema de Rolle e sua extensão, para provarmos o teorema do erro, conseguindo uma estimativa para o Erro da Interpolação Polinomial.

No terceiro capítulo construiremos os espaços de elementos finitos, onde abordaremos os espaços do Polinômio de Lagrange por partes, utilizado para funções onde as derivadas de ordem $n + 1$ não são limitadas, fazendo com que o polinômio interpolador fique cada vez mais afastado da função conforme aumentamos seu grau. Este acontecimento é denominado de *Fenômeno de Runge* e para evitá-lo, deveremos utilizar os pontos de Interpolação de Chebyshev.

Definiremos o espaço das funções de Lagrange Lineares, também conhecidas como funções Splines Lineares e o espaço das Funções de Lagrange Quadráticas por Partes e o espaço das funções cúbicas de Hermite.

Para conhecimento do espaço das Funções cúbicas de Hermite, explicaremos os polinômios de Hermite. E será visto o erro da Interpolação polinomial por partes.

Em anexo, contaremos um pouco da história dos matemáticos abordados neste texto: Alexandre Theóphile Vandermonde, Joseph Lagrange e Charles Hermite.

Capítulo 1

Interpolação polinomial

1.1 Interpolação Polinomial

A aproximação de funções por polinômios é uma das idéias mais antigas da análise numérica, e ainda uma das mais usadas. É bastante fácil entender por que razão isso acontece. Os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade, etc.

A interpolação consiste em determinar uma função que assume valores conhecidos em certos pontos. A classe de funções escolhidas para a interpolação é *a priori* arbitrária, e deve ser adequada às características que pretendemos que a função possua. Diz-se interpolação polinomial quando a função interpoladora é um polinômio. Chama-se interpolação ao processo de avaliar $f(x)$, $x \in [a, b]$, substituindo a função $f(x)$ por uma $F(x)$, tal que $F(x_i) = f(x_i)$. Onde f é uma função real definida em $[a, b] \in \mathbb{R}$, da qual se conhecem os valores nos pontos de abscissas $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_n \in [a, b]$. Tais métodos são usados como uma aproximação para uma função f , principalmente, nas seguintes situações:

a) não conhecemos a expressão analítica de f , isto é, sabemos apenas seu valor em alguns pontos x_0, x_1, x_2, \dots , (esta situação ocorre muito freqüentemente na prática, quando se trabalha com dados experimentais) e necessitamos manipular f como, por exemplo, calcular seu valor num ponto, sua integral num determinado intervalo, etc.

b) f é extremamente complicada e de difícil manejo. Então, às vezes, é interessante sacrificar a precisão em benefício da simplificação dos cálculos.

Neste capítulo faremos uma breve introdução ao problema de interpolação polinomial, apresentando dois métodos de construção do polinômio interpolador e a análise de erro da interpolação polinomial.

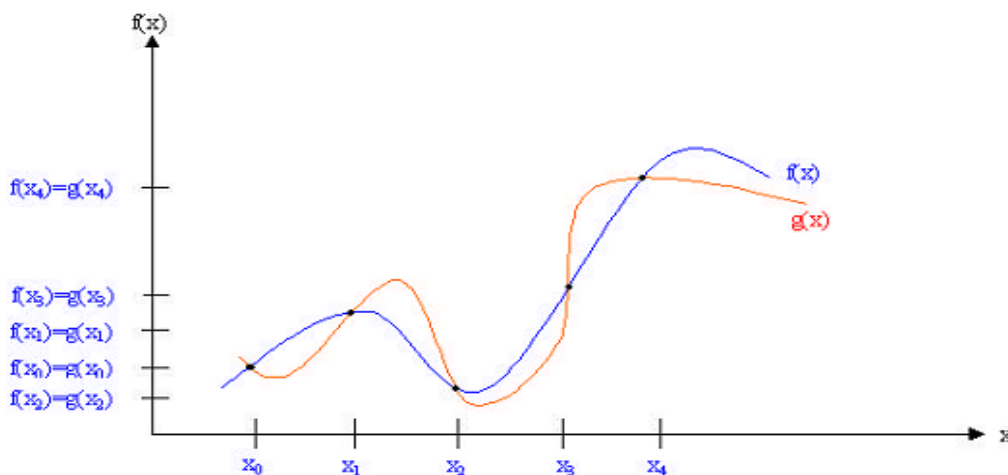
1.1.1 Interpretação geométrica

Consideremos $(n + 1)$ pontos distintos: x_0, x_1, \dots, x_n , chamados nós da interpolação, e os valores de $f(x)$ nesses pontos: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$.

A forma de interpolação de $f(x)$ que veremos a seguir, consiste em se obter uma determinada função $g(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Geometricamente, um esboço da interpolante $g(x)$ sobre a função $f(x)$ é visto na figura abaixo:



Em particular, se $g(x) = P_n(x)$, onde P_n é um polinômio de grau n , então a interpolação é denominada de interpolação polinomial.

Observamos que:

- a) Existem outras formas de interpolação polinomial como, por exemplo, a fórmula de Taylor, a interpolação por polinômios de Hermite e do tipo “spline”, para as quais as condições são outras.
- b) Poderíamos ter escolhido g como função racional, função trigonométrica, etc. Um caso que explora combinações de funções trigonométricas, em campo real ou complexo é o aproximante, definido a partir da série de Fourier.
- c) Existe também o caso polinomial não interpolante, tal como o aproximante de funções por mínimos quadrados.

A interpolação polinomial que será vista é a de Lagrange.

1.2 O Problema da Interpolação Polinomial

Seja $f: [a, b] \rightarrow R$ uma função contínua e π uma partição qualquer de $[a, b]$, isto é, $\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$. Queremos construir um polinômio de grau $\leq n$ que satisfaça as condições de interpolação pura, isto é,

$$p(x_i) = f(x_i); \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

O polinômio p construído com as condições acima é denominado polinômio interpolador da função f nos pontos da partição π . A seguir será mostrada a unicidade do Polinômio Interpolador.

Vamos considerar que existam dois polinômios de grau $\leq n$, p e q , que interpolam a função f nos pontos da partição π , isto é:

$$p(x_i) = f(x_i); \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

$$q(x_i) = f(x_i); \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Desse modo, temos que o polinômio $r = p - q$ que é de grau $\leq n$ possui $n + 1$ raízes distintas, que são os pontos de interpolação x_0, x_1, \dots, x_n . De fato: $r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n$.

Portanto, pelo *Teorema Fundamental da álgebra*¹, temos que o polinômio r é identicamente nulo, e podemos concluir que $p = q$. Provamos dessa maneira a unicidade do polinômio interpolador. ■

Podemos observar que o problema de Interpolação Polinomial consiste em encontrar um polinômio $p \in P_n([a, b])$ satisfazendo as condições, onde $P_n([a, b])$, é o espaço vetorial real dos polinômios de grau $\leq n$ definidos em $[a, b]$.

1.3 Aproximação de funções pelo Método dos Mínimos Quadrados

Em 1809, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicou um artigo no *Werke*, 4, 1-93, demonstrando que a melhor maneira de **determinar um parâmetro desconhecido de uma equação de condições é minimizando a soma dos quadrados dos resíduos**, mais tarde chamado de Mínimos Quadrados por Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Em abril de 1810, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) apresenta no memorial da Academia de Paris, [*Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux*

¹ Teorema Fundamental da álgebra -

probabilités (suite)". Mémoires l'Institut 1809 (1810), 353-415, 559-565. Oeuvres 12 p.301-345, p.349-353] a generalização a problemas com vários parâmetros desconhecidos

Antes de descrevermos o método dos mínimos quadrados lembraremos alguns conceitos básicos.

Sabemos da geometria euclidiana plana que: dados uma reta r e um ponto P , o ponto da reta r mais próximo de P é o único ponto Q , tal que PQ é ortogonal a r .

O mesmo acontece na geometria euclidiana sólida, isto é: dados um plano α e um ponto P fora dele, o ponto de α mais próximo de P é o pé da perpendicular traçada de P a α .

Como generalizar tal idéia a um *espaço euclidiano*² E qualquer? O problema que devemos resolver agora é: dados uma função $f \in E$ e um *subespaço*³ E' de E , qual deve ser a função $F \in E'$, tal que:

$$\|f(x) - F(x)\| < \|f(x) - Q(x)\|,$$

para qualquer que seja $Q(x) \in E', Q(x) \neq F(x)$?

Este problema pode ser resolvido através da aproximação de f por F pelo **método dos mínimos quadrados** que serve para gerar o que se chama em estatística de Regressão Linear ou Ajuste Linear.

O **Método dos Mínimos Quadrados** é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajustamento para um conjunto de dados

² **Espaço Euclidiano** - é um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno

³ **Subespaço** - Um espaço euclidiano V é chamado subespaço de W se todo vetor em V também pertence a W .

tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre a curva ajustada e os dados (tais diferenças são chamadas resíduos).

As curvas mais comuns utilizadas pelos estatísticos são:

Ordem	Função	Nome
1	$y = a_0 + a_1x$	Reta
2	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$	Parábola
3	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	Cúbica
4	$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$	Quártica

A técnica dos mínimos quadrados é comumente usada em ajuste de curvas. Muitos outros problemas de otimização podem também ser expressos na forma dos mínimos quadrados, por minimização (energia) ou maximização (entropia).

Vamos tratar aqui da aproximação de uma função $y = f$ por um polinômio de certo grau m , isto é, $F(x) = P_m(x)$, tanto no caso em que $f \in C[a, b]$ é o *espaço vetorial*⁴ das funções contínuas reais definidas no intervalo fechado e limitado $[a, b]$ (*caso contínuo*), como no caso onde f é dada por pares de pontos (*caso discreto*).

1.3.1 Caso contínuo

Consideremos uma função $f \in C[a, b]$. Inicialmente analisaremos o problema da aproximação pelo método dos mínimos quadrados, de uma forma contínua, considerando que o polinômio a ser determinado seja escrito em relação à *base*

⁴**Espaço Vetorial** - Uma coleção de n vetores é chamada de espaço vetorial se V é fechado sobre a operação de adição e sobre a multiplicação por escalar.

canônica⁵ e a seguir que ele seja escrito em relação a uma base ortonormal⁶.

Desejamos aproximar $f(x)$, $x \in [a, b]$ por um polinômio de grau no máximo m , isto é:

$$f(x) \cong a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = P_m(x).$$

de tal modo que a distância de f a P_m seja mínima.

Observe que neste caso: $g_0(x) = 1, g_1(x) = x, \dots, g_m(x) = x^m$ são funções conhecidas. Assim, o polinômio (a coeficientes reais), $P_m(x)$, deve ser tal que:

$$\text{dist}(f, P_m) = \text{mínima}.$$

Definição: Seja E um espaço euclidiano. Dados os vetores x e $y \in E$, definimos distância entre x e y , o comprimento do vetor $x - y$, isto é:

$$d(x, y) = \|x - y\| \rightarrow d(x, y) = |(x - y), (x - y)|^{1/2}.$$

Temos assim uma aplicação $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes condições:

D₁) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$.

D₂) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in E$,

D₃) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in E$.

⁵ **Base Canônica** - É uma base que tem como coeficientes da combinação linear os valores dos componentes do vetor:

$$R^2 \Rightarrow BP: c_1 = (1,0) \text{ e } c_2 = (0,1)$$

$$R^3 \Rightarrow BP: c_1 = (1,0,0), c_2 = (0,1,0) \text{ e } c_3 = (0,0,1) \dots$$

$$R^n \Rightarrow BP: c_1 = (1,0,0, \dots, 0), c_2 = (0,1,0, \dots, 0) \dots \text{ e } c_n = (0,0, \dots, 1)$$

⁶ **Base Ortonormal** - Para obtermos uma base ortonormal precisamos ter os vetores, dois a dois, ortogonais, e, tomar:

$$e_i^* = \frac{e_i}{\|e_i\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Usando a definição de distância, temos:

$$\begin{aligned} \text{dist}(f, P_m) &= \|f - P_m\| = |(f - P_m, f - P_m)|^{1/2} \\ &= \left[\int_a^b (f(x) - P_m(x))^2 dx \right]^{1/2} = \|f - P_m\|^2. \end{aligned}$$

Assim, o que desejamos é obter:

$$Q = \|f - P_m\|^2 = \text{mínima.}$$

(daí a justificativa para o nome **mínimos quadrados**)

Precisamos, então, determinar na classe de todos os polinômios de grau menor ou igual a m aquele que minimize:

$$Q = \|f - P_m\|^2 = \int_a^b (f(x) - P_m(x))^2 dx.$$

Sabemos, entretanto, que os polinômios de grau $\leq m$ constituem um espaço vetorial $K_m(x)$, do qual $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ é uma base. E mais: $K_m(x)$, para $x \in [a, b]$, é um subespaço de $C[a, b]$.

Usando *projeção ortogonal*⁷ de um vetor sobre um subespaço, temos que a distância de f a P_m será mínima quando P_m for a projeção ortogonal de f sobre $K_m(x)$.

⁷ **Projeção Ortogonal** – Num espaço euclidiano real, chama-se projeção ortogonal de x sobre $y, y \neq 0$, o vetor z definido por: $z = (\text{projeção de } x \text{ sobre } y) = \frac{(x,y)}{(y,y)}y$.

Resumindo: para aproximar $f \in C[a, b]$ por um polinômio $P_m(x)$ de grau no máximo m , basta determinar a projeção ortogonal de f sobre $K_m(x)$, o qual é gerado por $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$.

Portanto os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m de $P_m(x)$, são dados pelo sistema normal, isto é:

Temos que $P_m(x) = a_0L_0 + a_1L_1 + \dots + a_nL_n$

$$\begin{pmatrix} (L_0, L_0) & (L_1, L_0) & \dots & (L_m, L_0) \\ (L_0, L_1) & (L_1, L_1) & \dots & (L_m, L_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (L_0, L_m) & (L_1, L_m) & \dots & (L_m, L_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, L_0) \\ (f, L_1) \\ \vdots \\ (f, L_m) \end{pmatrix}.$$

Onde temos que $L_0 = 1, L_1 = x, \dots, L_n = x^m$. Então, temos que o sistema fica definido como:

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (x, 1) & \dots & (x^m, 1) \\ (1, x) & (x, x) & \dots & (x^m, x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1, x^m) & (x, x^m) & \dots & (x^m, x^m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, 1) \\ (f, x) \\ \vdots \\ (f, x^m) \end{pmatrix}$$

A menos que seja sugerido o produto escalar a ser utilizado, usa-se o produto escalar usual de $C[a, b]$, isto é, para $f, g \in C[a, b]$:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Exemplo: Seja $f(x) = x^4 - 5x$, $x \in [-1, 1]$. Aproximar f por um polinômio do 2º grau, usando o método dos mínimos quadrados.

Solução. Temos que: $f(x) \in C[-1, 1]$, e para $x \in [-1, 1]$, $K_2(x)$ é $\{1, x, x^2\}$.

Devemos, então, resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (x, 1) & (x^2, 1) \\ (1, x) & (x, x) & (x^2, x) \\ (1, x^2) & (x, x^2) & (x^2, x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, 1) \\ (f, x) \\ (f, x^2) \end{pmatrix}.$$

Usando o produto escalar usual de $C[-1, 1]$, segue que:

$$(1, 1) = \int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = 2,$$

$$(1, x) = \int_{-1}^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^1 = 0 = (x, 1).$$

$$(1, x^2) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3} = (x^2, 1) = (x, x).$$

$$(x, x^2) = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^1 = 0 = (x^2, x).$$

$$(x^2, x^2) = \int_{-1}^1 x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-1}^1 = \frac{2}{5}.$$

$$(f, 1) = \int_{-1}^1 (x^4 - 5x) dx = - \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{2}{5}.$$

$$(f, x) = \int_{-1}^1 (x^5 - 5x^2) dx = - \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{10}{3}.$$

$$(f, x^2) = \int_{-1}^1 (x^6 - 5x^3) dx = -\left(\frac{x^7}{7} - \frac{5x^4}{4}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{7}.$$

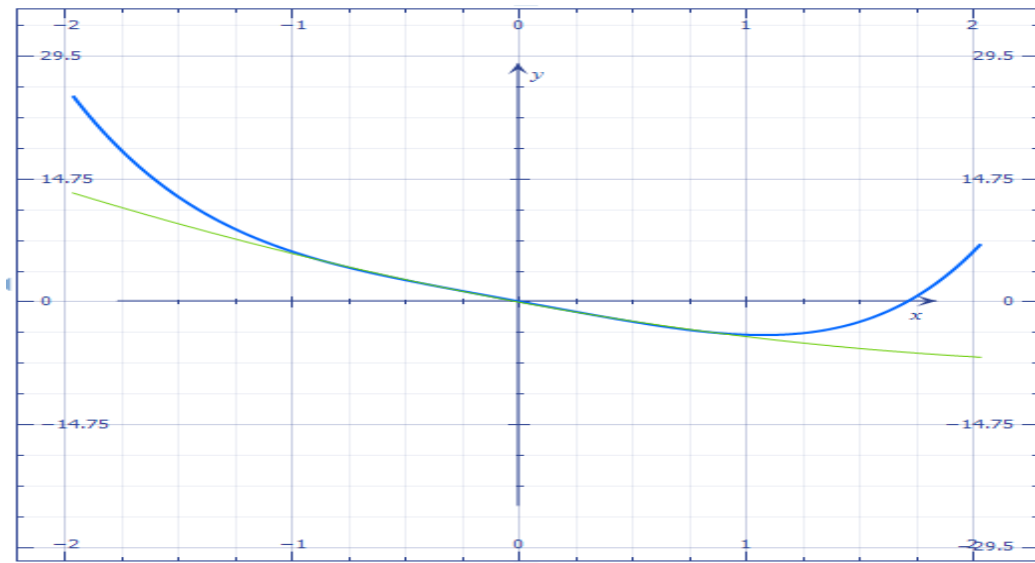
Assim, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -10/3 \\ 2/7 \end{pmatrix}.$$

cuja solução é $a_0 = -3/35$; $a_1 = -5$; $a_2 = 6/7$.

Portanto:

$$f(x) \cong P_2(x) = \frac{6}{7}x^2 - 5x - \frac{3}{35}$$



Na figura, o gráfico azul é da função $f(x) = x^4 - 5x$, enquanto o da cor verde é o de $P_2(x) = \frac{6}{7}x^2 - 5x - \frac{3}{35}$.

Veremos agora como ajustar funções pelo método dos mínimos quadrados através de polinômios ortonormais.

Consideremos então em $K_m(x)$, uma base⁸ $\{L_0^*(x), L_1^*(x), \dots, L_n^*(x)\}$ de polinômios ortonormais, isto é, polinômios tais que:

$$(L_i^*(x), L_j^*(x)) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Observe que tais polinômios podem ser obtidos ortonormalizando-se a base canônica $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ por Gram-Schmidt. A projeção ortogonal de $f \in [a, b]$ sobre $K_m(x)$ será então dada por:

$$P_m(x) = a_0 L_0^*(x) + a_1 L_1^*(x) + \dots + a_m L_m^*(x),$$

onde os a_i ; $i = 0, 1, \dots, m$, são obtidos resolvendo-se o sistema:

$$\begin{pmatrix} (L_0^*, L_0^*) & (L_1^*, L_0^*) & \dots & (L_m^*, L_0^*) \\ (L_0^*, L_1^*) & (L_1^*, L_1^*) & \dots & (L_m^*, L_1^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (L_0^*, L_m^*) & (L_1^*, L_m^*) & \dots & (L_m^*, L_m^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, L_0^*) \\ (f, L_1^*) \\ \vdots \\ (f, L_m^*) \end{pmatrix}.$$

Mas, tendo em vista os polinômios ortonormais e este sistema, podemos reduzi-lo a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, L_0^*) \\ (f, L_1^*) \\ \vdots \\ (f, L_m^*) \end{pmatrix}.$$

Agora, a solução segue trivialmente, isto é:

⁸ **Base** - Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes é chamado base de um K -espaço vetorial de dimensão n . Assim, qualquer vetor do espaço pode ser representado como combinação linear dos vetores da base.

$$a_i = (f, L_i^*) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Observe que ao invés de uma base ortonormal, considerássemos uma base $L_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$, **ortogonal**⁹, cada a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$, seria dado por:

$$a_i = \frac{(f, L_i)}{(L_i, L_i)}.$$

Temos então obtido $P_m(x)$ que aproxima f . Se agora quisermos aproximar f não só por $P_m(x)$ mas também por $P_{m+1}(x)$, devemos projetar f também sobre $K_{m+1}(x) \supset K_m(x)$.

Assim, uma base ortonormal para K_{m+1} será a base de $K_m(x)$ adicionada de $L_{m+1}^*(x)$ (ortonormal a $L_i^*(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$).

A projeção de f sobre $K_{m+1}(x)$ será:

$$P_{m+1} = a_0 L_0^*(x) + a_1 L_1^*(x) + \dots + a_m L_m^*(x) + a_{m+1} L_{m+1}^*(x),$$

onde os a_i são dados por:

$$a_i = (f, L_i^*) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, m + 1.$$

Observamos então que, uma vez obtido $P_m(x)$, basta calcularmos $L_{m+1}^*(x)$ e a_{m+1} para obter $P_{m+1}(x)$.

O processo pode ser repetido para $m + 2, m + 3, \dots$

Exemplo: Aproximar a função $f(x) = x^4 - 5x, x \in [-1, 1]$.

a) Por uma reta,

⁹ **Ortogonal** – dizemos que x é ortogonal a y , em símbolo $x \perp y$, se e somente se $(x, y) = 0$.

b) Por uma parábola.

Usando polinômios ortonormais.

Solução: A aproximação de $f(x)$ por uma reta será dada por:

$$f(x) \cong a_0 P_0^*(x) + a_1 P_1^*(x) = Q_1(x).$$

e então a aproximação por uma parábola será obtida fazendo:

$$f(x) \cong Q_1(x) + a_2 P_2^*(x) = Q_2(x).$$

Devemos primeiramente construir os $P_i(x)$ (ortogonais) utilizando o processo de Gram-Schmidt a partir de $\{1, x, x^2\}$.

Temos que:

$$P_0(x) = 1.$$

$$P_1(x) = x.$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Ortonormalizando primeiramente $P_0(x)$ e $P_1(x)$, para que possamos obter a reta que melhor aproxima $f(x)$, obtemos:

$$P_0^*(x) = \frac{P_0}{[P_0, P_0]^{1/2}} = \frac{1}{\left[\int_{-1}^1 dx\right]^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$P_1^*(x) = \frac{P_1}{[P_1, P_1]^{1/2}} = \frac{1}{\left[\int_{-1}^1 x^2 dx\right]^{1/2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} x.$$

Assim, os coeficientes a_0 e a_1 são dados por:

$$a_0 = (f, P_0^*) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{2} (x^4 - 5x) dx = \frac{\sqrt{2}}{5},$$

$$a_1 = (f, P_1^*) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{6}}{2} (x^4 - 5x) dx = -\frac{5\sqrt{6}}{3}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f(x) &\cong Q_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{5} P_0^*(x) - \frac{5\sqrt{6}}{3} P_1^*(x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{5\sqrt{6}}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) x. \end{aligned}$$

Devemos agora, ortonormalizar $P_2(x)$, (para obtermos a parábola). Assim:

$$P_2^*(x) = \frac{P_2}{[P_2, P_2]^{1/2}} = \frac{(x^2 - 1/3)}{[\int_{-1}^1 (x^2 - 1/3)^2 dx]^{1/2}} = \frac{3\sqrt{10}}{4} (x^2 - 1/3).$$

Então:

$$a_2 = (f, P_2^*) = \int_{-1}^1 \frac{3\sqrt{10}}{4} (x^2 - 1/3)(x^4 - 5x) dx = \frac{4\sqrt{10}}{35}.$$

Portanto:

$$f(x) \cong Q_2(x) = Q_1(x) + \frac{4\sqrt{10}}{35} L_2^*(x)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{5\sqrt{6}}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) x + \frac{4\sqrt{10}}{35} \left[\frac{3\sqrt{10}}{4} (x^2 - 1/3) \right].$$

Observe que se agruparmos os termos semelhantes na última expressão obtemos exatamente a resposta do exercício anterior, pois estaremos escrevendo a parábola em termos da base canônica $K_2(x)$. Portanto, temos que o valor de $P_2(x)$ será dado por:

$$f(x) \cong P_2(x) = \frac{6}{7}x^2 - 5x - \frac{3}{35}$$

1.3.2 Caso Discreto

Vejamos agora o caso em que a função é dada por $n + 1$ pares de pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, onde $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ com os $n + 1$ pontos x_0, x_1, \dots, x_n distintos.

Procuramos determinar um polinômio (a coeficientes reais)

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m,$$

de grau no máximo m , ($m < n$), e tal que:

$$Q = \|f - P_m\|^2,$$

seja mínimo. Usando o produto escalar:

$$(f, g) = \sum_{k=0}^n f(x_k)g(x_k),$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
Q &= \|f - P_m\|^2 = (f - P_m, f - P_m) \\
&= \sum_{k=0}^n [f(x_k) - P_m(x_k)]^2 = \sum_{k=0}^n (y_k - P_m(x_k))^2 \\
&= \sum_{k=0}^n (y_k - (a_0 + a_1 x_k + \dots + a_m x_k^m))^2.
\end{aligned}$$

Assim, dados os $n + 1$ pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n e $n + 1$ valores de uma função $y = f(x)$ sobre os pontos x_k , desejamos determinar um polinômio de grau no máximo m menor do que n tal que a soma dos quadrados dos desvios $y_k - P_m(x_k)$ entre os valores de $f(x)$ e $P_m(x)$ calculado nos pontos x_k seja a menor possível.

Na verdade, precisamos determinar, na classe de todos os polinômios de grau $\leq m$, aquele que minimize Q .

O nosso problema resulta em última análise na determinação dos coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m de $P_m(x)$. Assim, por definição:

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} P_m(x_0) \\ P_m(x_1) \\ \vdots \\ P_m(x_n) \end{pmatrix},$$

onde y e p são vetores do R^{n+1} .

Vemos que p pode ser escrito como, utilizando o polinômio P_m :

$$p = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x_0^2 \\ x_1^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^2 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} x_0^n \\ x_1^n \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^n \end{pmatrix}.$$

Denotando por:

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}; u_i = \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

podemos escrever:

$$p = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_m u_m.$$

Vamos mostrar agora que se os $n + 1$ pontos são distintos, então existe $m + 1$ vetores u_0, u_1, \dots, u_m que são *linearmente independentes*¹⁰.

Para tanto, observe que p pode também ser escrito como:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Seja A a matriz dos coeficientes, isto é:

¹⁰ **Linearmente independente** – Seja E um k -espaço vetorial. Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k \in E$ são linearmente independentes sobre k se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k \in k$, nem todos nulos, tais que:
 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.

Observamos que esta relação é válida se os coeficientes $\alpha_i; i = 1, 2, \dots, k$ são todos iguais a zero.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{pmatrix}.$$

A matriz A possui $n + 1$ linhas por $m + 1$ colunas, com $n > m$. Seja A' a submatriz quadrada constituída das $m + 1$ primeiras linhas e $m + 1$ primeiras colunas de A . Assim:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{pmatrix}.$$

A matriz A' é tal que $\det A' = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$. Desde que os pontos x_0, x_1, \dots, x_m são distintos segue que $\det A' \neq 0$. Então existe uma submatriz de A , de ordem $m + 1$, que é não singular. Assim, os vetores u_0, u_1, \dots, u_m são linearmente independentes.

Portanto u_0, u_1, \dots, u_m geram em R^{n+1} um subespaço vetorial V de *dimensão*¹¹ $m + 1 < n + 1$ (pois $m < n$, por hipótese).

Temos que $y \in R^{n+1}$ e $p \in V \subset R^{n+1}$ e queremos que a distância de y a p seja mínima. Isto ocorrerá quando p for a projeção ortogonal de y sobre V .

Os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m do polinômio procurado são então dados pelo sistema normal:

¹¹ **Dimensão** - Diz-se que um espaço vetorial V tem dimensão n (ou que V é n -dimensional) se V tem uma base consistindo de n vetores. A dimensão de V é denotada por $\dim V$.

$$\begin{pmatrix} (u_0, u_0) & (u_1, u_0) & \dots & (u_m, u_0) \\ (u_0, u_1) & (u_1, u_1) & \dots & (u_m, u_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_0, u_m) & (u_1, u_m) & \dots & (u_m, u_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, y_0) \\ (y, y_1) \\ \vdots \\ (y, y_m) \end{pmatrix}.$$

A menos que seja sugerido o produto escalar a ser utilizado, usa-se o produto escalar usual do R^{n+1} , isto é:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

onde $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)^t$ e $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)^t$.

Exemplo – Dada a função $y = f(x)$, por meio da tabela:

x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	7

ajustá-la por um polinômio do 2º grau, usando o método dos mínimos quadrados.

Solução- Neste caso queremos: $f(x) \cong P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Assim, devemos construir $p = a_0u_0 + a_1u_1 + a_2u_2$. Fazendo:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Devemos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} (u_0, u_0) & (u_1, u_0) & (u_2, u_0) \\ (u_0, u_1) & (u_1, u_1) & (u_2, u_1) \\ (u_0, u_2) & (u_1, u_2) & (u_2, u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y, y_0) \\ (y, y_1) \\ (y, y_2) \end{pmatrix}.$$

Usando o produto escalar usual do R^4 , segue que:

$$(u_0, u_0) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

$$(u_0, u_1) = -1 + 0 + 1 + 2 = 2 = (u_1, u_0)$$

$$(u_0, u_2) = 1 + 0 + 1 + 4 = (u_2, u_0)$$

$$(u_1, u_1) = 1 + 0 + 1 + 4 = 6,$$

$$(u_1, u_2) = -1 + 0 + 1 + 8 = (u_2, u_1),$$

$$(u_2, u_2) = 1 + 0 + 1 + 16 = 18,$$

$$(y, y_0) = 0 - 1 + 0 + 7 = 6,$$

$$(y, y_1) = 0 + 0 + 0 + 14 = 14,$$

$$(y, y_2) = 0 + 0 + 0 + 28.$$

Obtemos então o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix},$$

Então, temos o seguinte sistema de equações:

$$4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 6$$

$$2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = 14$$

$$6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 28$$

Logo, obtemos o seguinte resultado:

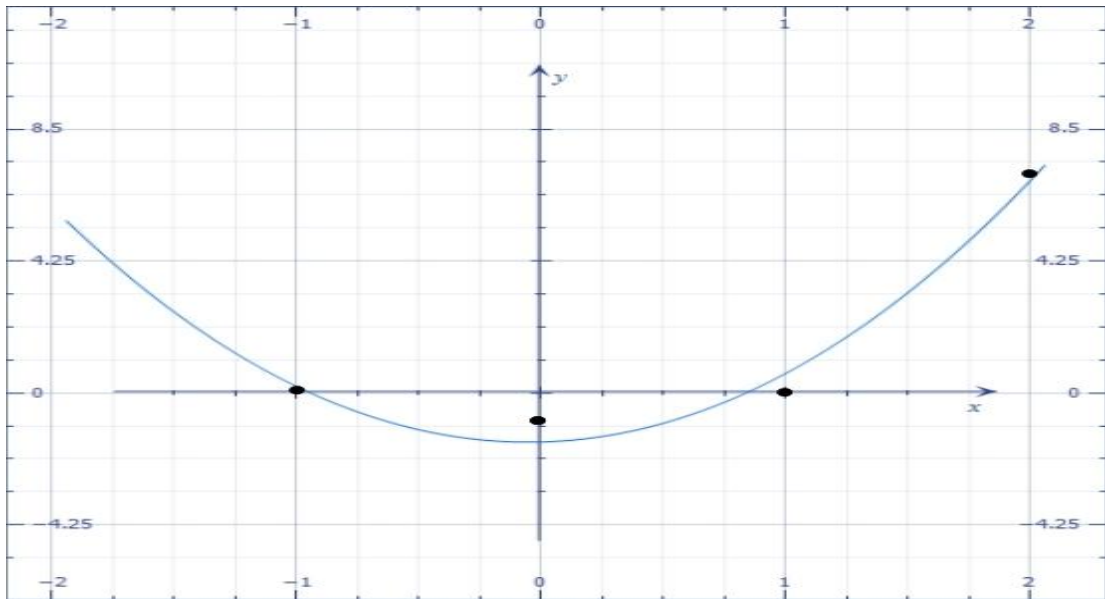
$$a_0 = -\frac{8}{5}; a_1 = \frac{1}{5}; a_2 = 2.$$

Portanto, a parábola que melhor aproxima a função tabelada é:

$$P_2(x) = 2x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{8}{5}.$$

Agora, construiremos o gráfico da parábola, para analisarmos melhor a tabela de pontos e se o gráfico é uma boa aproximação para a função nos pontos determinados.

Na figura, temos os pontos do gráfico em preto e a aproximação pelo método dos mínimos quadrados em azul.



1.3.3 Erro de Truncamento

O erro de truncamento no método dos mínimos quadrados é dado por Q .

Assim temos:

a) **Caso contínuo:**

$$Q = \|f - P_m\|^2 = \int_a^b (f(x) - P_m(x))^2 dx.$$

b) **Caso discreto:**

$$Q = \|f - P_m\|^2 = \sum_{k=0}^n (y_k - P_m(x_k))^2.$$

Para ilustrar, calculemos o erro de truncamento no último exemplo. Assim:

$$Q = \sum_{k=0}^3 (y_k - P_2(x_k))^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^3 y_k^2 - 2 \sum_{k=0}^3 y_k P_2(x_k) + \sum_{k=0}^3 P_2^2(x_k) \\
&= 50 - \frac{492}{5} + \frac{1230}{25} = \frac{4}{5} = 0,8.
\end{aligned}$$

Observações:

- a)** O valor encontrado ($Q = 0,8$) corresponde à soma dos quadrados dos desvios entre os valores da função e do polinômio calculados nos pontos tabelados. Além disso, podemos afirmar que a parábola encontrada é a melhor entre as equações do 2º grau, ou seja, para qualquer outra parábola teremos para Q um valor maior do que o encontrado.
- b)** Em muitos casos, os dados experimentais não se assemelham a polinômios. Faz-se necessário então procurar funções (não polinomiais) que melhor aproximem os dados.

Capítulo 2

Outros métodos de Interpolação Polinomial

2.1 Método da Matriz

Dado o espaço vetorial $P_n[a, b]$ com a base canônica, isto é, $\beta = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, desse modo temos que $\forall p \in P_n[a, b]$ é escrita da seguinte forma: $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$, onde :

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

É o vetor de coordenadas de p em relação à base canônica β .

Deve-se encontrar um polinômio $p \in P_n([a, b])$ satisfazendo as condições de interpolação pura. Considerando que o polinômio p escrito na forma $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$, tem-se as seguintes equações dadas pelas condições de interpolação pura: $p(x) = c_0 + c_1x_i + \dots + c_nx_i^n = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Desse modo, para cada ponto $x_i \in \pi$ para $i = 0, 1, \dots, n$ as equações formam um sistema linear $n + 1$ equações a $n + 1$ incógnitas c_0, \dots, c_n . Deve-se escrever as equações na forma matricial. Assim a matriz do sistema linear fica dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

que é denominada **Matriz de Vandermonde** associada aos pontos x_0, x_1, \dots, x_n .

O vetor do lado direito do sistema linear fica dado por:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Assim, o sistema linear pode ser definido da seguinte forma: $A \cdot \vec{c} = \vec{b}$.

Logo, o problema da interpolação polinomial fica resumido à resolução de um sistema linear de ordem $n + 1$, cuja solução é o vetor de coordenadas do polinômio interpolador da função de f nos pontos da partição, com relação à base canônica para $P_n([a, b])$. Como o polinômio interpolador é único, e fica bem determinado pelo vetor de coordenadas, pode-se concluir que o sistema linear dado pela matriz de Vandermonde possui solução única.

A estabilidade do sistema linear definido pela matriz de Vandermonde está relacionada com a escolha dos pontos de interpolação, bem como a ordem da matriz.

Exemplo: Encontrar o polinômio de grau $n = 2$ que interpola os pontos da tabela abaixo, usando matriz de Vandermonde.

x	$f(x)$
-1	4
0	1
2	-1

Resolução:

$$p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

$$p_2(x_0) = f(x_0) = c_0 - c_1 + c_2 = 4$$

$$p_2(x_1) = f(x_1) = c_0 = 1$$

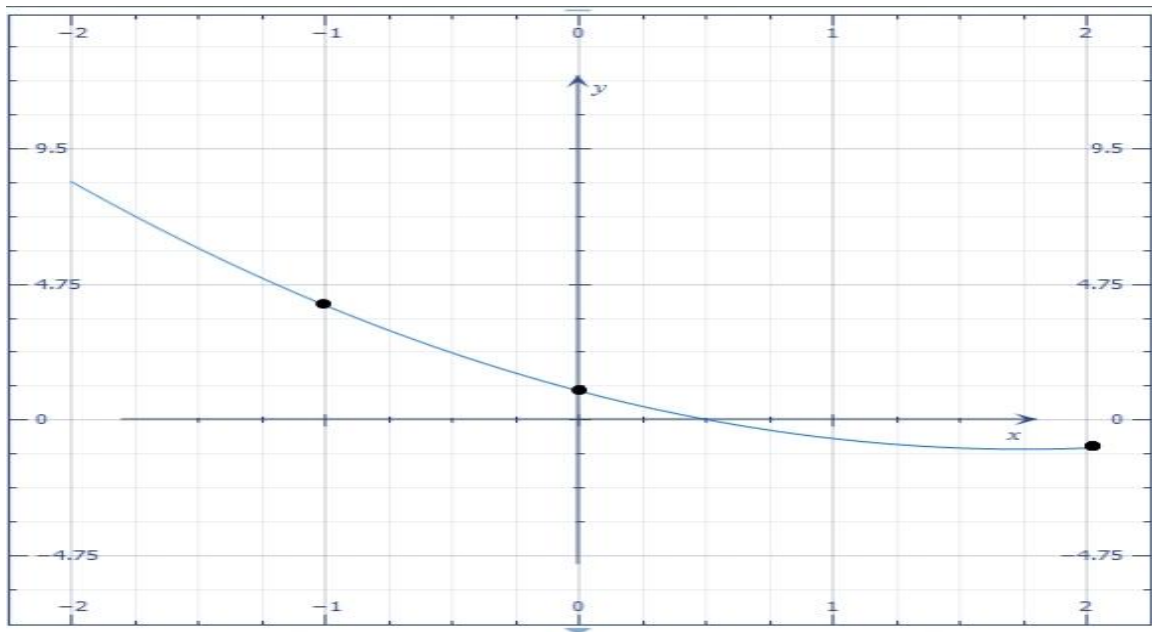
$$p_2(x_2) = f(x_2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \text{ ----- } \boxed{p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2}$$

A determinação do polinômio de interpolação por meio de solução de sistema pode ser muito trabalhosa, além de poder ocorrer erros de arredondamento, fazendo com que a solução obtida seja real. Por isso, devemos procurar outros métodos para a determinação deste polinômio.



Na figura observa-se o gráfico do polinômio interpolador pela matriz de Vandermonde, nos pontos destacados na função do exemplo.

2.2 Base de Lagrange

Dada uma base qualquer de $[a, b]$, isto é, $\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$, quero construir polinômios \mathcal{L}_i para $i = 0, 1, \dots, n$, de grau n que satisfaçam as seguintes condições:

$$\mathcal{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{i-1})(x_k - x_{i+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Como L_i é um polinômio de grau n com n raízes distintas nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, pode ser escrito da seguinte forma: $\mathcal{L}_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$ e imposto que a condição de que $\mathcal{L}_i(x_i) = 1$ obtemos o valor da constante c_i :

$$c_i = \frac{1}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}$$

Pode-se mostrar que o conjunto $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n\}$ é linearmente independente no espaço vetorial $P_n([a, b])$ que tem dimensão $n + 1$, portanto pode ser considerado como base para $P_n([a, b])$. Neste caso, dizemos que o polinômio $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ formam a **base de Lagrange** para $P_n[a, b]$ associada aos pontos x_0, x_1, \dots, x_n .

Desse modo, temos que $\forall p \in P_n[a, b]$ é escrito da seguinte forma:

$$p(x) = \alpha_0 \mathcal{L}_0(x) + \alpha_1 \mathcal{L}_1(x) + \dots + \alpha_n \mathcal{L}_n(x), \text{ onde}$$

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

é o vetor de coordenadas de p com relação à base \mathcal{L} .

2.3 Interpolação Polinomial de Lagrange

Seja $f: ([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e π uma partição qualquer de $[a, b]$, isto é, $\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. O objetivo é construir um polinômio $p \in P_n[a, b]$, considerando o espaço vetorial $P_n[a, b]$ com a base de Lagrange associada aos pontos de interpolação e que satisfaça as condições de interpolação pura, isto é,

$$\boxed{p(x_i) = f(x_i); \quad i = 0, 1, \dots, n.}$$

O polinômio p construído com as condições dadas é denominado polinômio interpolador de Lagrange da função f nos pontos da partição π . Considerando que o polinômio p seja representado da forma:

$$p(x) = \alpha_0 \mathcal{L}_0(x) + \alpha_1 \mathcal{L}_1(x) + \dots + \alpha_n \mathcal{L}_n(x)$$

E impondo as condições de interpolação pura, temos que:

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \mathcal{L}_j(x_i) = f(x_i); \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Como $\mathcal{L}_j(x_i) = \delta_{ij}$ temos que as coordenadas do polinômio interpolador são dadas por: $\alpha_i = f(x_i); i = 0, 1, \dots, n$.

Desse modo, o polinômio interpolador fica escrito da seguinte forma:

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)\mathcal{L}_j(x); \quad \forall x \in [a, b]$$

Observamos que as coordenadas do polinômio interpolador de Lagrange são obtidas sem nenhuma ferramenta computacional. Entretanto, todo o custo operacional está na construção dos polinômios de Lagrange, \mathcal{L}_i para $i = 0, 1, \dots, n$, associados aos pontos de interpolação. Neste caso, como não temos que resolver um sistema linear evitamos a instabilidade numérica na construção do polinômio interpolador.

Exemplo:

x	-1	0	3
$f(x)$	18	8	-1

Dado a tabela anterior, calcule:

- Determine o polinômio de interpolação na forma de Lagrange.
- Calcule uma aproximação para $f(1)$, usando o item **a**).

Resolução:

$$\begin{array}{lll}
 x_0 = -1, & & f_0 = f(x_0) = 18, \\
 x_1 = 0, & \text{e} & f_1 = f(x_1) = 8, \\
 x_2 = 3, & & f_2 = f(x_2) = -1.
 \end{array}$$

e, portanto, $n = 2$. Assim o polinômio na forma de Lagrange é dado por:

$$\sum_{j=0}^2 f(x_j) \mathcal{L}_j(x)$$

Determinar os polinômios $\mathcal{L}_j(x)$, $j = 0, 1, 2$. Tem-se:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 3)}{(-1 - 0)(-1 - 3)} = \frac{x^2 - 3x}{4}$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(0 + 1)(0 - 3)} = \frac{x^2 - 2x - 3}{-3}$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(3 + 1)(3 - 0)} = \frac{x^2 + x}{12}$$

Portanto:

$$p_2(x) = f_0 \mathcal{L}_0(x) + f_1 \mathcal{L}_1(x) + f_2 \mathcal{L}_2(x) =$$

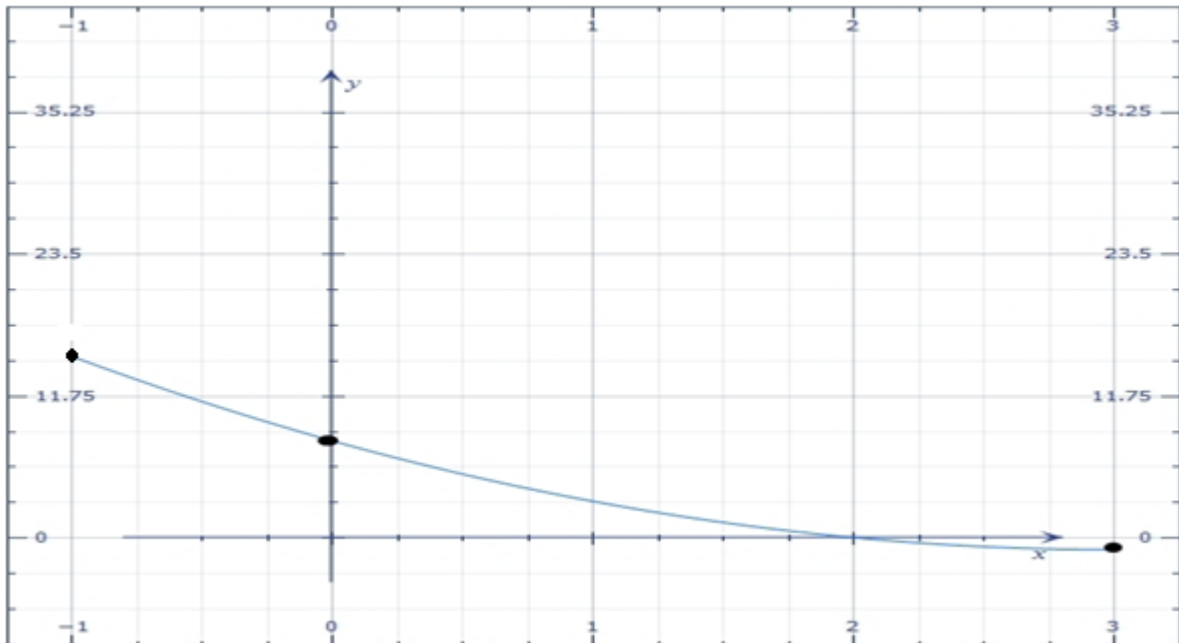
$$18 X \left[\frac{x^2 - 3x}{4} \right] + 8 X \left[\frac{x^2 - 2x - 3}{-3} \right] - 1 X \left[\frac{x^2 + x}{12} \right]$$

Agrupando os termos semelhantes, segue que:

$$\boxed{p_2(x) = x^2 - 6x + 8}$$

Uma aproximação de $f(1)$ é dada por $p_2(1)$. Assim:

$$f(1) \cong p_2(1) = 1^2 - 6(1) + 8$$



Na figura acima, o gráfico da função dada por um polinômio interpolador de 2º grau, dado pela fórmula de Lagrange.

Foi visto até então que para obter o valor da função num ponto não tabelado, podemos aproximar a função por seu polinômio de interpolação e através deste ter uma aproximação do valor da função no ponto. Agora, introduzirei um esquema prático para calcular o valor do polinômio de interpolação num ponto (não tabelado) sem determinar a expressão do polinômio.

Considere a **fórmula de Lagrange** e a **fórmula dos $\mathcal{L}_i(x)$** e, fazendo:

$$\pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

podemos escrever:

$$\mathcal{L}_i(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\pi'_{n+1}(x_i)},$$

onde $\pi'_{n+1}(x_i)$ é a derivada de $\pi_{n+1}(x)$ avaliada em $x = x_i$.

Primeiramente, calculamos as diferenças:

$$\underline{x - x_0} \quad x_0 - x_1 \quad x_0 - x_2 \quad \dots \quad x_0 - x_n$$

$$x_1 - x_0 \quad \underline{x - x_1} \quad x_1 - x_2 \quad \dots \quad x_1 - x_n$$

$$x_2 - x_0 \quad x_2 - x_1 \quad \underline{x - x_2} \dots x_2 - x_n$$

...

$$x_n - x_0 \quad x_n - x_1 \quad x_n - x_2 \quad \dots \quad \underline{x - x_n}$$

Denotamos o produto dos elementos da primeira linha por D_0 , o da segunda linha por D_1 e assim por diante. Observe que o produto da primeira linha é exatamente o denominador de $\mathcal{L}_0(x)$, o produto da segunda linha, o denominador de $\mathcal{L}_1(x)$, etc. o produto dos elementos da diagonal principal será, obviamente, $\pi_{n+1}(x)$ e, então, segue que:

$$\mathcal{L}_i(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{D_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Assim, a fórmula de Lagrange se reduz a:

$$P_n(x) = \pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{D_i} = \pi_{n+1}(x) \times S$$

onde:

$$S = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{D_i}$$

Portanto, obtemos o valor do polinômio num ponto, não tabelado, através do seguinte esquema:

Esquema Prático

i	$(x_i - x_k) \ i \neq k$	D_i	f_i	$\frac{f_i}{D_i}$
0	$x - x_0 \quad x_0 - x_1 \quad \dots \quad x_0 - x_n$	$(x - x_0) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^n (x_0 - x_k)$	f_0	$\frac{f_0}{D_0}$
1	$x_1 - x_0 \quad x - x_1 \quad \dots \quad x_1 - x_n$	$(x - x_1) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^n (x_0 - x_k)$	f_1	$\frac{f_1}{D_1}$
2	$x_2 - x_0 \quad x_2 - x_1 \quad \dots \quad x_2 - x_n$	$(x - x_2) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 2}}^n (x_0 - x_k)$	f_2	$\frac{f_2}{D_2}$
...
n	$x_n - x_0 \quad x_n - x_1 \quad \dots \quad x - x_n$	$(x - x_n) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^n (x_0 - x_k)$	f_n	$\frac{f_n}{D_n}$
$\pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$				S

Note que, no esquema acima, acrescentamos mais três colunas: uma com o resultado dos produtos das linhas, a próxima com o valor de f_i e finalmente a última coluna com o valor de f_i/D_i . A soma desta última coluna fornece o valor de S .

Exemplo: Aplicar o esquema acima ao exemplo anterior, isto é, calcular $f(1)$, sabendo que:

x	-1	0	3
$f(x)$	18	8	-1

Resolução: Montamos o esquema:

i	$(x_i - x_k) \ i \neq k$	D_i	f_i	$\frac{f_i}{D_i}$
0	2 -1 -4	8	15	$\frac{15}{8}$
1	1 1 -3	-3	8	$-\frac{8}{3}$
2	4 3 -2	-24	-1	$\frac{1}{24}$
$\pi_3(1) = -4$				$S = -\frac{3}{4}$

Assim, $p_2(1) = \pi_3(1) \times S = (-4) \times (3/4) = 3$, e, portanto $f(1) \cong p_2(1) = 3$.

2.4 Análise de Erro da Interpolação Polinomial

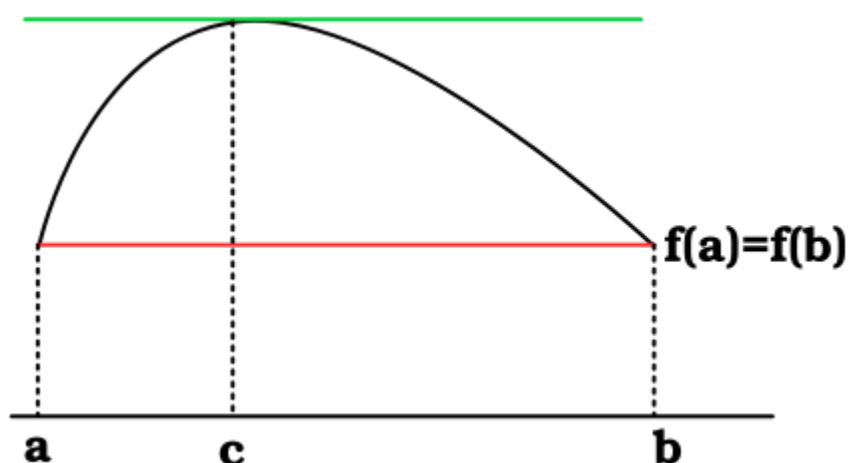
Como vimos, o polinômio de interpolação $p_n(x)$, da função f nos pontos da partição $\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$, tem a propriedade:

$$p_n(x) = f_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Nos pontos $\bar{x} = x$ nem sempre é verdade que $p(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Entretanto, para avaliar f nos pontos $\bar{x} \neq x_i, \ i = 0, 1, 2, \dots, n$ consideramos p como uma aproximação para a função $y = f(x)$ num certo intervalo que contenha os pontos x_0, x_1, \dots, x_n e calculamos $f(\bar{x})$ através de $P(\bar{x})$. Perguntas que surgem são, por exemplo, as seguintes: é o polinômio de interpolação uma boa aproximação para f ? Podemos ter

idéia do erro que cometemos quando substituímos f por p ? Estas e outras perguntas são respondidas quando estudamos a teoria do termo do resto.

Teorema De Rolle (2.4.1): Seja uma função f , contínua num intervalo $[a, b]$, e diferenciável em (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $\varepsilon \in (a, b)$, tal que $f'(\varepsilon) = 0$.



Demonstração: Se f for constante, a derivada é 0 em todos os pontos. Suponhamos que f não seja constante. Então há pontos de $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > f(a)(= f(b))$ ou existe algum ponto $x \in (a, b)$ tal que a função $f(x) > f(a)(= f(b))$. Vamos supor que estamos no primeiro caso, pois o outro é análogo.

Seja M o valor máximo que f toma e seja $\varepsilon \in (a, b)$ tal que $f(\varepsilon) = M$; um tal ε existe pelo **Teorema de Weierstrass**¹². Então, como existe algum $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > f(a)(= f(b))$, tem-se que $f(\varepsilon) \geq f(x) > f(a)(= f(b))$. Logo $\varepsilon \in (a, b)$. Por hipótese, f é derivável no ponto ε . Se $y \in (a, b)$, então $f(y) \leq f(\varepsilon)$ e:

¹² **Teorema de Weierstrass** - Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ e seja f uma função contínua de $[a, b]$ em \mathbb{R} e limitada. Então existem números $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que: $\forall x \in [a, b]: f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

$$y > \varepsilon \Rightarrow \frac{f(y) - f(\varepsilon)}{y - \varepsilon} \leq 0$$

$$y < \varepsilon \Rightarrow \frac{f(y) - f(\varepsilon)}{y - \varepsilon} \geq 0.$$

Resulta da primeira desigualdade que a derivada de f em ε é menor ou igual a 0 e resulta da segunda que a derivada de f em ε é maior ou igual a 0. Logo, a derivada é nula. ■

Extensão do Teorema de Rolle (2.4.2): Seja $f: [a, b] \Rightarrow R$ uma função de classe $C^{n+1}[a, b]$. Se a função f possui $(n + 2)$ zeros em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $\varepsilon \in (a, b)$ tal que $f^{n+1}(\varepsilon) = 0$.

Demonstração: Vamos demonstrar usando indução matemática.

Para $n = 1$, já está demonstrado pelo Teorema de Rolle.

Vamos supor válida, por hipótese de indução para n . Queremos provar que é válido para $n + 1$. Pelo Teorema de Rolle, para cada inteiro k no intervalo $[1, n]$, existe um ε_k no intervalo aberto (a_k, b_k) tal que $f'(\varepsilon_k) = 0$. Portanto, a primeira derivada satisfaz o que assumimos para $n + 1$ intervalos fechados $[\varepsilon_1, \varepsilon_2], \dots, [\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$. Pela hipótese de indução, há um ε para o qual a derivada $f^{n+1}(\varepsilon) = 0$. Como queríamos demonstrar. ■

Vejamos agora um teorema que nos dá a expressão do termo do erro.

Teorema (2.4.3): Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e suponhamos que $f^{n+1}(x)$ exista em cada ponto (a, b) , nos pontos da partição $\pi: a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$.

Então, para cada ponto $x \in [a, b]$, existe pelo menos um ponto $\varepsilon = \varepsilon(x) \in (a, b)$, tal que:

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{W(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\varepsilon)$$

$$W(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

E onde $\min \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\} < \varepsilon < \max \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$. O ponto ε depende de x .

Prova: Sendo $p_n(x) = f_k$, a função $e(x) = f(x) - p_n(x)$ se anula em $x = x_k$; $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Seja x fixado e tal que $x \neq x_k$; $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Considere as funções $K(x)$ e $F(t)$ definidas por:

$$K(x) = \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)} n, \quad x \neq x_k; k = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

e

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n)K(x).$$

A função $F(t)$ se anula nos $n + 1$ pontos $t = x_0, t = x_1, \dots, t = x_n$. Anula-se também em $t = x$, em virtude da equação de $K(x)$. A função $f^{n+1}(t)$ se anula em um ponto $\varepsilon = \varepsilon(x)$, tal que:

$$\min \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\} < \varepsilon < \max \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}.$$

Calculando $f^{n+1}(t)$ tendo em vista $F(t)$, obtemos:

$$f^{n+1}(t) = f^{n+1}(t) - (n+1)!K(x),$$

Então, substituindo t por ε segue que:

$$0 = f^{n+1}(\varepsilon) - (n+1)!K(x).$$

Portanto:

$$K(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!} \quad (2)$$

Assim temos, comparando (1) e (2):

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{W(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\varepsilon)$$

e, $\min \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\} < \varepsilon < \max \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$, o que demonstra o teorema.

Em vista desta fórmula, podemos escrever :

$$f(x) = p_n(x) + e(x).$$

O termo $e(x)$ é chamado de **termo do erro** ou **erro de truncamento**. É o erro que se comete no ponto x , quando se substitui a função por seu polinômio de interpolação calculado em x . ■

A importância do teorema é mais teórica do que prática, visto que não conseguimos determinar o ponto ε de tal modo que seja válida a igualdade. Na prática, para estimar o erro cometido ao aproximar o valor da função num ponto por seu polinômio de interpolação utilizamos o seguinte corolário.

Corolário - Seja:

$$e(x) = f(x) - p_n(x)$$

se $f(x)$ e suas derivadas até a ordem $n + 1$ são contínuas em $[a, b]$, então:

$$|e(x)| \leq \left| \frac{W(x)}{(n+1)!} \right| \max_{a \leq t \leq b} |f^{n+1}(t)|$$

onde $W(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Considerando uma partição regular de $[a, b]$, isto é, $h = x_{k+1} - x_k$ para todo $k = 0, 1, \dots, (n - 1)$, a função W satisfaz a desigualdade:

$$|W(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4} n!; \quad \forall x \in [a, b]$$

Assim, temos a seguinte fórmula para a **Estimativa do Erro da Interpolação Polinomial**:

$$|e(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{a \leq t \leq b} |f^{n+1}(t)|$$

Demonstração: Considere um ponto $\bar{x} \in (a, b)$, $\bar{x} \ni \pi = a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$, fixo, porém arbitrário. Vamos construir uma função auxiliar da seguinte forma:

$$\varphi(x) = |f(x) - p_n(x)| - \frac{W(x)}{W(\bar{x})} [f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})]; x \in [a, b]$$

Agora, basta verificar que a função φ satisfaz as hipóteses da Extensão do teorema de Rolle. Do mesmo modo, podemos verificar que a função φ é uma função de classe $C^{(n+1)}[a, b]$ e possui $n + 2$ zeros em $[a, b]$. Em seguida, aplicamos sucessivamente o Teorema de Rolle às funções $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n+1)}$. ■

Exemplo: Dada a tabela:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
e^{3x}	1	1,3499	1,8221	2,4596	3,3201	4,4817

Calcular um limitante superior para o erro de interpolação polinomial quando avaliamos $f(0,25)$, onde $f(x) = xe^{3x}$ usando polinômio de interpolação de 2º grau.

Resolução- Temos:

$$|e(x)| \leq \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} \right| \max_{a \leq t \leq b} |f^{n+1}(t)| |f'''(t)|.$$

como $f(t) = te^{3t}$, segue que:

$$f'(t) = e^{3t} + 3te^{3t} = e^{3t}(1 + 3t)$$

$$f''(t) = 3e^{3t}(1 + 3t) + 3e^{3t} = 6e^{3t} + 9te^{3t}$$

$$f'''(t) = 18e^{3t} + 9e^{3t} + 27te^{3t} = 27e^{3t}(1 + t).$$

Como queremos estimar o valor da função xe^{3x} no ponto 0,25 usando polinômio do 2º grau, devemos tomar três pontos consecutivos nas vizinhanças de 0,25. Tomando então: $x_0 = 0,2$; $x_1 = 0,3$; $x_2 = 0,4$, obtemos que:

$$\max_{x_0 \leq t \leq x_2} |f'''(t)| = 27e^{3(0,4)}(1 + 0,4) = 125,4998.$$

Estamos, portanto em condições de calcular um limitante superior para o erro de interpolação polinomial. Assim:

$$|e(x)| \leq \left| \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} \right| (125,4998) \cong 0,0078 \cong \boxed{8 \times 10^{-3}}$$

Pelo resultado obtido, vemos que se tomarmos um polinômio do 2º grau para avaliar $f(0,25)$, obteremos o resultado com duas casas decimais corretas.

Observações:

- a) O número de zeros depois do ponto decimal, no resultado do erro, fornece o número de casas decimais corretas que teremos na aproximação.
- b) Observe que poderíamos ter tomado: $x_0 = 0,1$; $x_1 = 0,2$ e $x_3 = 0,3$. Se tomarmos esses pontos, obtemos que $e(x) \cong 0,0054 \cong 5 \times 10^{-3}$, o que implica que obteremos duas casas decimais corretas na aproximação. Assim, tanto faz tomarmos um ponto à esquerda e dois a direita de 0,25, ou dois pontos a esquerda e um a direita, que o erro será da mesma ordem de grandeza.

Capítulo 3

Espaços de Elementos Finitos

Neste capítulo vamos abordar o problema da interpolação polinomial por partes. Construiremos as bases de Lagrange para os espaços das Funções de Lagrange Polinomiais por Partes e para as funções Cúbicas de Hermite, bem como, faremos uma análise de erro para cada uma das interpolações.

3.1 Espaços de Lagrange Polinomial por Partes

Podemos observar que a estimativa do erro da Interpolação Polinomial, dada por:

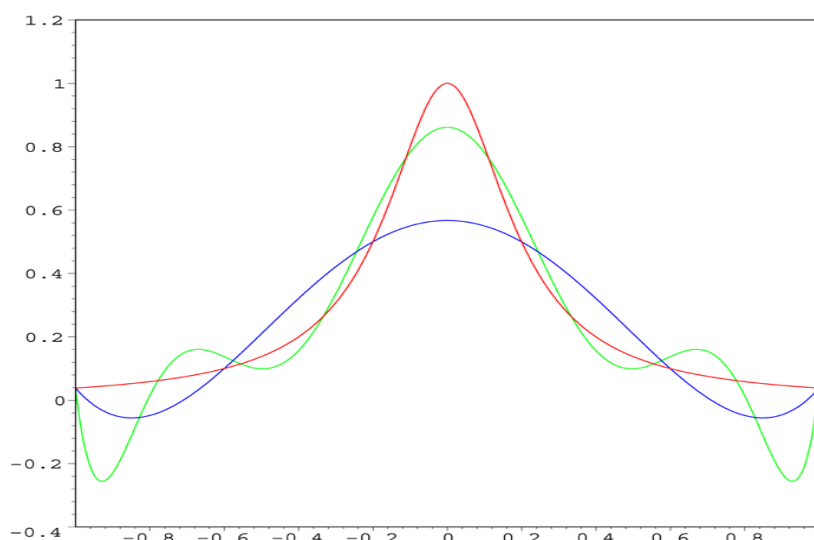
$$|e(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{a \leq t \leq b} |f^{n+1}(t)|,$$

depende fortemente do comportamento de f^{n+1} . Assim, quando estamos interpolando uma função em pontos equidistantes, por um polinômio de grau muito elevado, o erro vai depender se as derivadas de ordem $(n+1)$ da função f são limitadas ou não. Temos um exemplo muito interessante de um problema de interpolação polinomial onde a função é infinitamente continuamente diferenciável, mas suas derivadas crescem muito rapidamente fazendo com que o polinômio interpolador fique cada vez mais afastado da função conforme vamos aumentando o seu grau.

Exemplo: Considere a função $f(t) = 1/(1 + 25t^2)$ para $t \in [-1, 1]$. A função f possui derivada contínua de qualquer ordem no intervalo $[-1, 1]$, entretanto, tem-se

que $|f^{n+1}(0)|$ cresce muito rápido quando n cresce. A figura abaixo mostra este fenômeno, que é denominado de **fenômeno de Runge**, para polinômios interpoladores $p_n \in P_n[-1, 1]$, em pontos eqüidistantes, nos casos em que $n = 5$ e $n = 9$.

Na figura, a curva vermelha é a função de Runge; a azul é um polinômio de 5º grau, e a verde é um polinômio de 9º grau. Como vemos, a aproximação fica pior, conforme aumentamos o grau do polinômio.



Temos duas maneiras muito eficientes para evitar o fenômeno de Runge.

A primeira é na escolha dos pontos de interpolação. A escolha é feita observando que o erro da Interpolação Polinomial, dado por:

$$|W(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4} n!; \quad \forall x \in [a, b]$$

depende dos pontos de interpolação através da função W . Assim, vamos escolher os pontos de interpolação de modo que tenhamos: $\min \{ \max \{ |W(x)| \} \}; x \in [a, b]; \pi: a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$.

A escolha adequada dos pontos de interpolação para o problema apresentado no exemplo anterior são os zeros do polinômio de Chebyshev T^{n+1} , são denominados **Pontos de Interpolação de Chebyshev**, que são dados por:

$$T_{n+1}(x) = \cos(n \arccos(x))$$

T_n é um polinômio de grau n , que tem n raízes, dadas por:

$$t_j = -\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

No caso em que estamos trabalhando no intervalo $[a, b]$, basta fazer uma mudança de variável para obtermos os pontos de interpolação adequados;

$$x_j = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}t_j; \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Vamos refazer o exemplo, utilizando os zeros de T_{n+1} como pontos de interpolação para obter o polinômio interpolador p_n da função f .

$$f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$$

Solução: como temos o intervalo $[-1, 1]$, vamos trocar na equação de x_j , $b = 1$ e $a = -1$. Assim, temos:

$$x_j = \frac{(1-1)}{2} + \frac{(1-(-1))}{2}t_j = 0 + \frac{-2}{2} = -t_j$$

Como,

$$t_j = -\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

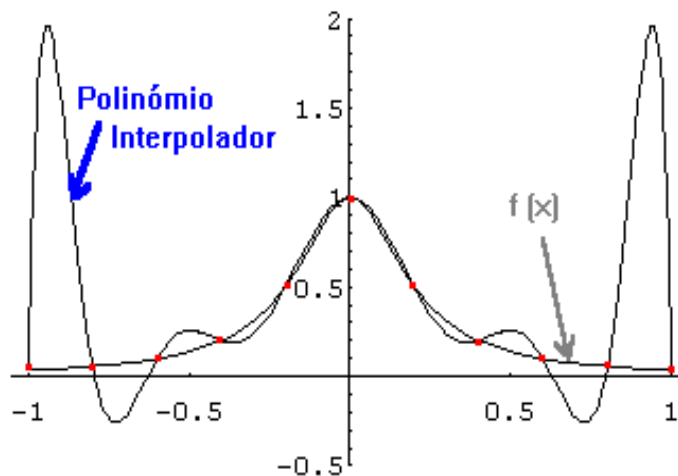
Temos:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right); \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Para um polinômio interpolado de 11º grau, temos $n = 11$ e $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ e 11. Substituindo cada um dos valores na fórmula de x_j e depois calculando os valores na função:

$$f(t) = \frac{1}{1 + 25t^2}$$

obtemos os valores de $f(0), f(1), f(2) \dots f(11)$. E, substituindo na fórmula do polinômio interpolador de Lagrange, obteremos uma função de 11º grau, cujo gráfico é:



A segunda maneira para evitar o fenômeno de Runge está na escolha do espaço de funções no qual vamos buscar a função interpolante. Vamos fazer a interpolação não em $P_n([a, b])$, mas em determinados espaços de funções onde seus elementos são polinômios por partes, definidos em uma partição qualquer de $[a, b]$. Esses espaços de funções são denominados **Espaços de Elementos Finitos**,

que passaremos a definir a seguir. Os espaços de elementos finitos são muito utilizados não somente em problemas de interpolação, mas também em problemas de quadrados mínimos e na obtenção de uma solução aproximada para problemas de valores de contornos por métodos variacionais.

Digamos que o fenômeno de Runge seria uma motivação para o estudo dos espaços de elementos finitos, bem como dos métodos variacionais, dentre os quais podemos mencionar o método dos quadrados mínimos e o Método de Galerkin. Entretanto, uma outra motivação está baseada no fato que, em geral, os métodos de aproximação de funções requerem a resolução de um sistema linear. Quando utilizamos os espaços de elementos finitos, a matriz do sistema linear resultante do método de aproximação tem sempre uma estrutura especial de esparsidade, o que facilita o seu armazenamento no que se refere à economia de memória. A combinação de espaços de elementos finitos e métodos variacionais resulta em sistemas lineares com boas propriedades de estabilidade numérica, o que é uma nova motivação para o estudo desses tópicos.

Definiremos a seguir os **Espaços de Funções de Lagrange Polinomial por Partes**.

Dada uma partição qualquer de $[a, b]$, isto é, $\pi: a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, seja $L_d(\pi)$ o conjunto das funções definidas no intervalo $[a, b]$, com as propriedades: $\forall s \in L_d(\pi)$,

tem-se que:

$$s(x) = p(x) \in P_d(k); \quad x \in K = [x_{k-1} - x_k] \quad s \in C[(a, b)],$$

isto é, s é um polinômio de grau menor ou igual a d em cada subintervalo $K = [x_{k-1} - x_k]$ e uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Podemos mostrar que $L_d(\pi)$ é um subespaço vetorial de $C[(a, b)]$ com $\dim(L_d(\pi)) = nd + 1$. É importante observar que nos espaços $L_d(\pi)$ o grau do polinômio em cada subintervalo K é sempre o mesmo, independentemente do número de subintervalos da partição π . Assim, evitamos o fenômeno de Runge nos problemas de interpolação.

3.2 Espaço das Funções de Lagrange Lineares

De acordo com a definição de espaço $L_d(\pi)$ temos as propriedades das funções no espaço $L_1(\pi)$ que é denominado de **Espaço das Funções de Lagrange Lineares por Partes**. Assim temos que, $\forall s \in L_1(\pi)$.

$$s(x) = p(x) \in P_1; \quad x \in K = [x_{k-1} - x_k]; \quad s \in C[(a, b)].$$

A seguir, vamos construir as funções em $L_1(\pi)$ e mostrar que este é um espaço vetorial de $C[(a, b)]$ com $\dim(L_1(\pi)) = nd + 1$. Neste caso, temos que a restrição de uma função que pertence a $L_1(\pi)$ é sempre um polinômio de grau menor ou igual a 1 em cada subintervalo, isto é, $s|_K = p \in P_1(k)$. O espaço $L_1(\pi)$ também é denominado **espaço das Funções Splines Lineares**.

A origem do nome spline vem de uma régua elástica, usada em desenhos de engenharia, que pode ser curvada de forma a passar por um dado conjunto de pontos (x_i, y_i) , que tem o nome de spline. Sob certas hipóteses (de acordo com a teoria da elasticidade) a curva definida pela régua pode ser descrita aproximadamente como sendo uma função por partes, cada qual um polinômio cúbico, de tal forma que ela e suas duas primeiras derivadas são contínuas sempre.

A terceira derivada, entretanto, pode ter descontinuidades nos pontos x_i .

Uma 'spline' é uma função segmentada e consiste na junção de várias funções definidas num intervalo, de tal forma que as partes estão ligadas umas as outras de uma maneira contínua e suave. Isto é, existe continuidade na 'spline' nos pontos que unem as partes. O conjunto de nós é um conjunto de pontos $\Gamma_n = \{x_i\}_{i=0}^n$, em que $a < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < b$, que divide um dado intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em segmentos. Aos pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} chamam-se nós interiores e aos x_0 e x_n chamam-se nós exteriores ou fronteiras.

Seja l um inteiro não negativo. Uma função $s_l: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se 'spline' de grau l se possuir as seguintes propriedades:

- a) $s_l \in C_{l-1}[a, b]$, isto é, s_l é uma função continuamente diferenciável até a ordem $l - 1$;
- b) $s_l \in P_l$ (é um polinômio de grau l) para $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n - 1$.

Vamos considerar a base de Lagrange para o espaço $P_1(k)$, associada aos pontos x_{k-1} e x_k , com o objetivo de utilizá-la na representação da restrição da função s aos subintervalos $K = [x_{k-1}, x_k]$.

Denotando por $\lambda_1^{(k)}$ e $\lambda_2^{(k)}$ as funções da base de Lagrange para $P_1(k)$, tem-se que:

$$\lambda_1^{(k)}(x) = \frac{(x_k - x)}{h_k}$$

$$\lambda_2^{(k)}(x) = \frac{(x - x_{k-1})}{h_k},$$

onde $h_k = x_k - x_{k-1}$ é o comprimento do k - ésimo subintervalo. Desse modo, temos que $\forall s \in L_1(\pi)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$s(x) = \alpha_1^k \lambda_1^{(k)}(x) + \alpha_2^k \lambda_2^{(k)}(x); \quad x \in K.$$

As funções $\lambda_1^{(k)}$ e $\lambda_2^{(k)}$ são chamadas de **Funções de Base Local**, no k - ésimo subintervalo, do espaço $L_1(\pi)$.

A partir da definição de base local, vamos construir as funções que são denominadas **Funções de Base Global** do espaço $L_1(\pi)$ associados aos pontos x_j da partição π . Denotando por $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_n$ as funções de base global, temos que:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{(x_1 - x)}{h_1} & ; \quad \text{se } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & ; \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{j-1})}{h_j} & ; \quad \text{se } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{(x_{j+1} - x)}{h_{j+1}} & ; \quad \text{se } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & ; \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{n-1})}{h_n} & ; \quad \text{se } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & ; \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

As funções φ_j possuem a seguinte propriedade:

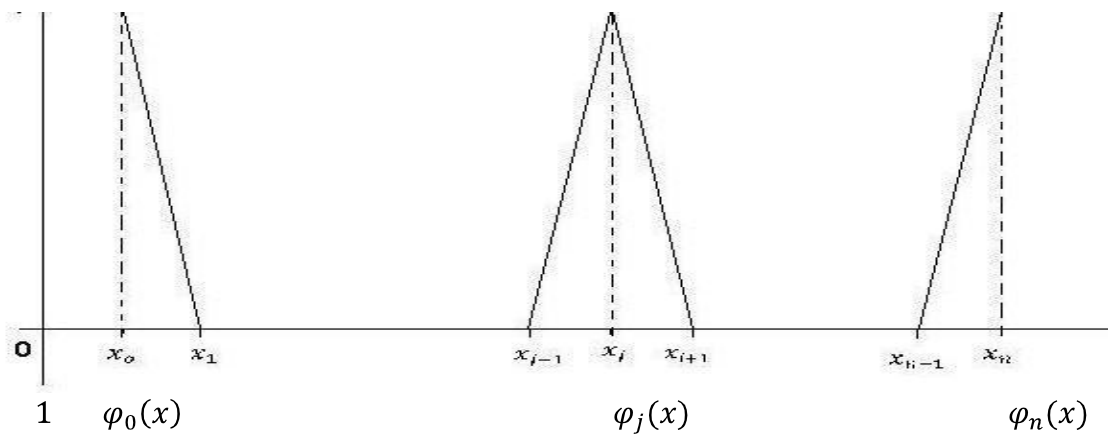
$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} \quad ; \quad 0 \leq i, j \leq n, \text{ onde } \delta_{ij} = \mathcal{L}_j(x_i)$$

e, sabemos que:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{i-1})(x_k - x_{i+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Fazendo com que essas funções sejam denominadas de funções de base nodais. Temos que toda função $s \in L_1(\pi)$ pode ser escrita de modo único da seguinte forma:

$$s(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x)$$



3.3 Espaço das Funções de Lagrange Quadráticas

Os elementos do $L_2(\pi)$, que é denominado **Espaço das Funções de Lagrange Quadráticas por Partes**, têm as seguintes propriedades: para toda $s \in L_2(\pi)$

$$s(x) = p(x) \in P_2(k) \quad ; \quad x \in K = [x_{k-1} - x_k]$$

$$s \in C[(a, b)].$$

A seguir, vamos construir as funções em $L_2(\pi)$ e mostrar que $L_2(\pi)$ é um subespaço vetorial de $C[(a, b)]$ com $\dim(L_2(\pi)) = 2n + 1$. Neste caso, temos que a

restrição de uma função que pertence a $L_2(\pi)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 2 em cada subintervalo, isto é, $s|_K = p \in P_2(k)$.

Vamos considerar a base de Lagrange para o espaço vetorial $P_2(k)$ associada aos pontos x_{k-1}, \bar{x}_k e x_k , onde \bar{x}_k é o ponto médio do k – ésimo subintervalo $K = [x_{k-1} - x_k]$.

Denotamos por $\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}$ e $\beta_3^{(k)}$ as funções de base de Lagrange para $P_2(k)$, que podem ser construídas em função da base de Lagrange de $P_1(k)$ da seguinte forma:

$$\beta_1^{(k)}(x) = \lambda_1^{(k)}(x)(2\lambda_1^{(k)}(x) - 1)$$

$$\beta_2^{(k)}(x) = 4\lambda_1^{(k)}(x)\lambda_2^{(k)}(x)$$

$$\beta_3^{(k)}(x) = \lambda_2^{(k)}(x)(2\lambda_2^{(k)}(x) - 1)$$

Desse modo, temos que toda função s de $L_2(\pi)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$s(x) = \alpha_1^k \beta_1^{(k)}(x) + \alpha_2^k \beta_2^{(k)}(x) + \alpha_3^k \beta_3^{(k)}(x); \quad x \in K = [x_{k-1} - x_k].$$

As funções $\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}$ e $\beta_3^{(k)}$ são chamadas **Funções de Base local**, no k – ésimo subintervalo, do espaço $L_2(\pi)$. A partir de definição de base local, vamos construir as funções que são denominadas **Funções de Base Global** do espaço $L_2(\pi)$ associadas aos pontos $x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$ da partição π e também aos pontos médios de cada subintervalo $\bar{x}_1 \in [x_0, x_1], \dots, \bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k], \dots, \bar{x}_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Desse modo, teremos $2n + 1$ funções de base nodais para o espaço $L_2(\pi)$.

Denotamos por $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2k-1}, \beta_{2k}, \dots, \beta_{2n-1}, \beta_{2n}$ as funções de base global.

Por convenção, as funções com enumeração par estão associadas aos pontos da partição π e as funções com enumeração ímpar estão associadas aos pontos médios dos subintervalos. Considerando as equações de $\beta_1^{(k)}(x)$, $\beta_2^{(k)}(x)$ e $\beta_3^{(k)}(x)$, temos que a função β_0 associada ao ponto x_0 é dada por

$$\beta_0^{(k)}(x) = \begin{cases} \beta_1^{(k)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

As funções $\beta_{2k}^{(k)}$ associadas aos pontos $x_k \in \pi$ para $k = 1, \dots, (n-1)$, são dadas por

$$\beta_{2k}^{(k)}(x) = \begin{cases} \beta_3^{(k)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \beta_1^{(k+1)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

As funções $\beta_{2k-1}^{(k)}$ associadas aos pontos médios $\bar{x}_k \in K$ para $k = 1, \dots, n$ são dadas por

$$\beta_{2k-1}^{(k)}(x) = \begin{cases} \beta_2^{(k)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A função $\beta_{2n}^{(k)}$ associada ao ponto x_n é dada por

$$\beta_{2n}^{(k)}(x) = \begin{cases} \beta_3^{(n)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, temos que $\forall s \in L_2(\pi)$ pode ser escrita de modo único da seguinte forma:

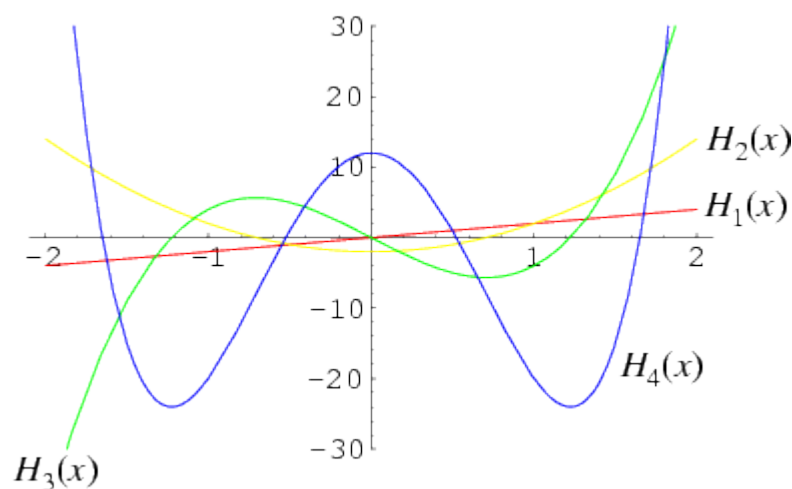
$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j \beta_j(x).$$

3.4 Espaço das Funções cúbicas de Hermite (Parte 1)

Os espaços $L_1(x)$ e $L_2(x)$ são subespaços vetoriais de $C([a, b])$, cujas funções são contínuas em $[a, b]$ mas com derivada descontínua nos pontos da partição π . Vamos agora estudar um espaço de funções polinomiais por partes, definidas sobre uma partição $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, cujas funções são contínuas com derivada também contínua no intervalo $[a, b]$. Mas antes, preciso definir os polinômios de Hermite.

3.4.1 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite $H_n(x)$ são fixados de *polinômios ortogonais* sobre o domínio $(-\infty, \infty)$ com a função de ponderação e^{-x^2} , ilustrado abaixo de $n = 1, 2, 3$ e 4. Polinômios de Hermite são implementados em matemática como *Hermite* $[n., X]$.



O polinômio de Hermite $H_n(x)$ pode ser definido pela integral de contorno:

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint e^{-t^2+2tx} t^{-n-1} dt$$

Onde o contorno inclui a origem e percorre um sentido horário.

Os primeiros polinômios de Hermite são:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

Eles são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com respeito à função e^{-x^2}

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = \delta_{mn}2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Os polinômios de Hermite satisfazem a condição de simetria:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x),$$

e obedecem também a relação de recorrência:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

3.4.2 Espaço das Funções cúbicas de Hermite (Parte 2)

Após definirmos os polinômios de Hermite, podemos agora, definir o espaço das funções cúbicas de Hermite.

Vamos definir o espaço $H_3(\pi)$ denominado **Espaço das funções Cúbicas de Hermite**, no qual seus elementos têm as seguintes propriedades: $\forall s \in H_3(\pi)$

$$s(x) = p(x) \in P_3(k) ; x \in K = [x_{k-1}, x_k]$$

$$s \in C^{(1)}([a, b]).$$

A seguir, vamos construir as funções em $H_3(\pi)$ e mostrar que este é um subespaço de $C^{(1)}[a, b]$ com $\dim(H_3(\pi)) = 2n + 2$. Neste caso, temos que a restrição de uma função que pertence a $H_3(\pi)$ é sempre um polinômio de grau menor ou igual a 3 em cada subintervalo, isto é, $s|_K = p \in P_3(k)$.

Inicialmente definimos a **base de Hermite** para o espaço vetorial $P_3(k)$ associada aos pontos x_{k-1} e x_k , com o objetivo de utilizá-la na representação da restrição da função s aos subintervalos $K = [x_{k-1}, x_k]$.

Denotamos por $\psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}, \psi_3^{(k)}$ e $\psi_4^{(k)}$ as funções da base de Hermite para $P_3(k)$ que possuem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \psi_1^{(k)}(x_{k-1}) = 1 & , & \psi_1^{(k)}(x_k) = 0 \\ (\psi_1^{(k)})'(x_{k-1}) = 0 & , & (\psi_1^{(k)})'(x_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_3^{(k)}(x_{k-1}) = 0 & , & \psi_3^{(k)}(x_k) = 1 \\ (\psi_3^{(k)})'(x_{k-1}) = 0 & , & (\psi_3^{(k)})'(x_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_2^{(k)}(x_{k-1}) = 1 & , & \psi_2^{(k)}(x_k) = 0 \\ (\psi_2^{(k)})'(x_{k-1}) = 0 & , & (\psi_2^{(k)})'(x_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_4^{(k)}(x_{k-1}) = 0 & , & \psi_4^{(k)}(x_k) = 1 \\ (\psi_4^{(k)})'(x_{k-1}) = 0 & , & (\psi_4^{(k)})'(x_k) = 0 \end{cases}$$

Como as funções da base de Hermite são polinômios de grau 3, podemos escrevê-las da seguinte forma:

$$\psi_j^{(k)}(x) = \alpha_0^k + \alpha_1^k x + \alpha_2^k x^2 + \alpha_3^k x^3 ; k = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, 3, 4.$$

Impondo as condições:

$$\begin{cases} \psi_1^{(k)}(x_{k-1}) = 1 & , & \psi_1^{(k)}(x_k) = 0 \\ (\psi_1^{(k)})'(x_{k-1}) = 0 & , & (\psi_1^{(k)})'(x_k) = 0 \end{cases}$$

Temos que resolver um sistema linear com 4 equações e 4 incógnitas: $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \alpha_4^k$ para obtermos a primeira função de base:

$$\psi_1^{(k)} = \frac{(x - x_k)^2(2x + x_k - 3x_{k-1})}{h_k^3}.$$

Impondo as condições:

$$\begin{cases} \psi_3^{(k)}(x_{k-1}) = 0 & , & \psi_3^{(k)}(x_k) = 1 \\ (\psi_3^{(k)})'(x_{k-1}) = 0 & , & (\psi_3^{(k)})'(x_k) = 0 \end{cases}$$

Temos que resolver um sistema linear com 4 equações e 4 incógnitas: $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \alpha_4^k$ para obtermos a terceira função de base:

$$\psi_3^{(k)} = \frac{-(x - x_{k-1})^2(2x + x_{k-1} - 3x_k)}{h_k^3}.$$

Impondo as condições:

$$\begin{cases} \psi_3^{(k)}(x_{k-1}) = 1 & , & \psi_3^{(k)}(x_k) = 0 \\ (\psi_3^{(k)})'(x_{k-1}) = 0 & , & (\psi_3^{(k)})'(x_k) = 0 \end{cases}$$

Temos que resolver um sistema linear com 4 equações e 4 incógnitas: $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \alpha_4^k$ para obtermos a segunda função de base:

$$\psi_2^{(k)} = \frac{(x - x_k)^2(x - x_{k-1})}{h_k^2}.$$

Impondo as condições:

$$\begin{cases} \psi_2^{(k)}(x_{k-1}) = 0 & , & \psi_2^{(k)}(x_k) = 1 \\ (\psi_2^{(k)})'(x_{k-1}) = 0 & , & (\psi_2^{(k)})'(x_k) = 0 \end{cases}$$

Temos que resolver um sistema linear com 4 equações e 4 incógnitas: $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \alpha_4^k$ para obtermos a quarta função de base:

$$\psi_4^{(k)} = \frac{(x - x_{k-1})^2(x - x_k)}{h_k^2}.$$

Podemos mostrar que as funções $\psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}, \psi_3^{(k)}$ e $\psi_4^{(k)}$ são linearmente independentes em $P_3(k)$, portanto, formam uma base para este espaço.

Desse modo, temos que $\forall s \in H_3(\pi)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$s(x) = \alpha_1^k \psi_1^{(k)}(x) + \alpha_2^k \psi_2^{(k)}(x) + \alpha_3^k \psi_3^{(k)}(x) + \alpha_4^k \psi_4^{(k)}(x) ; x \in K.$$

As funções $\psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}, \psi_3^{(k)}$ e $\psi_4^{(k)}$ são chamadas de **Funções de Base Local**, no k – ésimo subintervalo, do espaço $H_3(\pi)$.

Denotaremos por $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{2k}, \psi_{k+1}, \dots, \psi_{2n}, \psi_{2n+1}$ as funções da base global para o espaço $H_3(\pi)$. As funções com enumeração par estão associadas aos pontos da partição π com informações sobre a interpolação do valor da função e as funções com enumeração ímpar estão associadas aos pontos da partição π com informações sobre a interpolação do valor da derivada.

As funções ψ_0 e ψ_1 associadas ao ponto x_0 são dadas por:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi_1^{(1)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi_2^{(1)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

As funções ψ_{2k} associadas aos pontos $x_k \in \pi$ para $k = 1, \dots, (n - 1)$, são dadas por:

$$\psi_{2k}(x) = \begin{cases} \psi_3^{(k)} & ; \text{ se } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \psi_1^{(k+1)} & ; \text{ se } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

As funções ψ_{2k+1} associadas aos pontos $x_k \in \pi$ para $k = 1, \dots, (n - 1)$, são dadas por:

$$\psi_{2k+1}(x) = \begin{cases} \psi_4^{(k)} & ; \text{ se } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \psi_2^{(k+1)} & ; \text{ se } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

As funções ψ_{2n} e ψ_{2n+1} associadas ao ponto x_n são dadas por:

$$\psi_{2n}(x) = \begin{cases} \psi_3^{(n)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\psi_{2n+1}(x) = \begin{cases} \psi_4^{(n)}(x) & ; \text{ se } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Podemos mostrar que as funções $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{2k}, \psi_{k+1}, \dots, \psi_{2n}, \psi_{2n+1}$ são linearmente e formam uma base para o espaço $H_3(\pi)$. Observamos também que as funções da base global possuem as seguintes propriedades:

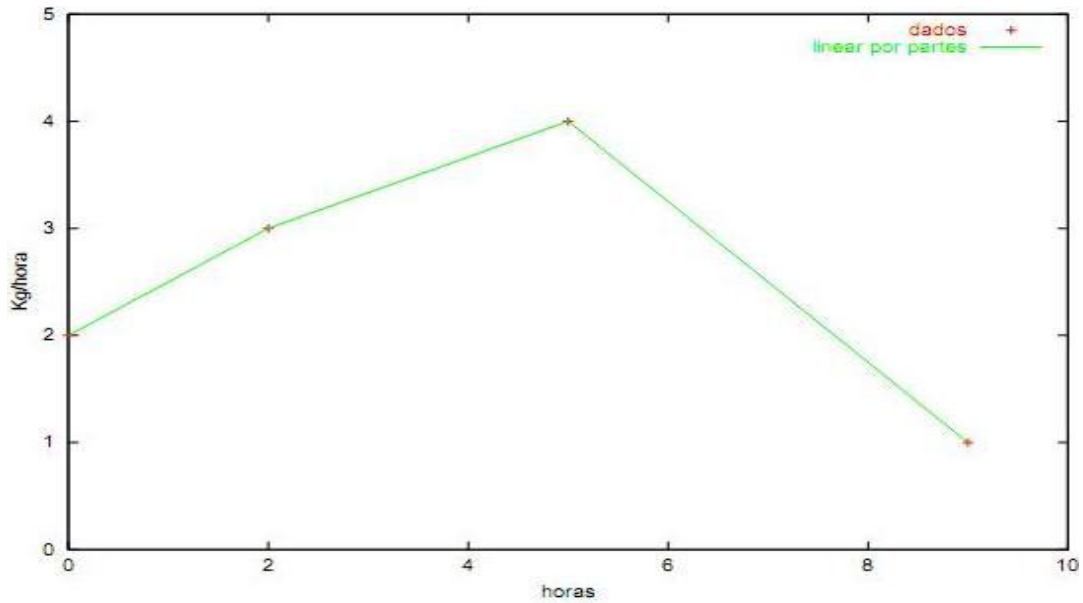
$$\begin{cases} \psi_{2j}(x_i) = \delta_{ij} & ; \quad 0 \leq i, j \leq n \\ \psi'_{2j}(x_i) = 0 & ; \quad 0 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'_{2j+1}(x_i) = \delta_{ij} & ; \quad 0 \leq i, j \leq n \\ \psi_{2j}(x_i) = 0 & ; \quad 0 \leq i, j \leq n. \end{cases}$$

Portanto, temos que $\forall s \in H_3(\pi)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} \alpha_j \psi_j(x).$$

3.5 Interpolação Polinomial por Partes



Se a função $f(x)$ está tabelada em $(n + 1)$ pontos e a aproximamos por um polinômio de grau n que a interpola nos pontos tabelados, o resultado dessa aproximação pode ser desastroso.

Uma alternativa é interpolar $f(x)$ em grupos de poucos pontos, obtendo-se polinômio de grau menor, e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até certa ordem.

No caso das funções spline, a opção feita é aproximar a função tabelada, em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, por um polinômio de grau p , com algumas imposições sobre a função.

A função spline linear interpolante de $f(x)$, $s_1(x)$, nos nós x_0, x_1, \dots, x_n pode ser escrita em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ como:

$$s_1(x_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_j(x_i) = f(x_i) \quad ; \quad 0 \leq i \leq n.$$

Como $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ obtemos que $\alpha_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Podemos observar que na interpolação por partes em $L_1(\pi)$, como as funções de base são nodais, os coeficientes da função interpolante são obtidos sem a necessidade da resolução de um sistema linear. Assim, temos que o polinômio interpolador, em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, é dado por:

$$s_1(x_i) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{h} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{h}, \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Verificação:

a) $s_1(x_i)$ é um polinômio de grau 1 em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por definição;

b) $s_1(x_i)$ é contínua em (x_{i-1}, x_i) , por definição, e, nos nós x_i , realmente s_1 está bem definida, pois: $s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \Rightarrow s_1(x_i)$ é contínua em $[a, b]$ e, portanto, $s_1(x_i)$ é spline linear;

c) $s_1(x_i) = f(x_i) \Rightarrow s_1(x_i)$ é spline linear interpolante nos nós x_0, x_1, \dots, x_n .

Exemplo: Ache a função spline linear que interpola a função tabelada:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
	1	2	5	7
$f(x)$	1	2	3	2,5

Solução: De acordo com a definição, para $s_1(x)$, temos:

$$s_1(x_0) = f(x_0) \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$s_1(x_0) = 1 \frac{2 - x}{2 - 1} + 2 \frac{x - 1}{2 - 1} = 2 - x + 2x - 2$$

$$s_1(x_0) = x \quad ; \quad x \in [1, 2].$$

Para $s_1(x_1)$, temos:

$$s_1(x_1) = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$s_1(x_1) = 2 \frac{5 - x}{5 - 2} + 3 \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{2}{3}(5 - x) + x - 2$$

$$s_1(x_1) = \frac{1}{3}(x + 4)$$

$$s_1(x_1) = \frac{x + 4}{3} \quad ; \quad x \in [2, 5].$$

Para $s_1(x_2)$, temos:

$$s_1(x_2) = f(x_2) \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + f(x_3) \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$s_1(x_2) = 3 \frac{7 - x}{7 - 5} + 2,5 \frac{x - 5}{7 - 5} = \frac{1}{2}(-0,5x + 8,5)$$

$$s_1(x_2) = \frac{-x + 17}{4} \quad ; \quad x \in [5, 7].$$

A spline linear apresenta a vantagem de ter derivada primeira descontínua nos nós.

De modo análogo, podemos encontrar uma função $s_2 \in L_2(\pi)$ satisfazendo as condições de interpolação pura, isto é,

$$s_2(x_i) = f(x_i) \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

$$s_2(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_i) \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

A função s_2 construída com as condições acima é denominada função de Lagrange Quadrática interpolante da função f nos pontos da partição π e nos pontos médios de cada subintervalo. Utilizando as funções de base do espaço $L_2(\pi)$ temos que:

$$s_2(x_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \beta_j(x_i) = f(x_i) \quad ; \quad 0 \leq i \leq n$$

$$s_2(\bar{x}_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \beta_j(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_i) \quad ; \quad 0 \leq i \leq n.$$

As funções de base do espaço $L_2(\pi)$ são nodais, obtemos que $\alpha_{2i} = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, n$ e obtemos $\alpha_{2i-1} = f(\bar{x}_i)$ para $i = 0, 1, \dots, n$, sem a necessidade de um sistema linear.

Finalmente, veremos como usar as funções cúbicas de Hermite em problemas de interpolação. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ numa função de classe $C^{(1)}([a, b])$ e π uma partição qualquer de $[a, b]$, isto é, $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Queremos encontrar uma função $s \in H_3(\pi)$ satisfazem as condições mistas de interpolação e suavidade, isto é,

$$s(x_i) = f(x_i) \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$s'(x_i) = f'(x_i) \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

A função s construída com as condições acima é denominada função cúbica de Hermite interpolante das funções f e f' nos pontos da partição π . Utilizando as funções de base do espaço $H_3(\pi)$ temos que:

$$s(x_i) = \sum_{j=0}^{2n+1} \alpha_j \psi_j(x_i) = f(x_i) \quad ; \quad 0 \leq i \leq n.$$

Como as funções de base do espaço $H_3(\pi)$ possuem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \psi_{2j}(x_i) = \delta_{ij} & ; \quad 0 \leq i, j \leq n \\ \psi'_{2j}(x_i) = 0 & ; \quad 0 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'_{2j+1}(x_i) = \delta_{ij} & ; \quad 0 \leq i, j \leq n \\ \psi_{2j+1}(x_i) = 0 & ; \quad 0 \leq i, j \leq n, \end{cases}$$

obtemos que $\alpha_{2i} = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, n$ e obtemos $\alpha_{2i+1} = f'(x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, n$, sem a necessidade da resolução de um sistema linear.

Exemplo: Determinar o valor aproximado de $\ln(1,5)$, sabendo que:

x	1	2
$\ln(x)$	0	0,693147
$\frac{1}{x}$	1	0,5

Tem-se que:

x	$f(x)$	D	D^2	D^3
$x_0 = 1$	0	$1 = f'(1)$	-0,306853	0,113706
$x_0 = 1$	0	0,693147	-0,193147	
$x_1 = 2$	0,693147	$0,5 = f'(2)$		

$x_1 = 2$	0,693147			
-----------	----------	--	--	--

Solução: Tendo-se que o polinômio de Hermite de grau 3 é:

$$H_3(x) = (x - 1) - 0,306853(x - 1)^2 + 0,113706(x - 1)^2(x - 2)$$

$$H_3(x) = (x - 1) - 0,306853(x^2 - 2x + 1) + 0,113706(x^2 - 2x + 1)(x - 2)$$

$$H_3(x) = (x - 1) - 0,306853(x^2 - 2x + 1) + 0,113706(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$$

$$H_3(x) = x - 1 - 0,306853x^2 + 0,613706x - 0,306853 + 0,113706x^3 - 0,454824x^2 + 0,56853x - 0,227412$$

$$H_3(x) = 0,113706x^3 - 0,761677x^2 + 2,182236x - 1,534265.$$

3.6 Erro da Interpolação Polinomial por Partes

A partir do **teorema 2.4.4**, provado no capítulo anterior, obtivemos a fórmula do erro da interpolação polinomial de Lagrange:

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{W(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

E, a partir das seguintes desigualdades:

$$|W(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4} n!; \quad \forall x \in [a, b] \text{ e } |e(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} |f^{n+1}(t)|$$

obtemos os seguintes resultados pra o erro da interpolação polinomial por partes.

Teorema 3.6.1 – Seja $f \in C^{(2)}([a, b])$ e $s_1 \in L_1(\pi)$ a função spline linear que interpola a função f na partição $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Então, para todo $x \in [x_{k-1}, x_k]$, existe pelo menos um ponto $\xi_k = \xi(x) \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que:

$$e^{(k)}(x) = f(x) - s_1(x) = \frac{W^{(k)}(x)}{2!} f^{(2)}(\varepsilon_k),$$

onde $W^{(k)}(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k)$.

É fácil mostrar que a função $W^{(k)}$ satisfaz:

$$|W^{(k)}(\bar{x}_k)| = \max\{|W^{(k)}(x)| \ ; \ x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \frac{h_k^2}{4}.$$

Assim, temos uma **estimativa para o Erro da Interpolação** em $L_1(\pi)$:

$$|e^{(k)}(x)| \leq \frac{h_k^2}{8} \max\{|f^{(2)}(x)| \ ; \ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}. \blacksquare$$

Teorema 3.6.2 – Seja $f \in C^{(3)}[a, b]$ e $s_2 \in L_2(\pi)$ a função de Lagrange Quadrática que interpola a função f na nos pontos da partição $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Então, para todo $x \in [x_{k-1}, x_k]$, existe pelo menos um ponto $\varepsilon_k = \varepsilon(x) \in (x_{k-1}, x_k)$, tal que:

$$e^{(k)}(x) = f(x) - s_2(x) = \frac{W^{(k)}(x)}{3!} f^{(3)}(\varepsilon_k),$$

onde $W^{(k)}(x) = (x - x_{k-1})(x - \bar{x}_k)(x - x_k)$.

Utilizando a desigualdade:

$$|W(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4} n!; \quad \forall x \in [a, b].$$

Podemos mostrar que a função $W^{(k)}$ satisfaz a seguinte desigualdade:

$$|W(x)| \leq \frac{h_k^3}{16} \quad ; \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Assim, temos uma **Estimativa para o Erro da Interpolação** em $L_2(\pi)$:

$$|e^{(k)}(x)| \leq \frac{h_k^3}{96} \max\{|f^{(3)}(x)| \quad ; \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k\}. \blacksquare$$

Teorema 3.6.3 - Seja $f \in C^{(4)}([a, b])$ e $s \in H_3(\pi)$ a função cúbica de Hermite que interpolando f e f' na partição $\Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Então, para todo $x \in [x_{k-1}, x_k]$, existe pelo menos um ponto $\varepsilon_k = \varepsilon(x) \in (x_{k-1}, x_k)$, tal que:

$$e^{(k)}(x) = f(x) - s(x) = \frac{W^{(k)}(x)}{4!} f^{(4)}(\varepsilon_k),$$

onde $W^{(k)}(x) = (x - x_{k-1})^2(x - x_k)^2$.

Utilizando a seguinte relação:

$$|W^{(k)}(\bar{x}_k)| = \max\{|W^{(k)}(x)| \quad ; \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \frac{h_k^2}{4}.$$

Temos a **Estimativa para o Erro da Interpolação** em $H_3(\pi)$:

$$|e^{(k)}(x)| \leq \frac{h_k^4}{384} \max\{|f^{(4)}(x)| \quad ; \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Demonstração do teorema: considere um ponto $\bar{x} \in (x_{k-1}, x_k)$, fixo, porém arbitrário

o. Vamos construir uma função auxiliar da seguinte forma:

$$\varphi(x) = [f(x) - s(x)] - \frac{W^{(k)}(x)}{W^{(k)}(\bar{x})} [f(\bar{x}) - s(\bar{x})] \quad ; \quad x \in [x_{k-1}, x_k].$$

De modo análogo à demonstração do **Teorema de Análise do Erro Polinomial**, basta verificar que a função φ é uma função de classe $C^4([x_{k-1}, x_k])$ e que se anula nos pontos x_{k-1}, \bar{x}_k, x . Observe a multiplicidade dos zeros, em seguida aplique sucessivamente o Teorema de Rolle às funções $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(4)}$. ■

Anexo

Um pouco da História matemática

Alexandre-Théophile Vandermonde

O pai de Alexandre era médico e que exercia sua profissão originalmente em Landrices, mas passaram 12 anos no Oriente. Ele tinha criado um consultório médico em Paris e lá estava trabalhando como médico quando seu filho Alexandre-Théophile nasceu, no dia 28 de fevereiro de 1735. Ele não incentivava seu filho a seguir sua carreira de médico, mas queria que tivesse uma carreira na música.

Certamente, ele não estava interessado em matemática quando era jovem. Seu primeiro amor foi a música e seu instrumento foi o violino. Prosseguiu na música, somente virou-se para a matemática aos 35 anos. Foi Fontaine des Bertins, cujo entusiasmo pela matemática fascinou Vandermonde.

Talvez surpreendentemente ele fosse eleito para a *Académie des Sciences* em 1771 com poucas provas de ser gênio matemático, diferente do seu primeiro documento que, embora ele não sendo um membro a altura, foi lido para a academia em novembro de 1770. No entanto ele fez uma contribuição notável para a matemática no presente documento e em outro três documentos que apresentou à academia entre 1771 e 1772.

A eleição de Vandermonde para a *Académie des Sciences* o motivou a trabalhar arduamente e a publicar outras obras sobre a ciência e a música.

Talvez o nome de Vandermonde seja mais conhecido hoje devido ao “*determinante de Vandermonde*”. O assunto foi abordado somente no seu quarto documento.

Os quatro documentos matemáticos de Vandermonde, publicados pela *Académie des Sciences*, foram: *Mémoire sur la résolution des équations* (1771), *Remarques sur des problèmes de situation* (1771), *Mémoire sur des irrationnelles de différents ordres avec une application au cercle* (1772), e *Mémoire sur l'élimination* (1772).

O primeiro desses quatro documentos apresentou uma fórmula para a soma das potências das raízes de uma equação. Apresentou também uma fórmula para a soma das funções simétricas das potências dessas raízes.

Em seu segundo documento, Vandermonde considera o problema do cavaleiro da turnê no tabuleiro de Xadrez. Este artigo é um exemplo precoce do estudo de idéias topológicas. Vandermonde considera a interação das curvas geradas pelo movimento do cavaleiro e seu trabalho nesta área marca o início de idéias que seria prorrogado primeiro por Gauss e, em seguida, por Maxwell no contexto de circuitos elétricos.

Em seu terceiro documento, estuda idéias combinatórias. Ele definiu o símbolo:

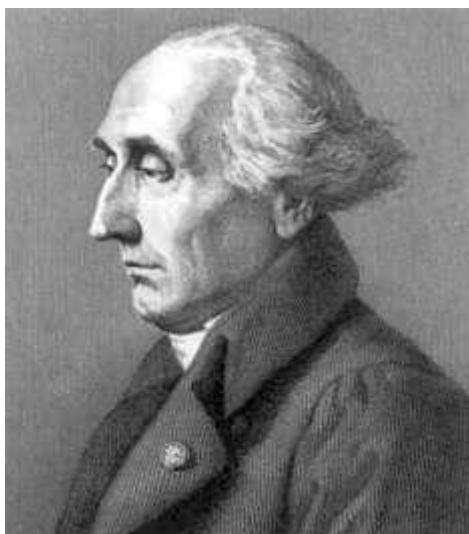
$$[P]^n = p(p-1)(p-2)(p-3) \dots (p-n+1)e$$

$$[P]^n = 1/p(p+1)(p+2)(p+3) \dots (p+np+np+n)$$

O último documento foi o estudo da teoria dos determinantes.

Vandermonde morreu no dia 1 de janeiro de 1776, em Paris, na França.

Joseph Lagrange



Joseph-Louis Lagrange é geralmente considerado um matemático francês, mas a verdade é que ele nasceu em Turim, Itália, no dia 25 de janeiro de 1736. O pai de Lagrange havia sido tesoureiro da Guerra da Sardenha, tendo se casado com Marie-Thérèse Gros, filha de um rico físico. Foi único de seus dez irmãos que sobreviveu à infância. Napoleão fez dele Senador, Conde do Império e Grande oficial da Legião de Honra.

A carreira de advogado tinha sido planejada por seu pai e, certamente, Lagrange aceitou esta vontade. Estudou no colégio de Turim e sua aula preferida era de Latim Clássico.

No começo, ele não tinha muito entusiasmo pela matemática, considerando a geometria grega bastante monótona.

O interesse de Lagrange pela matemática começou quando ele leu uma cópia do trabalho de Halley, sobre a utilização da álgebra em ótica. Ele também foi atraído para a física pelo excelente ensino do Colégio de Turim e decidiu fazer carreira em matemática. Talvez o mundo da matemática tem de agradecer ao pai de Lagrange

por sua má especulação financeira. Lagrange mais tarde alegou: -- “*Se eu tivesse sido rico, eu provavelmente não teria me dedicado a matemática*”. Aos 16 anos, tornou-se professor de matemática na Escola Real de Artilharia. Desde o começo foi um analista, nunca um geômetra, o que pode ser observado em sua obra prima projetada aos 19 anos, *Mécanique Analytique* (Mecânica Analítica), só publicada em Paris em 1788, quando Lagrange tinha cinquenta e dois anos, por ele considerada sua obra prima. “Nenhum diagrama (desenho) será visto neste trabalho”, diz ele na abertura de seu livro, e acrescenta “a ciência da mecânica pode ser considerada como a geometria de um espaço com quatro dimensões – três coordenadas cartesianas e um tempo-coordenada, suficientes para localizar uma partícula móvel tanto no espaço quanto no tempo”.

Em 23 de Julho de 1754 ele publicou sua primeira obra matemática que foi na forma de uma carta escrita em italiano para Giulio Fagnano. O documento estabelece uma analogia entre o teorema binômio e as sucessivas derivadas do produto de funções.

Aos 23 anos aplicou o cálculo diferencial a teoria da probabilidade.

Entre os grandes problemas que Lagrange resolveu está aquele da oscilação da lua. Por que a lua apresenta sempre a mesma face para a Terra? O problema é um exemplo do famoso “Problema dos Três Corpos” – a Terra o Sol e a Lua – atraindo-se uns aos outros, de acordo com a lei do inverso do quadrado da distância entre os seus centros de gravidade. Pela solução deste problema recebeu o Grande Prêmio da Academia Francesa de Ciências, aos vinte e oito anos.

Foi o primeiro a formular o Teorema do Valor Médio, em Cálculo.

Seu último trabalho científico foi a revisão e complementação da *Mécanique*

Analytique para a segunda edição, quando descobriu que seu corpo já não obedecia à sua mente. Morreu na manhã do dia 10 de abril de 1813, com setenta e seis anos, em Paris, na França.

Charles Hermite



Nascido em 24 de dezembro de 1833 em Dieuze, Lorraine, na França. Seu pai, Ferdinand Hermite, estudou engenharia, empregou-se numa firma de comércio de tecidos e casou-se com a filha do seu patrão, Madeleine Lallemand, que dirigia muito bem os negócios de sua família. Charles, sexto filho - cinco homens e duas mulheres - nasceu com uma deformidade na sua perna direita, o que não afetou sua personalidade. Usou uma bengala por toda a vida.

De início, sua instrução foi recebida de seus pais. Quando tinha seis anos a família mudou-se para Nancy tendo ele sido internado num Liceu. Não considerando aquela uma boa escola, foi para Paris onde estudou no Liceu Henri IV. Aos dezoito anos foi para o famoso Louis-le-Grand que destruíra a carreira de Galois, quinze anos antes.

Era indiferente com relação a matemática elementar. As excelentes aulas de física fascinaram-no.

A partir do momento que conheceu os estudantes editores da revista

Nouvelles Annales de Mathematiques (1842), passou a interessar-se mais profundamente por matemática e neste periódico fez suas primeiras publicações. Entrou para a Escola Politécnica (1842), mas foi dispensado um ano depois por causa de seu defeito físico. Porém este curto período nesta escola, foi suficiente para se tornar conhecido no mundo matemático, passando a ser respeitado por *grandes matemáticos da Europa, especialmente Joseph Liouville (1809-1882), Carl Jacobi (1804-1851), Jacques Sturm (1803-1855), Joseph Bertrand (1822-1900) e Augustin Cauchy (1789-1857)*, entre outros, e por ironia do destino sua primeira função acadêmica foi a de examinador para admissão à Politécnica (1846).

De 1840 a 1842 ele substituiu Libri no College de France. Seis anos mais tarde, com apenas trinta e quatro anos, foi eleito membro da Academia de Ciências.

Até a idade de quarenta e três anos ele era um tolerante agnóstico. Em 1856 adoeceu gravemente. Debilitado, tornou-se presa fácil de Cauchy, que sempre deplorara o desinteresse de seu brilhante colega pelos assuntos religiosos, convertendo-o, facilmente para a Igreja Católica.

Finalmente, cansou de tentar convencer a outros matemáticos o que para ele era claro e lógico. Escreveu para Borchardt “Eu não arriscarei nada na tentativa de provar a transcendência do número p . Se outros quiserem encarregar-se deste empreendimento, nenhuma outra pessoa ficará mais feliz do que eu com sua vitória mas, acredite-me querido amigo, certamente, será muito difícil”. Nove anos mais tarde, (em 1882) Ferdinand Lindermann, da Universidade de Munique, usando métodos muito parecidos com os que tinham sido adotados por Hermite, provou que p é transcendental, assim decidindo para sempre a questão da “quadratura do círculo”. Do que Lindermann provou segue-se que é impossível com uma régua e

um compasso simplesmente, construir um quadrado cuja área seja igual a qualquer que seja o círculo, um problema que atormentou gerações de matemáticos desde antes de Euclides.

Autor do importante *teorema de Hermite* sobre o número "e" mostrando sua transcendência, mas cujo principal feito foi solucionar as equações de quinto grau a partir das equações elípticas, ou seja, um trabalho na teoria de funções incluindo a aplicação de funções elípticas para prover a primeira solução para equação geral do quinto grau.

Morreu em Paris, no dia 14 de janeiro de 1901 e, embora tenha provado ser um matemático criativo desde os 20 anos, ficou conhecido por sua dificuldade em passar nos exames formais.

Conclusão

Neste texto concluímos que a interpolação polinomial é muito importante, tendo larga utilização em problemas de engenharia e na aproximação de funções cujas operações de diferenciação e integração são muito complexas. Por isso, aproximamos por uma função polinomial que é mais fácil de ser resolvida. A interpolação polinomial é também usada na solução numérica de equações diferenciais usando o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos.

Concluímos que, dos métodos estudados, a matriz de Vandermonde pode ser mal condicionada e, portanto, não é muito indicada, pois possui uma discrepância muito grande com a função que foi interpolada.

De todos os métodos utilizados, a interpolação polinomial por partes é a que produz um erro menor, portanto possui maior precisão com a função dada.

Provamos, utilizando-se o teorema fundamental da álgebra, que o polinômio interpolador de uma função é único.

Em alguns casos, a interpolação polinomial torna-se desadequada se os pontos não forem escolhidos convenientes e, para evitarmos que isso ocorra, devemos utilizar os nós de Chebyshev.

Conseguimos, ainda, encontrar alguns esquemas práticos para ajudar a encontrar o polinômio interpolador.

Enfim, vimos diversos modos para determinar os polinômios que interpolassem as funções nos pontos dados, alguns deles com uma precisão maior e com maior utilização em estatística e em aplicações de pesquisas estatísticas.

Bibliografia

- [1] Fernandes, M. R.; Cunha, M.C.C. & Pulino, P., " Introdução à Simulação de Fluxos em Meios Porosos: Métodos de Elementos Finitos", notas de mini curso do XXII CNMAC, setembro de 1999, Santos - SP.
- [2] ANTON, H. - Álgebra Linear. Editora Campus, 1982.
- [3] GERALD, C.F.,WHEATLEY, P.O.- Applied Numerical Analysis. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [4] GOURLAY, A.R.;WATSON,G.A.- Computational Methods for Matrix Eigen problems. John Wiley & Sons, 1973.
- [5] SWOKOWSKI, E. W. - Cálculo com Geometria Analítica. McGraw-Hill do Brasil, Ltda., 1983.
- [6] Alexandre-Théophile Vandermonde, disponível em <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Vandermonde.html>. Acesso em: 5 de fev. 2008.
- [7] Joseph- Louis Lagrange, disponível em <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lagrange.html>. Acesso em: 5 de fev. 2008.
- [8] Charles Hermite, disponível em <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Hermite.html>. Acesso em : 6 de fev. 2008.
- [9] Hermite Polynomial, disponível em <http://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html>. Acesso em: 13 dez. 2007.