UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE MATEMÁTICA HABILITAÇÃO EM LICENCIATURA

TIAGO BEVILAQUA

MODELAGEM MATEMÁTICA E A PRODUÇÃO DE LIXO EM FLORIANÓPOLIS

FLORIANÓPOLIS
2008

TIAGO BEVILAQUA

MODELAGEM MATEMÁTICA E A PRODUÇÃO DE LIXO EM FLORIANÓPOLIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Ademir D. Caldeira

FLORIANÓPOLIS
2008

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e a provada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela portaria nº 20/CCM/08.

Professora Carmem Suzane Comitre Gimenez
professora da disciplina

Banca examinadora:

Professor Ademir Donizati Caldeira – CED/UFSC
Orientador

Professora Cláudia Regina Flores – CED/UFSC

Professor Irlan Von Linsingen – PPGECT

Nereu E. Burin

Professor Nereu Estanislau Burin – MTM/UFSC

A

Meus pais, Cloves e Fátima, por tudo. Vinícius, Luiza, Renan, Diego e Paula, que fizeram as madrugadas mais fáceis e curtas. Josefina pela companhia incondicional.

Eu falaria em pássaros
não houvesse os ângulos.
(Renan Dissenha)

SUMÁRIO

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

O presente trabalho trata da análise segundo a ótica da modelagem matemática de dois diferentes aspectos de um mesmo tema principal, que é a produção de lixo em Florianópolis. A primeira parte do trabalho trata da observação de alguns aspectos da rotina dos trabalhadores da Associação de Recicladores Esperança (AREsp), bem como da tentativa de extração de temas geradores de propostas de ensino em matemática inspiradas em modelagem. A segunda parte do trabalho é a elaboração de um modelo matemático de descrição da evolução da produção de lixo em Florianópolis com base em dados fornecidos principalmente pela Companhia de Melhoramento da Capital (Comcap). O objetivo principal é a exposição de possibilidades de trabalho com a elaboração de um modelo com dados limitados. Contamos ainda com o presente suporte de ferramentas computacionais simples, tendência inevitável e que pode ser observada em projetos de vangarda representados principalmente pelo projeto governamental UCA (Um Computador por Aluno). As duas partes envolvem conceitos de modelagem matemática referentes a diferentes áreas da matemática, bem como a diferentes níveis de conhecimento. Enquanto a primeira parte visa uma melhoria nos conhecimentos de matemática básica nos trabalhadores da AREsp e a elaboração de situações matemáticas simples de fácil aplicação no ensino fundamental, a segunda parte já envolve conceitos mais avançados e uma maturidade muito maior, sendo aplicáveis somente para estudantes de ensino médio e alcançando conceitos apenas aplicáveis no ensino superior.

Palavras-chave: aprendizagem; educação; ensino; lixo; modelagem.

1. INTRODUÇÃO

1.1. O trabalho.

O uso de modelagem matemática como forma de ensino, além de aproximar aos olhos do aluno o conteúdo visto em sala de aula do seu "mundo real", pode nos fornecer uma muitíssimo eficiente ferramenta de estímulo à curiosidade dos alunos em relação a novos conteúdos.

A idéia primordial desse trabalho é a exploração de um único tema gerador nas diferentes facetas em que ele se apresenta. A partir da escolha do tema – a produção de lixo na cidade de Florianópolis – procurei conhecer o suficiente para desenvolver a maior quantidade de conteúdos matemáticos que fosse possível.

No início da coleta de dados fui apresentado ao professor Fernando Gonçalves, que realiza um trabalho na AREsp relacionado a segurança do trabalho, e fui convidado a ajudar na partilha. Já nesse primeiro contato pude constatar a necessidade de dividir o meu trabalho para não ignorar a riqueza de conteúdo daquela situação.

O trabalho então foi, certamente por necessidade, dividido em duas partes. A primeira diz respeito à análise de conteúdo matemático presente na rotina da AREsp que poderia ser utilizada em atividade de modelagem matemática em sala de aula; a segunda referente à elaboração de um modelo matemático de descrição da produção de lixo em Florianópolis.

1.2. A Comcap.

Segundo as palavras do próprio site oficial da Comcap:

> "A Companhia Melhoramentos da Capital - COMCAP é uma empresa de economia mista que cuida da limpeza de Florianópolis, contratada pela Prefeitura Municipal, sua acionista majoritária."

A Comcap é uma empresa localizada no bairro do Itacorubi, em Florianópolis, que é reponsável por uma série de atividades.

- Coleta de lixo domiciliar;
- Remoção de lixo pesado;
- Coleta de lixo seletivo;
- Remoção de entulho e de varrição com caixas brooks e caminhão caçamba;
- Programa De Olho na Sujeira - remoção de resíduos/entulhos em qualquer parte da cidade;
- Capina mecanizada;
- Capina manual;
- Roçagem;
- Limpeza de canais e valas a céu aberto;
- Varrição;
- Administração de estacionamentos e sanitários públicos;
- Limpeza em eventos, como festas populares, religiosas e promovidos pela Prefeitura Municipal;
- Programas de mutirões desenvolvidos pela Prefeitura Municipal.

1.3. A AREsp.

A Associação de Recicladores Esperança – AREsp – é uma organização independente que realiza a triagem do lixo seletivo coletado pela Comcap. A associação opera num galpão localizado ao lado da Comcap e realiza na forma de cooperativa o trabalho de triagem e venda dos materiais recolhidos.

1.4. Da coleta de dados

Quanto à primeira parte do trabalho, que diz respeito ao processo de trabalho dos recicladores na AREsp, a coleta de dados foi feita a partir de observação direta, que me foi possibilitada pelo professor Fernando Gonçalves, do CEFET-SC, que realiza na AREsp um trabalho relacionado a segurança no trabalho.

Os dados da segunda parte do trabalho foram coletados basicamente junto à Comcap. Além da ajuda do professor Fernando Gonçalves, contei com uma assessoria jornalística que, junto à assessoria de imprensa da Comcap, me pode fornecer dados suficientes para a realização do trabalho.

Quanto à triagem dos dados, isso se deu de maneira bastante simples. Na primeira parte do trabalho me interessavam quaisquer aspectos do trabalho na AREsp que eu conseguisse relacionar a algum conteúdo matemático que me fosse passível de melhorar a compreensão dos associados. Assim, quando fui convidado a ajudar na partilha já tinha certa idéia de quais assuntos poderiam me interessar. Restou apenas então a observação do pessoal e diagnosticação dos pontos nos quais eu acreditava que poderia contribuir de alguma forma. Sobre isso discorrerei mais à frente.

Decidi logo de início que a segunda parte do projeto teria como objetivo a elaboração de modelos matemáticos para uso didático e, mesmo aspirando a um razoável refinamento do modelo proposto, sabia que certas imprecisões poderiam ser aceitas e até mesmo desejadas em alguns momentos. Assim optei por usar dados apenas dos últimos quatro anos e me restringir à especificidade que essa limitação de dados poderia me trazer. Os dados escolhidos para a criação do modelo foram simplesmente então os que envolviam produção de lixo nos diferentes períodos dos últimos quatro anos. Recebi as informações de 2007 bem incompletas, mas as informações dos três anos anteriores já me foram suficientes para a realização do trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Modelagem matemática é processo de obtenção de um modelo de descrição de uma situação matemática por meio de ferramental matemático. Segundo Maria Salet Biembengut (2004), esse procedimento pode ser agrupado em três etapas:

- Interação: do estudo e observação da situação, na qual se faz a análise de maneira direta ou indireta e coletamos os dados necessários para a fase seguinte;
- Matematização: na qual decidimos quais aspectos da situação real serão objetos de análise do modelo matemático a ser elaborado, fazemos a seleção de quais informações são ou não relevantes para a elaboração do modelo, identificamos e estudamos o ferramental matemático necessário e colocamos o problema em termos do modelo;
- Modelo: conclusão do modelo e avaliação de sua validade, bem como interpretação da qualidade das informações e conclusões que podemos obter do modelo construído.

Basicamente eu colocaria o processo de modelagem como uma execução das seguintes tarefas:

1. escolher uma situação a ser analisada;
2. colher a maior quantidade de dados possível;
3. definir os aspectos da situação que o modelo ilustrará;
4. identificar e estudar o ferramental matemático necessário;
5. estimar a precisão a ser alcançada pelo modelo;
6. selecionar as informações relevantes e descartar o resto;
7. elaborar o modelo com base nos dados;
8. avaliar a validade do modelo;
9. interpretar as informações e conclusões que o modelo nos proporciona.

Cabe observar que numa situação ideal essas etapas se colocam de forma linear e organizada, mas que devemos ter bom-senso para repetir principalmente os passos 2, 3, 4 e 6 em prol de uma melhor fundamentação teórica e prática do modelo matemático.

3. DESENVOLVIMENTO

3.1. Primeira parte: da observação e contextualização matemática da AREsp.

Essa primeira parte do trabalho, como já foi dito, se refere à análise do trabalho do pessoal da AREsp e extração de possíveis temas geradores de aulas inspiradas sempre no conceito de modelagem matemática. Depois de visitar o local e conhecer um pouco do processo me chamou a atenção principalmente a forma como eles realizam a partilha.

O trabalho na AREsp é dividido em diversas funções. Existem pessoas trabalhando especificamente com materiais diversos, material não aproveitável, triagem na esteira, prensagem do material, tesouraria, etc. O dinheiro arrecadado, porém, é dividido de maneira justa entre todos os associados, proporcionalmente ao número de dias trabalhados.

O sistema adotado é simples. As vendas de material são realizadas a cada quinze dias e a partilha é feita em sexta-feiras alternadas. Existe um sistema de controle de presença que associa cada trabalhador ao número de presenças que ele teve naquelas duas semanas – um período do dia, uma manhã ou uma tarde, equivale a meia presença. No final dos quinze dias, como eles mesmo se referem, "somam os *Ps*" (contam o número de presenças de todos) e fazem o cálculo proporcional da parte que compete a cada um dos trabalhadores.

Para saber qual o montante final a ser repartido somamos o valor em dinheiro total no dia da partilha ao total de "vales" (adiantamentos pedidos por trabalhadores individuais). Essa soma é necessária porque os "vales" são uma quantia que não está presente fisicamente no momento da partilha, mas que foi ganha por toda a associação em conjunto. Quando calcularmos o montante referente a um funcionário que tenha recebido "vale", descontaremos o valor em questão da quantia que lhe era devida.

$$TOTAL = DINHEIRO + VALES$$

Digamos, então, que temos *n* funcionários com número de presença iguais a p_1, p_2, p_3,..., p_n. A "soma dos Ps" é dada como:

$$P = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

Podemos encarar essa situação agora de duas formas diferentes, que na verdade são apenas duas formas diferentes de interpretação de uma mesma situação matemática. Podemos analisar a situação por regra de três ou dar mais ênfase ao conteúdo de frações e análise dimensional.

Antes de descobrir quanto é o valor devido a um trabalhador específico, cabe dizer que a soma dos valores referentes a todos os trabalhadores deve ser obrigatoriamente igual ao montante total. Essa consideração pode parecer óbvia, mas é justamente ela que cria os desentendimentos relativos às falhas de cálculo.

$$V_1 + V_2 + ... + V_n = \sum_{k=1}^{n} V_k = TOTAL = DINHEIRO + VALES$$

Usando regra de três encararíamos o problema da seguinte maneira. Queremos descobrir quanto cabe a um funcionário específico. Sabemos que o valor recebido por ele deve ser proporcional ao quanto ele trabalhou. Sabemos ainda que o montante total é referente diretamente ao total das presenças dos trabalhadores da associação. Logo, pela lógica da regra de três, o valor devido a um trabalhador específico (trabalhador qualquer *q*) está para o montante total assim como o seu número de presenças está para o total das presenças da associação.

$$\boxed{\frac{V_q}{TOTAL} = \frac{p_q}{\sum_{k=1}^{n} p_k}}$$

Assim, teremos uma fórmula direta para descobrir o valor devido ao funcionário *q* específico.

$$V_q = \frac{p_q}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \times TOTAL = \frac{p_q}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \times (DINHEIRO + VALES)$$

Obviamente esse valor só é válido se o trabalhador *q* não tiver recebido vale nenhum antes da partilha, pois do contrário deveremos ainda descontar o valor do vale.

Vamos agora tentar enxergar o mesmo problema sem a regra de três. O valor devido ao trabalhador *q* deve ser ainda proporcional ao número de presenças dele. Assim, teremos:

$$V_q \approx p_q$$

Multiplicaremos agora o número de presenças por uma fração que tenha valor simbólico igual a um. Precisamos de uma cujo denominador seja um número de presenças, assim eliminaremos essa unidade indesejada do lado direito da expressão. Sabemos ainda que o total de presenças equivale ao total de dinheiro, então a obtenção do valor desejado se torna simples:

$$V_q = p_q \times \frac{TOTAL}{\sum_{k=1}^{n} p_k} = p_q \times \frac{DINHEIRO + VALES}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$$

Novamente devemos descontar dessa fórmula o valor de quaisquer vales já recebidos pelo trabalhador em questão (nas duas semanas que estão sendo calculadas) para obter o resultado final.

3.2. Segunda parte: da elaboração do modelo matemático da produção de lixo.

Vamos iniciar a confecção do nosso modelo matemático, então o primeiro passo é escolher um ponto de partida. O objetivo do trabalho é a elaboração de um modelo matemático que represente a evolução na produção de lixo em Florianópolis. Vamos iniciar então com uma análise mais superficial. Qual a quantidade de lixo sólido produzido em Florianópolis por ano nos últimos anos? Os dados a seguir foram fornecidos pela Comcap e de cara já nos deparamos com o problema de não haver muitos dados disponíveis, sendo que não estão presentes ainda as infromações sobre o ano de 2007.

Ano	Produção de resíduos sólidos (toneladas)
2004	113.573
2005	114.895
2006	120.444

Tabela 1: Produção de lixo sólido por ano em Florianópolis

Desde já podemos fazer uma primeira estimativa, ainda que razoavelmente fraca, de como se comportaria a produção de resíduos sólidos em função do tempo. Para isso vamos construir o gráfico com os pontos referentes aos dados de que dispomos e depois tentar encontrar uma reta que passe o mais próximo possível a esses pontos. Note que, para essa aproximação estamos considerando que o crescimento da produção de lixo em Florianópolis se dá de forma linear, o que pode ser uma aproximação um tanto quanto grosseira. Ainda assim, com a quantidade de dados exposta até agora tentaremos fazer o melhor possível.

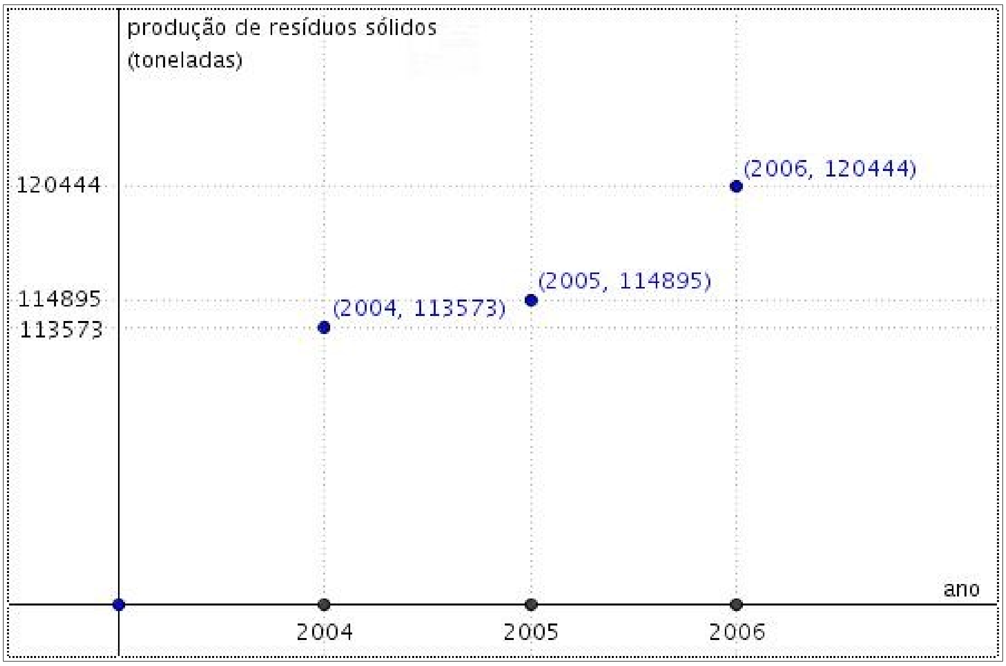

Gráfico 1: produção de resíduos sólidos por tempo

Segundo PIACENTINI (2001):

> *"Ao se obter uma sucessão de pontos experimentais que representados em um gráfico apresentam comportamento linear (isto é, sua curva representativa é uma reta), diferentes experimentadores poderão traçar diferentes retas, encontrando diferentes valores para os coeficientes linear e/ou angular. Qual será a melhor reta?*
> *Para responder essa questão, utilizam-se as equações dos mínimos quadrados. Essas equações fornecem os melhores parâmetros linear e angular para a reta."*

E essas equações, para a obtenção de uma reta ótima de equação *y=A+Bx*, são:

$$A = \frac{\sum Y \sum X^2 - \sum X \sum (XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$B = \frac{N \sum (XY) - \sum X \sum Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

Assim, com os três pontos que temos encontramos a reta que mais se aproxima dos três.

$$A = \frac{(113573 + 114895 + 120444)(2004^2 + 2005^2 + 2006^2) - (2004 + 2005 + 2006)(2004 \times 113573 + 2005 \times 114895 + 2006 \times 120444)}{3(2004^2 + 2005^2 + 2006^2) - (2004 + 2005 + 2006)^2}$$

$$A = -6771875$$

$$B = \frac{3 \times (2004 \times 113573 + 2005 \times 114895 + 2006 \times 120444) - (2004 + 2005 + 2006)(113573 + 114895 + 120444)}{3 \times (2004^2 + 2005^2 + 2006^2) - (2004 + 2005 + 2006)^2}$$

$$B = 3435,5$$

Logo, a equação da reta ótima em relação aos três pontos apresentados é *y=-6771875+3435,5x*.

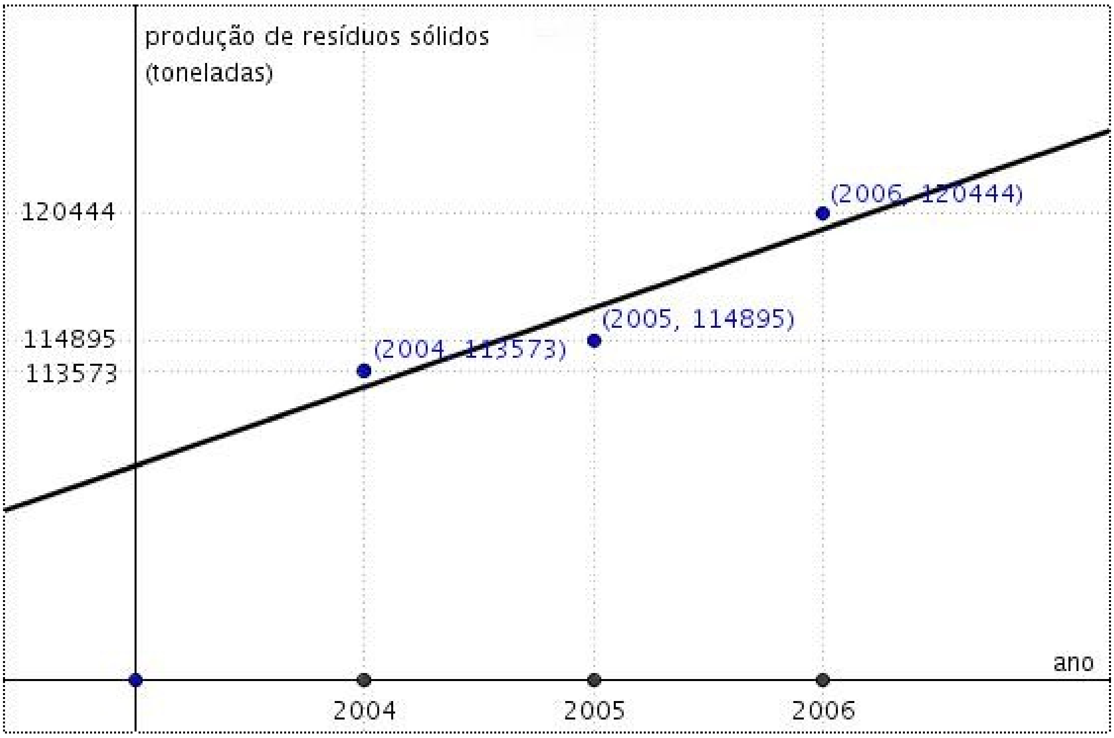

Gráfico 2: reta ótima obtida por mínimos quadrados

Note que existe nesse ponto uma distinção importante que deve ser levada em consideração. Nesse ponto o rigor tanto pode ser completamente abandonado em prol de uma resolução gráfica manual rudimentar – quando da aplicação de tal criação de modelo junto a uma turma de ensino médio – quanto, se for o caso da adoção do nível de detalhamento indicado até agora e nos próximos parágrafos, poderíamos agora propor inclusive instrução sobre a execução do mesmo procedimento em calculadoras científicas.

Continuemos o refinamento do nosso modelo. Temos até então uma função de primeiro grau que esperamos que descreva a evolução na produção de lixo sólido em Florianópolis. Supondo que o nosso modelo até agora realmente ilustre a realidade – suposição essa que com esse nível de aproximação carrega obviamente extrema imprecisão – temos em mãos um modelo de previsão para os próximos anos. Se quisermos, segundo o nosso modelo, o consumo em 2010 teremos:

$$y = -6771875 + 3435,5x$$
$$y(2010) = -6771875 + 3435,5 \times 2010$$
$$y(2010) = 133480$$

Concluída essa fase da confecção do modelo, podemos já analisar a situação do ponto de vista de função. Em primeiro lugar já podemos de início notar a incoerência da nossa função no que diz respeito ao coeficiente linear *A*. Obtivemos um valor negativo para *A*, o que significa que $y(0)=A<0$, fato que notadamente é um absurdo, já que no ano zero a produção de lixo sólido em Florianópolis seria negativa. Esse fato é facilmente descartado em nossa análise, já que, além de não ser do nosso interesse a produção de lixo no ano zero, o fato de termos usado apenas três valores nas equações dos mínimos quadrados nos indica claramente que esse é um modelo de curto alcance. Ou seja, ele perderá efetividade rapidamente conforme nos distanciamos da zona dos dados reais (anos 2004, 2005 e 2006).

Muito mais importante que a análise do coeficiente linear *A* é a análise do coeficiente angular *B*. Tratando-se de uma equação de primeiro grau a constatação que B vale 3435,5 significa que a taxa de variação da função y – que é a taxa de crescimento da produção de lixo em Florianópolis no nosso modelo – é de 3435,5 toneladas por ano. Ou seja, Florianópolis, no nosso modelo, produz 3435,5 toneladas a mais de lixo sólido a cada ano.

$$y(x) = -6771875 + 3435,5x$$
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 3435,5$$

Apesar de uma relativa efetividade do nosso modelo, devemos ter ainda em vista o fato de que ele é restrito à função ano-a-ano, o que o torna muito geral. O fato de Florianópolis ser uma cidade turística torna passível de interesse ainda a avaliação de como esse consumo se comporta no decorrer do ano. Dados sobre as variações no decorrer do ano também foram fornecidos pela Comcap.

Mês	Produção de lixo sólido (em toneladas	Mês	Produção de lixo sólido (em toneladas	Mês	Produção de lixo sólido (em toneladas
Janeiro 2004	12294	Janeiro 2005	12605	Janeiro 2006	13121
Fevereiro 2004	10521	Fevereiro 2005	10238	Fevereiro 2006	10571
Março 2004	9906	Março 2005	10027	Março 2006	10705
Abril 2004	9049	Abril 2005	8877	Abril 2006	8961
Maio 2004	8561	Maio 2005	9207	Maio 2006	9286
Junho 2004	8561	Junho 2005	8746	Junho 2006	8824
Julho 2004	8307	Julho 2005	8381	Julho 2006	9286
Agosto 2004	8614	Agosto 2005	9090	Agosto 2006	9087
Setembro 2004	8728	Setembro 2005	8553	Setembro 2006	8716
Outubro 2004	8690	Outubro 2005	9088	Outubro 2006	9909
Novembro 2004	9380	Novembro 2005	9317	Novembro 2006	9776
Dezembro 2004	11131	Dezembro 2005	10764	Dezembro 2006	12213

Tabela 2: Produção de lixo sólido por mês em Florianópolis

Para a construção do gráfico referente à essa tabela considerarei a origem do eixo das abscissas como o mês de dezembro de 2003 e, assim, a unidade do eixo *x* será *número de meses*.

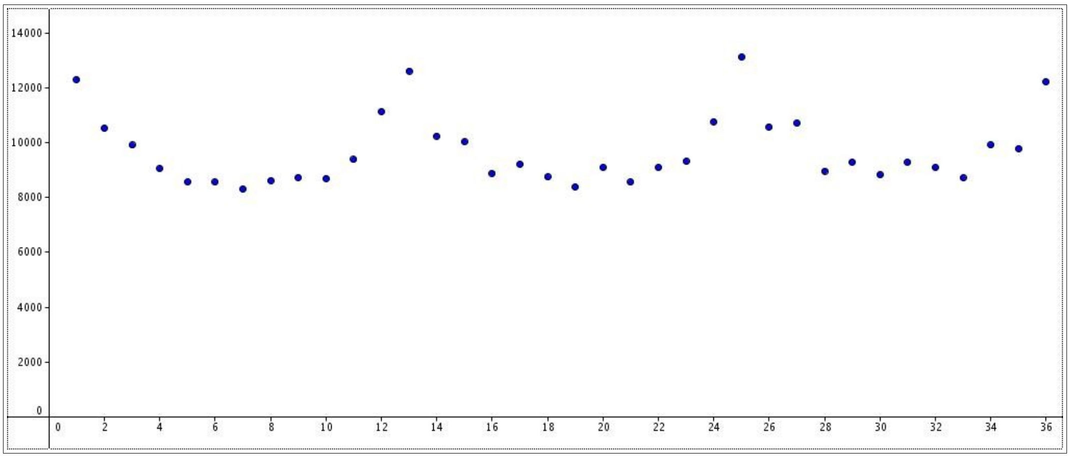

Gráfico 3: Produção florianopolitana de lixo sólido (em toneladas) por mês

Podemos notar já de início muito claramente o caráter periódico do nosso gráfico, como já era esperado se temos em vista o potencial turístico da cidade de Florianópolis e a quantidade de turistas que habitam a cidade apenas no verão.

O que faremos agora, de maneira bem menos direta que na linearização pelos mínimos quadrados, é tentar obter uma função que se aproxime dessa curva. Independentemente da precisão do método proposto a seguir, a grande vantagem dele é a riqueza que traz no que diz respeito a transformações gráficas de funções e também em composição.

O que usaremos nos próximos passos será quase sempre ligado à deformação que o gráfico de uma função sofre sob determinadas alterações algébricas. Por exemplo, para uma função qualquer $z(x)$ e dado a real, teremos uma nova função $w(x)$ reagindo da seguinte forma:

$w(x)=z(x+a)$	w é z transladada a para a esquerda (eixo x)
$w(x)=z(x-a)$	w é z transladada a para a direita (eixo x)
$w(x)=z(x)+a$	w é z transladada a para cima (eixo y)
$w(x)=z(x)-a$	w é z transladada a para baixo (eixo y)
$w(x)=z(ax)$	w é z comprimida por um fator a no eixo x
$w(x)=z(a/x)$	w é z expandida por um fator a no eixo x
$w(x)=az(x)$	w é z expandida por um fator a no eixo y
$w(x)=[z(x)]/a$	w é z comprimida por um fator a no eixo y

Em primeiro lugar, seja qual for a função usada, ela terá um caráter de crescimento constante, que no nosso modelo será descrito por meio daquela taxa de variação encontrada para a equação que obtivemos pelo cálculo dos mínimos quadrados. O problema de aplicação que podemos visualizar imediatamente é a diferença nas unidades dos argumentos. Teremos então que deformar o gráfico da primeira função para que se adeqüe ao que queremos. A partir da Figura 1, iremos a princípio eliminar o coeficiente linear, já que o que nos interessa agora é apenas a taxa de variação da função.

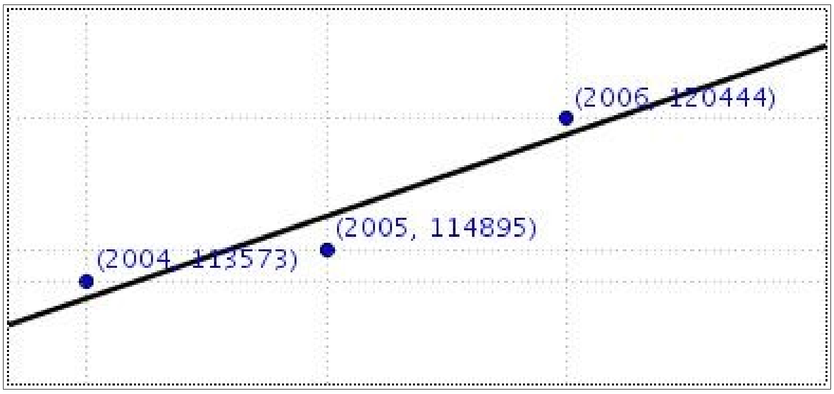

Gráfico 4: função *y(x)=-6771875+3435,5x*

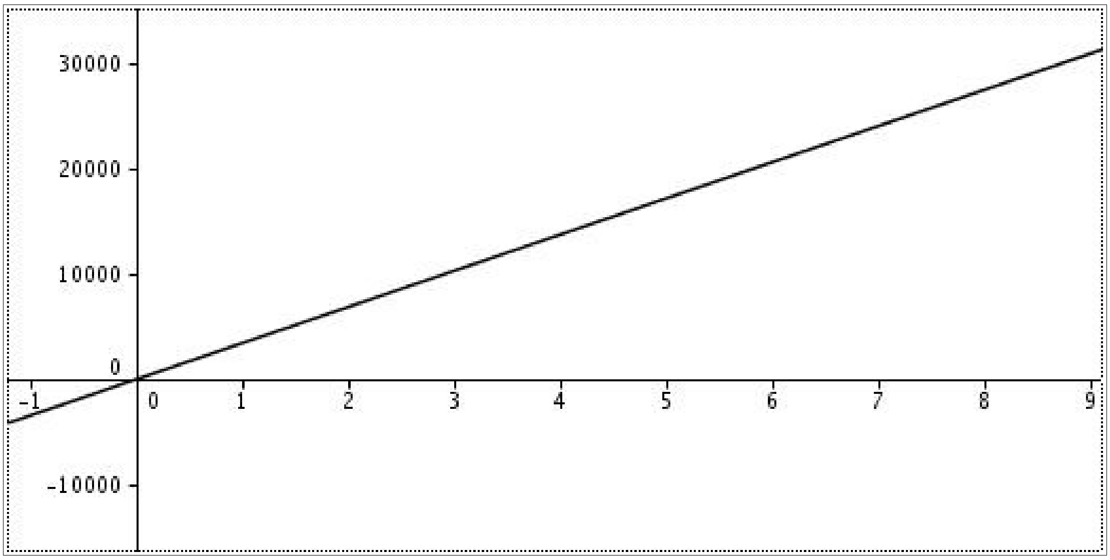

Gráfico 5: função *g(x)=y(x)+6771875=3435,5x*

Temos agora o gráfico da reta representada por *g(x)=3435,5x*. Como já discutido anteriormente, esse valor representa a taxa de variação da função em toneladas por ano. Precisamos agora que esse valor seja dado em toneladas por mês.

$$3435,5\frac{toneladas}{ano} \times \frac{1ano}{12meses} = 286,3\frac{toneladas}{mes}$$

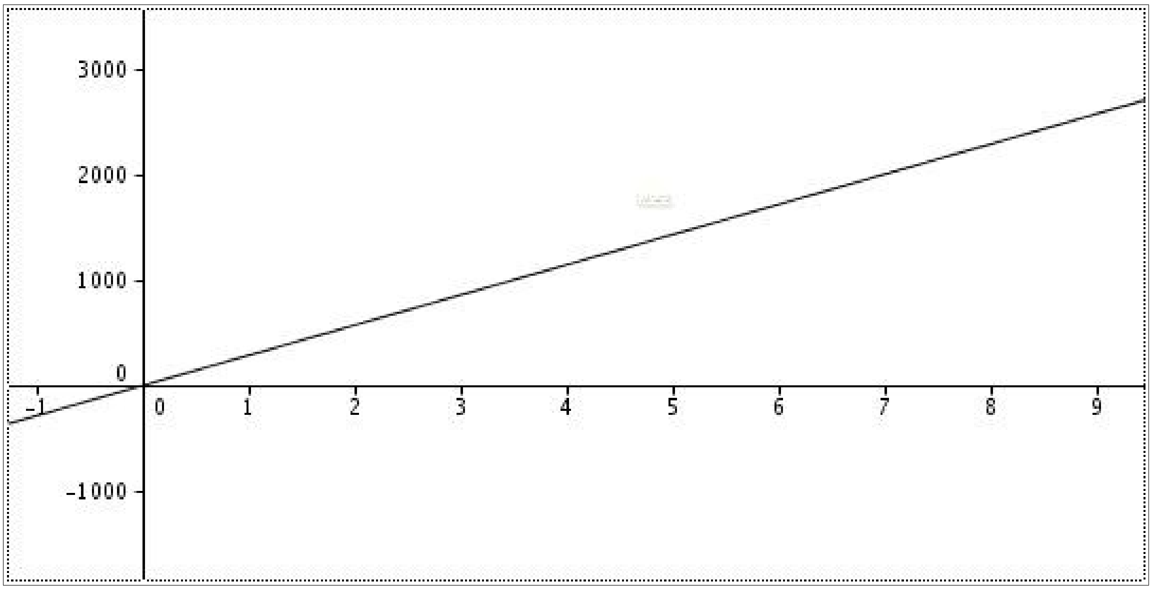

Gráfico 6: função *h(x)=g(x/12)*

Esse valor, porém, se refere ao quanto a produção de lixo sólido de um mês específico aumentou em relação ao mesmo mês do ano anterior. Assim, precisamos ainda deformar mais uma vez pelo fator 12 o gráfico da função no eixo x.

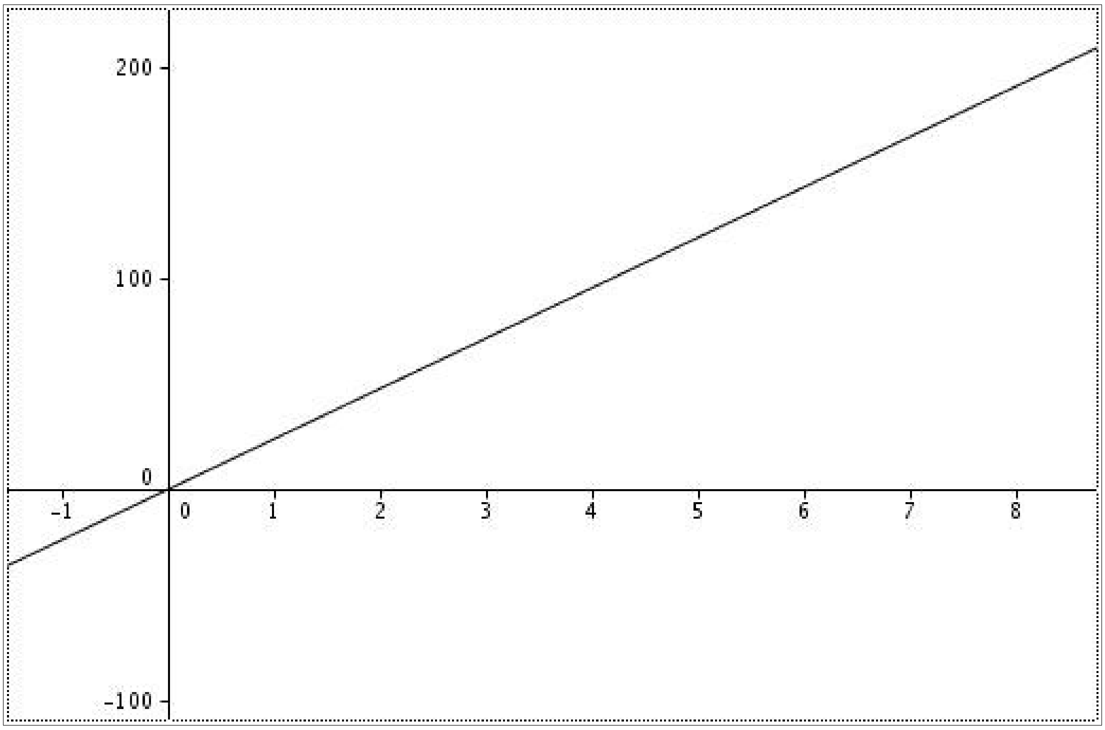

Gráfico 7: função *i(x)=h(x/12)*

Retomando, o que fizemos até agora foi:

$$y(x)=-6771875+3435{,}5x$$
$$g(x)=y(x)+6771875$$
$$h(x)=g(x/12)$$
$$i(x)=h(x/12)$$

Concluindo, vamos deslocar em uma unidade para a direita o gráfico dessa função, já que os nossos dados, no gráfico, começam com x=1.

$$j(x)=i(x-1)$$

Colocando no mesmo gráfico agora os pontos que tínhamos e essa função já temos a noção de que as proporções estão plausíveis.

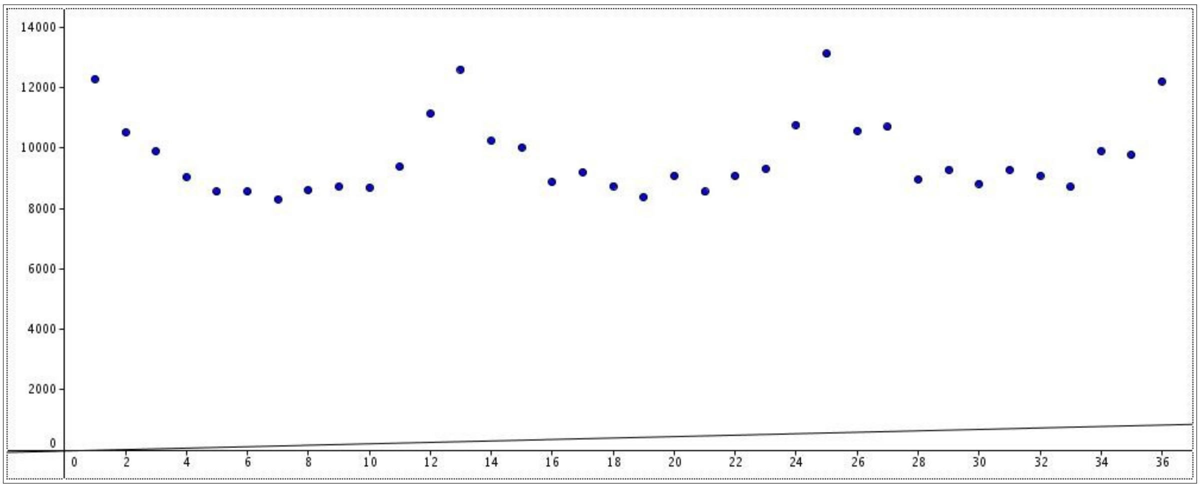

Gráfico 8: função *j(x)* e dados fornecidos

Agora precisamos decidir por qual tipo de função aproximaremos os dados que já temos. Para fazer tal escolha seria adequado tentar de alguma forma eliminar dos pontos esse elemento de crescimento constante. Vamos então transformar todo ponto *(x,y)* em um equivalente *(x,y-j(x))*.

Ponto	Equivalente	Ponto	Equivalente	Ponto	Equivalente
(1,12294)	(1,12294)	(13,12605)	(13,12318)	(25,13121)	(25,12548)
(2,10521)	(2,10497)	(14,10238)	(14,9928)	(26,10571)	(26,9975)
(3,9906)	(3,9858)	(15,10027)	(15,9693)	(27,10705)	(27,10085)
(4,9049)	(4,8977)	(16,8877)	(16,8519)	(28,8961)	(28,8317)
(5,8561)	(5,8466)	(17,9207)	(17,8825)	(29,9286)	(29,8618)
(6,8561)	(6,8442)	(18,8746)	(18,8340)	(30,8824)	(30,8132)
(7,8307)	(7,8164)	(19,8381)	(19,7952)	(31,9286)	(31,8570)
(8,8614)	(8,8447)	(20,9090)	(20,8637)	(32,9087)	(32,8347)
(9,8728)	(9,8537)	(21,8553)	(21,8076)	(33,8716)	(33,7953)
(10,8690)	(10,8475)	(22,9088)	(22,8587)	(34,9909)	(34,9122)
(11,9380)	(11,9141)	(23,9317)	(23,8792)	(35,9776)	(35,8965)
(12,11131)	(12,10869)	(24,10764)	(24,10215)	(36,12213)	(36,11378)

Tabela 3: Tratamento da informação para construção do modelo

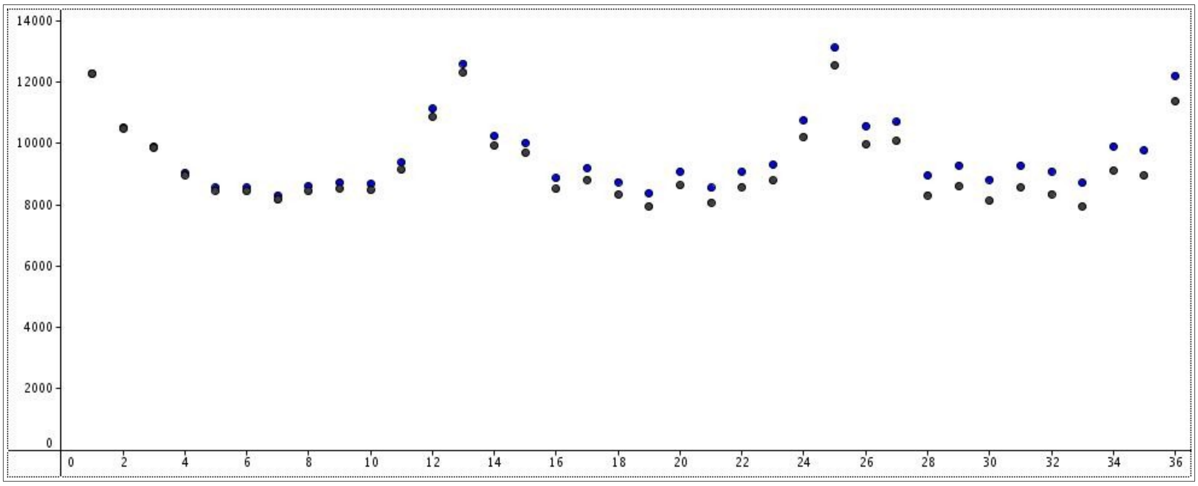

Gráfico 09: dados fornecidos e dados tratados

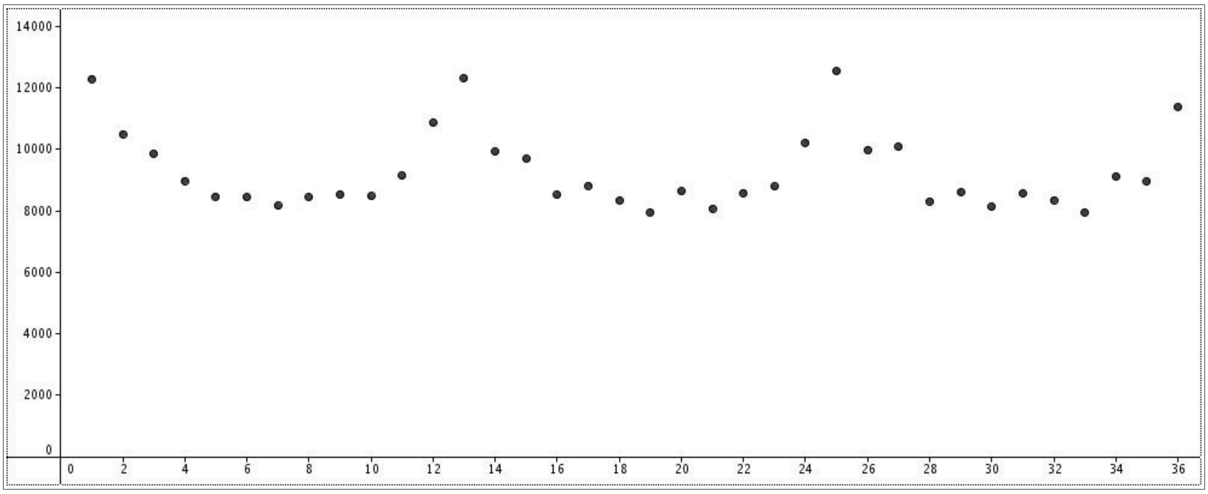

Gráfico 10: dados tratados

A escolha de uma função de aproximação dos dados tratados não segue uma regra estrita como se fosse uma linha reta (e pudéssemos por conguinte usar as equações dos mínimos quadrados). Aqui sim a escolha pode ser simplesmente intuitiva. Usaremos nessa construção uma função cossenóide e um dos principais motivos é a não-interpretação do pico que ocorre nos meses de janeiro (*x* pertencente a *{1,13,25}*) como uma "ponta" na curva. Iniciemos então nossa construção.

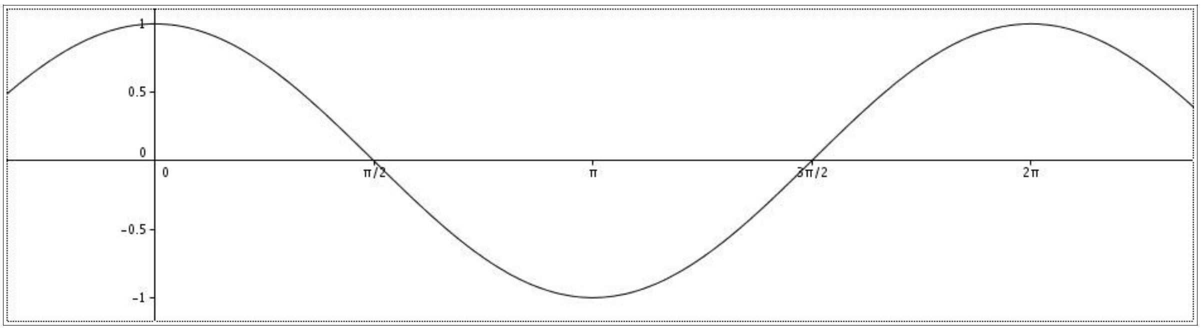

Gráfico 11: ***y=cos(x)***

Em primeiro lugar, nos parece visualmente claro que os pontos no gráfico 10 não se comportam de maneira tão suave quanto o gráfico da função cosseno. Usaremos então a função cosseno elevada a um expoente par, que definiremos mais tarde. Cabe por enquanto o uso da função cosseno elevada à quarta potência.

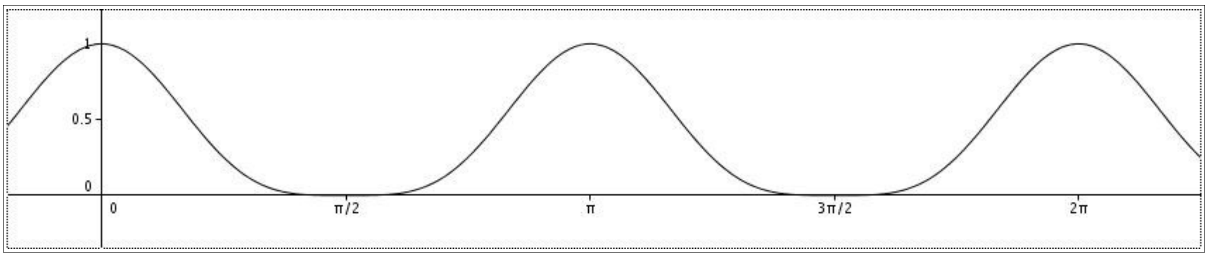

Gráfico 12: $y=\cos^4(x)=[\cos(x)]^4$

O período dessa função passa a ser igual a π, mas precisamos que essa função tenha período igual a doze meses.

$$k(x)=\cos^4(x)$$
$$l(x)=k(\pi x/12)=\cos^4(\pi x/12)$$

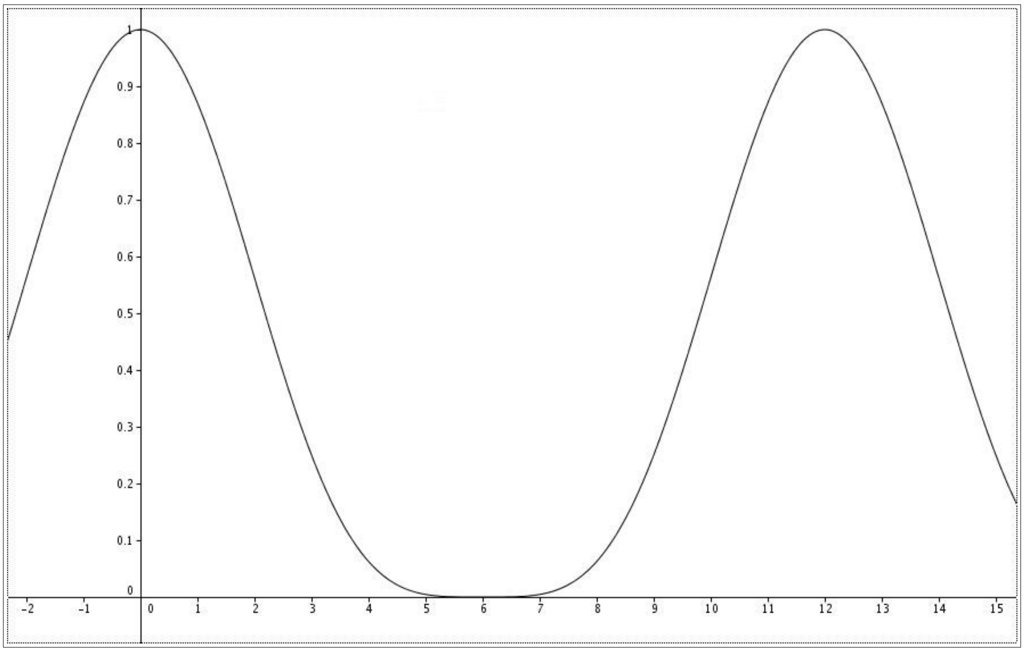

Gráfico 13: ***l(x)***

Note que o gráfico da função *l(x)* tem seus picos no valores múltiplos de *12*, enquanto os nossos dados os têm sempre uma unidade à direita. Faremos então a translação de *1* para a direita no eixo *x*.

$$m(x) = l(x-1)$$

Agora precisamos decidir em quanto deslocaremos o gráfico para cima no eixo das ordenadas. Os pontos com menores valores de *y* no gráfico 10 são *(7,8164)*, *(19,7952)* e *(33,7953)*. Esses são os pontos de valores mais baixos para cada ano. Faremos uma média aritmética entre os valores de *y* dos três para decidir quanto o gráfico de *l(x)* será deslocado.

$$\frac{8164 + 7952 + 7953}{3} = 8023$$

Precisamos decidir agora qual a amplitude da nossa função. Ela agora ocupa, no contra-domínio, o intervalo *[8023,8024]* e tem amplitude igual a *1*. Os nossos dados (tabela 3, dados tratados) apontam como picos nos três anos os pontos *(1,12294)*, *(13,12318)*, *(25,12548)*. Novamente fazendo uma média aritmética obtemos o máximo desejado da função.

$$\frac{12294 + 12318 + 12548}{3} = 12387$$

Assim a minha nova função deverá abranger os valore de *8023* a *12387*. Faremos ao mesmo tempo a expansão da função no eixo *y* pelo fator *(12387-8023)* e a translação de *8023* para cima no eixo *y*.

$$n(x) = 8023 + (12387 - 8023) \times m(x)$$
$$n(x) = 8023 + 4364 \times cos^4(\frac{\pi(x-1)}{12}) = 8023 + 4364 \times (cos\frac{\pi(x-1)}{12})^4$$

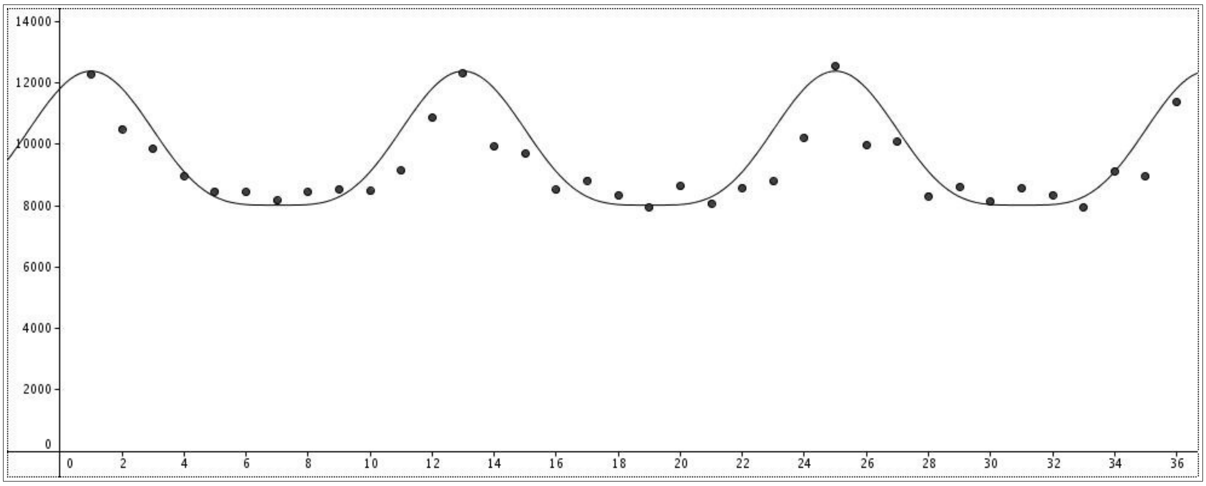

Gráfico 14: Dados tratados juntos ao gráfico de *n(x)*

O gráfico da função *n(x)* já se assemelha muito à curva descrita pelos pontos, como pode ser notado no gráfico 12. Os picos da função, porém, parecem estar ainda suaves demais com relação aos dados. Em outras palavras, o valor absoluto das taxas de variação ao redor dos picos aparenta estar mais baixo do que deveria. Para otimizar isso vamos voltar à discussão sobre o expoente do cosseno na nossa função. Vamos verificar graficamente mesmo como são as curvas descritas por funções semelhantes à *n(x)*, mas com diferentes expoentes para o cosseno (relembrando que em n(x) o expoente é 4).

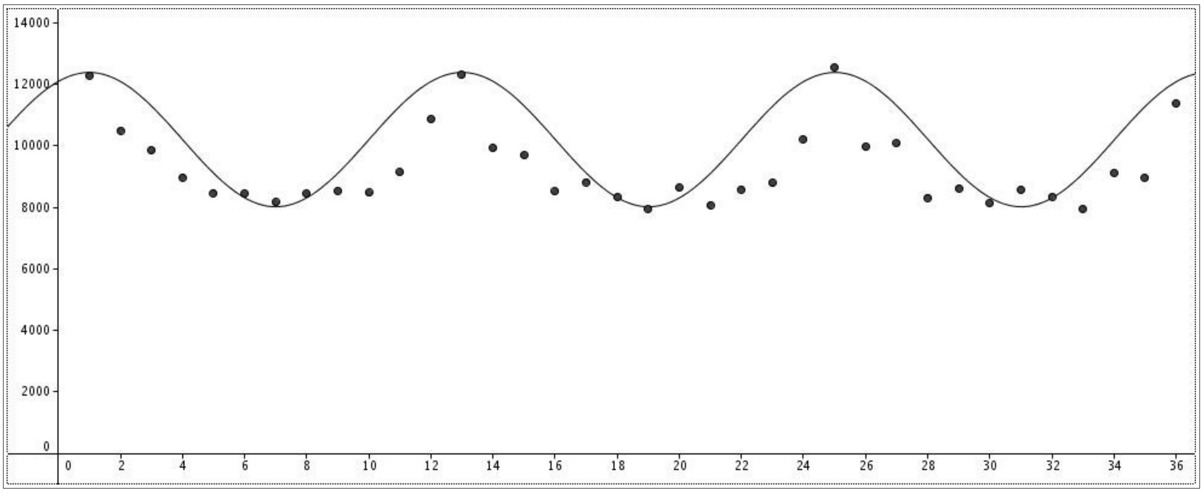

Gráfico 15: gráfico de *n(x)* com expoente do cosseno trocado para *2*

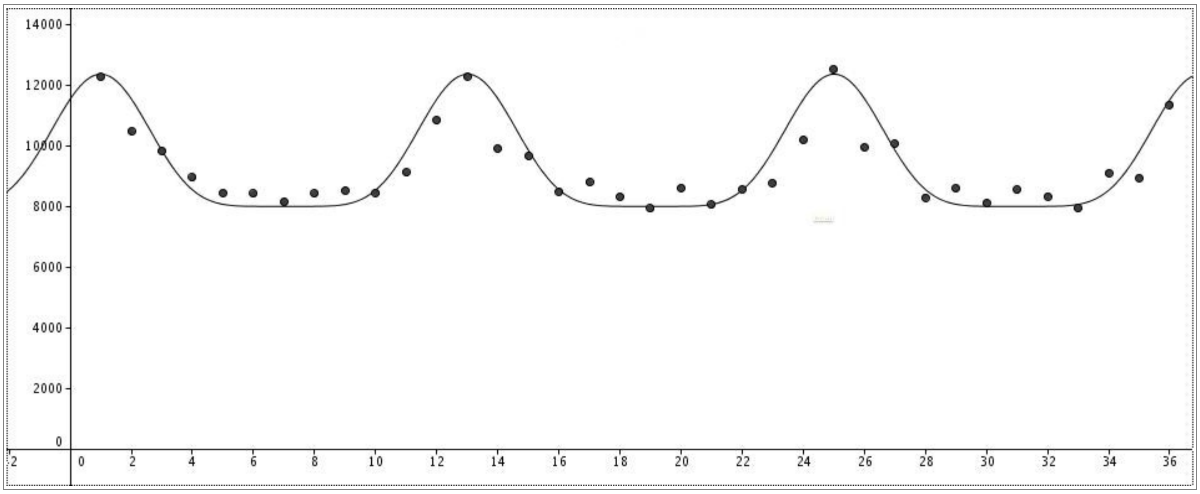

Gráfico 16: gráfico de *n(x)* com expoente do cosseno trocado para *6*

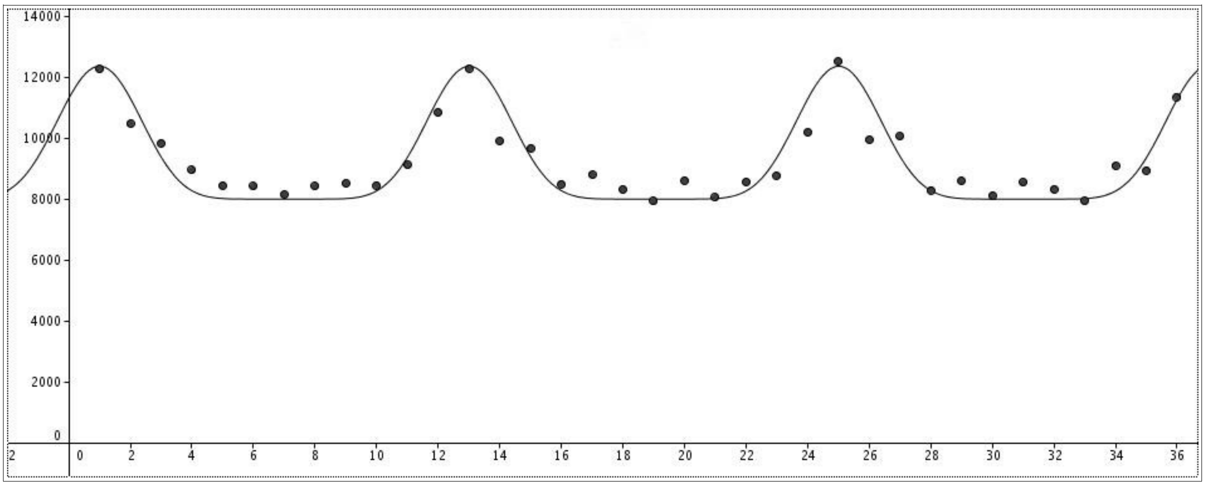

Gráfico 17: gráfico de *n(x)* com expoente do cosseno trocado para *8*

Ficaremos com o expoente *6* para nossa função, já que com expoente *8* teremos pontos demais abaixo do gráfico da função. Ficamos então com essa nova função *p(x)*.

$$p(x) = 8023 + 4364 \times cos^6(\frac{\pi(x-1)}{12}) = 8023 + 4364 \times (cos\frac{\pi(x-1)}{12})^6$$

Fica claro nesse ponto mais uma vez a necessidade de que haja uma tomada de decisão pela adoção de um determinado nível de tolerância em relação ao erro que nosso modelo carrega.

Falta pouco para a conclusão do nosso modelo. Para que possamos considerá-lo pronto precisamos recuperar nos dados do problema o fator de crescimento constante que estimamos no começo da construção. Para isso vamos simplesmente somar à nossa função *p(x)* a função *j(x)* que determinamos previamente e retornar aos dados iniciais, sem tratamento. Ficamos então com a nossa função final *q(x)*.

$$q(x)=p(x)+j(x)$$

$$q(x) = 8023 + 4364 \times (cos\frac{\pi(x-1)}{12})^6 + \frac{3435,5}{144} \times (x-1)$$

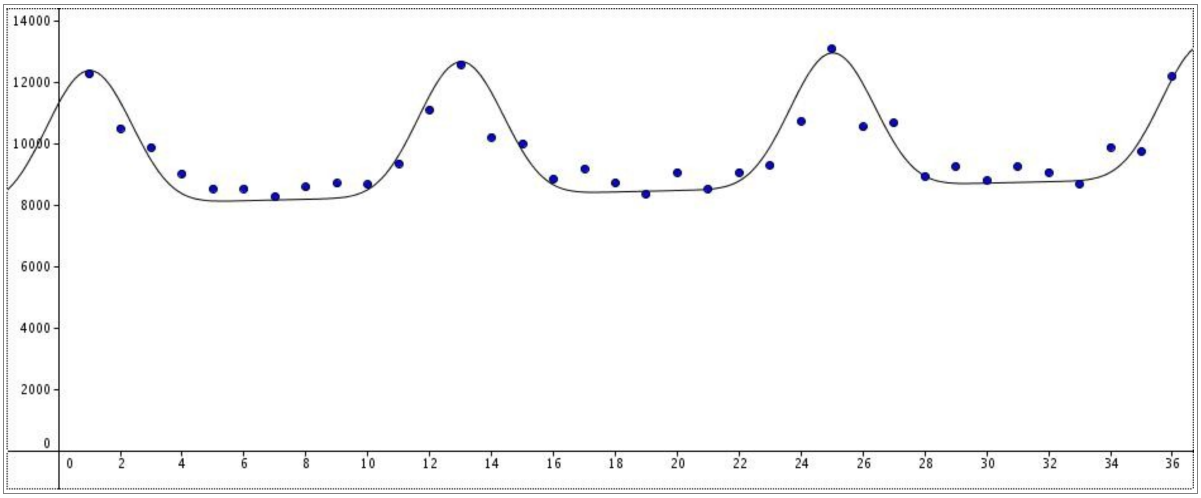

Gráfico 18: função final, *q(x)*, junto aos dados originais do problema

Cabe apenas como consideração final uma última ênfase no fato de que esse é um modelo de alcance limitado, devido principalmente ao fato de que foi construído com base em dados de apenas três anos. Mesmo assim, a forma de construção do modelo permite melhorias de maneira simples. Sabendo, por exemplo, mais sobre a taxa de crescimento ano a ano na produção de lixo já poderíamos ter uma equivalente à função *j(x)* melhorada, resultando num modelo melhor.

Caso haja interesse, é possível ainda fazer uma análise do comportamento da taxa de variação da função final *q(x)*. O estudo da derivada de *q(x)* poderia servir, por exemplo, para previsão de impacto social e ambiental, além de prover uma maior consciência dos associados quanto à natureza das variações do seu trabalho.

$$q'(x) = \frac{dq}{dx} = -9135{,}31 \times \left(cos\frac{\pi(x-1)}{12}\right)^7 \times sen\frac{\pi(x-1)}{12} + 23{,}86$$

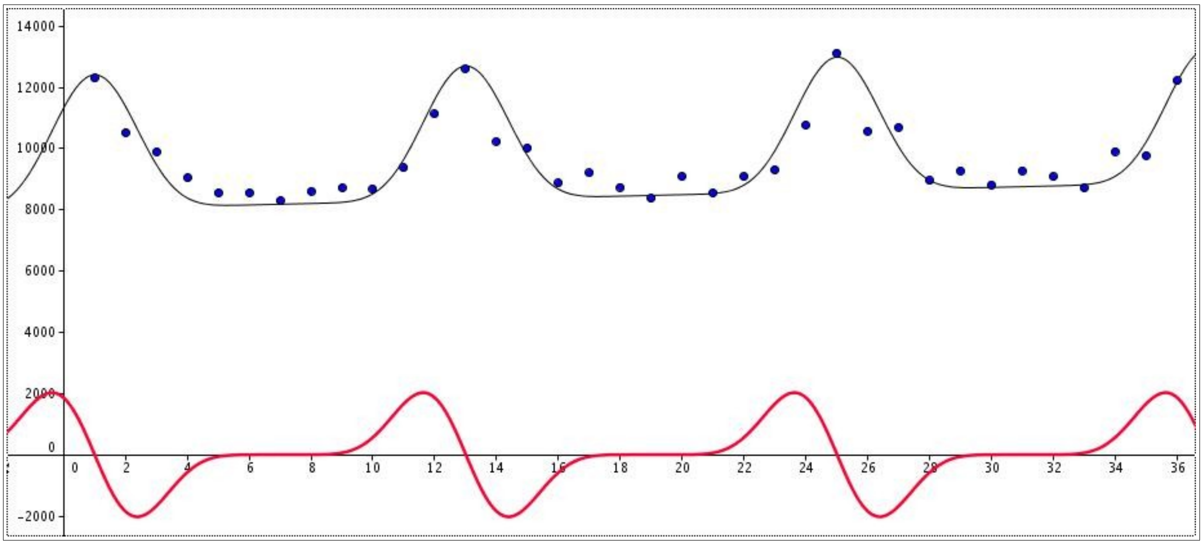

Gráfico 19: função final, *q(x)*, junto aos dados originais do problema e ao gráfico de sua derivada em função de *x*

4. CONCLUSÕES

Segundo Maria Salet Biembengut (2004), na modelagem matemática, bem como na modelagem artística, é necessário do agente da ação intuição, sensibilidade e criatividade. De fato, a observação de uma situação real quaquer, bem como interpretação matemática de aspectos relativos à situação e sua eficaz efetivação como substrato de modelo matemático carece, antes mesmo de conhecimento matemático fundamental, de atributos que são inerentes à condição de educador de matemática e sem os quais o estudo da matemática se reduz à simples memorização de fórmulas e métodos de resolução de exercícios.

A primeira parte do trabalho nos dá facilmente material suficiente para a fundamentação dos conteúdos de razões, proporções e regras de três. As vantagens de se ensinar esses conteúdos por meio de um modelo real como o proposto são inúmeras, mas se considerarmos os estudantes que se relacionam de alguma forma com o grupo estudado vemos que são ainda maximizadas. Mesmo as comunidades que integram os arredores da AREsp não têm um amplo conhecimento das atividades realizadas naquele espaço. Ensinar os alunos sempre com exemplos de situações que envolvem a realidade que os cerca irá fazer com que eles tenham enriquecido não só o seu conhecimento matemático, mas também sua consciência social, geográfica e política da cidade e do mundo em que vivem.

A segunda parte do trabalho nos dá substrato para o estudo de diversos conteúdos matemáticos, todos baseados na interpretação de dados reais por meio da interpretação de funções matemáticas. Linearização pelo método dos mínimos quadrados, interpretação e manipulação gráfica de funções são acompanhados inclusive de um possível estudo relevante da taxa de variação da função obtida. O uso de um processo de modelagem como o exemplificado nesse trabalho com o ensino médio necessita de um cuidado muito maior com o nível de interferência do professor na atividade. Principalmente numa situação como a proposta, que envolve um problema metropolitano real e palpável, é muito importante que os alunos sejam estimulados sempre a chegar ao maior número de conclusões de maneira autônoma. A maior vantagem – principalmente no ensino médio – do uso de modelagem matemática como forma de ensino é a possibilidade de fazer com que os alunos percebam a presença de conteúdos matemáticos em situações reais e de importância vital para eles e a interferência exagerada do professor nesse tipo de estudo anulará justamente esse aspecto de importância tão grande.

Pelo lado da modelagem matemática em si, é fácil pensar que existem muitos conteúdos matemáticos curriculares que simplesmente não possuem aplicações fora da matemática palpáveis para o estudante (o principal exemplo disso é o estudo dos números complexos). A modelagem matemática não é a solução para todo o ensino de matemática e nem deveria realmente tirar a importância de estudos que incentivem no aluno o raciocínio puramente abstrato. O que não pode ser negado, porém, é que essa é uma ferramenta de ensino poderosíssima e que alia o ensino de conteúdos matemáticos ao incentivo a posturas críticas e analíticas por parte dos alunos, característica que será de extremo valor na vida de todos.

BIBLIOGRAFIA

BARBOSA, J.C. Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. **Tese de Doutorado**. UNESP/Rio Claro. 2001.

BARBOSA, J.C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In **Anais da 24ª Reunião Anual da ANPED**. Rio de Janeiro. ANPED, 2001.

BEN, D. O que é Modelagem Matemática. **Educação Matemática em Revista**, n.9 ano 8. 2001.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática: implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática.** Edifurb. 2004 2. edição.

BORBA, M.C. ET ALLI. Modelagem Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de Ciências Biológicas. **Revista de Educação Matemática**. Ano 5, n.3 pp.63-70, 1997.

CALDEIRA, A D. 1998. Educação Matemática e Ambiental: um contexto de mudanças, Campinas – SP: FE/UNICAMP – Campinas .**Tese de doutorado**

D´ AMBROSIO, U. **Educação Matemática da Teoria a Prática**. Campinas-SP: Papirus, 1996.

FIGUEIREDO, V.L.X. & SANTOS, S. A. O computador no ensino de cálculo: o problema do lixo na UNICAMP e outras aplicações. **Zetetiké**, SPv.5n.7p.111-128, 1997.

MEYER, J.F.C.A. O mesmo velho sujeito de sempre. **Artigo não publicado**. 1997.

PIACENTINI, J. C. 2001. **Introdução ao laboratório de física.** Florianópolis; Ed. da UFSC. 2001. 2. edição.

RODNEY, C. B. **Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

SCHEFFER, F.N. & CAMPAGNOLLO, J. A. Modelagem Matemática uma alternativa para o ensino-aprendizagem da Matemática no meio rural. **Zetetiké**, v.6, n.10, jul/dez, 1998.

SILVA, M. P. da & PASTORI, O.A. O ensino de alguns tópicos de matemática na 5ª série através de Modelagem Matemática. **Bolema – Boletim de Educação Matemática,** ano 3, n.5, 1988.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática** n. 14 p 66-91, 2000.

http://www.angelfire.com/on2/modelagem. **Modelagem e Aplicações: um fórum virtual de educadores matemáticos.**

http://www.apm.pt . **Grupo de Trabalho e Aplicações da APM (Portugal).**