Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

O Conjunto de Cantor

Marcos Teixeira Alves
Orientadora: Prof[a]. Ms. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis – SC
Setembro de 2008

Marcos Teixeira Alves

O Conjunto de Cantor

Trabalho acadêmico de graduação apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, do Centro Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis – SC

Setembro 2008

Agradecimentos

Esta monografia só pode ser concluída graças à amizade e companheirismo de várias pessoas. Registro aqui meus agradecimentos especiais a minha orientadora prof. Carmem. Não apenas pela orientação que recebi, mas sobretudo pelos conselhos e pelo exemplo de vida de profissional. Agradeço também aos professores Rubens e Gustavo, pela leitura desta monografia e pelas palavras de incentivo.

Aos amigos que sempre estiveram presentes, em especial: Cinthia, Monique e Marina, agradeço pelo apoio, pelas alegrias e pelos momentos felizes que passamos.

Por fim, e não menos importante, dedico este trabalho a meus pais: Joraci e Shirlei, aos irmãos: Éderson e Mariane e a toda família de Treze de Maio. E claro, a minha sobrinha favorita: Ana Beatriz.

O Conjunto de Cantor

por

Marcos Teixeira Alves

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº31/CCM/08.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora:

Profª. Ms. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Orientadora

Prof. Dr. Gustavo Adolfo Fernandes da Costa

Prof. Ms. Rubens Starke

Sumário

Introdução

Neste trabalho de conclusão de curso, apresentamos as principais características do conjunto de Cantor e a função ternária de Cantor obtida a partir deste conjunto. Os assuntos abordados foram divididos em quatro capítulos.

No capítulo 1, tratamos de maneira sucinta a história de Georg Cantor. Entre muitos fatos narrados, destacamos sua relação com outros matemáticos importantes de sua época, tais como: Weierstrass, Kronecker, Kummer, Mittag-Leffler e Dedekind, bem como o modo como estes influenciaram sua vida profissional.

No capítulo 2, desenvolvemos as ferramentas básicas para compreensão dos capítulos seguintes. Os números reais e algumas noções topológicas são estudadas visando este objetivo. A novidade está por conta da definição de conjuntos (em $\mathbb{R}$) de medida nula.

O capítulo 3 é todo dedicado ao conjunto de Cantor. De início, construiremos este conjunto, através de retiradas sucessivas de intervalos abertos de $I = [0, 1]$. Em seguida, estabeleceremos uma relação entre os elementos do conjunto de Cantor e sua representação ternária. A discussão desta combinação é tida como o "ponto áureo" deste capítulo. Ao final, mencionaremos e demonstraremos as propriedades deste intrigante conjunto.

No capítulo 4, último desta monografia, definiremos a função ternária de Cantor. Suas principais propriedades, tais como monotonicidade e continuidade serão provadas. Esta função, já no término deste capítulo, será caracterizada em termos da representação binária e ternária dos elementos de $I = [0, 1]$.

O trabalho encerra-se com as considerações finais e as bibliografias utilizadas.

Capítulo 1

Georg Cantor

Neste capítulo, apresentaremos a biografia de um dos maiores gênios da matemática: Georg Cantor, autor do conjunto que leva seu nome; alvo de estudo deste trabalho.

1.1 Sobre Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Phillipp Cantor nasceu em São Petersburgo, Rússia, em 3 de março de 1845. Filho de Georg Woldemar Cantor e Maria Bohm, foi o primeiro dos seis filhos do casal.

Em 1856, a família Cantor mudou-se para Frankfurt, na Alemanha, em decorrência da doença pulmonar que o pai contraíra, exacerbada pelo clima úmido do Báltico. Neste período, o jovem Cantor freqüentou escolas particulares e, com quinze anos, foi admitido no Darmstadt Gymnasium. Em uma carta daqueles primeiros dias no liceu, Georg Woldemar escreveu ao filho:

"Encerro com estas palavras: seu pai, ou melhor, seus pais e todas as outras pessoas da família, tanto na Rússia como na Alemanha e na Dinamarca, têm os olhos voltados para você como o mais velho, e esperam que você seja nada menos que um Theodor Schaeffer e depois, se Deus quiser, quem sabe um astro brilhante no horizonte da ciência."

Theodor Schaeffer era professor de Cantor no Liceu, e aparentemente o pai viu nele um modelo para o sucesso do filho no futuro. Georg Cantor guardara consigo essa carta desde os tempos da escola, como se quisesse extrair das palavras do pai a força que precisava para enfrentar os difíceis rumos que seguira sua vida.

Figura 1.1: Georg Cantor.

Já na adolescência, sentiu-se atraído pela matemática. Em 1862, começou a estudar matemática no Instituto Politécnico em Zurique, mas logo conseguiu se transferir para a Universidade de Berlim, de mais prestígio. A mudança para Berlim lhe ofereceu a oportunidade de ouro de aprender matemática com os mestres; entre seus professores estavam Karl Weiertrass, Ernest Eduard Kummer e Leopold Kronecker. Embora tenha sobraído em todas as disciplinas, sentiu-se atraído pela teoria dos conjuntos. Em 1867, escreveu uma brilhante dissertação nessa área sobre um problema estudado por Gauss. Cantor continuou a estudar a teoria dos números gaussianos e fez contribuições importantes para a disciplina, as quais foram publicadas em periódicos matemáticos no decorrer dos anos.

Logo depois de doutorar-se, Cantor aceitou a primeira posição que lhe foi oferecida, a de privatdozent na Universidade de Halle. Nas universidades alemãs, um instrutor iniciante dava aulas particulares, e seu pagamento consistia em qualquer dinheiro que os estudantes pudessem prover. No resto do tempo, passava conduzindo pesquisas intensivas em análise matemática, influenciado pelas idéias de Weiertrass. Foi esse tipo de trabalho que o levou a entrar em conflito direto com Leopold Kronecker, o antigo professor de Berlim, e que resultou em uma disputa que perdurou por toda a sua vida.

Em Halle, Cantor começou o estudo das funções com base nos métodos de Weiertrass, que o levou ao conceito de convergência. Ele se envolveu profundamente com os métodos de infinito potencial utilizados em matemática desde os gregos antigos, depois aperfeiçoados pelos analistas em Berlim.

Nessa época, casou com Vally Guttmann, uma amiga de sua irmã, e oriunda de uma família judaica de Berlim. Os dois se conheceram nessa cidade e se casaram poucos anos depois de se mudarem juntos para Halle, em 1875. Começaram a formar uma família vivendo do salário de Cantor, que consistia em modestos redimentos pagos pelo governo nas províncias, significativamente mais generosos que a remuneração oferecida na Universidade de Berlim. Mas foi ali, em uma pequena cidade na zona rural da Alemanha, que ele desenvolveu sozinho uma teoria matemática completa.

Ainda em Berlim, Cantor conheceu Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), que era não só um destacado matemático como também um ser humano decente. Nos piores momentos de Cantor, quando ninguém queria ouvir suas idéias fantásticas sobre o infinito - muito menos publicá-las - Mittag-Leffler publicava regularmente os trabalhos de Cantor em seu periódico Acta Mathematica.

Durante os primeiros anos em Halle, Cantor teve outro bom amigo e benfeitor: Richard Dedekind (1831-1916). A admiração entre os dois era mútua e Cantor sempre o enalteceu, assim como seus métodos em análise matemática. Um ensaio escrito por Cantor em 1877 foi quase rejeitado para a publicação em um periódico editado por Kronecker. O que salvou foi a intervenção de Dedekind.

Dedekind viveu tanto tempo que um artigo de jornal equivocadamente registrou sua morte anos antes de ela acontecer. O obituário o divertiu de tal maneira que Dedekind escreveu uma carta ao jornal descrevendo como foi o dia que supostamente falecera: *"Passei este dia em perfeita saúde e tive uma conversa muito estimulante com meu estimado amigo Georg Cantor, de Halle."*

Cantor chegou à noção de infinito - infinito real, e não a infinidade potencial de limites por séculos utilizadas pelos matemáticos - sem considerar diretamente os números, mas sim os conjuntos. Foi por intermédio da idéia de Weiertrass de definir números irracionais como limites de seqüências racionais que ele chegou a essa linha de pensamento. Além de ser o primeiro na história a lidar com o infinito verdadeiro, Cantor também se tornou conhecido como o pai da teoria dos conjuntos.

O matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) afirmou que a teoria dos conjuntos era uma moléstia, uma doença perversa da qual, algum dia, os matemáticos estariam curados. Em resposta, o matemático alemão David Hilbert disse que *"ninguém nos expulsaria do paraíso que Georg Cantor abriu para nós."* A entrada de Cantor ao infinito Jardim do Éden, sem dúvida, constitui a abertura de uma nova era na matemática.

Cantor ainda foi o autor da hipótese do continuum. No auge dos seus esforços para obter uma solução para este problema, ele sofre o primeiro colapso nervoso. Até hoje, não se conheceu a natureza precisa da doença de Cantor. Alguns sintomas relatados se assemelham àqueles associados com o distúrbio bipolar ou psicose maníaco-depressiva. O que se sabe é que todas essas crises de depressão foram associadas com os períodos em que esteve trabalhando na "hipótese do continuum".

Georg Cantor morreu em 6 de janeiro de 1918 na Halle Nervenklinik, clínica mental universitária situada em Halle. Seu corpo discretamente transportado em meio à cidade, foi sepultado em um pequeno campo-santo. Poucas pessoas comparecem à cerimônia luterana, entre elas a viúva e os cinco filhos.

O cemitério não existe mais; foi demolido para dar espaço a casas particulares. Mas a lápide foi salva e, anos depois, foi transladada, sem o corpo, para outro cemitério em Halle, também de pequenas dimensões, onde pode ser vista. Lê-se na inscrição cinzelada:

DR GEORG CANTOR

PROFESSOR D. MATHEMATIK

3.3.1845 - 6.1.1918

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentamos os principais resultados que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Alguns destes serão exibidos sem demonstração. Para estes casos, aconselhamos a leitura das referências: [1] e [2].

2.1 Conjuntos

Seja $I_n = \{p \in \mathbb{N} : p \leq n\}$.

Definição 2.1 Um conjunto X diz-se finito quando $X = \emptyset$ ou então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$. Escrevendo $x_1 := f(1)$, $x_2 := f(2)$, $x_3 := f(3), \ldots,$ $x_n := f(n)$, temos $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

A bijeção f é denominada contagem dos elementos de X e o número n designa o número de elementos (ou número cardinal) de X.

Definição 2.2 Um conjunto X é dito enumerável se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Exemplo 2.1 O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ dos números naturais é um conjunto enumerável.

Exemplo 2.2 O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números inteiros é enumerável. Para tanto, basta tomarmos a bijeção: $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por:

$$\phi := \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, \text{se n é ímpar} \\ -\dfrac{n}{2}, \text{se n é par.} \end{cases} .$$

Exemplo 2.3 O conjunto $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}$ dos números racionais é enumerável.

2.2 Números Reais

O conjunto dos números reais será denotado por $\mathbb{R}$.

2.2.1 $\mathbb{R}$ é um corpo

Em $\mathbb{R}$, estão definidas duas operações: adição e multiplicação. Estas cumprem certas condições, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, sua soma $x + y \in \mathbb{R}$, enquanto a multiplicação faz corresponder a esses elementos, o seu produto $x.y \in \mathbb{R}$.

Os axiomas a que essas operações obedecem são:

• Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ e } (x.y).z = x.(y.z)$$

• Comutatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x + y = y + x \;\; e \;\; x.y = y.x$$

• Elementos neutros: existem em $\mathbb{R}$ dois elementos distintos 0 e 1 tais que

$$x + 0 = x \text{ e } x.1 = x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

• Elementos inversos: todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe também um inverso multiplicativo $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x.x^{-1} = 1$.

• Distributividade: para $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x.(y + z) = x.y + x.z$.

Dos axiomas acima resultam todas as regras familiares da manipulação com os números reais.

2.2.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado

Dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, significa, entre outras coisas, que existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos números reais positivos, que cumpre as seguintes condições:

P_1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos, ou seja,

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow x + y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x.y \in \mathbb{R}^+.$$

P_2. Dado $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Se indicarmos com $\mathbb{R}^-$, o conjunto dos números $-x \in \mathbb{R}$, em que $x \in \mathbb{R}^+$, a condição P_2 garante que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ e os conjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos.

Definição 2.3 Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é menor do que y (ou y é maior do que x), denotado $x < y$ (ou $y > x$), quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y = x + z$ para algum $z \in \mathbb{R}^+$.

Em particular, $x > 0$ significa que $x \in \mathbb{R}^+$ (x é positivo). Analogamente, $x < 0$ significa que x é negativo, ou ainda, $-x \in \mathbb{R}^+$.

A relação de ordem em $\mathbb{R}$ permite-nos definir o valor absoluto (ou módulo) de um número real $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4 Dado $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

A definição a seguir será utilizada para representar tipos especiais de conjuntos de números reais, chamados intervalos.

Definição 2.5 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então:

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$[a, a]$ é denominado intervalo degenerado.

2.2.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Definição 2.6 Seja X um conjunto tal que $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é limitado superiormente (possui uma cota superior) quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, $\forall x \in X$. Analogamente, dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. O número b chama-se cota superior de X e o número a chama-se cota inferior de X. Se X é limitado superior e inferiormente, dizemos que X é limitado. Isto significa que existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, $\forall x \in X$.

Definição 2.7 Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio, limitado superiormente. Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é o supremo do conjunto X, e denotamos $b = sup(X)$, quando b é a menor das cotas superiores de X, ou seja, quando b cumpre duas condições:

(i) $\forall x \in X$, $x \leq b$;

(ii) se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$, $\forall x \in X$, então $b \leq c$.

A condição (ii) geralmente é usada em sua forma contrapositiva, ou seja, se $c < b$, então existe $x \in X$ tal que $c < x$. Às vezes, exprimimos (ii) da seguinte forma: para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Definição 2.8 Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio, limitado inferiormente. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o ínfimo do conjunto X, e denotamos $a = inf(X)$, quando a é a maior das cotas inferiores de X, isto é, quando a cumpre as seguintes condições:

(i) $\forall x \in X$, $a \leq x$;

(ii) se $d \in \mathbb{R}$ é tal que $d \leq x$, $\forall x \in X$, então $d \leq a$.

Princípio do Supremo (O corpo ordenado $\mathbb{R}$ é completo). Dado $X \subset \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = sup(X)$.

Teorema 2.1 (Intervalos Encaixados) Dada uma seqüência decrescente:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

de intervalos não-vazios, limitados e fechados: $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Observemos que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1,$$

haja visto que $I_k \supset I_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Definimos $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$. Notemos que A é limitado superiormente (por b_1, por exemplo). Conseqüentemente, pelo Princípio do Supremo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = sup(A)$. Como c é uma cota superior de A, segue que $c \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, b_n é uma cota superior de A (pois, caso contrário, existiriam $j, k \in \mathbb{N}$ tais que $b_j < a_k$. Não é difícil ver que, neste caso, $I_j \cap I_k = \emptyset$, o que contradiz o fato dos intervalos serem encaixados) e $c \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (pois c é a menor das cotas superiores de A). Logo, $a_n \leq c \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, $c \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ∎

2.3 Noções topológicas em $\mathbb{R}$

Nesta seção, abordaremos alguns conceitos topólogicos elementares referentes a subconjuntos de $\mathbb{R}$, visando estabelecer a base adequada para desenvolvermos os capítulos seguintes. Adotaremos uma linguagem geométrica, escrevendo "ponto" em vez de "número real", "a reta" em vez de "o conjunto $\mathbb{R}$".

Definição 2.9 Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto $a \in X$ é um ponto interior de X se existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$.

Exemplo 2.4 Todo ponto c do intervalo aberto (a, b) é um ponto interior de (a, b).

Notação. O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.

Exemplo 2.5 O interior do conjunto dos números racionais é vazio, ou seja, $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Definição 2.10 Seja $X \subset \mathbb{R}$. O conjunto X é aberto quando todos os pontos de X são pontos interiores de X, ou seja, $X = int(X)$.

Exemplo 2.6 Todo intervalo aberto (limitado ou não) é um conjunto aberto.

Proposição 2.1 Uma união qualquer de abertos é um conjunto aberto, ou seja, se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos abertos, então $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Proposição 2.2 Sejam A_1, A_2, $\cdots$, A_N subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Então: $\bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i$ é um conjunto aberto.

Definição 2.11 Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, F^C é um conjunto aberto.

Exemplo 2.7 $F = [1,2]$ é um conjunto fechado, pois $F^C = (-\infty,1) \cup (2,+\infty)$ é um conjunto aberto.

Proposição 2.3 (a) A união de uma quantidade finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

(b) A interseção de uma quantidade qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Definição 2.12 Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X se para todo $\varepsilon > 0$, temos $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

Notação. O conjunto dos pontos de acumulação de X será denotado por X'.

Observação 2.1 Se $a \in X$ não é um ponto de acumulação de X, dizemos que a é um ponto isolado de X. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que o número a é o único ponto de X no intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, dizemos que X é um conjunto discreto.

Exemplo 2.8 $\mathbb{N}' = \emptyset$.

Exemplo 2.9 Se $X = \{1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots\}$, então $X' = \{0\}$, isto é, 0 é o único ponto de acumulação de X. Notemos que, neste exemplo, todos os pontos deste conjunto são isolados (X é discreto).

Definição 2.13 Seja $X \subset \mathbb{R}$. O fecho de X é o conjunto $\bar{X} = X \cup X'$.

Exemplo 2.10 Seja $X = (0,3)$. Então: $\bar{X} = X \cup X' = [0,3]$.

Exemplo 2.11 O fecho do conjunto $X = \left\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é dado por:

$$\bar{X} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Proposição 2.4 O fecho de um conjunto é um conjunto fechado.

Proposição 2.5 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $X' \subset X$.

Proposição 2.6 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $\bar{X} = X$.

Definição 2.14 Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um subconjunto $A \subset X$ é dito denso em X se $\bar{A} = X$.

Exemplo 2.12 O intervalo $(0,1)$ é denso em $I = [0,1]$, pois $\overline{(0,1)} = [0,1]$.

Exemplo 2.13 O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um conjunto denso em $\mathbb{R}$, haja visto que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Proposição 2.7 Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um subconjunto $A \subset X$ é denso em X se, e somente se, para todo $a \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Definição 2.15 Um conjunto compacto em $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.14 O conjunto $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{ln(n) : n \in \mathbb{N}\}$ não é compacto, uma vez que X não é limitado.

Exemplo 2.15 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ não é compacto, pois este conjunto não é fechado.

Exemplo 2.16 Um intervalo do tipo $[a,b]$ é um conjunto compacto e todo conjunto finito é compacto.

No teorema seguinte, assumiremos conhecida a definição de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2 Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, então toda bijeção contínua $f : X \to Y$, em que $Y \subset \mathbb{R}$, tem inversa contínua $g : Y \to X$.

2.4 Resultados adicionais

Finalizaremos este capítulo com o conceito de conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}$.

Definição 2.16 Chama-se cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ a uma família C de conjuntos C_λ cuja reunião contém X.

Da definição acima, notemos que a condição $X \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$ significa que, para cada $x \in X$, deve existir (pelo menos) um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

Consideremos agora $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$. Indicaremos por $|I| = b - a$, o comprimento do intervalo (fechado, aberto ou semi-aberto) I cujos extremos são a e b.

Definição 2.17 Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura finita ou infinita enumerável de X por intervalos abertos I_k, isto é, $X \subset \bigcup\limits_{k \in L} I_k$ tal que $\sum\limits_{k \in L} |I_k| < \varepsilon$.

Exemplo 2.17 Todo conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ tem medida nula.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos I_k, o intervalo aberto de centro x_k e comprimento $\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Assim, $X \subset \bigcup\limits_{k \in L} I_k$ e $\sum\limits_{k \in L} |I_k| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Decorre deste exemplo que $\mathbb{Q}$ é um conjunto de medida nula.

Convém mencionar que embora todo conjunto enumerável tenha medida nula, nem todo conjunto de medida nula é enumerável. Um exemplo é o *conjunto de Cantor*, como será verificado no capítulo seguinte.

Capítulo 3

O Conjunto de Cantor

3.1 A construção do conjunto de Cantor

Consideremos o intervalo $I = [0, 1]$ da reta real.

No primeiro passo, trisseccionemos este intervalo nos pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ e, em seguida, removemos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, chamado o *terço médio* de I. Designemos por $\mathcal{C}_1$ o conjunto dos pontos restantes de I, isto é,

$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

No segundo passo, trisseccionemos cada um dos dois intervalos fechados de $\mathcal{C}_1$, nos pontos $\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{9}$; $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$, e removemos o terço médio aberto desses intervalos fechados, ou seja, removemos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Seja $\mathcal{C}_2$ o conjunto formado pelos pontos restantes de $\mathcal{C}_1$, isto é,

$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Analogamente para o terceiro passo, obtemos:

$$\mathcal{C}_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

A Figura 3.1 apresenta os dois primeiros passos dessa construção:

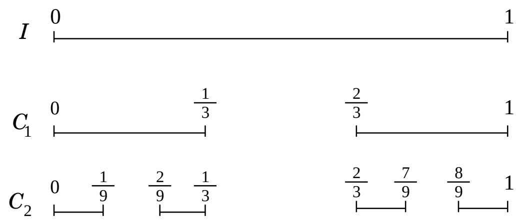

Figura 3.1: A construção do conjunto $\mathcal{C}$.

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma seqüência de conjuntos:

$$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots, \mathcal{C}_n, \ldots$$

tais que

$$I \supset \mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_3 \ldots \supset \mathcal{C}_{n-1} \supset \mathcal{C}_n \ldots$$

em que $\mathcal{C}_n$ é constituído de pontos do conjunto C_{n-1} excluídos os terços médios abertos.

Observemos que cada $\mathcal{C}_n$ consiste em 2^n intervalos fechados e disjuntos dois a dois. O conjunto de Cantor é o que resta após aplicarmos esse procedimento para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

Definição 3.1 O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é a interseção dos conjuntos $\mathcal{C}_n$, obtidos através da remoção sucessiva dos terços médios abertos do intervalo $I = [0, 1]$, ou seja, $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$.

À primeira vista, pode parecer que $\mathcal{C}$ é o conjunto vazio, mas isto não acontece, pois os pontos 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e 1 permanecem em todos os conjuntos $\mathcal{C}_n$, estando assim no conjunto de Cantor.

Uma caracterização útil e interessante para os elementos de $\mathcal{C}$ segue do teorema abaixo:

Teorema 3.1 Os elementos do conjunto de Cantor possuem expansão ternária (base 3) usando os dígitos 0 e 2, isto é,

$$\mathcal{C} = \{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} \quad \text{para} \quad i_n = 0 \quad \text{ou} \quad i_n = 2\}.$$

Antes de demonstrarmos esse teorema, vamos nos familiarizar com a representação de números reais em base ternária. Para tanto, dado $x \in [0,1]$, representar x na base 3 significa escrever $x = (0, x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots)_3$, em que cada um dos dígitos x_n é igual a 0, 1 ou 2, de tal modo que

$$x = \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \cdots + \frac{x_n}{3^n} + \cdots$$

Façamos então, alguns exemplos:

Exemplo 3.1 O ponto $\frac{1}{3}$ tem expansão ternária igual a $0,1$, ou seja, $\frac{1}{3} = (0,1)_3$.

De fato, podemos escrever:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots,$$

donde inferimos que $\frac{1}{3} = (0,1)_3$.

Exemplo 3.2 $\dfrac{17}{27} = (0,122)_3$

A fim de mostrarmos essa igualdade, basta percebermos que

$$\frac{17}{27} = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \cdots$$

Os exemplos 3.1 e 3.2 ilustram a Proposição 3.1 a seguir:

Proposição 3.1 A representação de uma fração irredutível na base 3 é finita se, e somente se, o denominador é uma potência de 3.

Demonstração: Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ tais que a fração $\frac{p}{q}$ esteja na forma irredutível.

Suponhamos que $\frac{p}{q}$ possui representação ternária finita. Conseqüentemente, ela pode ser escrita como:

$$\frac{a_n}{3^n} + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_0}{3^0},$$

em que os $a_{i'}$s são 0, 1 ou 2.

Colocando $\frac{1}{3^n}$ em evidência, ficamos com:

$$\frac{1}{3^n}\left(a_n + a_{n-1} \times 3 + a_{n-2} \times 3^2 + \cdots a_1 \times 3^{n-1} + a_0 \times 3^n\right).$$

Como a fração acima está em sua forma irredutível, o fator entre parênteses é a representação de p na base 3.

Portanto, o denominador q é uma potência de 3.

Por outro lado, suponhamos que $q = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$. A representação de p na base 3 é da seguinte forma:

$$p = a_m 3^m + a_{m-1} 3^{m-1} + \cdots + a_1 3^1 + a_0,$$

com $m < n$, pois $\frac{p}{q} < 1$.

Então:

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \frac{a_m \times 3^m + a_{m-1} \times 3^{m-1} + \cdots + a_1 \times 3^1 + a_0}{3^n} \\ &= a_m \times 3^{m-n} + a_{m-1} \times 3^{m-n-1} + \cdots a_1 \times 3^{1-n} + a_0 \times 3^{-n}.\end{aligned}$$

Como $m < n$, temos $m - n < 0$. Logo, $\frac{p}{q}$ possui representação ternária finita se q for uma potência de 3. ■

Abaixo, apresentamos a Proposição 3.2, que segue como consequência da Proposição 3.1.

Proposição 3.2 Um número racional possui representação infinita e periódica na base 3 se, e somente se, é da forma $\frac{p}{q}$, sendo que q não é uma potência de 3.

Verificaremos o uso da Proposição 3.2 nos exemplos a seguir:

Exemplo 3.3 $\dfrac{1}{4} = (0,0202020202\ldots)_3$

Atentemos para o fato de que $\frac{1}{4}$ é uma fração irredutível, cujo denominador não pode ser escrito como uma potência de 3. Com base na Proposição 3.2, inferimos que $\frac{1}{4}$ possui representação ternária infinita e periódica. Vamos constatar essa afirmação.

Na reta, iremos nos aproximar pela esquerda da fração $\frac{1}{4}$. A priori, notemos que $\frac{2}{3^2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3^1}$. Conseqüentemente,

$$\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + k_1,$$

onde $k_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$.

A Figura 3.2 fornece a representação de nossa primeira tentativa de aproximação para $\frac{1}{4}$:

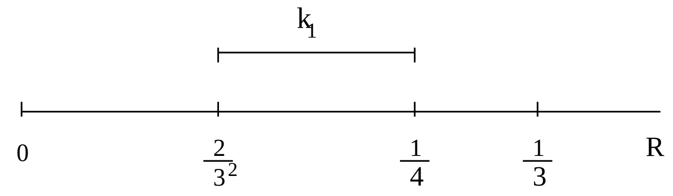

Figura 3.2: Primeira tentativa de aproximação para $\frac{1}{4}$.

Observemos agora que $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} < \frac{1}{36} < \frac{2}{81} = \frac{2}{3^4}$, o que nos dá:

$$\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + k_2,$$

em que $k_2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3^4} = \frac{73}{324}$.

Esta segunda tentativa de aproximação para $\frac{1}{4}$ é apresentada na Figura 3.3:

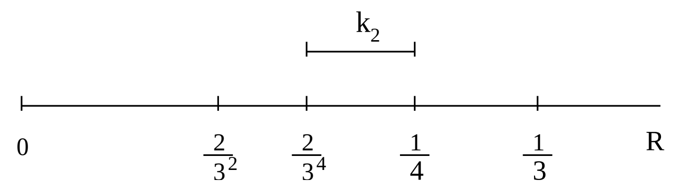

Figura 3.3: Segunda tentativa de aproximação para $\frac{1}{4}$.

Com base em nossa constatação (por aproximações sucessivas para $\frac{1}{4}$), formulamos a seguinte afirmação:

Afirmação: $\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \cdots$, isto é, $\frac{1}{4} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \cdots + \frac{2}{3^{2n}} + \cdots$.

Observemos que o membro direito da segunda equação mencionada na afirmação anterior revela a soma de uma progressão geométrica infinita de razão:

$$q = \frac{2/3^{2(n+1)}}{2/3^{2n}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Sabemos que o valor dessa soma será obtido aplicando a seguinte fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-q},$$

em que a_1 designa o primeiro termo da progressão geométrica em questão, q sua razão e S o valor de sua soma. Assim,

$$S = \frac{2/3^2}{1-1/9} = \frac{2/3^2}{8/9} = \frac{2}{3^2} \times \frac{9}{8} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, $\frac{1}{4} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \cdots + \frac{2}{3^{2n}} + \cdots$, ou seja, $\frac{1}{4} = (0,020202\ldots)_3$.

Exemplo 3.4 $\dfrac{1}{7} = (0,010212010212\ldots)_3$.

A verificação dessa igualdade segue imediatamente da afirmação abaixo:

Afirmação: $\frac{1}{7} = \frac{0}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \cdots = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \frac{2}{3^{10}} + \frac{1}{3^{11}} + \frac{2}{3^{12}} + \cdots$.

Podemos reescrever nossa afirmação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= \left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^{11}} + \cdots + \frac{1}{3^{3n-1}} + \cdots\right] \\
&+ \left[\frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^{10}} + \frac{2}{3^{16}} + \cdots + \frac{2}{3^{6n-2}} + \cdots\right] \\
&+ \left[\frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^{12}} + \frac{2}{3^{18}} + \cdots + \frac{2}{3^{6n}} + \cdots\right] = \\
&= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{3n-1}}\right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{6n-2}}\right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{6n}}\right]. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que as séries do membro direito de (3.1) são convergentes.

Para tanto, notemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{3n-1}}$ é uma série geométrica de razão $q = \frac{1}{3^3}$. Conseqüentemente, esta série converge, visto que $|q| < 1$ e sua soma é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{3n-1}} = \frac{1/3^2}{1-1/3^3} = \frac{1}{3^2} \times \frac{3^3}{(3^3-1)} = \frac{3}{3^3-1} = \frac{3}{26}.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{6n-2}}$ também é do tipo geométrica e com razão $q = \frac{1}{3^6}$. Logo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{6n-2}}$ é convergente. Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{6n-2}} = \frac{2/3^4}{1-1/3^6} = \frac{2}{3^4} \times \frac{3^6}{3^6-1} = \frac{18}{728}.$$

Com raciocínio análogo apresentado anteriormente, garantimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{6n}}$ converge e que sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{6n}} = \frac{2}{728}.$$

Sendo essas séries convergentes, concluímos que a série

$$\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \frac{2}{3^{10}} + \frac{1}{3^{11}} + \frac{2}{3^{12}} + \dots$$

também converge e sua soma é dada por

$$\frac{3}{26} + \frac{18}{728} + \frac{2}{728} = \frac{104}{728} = \frac{1}{7}.$$

Portanto, $\frac{1}{7} = (0,010212010212\dots)_3$.

Neste instante, poderíamos nos perguntar o que acontece com a representação ternária dos números irracionais. A resposta para essa questão é apresentada na proposição seguinte:

Proposição 3.3 Um número é irracional se, e somente se, possui representação infinita e não periódica na base 3.

Demonstração: Os números irracionais não podem ter representação ternária finita, pois teriam se, e somente se, fossem da forma $\frac{p}{q}$ com o denominador uma potência de 3, o que acarretaria na racionalidade destes números. E isto não acontece, uma vez que um número irracional não pode ser escrito na forma: $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Estes números também não podem ter uma representação infinita e periódica, pois teriam se, e somente se, fossem da forma $\frac{p}{q}$, cujo denominador não é uma potência de 3.

Logo, os números irracionais possuem uma representação infinita e não periódica.

Reciprocamente, seja x um número com representação infinita e não periódica na base 3. Suponhamos, por absurdo, que x seja um número racional, digamos $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Podemos, então, considerar dois casos:

(i) q é uma potência de 3.

Neste caso, x teria representação finita. Mas, por hipótese, x possui representação infinita e não periódica. Segue que x não pode ser da forma $\frac{p}{q}$ com denominador uma potência de 3.

(ii) q não é uma potência de 3.

Aqui, x teria uma representação ternária infinita e periódica. Entretanto, por hipótese, essa afirmação leva-nos a uma contradição. Decorre daí que x não pode ser da forma $\frac{p}{q}$ com denominador um número diferente de uma potência de 3.

Assim, fica garantido que x não pode ser da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Portanto, x é um número irracional. ∎

Passemos agora a demonstração do Teorema 3.1:

Demonstração: (*Teorema 3.1*) No primeiro passo da construção do conjunto de Cantor, ao retirarmos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, excluímos os números $x \in [0, 1]$ cuja representação ternária, $x = (0, x_1x_2x_3\ldots)_3$, tem $x_1 = 1$, com a única exceção de $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$ que permanece. Observemos essa inferência na figura a seguir:

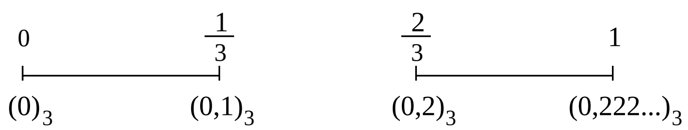

Figura 3.4: Remoção do intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

No segundo passo, excluímos os números reais dos intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, ou seja, aqueles da forma $(0, 01x_3x_4x_5\ldots)_3$ ou da forma $(0, 21x_3x_4x_5\ldots)_3$ com exceção de $\frac{1}{9} = (0, 01)_3$ e de $\frac{7}{9} = (0, 21)_3$ que permanecem.

No terceiro passo, removemos os intervalos $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ e $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ que contém os números da seguinte forma: $(0, 001x_4x_5\ldots)_3$, $(0, 021x_4x_5\ldots)_3$, $(0, 201x_4x_5\ldots)_3$

e $(0,221x_4x_5\ldots)_3$ (com exceção de $\frac{1}{27}=(0,001)_3$, $\frac{7}{27}=(0,021)_3$, $\frac{19}{27}=(0,201)_3$ e $\frac{25}{27}=$ $=(0,221)_3$ que permanecem).

Esse processo continua indutivamente. De modo geral, fica garantido que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $I=[0,1]$ cuja representação ternária $x=(0,x_1x_2x_3\ldots)_3$ só contém os algarismos 0 e 2, com exceção daqueles que possuem um único algarismo igual a 1 como algarismo significativo final, como $\frac{25}{27}=(0,221)_3$, por exemplo. Mas, se observarmos que $(0,221)_3=(0,22022222\ldots)_3$, poderemos sempre substituir o algarismo final 1 pela seqüência $0,22222\ldots$. Com esta convenção (também usada em outras bases, como por exemplo, na base decimal), podemos afirmar, sem exceções, que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $I=[0,1]$ cuja representação na base 3 só contém os algarismos 0 e 2. ■

3.2 Propriedades do conjunto de Cantor

Nesta seção, estudaremos as principais propriedades do conjunto de Cantor. Estas estarão apresentadas na forma de proposições:

Proposição 3.4 O conjunto de Cantor é não vazio.

Demonstração: Pelo Teorema 3.1, segue que todo número do intervalo $I=[0,1]$ cuja expansão ternária contém somente os dígitos: 0 ou 2 pertencem ao conjunto de Cantor. Conseqüentemente, o Exemplo 3.3 garante que $\frac{1}{4}\in\mathcal{C}$.

Logo, $C\neq\emptyset$. ■

Proposição 3.5 $\mathcal{C}$ é um conjunto fechado.

Demonstração: Sejam $(T_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ os intervalos retirados durante a construção do conjunto de Cantor. Segue da Proposição 2.1 que $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}}T_\lambda$ é um conjunto aberto. Então, $(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}}T_\lambda)^C=$ $=\mathbb{R}-\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}}T_\lambda$ é um conjunto fechado (Definição 2.11). Mas, como $\mathcal{C}=(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}}T_\lambda)^C\bigcap[0,1]$ e $[0,1]$ é fechado, inferimos, pela Proposição 2.3, que $\mathcal{C}$ é um conjunto fechado. ■

Proposição 3.6 $\mathcal{C}$ é um conjunto compacto.

Demonstração: Para mostrarmos que $\mathcal{C}$ é compacto, basta constatarmos que $\mathcal{C}$ é limitado, visto que já provamos que $\mathcal{C}$ é fechado (Proposição 3.5). Para tanto, reparemos que $I = [0, 1]$ é limitado e como $\mathcal{C} \subset I$, segue que $\mathcal{C}$ também é limitado.

Portanto, $\mathcal{C}$ é compacto. ■

Proposição 3.7 $\mathcal{C}$ é um conjunto não enumerável.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{C}$ é enumerável. Então, podemos listar os elementos de $\mathcal{C}$ como segue:

$$\mathcal{C} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}.$$

Escolhemos o intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ou $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ que não contém a_1 e denotamos por $[c_1, d_1]$. No segundo passo da construção do conjunto de Cantor, retiraremos o terço médio aberto do intervalo: $[c_1, d_1]$ e ficamos com: $[b_1, b_2] \cup [b_3, b_4]$. Escolhemos agora o intervalo: $[b_1, b_2]$ ou $[b_3, b_4]$ que não contém a_2 e o denotamos por $[c_2, d_2]$.

Continuamos dessa forma (processo indutivo). Então, os intervalos $[c_i, d_i]$ são fechados, não-vazios, limitados e encaixados (decrescentes). Pelo *Teorema dos Intervalos Encaixados*, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}[c_i, d_i]$. Além disso, notemos que $c \in \mathbb{R}$ é único, pois se tivermos $c' \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}[c_i, d_i]$, então $\forall \varepsilon > 0$,

$$|c - c'| \leq |d_i - c_i| = \frac{1}{3^i},$$

que é menor do que ε se tomarmos $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

É claro que $\forall k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathcal{C}_k$, pois $[c_k, d_k] \subset \mathcal{C}_k$. Segue-se dessa afirmação que $c \in \mathcal{C}$, visto que $\mathcal{C} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathcal{C}_k$. Observemos também que $c \neq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois se $c = a_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, então $c \notin [c_j, d_j]$ devido a forma como selecionamos os intervalos $[c_i, d_i]$.

Ora, então chegamos a uma contradição, visto que $c \neq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathcal{C}$.

Portanto, o conjunto de Cantor é não enumerável. ■

Proposição 3.8 O conjunto de Cantor possui interior vazio, isto é, int($\mathcal{C}$)=$\emptyset$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que int($\mathcal{C}$)$\neq \emptyset$ e seja $x \in$ int($\mathcal{C}$). Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$(x-\delta, x+\delta) \subset \mathcal{C}.$$

Segue que $(x-\delta, x+\delta) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$, ou seja, $(x-\delta, x+\delta) \subset \mathcal{C}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Haja visto que $\mathcal{C}_n$ é a união de 2^n intervalos disjuntos de comprimento $\frac{1}{3^n}$, o intervalo $(x-\delta, x+\delta)$ deverá estar contido em um dos subintervalos de $\mathcal{C}_n$. Como $\frac{1}{3^n} \to 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{3^{n_1}} < \delta$. O intervalo $(x-\delta, x+\delta)$ tem comprimento $2\delta > \delta > \frac{1}{3^{n_1}}$. Desta forma, não está contido em nenhum dos subintervalos de $\mathcal{C}_{n_1}$. Logo, $(x-\delta, x+\delta) \not\subseteq \mathcal{C}_{n_1}$, o que contradiz a afirmação acima.

Portanto, int($\mathcal{C}$)=$\emptyset$. ■

A Proposição 3.8 garante que $\mathcal{C}$ não contém intervalos, visto que dado $J \subset [0,1]$ de comprimento $c > 0$, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < c$, em que $\frac{1}{3^n}$ é o comprimento dos intervalos fechados que restam após o n-ésimo passo da construção do conjunto de Cantor, o intervalo J será mutilado depois desse n-ésimo passo, ou seja, $J \not\subseteq \mathcal{C}$.

Proposição 3.9 O conjunto $\mathcal{C}^C$ é denso em $[0,1]$.

Demonstração: Vamos mostrar que $\bar{\mathcal{C}^C} = [0,1]$. Para tanto, não é difícil ver $\bar{\mathcal{C}^C} =$ =int$(\mathcal{C})^C$. Entretanto, int($\mathcal{C}$)=$\emptyset$ (Proposição 3.8). Logo, $\bar{\mathcal{C}^C} = \text{int}(\mathcal{C})^C = \emptyset^C = [0,1]$.

Portanto, $\mathcal{C}^C$ é denso no intervalo $I = [0,1]$. ■

Dessa propriedade, inferimos que todo ponto de $I = [0,1]$ é limite de uma seqüência de pontos de $\mathcal{C}^C$. Recordemos que $\mathcal{C}^C$ é a união dos "terços médios" abertos que foram retirados de $[0,1]$, ou seja,

$$\begin{aligned}
H_1 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\
H_2 &= \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \\
H_3 &= \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right) \\
\vdots &= \vdots \\
\mathcal{C}^C &= \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i.
\end{aligned}$$

Proposição 3.10 O conjunto de Cantor possui medida nula.

Demonstração: Ao pararmos no n-ésimo passo da construção do conjunto de Cantor, garantiremos que $\mathcal{C}$ está contido na reunião de 2^n intervalos, cada um tendo comprimento $\dfrac{1}{3^n}$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$.

Portanto, segue da Definição 2.17 que $\mathcal{C}$ possui medida nula. ∎

Capítulo 4

A Função Ternária de Cantor

4.1 Construção

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida da seguinte maneira: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e f restrita aos terços médios é constante, isto é,

$$f|_{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}(x) = \frac{1}{2}$$

$$f|_{\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)}(x) = \frac{1}{4}$$

$$f|_{\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)}(x) = \frac{3}{4}$$

$$f|_{\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)}(x) = \frac{1}{8}$$

$$f|_{\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)}(x) = \frac{3}{8}$$

$$f|_{\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)}(x) = \frac{5}{8}$$

$$f|_{\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)}(x) = \frac{7}{8}$$

e assim sucessivamente.

A seguir, apresentamos o gráfico da função f, destacando os sete intervalos abertos citados acima:

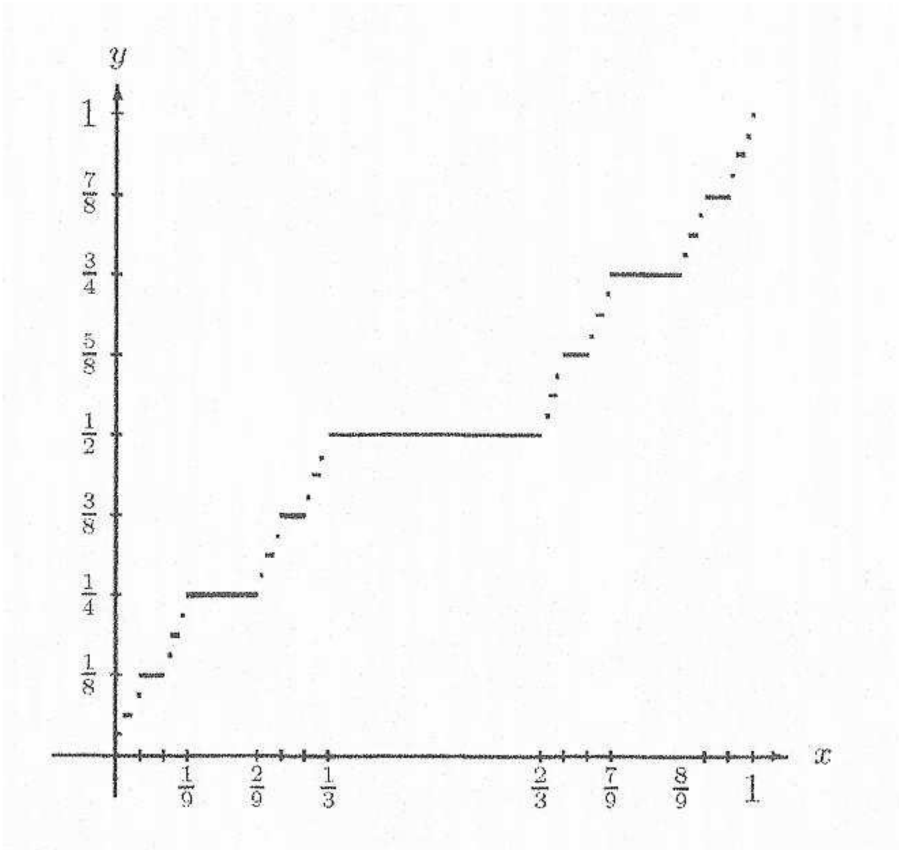

Figura 4.1: Função ternária de Cantor.

Denotaremos $\mathcal{C}^C = \tilde{\mathcal{C}}$. Segue que:

Afirmação. A imagem da função f restrita ao conjunto $\tilde{\mathcal{C}}$ é um conjunto denso em $[0,1]$.

Demonstração: A imagem de $f|_{\tilde{\mathcal{C}}}$ é dada pelo conjunto:

$$\mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}}) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}, \dots\right\}$$

Pela análise do conjunto acima, observamos que os elementos do conjunto: $\mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}})$ são da forma: $\dfrac{2k-1}{2^n}$, em que n representa o n-ésimo passo da construção do conjunto de Cantor e $1 \leq k \leq n$.

Seja (a,b) um intervalo aberto em $[0,1]$ com $b - a = \delta > 0$. Vamos mostrar que existe $y \in \mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}})$ tal que $a < y < b$. Para tanto, considere $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_1}} < \delta$. Seja

$$m_1 = \sup\left\{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{2^{n_1}} \leqslant a\right\}.$$

O conjunto: $\left\{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{2^{n_1}} \leqslant a\right\}$ admite supremo, visto que este conjunto é limitado superiormente (por $a \in [0,1]$, por exemplo).

Além disso, temos $\frac{m_1}{2^{n_1}} \leqslant a$ e $\frac{m_1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1}} = \frac{m_1+1}{2^{n_1}} > a$ (esta última desigualdade decorre do fato de $m_1 = \sup\left\{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{2^{n_1}} \leqslant a\right\}$).

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} b - \left(\frac{m_1+1}{2^{n_1}}\right) &= b - \left[\frac{m_1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1}}\right] \\ &= b - \frac{m_1}{2^{n_1}} - \frac{1}{2^{n_1}} \\ &\geqslant b - a - \frac{1}{2^{n_1}} \\ &> \frac{1}{2^{n_1}} - \frac{1}{2^{n_1}} = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $b > \left(\frac{m_1+1}{2^{n_1}}\right)$. Assim, $a < \frac{m_1+1}{2^{n_1}} < b$.

O número $\frac{m_1+1}{2^{n_1}} \in \mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}})$, pois caso $m_1 + 1$ seja ímpar, então não temos o que mostrar. Se $m_1 + 1$ é par, simplificaremos este com o denominador e, dessa forma, garantiremos que $\frac{m_1+1}{2^{n_1}} \in \mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}})$.

Portanto, a $\mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}})$ é um conjunto denso em $[0,1]$. ■

Agora definiremos a função f para os pontos do conjunto de Cantor.

Seja $\alpha \in \mathcal{C} - \{0,1\}$. Definimos:

$$f(\alpha) = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in \tilde{\mathcal{C}}}} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x).$$

Esta definição é até certo ponto "natural", já que $\tilde{\mathcal{C}}$ é um conjunto denso em $[0,1]$, conforme a Proposição 3.9 (ou seja, todo elemento de $[0,1]$, em particular cada elemento de $\mathcal{C}$, é limite de uma seqüência de pontos em $\tilde{\mathcal{C}}$). Além disso, desejamos que f seja contínua. Para tanto, mostraremos que

$$\lim_{x \to \alpha^+} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) = \lim_{x \to \alpha^-} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) = f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(\alpha)$$

Afirmação: $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) = \lim\limits_{x \to \alpha^-} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)$

Demonstração: Notemos que

$$\lim_{x\to\alpha^+} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) = \inf_{\substack{x>\alpha \\ x\in\tilde{\mathcal{C}}}}\{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)\} = h(\alpha)$$

e

$$\lim_{x\to\alpha^-} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) = \sup_{\substack{x<\alpha \\ x\in\tilde{\mathcal{C}}}}\{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)\} = k(\alpha).$$

Como $f|_{\tilde{\mathcal{C}}}$ é monótona crescente (por construção), temos que $k(\alpha) \leqslant h(\alpha)$.

Suponhamos que $k(\alpha) < h(\alpha)$. Conseqüentemente,

$$\begin{cases} \forall x > \alpha,\ x \in \tilde{\mathcal{C}},\ h(\alpha) \leqslant f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) \\ \forall y < \alpha,\ y \in \tilde{\mathcal{C}},\ k(\alpha) \geqslant f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(y) \end{cases}$$

e

$$f|_{\substack{\tilde{\mathcal{C}} \\ y<\alpha}}(y) \leqslant k(\alpha) < h(\alpha) \leqslant f|_{\substack{\tilde{\mathcal{C}} \\ x>\alpha}}(x),$$

ou seja, $(k(\alpha), h(\alpha)) \subseteq [0,1]$.

Vamos mostrar que $(h(\alpha), h(\alpha)) \cap \mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}}) = \emptyset$.

Suponhamos que exista $z \in (k(\alpha), h(\alpha)) \cap \mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}})$. Segue que $k(\alpha) < z < h(\alpha)$ e existe $y_0 \in \tilde{\mathcal{C}}$ tal que

$$f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(y_0) = z.$$

Então, podemos escrever: $k(\alpha) < f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(y_0) < h(\alpha)$. Notemos que se $\alpha < y_0$, então $h(x) = \inf\limits_{x>\alpha}\{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)\} \leqslant f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(y_0)$, já que $f|_{\tilde{\mathcal{C}}}$ é monótona crescente. Decorre dessa última desigualdade que

$$h(\alpha) = \inf_{x>\alpha}\{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)\} = f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(y_0),$$

uma vez que $h(\alpha) < f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(y_0)$ não ocorre, pois $h(\alpha) = \inf\limits_{x>\alpha}\{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(y_0)\}$. De modo análogo, se $\alpha > y_0$, teremos

$$k(\alpha) = \sup_{x<\alpha}\{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)\} = f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(y_0).$$

Logo, garantimos que não existe $z \in [0,1]$ nestas condições.

Portanto, $(k(\alpha), h(\alpha)) \cap \mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}}) = \emptyset$.

Observemos que esta afirmação provada é absurda, visto que $\mathfrak{Im}\,(f|_{\tilde{\mathcal{C}}})$ é um conjunto denso no intervalo $[0,1]$. Desse modo, concluímos que não pode ocorrer $k(\alpha) < h(\alpha)$.

Portanto,

$$k(\alpha) = h(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) = f(\alpha).$$

■

De posse dessas afirmações a respeito da função f, segue a seguinte definição.

Definição 4.1 A função $f:[0,1]\to[0,1]$ definida por

(i) $f(0)=0$;

(ii) $f(1)=1$;

(iii) $f|_{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}(x)=\frac{1}{2}$; $f|_{\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)}(x)=\frac{1}{4}$; $f|_{\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)}(x)=\frac{3}{4}$; $f|_{\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)}(x)=\frac{1}{8}$; $f|_{\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)}(x)=\frac{3}{8}$; $f|_{\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)}(x)=\frac{5}{8}$; $f|_{\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)}(x)=\frac{7}{8}$ e assim sucessivamente; e

(iv) se $\alpha\in\mathcal{C}\backslash\{0,1\}$, então $f(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x\in\tilde{\mathcal{C}}}} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)$

é chamada de *função ternária de Cantor*.

A função ternária de Cantor também pode ser definida através das expansões binária e ternária da seguinte maneira:

Seja $\alpha\in[0,1]$ com expansão ternária $(0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots)_3$. Consideremos:

(i) $N=\infty$, se $a_i\neq 1$, $\forall i\in\mathbb{N}$, ou

(ii) $N=\min\{i\in\mathbb{N}, a_i=1\}$, se $a_i=1$ para algum $i\in\mathbb{N}$.

Seja agora $b_n=\frac{a_n}{2}$ e $b_N=1$.

Então, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{bn}{2^n}$ independe da expansão ternária de x (no caso de x ter mais de uma, como por exemplo, $\frac{1}{3}=(0,1)_3=(0,02222\ldots)_3$).

Conseqüentemente, podemos definir a função ternária de Cantor como segue:

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$x = (0, a_1 a_2 \dots a_n \dots)_3 \mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$

Atentemo-nos para o fato de que na expressão acima, o valor de $f(x)$ está expresso em sua expansão binária. Agora, com o propósito de compreendermos essa nova definição, exibiremos alguns exemplos:

Exemplo 4.1 A função ternária aplicada no ponto $x = \frac{1}{3}$ possui imagem igual a $\frac{1}{2}$.

Com efeito, perceba que $\frac{1}{3} \in \mathcal{C}$ e que se considerarmos sua expansão ternária igual a $(0,1)_3$, obteremos $N = 1$, $b_1 = b_N = 1$ e

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=1}^{1} \frac{b_n}{2^n} = \frac{b_1}{2^1} = \frac{1}{2}.$$

Caso consideremos a expansão ternária de $\frac{1}{3}$ igual a $(0,02222\dots)_3$, encontraremos: $N = \infty$, $b_1 = 0$, $1 = b_1 = b_2 = b_3 = \cdots$ e

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, independente da representação ternária de $\frac{1}{3}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4.2 $f\left(\dfrac{23}{27}\right) = \dfrac{3}{4}$

Conforme construimos a função ternária de Cantor, temos em vista que $f\left(\frac{23}{27}\right) = \frac{3}{4}$, uma vez que $\frac{23}{27} \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Verificaremos que $f\left(\frac{23}{27}\right) = \frac{3}{4}$ usando nossa "nova definição".

Notemos que:

$$\frac{23}{27} = \frac{2}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} = (0,212)_3.$$

Conseqüentemente, $N = 2$, $b_1 = \frac{a_1}{2} = 1$ e $b_2 = b_N = 1$. Segue que

$$f\left(\frac{23}{27}\right) = \sum_{n=1}^{2} \frac{b_n}{2^n} = \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, $f\left(\frac{23}{27}\right) = \frac{3}{4}$.

Exemplo 4.3 $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{3}$.

De fato, pelo Exemplo 2.3, $\frac{1}{4} = (0,020202\ldots)_3$. Dessa forma, temos: $N = \infty$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1$, etc, em que $b_{2n-1} = 0$ e $b_{2n} = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} &= \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Portanto, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$.

Exemplo 4.4 $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

Observemos que $0 = (0,0000\ldots)_3$. Inferimos daí que $N = \infty$, $b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{0}{2} = 0$, $b_2 = 0 = b_3 = b_4 = \cdots$ e que

$$\begin{aligned} f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} &= \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots \\ &= \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \cdots + \frac{0}{2^n} + \cdots \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $f(0) = 0$.

Agora, $1 = (0,2222\ldots)_3$ e $1 = b_1 = b_2 = \cdots = b_n = \cdots$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \\ &= \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots \\ &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \\ &\therefore f(1) = 1 \end{aligned}$$

Portanto, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

4.2 Propriedades

Nesta seção, apresentaremos, em forma de proposições, as principais propriedades da função ternária de Cantor.

Proposição 4.1 A função ternária de Cantor é monótona crescente.

Demonstração: Vamos mostrar que se $\alpha, \beta \in [0,1]$ e $\alpha < \beta$, então $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$. Para tanto, consideraremos os seguintes casos:

(i) $\alpha \in \tilde{\mathcal{C}}$, $\beta \in \tilde{\mathcal{C}}$ e $\alpha < \beta$.

Neste caso, temos

$$f(\alpha) = f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(\alpha) \leqslant f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(\beta) = f(\beta),$$

por construção.

(ii) $\alpha \in \mathcal{C}$ e $\beta \in \tilde{\mathcal{C}}$.

Suponhamos $\alpha < \beta$. Segue que

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in \tilde{\mathcal{C}}}} f_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) \\ &= \inf_{\substack{x > \alpha \\ x \in \tilde{\mathcal{C}}}} \{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)\}. \end{aligned}$$

Como $f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(\beta) \in \{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)\}$, concluímos que $f(\alpha) \leqslant f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(\beta) = f(\beta)$.

Caso $\beta < \alpha$, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in \tilde{\mathcal{C}}}} f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) \\ &= \inf_{\substack{x < \alpha \\ x \in \tilde{\mathcal{C}}}} \{f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(x)\} \\ &\geqslant f|_{\tilde{\mathcal{C}}}(\beta) = f(\beta). \end{aligned}$$

Logo, $f(\beta) \leqslant f(\alpha)$.

(iii) $\alpha \in \mathcal{C}$, $\beta \in \mathcal{C}$, $\alpha < \beta$.

Como $\tilde{\mathcal{C}}$ é um conjunto denso em $[0, 1]$, inferimos a existência de $x \in \tilde{\mathcal{C}}$ tal que $\alpha < x < \beta$. Pelo caso **(ii)**, temos $f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$.

Portanto, f é monótona crescente.

■

Proposição 4.2 A função ternária de Cantor é contínua em $I = [0, 1]$.

Demonstração: Esta propriedade é garantida pela maneira como f foi construída: constante em $\tilde{\mathcal{C}}$ e estendida a $\mathcal{C}$ pelo processo de limites

Portanto, f é contínua em $[0, 1]$. ■

Proposição 4.3 A função $F(x) = f(x) + x$, em que f é a função ternária de Cantor, é um homeomorfismo de $[0, 1]$ em $[0, 2]$.

Demonstração: Mostraremos que F é um homeomorfismo de $[0, 1]$ em $[0, 2]$, ou seja, F é contínua e F^{-1} também é uma função contínua.

Afirmação 1 F é contínua.

Demonstração: (Afirmação 1) Como F é a soma de duas funções contínuas, a função ternária de Cantor e a função identidade, decorre que F é contínua em $[0, 1]$. ■

Afirmação 2 F é injetiva.

Demonstração: (Afirmação 2) Sejam $x, y \in [0,1]$ com $x \neq y$. Sem perda de generalidade, consideramos $x < y$. Segue da Proposição 4.1 que

$$F(x) = f(x) + x \leqslant f(y) + x < f(y) + y = F(y)$$

ou seja, $F(x) \neq F(y)$.

Logo, F é injetiva. ∎

Afirmação 3 F é sobrejetiva.

Demonstração: (Afirmação 3) Notemos que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função sobrejetiva em $[0,1]$, pois $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f é monótona crescente e f é contínua. Conseqüentemente, para todo $y \in [0,1]$, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = y$. Com base nisso,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}(F) &= \{F(x) : x \in [0,1]\} \\
&= \{f(x) + x : x \in [0,1]\} \\
&= \{y + x : y \in [0,1] \text{ e } x \in [0,1]\} \\
&= [0,2]
\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{Im}(F) = [0,2]$, concluímos que F é sobrejetiva. ∎

De posse das afirmações 2 e 3, garantimos a existência da função inversa de F. Iremos mostrar que F^{-1} é contínua.

Afirmação 4 F^{-1} é contínua em $[0,2]$.

Demonstração: (Afirmação 4) Pelas afirmações 1, 2 e 4, $F : [0,1] \to [0,2]$ é uma bijeção contínua. Como $[0,1]$ é um conjunto compacto (é fechado e limitado), segue do Teorema 2.2 ("Se $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, então toda bijeção contínua $f : X \to Y \subseteq \mathbb{R}$ tem inversa contínua $g : Y \to X$") que $F^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ é uma função contínua. ∎

Portanto, segue das afirmações 1, 2, 3 e 4, que F é um homeomorfismo de $[0,1]$ em $[0,2]$.

∎

4.3 Caracterização geral da função de Cantor

Definição 4.2 Toda função real F em $[0,1]$ é chamada de *função de Cantor* se F é monótona crescente e satisfaz:

(a) $F(0) = 0$;

(b) $F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}$;

(c) $F(1-x) = 1 - F(x)$,

Encerraremos este capítulo, apresentando alguns exemplos que evidenciam que a função ternária de Cantor f, definida na seção 4.1, comporta-se como uma função de Cantor.

Exemplo 4.5 $F(1) = 1 = f(1)$.

Pelos itens (a) e (b) da Definição 4.2, garantimos que: $F(1) = F(1-0) = 1-F(0) =$ $= 1 - 0 = 1 = f(1)$.

Exemplo 4.6 $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Usando o item (b), temos: $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{F(1)}{2} = \frac{1}{2}$. Como $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$, conforme Exemplo 4.1, concluimos que $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exemplo 4.7 $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$. De fato, segue do item (c) que:

$$F\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Exemplo 4.8 $F\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{9}\right)$.

Notemos que $F\left(\frac{1}{9}\right) = F\left(\frac{\frac{1}{3}}{3}\right) = \frac{F\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{9}\right)$.

Considerações Finais

Durante a confecção deste trabalho, que iniciou-se em março de 2008, enaltecemos diversos pontos positivos.

Visto que o estudo deste conjunto surgiu apenas na disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso II, tentamos exibí-lo de maneira mais didática possível. Para tanto, preparamos o capítulo: Conceitos Preliminares, cujo objetivo foi fornecer as ferramentas fundamentais para a leitura dos capítulos seguintes. Além disso, durante todo o trabalho, insistimos na apresentação de vários exemplos, de forma a elucidar toda a teoria desenvolvida.

No que tange aos capítulos 3 e 4, preocupamo-nos, sobretudo, com a introdução dos conceitos tidos como cernes deste trabalho e, em seguida, com outras caracterizações destes conceitos, a fim de tornar as idéias suficientemente claras.

Quanto ao rigor matemático, tentamos escrevê-lo de modo acessível a alunos do curso de graduação em matemática. Com este intuito, recorremos a variadas bibliografias.

Ressaltamos também a parte histórica desenvolvida neste trabalho, que fora incluída no capítulo 1.

Para encerrar, gostaríamos de enfatizar que um quinto capítulo a respeito dos conjuntos generalizados de Cantor foi elaborado. Entretanto, para este capítulo, exigia-se o estudo da teoria da medida de Lebesgue na reta real, que tornaria este trabalho demasiadamente extenso. Optamos por apresentá-lo em outra oportunidade, juntamente com os devidos detalhes que este merece.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L. – *Análise Real - volume 1.* IMPA, RJ, 2006.

[2] RUDIN, W. – *Princípios de Análise Matemática.* Ao Livro Técnico S/A - RJ - 1971.

[3] BARTLE, Robert G. – *Elementos de Análise Real.* Editora Campus, Rio de Janeiro, 1983.

[4] DUGUNDYI, J. – *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1969.

[5] GELBAUM, B. R.; OLMSTEAD, J. M. H. – *Counterexamples in Analysis.* Holden-Day Inc., 1964.

[6] KELLEY, J. L. – *General Topology.* American Book, N.Y., 1969.

[7] LIMA, E. L. – *Elementos de Topologia Geral.* Ao Livro Técnico S/A, RJ, 1970.

[8] ROYDEN, H. L. – *Real Analysis.* Macmillan Publishing Co. Inc., NY, 1968.

[9] ACZEL, A. O. – *O mistério do Alef.* Globo, São Paulo, 2003.