

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**SÉRIES DE FOURIER
E O FENÔMENO DE GIBBS**

LUIZ FERNANDO NAZARI

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 2008

LUIZ FERNANDO NAZARI

SÉRIES DE FOURIER
E O FENÔMENO DE GIBBS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao

Curso de Matemática – Licenciatura

Departamento de Matemática

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Dr. Félix Pedro Quispe Gómez

FLORIANÓPOLIS – SC

Junho de 2008

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 12/CCM/08



Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca Examinadora:

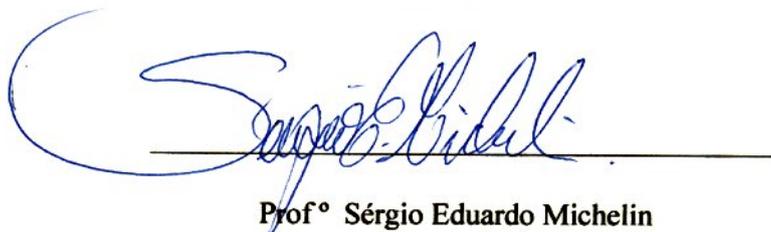


Prof^o Félix Pedro Quispe Gómez

Orientador



Prof^o Robert Ozório Moreira



Prof^o Sérgio Eduardo Michelin

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, *Luiz Carlos Nazari e Roseli Terezinha Nazari*, por me proporcionarem a chance de obter um futuro melhor, a minha namorada, *Raíssa Spindola*, e Familiares, pelo incentivo, carinho, amor e por sempre acreditarem em minha capacidade, e aos meus amigos *André Pastore, Fabíola Vignola e Diego Staub*, pelo incentivo, ajuda e companheirismo. Agradeço a meu orientador, *Félix Pedro Quispe Gómez*, professor e amigo, pela paciência, empenho, dedicação e por compartilhar um pouco de seu grande conhecimento. Agradeço a banca examinadora, por aceitarem o meu convite, e a todos os professores do curso de matemática que contribuíram em minha formação acadêmica.

Sumário

Introdução	6
1. Notas históricas	8
1.1 Jean Baptiste Joseph Fourier	9
2. Conceitos Básicos	11
2.1 Fenômenos Físicos e suas Equações diferenciais.....	13
2.2 Classificações	14
2.3 Solução de uma equação diferencial parcial linear.	16
2.3.1 Condições de Fronteira.....	17
2.3.2 Superposições de soluções	18
3. Método de Fourier.....	21
3.1 Funções Ortonormais	27
4. Séries de Fourier	30
4.1 Funções Periódicas.....	30
4.2 Convergência uniforme	31
4.3 Coeficientes de Fourier	32
4.4 Séries de Fourier	34
5. Ondas e Calor	39
5.1 Problema da corda vibrante.....	39
5.2 Difusão do Calor	46
5.2.1 Problema da difusão do calor	46
6. Fenômeno de Gibbs.....	51
6.2 Fenômeno de Gibbs em séries de Fourier	51
6.2.1 Função Salto.....	51

6.2.2 Função 2	57
7. Programas.....	61
7.1 Função 4.5	61
7.1 Função Salto.....	61
7.1 Função 2.....	62
Conclusão.....	63
Referências Bibliográficas	65

Introdução

Será apresentado a seguir apresentando um pequeno histórico da análise harmônica a partir dos primeiros estudos com tentativas de se resolver os problemas da corda vibrante e da condução do calor, dando ênfase as Séries de Fourier até chegar ao fenômeno de Gibbs.

A princípio serão apresentados conceitos básicos de equações diferenciais parciais, que serão de grande utilidade para o desenvolvimento do trabalho. E ao longo destes conceitos vamos verificar que as equações diferenciais têm aplicações em diversas áreas da ciência, como na Física, onde as equações diferenciais parciais podem representar fenômenos físicos.

Para que isto aconteça, a equação diferencial, com um conjunto de condições de fronteira, deve conter solução única, pois neste caso o conjunto de dados em um fenômeno físico, nos leva à um único resultado. Além disto, se houver uma pequena mudança nas condições de fronteira, estas devem resultar em pequenos desvios na solução, pois as condições são obtidas através de experiências que ocasionam pequenos erros, e estes erros não devem produzir grandes desvios nas soluções.

Fourier estudou estas equações, e em meio a seus estudos descobriu um método de resolução para equações diferenciais parciais, denominado como método de Fourier. O método de Fourier baseia – se na combinação do princípio da superposição com o método de separação de variáveis.

Além de deduzir este método para a resolução de equações diferenciais parciais, durante a resolução de problemas como a condução de calor e o da corda vibrante,(resolvidos no decorrer do trabalho), Fourier alegou que toda função periódica, de período 2π , poderia ser escrita na forma de um somatório de senos e cossenos, ou seja, poderia ser escrita na forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

com a_k e b_k constantes. Estes coeficientes possuem uma forma geral, que é obtida quando f é igual a série de Fourier, ou seja, quando a série converge pontualmente para a função f . No decorrer deste trabalho será apresentado como obter estes coeficientes, para quais tipos de funções é possível a representação em séries de Fourier, e em que sentido a série converge para determinada função.

E é neste último ítem onde Gibbs concentrou seus estudos, ele observou a ocorrência de um fenômeno especial na aproximação da função pela série em seus pontos de descontinuidade, denominado como fenômeno de Gibbs.

1. Notas históricas

Uma série trigonométrica é uma expressão da forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.1)$$

onde a_0, a_n e b_n com $n=1,2,3\dots$ são constantes. Se esta série converge para $x \in (-\infty, +\infty)$, então esta expressão pode representar uma função periódica de período $2L$.

O problema de se representar uma função $f(x)$ qualquer, de período $2L$, em uma série de senos e cossenos (1.1) surgiu no século XVIII, com Euler (1701-1783) e D. Bernouilli (1700 – 1782) com seus estudos sobre o problema da corda vibrante.

Em seus estudos, Bernouilli chega ao ponto de escrever a solução do problema da corda vibrante em forma de séries trigonométricas a partir de considerações do tipo físico, o que nos leva a pensar que a corda oscila descrevendo várias frequências ao mesmo tempo, cujas amplitudes dependem da forma inicial da vibração.

Esta possibilidade, descoberta por Bernouilli, é o que chamamos hoje do princípio da superposição, este resultado é de grande importância nos ramos da física-matemática. Mas Euler não aceitava assim tão facilmente a idéia de Bernouilli, de que uma função arbitrária pudesse ser escrita na forma de uma série trigonométrica, pois esta idéia entrava em conflito com alguns conceitos matemáticos da época. Temos que levar em conta que para os matemáticos contemporâneos de Euler, as curvas se dividiam em duas classes: as curvas contínuas e as curvas geométricas.

Uma curva era dita contínua se suas ordenadas e abscissas podiam conectar-se através de alguma fórmula do tipo $y = f(x)$. E uma função denominava-se geométrica, se pudesse ser desenhada de alguma forma com traços contínuos, e estas eram expressas por várias fórmulas. Assim, uma função arbitrária poder ser expressa, por exemplo, por uma série de cossenos, equivalia a dizer que qualquer curva geométrica de período $2L$

era também uma curva contínua, o que era incrível para Euler e os matemáticos do seu tempo.

1.1 Jean Baptiste Joseph Fourier

O problema de uma função ser representada por uma série trigonométrica reaparece com o matemático francês J. Fourier (1768-1830), onde mais tarde a partir de seus estudos estas séries trigonométricas acabaram sendo denominadas como séries de Fourier.

Fourier em 21 de dezembro de 1807 apresentou a academia francesa de ciências, a análise harmônica, também conhecida como a análise de Fourier, que foi um grande marco na história da matemática.

Fourier havia deduzido a equação do calor, que descrevia à condução do calor através de corpos sólidos. Em meios a estes estudos acabou deduzindo um método para resolver equações diferenciais parciais. Na resolução da equação do calor, aplicando o método de separação de variáveis, Fourier escreveu a solução da equação em forma de uma série trigonométrica, e isto levou a Fourier alegar que toda função periódica de período 2π poderia ser escrita na forma:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

E ainda Fourier acabou encontrando fórmulas que calculavam os coeficientes da série:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

Essas idéias de Fourier não foram aceitas em primeiro momento, mas anos depois, acabaram sendo aceitas e expostas em sua obra de 1822, *Théorie analytique de La chaleur*.

2. Conceitos Básicos

Nos capítulos seguintes serão estudados diversos tipos de equações diferenciais parciais (EDP), que são assim chamadas pois são equações que contém derivadas parciais, isto é, a variável dependente deve ser uma função de duas ou mais variáveis independentes, pois, caso contrário não haveriam derivadas parciais. Por exemplo:

$$\partial_x u + 2x\partial_y u + \partial_z u = 4yu \quad (2.1)$$

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad (2.2)$$

onde x, y, z na equação (2.1) representam as variáveis independentes, enquanto $u = u(x, y, z)$ a variável dependente. Já no caso (2.2), u é uma função de duas variáveis, $u = u(x, y)$.

Toda equação diferencial parcial possui uma ordem, que é estabelecida pela maior ordem da derivada da função dependente.

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = 0$$

A equação acima, mais conhecida como equação de Laplace em três variáveis, é um exemplo de equação de segunda ordem. Já a equação seguinte:

$$6y\partial_x u + x\partial_y u = u,$$

é um exemplo de equação de primeira ordem.

As equações diferenciais parciais além de serem classificadas por sua ordem, também são classificadas como não-lineares e lineares. Uma equação diferencial parcial linear é caracterizada pelo fato de que a variável dependente e suas derivadas estão no primeiro grau, e também por não ocorrer produto entre a variável dependente e suas derivadas parciais.

$$(\partial_x u)^2 + 2\partial_y u = 4yu \quad (2.3)$$

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \frac{1}{k} \partial_t u \quad (2.4)$$

A equação (2.3) é um exemplo de uma equação não-linear, já a equação (2.4) conhecida como equação de condução ou difusão do calor é um caso de equação diferencial parcial linear.

No decorrer de nossos estudos estaremos dando ênfase a casos particulares de equações diferenciais parciais lineares que representam fenômenos físicos, deixando de lado as equações não-lineares.

Uma equação diferencial parcial linear pode ser classificada como homogênea e não-homogênea, e o que caracteriza esta equação ser homogênea é o fato de que cada termo da equação deve conter ou a variável dependente, ou uma das suas derivadas parciais.

$$\rho \partial_x^2 u = \lambda \partial_y u + 2u \quad (2.5)$$

A equação (2.5) cujo ρ e λ são constantes arbitrárias, representa uma equação linear homogênea. Enquanto a equação (2.6):

$$2\partial_x^2 u = \lambda \partial_y u + f(x, y) \quad (2.6)$$

onde $f(x, y)$ é uma função dada, é uma equação linear não - homogênea .

E como no caso das equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas, caso $u_1, u_2, u_3 \dots, u_n$ forem n soluções de uma equação diferencial parcial linear homogênea, então uma combinação linear destas soluções

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots + c_n u_n$$

onde os coeficientes $c_1, c_2, c_3 \dots, c_n$ são constantes arbitrárias, também é solução da mesma equação diferencial. Chamamos este resultado de princípio de superposição. Mais adiante demonstraremos este princípio.

2.1 Fenômenos Físicos e suas Equações diferenciais.

Muitas das equações diferenciais que serão estudadas estarão representando fenômenos físicos, mostrando que as leis da física podem ser escritas em termos de equações diferenciais parciais.

Algumas destas equações são as seguintes:

- 1) $\Delta u = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u$ (equação da onda).
- 2) $\Delta u = \frac{1}{k} \partial_t u$ (equação de condução ou difusão do calor).
- 3) $\Delta u = 0$ (equação de Laplace).
- 4) $\Delta u + \lambda u = 0$ (equação de Helmholtz).
- 5) $\Delta u = f(x, y, z)$ (equação de Poisson).
- 6) $\Delta^2 u = -\frac{1}{p^2} \partial_t^2 u$ (equação bi-harmônica da onda) onde $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.
- 7) $\Delta^2 u = 0$ (equação bi-harmônica).
- 8) $\Delta u + \alpha [E - V(x, y, z)] u = 0$ (equação de Schrödinger).
- 9) $\square u + \lambda^2 u = 0$ (equação de Klein-Gordon).

Em todas as equações Δ é operador Laplaciano definido como:

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (\text{em duas variáveis } x, y)$$

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (\text{em três variáveis } x, y, z)$$

dependendo do número de dimensões do espaço, \square é o operador D'Alembertiano, definido $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$, t a variável do tempo, $e, c, k, \lambda, p, \alpha, E$ são constantes e f e V funções dadas. Lembrando que esta é uma pequena lista de equações diferenciais parciais importantes na física matemática.

2.2 Classificações

Estas leis da física em formas de equações diferenciais parciais discutidas somente em duas variáveis independentes formam casos especiais de equações diferenciais parciais lineares homogêneas de segunda ordem, caso geral:

$$a\partial_x^2 u + 2h\partial_{xy}^2 u + b\partial_y^2 u + 2f\partial_x u + 2g\partial_y u + eu = 0 \quad (2.7)$$

onde a, h, b, f, g, e são constantes ou funções de x e y .

Se observarmos bem a equação (2.7) se parece com a equação geral da cônica:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + e = 0$$

E sabemos que esta equação representa:

$$\begin{cases} \text{uma elipse se } ab - h^2 > 0 \\ \text{uma parábola se } ab - h^2 = 0 \\ \text{uma hipérbole se } ab - h^2 < 0 \end{cases}$$

E devido a essa semelhança classificaremos a equação diferencial (2.7) como:

$$\begin{cases} \text{elíptica quando } ab - h^2 > 0 \\ \text{parabólica quando } ab - h^2 = 0 \\ \text{hiperbólica quando } ab - h^2 < 0 \end{cases}$$

Por exemplo:

A equação de condução ou de difusão do calor nas variáveis x e t ,

$\partial_x^2 u = \frac{1}{k} \partial_t u$ é do tipo parabólico por que $ab - h^2 = 1 \cdot 0 - 0^2 = 0$.

A equação de Helmholtz $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \lambda u = 0$ é do tipo elíptico por que $ab - h^2 = 1 \cdot 1 - 0^2 > 0$.

Em casos que a, h, b sejam funções de x e y , estas equações podem mudar de classificação quanto à região do plano xy .

Por exemplo, a equação

$$x\partial_x^2 u + 2x\partial_{xy}^2 u + \frac{1}{x}\partial_y^2 u + 3u = 0$$

é elíptica quando $-4x^2 + 1 > 0$, parabólica quando $-4x^2 + 1 = 0$ e hiperbólica quando $-4x^2 + 1 < 0$. Veja o gráfico:

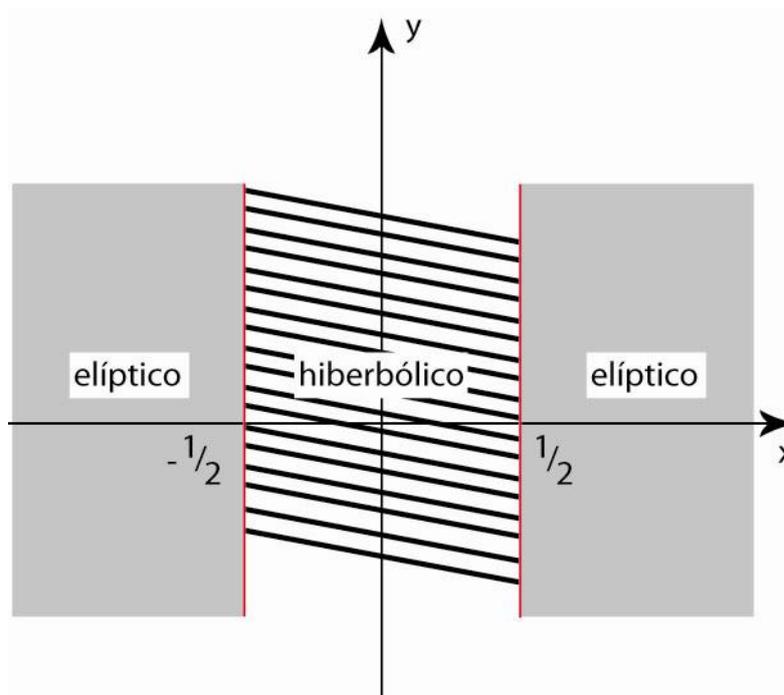


Figura 1

tornando-se do tipo parabólico nas retas $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

Devido a esta classificação podemos impor condições de fronteira que nos forneceram soluções únicas para a equação.

2.3 Solução de uma equação diferencial parcial linear.

Definimos como solução geral de uma EDP linear, uma solução da mesma que contenha funções arbitrárias, formando assim um conjunto de todas as soluções particulares da equação. Para explicar melhor consideramos o seguinte exemplo:

Seja

$$u(x, y) = f(xy) \quad (2.8)$$

onde $f(xy)$ é uma função arbitrária de xy . Diferenciando u primeiramente em relação a x (2.9) e depois em relação a y (2.10) temos:

$$\partial_x u(x, y) = f'(xy)y \quad (2.9)$$

$$\partial_y u(x, y) = f'(xy)x \quad (2.10)$$

somando agora (2.9) com (2.10) encontramos:

$$\partial_x u(x, y) + \partial_y u(x, y) = f'(xy).(y + x)$$

sabendo que $f'(xy) = \frac{\partial_x u}{y}$ por (2.9), tiramos a seguinte equação diferencial parcial

$$\partial_x u + \partial_y u = \frac{\partial_x u}{y} .(y + x)$$

$$\partial_x u + \partial_y u = \partial_x u + \frac{\partial_x u}{y} x$$

$$y\partial_y u = \partial_x ux \quad (2.11)$$

que tem como solução geral (2.8), pois dada qualquer função $f(xy)$, $u = f(xy)$ é solução desta equação. Por exemplo,

$$u = x.y \quad \text{e} \quad u = \text{sen}(x.y)$$

onde definimos $u = x.y$ e $u = \text{sen}(x.y)$ como soluções particulares.

2.3.1 Condições de Fronteira

As equações diferenciais parciais devem usualmente satisfazer certas exigências, como nas equações diferenciais ordinárias. Denominamos essas exigências de condições de fronteira.

Podemos dizer que uma equação diferencial parcial e um conjunto de condições de fronteiras podem representar um fenômeno físico, se esta tiver solução única, pois apresentando um conjunto de dados em um fenômeno físico estes nos levam à um único resultado, e também quando dada uma pequena mudança nas condições de fronteira, resultam em apenas pequenos desvios na solução, pois as condições de fronteira são obtidas através de experiências que ocasionam pequenos erros, e esses erros não devem ocasionar grandes desvios nas soluções.

$$y\partial_y u = \partial_x u x$$

Procuramos agora uma solução que satisfaça as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 1 \\u(0, y) &= 1 \\ \partial_x u(0, y) &= 0\end{aligned}$$

podemos verificar facilmente que $u(x, y) = \cos x.y$ satisfaz a equação e as condições de fronteira.

Não é fácil de se obter tipos de condições de fronteira que conduzam as equações diferenciais parciais lineares à soluções únicas e estáveis; este estudo é um pouco difícil, mas existem três tipos principais de condições que aparecem freqüentemente em estudos de fenômenos físicos:

Condições de Dirichlet, que é utilizada quando o fenômeno físico atua sobre toda a região de um corpo, onde são conhecidos os valores da função u em cada ponto da fronteira da região.

Condições de Neumann, que utilizada quando o fenômeno físico está atuando nas fronteiras de uma região, onde são conhecidos os valores da derivada normal $\partial_\nu u$ da função na fronteira.

Condições de Cauchy, neste caso uma das variáveis independentes é a variável t (tempo) e são conhecidos os valores de u e de $\partial_t u$ para $t = 0$.

Um exemplo de EDP sujeita a condições de fronteiras seria a seguinte

$$\partial_x^2 u = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u$$

$$u(x, 0) = \operatorname{tg}(x)$$

$$\partial_t u(x, 0) = x$$

onde $u = u(x, t)$ e como podemos notar as condições são do tipo de Cauchy.

2.3.2 Superposições de soluções

Definimos anteriormente o princípio da superposição, que diz que se $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ são n funções que satisfazem uma equação diferencial linear homogênea, então uma combinação linear destas funções

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots + c_n u_n$$

onde $c_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ são constantes, também será uma solução da equação.

Podemos verificar este princípio facilmente, pois se u_1, u_2 são duas funções de um conjunto de funções e L um operador que tem as seguintes propriedades:

$$L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2$$

$$L(c_1 u_1) = c_1 Lu_1$$

onde c_1 é uma constante, denominamos L como sendo um operador linear e do mesmo modo podemos mostrar que se $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ são n funções de um mesmo conjunto e L um operador linear, então

$$L\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i Lu_i$$

onde c_i são constantes. Se analisarmos agora $L = \frac{d}{dx}$, verificaremos que L é um operador linear sobre o conjunto de todas as funções de uma variável, diferenciável pelo menos uma vez. Denominamos este operador de operador diferencial linear. O mesmo acontece se $L = \partial_x$, L será novamente um operador diferencial linear, mas agora do conjunto de todas as funções de duas ou mais variáveis independentes, que são diferenciáveis pelo menos uma vez em relação a qualquer variável. Então toda equação diferencial parcial linear homogênea pode ser escrita da seguinte forma

$$Lu = 0$$

onde L é um operador linear e u é variável independente. Um exemplo seria a equação a seguir

$$4\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = 0$$

$$(4\partial_x^2 - \partial_t^2)u = 0$$

$$Lu = 0$$

onde $L = (4\partial_x^2 - \partial_t^2)$ é o operador diferencial linear da equação.

Agora se $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ forem soluções de uma EDP linear homogênea então

$$Lu_i = 0$$

e como L é um operador linear temos

$$c_i L u_i = 0 \Rightarrow L c_i u_i = 0$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e c_i uma constante, então:

$$\sum_{i=1}^n c_i L u_i = L \left(\sum_{i=1}^n c_i u_i \right) = 0$$

Isto mostra que uma combinação linear arbitrária de soluções de uma EDP linear homogênea também é solução da equação, e, este é o princípio de superposição.

Este princípio é de grande utilidade, pois caso seja possível encontrar certo conjunto de soluções de uma equação diferencial parcial linear homogênea, talvez possamos encontrar uma combinação linear destas soluções que satisfaçam todas as condições de fronteiras impostas.

3. Método de Fourier

Método de Fourier é um dos métodos de resolução de EDP's, ele é a combinação do princípio da superposição de soluções com o método de separação de variáveis, que assume que a variável dependente é igual ao produto de 2 (duas) ou mais funções, cada uma dependendo apenas de uma das variáveis independentes.

Exemplo: Vamos utilizar agora o método de Fourier para achar a solução da equação diferencial parcial linear

$$\partial_x^2 u = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u \quad (3.1)$$

mais conhecida como equação da onda unidimensional, com as seguintes condições de fronteiras de Dirichlet

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(l,t) &= 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \partial_t u(x,0) &= g(x), & 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

onde f e g são funções dadas, e l uma constante dada.

Solução: Para aplicar o método de Fourier vamos admitir uma solução que seja separável da forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

onde X é uma função de x e T uma função somente de t . Assim a equação (3.1) ficaria da seguinte forma:

$$\partial_x^2 X.T = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 T.X$$

vamos agora multiplicar ambos os lados por $\frac{1}{X.T}$, com $X.T \neq 0$ então teremos o seguinte:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

Se analisarmos, veremos que do lado esquerdo da igualdade teremos uma função somente de x e do lado direito uma função que só depende de t , então podemos afirmar que para a igualdade ser verdadeira é necessário que

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= k, \\ \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} &= k, \end{aligned}$$

onde k é uma constante de separação. Podemos notar agora que tanto a primeira equação como a segunda são equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = kX, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = kT, \quad (3.3)$$

podemos descobrir as funções X e T resolvendo cada uma destas equações diferenciais ordinárias, mas não podemos esquecer que a equação $u(x,t) = X(x)T(t)$ deve satisfazer as condições de fronteira então

$$\begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) &= 0, & \forall t, \\ u(l,t) = X(l)T(t) &= 0, & \forall t, \end{aligned}$$

tomando $T \neq 0$, pois caso contrário iríamos nos deparar com a solução trivial ($u(x,t) = 0$), temos

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (3.4)$$

caso k seja zero, temos como solução da equação (13)

$$X(x) = Ax + B,$$

como $X(0) = X(l) = 0$, concluímos que $A = B = 0$ e assim caímos novamente na solução trivial.

Caso k seja positivo ($k = w^2$), como falamos vamos nos deparar com uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem (3.2), que tem o seguinte polinômio característico

$$r^2 + 0.r - w^2$$

$$r^2 - w^2$$

onde as raízes deste polinômio são w , e $-w$ que são raízes reais, então duas soluções particulares da equação (3.2) são

$$X(x) = e^{wx}$$

$$X(x) = e^{-wx}$$

e pelo princípio da superposição temos que

$$X(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx},$$

também é solução da equação (3.2), e neste caso é o solução geral, pois e^{wx} , e^{-wx} são linearmente independente, para confirmar isto basta calcular o Wronskiano e verificar que ele resulta em um número diferente de zero implicando que as duas funções são linearmente independentes.

$$\text{Wronskiano}(f, g) = \det \begin{bmatrix} f & g \\ f' & g' \end{bmatrix}$$

e retomando temos novamente por (3.4) que $A = B = 0$ e novamente nos deparamos com a solução $u(x, t) = 0$.

Caso k seja negativo ($k = -w^2$), neste caso o polinômio característico da equação (3.2) é o seguinte

$$r^2 + 0.r + w^2$$

$$r^2 + w^2$$

onde as raízes deste polinômio são wi , e $-wi$ que são raízes complexas, então duas soluções particulares da equação (3.2) são

$$X(x) = \cos wx$$

$$X(x) = \text{sen } wx$$

resolvendo novamente o Wronskiano das funções acima, veremos que elas são linearmente independentes e então encontramos como solução geral da equação (3.2)

$$X(x) = A \cos wx + B \text{sen } wx,$$

e que pelas condições de fronteira, temos

$$X(0) = A \cos w0 + B \text{sen } w0$$

$$0 = A \cos 0 + B \text{sen } 0$$

$$0 = A$$

$$X(l) = A \cos wl + B \text{sen } wl$$

$$0 = A \cos wl + B \text{sen } wl$$

$$0 = B \text{sen } wl$$

Como não queremos $B = 0$, pois senão teremos novamente a solução trivial, tiramos que

$$\text{sen } wl = 0$$

Esta igualdade implica que

$$w = \frac{r\pi}{l}, \quad r = 1, 2, 3... \quad (3.5)$$

excluimos o caso $r = 0$, que nos dá $w = 0$ e resultaria novamente na solução trivial.

Resolvendo agora a equação (3.3), com $k = -w^2$, novamente o polinômio característico teria duas raízes complexas, $wci, -wci$, e fazendo os devidos passos, encontramos a seguinte equação geral

$$T(t) = C \cos wct + D \text{sen } wct$$

onde C e D são constantes de integração. Usando agora nossa idéia inicial que $u(x,t) = X(x)T(t)$ temos

$$u(x,t) = \text{sen } wx.(C \cos wct + D \text{sen } wct) \quad (3.6)$$

note que a constante arbitrária B foi igualada a 1, para facilitar os cálculos.

Mas olhando novamente para (3.5), notamos que w assume uma infinidade de valores, e pra cada valor de w formamos uma solução particular que tem a forma (3.6)

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{\pi}{l}, \quad u_1(x,t) &= \text{sen } \frac{\pi x}{l} .(C_1 \cos \frac{\pi ct}{l} + D_1 \text{sen } \frac{\pi ct}{l}), \\ w_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad u_2(x,t) &= \text{sen } \frac{2\pi x}{l} .(C_2 \cos \frac{2\pi ct}{l} + D_2 \text{sen } \frac{2\pi ct}{l}), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ w_r = \frac{r\pi}{l}, \quad u_r(x,t) &= \text{sen } \frac{r\pi x}{l} .(C_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + D_r \text{sen } \frac{r\pi ct}{l}), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $C_1, C_2, C_3, \dots, C_r, \dots, D_1, D_2, \dots, D_r, \dots$ são constantes arbitrárias. Cada uma destas expressões de $u(x,t)$ acima são soluções da EDP linear (3.1), e estas satisfazem a condição de fronteira $u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0$. Agora pelo princípio da superposição podemos afirmar que qualquer combinação linear destas soluções também é solução da equação da onda (3.1), ou seja, a seguinte combinação linear também é solução

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + D_r \text{sen } \frac{r\pi ct}{l} \right) \text{sen } \frac{r\pi x}{l} \quad (3.8)$$

e esta é a solução geral, satisfazendo como dito antes, apenas a seguinte condição de fronteira $u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0$. Agora vamos satisfazer as condições

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \partial_t u(x,0) &= g(x), & 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

e estas condições como veremos determinaram a constantes arbitrárias C_r e D_r .

Consideramos primeiramente $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq l$, então temos (3.8) em $t = 0$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cos \frac{r\pi c \cdot 0}{l} + D_r \sin \frac{r\pi c \cdot 0}{l} \right) \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} (C_r \cos 0 + D_r \sin 0) \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} C_r \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \end{aligned}$$

e substituindo $u(x,0) = f(x)$ temos

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \quad (3.9)$$

Agora utilizando a última condição de fronteira $\partial_t u(x,0) = g(x)$, $0 \leq x \leq l$, para descobrir D_r vamos derivar (3.8) em relação a t e aplicar em $t = 0$. Assim teremos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cos \frac{r\pi ct}{l} + D_r \sin \frac{r\pi ct}{l} \right) \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cdot \left(-\text{sen} \frac{r\pi ct}{l} \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} + D_r \cdot \left(\cos \frac{r\pi ct}{l} \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} \right) \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cdot \left(-\text{sen} \frac{r\pi c \cdot 0}{l} \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} + D_r \cdot \left(\cos \frac{r\pi c \cdot 0}{l} \right) \cdot \frac{r\pi c}{l} \right) \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cdot (-\text{sen} 0) \cdot \frac{r\pi c}{l} + D_r \cdot (\cos 0) \cdot \frac{r\pi c}{l} \right) \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot \frac{r\pi c}{l} \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\ \partial_t u(x,0) &= \frac{\pi c}{l} \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot r \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \end{aligned}$$

e como $\partial_t u(x,0) = g(x)$, $0 \leq x \leq l$, então

$$g(x) = \frac{\pi c}{l} \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot r \text{sen} \frac{r\pi x}{l}. \quad (3.10)$$

Agora os coeficientes C_r e D_r podem ser determinados através de (3.9) e (3.10) respectivamente, para isso utilizaremos uma técnica de séries de Fourier (que será comentada no próximo tópico) e assim teremos

$$C_r = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx \quad (3.12)$$

$$D_r = \frac{2}{r\pi c} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx \quad (3.13)$$

onde $r = 1, 2, 3, \dots$.

Agora substituindo em (3.8) as constantes C_r e D_r temos

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{l} \int_0^l f(x') \operatorname{sen} \frac{r\pi x'}{l} dx' \right] \cos \frac{r\pi ct}{l} \cdot \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} + \left[\frac{2}{r\pi c} \int_0^l g(x') \operatorname{sen} \frac{r\pi x'}{l} dx' \right] \operatorname{sen} \frac{r\pi ct}{l} \cdot \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \right\}$$

onde x' é a variável de integração e denotamos assim para não confundirmos com x que é a variável independente. Esta função é solução geral da equação da onda (3.1) com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) &= 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \partial_t u(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

3.1 Funções Ortonormais

Quando nos deparamos com a igualdade

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}, \quad 0 < x < l$$

como vimos anteriormente podemos proceder da seguinte forma

$$f(x) \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l}$$

$$\int_0^l f(x) \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx = \int_0^l \sum_{r=1}^{\infty} C_r \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx$$

$$\int_0^l f(x) \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx = C_r \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^l \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx$$

sendo r e s inteiros positivos, e como podemos notar a integração de

$$\int_0^l \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ \frac{1}{2}, & r = s (\neq 0) \end{cases}$$

então

$$\int_0^l f(x) \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx = C_r \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^l \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx$$

$$\int_0^l f(x) \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx = C_r \frac{l}{2}$$

$$C_r = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx$$

como havíamos feito anteriormente para descobrir as constantes da função (3.8). Esse método é o método das séries de Fourier, e assume que funções assim expandidas satisfazem as condições de Dirichlet que garante que as séries convergem para as funções dadas em cada ponto, menos nos pontos de descontinuidade.

Podemos escrever agora $\int_0^l \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \cdot \text{sen} \frac{s\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ \frac{1}{2}, & r = s (\neq 0) \end{cases}$ da seguinte

forma

$$\int_0^l \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \text{sen} \frac{s\pi x}{l} \right) dx$$

esta integral agora vai resultar no seguintes valores

$$\begin{cases} 0, & r \neq s, \\ 1, & r = s (\neq 0). \end{cases}$$

Caso escrevamos

$$f_r(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

então,

$$\int_0^l f_r(x) \cdot f_s(x) dx = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ 1, & r = s (\neq 0). \end{cases}$$

As funções onde a integral de $f_r(x) \cdot f_s(x)$, para $r \neq s$, são iguais a zero vamos denominá-las funções ortogonais no intervalo $(0, l)$ e as funções $f_r(x) \cdot f_s(x)$, para $r = s (\neq 0)$, onde a integral é igual a um, são chamadas de funções normalizadas à unidade em $(0, l)$. As funções que são ortogonais e normalizadas à unidade em $(0, l)$ são chamadas de ortonormais em $(0, l)$.

4. Séries de Fourier

4.1 Funções Periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica de período T se $f(x+T) = f(x)$.

Exemplo: A função $\cos x$ é periódica de período 2π .

Vamos então agora determinar o período de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.

Solução: sabendo que $f(x+T) = f(x)$ então:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi(x+T)}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2} + \frac{3\pi T}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

Vamos substituir $y = \frac{3\pi x}{2}$ então:

$$\operatorname{sen}\left(y + \frac{3\pi T}{2}\right) = \operatorname{sen}(y)$$

Isto implica que $\frac{3\pi T}{2} = 2\pi$, pois $\operatorname{sen}(y)$ é uma função periódica de período 2π :

$$\frac{3\pi T}{2} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4}{3}$$

Logo $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$ é periódica de período $\frac{4}{3}$.

OBS: Se T é o período da função $f(x)$ então qualquer múltiplo de T , (nT , com $n \in \mathbb{Z}$), também é período de $f(x)$. Onde o menor período positivo é chamado de período

fundamental, que é o período que nos interessa, então quando nos referimos a período estaremos falando do período fundamental.

Vamos mostrar agora que toda função periódica, de período $2L$, pode ser escrita na forma (1.1).

Mas é claro que não é assim tão simples assumir esta igualdade, precisamos agora saber para que tipo de funções é possível esta representação, quando é válida a igualdade (1.1) e quem são os coeficientes a_0, a_n, b_n .

Para responder estas questões vamos fazer algumas definições.

4.2 Convergência uniforme

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ onde $f_n : I \rightarrow R$ são funções reais definidas em um intervalo $I \in R$ converge pontualmente, se para cada $x_0 \in I$ fixado, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ convergir, isto é dado $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe um inteiro N , dependendo de ε e de x_0 , tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x_0) \right| < \varepsilon$$

para todos $n < m$ tais que $n \geq N$.

Agora uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente, se dado $\varepsilon > 0$, existir um inteiro N , dependendo agora apenas de ε , tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \varepsilon$$

para todos $m > n \geq N$.

Quando a série convergir uniformemente, podemos dizer de forma informal, que a integral do somatório é igual ao somatório das integrais, e claro se existir as integrais de f_n no intervalo I , ou seja,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

4.3 Coeficientes de Fourier

Seja

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.1)$$

para descobrir os coeficientes a_0, a_n e b_n vamos supor que esta igualdade seja verdadeira e que a série convirja uniformemente, e com isso podemos integrar ambos os lados da igualdade. Como $f(x)$ é periódica de período $2L$, vamos estudá-la apenas no intervalo $[-L, L]$. Integrando ambos os lados de (4.1) teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

como

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

temos:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2L$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (4.2)$$

Para obter a_n e b_n vamos usar as relações de ortogonalidade, citadas anteriormente, então após integrarmos ambos os lados de (4.1)

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

multiplicá-los-emos por $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, onde $k \geq 1$, para descobrir a_n :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \\ \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos \frac{k\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

e sabendo que:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ L & \text{se } n = k \end{cases} \quad (\text{conceito de ortogonalidade})$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0$$

Então:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = a_k \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx$$

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = a_k L$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \quad (4.3)$$

De forma análoga descobrimos b_k , basta multiplicarmos (4.1) por $\sin \frac{k\pi x}{L}$, com $k \geq 1$, e integrarmos ambos os lados da igualdade no intervalo $[-L, L]$ e teremos:

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx . \quad (4.4)$$

Estas são as fórmulas para descobrimos os coeficientes das séries de Fourier, de uma função $f(x)$ periódica de período $2L$.

Agora para continuarmos nossos estudos vamos inserir a seguinte definição:

Uma função é denominada contínua por seções, se esta é descontínua somente em um certo número finito de pontos em um intervalo $[a, b]$ e ainda, os limites laterais da f em seus pontos de descontinuidades devem existir.

4.4 Séries de Fourier

Teorema de Fourier: Seja f uma função periódica de período $2L$. Se f e f' são ambas contínuas por seções em $[-L, L]$, então f é representada pela série (4.1), sendo os coeficientes a_0, a_n e b_n calculados por (4.2), (4.3), (4.4) respectivamente, com o seguinte sentido de convergência:

- A série converge para $f(x)$ em cada ponto $x \in (-L, L)$ em que f é contínua.
- A série converge para $\frac{1}{2} \left[\lim_{k \rightarrow x^-} f(k) + \lim_{k \rightarrow x^+} f(k) \right]$ em cada ponto $x \in (-L, L)$ em que f é descontínua.
- A série converge para $\frac{1}{2} \left[\lim_{k \rightarrow x^-} f(k) + \lim_{k \rightarrow x^+} f(k) \right]$ em cada extremo: $-L$ e L .

A demonstração deste teorema fica como proposta para trabalhos seguintes.

Exemplo: Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad (4.5)$$

periódica de período 2π .

Vamos calcular a série de Fourier associada a f .

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Solução: Primeiramente vamos calcular os coeficientes da série:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \cos nx \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n} \, dx \right] \quad \text{para } n \neq 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[0 - \left(-\frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^\pi \right) \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^\pi \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \pi n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{1}{\pi n^2} [\cos \pi n - 1]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Agora vamos calcular a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \, dx + \int_0^\pi x \, dx \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

e por último vamos calcular b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot \operatorname{sen} nx \, dx + \int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sen} nx \, dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sen} nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-x \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos nx}{n} \, dx \right] \quad \text{para } n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-x \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\pi \cdot \frac{\cos \pi n}{n} + \frac{1}{n^2} \left(\operatorname{sen} nx \Big|_0^{\pi} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\pi \cdot \frac{\cos \pi n}{n} \right]$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Então a série de Fourier associada a f é:

$\frac{\pi}{4} + b_0 \cdot \operatorname{sen} 0 \cdot x - \frac{2}{\pi} \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + 0 \cdot \cos 2x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \dots$, que podemos escrever da forma:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Para analisar melhor o que seria descrever $f(x)$, em forma de uma soma de senos e cossenos, vejamos graficamente a aproximação de f por sua N -ésima soma parcial de sua série de Fourier descrita por

$$S_N(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \cdot \frac{\operatorname{sen} kx}{k}.$$

Assumindo a soma até $N = 20$, teremos a seguinte aproximação:

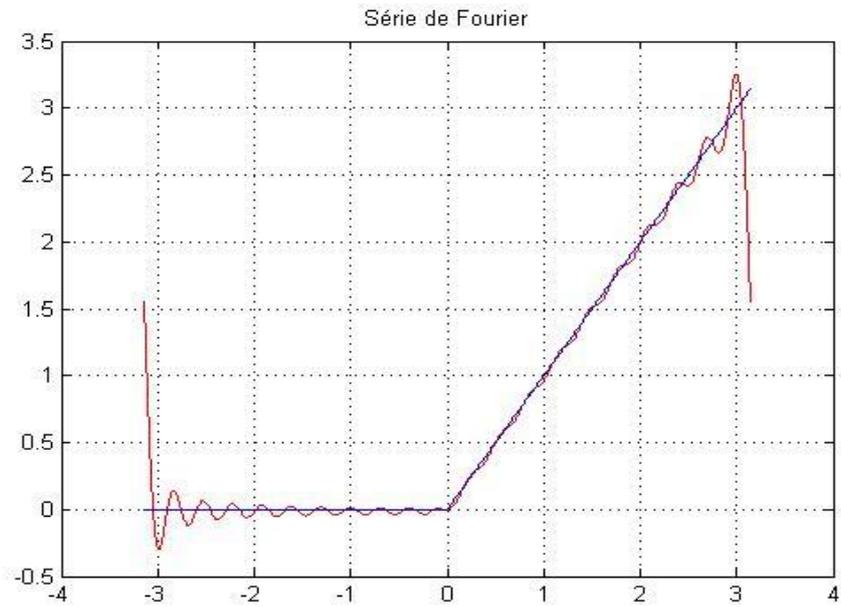


Figura 2

Se aumentarmos o número de termos somados, teremos uma melhor aproximação, vejamos agora para $N = 80$

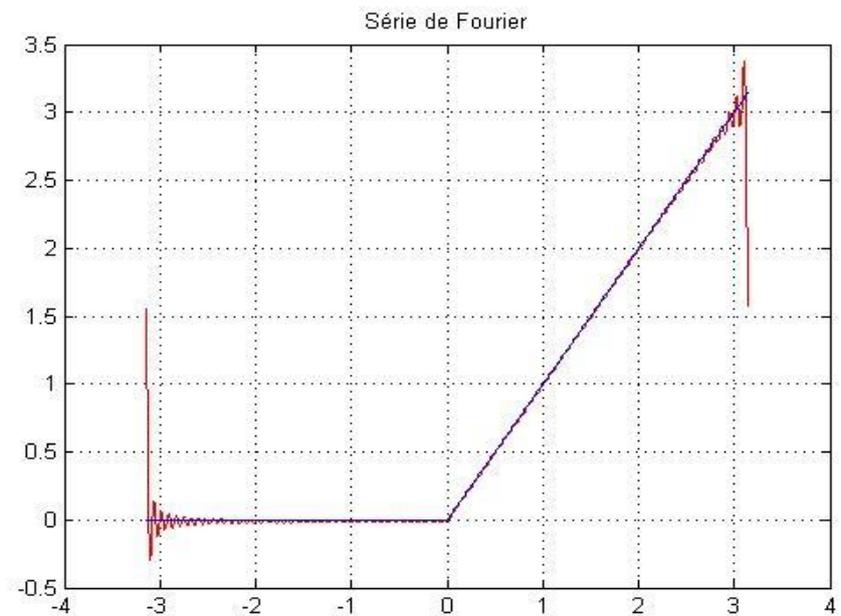


Figura 3

5. Ondas e Calor

Como comentado no item 1.1, todo este estudo de Fourier que o levou a deduzir as séries de Fourier se deu em meio à análise harmônica, onde Fourier deduziu a equação do calor, que descrevia a condução de calor através de um corpo sólido.

5.1 Problema da corda vibrante

Vamos considerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap ([0, l] \times [0, +\infty[) \\ \partial_x^2 u = \partial_t^2 u, & 0 \leq x \leq l, t \geq 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l \\ \partial_t u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (5.1)$$

Este sistema é um modelo simples para a análise das vibrações de uma corda de comprimento l , que está fixa nos extremos $x=0$ e $x=l$. A incógnita $u = u(x, t)$, que depende do espaço x e do espaço t , descreve a altura que se encontra o ponto de distância x do extremo 0 (no intervalo $(0, l)$), no instante t .

Olhando para o sistema (5.1) notaremos que a equação da onda é dada em forma de uma EDP, onde as três últimas equações estabelecem as condições iniciais, que ditam os valores da função $u(x, t)$ nos extremos e no instante $t=0$. Assim obtemos uma equação diferencial parcial linear, com condições iniciais. Então agora vamos resolver – lá.

Solução: Vamos admitir uma solução separável para (5.1):

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

onde X é uma função de x e T uma função somente de t . Assim a equação $\partial_x^2 u = \partial_t^2 u$ ficaria da seguinte forma:

$$\partial_x^2 X.T = \partial_t^2 T.X$$

vamos agora multiplicar ambos os lados por $\frac{1}{X.T}$, então teremos o seguinte:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

Podemos notar que do lado esquerdo da igualdade teremos uma função somente de x e do lado direito uma função que só depende de t , então podemos afirmar que para a igualdade ser verdadeira é necessário que

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= k, \\ \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} &= k, \end{aligned}$$

onde k é uma constante. Podemos notar agora que tanto a primeira equação como a segunda são equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = kX,$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = kT,$$

e podemos descobrir as funções X e T resolvendo cada uma destas equações diferenciais ordinárias, mas não podendo esquecer que a equação $u(x,t) = X(x)T(t)$ deve satisfazer as condições de fronteira presentes nos sistema (5.1), então

$$\begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) &= 0, & \forall t, \\ u(l,t) = X(l)T(t) &= 0, & \forall t, \end{aligned}$$

para evitarmos a solução trivial ($u(x,t) = 0$) vamos excluir $T(t) = 0$ então

$$X(0) = X(l) = 0,$$

caso k seja zero, temos como solução da equação $\frac{d^2 X}{dx^2} = kX$,

$$X(x) = Ax + B,$$

como $X(0) = X(l) = 0$, tiramos que $A = B = 0$ e assim teremos como solução de $\frac{d^2 X}{dx^2} = kX$, a solução trivial.

Caso k seja positivo ($k = w^2$), vamos nos deparar com uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, que tem o seguinte polinômio característico

$$\begin{aligned} r^2 + 0.r - w^2 \\ r^2 - w^2 \end{aligned}$$

onde as raízes deste polinômio são w , e $-w$ que são raízes reais, então duas soluções particulares da equação $\frac{d^2 X}{dx^2} = kX$ são

$$\begin{aligned} X(x) &= e^{wx} \\ X(x) &= e^{-wx} \end{aligned}$$

e pelo princípio da superposição temos que

$$X(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}.$$

Como $X(0) = X(l) = 0$, então

$$\begin{aligned} X(0) &= Ae^{w \cdot 0} + Be^{-w \cdot 0} = 0 \\ X(0) &= A + B = 0 \Rightarrow B = -A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(l) &= Ae^{wl} + Be^{-wl} = 0 \\ X(l) &= Ae^{wl} - Ae^{-wl} = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

e novamente nos deparamos com a solução trivial ($u(x, t) = 0$).

Caso k seja negativo ($k = -w^2$), neste caso o polinômio característico é o seguinte

$$\begin{aligned} r^2 + 0.r + w^2 \\ r^2 + w^2 \end{aligned}$$

onde as raízes deste polinômio são wi , e $-wi$ e como são raízes complexas, teremos como soluções particulares da equação $\frac{d^2 X}{dx^2} = kX$

$$X(x) = \cos wx$$

$$X(x) = \text{sen } wx$$

Como as duas soluções são linearmente independentes então temos como solução geral da equação $\frac{d^2 X}{dx^2} = kX$

$$X(x) = A \cos wx + B \text{sen } wx,$$

que utilizando a condição de fronteira $X(0) = X(l) = 0$, temos

$$X(0) = A \cos w0 + B \text{sen } w0$$

$$0 = A \cos 0 + B \text{sen } 0$$

$$0 = A$$

$$X(l) = A \cos wl + B \text{sen } wl$$

$$0 = A \cos wl + B \text{sen } wl$$

$$0 = B \text{sen } wl$$

Como não queremos $B=0$, pois senão teremos novamente a solução trivial, tiramos que

$$\text{sen } wl = 0$$

Esta igualdade implica que

$$w = \frac{r\pi}{l}, \quad r = 1, 2, 3 \dots$$

(excluimos o caso $r=0$, que resultaria novamente na solução trivial) logo a solução de

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = kX \text{ é}$$

$$X_r(x) = B_r \text{sen } w_r x \text{ com } w_r = \frac{r\pi}{l}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

O fato de r variar implica que para cada valor de r obtemos uma solução para a equação.

Resolvendo agora a equação $\frac{d^2 T}{dt^2} = kT$ com $k = -w^2$, o polinômio característico terá duas raízes complexas, $wi, -wi$, e fazendo os devidos passos, encontramos a seguinte equação geral

$$T(t) = C \cos wt + D \text{sen } wt$$

como w assume vários valores $w = \frac{r\pi}{l}$, $r = 1, 2, 3, \dots$ então

$$T_r(t) = C_r \cos w_r t + D_r \text{sen } w_r t$$

onde C_r e D_r são constantes de integração.

Usando agora nossa idéia inicial que $u(x,t) = X(x)T(t)$ temos

$$u_r(x,t) = \text{sen } w_r x \cdot (C_r \cos w_r t + D_r \text{sen } w_r t)$$

note que a constante arbitrária B foi igualada a 1, para facilitar os cálculos.

Note também que para cada valor de r temos uma solução de $\partial_x^2 u = \partial_t^2 u$

$$\begin{aligned}
w_1 = \frac{\pi}{l}, \quad u_1(x,t) &= \text{sen} \frac{\pi x}{l} \cdot (C_1 \cos \frac{\pi t}{l} + D_1 \text{sen} \frac{\pi t}{l}), \\
w_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad u_2(x,t) &= \text{sen} \frac{2\pi x}{l} \cdot (C_2 \cos \frac{2\pi t}{l} + D_2 \text{sen} \frac{2\pi t}{l}), \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
w_r = \frac{r\pi}{l}, \quad u_r(x,t) &= \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \cdot (C_r \cos \frac{r\pi t}{l} + D_r \text{sen} \frac{r\pi t}{l}), \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e estas satisfazem a condição de inicial $u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0$. Agora pelo princípio da superposição, podemos afirmar que qualquer combinação linear destas soluções é também solução da equação da onda $\partial_x^2 u = \partial_t^2 u$, então

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cos \frac{r\pi t}{l} + D_r \text{sen} \frac{r\pi t}{l} \right) \text{sen} \frac{r\pi x}{l}$$

Como esta solução satisfaz apenas a primeira condição inicial vamos agora satisfazer as condições

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= f(x), & 0 \leq x \leq l, \\
\partial_t u(x,0) &= 0, & 0 \leq x \leq l,
\end{aligned}$$

e estas condições como veremos determinaram a constantes arbitrárias C_r e D_r . Consideramos primeiramente $u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$, então

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cos \frac{r\pi \cdot 0}{l} + D_r \text{sen} \frac{r\pi \cdot 0}{l} \right) \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\
u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} (C_r \cos 0 + D_r \text{sen} 0) \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \\
u(x,0) &= \sum_{r=1}^{\infty} C_r \text{sen} \frac{r\pi x}{l}
\end{aligned}$$

e substituindo $u(x,0) = f(x)$ temos

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l},$$

e com o conhecimento de séries de Fourier tiramos que $f(x)$ é uma função periódica de período $2l$ e C_r é um coeficiente da série então

$$C_r = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx.$$

Agora através da condição inicial $\partial_t u(x, 0) = 0$, descobriremos D_r .

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cos \frac{r\pi t}{l} + D_r \operatorname{sen} \frac{r\pi t}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}$$

$$\partial_t u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cdot \left(-\operatorname{sen} \frac{r\pi t}{l} \right) \cdot \frac{r\pi}{l} + D_r \cdot \left(\cos \frac{r\pi t}{l} \right) \cdot \frac{r\pi}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cdot \left(-\operatorname{sen} \frac{r\pi \cdot 0}{l} \right) \cdot \frac{r\pi}{l} + D_r \cdot \left(\cos \frac{r\pi \cdot 0}{l} \right) \cdot \frac{r\pi}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_r \cdot (-\operatorname{sen} 0) \cdot \frac{r\pi}{l} + D_r \cdot (\cos 0) \cdot \frac{r\pi}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot \frac{r\pi}{l} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}$$

$$\partial_t u(x, 0) = \frac{\pi}{l} \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}$$

$$\frac{\pi}{l} \sum_{r=1}^{\infty} D_r \cdot r \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} = 0$$

Como esta também é uma série de Fourier D_r pode ser calculado da seguinte forma:

$$D_r = \frac{2}{r\pi} \int_0^l 0 \cdot \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx$$

$$D_r = 0$$

Então a solução do problema (5.1) é:

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(s) \operatorname{sen} \frac{\pi s}{l} ds \right) \cos \frac{r\pi t}{l} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l}.$$

Fourier em seus estudos não apenas resolveu a equação da onda da forma que mostramos, além disso, descobriu um método de resolução para equações diferenciais parciais lineares como já havíamos dito. Bernoulli também chegou a este resultado representando u por um somatório de senos e cossenos, só que através de princípios físicos, já d'Alembert descobriu a seguinte solução geral para a equação da onda sem condições iniciais:

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

sendo f e g funções arbitrárias.

5.2 Difusão do Calor

5.2.1 Problema da difusão do calor

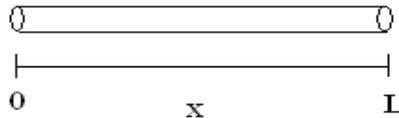
Fourier além de analisar a equação da onda, também analisou o problema da difusão do calor, levando a estabelecer a partir de princípios físicos a equação geral que devia satisfazer a temperatura u

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = \partial_t^2 u$$

que é a equação (tridimensional) do calor.

Mas estudaremos agora o seguinte problema da equação (unidimensional) do calor:

$$\begin{cases} u \in C^2((0, L) \times (0, +\infty)) \cap ([0, L] \times [0, +\infty[) \\ \partial_x^2 u = \partial_t u, & 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (5.2)$$



Este problema descreve a variação de temperatura ao longo do fio de comprimento L . Vamos supor que em cada secção perpendicular do fio a temperatura é constante.

A condição inicial $u(0, t) = u(L, t)$ indica que a temperatura nos extremos é igual a zero. Já a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ descreve a temperatura em cada ponto $x \in [0, L]$ no instante inicial.

Vamos agora resolver este problema da difusão do calor.

Solução: Admitiremos uma solução separável para (5.2):

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

onde X é uma função de x e T uma função somente de t . Assim a equação $\partial_x^2 u = \partial_t u$ ficaria da seguinte forma:

$$\partial_x^2 X.T = \partial_t T.X$$

vamos agora multiplicar ambos os lados por $\frac{1}{X.T}$, então teremos o seguinte:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$$

Se analisar a equação anterior, pode – se notar que do lado esquerdo da igualdade teremos uma função somente de x e do lado direito uma função que só depende de t , assim podemos afirmar que para a igualdade ser verdadeira é necessário que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k,$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = k,$$

onde k é uma constante. E assim tanto a primeira equação como a segunda são equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = kX,$$

$$\frac{dT}{dt} = kT.$$

Podemos descobrir as funções X e T resolvendo cada uma destas equações diferenciais ordinárias, mas não podendo esquecer que a equação $u(x,t) = X(x)T(t)$ deve satisfazer as condições de fronteira:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad \forall t,$$

$$u(l,t) = X(L)T(t) = 0, \quad \forall t,$$

para evitarmos a solução trivial ($u(x,t) = 0$) vamos excluir $T(t) = 0$ então

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Caso k seja zero ou $k > 0$, como vimos anteriormente teremos como solução da equação $\frac{d^2 X}{dx^2} = kX$, a solução trivial.

Já no caso k seja negativo ($k = -w^2$), teremos como solução da equação

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = kX,$$

$$X_r(x) = B_r \cdot \text{sen } w_r x \text{ com } w_r = \frac{r\pi}{L}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Agora vamos resolver a equação $\frac{dT}{dt} = kT$.

Solução: Primeiramente vamos multiplicar ambos os lados por e^{-kt} , então

$$e^{-kt} \frac{dT}{dt} = e^{-kt} kT$$

$$e^{-kt} \frac{dT}{dt} - e^{-kt} kT = 0$$

$$(T \cdot e^{-kt})' = 0 \Rightarrow T \cdot e^{-kt} = C$$

$$T = C \cdot e^{kt}$$

com $k = -w^2$, logo

$$T = C \cdot e^{-w^2 t}.$$

Como w assume vários valores $w = \frac{r\pi}{L}$, $r = 1, 2, 3, \dots$ então

$$T_r(t) = C_r \cdot e^{-\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 t}$$

onde C_r é uma constante de integração.

Usando agora nossa idéia inicial que $u(x,t) = X(x)T(t)$ temos

$$u_r(x,t) = B_r \cdot \text{sen} \left(\frac{r\pi}{L} x \right) \cdot C_r \cdot e^{-\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 t}$$

seja $D_r = C_r \cdot B_r$ então

$$u_r(x,t) = D_r \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$u_m(x,t) = \sum_{r=1}^m D_r \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$m \rightarrow \infty$$

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} D_r \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 t} \quad (5.3)$$

Esta é a solução de (5.2) satisfazendo apenas a primeira condição inicial, agora precisamos satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$ e através dela descobriremos a constante D_r

$$u(x,0) = \sum_{r=1}^{\infty} D_r \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{L}x\right)$$

que através de nossos conhecimentos de séries de Fourier, podemos calcular D_r da seguinte forma

$$D_r = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{L}x\right) dx$$

E substituindo em (5.3) a constante D_r temos

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left(\int_0^L f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{L}s\right) ds \right) \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{L}x\right) \cdot e^{-\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 t}$$

E esta é a solução de (5.2) que descreve a variação de temperatura ao longo do fio de comprimento L satisfazendo as condições iniciais $u(0,t) = u(L,t)$ e $u(x,0) = f(x)$.

6. Fenômeno de Gibbs

Consideramos agora uma função f de período $2L$, onde f e f' são ambas contínuas por seções. Como citado anteriormente, a série de Fourier que aproxima f , converge pontualmente para os pontos onde não há descontinuidade. Já nos pontos de descontinuidade não ocorre o mesmo, Gibbs estudou a convergência da série de Fourier na “vizinhança” destes pontos, descobrindo uma perturbação, este fenômeno é conhecido como fenômeno de Gibbs.

6.2 Fenômeno de Gibbs em séries de Fourier

A partir de agora apresentaremos graficamente a aproximação de algumas funções por suas somas parciais de suas respectivas séries de Fourier, assim podendo observar os critérios de convergência, em especial o fenômeno de Gibbs.

6.2.1 Função Salto

Consideramos a função f como sendo

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

A N -ésima soma parcial correspondente a sua série de Fourier é expressa por

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)]$$

onde os coeficientes de Fourier são calculados utilizando as fórmulas (4.3) e (4.4):

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\cos kx \, dx + \int_0^{\pi} \cos kx \, dx \right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\operatorname{sen} kx}{k} \Big|_{-\pi}^0 \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\operatorname{sen} kx}{k} \Big|_0^{\pi} \right]$$

$$a_k = 0$$

com $k = 1, 2, 3, 4, \dots$, inclusive para 0.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen}(kx) \, dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \, dx \right]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^0 \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} \right]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k} - \frac{\cos(\pi k)}{k} \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(\pi k)}{k} + \frac{1}{k} \right]$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k} - \frac{\cos(\pi k)}{k} \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^k}{k} \right]$$

Por tanto, para função salto, a soma parcial de Fourier será

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k} \right) \operatorname{sen}(kx).$$

Com o programa MATLAB podemos analisar graficamente as somas parciais de Fourier para a função salto. Uma vez guardado o comando sompar.n, para ativá-lo basta escrever sompar(N). Caso $N = 10$ teremos a seguinte aproximação da função salto pela soma parcial de Fourier



Figura 4

A medida que aumentamos o número de termos somados podemos notar que as somas parciais de Fourier convergem pontualmente a $f(x)$ em seus pontos de continuidade e em zero seu ponto de descontinuidade converge a

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = \frac{1}{2} [1 - 1] = 0.$$

Para $N = 100$ a aproximação já é a seguinte

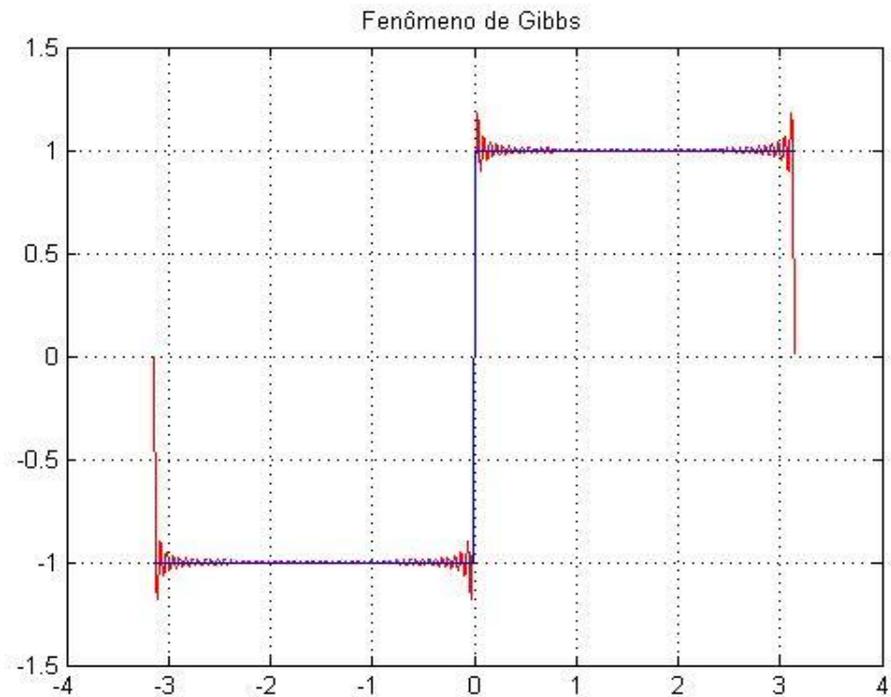


Figura 5

Confirmando que à medida que aumentarmos N teremos uma melhor aproximação da $f(x)$.

Observando a “vizinhança” do ponto de descontinuidade $x = 0$ podemos notar o fenômeno de Gibbs. Nota - se claramente que há uma perturbação nas redondezas, ou seja, a soma parcial de Fourier excede a função no ponto de descontinuidade. Por exemplo, a direita do ponto $x = 0$ se vê como o gráfico das soma parcial de Fourier sobressaem a função salto.

Na figura a seguir aplicamos uma ferramenta do programa MATLAB, podemos observar que aplicando-se um zoom, pode - se notar com mais facilidade este fenômeno.

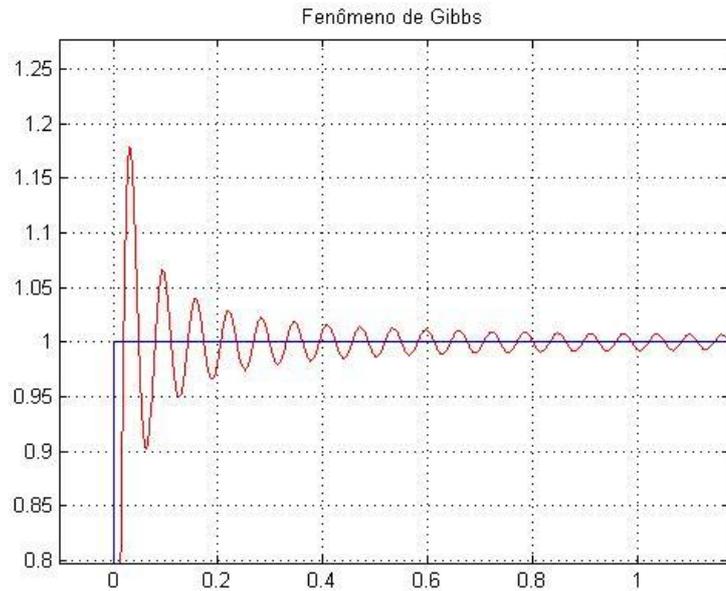


Figura 6

Se analisarmos os primeiros gráficos pode - se notar que o mesmo acontece com os extremos do intervalo $(-\pi, \pi)$. O fenômeno de Gibbs também ocorre nestes pontos, pois como visto a soma parcial de Fourier aproxima - se da função salto que é periódica, de período 2π , e isto implica que nos pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ocorrem casos de descontinuidade.

Pode se demonstrar, para esta função ([10], PP 662- 663) que o máximo da soma parcial aos redores do ponto $x = 0$, pela direita, acontece no ponto $x = \frac{\pi}{2n}$ onde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N \left(\frac{\pi}{2n} \right) = \frac{2}{\pi} Si(\pi) \approx 1,1790. \quad (6.1)$$

Onde Si é uma função expressa por $Si(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt$.

Para aproximar $Si(\pi)$, pode-se utilizar o comando do MATLAB,

$\text{sinint}(\pi) = 1,8519\dots$, já que a primitiva de $\frac{\text{sen } t}{t}$, não pode-se expressar com funções elementares.

O cálculo (6.1) indica que a aproximação das somas parciais de Fourier excedem do valor real da função que é 1, a direita .

Teorema: Seja f uma função real de variável real, periódica de período 2π . Suponhamos f e f' ambas contínuas por seções em $[-\pi, \pi]$. Seja $S_n(x)$ a soma parcial de ordem N de Fourier. Então, em um ponto a de descontinuidade, os gráficos das funções $S_n(x)$ convergem ao segmento vertical (ver figura 7) de comprimento

$$L = \frac{2}{\pi} Si(\pi) |f(a^+) - f(a^-)| \text{ centrado no ponto } \left(a, \frac{1}{2}(f(a^+) + f(a^-)) \right).$$

A razão entre a comprimento do segmento L e o comprimento do salto da descontinuidade ℓ , que é expressa por $\ell = |f(a^+) - f(a^-)|$, se denomina constante de Gibbs e seu valor é

$$\frac{L}{\ell} = \frac{2}{\pi} Si(x)$$

que coincide com o obtido para o caso particular (6.1).

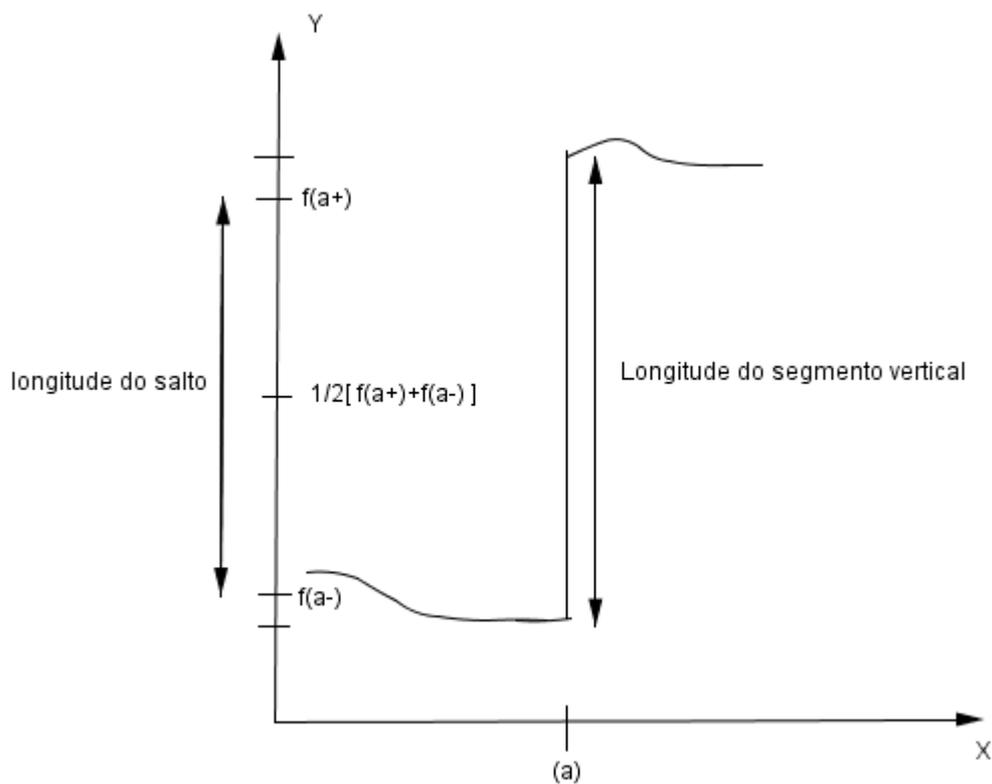


Figura 7

6.2.2 Função 2

Consideramos a função 2 como sendo

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} & \text{se } -\pi < x < 0 \\ -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

A N-ésima soma parcial correspondente a sua série de Fourier é expressa por

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Vamos calcular agora os coeficientes da série de Fourier

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \left(-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} \left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \cos kx \, dx \right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\frac{x}{2} \cos kx \, dx - \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{2} \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} -\frac{x}{2} \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos kx \, dx \right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{x}{2} \cos kx \, dx - \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{2} \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos kx \, dx \right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{x}{2} \cos kx \, dx - 0 + 0 \right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\cos \pi x}{k^2} \right) \right] \Rightarrow a_k = 0$$

inclusive para 0 ,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \left(-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sen} kx \, dx + \int_0^{\pi} \left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sen} kx \, dx \right]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\frac{x}{2} \operatorname{sen} kx \, dx - \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} kx \, dx + \int_0^{\pi} -\frac{x}{2} \operatorname{sen} kx \, dx + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} kx \, dx \right]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{x}{2} \operatorname{sen} kx \, dx - \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} kx \, dx + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} kx \, dx \right]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi(-1)^k}{k} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k} \right) - \frac{\pi}{2} \left(\frac{(-1)^k - 1}{k} \right) \right]$$

$$b_k = \frac{1}{k}$$

Por tanto, para função 2, a soma parcial de Fourier será

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \text{sen}(kx).$$

Analisando graficamente, caso $N = 5$ teremos a seguinte aproximação da função 2 pela soma parcial de Fourier



Figura 8

Agora para $N = 90$

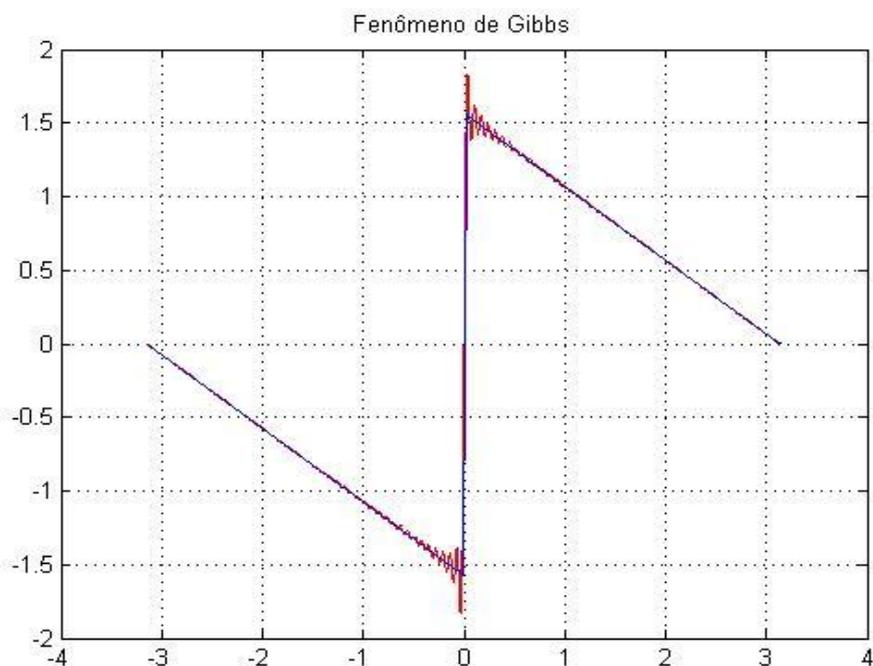


Figura 9

Novamente, podemos notar que à medida que somarmos mais termos obteremos uma aproximação melhor de $f(x)$, e no ponto $x=0$ o ponto de descontinuidade de f observaremos novamente o fenômeno de Gibbs.

Para um estudo analítico do fenômeno de Gibbs neste exemplo devemos estudar o somatório de Fejér, (que são as médias das somas parciais das séries de Fourier). O que mostra como característica principal é que as perturbações são delimitadas pelos gráficos das somas parciais de Fourier e as de Fejér. Elas se encontram nos seus pontos de mínimos no intervalo $]0, \pi[$ e por simetria, em seus máximos no intervalo $]-\pi, 0[$, exceto no caso $x=1$.

7. Programas

Para a realização deste trabalho, em particular os gráficos das somas parciais de Fourier, utilizamos o software matemático Matlab. A seguir estaremos apresentando os códigos dos programas que resultam nos gráficos apresentados no trabalho. Que com algumas modificações podem se adaptar a qualquer função.

7.1 Função 4.5

```
function sompar3(n)

% somas parciais de Fourier da função 3
%f(x)= 0 se -pi<x<0
%      x se 0<x<pi
% n é o número de termos somados

% função 3
x = -pi:0.001:pi;
f=0.*(x<0)+x.*(x>0);

% somas parciais de Fourier
s = zeros(size(x)); for k=1:n
    s=s+(-2/pi*(cos((2*k-1)*x)/(2*k-1)^2))+((-1)^(k+1)*sin(k*x)/k);
end
s = (4/pi)+s-(1/2);

% gráfico das somas parciais da função 3
plot(x, s, 'r', x, f, 'b'),grid;

title('Série de Fourier');
% fim do programa sompar3.n
```

7.1 Função Salto

```
function sompar(n)

% somas parciais de Fourier da função salto
%f(x)= -1 se -pi<x<0
%      1 se 0<x<pi
% n é o número de termos somados
```

```

% função salto
x = -pi:0.001:pi;
f=-1*(x<0)+1.*(x>0);

% somas parciais de Fourier
s = zeros(size(x)); for k=1:n
    s=s+((1-(-1)^k/k)*sin(k*x));
end
s = (2/pi)*s;

% gráfico das somas parciais da função salto
plot(x, s, 'r', x, f, 'b'),grid;

title('Fenômeno de Gibb's');
% fim do programa sompar.n

```

7.1 Função 2

```

function sompar2(n)

%somas parciais de Fourier da função 2
%f(x)=-x/2-pi/2 se -pi<x<0
%      -x/2+pi/2 se 0<x<pi
% n é o número de termos somados

% função 2
x = -pi:0.001:pi;
f=(-x/2-pi/2).*(x<0)+(-x/2+pi/2).*(x>0);

% somas parciais de Fourier
s = zeros(size(x)); for k=1:n
    s=s+(1./k)*sin(k.*x);
end

% gráfico das somas parciais da função 2
plot(x, s, 'r', x, f, 'b'),grid;

title('Fenômeno de Gibbs');
% fim do programa sompar2.n

```

Conclusão

A análise harmônica foi de grande importância na física matemática. Pois como visto durante o trabalho, fenômenos físicos podem ser representados como equações diferenciais, e com a análise harmônica podemos descobrir a solução para estas equações, que aproximam as funções dos fenômenos, muitas vezes não conhecidas.

Os estudos para as resoluções destes problemas levaram Fourier a alegar que todas as funções periódicas, de período $2L$, podem ser aproximadas por uma série de senos e cossenos na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

onde a_0 , a_n e b_n com $n=1,2,3,\dots$, são constantes.

Caso a função seja contínua a série converge pontualmente para a função, ou seja, podemos escrever a seguinte igualdade

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Já quando a função for uma função contínua por secções a igualdade não acontece. A série converge pontualmente aos pontos onde não há descontinuidade, já nos pontos de descontinuidade e extremos a série converge para $\frac{1}{2} \left[\lim_{k \rightarrow x^-} f(k) + \lim_{k \rightarrow x^+} f(k) \right]$, acontecendo uma perturbação “na vizinhança” destes pontos, ou melhor, a série excede o

valor da função. E as somas parciais de Fourier, de ordem N , convergem para o segmento vertical de longitude L , (figura 4),

$$L = \frac{2}{\pi} Si(\pi) |f(a^+) - f(a^-)| \quad \text{centrado no ponto} \quad \left(a, \frac{1}{2}(f(a^+) + f(a^-)) \right).$$

onde a é um ponto de descontinuidade. Este fenômeno é conhecido por fenômeno de Gibbs.

Mesmo que a série não convirja pontualmente para a função, temos uma ótima aproximação para f a medida que somarmos mais termos as somas parciais de Fourier. Tornando assim as séries de Fourier uma ótima ferramenta, já que em alguns problemas não é possível descobrir a função, mas apenas a série que a representa, levando o problema a ser estudado como dependente da mesma ao invés da função.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Djairo Guedes. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, Edgard Blücher, Brasil, 1977.
- [2] B. Richard, **Moderna Introdução as Equações Diferenciais**, traduzido por Alfredo Alves Farias, revisão técnica Roberto Romano, Mc Craw-Hill, São Paulo, Brasil, 1977.
- [3] T.M. Apostol. **Análisis Matemático, Segunda Edição**, Reverte, Barcelona, 1982.
- C.B Boyer. **História de la matemática**, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1987.
- [3] H.S Carslaw. **An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals**, Dover, Nova York, 1952.
- [4] T.H. Fay y P.H. Kloppers. **The Gibb's phenomenon**, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol, 2001.
- [5] T. Myint-U. **Partial Differential Equations of Mathematical Physics**, Elsevier North Holland, Nova York, 1980.
- [7] A. Nachbin. **Some Mathematical Models for Wava Propagation**, Cubo Matemática Educacional, 2000.
- [8] R. Rodríguez-del-Río. **Matemáticas en el Aula de Informática**.
- [9] D.G. Zill. **Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, sexta edição**, México, 1997.
- [10] R.K Nagle e E.B. Saff. **Fundamentos Ecuaciones Diferenciales**, México, 1997.