

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC.
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – CFM.
Departamento de Matemática.

Trabalho de Conclusão II – TCC II.

**Uma Introdução para a Controlabilidade em Equações Diferenciais Ordinárias –
E.D.O.'s.**

Florianópolis, julho de 2008.

**Uma Introdução para a Controlabilidade em Equações Diferenciais Ordinárias–
E.D.O.'s.**

Acadêmico: Felipe Ferronato Vargas.


Matrícula: 03133214 **Semestre:** 2008.01

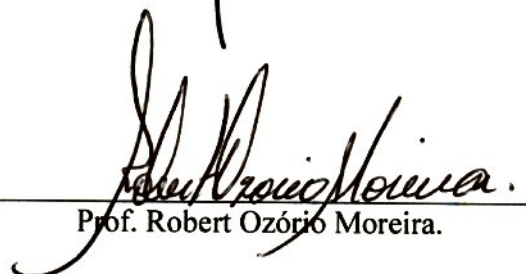
Professor Orientador: Felix Pedro Quispe Gomez.

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 25/CCM/08


Prof. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Banca Examinadora:


Orientador
Prof. Félix Pedro Quispe Gomez.


Prof. Robert Ozório Moreira.


Prof. Sérgio Eduardo Michelin.

“O que mata um jardim não é mesmo alguma ausência, nem mesmo o abandono. O que mata um jardim é esse olhar vazio, de quem passa por ele indiferente.”(Mário Quintana)

Agradecimentos:

Sou grato a Universidade Federal de Santa Catarina, pela oportunidade de um ensino público, gratuito e de qualidade. À minha família em especial a meus pais, pelo apoio constante e incondicional. À minha companheira Marta Branco, pela paciência e dedicação destinadas a mim. Aos meus mestres em especial a Felix Gomes, pela confiança e conhecimento repassados. E, como não podiam faltar, aos colegas do curso em especial aos frequentadores do Centro Acadêmico, pelo companheirismo e lealdade dedicados nesta caminhada de conquistas.

1. Sumário.

1. Sumário.....	04
2. Introdução.....	05
3. Equações Diferenciais.....	09
3.1. Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem.....	12
3.2. Métodos para Resolução.....	13
3.3 Equações Diferenciais de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes.....	20
3.4 Equações Homogêneas.....	24
4. Controle e estabilização de sistemas de dimensão finita.....	31
4.1 Controle de sistemas lineares de dimensão finita.....	31
4.2 Propriedade da Observabilidade.....	37
4.3 Condições do Controle de Kalman.....	45
4.4 Controle Bang-bang.....	51
4.5 Estabilização de sistemas lineares de dimensão finita.....	56
5. Conclusão.....	63
6. Referências Bibliográficas.....	64

2. Introdução.

O estudo de Equações Diferenciais começa com a criação do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII, e é guiado, inicialmente por suas aplicações à mecânica das partículas. Nestas aplicações, o uso das leis da física, como as três de Newton da Dinâmica e a lei da gravitação universal, possibilita obter equações diferenciais ordinárias que representam o fenômeno em estudo. O sucesso em tratar estes problemas utilizando o Cálculo Diferencial foi um enorme estímulo aos físicos e matemáticos do século XVIII em procurar modelos para a Mecânica do Contínuo e de outros ramos da Física (Termologia, por exemplo) que expressem os fenômenos em termos de Equações Diferenciais. Entretanto as equações resultantes, sendo equações diferenciais parciais, trazem sérias dificuldades matemáticas em suas resoluções. As três equações básicas que já aparecem nos estudos matemáticos do século XVIII são as seguintes: no problema das vibrações transversais de uma corda, a posição $u(x, t)$ no ponto x da corda, num instante t , deve satisfazer à equação das ondas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} ;$$

no problema da condução do calor em uma barra, a temperatura $u(x, t)$ no ponto x da barra no instante t , deve satisfazer à equação do calor

$$u_t = k u_{xx} .$$

No problema do equilíbrio de uma membrana sob a ação de certas forças, obtém-se uma certa função $u(x, y)$ que deve satisfazer à equação de *Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

em uma região do plano x, y .

Para estes problemas e obtenção de soluções satisfazendo, além da equação diferencial, a certas condições iniciais ou condições de fronteira é uma tarefa difícil. E este é o objetivo central deste trabalho, com o foco nos mais elementares materiais por particulares escolhas que os problemas possam considerar. Em outras palavras, um problema de controlabilidade pode ser formulado de várias maneiras. Consideremos sistemas de evolução (podendo ser descritos em termos de Equações Diferenciais Parciais ou Ordinárias). Estaremos interessados no momento em que a trajetória do sistema é alterada por algum controle (o lado direito do sistema, problemas de valores iniciais,

condições de fronteira, de contorno, etc.). Estes, contidos em um intervalo de tempo $t \in (0, T)$, e nos estados iniciais e finais nós temos como encontrar um controle onde as soluções particulares dos estados iniciais $t=0$ e finais $t=T$ poderão ser combinações lineares para a solução geral de uma Equação Diferencial Parcial. Este é um problema clássico sobre a Teoria do Controle, onde há uma vasta literatura sobre o tópico.

Quando começamos a trabalhar com problemas de controlabilidade, devemos ter bem clara a distinção entre sistemas de dimensão finita, caracterizadas pelas Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O.), e sistemas de dimensões infinitas, descritos pelas Equações Diferenciais Parciais (E.D.P.). Esta diferença pode ser importante na prática, em sistemas de dimensão finita e infinita, que por sua vez podem conter diferentes propriedades sobre um ponto de vista de um dado controle teórico.

Muitos dos problemas das notas são relatados para EDO. Entretanto, começaremos com um capítulo introdutório onde poderemos apresentar alguns dos problemas básicos e ferramentas para a teoria de controle de sistemas de dimensão finita. Como veremos, no contexto de dimensão finita um sistema é controlável se e somente se as condições algébricas de Kalman com o número de linhas não nulas são satisfeitas. De acordo com isto, quando um sistema é controlável em alguns pontos ele é também controlável durante todo o intervalo de tempo. Mas isto não é pura verdade nos contextos de Equações Diferenciais Parciais. Em particular, na equação da onda (um modelo de propagação com velocidade finita) e nas propriedades de controlabilidade, para que sejam verdadeiras, o controle sobre o tempo necessita ser grande, pois os efeitos do controle reagem em qualquer lugar. Como veremos, quando um sistema é controlável, o controle pode ser obtido pela minimização de uma função quadrática definida dentro da classe das soluções gerais do sistema adjunto. Introduziremos alguns problemas de interior e controle de contorno das constantes lineares, que são os coeficientes da equação da onda.

O método de resolução destes problemas é conhecido como o método de Fourier, o qual consiste em duas etapas. Na primeira, utiliza-se separação de variáveis para obter problemas de autovalor, para equações diferenciais ordinárias, estreitamente relacionados com as equações diferenciais parciais em estudo. Nesta etapa, obtém-se uma família de soluções da equação diferencial parcial que satisfazem a uma parte das condições de fronteira. A idéia básica a seguir é utilizá-las para compor a solução do problema como

uma série cujos termos são produtos dessas soluções por coeficientes adequadamente escolhidos; esta é a segunda etapa, que requer a chamada análise de Fourier. Geralmente, a resolução das equações diferenciais parciais apresenta-se como um problema muito mais difícil do que a resolução das equações diferenciais ordinárias e, a não ser para certos tipos especiais de equações diferenciais parciais lineares, nenhum método geral de resolução é viável. Portanto, vamos nos concentrar na resolução de tipos particulares de equações lineares. Isto não é, de fato, uma restrição tão séria, já que as equações diferenciais lineares parciais têm uma grande variedade de importantes aplicações em muitos ramos da física, química e da engenharia. Para compreender a ocorrência das equações diferenciais parciais na descrição matemática dos fenômenos da natureza, notemos que muitos eventos e processos físicos são descritos por funções de duas ou mais (usualmente quatro) variáveis independentes – por exemplo uma, duas ou três variáveis de espaço: x, y e z , e uma variável de tempo t . Conseqüentemente, qualquer relação entre uma tal função $[u(x, y, z, t)$, digamos] e suas derivadas em relação a qualquer uma das variáveis independentes levará uma equação diferencial parcial. Uma grande parte dos estudos das equações diferenciais parciais tem sido dirigida para uma compreensão de uma classe de equações conhecidas usualmente como as equações diferenciais parciais da física-matemática. O campo da física-matemática neste contexto deve ser interpretado no sentido mais amplo – isto é, como a descrição dos fenômenos da natureza em termos matemáticos. Incluídas nesta classe de equações, portanto, estão não só as equações importantes da moderna física teórica (tais como as equações de Schrödinger e de Dirac da teoria quântica), mas também as que são importantes para o matemático aplicado e o engenheiro (por exemplo, a equação da difusão ou condução do calor, as equações do fluxo do fluido viscoso, e muitas outras). Evidentemente, é quase impossível, nesta época de interligação de diferentes ramos da ciência e da tecnologia, falar-se de equações particulares, que são de pequena importância para tipos particulares de cientistas. De qualquer modo, a mesma equação surge, com freqüência, numa variedade de diferentes situações físicas. Entretanto é tão extraordinário quanto oportuno que uma grande parte das equações na física-matemática seja constituída de equações não só lineares como também de segunda ordem. Mas isto não quer dizer que não apareçam outros tipos de equações. Por exemplo, a equação de Dirac da teoria quântica é linear, mas de primeira ordem, enquanto que as

equações da relatividade geral que descrevem o campo gravitacional são de segunda ordem, mas não-lineares. Da mesma forma, uma equação de importância na elasticidade (a equação bi-harmônica) é linear, mas de quarta ordem. A dificuldade da resolução de uma equação linear, além de depender da ordem da equação, depende fortemente do número de variáveis independentes envolvidas; em conseqüência ilustramos, em muitos casos, um método particular de resolução, tomando inicialmente como exemplos as equações diferenciais parciais em duas variáveis independentes. Estas equações são, num certo sentido, de um grau de dificuldade matemática intermediário entre as equações diferenciais ordinárias, de um lado, e as equações diferenciais parciais em três ou mais variáveis independentes, de outro.

3. Equações Diferenciais:

Uma equação do tipo

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad (3.1)$$

onde $y = y(t)$ é a função procurada, é chamada de equação diferencial de *ordem n*. Assim sendo, a ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta da função incógnita que aparece no problema. A função $y = \varphi(t)$ que transforma a equação (1) numa identidade, é chamada de *solução* de equação diferencial, enquanto que o gráfico de $\varphi(t)$ é chamado de *curva integral*. A solução representada implicitamente por $\phi(t, y) = 0$ é chamada usualmente de uma *integral* de (3.1).

Uma equação linear chama-se *homogênea* se cada termo contém a variável dependente ou uma de suas derivadas. Por exemplo, a equação de Laplace em duas dimensões (isto é, duas variáveis independentes)

$$\nabla^2 u = 0,$$

onde ∇^2 é o operador bidimensional de Laplace [definido nas coordenadas cartesianas retangulares (x, y) por $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$], é homogênea. Enquanto a equação bidimensional de Poisson

$$\nabla^2 u = f(x, y)$$

onde $f(x, y)$ é qualquer função dada (não nula), é dita *não-homogênea*. Agora, no caso de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas, já se sabe que uma combinação linear de duas ou mais soluções é também uma solução. Um resultado semelhante aplica-se às equações diferenciais parciais, e se u_1, u_2, \dots, u_n , são n soluções diferentes de uma equação diferencial parcial linear homogênea em algum domínio dado, então

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$$

é também uma solução no mesmo domínio, onde os coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n são constantes arbitrárias. Este resultado domina-se **Princípio da Superposição**, e tem um papel importante no método de resolução conhecido como a separação de variáveis. Estenda-se ao caso de famílias infinitas.

Chegamos agora a uma das mais importantes diferenças entre as soluções de equações diferenciais parciais e equações diferenciais ordinárias. Isto por que, enquanto a solução geral de uma equação diferencial ordinária contém constantes arbitrárias de integração, a solução geral de uma equação diferencial parcial linear contém funções arbitrárias. Consideremos, para ilustrar esta ponto, o problema da formação das equações diferenciais parciais a partir das funções dadas. Por exemplo, se

$$u = yf(x),$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária de x , então, diferenciando em relação a y , temos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)$$

Substituindo $f(x)$, temos

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

que é uma equação diferencial parcial de primeira ordem, cuja solução geral é dada por

$u = yf(x)$. O ponto significativo aqui é que a solução de $y \frac{\partial u}{\partial y} = u$, tal como é dada por

$u = yf(x)$, contém uma função arbitrária.

DEFINIÇÃO: Uma função $y(t)$ definida implicitamente pela equação $\phi(t, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, que contém n constantes arbitrárias e é solução da equação diferencial $F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$, é chamada **solução geral** da equação na região onde é dada. Atribuindo valores às constantes c_1, c_2, \dots, c_n , obtemos uma **solução particular** da equação.

O valor da função que permite eliminar a constante é chamado de *condição*. As condições são classificadas conforme o ponto em que são dadas, assim se a equação diferencial estiver definida para $t \in [a, b]$ e a condição for dada em termos de a , teremos uma **condição inicial**. Caso a condição seja dada em um ponto $t \neq a$, ela é chamada de **condição de contorno**. O número de condições necessárias para a completa eliminação das constantes é igual à ordem da equação.

3.1. Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem.

Dada uma equação diferencial de primeira ordem, $y'(t) = f(t, y(t))$ a situação mais simples que pode ocorrer em termos da função f é quando f não depende de y . Temos então $\frac{dy}{dt} = g(t)$. Segue então que

$$y(t) = \int g(t)dt + c$$

pelo segundo teorema fundamental do cálculo. É usual chamar $\int g(t)dt$ de *primitiva* da função y . A função y dada desta forma é a solução geral da equação diferencial. Observe ainda que se u for uma outra solução da equação, então como $\frac{du}{dt} = g(t)$ segue que $u(t) = \int g(t)dt + c_1$ e podemos obter $u(t)$ a partir de $y(t)$ bastando fazer $c_1 = c$.

DEFINIÇÃO: A equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

onde $f(t, y) = -a(t)y + b(t)$ é chamada de **linear de primeira ordem**.

Os dados do problema são as funções $a(t)$ e $b(t)$. É natural esperarmos que $a(t)$ e $b(t)$ compareçam em integrais no processo de resolução da equação. Assim sendo, vamos exigir que elas sejam funções contínuas de t .

O problema que se coloca agora é, dada uma equação diferencial linear de 1ª ordem, como determinar uma solução geral para ela. Para tanto vamos desenvolver três métodos de solução.

3.2. Métodos para Resolução.

1º Método de Solução

Este método é chamado de **separação de variáveis**.

Exemplo:

Vamos supor que $y(t) = u(t) \cdot v(t)$ onde as funções u e v são também desconhecidas.

Substituindo na equação linear de primeira ordem, teremos

$$\frac{du}{dt}v + u\frac{dv}{dt} + a(t)u \cdot v = b(t) \text{ logo,}$$

$$v\left[\frac{du}{dt} + a(t)u\right] + u\frac{dv}{dt} = b(t)$$

Se escolhermos a função u de forma que ela satisfaça a equação

$$\frac{du}{dt} + a(t)u = 0$$

então,

$$u\frac{dv}{dt} = b(t)$$

e

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b(t)}{u(t)}$$

Mas a equação acima tem um segundo membro que só depende de t e assim, é do tipo anterior. Então,

$$v(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)} dt + c_1$$

e a solução da equação dada sendo $y(t) = u(t) \cdot v(t)$ dará

$$y(t) = u(t) \left(\int \frac{b(t)}{u(t)} dt + c_1 \right)$$

Resta-nos então o problema de resolver a equação

$$\frac{du}{dt} + a(t)u = 0$$

chamada de *equação homogênea* associada à equação linear de primeira ordem dada que, por isso, é chamada de equação *não-homogênea* ou *completa*.

Podemos reescrever a equação homogênea como

$$\frac{du}{dt} = -a(t)u$$

Mas sabemos que

$$\frac{d}{dt} \ln|u(t)| = \frac{du}{u}$$

onde por $\ln|u(t)|$ entende-se como logaritmo natural de $|u(t)|$. Segue então que

$$\frac{d}{dt} \ln|u(t)| = -a(t)$$

Mas esta equação tem um segundo membro que só depende de t sendo portanto do tipo anterior, onde f só dependia de t .

Assim sendo,

$$\ln|u(t)| = - \int a(t)dt + c_3$$

$$\text{e } |u(t)| = \exp\left[\int a(t)dt + c_3 \right]$$

$$= \left[\exp c_3 \right] \exp\left[\int a(t)dt \right]$$

Chamando c_2 à exponencial de c_3 e usando o fato de que a função exponencial é sempre positiva, temos

$$c_2 = \left| u(t) \cdot \exp\left[\int a(t)dt \right] \right| = |g(t)|$$

onde definimos a função $g(t)$ como sendo $u(t) \cdot \exp\left[\int a(t)dt \right]$. Fica assim estabelecido que a função g tem módulo constante. Por outro lado, a função g é o produto da função u , que é derivável, pois é solução da equação diferencial homogênea por uma função exponencial. Segue, então que a função g é contínua. Vamos supor por absurdo que a função g não seja constante. Existiria então dois valores de t , t_1 e t_2 , tais que $g(t_1) = -c_2$ e $g(t_2) = c_2$. Com g é contínua, segue que deve assumir todos os valores entre $-c_2$ e c_2 , existindo portanto um valor de t , digamos t^* , tal que $g(t^*) = 0$. Mas isto não é possível, pois $|g(t)| = c_2$. Assim sendo, podemos assumir que $g(t) = c_2$, e

$$u(t) = c_2 \cdot \exp\left[\int a(t)dt \right]$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 y(t) &= c_2 \exp\left(\int a(t) dt\right) \left(\int \frac{b(t)}{u(t)} dt + c_1\right) \\
 &= \exp\left(\int a(t) dt\right) \int \frac{b(t)}{u(t)} dt + c \exp\left(\int a(t) dt\right)
 \end{aligned}$$

onde $c = c_1 c_2$. Não aparece constante no primeiro termo pois a expressão de u envolve a constante c_2 .

Vamos definir a função $w(t)$ como sendo

$$w(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)} dt$$

Segue então que

$$y(t) = u(t)w(t) + u(t)$$

Observemos ainda que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [u(t)w(t)] &= \frac{du(t)}{dt} \cdot w(t) + u(t) \frac{dw(t)}{dt} \\
 &= -a(t)u(t)w(t) + b(t)
 \end{aligned}$$

Logo, a função $u \cdot w$ é solução particular da equação linear. Além disso, podemos ver que a solução geral da equação linear é a soma da solução geral da equação homogênea com uma solução particular da equação não-homogênea. Este resultado é característico das equações lineares em geral.

2º Método de Solução

Vamos considerar a função

$$h(t) = y(t) \exp \left(\int a(t) dt \right)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} \cdot \exp \left(\int a(t) dt \right) + a(t) y(t) \exp \left(\int a(t) dt \right) \\ &= \exp \left(\int a(t) dt \right) \left[\frac{dy(t)}{dt} + a(t) y(t) \right] \\ &= \exp \left(\int a(t) dt \right) b(t) \end{aligned}$$

Usamos o fato de que

$$\frac{d}{dt} \left[\exp F(t) \right] = \frac{dF}{dt} \cdot \exp F(t)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[\int a(t) dt \right] = a(t)$$

Segue então que

$$\frac{d}{dt} \left[y(t) \exp \left(\int a(t) dt \right) \right] = b(t) \exp \left(\int a(t) dt \right)$$

Mas a equação linear acima é linear e com um segundo membro função somente de t , já resolvida anteriormente. Então,

$$y(t) \exp\left(\int a(t) dt\right) = \int b(t) \exp\left(\int a(t) dt\right) dt + c$$

Resolvendo em relação a y teremos a solução geral da equação linear.

Observemos ainda que o fator $\exp\left(\int a(t) dt\right)$ é chamado de **fator integrante**, pois se multiplicarmos ambos os membros da equação diferencial por ele é possível então integrá-la.

Conforme já observado, a solução geral de uma equação linear pode ser encontrada somando à solução geral da equação homogênea uma solução particular da equação completa.

Vejamos um método para encontrar uma solução particular que, acoplado com qualquer método que dê a solução geral da equação homogênea nos permita encontrar a solução geral da equação linear.

3º Método de Solução

Resolveremos a equação diferencial $y'(t) = -y(t) + t^3$. Em primeiro lugar, consideremos a equação homogênea

$$\frac{du}{dt} = -u$$

cuja a solução é $u(t) = c_1 e^{-t}$.

Consideremos agora

$$w(t) = \gamma(t) e^{-t}$$

onde tomamos a solução da equação homogênea e em vez de uma constante, consideremos uma função de t , a qual devemos determinar. Substituindo $w(t)$ na equação dada, teremos

$$\gamma'(t)e^{-t} - \gamma(t)e^{-t} = -\gamma(t)e^{-t} + t^3$$

Segue então que

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = t^3 e^t$$

e portanto

$$\gamma(t) = \int t^3 e^t dt$$

Integrando por partes, teremos

$$\gamma(t) = t^3 e^t - 3 \int t^2 e^t dt$$

$$\gamma(t) = t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6 \int t e^t dt$$

$$\gamma(t) = t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6te^t - 6 \int e^t dt$$

$$\gamma(t) = t^3 e^t - 3t^2 e^t + 6te^t - 6e^t + c_2$$

A solução geral $y(t)$ da equação dada é tal que

$$y(t) = u(t) + w(t)$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + t^3 - 3t^2 + 6t - 6 + c_2 e^{-t}$$

$$y(t) = c e^{-t} + t^3 - 3t^2 + 6t - 6$$

onde fizemos $c = c_1 + c_2$.

Este método de encontrar solução particular da equação completa é chamado de **método da variação das constantes**.

3.3 Equações Diferenciais de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes.

As equações diferenciais de segunda ordem são equações do tipo

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Por exemplo,

$$y''(t) = t \cos(y) + \frac{1}{t^2}$$

é uma equação de segunda ordem. Por solução da equação entendemos uma função que satisfaça a equação. Assim, por exemplo, a função $y(t) = e^{2t}$ é uma solução da equação diferencial $y''(t) = 4y(t)$ pois $y'(t) = 2e^{2t}$ e $y''(t) = 4e^{2t}$.

Consideremos a equação diferencial

$$y''(t) = 0,$$

Vamos supor que $t \in]a, b[$. Aplicando-se duas vezes o segundo teorema fundamental do cálculo, temos

$$y(t) = c_1 t + c_2$$

Vemos que neste caso a solução geral depende de duas constantes arbitrárias. Frequentemente é necessário resolver a equação de segunda ordem sujeita a duas condições. No caso de serem dadas as condições $y(a)$ e $y'(a)$, teremos um problema de valor inicial. Caso tenhamos uma condição em a e outra em b , teremos um problema de contorno.

É um problema bastante difícil resolver uma equação diferencial qualquer de segunda ordem. Mesmo o caso linear, isto é, a equação

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

escapa ao contexto deste trabalho. Assim, poderemos estudar tão somente o caso

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$$

isto é, uma equação linear a coeficientes constantes.

Existe uma propriedade que é característica das equações lineares que daremos a seguir:

TEOREMA:

Se as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem soluções da equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

então a função

$$Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias, é também solução da equação.

Prova

Como as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, então

$$ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = 0$$

e

$$ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = 0$$

Multiplicando a primeira equação por c_1 , a segunda por c_2 e somando, obtemos

$$a(c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t)) + b(c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)) + c(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)) = 0$$

ou seja

$$aY''(t) + bY'(t) + cY(t) = 0$$

Vejamos agora em que condições podemos considerar a solução $Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ como sendo a solução geral da equação homogênea, isto é, se $Y^*(t)$ for uma outra solução da equação homogênea, então podemos escolher c_1 e c_2 de tal maneira que $Y(t) = Y^*(t)$. Vamos dar um teorema cuja demonstração foge do contexto deste trabalho.

TEOREMA:

Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem soluções da equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

no intervalo $\alpha < t < \beta$, com

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

diferente de zero neste intervalo, então a função

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

é a solução geral da equação homogênea.

DEFINIÇÃO:

A expressão $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ ou

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

é chamada de **wronskiano** das funções y_1 e y_2 e é indicado por

$$W(t) = W[y_1, y_2](t)$$

3.4 Equações Homogêneas.

Passemos agora a estudar um método de resolução para equação homogênea

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Se encontrarmos duas soluções cujo wronskiano seja diferente de zero, teremos então a solução geral. Observando a equação, vemos que os termos $ay''(t)$, $by'(t)$ e $cy(t)$ devem ter soma nula. Para que isto ocorra, as funções $y''(t)$, $y'(t)$ e $y(t)$ devem ter o mesmo “aspecto”, ou seja, não podemos pensar que $y(t)$ seja, por exemplo, um polinômio, pois neste caso os termos $ay''(t)$, $by'(t)$ e $cy(t)$ seriam polinômios com graus diferentes cuja soma seria não-nula. No entanto, a tentativa de $y(t) = e^{\lambda t}$, λ sendo um parâmetro a ser determinado, é válida, pois tornaria o primeiro membro da equação uma combinação linear da função exponencial $e^{\lambda t}$. Substituindo na equação homogênea $y(t)$ por $e^{\lambda t}$, teremos

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = (\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0$$

Como a função exponencial é diferente de zero, $e^{\lambda t}$ é solução da equação homogênea se e somente se λ for uma solução da equação

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

chamada *equação característica* da equação dada. As raízes desta equação são

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Conforme $(b^2 - 4ac)$ seja positivo, nulo ou negativo, respectivamente, duas raízes reais distintas, uma raiz dupla ou um par de números complexos conjugados.

1º caso

Seja $b^2 - 4ac > 0$. Temos então duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2 e portanto duas soluções $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ tais que

$$W \begin{matrix} \lambda_1 t \\ \lambda_2 t \end{matrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Como $W \begin{matrix} \lambda_1 t \\ \lambda_2 t \end{matrix} \neq 0$ segue então que a solução geral é dada por

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

2º caso

Seja $b^2 - 4ac = 0$. Teremos então uma única raiz dupla λ_1 e portanto só uma solução $e^{\lambda_1 t} = y_1(t)$.

Consideremos

$$y_2(t) = y_1(t) \cdot v(t)$$

Substituindo y_2 na equação homogênea reescrita na forma

$$y''(t) + \frac{b}{a} y'(t) + \frac{c}{a} y(t) = 0$$

como

$$y_2'(t) = y_1'(t)v(t) - y_1(t)v'(t)$$

e

$$y_2''(t) = y_1''(t)v(t) + 2y_1'(t)v'(t) + y_1(t)v''(t)$$

teremos

$$\begin{aligned} & v(t)y_1''(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v''(t)y_1(t) + \frac{b}{a}y_1'(t)v(t) + y_1(t)v'(t) - \frac{c}{a}y_1(t)v(t) = \\ & = y_1(t)v''(t) + v'(t)\left[2y_1'(t) + \frac{b}{a}y_1(t)\right] + v(t)\left[y_1''(t) + \frac{b}{a}y_1'(t) + \frac{c}{a}y_1(t)\right] = \\ & = y_1(t)v''(t) + v'(t)\left[2y_1'(t) + \frac{b}{a}y_1(t)\right] \end{aligned}$$

pois $y_1(t)$ é solução da equação. Segue que $y_2(t)$ é solução da equação dada se $v(t)$ for solução da equação diferencial

$$y_1v''(t) + v'(t)\left[2y_1' + \frac{b}{a}y_1\right] = 0$$

Vamos fazer agora $v'(t) = u(t)$ e portanto $v''(t) = u'(t)$. Lembrando-se que $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, então

$$e^{\lambda_1 t}u'(t) + u(t)\left[2\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{b}{a}e^{\lambda_1 t}\right] = 0$$

que é uma equação linear em $u(t)$ e de primeira ordem. Observe ainda que, do fato de conhecermos uma solução $y_1(t)$ conseguimos reduzir a ordem da equação diferencial. Por esta razão, este método é chamado de *método da redução da ordem*. Retomando a última equação, dividida por $e^{\lambda_1 t}$, teremos

$$u'(t) + u\left(2\gamma_1 + \frac{b}{a}\right) = 0$$

Segue então que

$$u(t) = ke^{-\left(2\gamma_1 + \frac{b}{a}\right)t}$$

Como queremos somente uma solução, vamos fazer $k = 1$, logo

$$u(t) = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} \text{ e } \frac{dv}{dt} = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)}$$

Integrando e fazendo a constante de integração igual a zero, teremos

$$v(t) = \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} dt$$

Portanto,

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} dt$$

Observemos que $W[y_1(t), y_2(t)]$ é diferente de zero, pois se fosse nulo, y_2 seria um múltiplo de y_1 o que acarretaria $v(t)$ constante, pois $v(t) = \frac{y_2(t)}{y_1(t)}$, mas então $\frac{dv}{dt} = 0$, porém

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{y_1^2(t)} = e^{-\left(2\gamma_1 + \frac{b}{a}\right)t}$$

que é certamente diferente de zero.

3º caso

Se $b^2 - 4ac < 0$ então teremos as raízes complexas

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Se, como anteriormente, $Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, $Y(t)$ seria complexo e precisaríamos de duas raízes reais. Isto pode ser contornado da seguinte forma: seja $y(t) = u(t) + iv(t)$ uma solução da equação homogênea com valores complexos. Então,

$$a(u''(t) + iv''(t)) + b(u'(t) + iv'(t)) + c(u(t) + iv(t)) = 0$$

ou seja

$$a(u''(t) + bu'(t) + cu(t)) + i(v''(t) + bv'(t) + cv(t)) = 0$$

Isto significa que o número complexo da primeira equação é nulo. Mas se um número complexo é zero, são nulas suas partes real e imaginária, conseqüentemente

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$$

e

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = 0$$

Assim sendo, cada solução complexa da equação homogênea dá origem a duas soluções reais. Consideremos então a solução complexa $e^{\lambda_1 t}$. Vamos definir

$$\theta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Então,

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{\left(-\frac{b}{2a} + i\theta\right)t} = e^{-\frac{b}{2a}t} \cdot e^{i\theta t} \\ &= e^{-\frac{b}{2a}t} [\cos \theta t + i \operatorname{sen} \theta t] \\ &= e^{-\frac{b}{2a}t} \cos \theta t + i e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sen} \theta t \end{aligned}$$

E, portanto teremos as soluções reais:

$$y_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \cos \theta t \text{ e } y_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \operatorname{sen} \theta t$$

Vamos definir $\varphi = -\frac{b}{2a}$ e calcular $W \begin{bmatrix} e^{\varphi t} \cos \theta t, e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t \end{bmatrix}$

$$W \begin{bmatrix} e^{\varphi t} \cos \theta t, e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\varphi t} \cos \theta t & e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t \\ \varphi e^{\varphi t} \cos \theta t - \theta e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t & \varphi e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t + \theta e^{\varphi t} \cos \theta t \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned} W \begin{bmatrix} e^{\varphi t} \cos \theta t, e^{\varphi t} \operatorname{sen} \theta t \end{bmatrix} &= \varphi e^{2\varphi t} \cos \theta t \operatorname{sen} \theta t + \theta e^{2\varphi t} \cos^2 \theta t - \varphi e^{2\varphi t} \cos \theta t \operatorname{sen} \theta t + \theta e^{2\varphi t} \operatorname{sen}^2 \theta t \\ &= \theta e^{2\varphi t} (\cos^2 \theta t + \operatorname{sen}^2 \theta t) \\ &= \theta e^{2\varphi t} \end{aligned}$$

Lembrando que $\theta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} > 0$ e que a exponencial não se anula, segue que

$$W \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \cos \theta t, e^{\lambda_1 t} \sin \theta t \\ e^{\lambda_2 t} \cos \theta t, e^{\lambda_2 t} \sin \theta t \end{bmatrix} \neq 0$$

Assim sendo, a solução geral neste caso é

$$Y(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2a} t} \cos \theta t + c_2 e^{-\frac{b}{2a} t} \sin \theta t$$

Podemos pensar que a solução complexa $e^{\lambda_2 t}$ dará origem a mais duas soluções reais, entretanto

$$\begin{aligned} e^{\lambda_2 t} &= e^{-\frac{b}{2a} t} \cdot e^{-i\theta t} \\ &= e^{-\frac{b}{2a} t} \left[\cos(\theta t) - i \sin(\theta t) \right] \\ &= e^{-\frac{b}{2a} t} \cos \theta t - i e^{-\frac{b}{2a} t} \sin \theta t \end{aligned}$$

ou seja $e^{-\frac{b}{2a} t} \cos \theta t = y_1(t)$ e $-e^{-\frac{b}{2a} t} \sin \theta t = -y_2(t)$, portanto temos novamente as mesmas soluções.

4. Controle e estabilização de sistemas de dimensão finita.

Este capítulo será destinado para o estudo de algumas propriedades básicas sobre controlabilidade e estabilização de sistemas de dimensão finita.

Nas duas primeiras seções, trabalharemos com os casos lineares. No primeiro, mostraremos a propriedade do controle exato que pode ser caracterizado pelas *condições algébricas de Kalman* [1] (número de linhas não nulas do sistema = posto da matriz). No segundo, um sistema adjunto simétrico é considerado. Na ausência do controle, o sistema é conservativo e gera um grupo de isometrias. Isto mostrará que o sistema poderá seguramente ser estável uniformemente exponencial se bem escolhido termos dissipativos associados a ele. Este é um caso particular da bem conhecida propriedade de equivalência entre controlabilidade e estabilização de sistemas de dimensão finita.

4.1 Controle de Sistemas lineares de dimensão finita.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $T > 0$. Vamos considerar o seguinte sistema de dimensão finita:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in (0, T), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

No sistema (4.1.1), A é a matriz real $n \times n$, B é a matriz real $n \times m$ e x_0 um vetor em \mathbb{R}^n . A função $x:]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^n$ representa o estado e $u:]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^m$ o controle. Temos as funções vetoriais de componentes n e m respectivamente dependentes exclusivamente do tempo t . Obviamente, na prática $m \leq n$. A parte mais importante é, com certeza, o controle do sistema por um número mínimo m de controles.

Dada uma condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma função vetorial $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, o sistema (4.1.1) tem uma única solução $x \in H^1(]0, T[; \mathbb{R}^n)$ caracterizada pela forma da variação das constantes:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.1.2)$$

DEFINIÇÃO 1.1

O sistema (4.1.1) é **exatamente controlável** no tempo $T > 0$ se dadas as condições inicial e final $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ que é solução de (4.1.1) satisfazendo

$$x(T) = x_1.$$

De acordo com a definição, o processo de controle consiste em direcionar uma solução x de (4.1.1) do estado inicial x_0 para o estado final x_1 , no tempo T de acordo com ação que o controle u age sobre o sistema.

Lembrando que m é o número de controles determinados pelo sistema, enquanto n é o número de componentes do estado a ser controlado. Como mencionamos anteriormente, em aplicações isto é muito difícil de determinar o número de controles m necessários para que seja possível. Mas isto pode acabar afetando as propriedades de controle do sistema.

Como veremos, alguns sistemas com um grande número de componentes n pode ser controlável por apenas um controle. (isto é $m = 1$). Mas para que este seja verdade, o mecanismo do controle, isto é a matriz B (vetor coluna quando $m = 1$), precisa ser escolhida de uma forma estratégica dependendo da matriz A . As condições de *Kalman*, sobre o número de linhas não nulas do sistema, nos fornecerão posteriormente uma simples caracterização da controlabilidade permitindo uma escolha apropriada da matriz de controle B .

Ilustraremos isto com dois exemplos. No primeiro a controlabilidade não é válida porque uma das componentes do sistema não depende do controle. No segundo, uma das duas componentes será controlada por meio de um controle escalar.

Exemplo 1: Considere o caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

Então o sistema $x' = Ax + Bu$

$$\text{Pode ser escrito como } \begin{cases} x_1' = x_1 + u \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

$$\text{Ou equivalentemente } \begin{cases} x_1' = x_1 + u \\ x_2 = x_0^2 e^t \end{cases}$$

onde $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ são dados iniciais.

Este sistema não é controlável desde que o controle u não atua na segunda componente x_2 do estado o qual é completamente determinado pelo dado inicial x_0^2 . Assim, o sistema não é controlável.

Pelo menos é possível controlar a primeira componente x_1 do estado. Conseqüentemente, o sistema é parcialmente controlável.

Exemplo 2: Nem todos os sistemas com duas componentes e um controle escalar $(n = 2, m = 1)$ podem servir como exemplo. Isto pode ser verificado analisando-se o controle do oscilador harmônico

$$x'' + x = u, \quad (4.1.4)$$

como podemos escrever o sistema de outro modo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = u - x \end{cases}$$

As matrizes A e B agora são respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Novamente, temos disposto um controle apenas em u para demais componente x e y do sistema. Mas, diferente do Exemplo 1, agora o controle aparece na segunda equação onde as componentes estão presentes. Entretanto, não podemos concluir imediatamente se o sistema é ou não controlável. De fato ele é. Para isto, foram arbitrados alguns dados iniciais e finais, (x_0, y_0) e (x_1, y_1) respectivamente, o que facilita a construção de uma função regular $z = z(t)$, tal como

$$\begin{cases} z(0) = x_0, & z(T) = x_1 \\ z'(0) = y_0, & z'(T) = y_1 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

De fato, aqui existem infinitas maneiras de construir tais funções. Uma delas, por exemplo, mostrando uma função cúbica z polinomial. Podemos então definir $u = z'' + z$ como sendo o controle desde que a solução x da equação (4.1.4) com os controles e dados iniciais (x_0, y_0) coincidam com z , isto é, $x = z$, e ainda sejam satisfeitos os controles em (4.1.5).

Esta construção provém do exemplo de um sistema de duas componentes $m = 2$ que é controlável por um controle apenas ($m = 1$). Mais do isto, este exemplo mostra que o controle u não é único. De fato existem infinitos modos de controlar e diferentes trajetórias de controles de acordo com os controles requisitados. Na prática, escolher o controle é uma otimização (em algum senso para ser mais preciso) é uma importante ferramenta que discutiremos mais tarde.

Se nós definirmos os estados dos controles

$$R(x_0, T) = \{x(T) \in \mathbb{R}^n : x \text{ solução de (1) com } u \in C^2([0, T])\} \quad (4.1.6)$$

o controle exato é equivalente para a fato que $R(x_0, T) = \mathbb{R}^n$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Observação 1.1

Na definição sobre exato controle sobre algum dado inicial x_0 é necessário que seja dirigida para algum dado final x_1 . Pelo menos, na interpretação de sistemas lineares, com ou sem alguma generalidade, nós podemos supor que $x_1 = 0$. De fato, se $x_1 \neq 0$ podemos ter

$$\begin{cases} y' = Ay, & t \in [0, T] \\ y(T) = x_1 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

voltando o tempo e definindo o novo estado $z = x - y$ como verificamos

$$\begin{cases} z' = Az + Bu \\ z(0) = x_0 - y(0) \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Notamos que $x(T) = x_1$ se e somente se $z(T) = 0$. Ainda, levando a solução x do sistema (4.1.1) de x_0 para x_1 , é equivalente a solução z de (4.1.8) do valor inicial $z_0 = x_0 - y(0)$ para zero.

A observação nos dá motivos para a definição:

DEFINIÇÃO 1.2

O sistema (4.1.1) é dito como controlabilidade nula no tempo $T > 0$ se dado algum valor inicial $x_0 \in R^n$ então existe $u \in L^2(0, T, R^m)$ tal que $x(T) = 0$

Controlabilidade nula vale se e somente se $0 \in R(0, T)$ para qualquer $x_0 \in R^n$.

Por outro lado, a Observação 1.1 mostra que controlabilidade exata e controlabilidade nula são propriedades equivalentes no caso de sistemas lineares com dimensão finita. Mas isto não é necessariamente o caso de sistemas não-lineares. Pelo momento, esta equação é um bom exemplo para saber se os sistemas de controlabilidade nula não são exatamente controláveis.

4.2 Propriedade da Observabilidade.

A propriedade do controle exato é fechada para qualquer sistema correspondente homogêneo. Nesse capítulo vamos introduzir esta noção e mostraremos esta relação com a propriedade do controle exato.

Seja A^* a matriz adjunta de A , isto é, a matriz com a propriedade de que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ para todo $x, y \in R^n$. Consideramos o sistema adjunto homogêneo de (4.1.1):

$$\begin{cases} -\varphi' = A^* \varphi, & t \in \mathbb{Q}, T^- \\ \varphi(T) = \varphi_T \end{cases} \quad (4.2.1)$$

De acordo com a observação, para algum $\varphi_T \in R^n$, (4.2.1) pode ser salvo no tempo e tem uma única solução $\varphi \in C^\omega(\mathbb{Q}, T^-, R^n)$ (o espaço das funções analíticas definidas em \mathbb{Q}, T^- e com valores em R^n).

Antes de tudo, vamos deduzir uma condição equivalente para a propriedade do controle inicial.

Lema 1.1

Uma condição inicial $x_0 \in R^n$ para (4.1.1) é dirigido para zero no tempo T pelo uso do controle $u \in L^2(\mathbb{Q}, T^-)$ se e somente se

$$\int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt + \langle x_0, \varphi(0) \rangle = 0 \quad (4.2.2)$$

para qualquer $\varphi(T) \in R^n$, φ sendo a correspondente solução de (4.2.1).

Prova: Seja φ_T arbitrário em R^n e φ a correspondente solução de (4.2.1). Multiplicando (4.1.1) por φ e (4.2.1) por x , temos que

$$\langle x', \varphi \rangle = \langle Ax, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle; \quad -\langle x, \varphi' \rangle = \langle A^* \varphi, x \rangle.$$

Então

$$\frac{d}{dt} \langle x, \varphi \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle$$

como, após integrando no tempo, temos que

$$\langle x(T), \varphi_T \rangle - \langle x_0, \varphi(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, \varphi \rangle dt = \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt \quad (4.2.3)$$

Obtemos então $x(t) = 0$ se e somente se (4.2.2) é verificado para qualquer $\varphi_T \in R^n$.

É fácil de ver que (4.2.2) é de fato condições otimizadas para pontos críticos da função quadrática $J : R^n \longrightarrow R^n$,

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + \langle x_0, \varphi(0) \rangle$$

onde φ é a solução do sistema adjunto (4.2.1) com valor inicial φ_T no tempo $t = T$.

Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Lema 1.2 Suponha que J tenha um mínimo $\bar{\varphi}_T \in R^n$ e seja $\bar{\varphi}$ a solução do sistema adjunto (4.2.1) com os dados iniciais $\bar{\varphi}_T$. Então

$$u = B^* \bar{\varphi} \tag{4.2.4}$$

é um controle do sistema (4.1.1) com dados iniciais x_0 .

Prova: Se $\bar{\varphi}_T$ é um ponto onde J assume o seu valor mínimo, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\bar{\varphi}_T + h\varphi_T) - J(\bar{\varphi}_T)}{h} = 0, \quad \forall \varphi_T \in R^n.$$

Isto é equivalente a

$$\int_0^T \langle B^* \bar{\varphi}, B^* \varphi \rangle dt + \langle x_0, \varphi(0) \rangle = 0, \quad \forall \varphi_T \in R^n,$$

como vimos no Lema 1.1, está implícito que $u = B^* \bar{\varphi}$ é um controle para (4.1.1).

Observação 1.2

O Lema 1.2 nos dá um método variacional para obter um controle sobre o mínimo de uma função J . Esta não é a única possibilidade funcional para se conseguir o controle. Modificando ele convencionalmente, outros tipos de controle (pelo momento apenas *bang-bang*) podem ser obtidos. Lembrando que o controle que encontramos para a forma $B^* \varphi$, φ está sendo uma solução para o problema homogêneo adjunto (4.2.1). No entanto, estas são funções analíticas sobre o tempo.

A noção a seguir será fundamental para o controle de problemas.

DEFINIÇÃO 1.3

O sistema (4.2.1) é dito como observável no tempo $T > 0$ se existir um $c > 0$ tal que

$$\int_0^T |B^* \varphi|^2 dt \geq c |\varphi(0)|^2, \quad (4.2.5)$$

para todo $\varphi_T \in R^n$, φ está sendo a correspondente solução de (4.2.1).

A desigualdade (4.2.5) chamaremos de **observação** ou **observação da desigualdade**. Ele é a garantia de que a solução do problema adjunto para $t = 0$ é unicamente determinado por $B^* \varphi(t)$ para $0 < t < T$. Em outras palavras, as informações contidas neste termo caracterizam completamente a solução de (4.2.1).

Observação 1.3

A observação da desigualdade (4.2.5) é equivalente ao seguinte: então existe $c > 0$ tal que

$$\int_0^T |B^* \varphi|^2 dt \geq c |\varphi_T|^2, \quad (4.2.6)$$

para todo $\varphi_T \in R^n$, φ está sendo a solução para (4.2.1).

De fato, as seguintes equivalências para o fato de conseguirmos associar para todo $\varphi_T \in R^n$ o vetor $\varphi(0) \in R^n$, é uma transformação linear em R^n com alguma inversa. Nós iremos usar as formas (4.2.5) ou (4.2.6) das observações das desigualdades dependendo da necessidade que o problema particular precisará.

A seguinte observação é muito importante no contexto de espaços de dimensão finita.

Proposição 1.1

A desigualdade (4.2.5) é equivalente ao seguinte princípio da continuidade única:

$$B^* \varphi(t) = 0, \quad \forall t \in]0, T[\implies \varphi_T = 0 \quad (4.2.7)$$

Prova: Uma das implicações seguidas imediatamente de (4.2.6). Para a outra, vamos definir a semi-norma em R^n

$$|\varphi_T|_* = \left[\int_0^T |B^* \varphi|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Claramente, $|\cdot|_*$ é a norma em R^n se e somente se (4.2.7) é válido.

Desde todas as normas em R^n são equivalentes, a que temos em (4.2.7) é equivalente a (4.2.6). A prova termina tendo o acontecimento da prévia Observação 2.3

Observação 1.4

Vamos pegar as observações (4.2.5) e (4.2.7) que não serão de longe propriedades equivalentes em espaços de dimensão infinita. Eles nos darão razão para diferentes noções de controle (exato e aproximado, respectivamente) Esta relação será demonstrada na próxima seção.

A importância da observação da desigualdade está no fato de que implica no controle exato de (4.1.1). Por este caminho, a propriedade da controlabilidade é reduzida ao estudo de uma inequação para o sistema homogêneo (4.2.1) que, como na concepção anterior, é um problema simples. Vamos analisar agora a relação entre a controlabilidade e a propriedade da observabilidade.

Teorema 1.1

O sistema (4.1.1) é controlável exatamente no tempo T se e somente se (4.2.1) é observável no tempo T .

Prova: Vamos provar primeiro que a observação implica no controle. De acordo com o Lema 1.2, a propriedade do controle exato no tempo T existe se para algum $x_0 \in R^n$, J tem um mínimo. Observamos que J é contínuo. Conseqüentemente, a existência de um mínimo é equivalente a

$$\lim_{|q_T| \rightarrow \infty} J \underset{q_T}{\overset{\infty}{\curvearrowright}} \quad (4.2.8)$$

A coerência da propriedade (4.2.8) é uma conseqüência da propriedade da observabilidade no tempo T . De fato, de (4.2.5) obtemos que

$$J(\varphi_T) \geq \frac{c}{2} |\varphi_T|^2 - \langle |x_0, \varphi(0) \rangle.$$

O lado direito tende ao infinito quando $|\varphi_T| \rightarrow \infty$ e J satisfaz (4.2.8). Reciprocamente suponhamos que o sistema (4.1.1) é exatamente controlável no tempo T . Se (4.2.1) não é observável no tempo T , então existe uma seqüência $\{\varphi_T^k\}_{k \geq 1} \subset R^n$ tal que $|\varphi_T^k| = 1$ para todo $k \geq 1$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T |B^* \varphi^k|^2 dt = 0 \quad (4.2.9)$$

Isto quer dizer que existe uma subseqüência de $\{\varphi_T^k\}_{k \geq 1}$, denotada de mesmo modo, que converge para $\varphi_T \in R^n$ e $|\varphi_T| = 1$. Ainda, se φ é uma solução de (4.2.1) com o valor inicial φ_T , de (4.2.9) segue que

$$\int_0^T |B^* \varphi|^2 dt = 0 \quad (4.2.10)$$

Como (4.1.1) é controlável, o Lema 1.1 nos dá que, para algum valor inicial $x_0 \in R^n$, então existe $u \in L^2(Q, T)$ tal que

$$\int_0^T \langle u, B^* \varphi_k \rangle dt = -\langle x_0, \varphi_k(0) \rangle, \quad \forall k \geq 1 \quad (4.2.11)$$

Tomando o limite em (4.2.11) e tomando o fato de (4.2.10), nós obtemos que $\langle x_0, \varphi(0) \rangle = 0$. Desde que x_0 seja arbitrário em R^n , temos que $\varphi(0) = 0$ e, conseqüentemente, $\varphi_T = 0$. Isto é uma contradição com o fato de que $|\varphi_T| = 1$.

A prova do teorema está completa.

Observação 1.5

Uma consequência do Teorema 1.1 consiste no fato de que ele reduz a prova do controle exato para o estudo da observação da desigualdade.

4.3 Condições de controle de Kalman.

O que veremos é um clássico resultado para R. E. Kalman e nos dá uma completa resposta para o problema de controle exato de sistema linear de dimensão finita. Ele mostra, em particular, que o tempo do controle é irrelevante.

Teorema 1.2

O sistema (4.1.1) é exatamente controlável em algum tempo T se e somente se

$$\text{posto} = \text{número de linhas não nulas do sistema } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (4.3.1)$$

Conseqüentemente, se o sistema é controlável em algum tempo $T > 0$ então ele é controlável em qualquer tempo.

Observação 1.6

Por agora nós simplesmente diremos que (A, B) é controlável se (4.3.1) existir. As matrizes $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ serão chamadas de matrizes de controle.

Exemplos: No Exemplo 1 da seção 1.1 nós tínhamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

Portanto

$$[B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

com o número de linhas não nulas igual a um (posto = 1). Pelo Teorema 1.2 segue que o sistema considerado não é controlável. Entretanto, no Exemplo 2,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.4)$$

e conseqüentemente temos a matriz formada pelas colunas

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

com o número de linhas não nulas igual a dois ($\text{posto} = 2$). Portanto o sistema é controlável, conforme temos acabado de observar.

Prova do Teorema 1.2:

" \Rightarrow " Suponhamos que o número de linhas não nulas de $\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} < n$. Então as matrizes de controle $\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes e existe um vetor $v \in R^n$, $v \neq 0$ tal que

$$v^* \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0,$$

onde os coeficientes das combinações lineares são as componentes do vetor v . Desde que

$$v^* \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^* B & v^* AB & \dots & v^* A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

$$v^* B = v^* AB = \dots = v^* A^{n-1}B = 0$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton deduzimos que existem constantes c_1, c_2, \dots, c_n tal que

$A^n = c_1 A^{n-1} + \dots + c_n I$ e então $v^* A^k B = 0$ também. De fato, ele mostra que $v^* A^k B = 0$ para todo $k \in N$ e conseqüentemente $v^* e^{At} B = 0$ para todo t também. Mas, pela fórmula da variação das constantes, a solução x de (4.1.1) satisfaz

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \quad (4.3.6)$$

Então

$$\langle v, x(T) \rangle = \langle v, e^{AT} x_0 \rangle + \int_0^T \langle v, e^{A(T-s)} B u(s) \rangle ds = \langle v, e^{AT} x_0 \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é denotado como o produto interno na base canônica em R^n . Ainda, $\langle v, x(T) \rangle = \langle v, e^{AT} x_0 \rangle$. Isto mostra que a projeção da solução x no tempo T sobre o vetor v é independente do valor de controle u . E mais, o sistema não é controlável.

Observação 1.7

Para provar a propriedade da observação para os valores $\langle v, x \rangle$, nós temos apenas que provar que para algum vetor v temos que $v^* \begin{bmatrix} B \\ AB, \dots, A^{n-1} B \end{bmatrix} = 0$. Este, se o número de linhas não nulas da matriz $\begin{bmatrix} B \\ AB, \dots, A^{n-1} B \end{bmatrix}$ é $n - k$, temos que $x(T)$ é um subespaço de R^n com o número de linhas não nulas do sistema (posto) igual a $n - k$.

" \Leftarrow " Supomos agora que o número de linhas não nulas do sistema é $\begin{bmatrix} B \\ AB, \dots, A^{n-1} B \end{bmatrix} = n$. De acordo com o Teorema 1.1 é suficiente mostrar que o sistema (4.2.1) é observável. Pela Proposição 1.1, (4.2.5) existe se e somente se (4.2.7) é verificado. Ainda, o Teorema é provado se (4.2.7) existe. Para $B^* \varphi = 0$ e $\varphi(t) = e^{A^* \langle -t \rangle} \varphi_T$, segue que $B^* e^{A^* \langle -t \rangle} \varphi_T = 0$ para todo $0 \leq t \leq T$. Aplicando a derivada para estas funções em $t = T$ obtemos que

$$B^* \begin{bmatrix} A^* \\ \vdots \\ A^{*k} \end{bmatrix} \varphi_T = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Mas, tendo que o número de linhas não nulas é $\underbrace{B^*, B^* A^*, \dots, B^* (A^*)^{m-1}}_{=n} = n$ então $\varphi_T = 0$. Ainda, (4.2.7) é verificado e a prova do Teorema 1.2 agora é completa.

Observação 1.8

A controlabilidade dos pares (A, B) é aberta e densa. Portanto,

- Se (A, B) é controlável então existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que para algum (A^0, B^0) com $|A^0 - A| < \varepsilon$, $|B^0 - B| < \varepsilon$ é então controlável. Isto é consequência do fato de que o determinante da matriz depende continuamente das suas entradas.
- Por outro lado, se (A, B) não é controlável, para algum $\varepsilon > 0$, existe um (A^0, B^0) com $|A - A^0| < \varepsilon$, $|B - B^0| < \varepsilon$ tal que (A^0, B^0) é controlável. Isto é consequência de que o determinante da matriz $n \times n$ depende analiticamente de suas entradas e não pode estar em $R^{n \times n}$.

A seguinte desigualdade mostra que a norma do controle é proporcional a distância entre $e^{AT} x_0$ (o estado onde o sistema fica livre pela abstinência do controle, isto é, com $u = 0$) e o objetivo x_1 .

Proposição 1.2

Suponha agora que o par (A, B) é controlável no tempo $T > 0$ e seja u o controle obtido através da minimização do funcional J . Então existe uma constante $C > 0$, dependendo de T , tal que a seguinte inequação existe

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}, T)} \leq C |e^{AT} x_0 - x_1| \quad (4.3.7)$$

para qualquer valor inicial x_0 e final x_1 .

Prova: Vamos primeiro provar (4.3.7) para o caso particular $x_1 = 0$. Seja u o controle de (4.1.1) obtido pela minimização da função J . De (4.2.2) segue que

$$\|u\|_{L^2(0,T)}^2 = \int_0^T |B^* \bar{\varphi}|^2 dt = -\langle x_0, \bar{\varphi}(0) \rangle.$$

Se w é solução de

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t) \\ w(0) = x_0 \end{cases}, \text{ para algum } t \in (0, T) \quad (4.3.8)$$

temos que

$$w(t) = e^{At} x_0$$

$$\frac{d}{dt} \langle w, \varphi \rangle = 0$$

para todo $\varphi_T \in R^n$, φ é a correspondente solução de (4.2.1).

Em particular, pegando $\varphi_T = \overline{\varphi_T}$, o mínimo de J , temos que

$$\langle x_0, \overline{\varphi(0)} \rangle = \langle w_0, \overline{\varphi(0)} \rangle = \langle w(T), \overline{\varphi_T} \rangle = \langle e^{AT} x_0, \overline{\varphi_T} \rangle$$

Portanto, obtemos que

$$\|u\|_{L^2(0,T)}^2 = -\langle x_0, \overline{\varphi(0)} \rangle = -\langle e^{AT} x_0, \overline{\varphi_T} \rangle \geq |e^{AT} x_0| \cdot |\overline{\varphi_T}|$$

Por outro lado, temos que

$$\|\bar{\varphi}_T\| \leq c \|B^* \bar{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}, T)} = c \|u\|_{L^2(\mathbb{R}, T)}$$

Portanto, o controle u é verificado

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}, T)} \leq c |e^{AT} x_0|. \quad (4.3.9)$$

Se $x_1 \neq 0$, a Observação 1.1 implica que o controle de u varia da solução de x_0 para x_1 coincidindo com a solução de quando $x_0 - y(0)$ vai para zero, onde y verifica (4.1.7). Usando (4.3.9), obtemos que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}, T)} \leq c |e^{TA} (x_0 - y(0))| = c |e^{TA} x_0 - x_1|$$

e (4.3.7) é provado.

Observação 1.9

Equações escalares lineares de qualquer ordem provém de exemplos de sistemas de grandes arbitrarias dimensões que são controláveis com apenas um controle. Então, o sistema é de ordem k

$$x^{(k)} + a_1 x^{(k-1)} + \dots + a_{k-1} x = u$$

é controlável. Isto pode ser facilmente obtido pela observação de que se têm k valores iniciais e finais onde se podem sempre encontrar a trajetória z (no fato de um infinito número) tendo ele em qualquer intervalo de tempo. Este argumento foi usado no *Exemplo 2* para o caso $k = 2$.

4.4 Controle Bang-bang.

Vamos considerar o caso particular

$$B \in M_{n \times 1}, \quad (4.4.1)$$

isto é, $m = 1$, com apenas um controle $u :]0, T[\rightarrow R$ é válido. A ordem para se conseguir controle bang-bang, é considerar convenientemente a função quadrática:

$$J_{bb}(\varphi_0) = \frac{1}{2} \left[\int_0^T |B^* \varphi| dt \right]^2 + \langle x_0, \varphi(0) \rangle \quad (4.4.2)$$

onde φ é a solução do sistema adjunto (4.2.1) com valor inicial φ_T .

Notemos que $B^* \in M_{1 \times n}$ e temos que $B^* \varphi(t) :]0, T[\rightarrow R$ é uma função escalar. Isto é interessante para notarmos que J_{bb} difere de J no termo quadrático. Então, em J temos a norma $L^2(]0, T[)$ de $B^* \varphi$ enquanto aqui vamos considerar a norma $L^1(]0, T[)$.

O mesmo argumento usado para provar o Teorema 1.2 mostra que J_{bb} é contínuo e derivável. Isto mostra que J_{bb} possui um mínimo em algum ponto $\overline{\varphi_T} \in R^n$.

Por outro lado, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\left(\int_0^T |f + hg| dt \right)^2 - \left(\int_0^T |f| dt \right)^2 \right] &= \\ &= 2 \int_0^T |f| dt \int_0^T \text{sgn}(f(t)) g(t) dt \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

A função sinal (“sgn”) é definida como uma função de vários valores conforme a seguinte lei

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ -1, & s < 0 \\ \begin{cases} -1, +1 \end{cases}, & s = 0 \end{cases}$$

Observamos que o limite previsto aqui não é ambíguo na definição de $\operatorname{sgn}(f(t))$ desde que os intervalos dos pontos $t \in \mathbb{R}, T^-$ onde $f = 0$ é assumido que seja zero, e isto não afeta o valor da integral.

A identidade (4.4.3) pode ser aplicado no termo quadrático da função J_{bb} desde que, pegando algum φ que seja solução do sistema adjunto (4.2.1), isto é uma função analítica e então, $B^* \varphi$ muda de sinal finitas vezes no intervalo \mathbb{R}, T^- exceto onde $\overline{\varphi_T} = 0$. Tendo em vista isto, a equação associada de *Euler-Lagrange* com os pontos críticos da função J_{bb} é a seguinte:

$$\int_0^T B^* \overline{\varphi} dt \int_0^T \operatorname{sgn} \left(\overline{B^* \varphi} \right) \psi(t) dt + \langle x_0, \varphi(0) \rangle = 0$$

para todo $\varphi_T \in R$, onde φ é uma solução do sistema adjunto (4.2.1) com o valor inicial φ_T .

Conseqüentemente, o controle que procuramos é $u = \int_0^T B^* \overline{\varphi} dt \operatorname{sgn} \left(\overline{B^* \varphi} \right)$ onde $\overline{\varphi}$ é uma solução de (4.2.1) com valor inicial $\overline{\varphi_T}$.

Notemos que o controle u é da forma bang-bang. Ou seja, u assume apenas dois valores $\pm \int_0^T B^* \overline{\varphi_T} dt$. O controle leva de um valor para outro finitas vezes quando a função $B^* \overline{\varphi}$ muda de sinal.

Observação 1.10

Outros tipos de controle podem ser obtidos considerando funções da forma

$$J_p(\varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\int_0^T |B^* \varphi|^p dt \right)^{2/p} + \langle x_0, \varphi_0 \rangle$$

com $1 < p < \infty$. Os correspondentes controles são

$$u = \left(\int_0^T |B^* \bar{\varphi}|^p dt \right)^{-1/p} |B^* \bar{\varphi}|^{p-2} B^* \bar{\varphi}$$

onde $\bar{\varphi}$ é a solução de (4.2.1) com o valor inicial $\bar{\varphi}_T$, o mínimo de J_p .

Isto pode ser mostrado que, como por exemplo, o controle obtido pela minimização do funcional no limite quando $p \rightarrow 1$, nos fornece um controle bang-bang.

A seguinte propriedade nos dará uma importante caracterização dos controles que temos estudado.

Proposição 1.3

O controle $u_2 = B^* \bar{\varphi}$ obtido pela minimização do funcional J tem norma mínima $L^2(\mathbb{Q}, T)$ para todos os controles possíveis. Analogamente, o controle

$u_\infty = \int_0^T |B^* \bar{\varphi}| dt \operatorname{sgn}(B^* \bar{\varphi})$ obtido pela minimização da função J_{bb} tem norma mínima

$L^\infty(\mathbb{Q}, T)$ para todos os controles possíveis.

Prova: Seja u um controle arbitrário de (4.1.1). Então (4.2.2) é verificado por u e u_2 para algum φ_T . Tomando $\bar{\varphi}_T = \varphi_T$ (o mínimo de J) em (4.2.2) obtemos que

$$\int_0^T \langle u, B^* \bar{\varphi} \rangle dt = -\langle x_0, \bar{\varphi}(0) \rangle,$$

$$\|u\|_{L^2(\mathbf{0}, T]}^2 = \int_0^T \langle u_2, B^* \bar{\varphi} \rangle dt = -\langle x_0, \bar{\varphi}(0) \rangle.$$

Então,

$$\|u\|_{L^2(\mathbf{0}, T]}^2 = \int_0^T \langle u, B^* \bar{\varphi} \rangle dt \leq \|u\|_{L^2(\mathbf{0}, T]} \|B^* \bar{\varphi}\| = \|u\|_{L^2(\mathbf{0}, T]} \|u_2\|_{L^2(\mathbf{0}, T]}$$

e a primeira parte da prova está completa.

Para a segunda parte da prova, um argumento similar será usado. Ou seja, tomemos novamente um u controle arbitrário de (4.1.1). Então (4.2.2) é verificado por u e u_∞ por algum φ_T . Tomando $\bar{\varphi}_T = \varphi_T$ (o mínimo de J_{bb}) em (4.2.2) obtemos que

$$\int_0^T B^* \bar{\varphi} u dt = -\langle x_0, \bar{\varphi}(0) \rangle,$$

$$\|u_\infty\|_{L^\infty(\mathbf{0}, T]}^2 = \left(\int_0^T |B^* \bar{\varphi}| dt \right)^2 = \int_0^T B^* \bar{\varphi} u_\infty dt = -\langle x_0, \bar{\varphi}(0) \rangle.$$

Então,

$$\|u_\infty\|_{L^\infty(\mathbf{0}, T]}^2 = \int_0^T B^* \bar{\varphi} u dt \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbf{0}, T]} \int_0^T |B^* \bar{\varphi}| dt = \|u\|_{L^\infty(\mathbf{0}, T]} \|u_\infty\|_{L^\infty(\mathbf{0}, T]}$$

e assim concluímos a prova.

4.5 Estabilização de Sistemas Lineares de Dimensão Finita.

Nesta seção assumiremos que A é uma matriz adjunta simétrica, isto é, $A^* = -A$. Neste caso, $\langle Ax, x \rangle = 0$

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Observação 1.11

O oscilador harmônico, $mx'' + kx = 0$, fornece um simples exemplo de um sistema com estas propriedades. Este, estudaremos com mais detalhes até o fim desta seção.

Quando $u \equiv 0$ a energia da solução de (4.5.1) é conservada (sistema conservativo). Ou seja, pela multiplicação de (4.5.1) por x , se $u \equiv 0$, teremos

$$\langle x, x' \rangle = \langle x, Ax \rangle + 0$$

$$\frac{d}{dt} |x|^2 = 0 \quad (4.5.2)$$

Então,

$$|x|^2 = |x_0|^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.5.3)$$

O problema da estabilização pode ser formulado da seguinte maneira. Suponha que o par (A, B) seja controlável. Temos que procurar a matriz L que é solução do sistema (4.5.1) com o controle *feedback*.

$$u(t) = Lx(t) \tag{4.5.4}$$

tem um **decaimento uniformemente exponencial**, tal que então existe $c > 0$ e $\omega > 0$ tal que

$$|x(t)| \leq ce^{-\omega t} |x_0| \tag{4.5.5}$$

para qualquer solução.

Notemos que, de acordo com a equação (4.5.4), o controle u é obtido no tempo real do estado de x .

Em outras palavras, estamos procurando matrizes L tais que sejam soluções do sistema

$$\begin{aligned} x' &= Ax + BLx \\ x' &= (A + BL)x = Dx \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Tendo assim uma taxa de decaimento uniformemente exponencial.

Observe que não podemos esperar mais de (4.5.5). Ou seja, as soluções de (4.5.6) podem não satisfazer $x(t) = 0$ no tempo finito T . Ou seja, se este for o caso, pela unicidade das soluções de (4.5.6) com o estado final 0 em $t = T$, poderia ser que $x_0 = 0$. Por outro lado, qualquer que seja L , a matriz D formada pelos auto-valores λ_j com correspondentes auto-vetores $e_j \in R^n$. A solução $x(t) = e^{\lambda_j t} e_j$ de (4.5.6) mostra que o decaimento das soluções não pode ser mais rápido que a exponencial.

Teorema 1.3

Se A é uma matriz adjunta simétrica e o par (A, B) é controlável, então $L = -B^*$ estabiliza o sistema, isto é, a solução de

$$\begin{cases} x' = Ax - BB^*x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.5.7)$$

tem um decaimento uniformemente exponencial (4.5.5).

Prova: Com $L = -B^*$ nós obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t)|^2 = -\langle BB^*x(t), x(t) \rangle = -|B^*x(t)|^2 \leq 0$$

Então, a norma da solução decresce no tempo.

Mais ainda,

$$|x(T)|^2 - |x(0)|^2 = -2 \int_0^T |B^*x|^2 dt. \quad (4.5.8)$$

Para provar o decaimento uniformemente exponencial é suficiente mostrar que existe $T > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\int_0^T |B^*x|^2 dt \leq c |x(0)|^2 \quad (4.5.9)$$

para qualquer solução x de (4.5.7). Ou seja, de (4.5.8) e (4.5.9) podemos obter que

$$|x(T)|^2 - |x(0)|^2 \leq -\frac{2}{c} |x(0)|^2 \quad (4.5.10)$$

e conseqüentemente

$$|x(T)|^2 \leq \gamma |x(0)|^2 \quad (4.5.11)$$

com

$$\gamma = 1 - \frac{2}{c} < 1. \quad (4.5.12)$$

Então,

$$|x(kT)| \leq \gamma^k |x_0|^2 = e^{-\ln \gamma^k} |x_0|^2, \quad \forall k \in N \quad (4.5.13)$$

Agora, tomando qualquer $t > 0$, escrevemos na forma $t = kT + \delta$, com $\delta \in [0, T)$ e $k \in N$, portanto obtemos que

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &\leq |x(kT)|^2 \leq e^{-\ln(\gamma)^k} |x_0|^2 = \\ &= e^{-\ln \gamma \left\lceil \frac{t}{T} \right\rceil} e^{\ln \gamma \frac{\delta}{T}} |x_0|^2 \leq \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\ln \gamma}{T} t} |x_0|^2. \end{aligned}$$

Portanto obtemos o decaimento do resultado (4.5.5) com

$$c = \frac{1}{\gamma}, \quad \omega = \frac{\ln \gamma}{T}. \quad (4.5.14)$$

Para provar (4.5.9), decompos a solução x de (4.5.7) como $x = \varphi + y$ com φ e y soluções dos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \varphi' = A\varphi \\ \varphi(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.5.15)$$

e

$$\begin{cases} y' = Ay - BB^*x \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.5.16)$$

Observamos que, desde que A seja adjunta simétrica, (4.5.15) é exatamente o sistema adjunto (4.2.1) exceto pelo fato de que o valor inicial tomado foi $t = 0$.

Como vimos na prova do Teorema 1.2, o par (A, B) está sendo controlável, a seguinte observação da desigualdade é válida para o sistema (4.5.15):

$$|x_0|^2 \leq C \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt. \quad (4.5.17)$$

Desde que $\varphi = x - y$ nós deduzimos que

$$|x_0|^2 \leq 2C \left[\int_0^T |B^* x|^2 dt + \int_0^T |B^* y|^2 dt \right].$$

Por outro lado, mostraremos que a solução y de (4.5.16) satisfaz:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |y|^2 = -\langle B^* x, B^* y \rangle \leq |B^* x| |B^* y| \leq \frac{1}{2} (|y|^2 + |B^*|^2 |B^* x|^2)$$

Pela desigualdade de *Gronwall's* deduzimos que

$$|y(t)|^2 \leq |B^*|^2 \int_0^t e^{t-s} |B^* x|^2 ds \leq |B^*|^2 e^T \int_0^T |B^* x|^2 dt \quad (4.5.18)$$

e conseqüentemente

$$\int_0^T |B^* y|^2 dt \leq |B|^2 \int_0^T |y|^2 dt \leq T |B|^4 e^T \int_0^T |B^* x|^2 dt.$$

Finalmente, obtemos que

$$|x_0|^2 \leq 2C \int_0^T |B^* x|^2 dt + C|B^*|^4 e^T T \int_0^T |B^* x|^2 dt \leq C' \int_0^T |B^* x|^2 dt$$

e a prova do Teorema 1.3 está completa.

Exemplo: Consideremos o oscilador harmônico amortecido:

$$mx'' + Rx + kx' = 0, \quad (4.5.19)$$

onde m , k e R são constantes positivas.

Note que (4.5.19) pode ser escrito equivalentemente na forma

$$mx'' + Rx = -kx'$$

com indícios de que foi aplicado uma força que atua sobre o oscilador, proporcional a velocidade do ponto de massa e de sinal oposto.

Veremos que as soluções desta equação têm a propriedade do decaimento exponencial. Ou seja, é suficiente para lembrarmos que as duas raízes características têm partes reais negativas. Isto é,

$$mr^2 + R + kr = 0 \Leftrightarrow r_{\pm} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mR}}{2m}$$

E então

$$\operatorname{Re} \left[\pm \right] = \begin{cases} -\frac{k}{2m} & \text{se } k^2 \leq 4mR \\ -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m} - \frac{R}{2m}} & \text{se } k^2 \geq 4mR \end{cases}$$

Vamos provar o decaimento exponencial da solução de (4.5.19) usando o Teorema 1.3

Primeiro devemos escrever (4.5.19) na forma de (4.5.7). Assim

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{\frac{m}{R}} x' \end{pmatrix},$$

a equação conservativa $mx''+kx=0$ corresponde ao sistema:

$$X' = AX, \text{ com } A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{R}{m}} \\ -\sqrt{\frac{R}{m}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que A é uma matriz adjunta simétrica. Por outro lado, se escolhermos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix}$$

obtemos que

$$BB^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

e o sistema

$$X' = AX - BB^* X \quad (4.5.20)$$

é equivalente a (4.5.19).

Agora, veremos que o par (A, B) é controlável desde que o posto (número de linhas não nulas) da matriz $\begin{bmatrix} B \\ AB \end{bmatrix}$ formada pelas colunas de B e AB seja 2.

Segue que a solução de (4.5.19) tem a propriedade do decaimento exponencial.

Se (A, B) é controlável, temos que provar a propriedade da estabilização uniforme do sistema (4.5.1) com a hipótese de que A é adjunta simétrica. Entretanto, esta propriedade é válida se A é uma matriz arbitrária. Mais precisamente temos:

Teorema 1.4

Se (A, B) é controlável então ela é estabilizável. Ou seja, é possível de prescrever alguns números complexos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ como os autovalores da matriz $A + BL$ por uma escolha apropriada da matriz L tal que o caimento da reta pode ser arbitrariamente rápido.

Na formulação do Teorema usamos o termo clássico de sistema laço fechado (*closed loop*) para referirmos ao sistema cujo controle é dado na forma *feedback*.

A prova do Teorema 1.4 é obtida reduzindo o sistema (4.5.1) até a forma canônica de controle.

5. Conclusão.

Tratando-se a respeito de diferentes formas de controle sobre sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, encontramos uma vasta bibliografia a respeito do mesmo. O objetivo destas notas é o de apresentar uma breve explanação sobre as formas de controle e estabilização, direcionando a solução do sistema de forma mais apurada.

Existem vários exemplos de fenômenos físicos cuja análise e a formalização pode ser representada através de Equações Diferenciáveis Ordinárias. É evidente que muitos problemas podem não ser tão fáceis de se resolver, mas com o auxílio de determinados tipos de controles utilizados podemos direcionar as soluções.

Na busca destes controles, que podem não ser dados no problema, vimos que é possível determina-los tendo apenas as matrizes de controle, obtidas pela própria descrição do sistema. Ainda, caso usássemos outras formas de minimização do funcional J , diferentes formas de controle seriam obtidas.

As *Condições de Kalman* [1] nos garantem que o tempo é irrelevante. Condições estas que são afirmadas pelo *posto* (número de linhas não nulas do sistema) da matriz formada pelas matrizes colunas dos controles. Este fato acerca do tempo tem grande utilidade na busca de soluções para o nosso tipo de problema.

É claro que, para que este trabalho pudesse ser construído, fez-se necessário um conhecimento sobre Equações Diferenciais Ordinárias. Inserido neste temos os seus tipos, métodos de soluções, grau, linearidade, estudo este que se abrange para muitos outros ramos do universo de problemas a respeito do objeto em questão.

Chegamos ao término deste com o balanço de que foi válido o conhecimento adquirido, com a certeza do tamanho que o estudo nos fornece acerca do tema.

6. Referências Bibliográficas.

[1] E. Zuazua, CONTROLABILIDAD EXACTA Y ESTABILIZACIÓN LA ECUACIÓN DE ONDAS, Textos de Métodos Matemáticos 23, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1990.

[2] T. M. Apostol. ANÁLISIS MATEMÁTICA, Segunda Edición, Reverté, Barcelona, 1982.

[3] S. L. Campbell y R. Haberman, INTRODUCUIÓN A LAS EQUACIONES DIFERENCIALES CON PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTEIRA, McGrawHill, México, 1998.

[4] Valéria Iório, EDP – UM CURSO DE GRADUAÇÃO, 2ª edição, Rio de Janeiro, 2005.