Universidade Federal de Santa Catarina
Universidade Virtual do Maranhão

Operadores Lineares Homotetia e Rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
Imagem de triângulos por estes operadores

Por

Nemésio Rodrigues da Silva Filho e
Rubens Lopes Netto

Especialização em Matemática – Pólo de Brejo – MA

Orientador: Prof. Dr. Roberto Corrêa da Silva

Brejo
2009

Nemésio Rodrigues da Silva Filho e
Rubens Lopes Netto

Operadores Lineares Homotetia e Rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Imagem de triângulos por estes operadores

Monografia apresentada ao curso de Pós-graduação da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Corrêa da Silva

Chapadinha
2009

A todos aqueles que desejam conhecer um pouco mais sobre OPERADORES LINEARES HOMOTETIA E ROTAÇÃO NO $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$ E IMAGENS DE TRIÂNGULOS POR ESTES OPERADORES como uma possibilidade facilitadora do processo ensino-aprendizagem.

Agradecimentos

Agradecemos:

A Deus, que em seu infinito amor sempre nos amparou nos momentos de dificuldade;

Aos nossos familiares e amigos, pelo apoio incondicional;

À Universidade Federal de Santa Catarina e a Universidade Virtual do Maranhão, pela excelência na formação;

Ao nosso orientador, Professor Doutor Roberto Corrêa da Silva;

A todos os nossos professores, pela segura orientação;

A nossos colegas de curso Geordane Vasconcelos de Aguiar, Joel Castelo Branco e Joubert Jorge Lima Viana, que passaram a ser amigos e não apenas colegas.

Àqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Um conceito é ferramenta quando o interesse é focalizado sobre seu uso para resolver um problema.”

(*R. Douady*)

Resumo

Neste trabalho centramos as atenções nas imagens de vetores e triângulos obtidas pelos operadores homotetia e rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Definimos de forma explícita o operador homotetia em relação a cada eixo tanto no $\mathbb{R}^2$ quanto no $\mathbb{R}^3$ e, ainda, a homotetia independente em cada eixo; o mesmo fizemos com o operador rotação e, também, definimos as imagens de triângulos por estes operadores. Esta determinação levou-nos a estudar um pouco mais dos demais operadores lineares e algumas propriedades dos triângulos. Os resultados foram utilizados na determinação explícita de imagens de vetores e triângulos, sendo estes representados até pelas matrizes canônicas associadas.

Palavras-chave: Operadores Lineares, Homotetia, Rotação, Imagem, Matriz Canônica, Vetor, Triângulo.

Sumário

Introdução

Neste trabalho focalizamos os operadores lineares homotetia e rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e imagem de triângulos por estes operadores.

No capítulo 1 são definidos: Operador Homotetia de razão k (dilatação ou contração), Dilatação ou contração na direção dos eixos e Dilatação independente em cada eixo. Deduzimos de forma explícita os operadores complementando com suas representações gráficas e pelas matrizes canônicas associadas.

No capítulo 2 são definidos: Operador Rotação no $\mathbb{R}^2$ em torno da origem e Operador Rotação no $\mathbb{R}^3$ em torno de um eixo coordenado (do eixo x, eixo y e eixo z) também reforçados por suas representações gráficas e pelas matrizes canônicas associadas.

No capítulo 3 são definidos: Imagem de triângulos pelo Operador Homotetia no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e Imagem de triângulos pelo Operador Rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Demonstramos, ainda, algumas propriedades da congruência e da semelhança de triângulos.

1. Operador Linear Homotetia

Consideraremos neste trabalho conhecidas as definições de espaço vetorial, base, dimensão, transformação e operador linear, como exposto em [1], [2] e [3].

Neste capítulo veremos operador linear homotetia e alguns exemplos gráficos de operadores deste tipo.

1.l. Operador Homotetia de razão k (dilatação ou contração)

1.1.1. Definição: Um **Operador Homotetia de razão k** é um operador linear T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma T(v) = kv onde v$\in \mathbb{R}^n$ e k $\in \mathbb{R}$ e k é fixado. Isto é, cada vetor do $\mathbb{R}^n$ é levado num vetor de mesma direção, mesmo sentido ou sentido oposto e módulo maior ou menor, dependendo do valor de k.

Notação: para vetores do $\mathbb{R}^n$ podemos escrever na forma:

$$\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ & v \mapsto kv \end{aligned}$$

ou, pela matriz de T na base canônica, sendo construída da seguinte forma:

Sejam v = $(x_1, x_2, ..., x_n)$ um vetor do $\mathbb{R}^n$ e B = {(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)} base canônica do $\mathbb{R}^n$, a matriz do operador linear T em relação à base canônica B é :

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T, tem-se:

- T(1, 0, ..., 0) = k(1, 0, ..., 0) = (k, 0,..., 0)
- T(0, 1, ..., 0) = k(0, 1, ..., 0) = (0, k,..., 0)

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

- T(0, 0, ..., 1) = k(0, 0, ..., 1) = (0, 0,..., k)

Assim, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T é:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor v = (x_1, x_2, ..., x_n) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$, teremos:

- v_B = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, ..., 0) + ... + x_n(0, 0, ..., 1)

Daí, a matriz da combinação linear do vetor v = (x_1, x_2, ..., x_n) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ é:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Finalmente, a matriz da aplicação do vetor v = (x_1, x_2, ..., x_n) ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor v = (x_1, x_2, ..., x_n) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$:

$[T(v)]_B = [T]_B \cdot [v]_B$, isto é,

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Podemos caracterizar algumas situações especiais para homotetia como segue:

1.1.2. Se $|k| > 1$, o operador faz com que o vetor sofra uma dilatação;

1.1.3. Exemplo:

$$\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & v \mapsto 4v \end{aligned}$$

ou $T(x, y) = 4(x, y) = (4x, 4y)$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T, tem-se:

- T(1, 0) = 4(1, 0) = (4, 0)
- T(0, 1) = 4(0, 1) = (0, 4)

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos:

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ é:

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y) ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor (x, y) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$:

$$[T(x, y)] = [T] \cdot [(x, y)] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

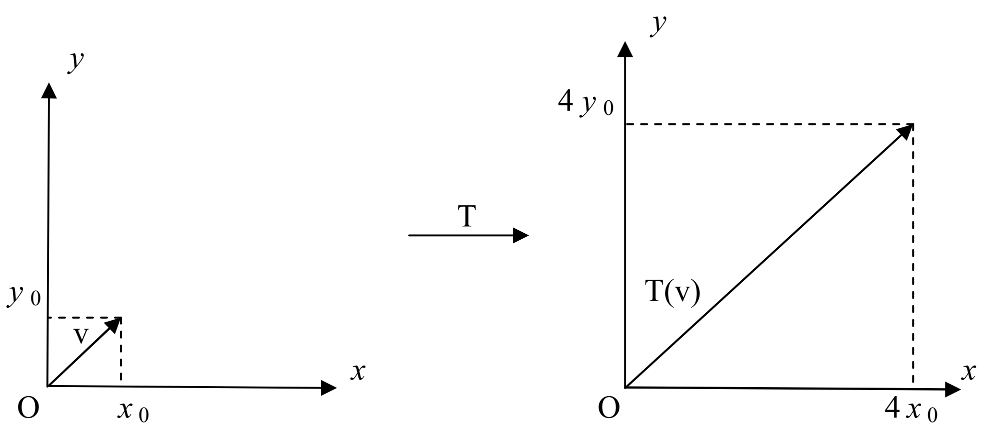


Figura 1.1.3

1.1.4. Exemplo:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto 3v \end{aligned}$$

ou $T(x, y, z) = 3(x, y, z) = (3x, 3y, 3z)$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T, tem-se:

- $T(1, 0, 0) = 3(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = 3(0, 1, 0) = (0, 3, 0)$
- $T(0, 0, 1) = 3(0, 0, 1) = (0, 0, 3)$

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y, z) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$, teremos:

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor $(x$, y, $z)$ em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ é:

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y, z) ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$[T(x, y, z)] = [T] \,.\, [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

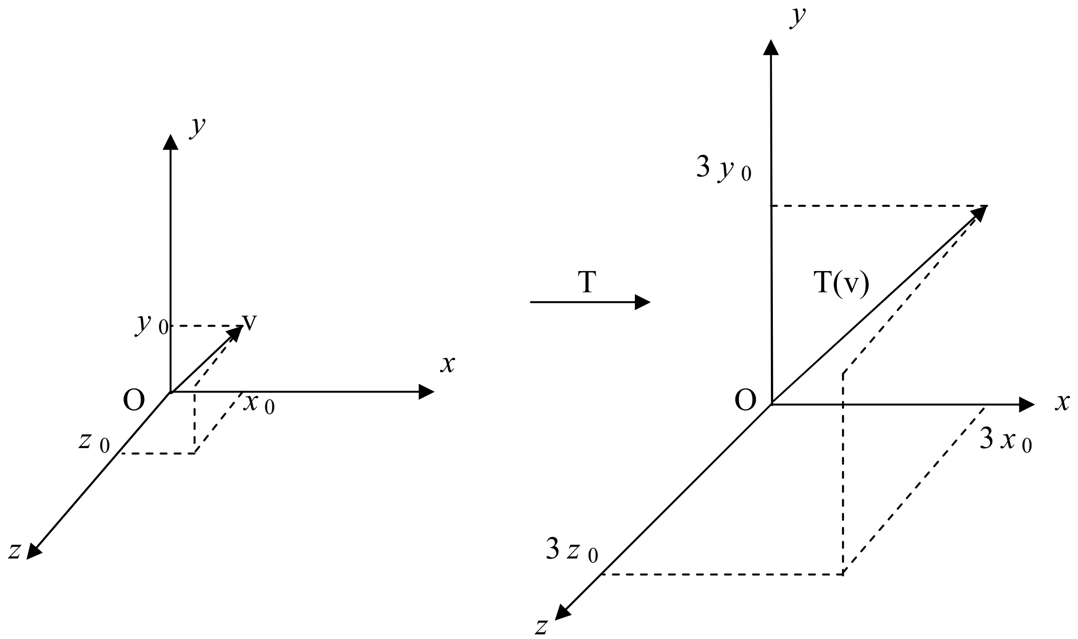


Figura 1.1.4

1.1.5. Se $|k| < 1$, o operador faz com que o vetor sofra uma contração;

1.1.6. Exemplo:

$$\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & v \mapsto \frac{1}{4}v \end{aligned}$$

ou, $T(x, y) = \frac{1}{4}(x,\ y) = (\frac{1}{4}x,\ \frac{1}{4}y)$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0) = \frac{1}{4}\ (1, 0) = (\frac{1}{4}, 0)$
- $T(0, 1) = \frac{1}{4}\ (0, 1) = (0, \frac{1}{4})$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim,

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y)] = [T] \, . \, [(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

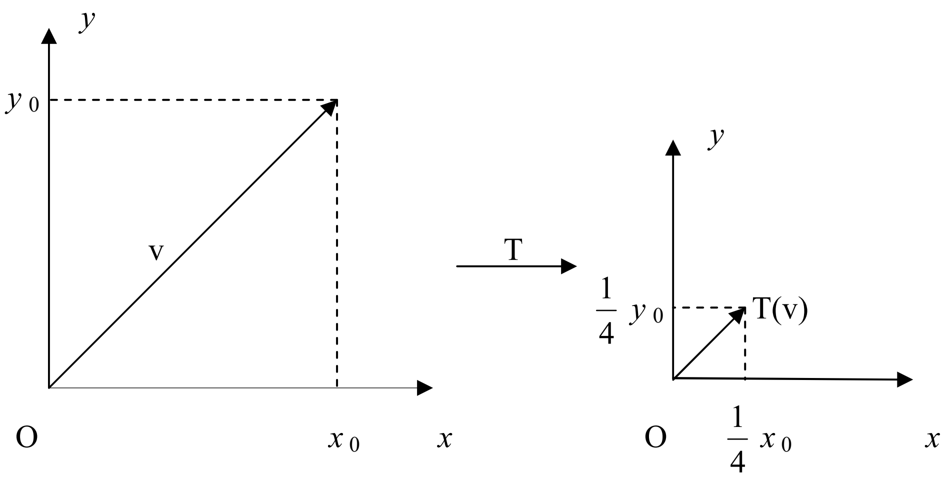


Figura 1.1.6

1.1.7. Exemplo:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$v \mapsto \frac{1}{3}v$$

ou, $T(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}z)$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0, 0) = \frac{1}{3}(1, 0, 0) = (\frac{1}{3}, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = \frac{1}{3}(0, \frac{1}{3}, 0) = (0, \frac{1}{3}, 0)$
- $T(0, 0, 1) = \frac{1}{3}(0, 0, \frac{1}{3}) = (0, 0, \frac{1}{3})$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y, z)] = [T] \,.\, [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

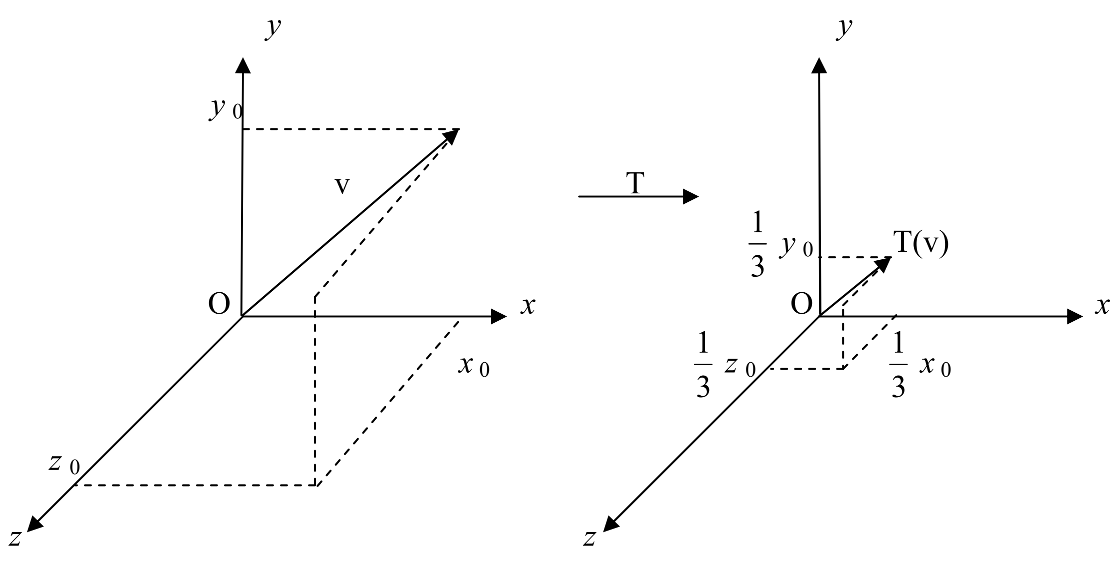


Figura 1.1.7

1.1.8. Se k = 1, o operador resulta na transformação identidade I;

1.1.9. Exemplo:

$$\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & v \mapsto 1v \end{aligned}$$

ou $T(x, y) = 1(x, y) = (x, y)$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0) = 1(1, 0) = (1, 0)$
- $T(0, 1) = 1(0, 1) = (0, 1)$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim,

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y)] = [T] \cdot [(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

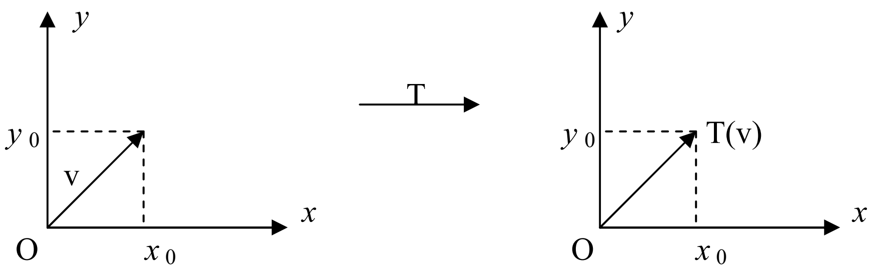


Figura 1.1.9

1.1.10. Exemplo:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$v \mapsto 1v$$

ou $T(x, y, z) = 1(x, y, z) = (x, y, z)$

ou, pela matriz de T na base canônica:

- $T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = 1(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$
- $T(0, 0, 1) = 1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y, z)] = [T] \,.\, [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

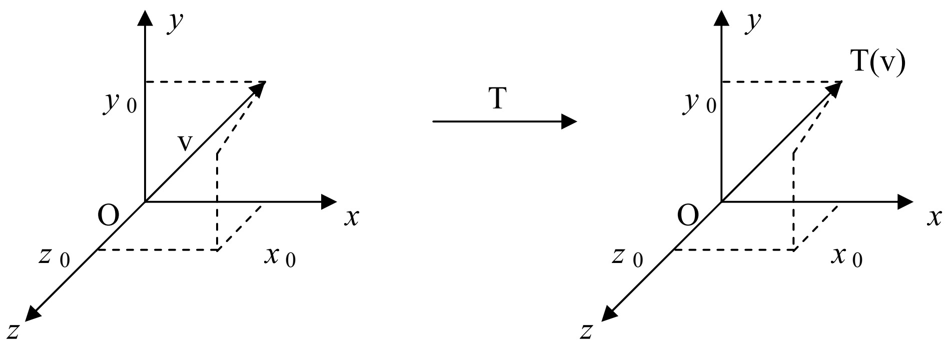


Figura 1.1.10

1.1.11. Se k < 0, o operador faz com que o vetor troque de sentido.

1.1.12. Exemplo:

$$\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & v \mapsto -1v \end{aligned}$$

ou $T(x, y) = -1(x, y) = (-x, -y)$

ou, pela matriz de T na base canônica:

- $T(1, 0) = -1(1, 0) = (-1, 0)$
- $T(0, 1) = -1(0, 1) = (0, -1)$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim,

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y)] = [T] \cdot [(x, y)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

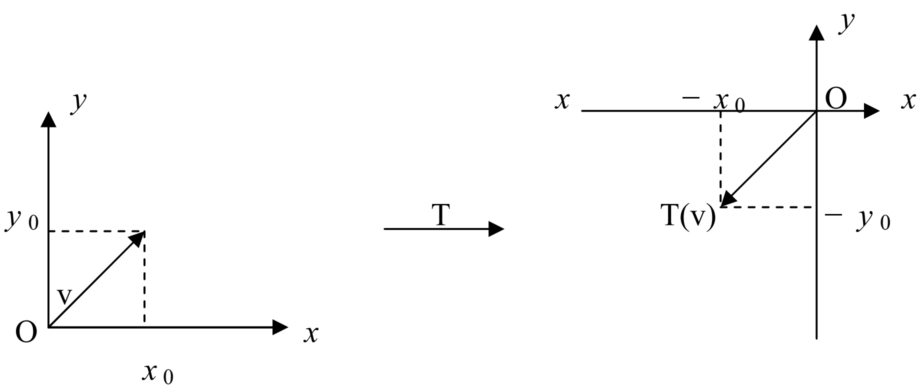


Figura 1.1.12

1.1.13. Exemplo:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$v \mapsto -2v$$

ou $T(x, y, z) = -2(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z)$

ou, pela matriz de T na base canônica:

- $T(1, 0, 0) = -2(1, 0, 0) = (-2, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = -2(0, 1, 0) = (0, -2, 0)$
- $T(0, 0, 1) = -2(0, 0, 1) = (0, 0, -2)$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y, z)] = [T] \cdot [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

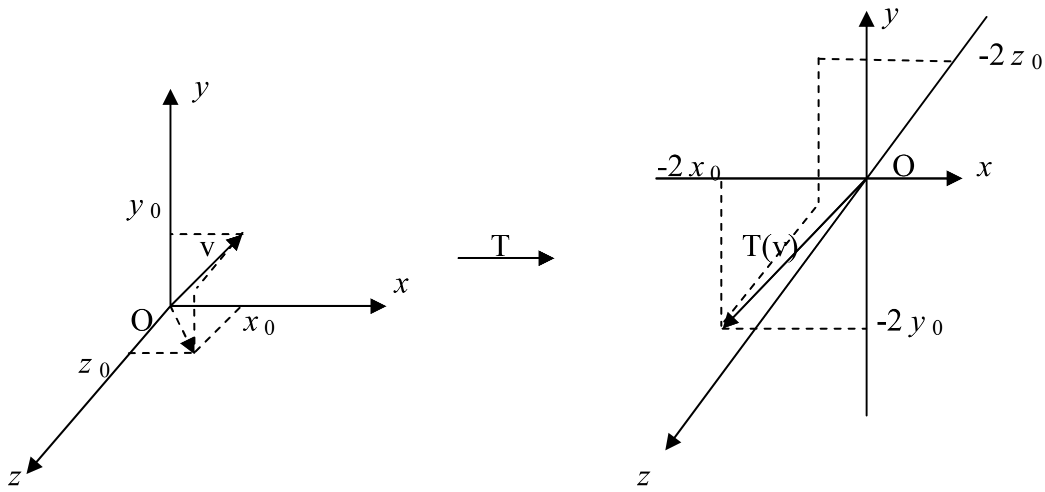


Figura 1.1.13

1.2. Dilatação ou contração na direção dos eixos.

1.2.1. Definição: Dilatação ou contração na direção dos eixos é um operador linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ da forma

$T(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = (x_1, x_2, x_3, ..., \alpha x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, fixado,

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T, tem-se:

- $T(1, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 0) = 1(1, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 0) = (1, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 0)$
- $T(0, 1, 0, ..., 0, 0, ..., 0) = 1(0, 1, 0, ..., 0, 0, ..., 0) = (0, 1, 0, ..., 0, 0, ..., 0)$
- $T(0, 0, 1, ..., 0, 0, ..., 0) = 1(0, 0, 1, ..., 0, 0, ..., 0) = (0, 0, 1, ..., 0, 0, ..., 0)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
- $T(0, 0, 0, ..., 1, 0, ..., 0) = \alpha(0, 0, 0, ..., 1, 0, ..., 0) = (0, 0, 0, ..., \alpha, 0, ..., 0)$
- $T(0, 0, 0, ..., 0, 1, ..., 0) = 1(0, 0, 0, ..., 0, 1, ..., 0) = (0, 0, 0, ..., 0, 1, ..., 0)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
- $T(0, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 1) = 1(0, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 1) = (0, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 1)$

Assim, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor $(x_1, x_2, x_3, ..., \alpha x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$, teremos:

- $(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = x_1 (1, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 0) + ...$
  $... + x_2 (0, 1, 0, ..., 0, 0, ..., 0) + x_3 (0, 0, 1, ..., 0, 0, ..., 0) + ...$
  $... + x_k(0, 0, 0, ..., 1, 0, ..., 0) + x_{k+1}(0, 0, 0, ..., 0, 1, ..., 0) + ...$
  $... + x_n(0, 0, 0, ..., 0, 0, ..., 1) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$

Daí, a matriz da combinação linear do vetor $(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ é:

$$[(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_k,\ x_{k+1},\ ...,\ x_n)] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_k,\ x_{k+1},\ ...,\ x_n)$ ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_k,\ x_{k+1},\ ...,\ x_n)$ em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$:

$$[T(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_k,\ x_{k+1},\ ...,\ x_n)] = [T]\ .\ [(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_k,\ x_{k+1},\ ...,\ x_n)] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Observemos que:

- se $\alpha > 1$, o operador faz com que o vetor sofra uma dilatação;
- se $0 < \alpha < 1$, o operador faz com que o vetor sofra uma contração.

1.2.2. Exemplo: Dilatação na direção do eixo dos x, no $\mathbb{R}^2$:

$$T:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (3x,\ y)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T, tem-se:

- T(1, 0) = 3(1, 0) = (3, 0)
- T(0, 1) = 1(0, 1) = (0, 1)

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos:

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ é:

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y) ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor (x, y) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$:

$$[T(x, y)] = [T] \, . \, [(x, y)] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

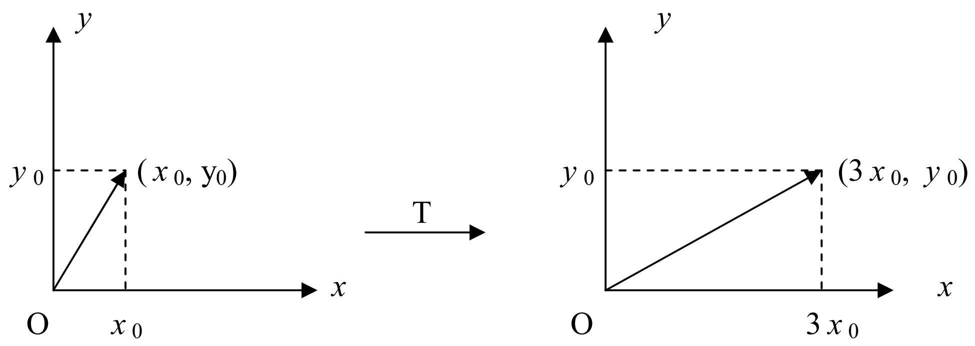


Figura 1.2.2

1.2.3. Exemplo: Contração na direção do eixo dos x, no $\mathbb{R}^2$:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (\frac{1}{2}x, \ y)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0) = \frac{1}{2}(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$
- $T(0, 1) = 1(0, 1) = (0, 1)$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim,

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y)] = [T] \,.\, [(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

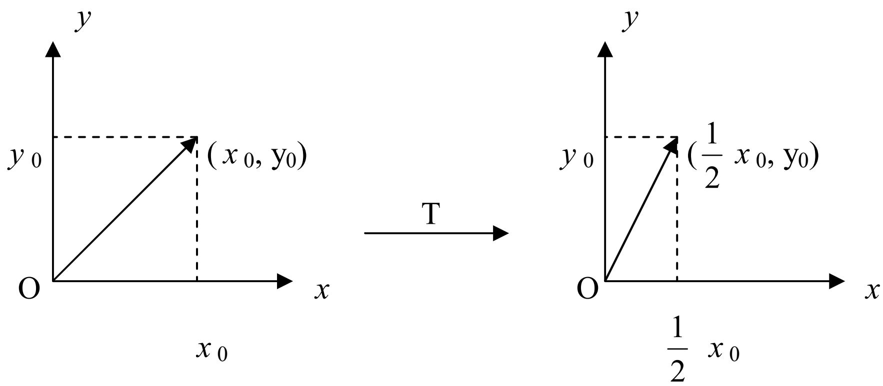


Figura 1.2.3

1.2.4. Exemplo: Dilatação na direção do eixo dos x, no $\mathbb{R}^3$:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (2x,\ y,\ z)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T, tem-se:

- T(1, 0, 0) = 2(1, 0, 0) = (2, 0, 0)
- T(0, 1, 0) = 1(0, 1, 0) = (0, 1, 0)
- T(0, 0, 1) = 1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T é:

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y, z) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$, teremos:

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ é:

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y, z) ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$[\mathrm{T}(x, y, z)] = [\mathrm{T}] \,.\, [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

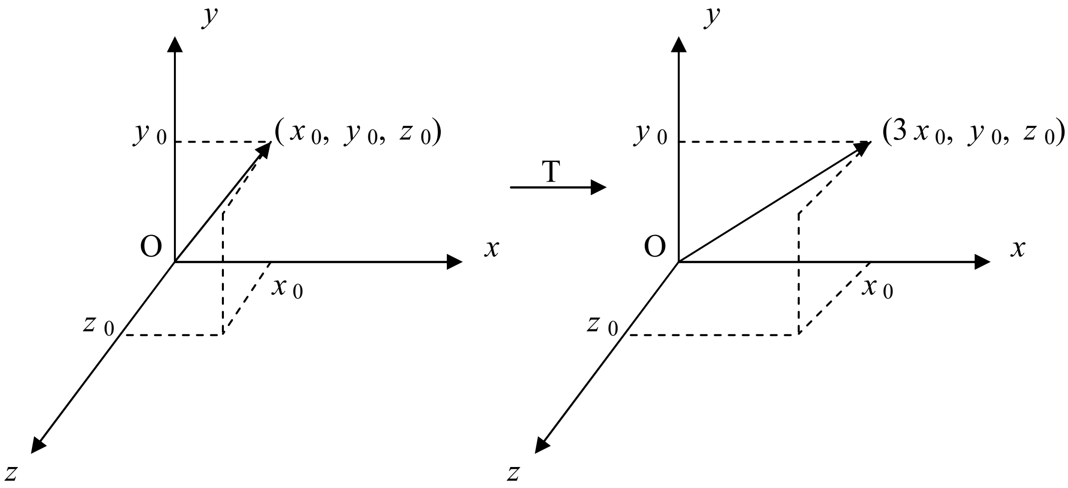


Figura 1.2.4

1.2.5. Exemplo: Contração na direção do eixo dos x, no $\mathbb{R}^3$:

T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (\frac{1}{3}x,\ y,\ z)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0, 0) = \frac{1}{3}\ (1, 0, 0) = (\frac{1}{3}, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = 1(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$
- $T(0, 0, 1) = 1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[\mathrm{T}(x, y, z)] = [\mathrm{T}] \, . \, [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

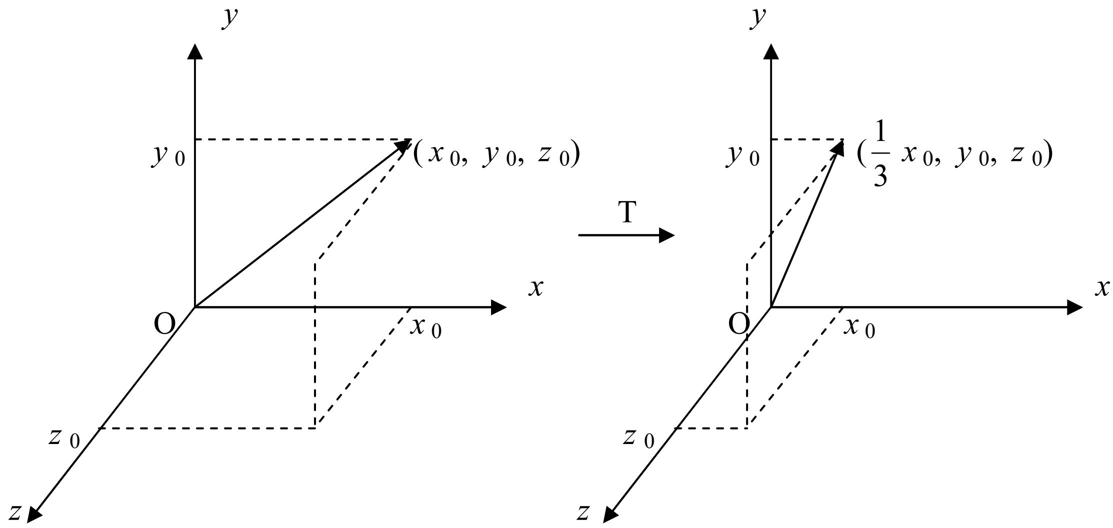


Figura 1.2.5

1.2.6. Exemplo: Dilatação na direção do eixo dos y, no $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x, 2y)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- T(1, 0) = 1(1, 0) = (1, 0)
- T(0, 1) = 2(0, 1) = (0, 2)

Então,

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim,

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y)] = [T] \,.\, [(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

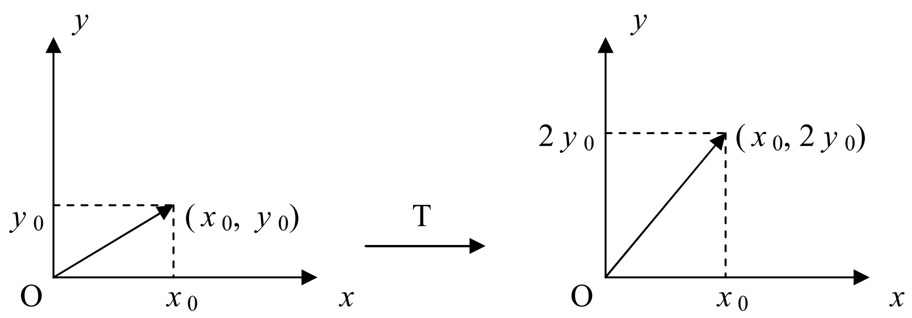


Figura 1.2.6

1.2.7. Exemplo: Contração na direção do eixo dos y, no $\mathbb{R}^2$:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x, \frac{1}{4} y)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0) = 1(1, 0) = (1, 0)$
- $T(0, 1) = \frac{1}{4}(0, 1) = (0, \frac{1}{4})$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim,

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[\mathrm{T}(x, y)] = [\mathrm{T}] \cdot [(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

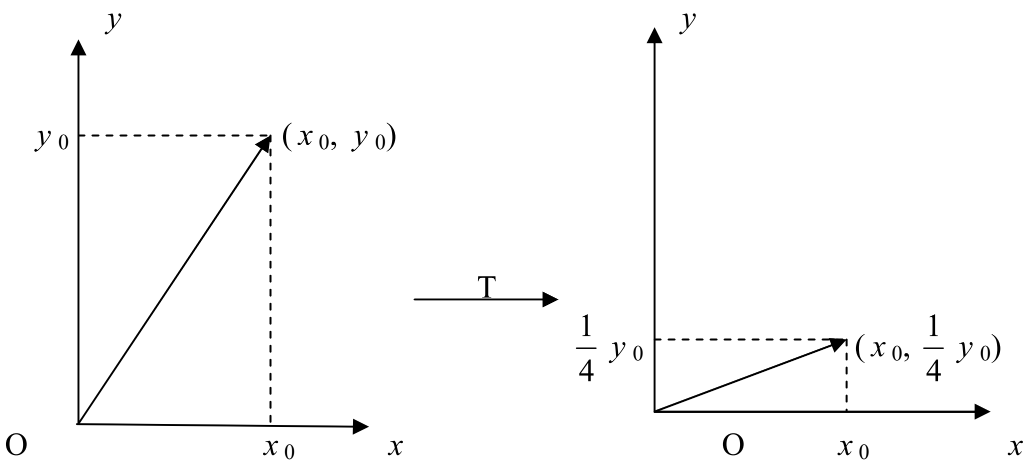


Figura 1.2.7

1.2.8. Exemplo: Dilatação na direção do eixo dos y, no $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\colon\ & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x, 4y, z) \end{aligned}$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) = (1, 0, 0)
- T(0, 1, 0) = 4(0, 1, 0) = (0, 4, 0)
- T(0, 0, 1) = 1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)

Então,

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y, z)] = [T] \cdot [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

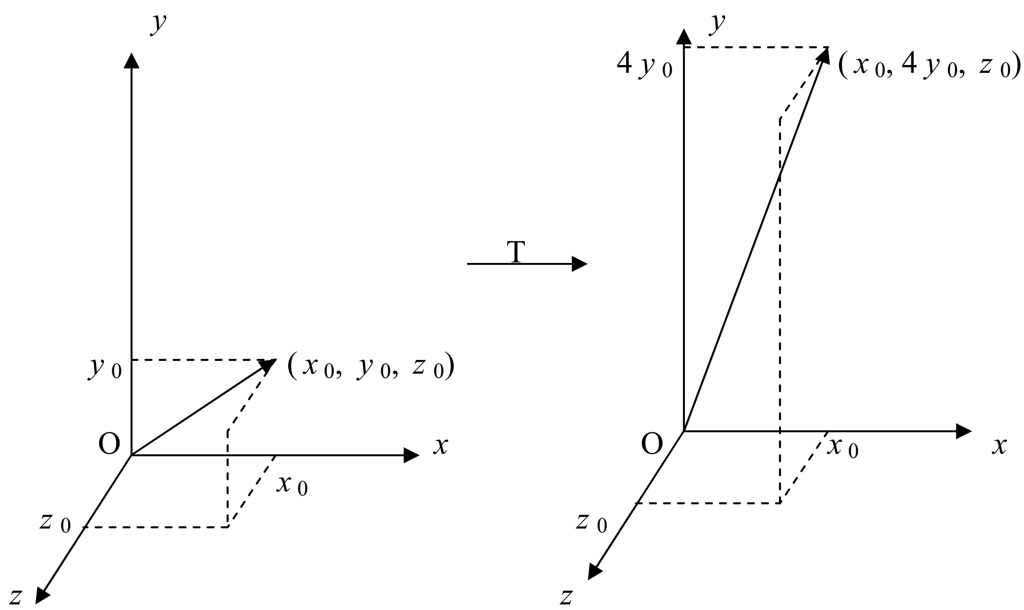


Figura 1.2.8

1.2.9. Exemplo: Contração na direção do eixo dos y, no $\mathbb{R}^3$:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \mapsto (x, \frac{1}{2} y, z)$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = \frac{1}{2} (0, 1, 0) = (0, \frac{1}{2}, 0)$
- $T(0, 0, 1) = 1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$

Então,

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[\mathrm{T}(x, y, z)] = [\mathrm{T}] \,.\, [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

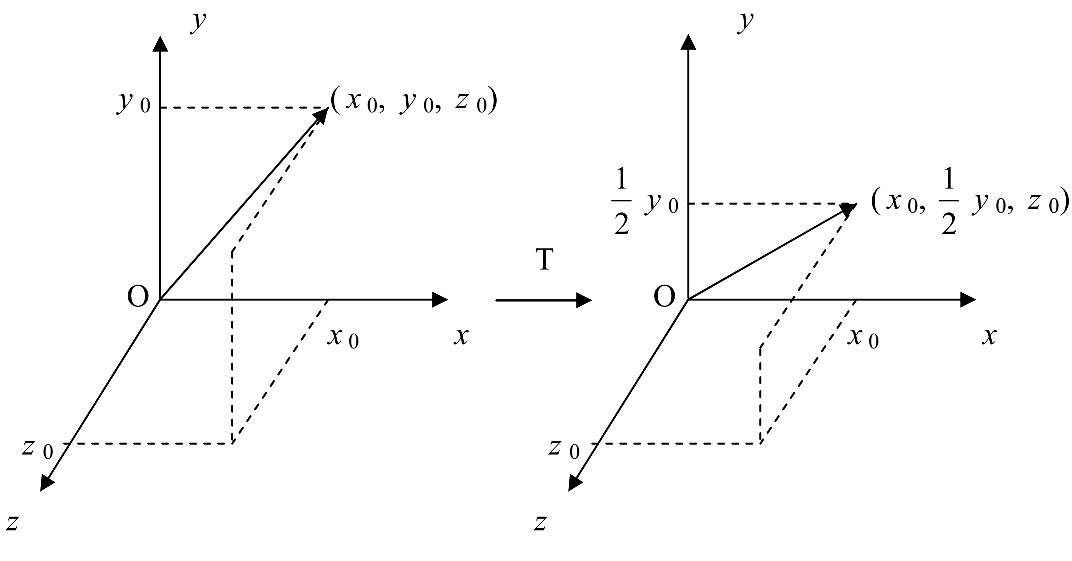


Figura 1.2.9

1.2.10. Exemplo: Dilatação na direção do eixo dos z :

$$\mathrm{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x,\ y,\ 3z)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) = (1, 0, 0)
- T(0, 1, 0) = 1(0, 1, 0) = (0, 1, 0)
- T(0, 0, 1) = 3(0, 0, 1) = (0, 0, 3)

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y, z)] = [T] \cdot [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

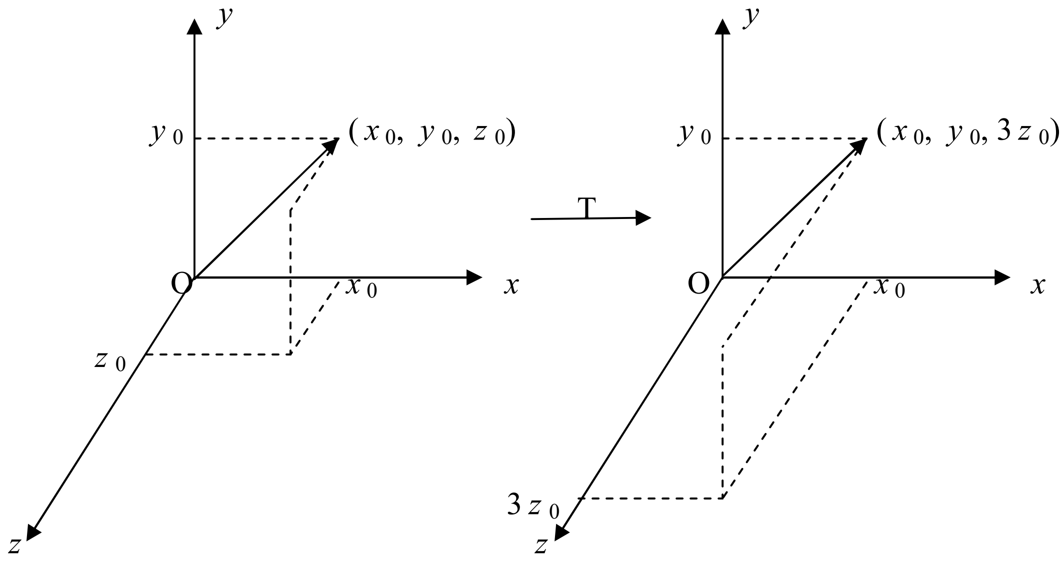


Figura 1.2.10

1.2.11. Exemplo: Contração na direção do eixo dos z:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x,\ y,\ \frac{1}{3} z)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = 1(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$
- $T(0, 0, 1) = \frac{1}{3}\ (0, 0, 1) = (0, 0, \frac{1}{3})$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y, z)] = [T] \cdot [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

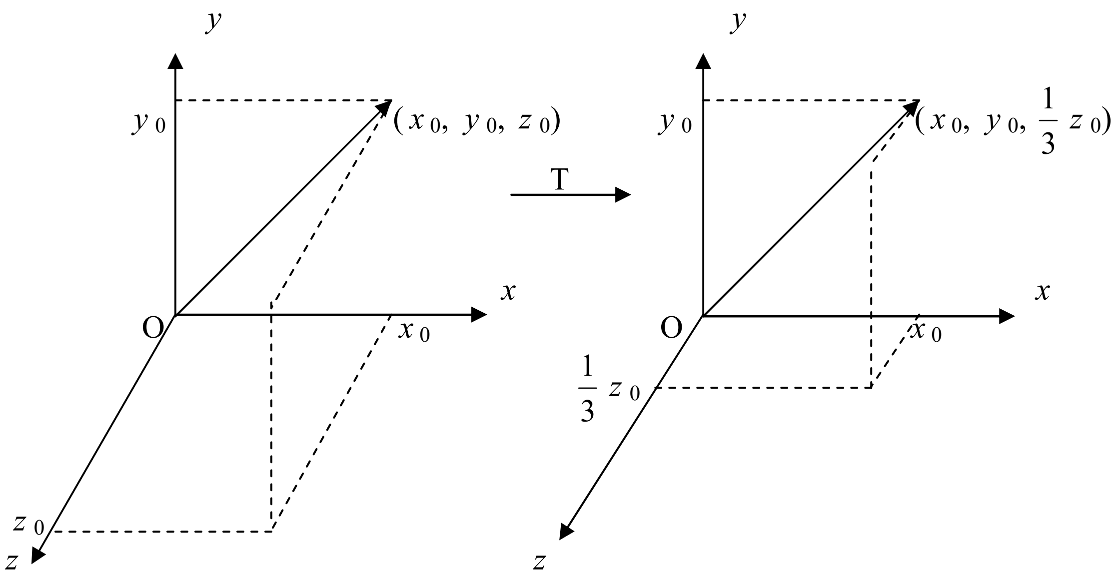


Figura 1.2.11

1.3. Homotetia independente em cada eixo.

1.3.1. Definição: Homotetia independente em cada eixo é um operador linear T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma

$T(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, ..., \alpha_n x_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, fixados,

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T, tem-se:

- $T(1, 0, 0, ..., 0) = \alpha_1 (1, 0, 0, ..., 0) = (\alpha_1, 0, 0, ..., 0)$
- $T(0, 1, 0, ..., 0) = \alpha_2 (0, 1, 0, ..., 0) = (0, \alpha_2, 0, ..., 0)$
- $T(0, 0, 1, ..., 0) = \alpha_3 (0, 0, 1, ..., 0) = (0, 0, \alpha_3, ..., 0)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

- $T(0, 0, 0, ..., 1) = \alpha_n (0, 0, 0, ..., 1) = (0, 0, 0, ..., \alpha_n)$

Assim, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T é:

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$, teremos:

- $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = x_1 (1, 0, 0, ..., 0) + x_2 (0, 1, 0, ..., 0) + x_3 (0, 0, 1, ..., 0) + ...$
  $... + x_n(0, 0, 0, ..., 1) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$

Daí, a matriz da combinação linear do vetor $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ é:

$$[(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$:

$$[T(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)] = [T].[(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)] =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1.3.2. Dilatação independente em cada eixo no $\mathbb{R}^2$:

1.3.3. Exemplo: T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto (2x, 3y)$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T, tem-se:

- $T(1, 0) = 2(1, 0) = (2, 0)$
- $T(0, 1) = 3(0, 1) = (0, 3)$

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T é:

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos:

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ é:

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y) ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor (x, y) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$:

$$[\mathrm{T}(x, y)] = [\mathrm{T}] \, . \, [(x, y)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

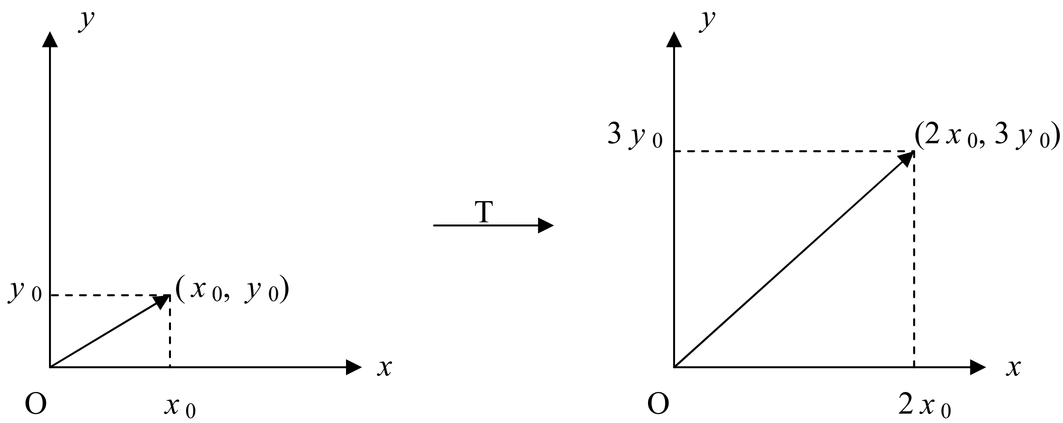


Figura 1.3.3

1.3.4. Contração independente em cada eixo no $\mathbb{R}^2$:

1.3.5. Exemplo: T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (\frac{1}{4}x, \frac{1}{3}y)$$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

- $T(1, 0) = \frac{1}{4}(1, 0) = (\frac{1}{4}, 0)$
- $T(0, 1) = \frac{1}{3}(0, 1) = (0, \frac{1}{3})$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim,

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y)] = [T] \,.\, [(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

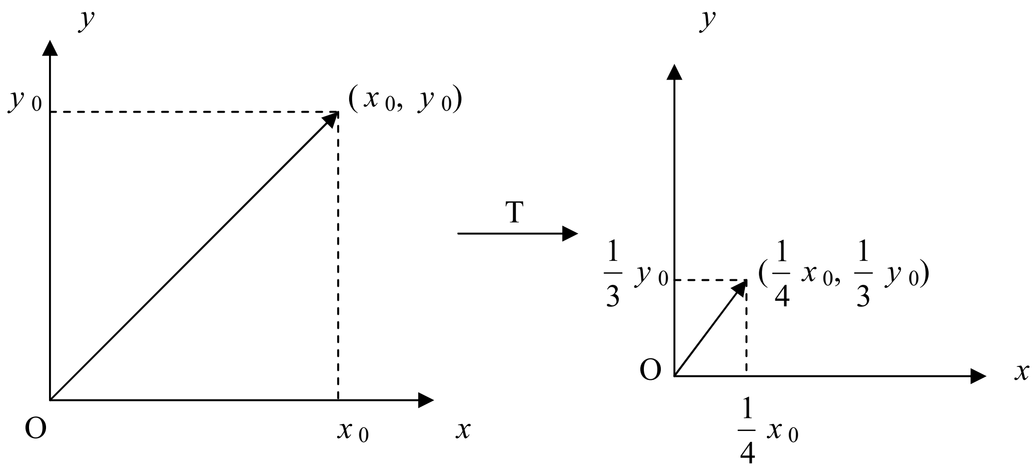


Figura 1.3.5

1.3.6. Dilatação independente em cada eixo no $\mathbb{R}^3$:

1.3.7. Exemplo: T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto (2x, 3y, 4z)$

ou, pela matriz de T em relação à base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T, tem-se:

- T(1, 0, 0) = 2(1, 0, 0) = (2, 0, 0)
- T(0, 1, 0) = 3(0, 1, 0) = (0, 3, 0)
- T(0, 0, 1) = 4(0, 0, 1) = (0, 0, 4)

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y, z) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$, teremos:

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ é:

$$[(\mathrm{x}, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y, z) ao operador T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T pela matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$[T(x, y, z)] = [T] \,.\, [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

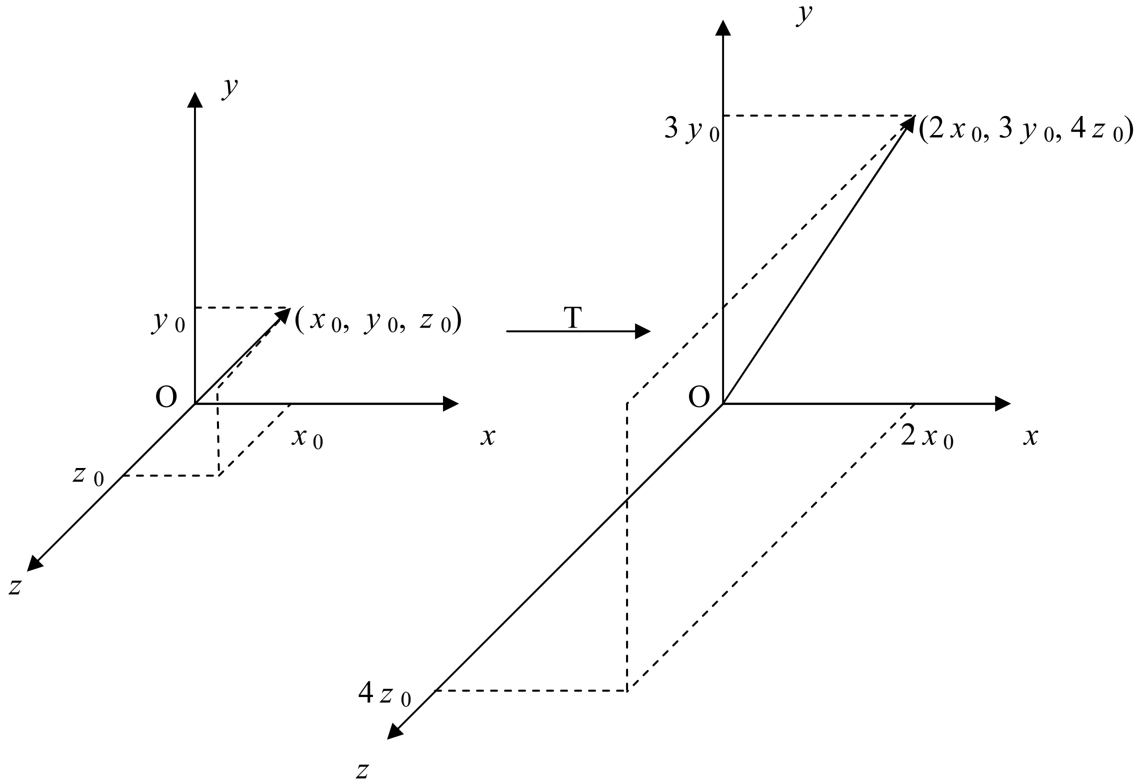


Figura 1.3.7

1.3.8. Contração independente em cada eixo no $\mathbb{R}^3$:

1.3.9. Exemplo: T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (\frac{1}{2}x, \frac{1}{3}y, \frac{1}{4}z)$$

ou, pela matriz de T na base canônica:

- $T(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 0, 0) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$
- $T(0, 1, 0) = \frac{1}{3}(0, 1, 0) = (0, \frac{1}{3}, 0)$
- $T(0, 0, 1) = \frac{1}{4}(0, 0, 1) = (0, 0, \frac{1}{4})$

Então,

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim,

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T(x, y, z)] = [T] \,.\, [(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

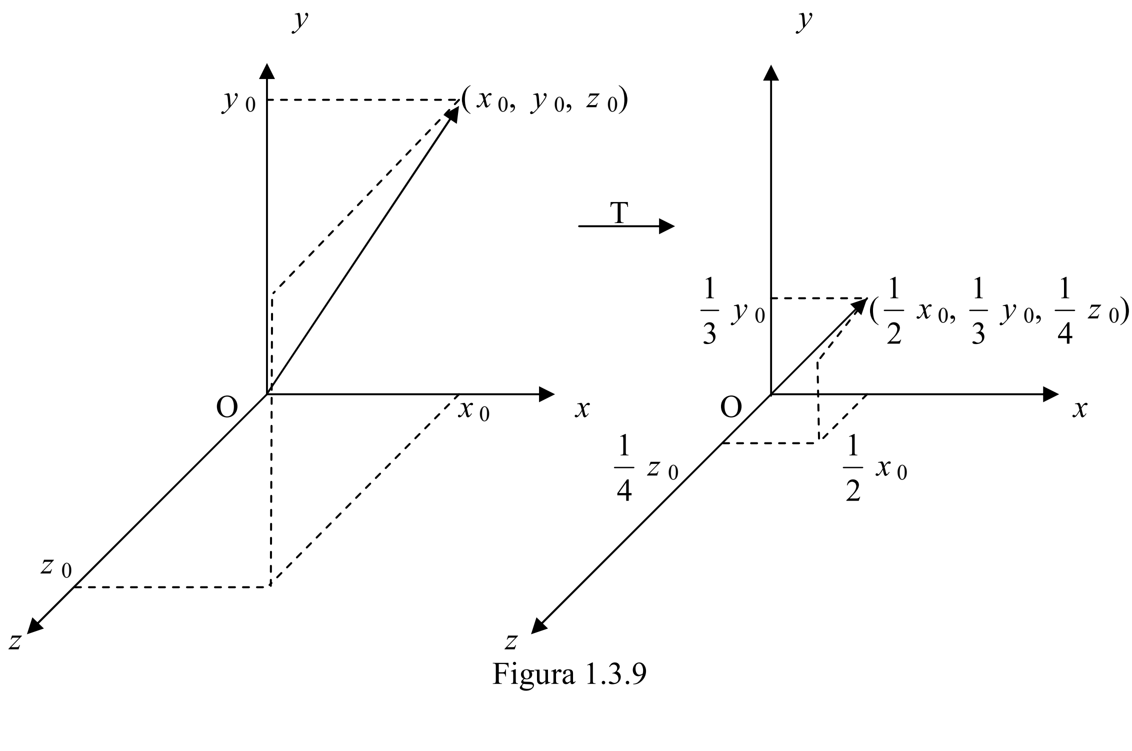


Figura 1.3.9

2. Operador Linear Rotação

Neste capítulo definiremos operador rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e daremos alguns exemplos.

2.1. Operador Rotação no $\mathbb{R}^2$ em torno da origem

2.1.1. Definição: **Um Operador Rotação no plano em torno da origem** é um operador linear $T_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da forma $T_\theta\ (x, y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$, θ real e fixado, que faz cada vetor descrever um ângulo θ no sentido anti-horário.

Esse operador também pode ser representado por sua matriz na base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T_θ, tem-se:

- $T_\theta(1, 0) = (1.\cos\theta - 0.\text{sen}\,\theta,\ 1.\text{sen}\,\theta + 0.\cos\theta) = (\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta)$
- $T_\theta(0, 1) = (0.\cos\theta - 1.\text{sen}\,\theta,\ 0.\text{sen}\,\theta + 1.\cos\theta) = (-\text{sen}\,\theta,\ \cos\theta)$

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T_θ é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos:

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ é:

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y) ao operador T_θ em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$ ao operador T_θ pela matriz da combinação linear do vetor (x, y) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$:

$$[T_\theta(x,\ y)] = [T_\theta].[(x,\ y)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.1.2. Justificativa de que T_θ realmente realiza uma rotação de vetores geométricos no plano de ângulo θ no sentido anti-horário.

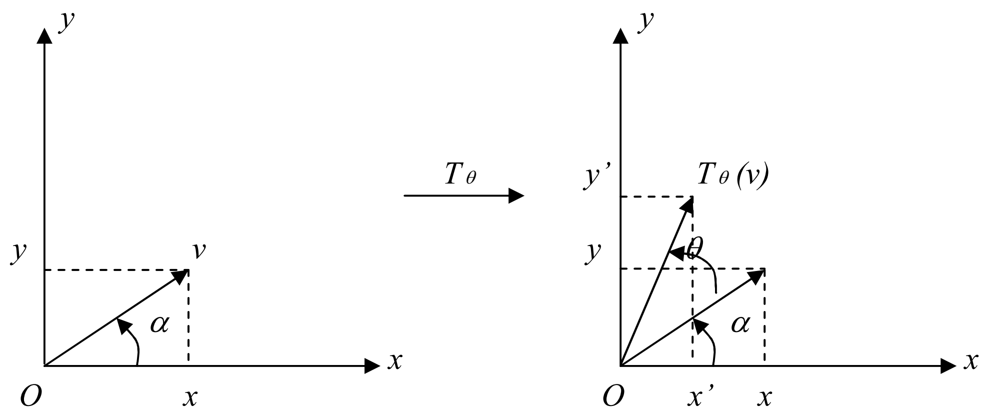


Figura 2.1.2

x' = r cos $(\alpha + \theta) = r \cos\alpha \cos\theta - r\, sen\,\alpha\, sen\,\theta$, *sendo r o módulo de v.*
Mas r $\cos\alpha = x$ *e r* $sen\,\alpha = y$.
Então, $x' = x \cos\theta - y\, sen\,\theta$.
Analogamente, $y' = r\, sen\,(\alpha + \theta) = r\,(sen\,\alpha \cos\theta + \cos\alpha\, sen\,\theta) =$
$= x\, sen\,\theta + y \cos\theta$.
Logo, sendo feita a rotação as coordenadas são dadas por $x' = r \cos(\alpha + \theta)$ *e* $y' = r\, sen\,(\alpha + \theta)$.
Essas contas mostram que x' e y' são as coordenadas polares do vetor (x, y) rotacionado.

Assim, $T_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y\, sen\,\theta,\ x\, sen\,\theta + y \cos\theta)$ *ou por sua matriz na base canônica:*

$$[T_\theta(x, y)] = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,sen\theta \\ x\,sen\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

([2], pg. 149)

2.1.3. Exemplo: Consideremos o caso particular onde $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ para determinar a imagem do vetor v = (x, y). Neste caso, senθ = 1 e cosθ = 0.

- $T_{\frac{\pi}{2}}(1, 0) = (1.\cos\frac{\pi}{2} - 0.\text{sen}\frac{\pi}{2}, 1.\text{sen}\frac{\pi}{2} + 0.\cos\frac{\pi}{2}) = (\cos\frac{\pi}{2}, \text{sen}\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$

- $T_{\frac{\pi}{2}}(0, 1) = (0.\cos\frac{\pi}{2} - 1.\text{sen}\frac{\pi}{2}, 0.\text{sen}\frac{\pi}{2} + 1.\cos\frac{\pi}{2}) = (-\text{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$

Então,

$$\left[T_{\frac{\pi}{2}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$

Assim,

$$[(x, y)] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T_{\frac{\pi}{2}}(x, y)] = \left[T_{\frac{\pi}{2}}\right].[(x,\ y)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

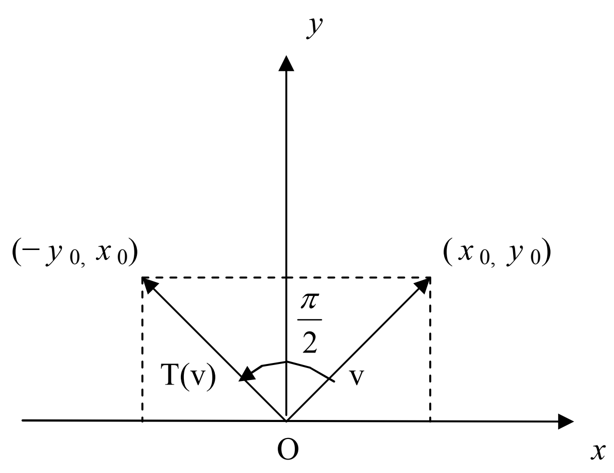


Figura 2.1.3

2.1.4. Exemplo: Determinar a imagem do vetor v = (2, 3) pela rotação de $\theta = \pi$.

Resolução:

- T_π (1, 0) = (1.cos π − 0.sen π , 1.sen π + 0.cos π)= (cos π , sen π) = (−1, 0)
- T_π (0, 1) = (0.cos π − 1.sen π , 0.sen π + 1.cos π)= (− sen π , cos π) = (0, −1)

Então,

$$[T_\pi] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1) = (2, 3)

Assim,

$$[(2, 3)] = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T_\pi\ (2, 3)] = [T_\pi].[(2, 3)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

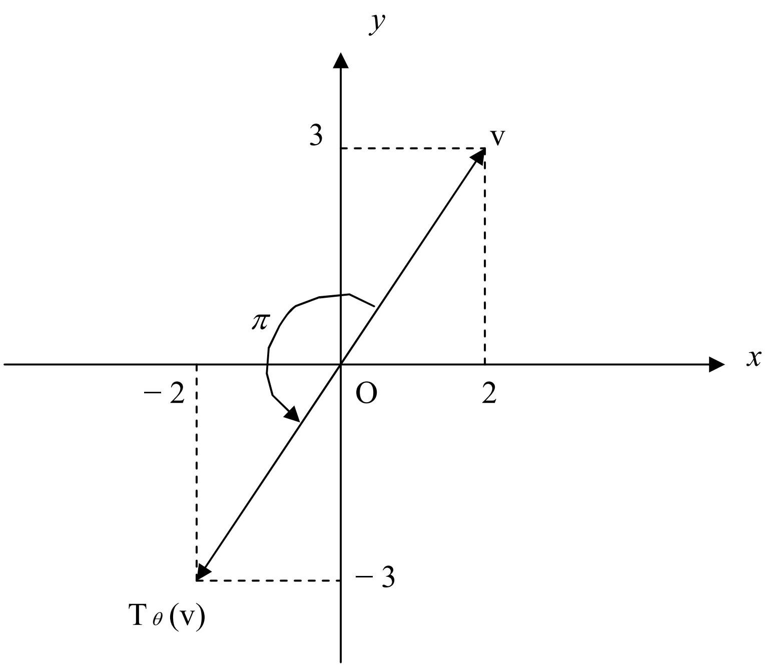


Figura 2.1.4

2.2. Operador Rotação no $\mathbb{R}^3$ em torno de um eixo coordenado

2.2.1. Operador Rotação no $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo dos x

2.2.2. Definição: **Um Operador Rotação no espaço em torno do eixo dos** x é um operador linear $T_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma

$T_\theta(x, y, z) = (x, y\cos\theta - z\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta)$, θ real e fixado.

Esse operador também pode ser representado por sua matriz na base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ, tem-se:

- $T_\theta(1, 0, 0) = (1, 0.\cos\theta - 0.\mathrm{sen}\,\theta, 0.\mathrm{sen}\,\theta + 0.\cos\theta) = (1, 0, 0)$
- $T_\theta(0, 1, 0) = (0, 1.\cos\theta - 0.\mathrm{sen}\,\theta, 1.\mathrm{sen}\,\theta + 0.\cos\theta) = (0, \cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$
- $T_\theta(0, 0, 1) = (0, 0.\cos\theta - 1.\mathrm{sen}\,\theta, 0.\mathrm{sen}\,\theta + 1.\cos\theta) = (0, -\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta)$

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y, z) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$, teremos:

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ é:

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y, z) ao operador T_θ em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ pela matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$[T_\theta(x,\ y,\ z)] = [T_\theta].[(x,\ y,\ z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

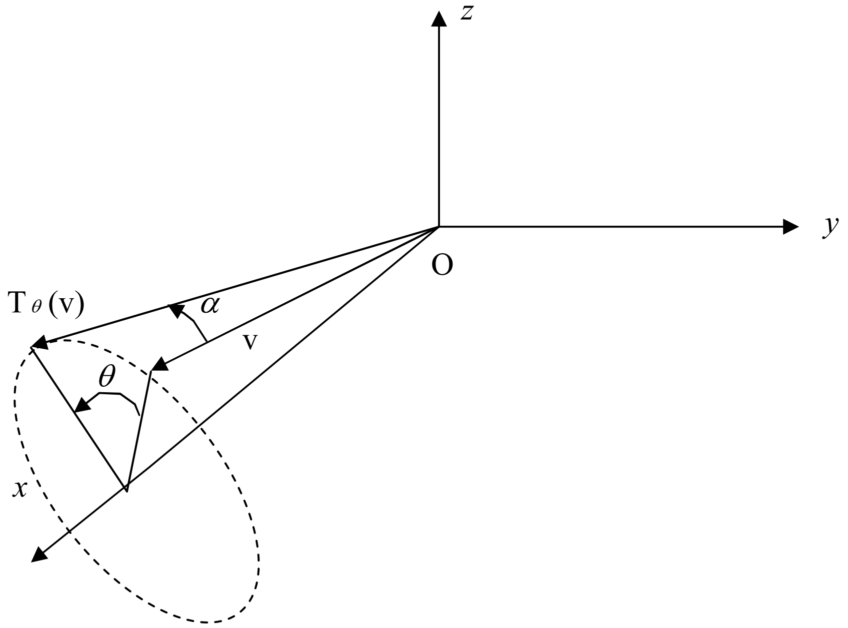


Figura 2.2.2

Para “conferir” se T representa a rotação de um ângulo θ em torno do eixo dos x, observemos o seguinte:

a) T gira de θ, em torno da origem O, os pontos do plano $x = 0$ (plano $y\text{O}z$), pois:

   $\text{T}(0,\ y,\ z) = (0,\ y\cos\theta - z\,\text{sen}\,\theta,\ y\,\text{sen}\,\theta + z\cos\theta)$

   e:

b) T não altera os pontos do eixo dos x, pois:

   $\text{T}(x, 0, 0) = (x, 0, 0)$

2.2.3. Exemplo: Determinar a imagem do vetor v = (3, 4, 5) pela rotação de $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ em torno do eixo dos x.

Resolução:

- $T_{\frac{\pi}{2}}(1, 0, 0) = (1, 0.\cos\frac{\pi}{2} - 0.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}, 0.\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + 0.\cos\frac{\pi}{2}) = (1, 0, 0)$

- $T_{\frac{\pi}{2}}(0, 1, 0) = (0, 1.\cos\frac{\pi}{2} - 0.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}, 1.\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + 0.\cos\frac{\pi}{2}) =$

  $= (0, \cos\frac{\pi}{2}, \text{sen}\,\frac{\pi}{2}) = (0, 0, 1)$

- $T_{\frac{\pi}{2}}(0, 0, 1) = (0, 0.\cos\frac{\pi}{2} - 1.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}, 0.\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + 1.\cos\frac{\pi}{2}) =$

  $= (0, -\text{sen}\,\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}) = (0, -1, 0)$

Então,

$$\left[T_{\frac{\pi}{2}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $(3, 4, 5) = 3(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) = (3, 4, 5)$

Assim,

$$[(3, 4, 5)] = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T_{\frac{\pi}{2}}(3, 4, 5)] = \left[T_{\frac{\pi}{2}}\right].[(3, 4, 5)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

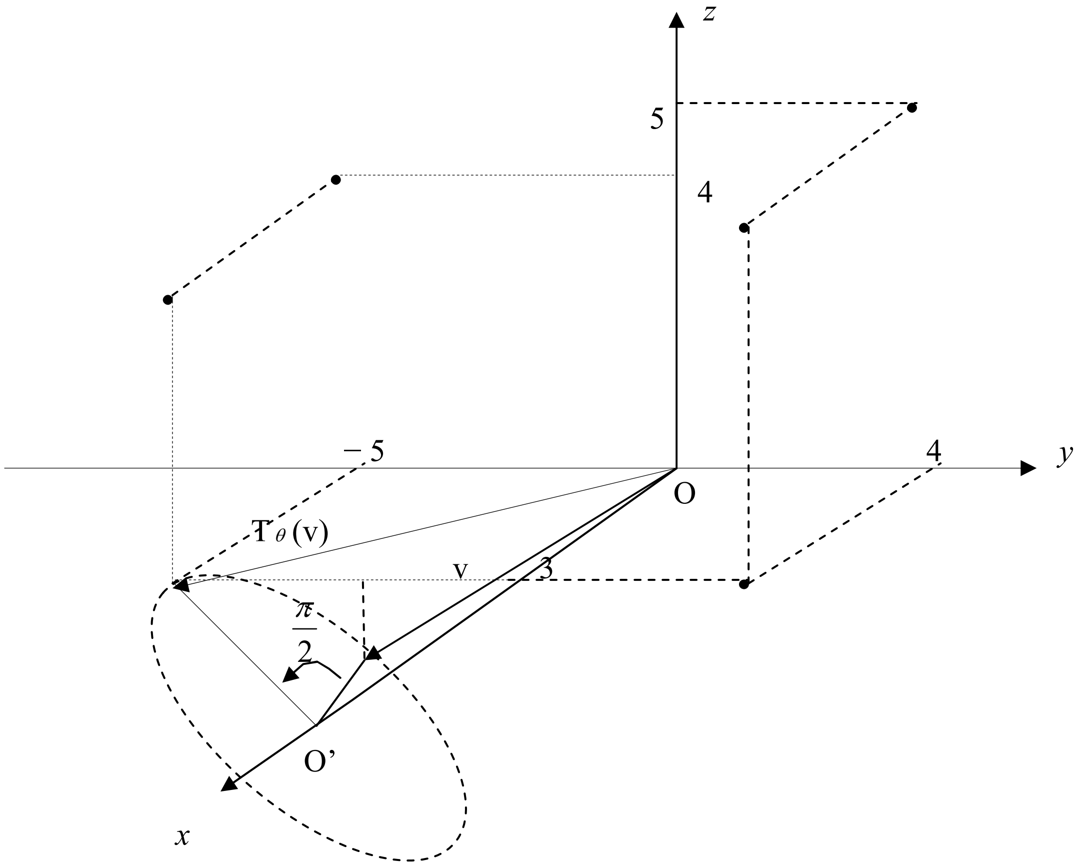


Figura 2.2.3

2.2.4. Operador Rotação no $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo dos y

2.2.5. Definição: **Um Operador Rotação no espaço em torno do eixo dos y** é um operador linear T_θ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ da forma

$T_\theta(x, y, z) = (x\cos\theta - z\,\text{sen}\,\theta,\ y,\ x\,\text{sen}\,\theta + z\cos\theta)$, θ real e fixado,

Esse operador também pode ser representado por sua matriz na base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ, tem-se:

- $T_\theta(1, 0, 0) = (1.\cos\theta - 0.\text{sen}\,\theta, 0, 1.\text{sen}\,\theta + 0.\cos\theta) = (\cos\theta, 0, \text{sen}\,\theta)$
- $T_\theta(0, 1, 0) = (0.\cos\theta - 0.\text{sen}\,\theta, 1, 0.\text{sen}\,\theta + 0.\cos\theta) = (0, 1, 0)$
- $T_\theta(0, 0, 1) = (0.\cos\theta - 1.\text{sen}\,\theta, 0, 0.\text{sen}\,\theta + 1.\cos\theta) = (-\text{sen}\,\theta, 0, \cos\theta)$

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y, z) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$, teremos:

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ é:

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y, z) ao operador T_θ em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ pela matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$[T_\theta(x, y, z)] = [T_\theta].[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

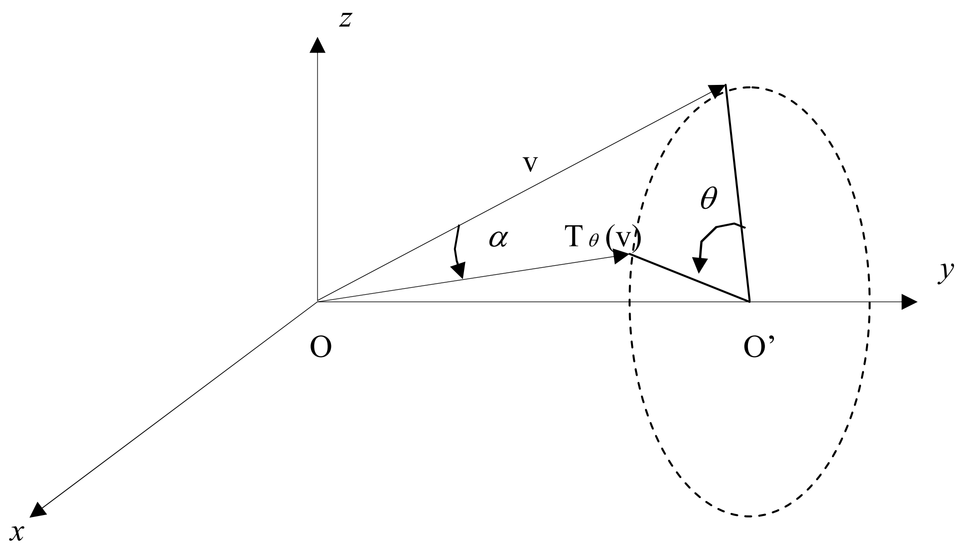


Figura 2.2.5

Para "conferir" se T representa a rotação de um ângulo θ em torno do eixo dos y, observemos o seguinte:

a) T gira de θ, em torno da origem O, os pontos do plano $y = 0$ (plano xOz), pois:

$$T(x, 0, z) = (x\cos\theta - z\,\text{sen}\,\theta, 0, x\,\text{sen}\,\theta + z\cos\theta)$$

e:

b) T não altera os pontos do eixo dos y, pois:

$$T(0, y, 0) = (0, y, 0)$$

2.2.6. Exemplo: Determinar a imagem do vetor v = (2, 2, 3) pela rotação de $\theta = \pi$ em torno do eixo dos y.

Resolução:

- $T_\pi(1, 0, 0) = (1.\cos\pi - 0.\text{sen}\,\pi, 0, 1.\text{sen}\,\pi + 0.\cos\theta) = (\cos\pi, 0, \text{sen}\,\pi) = (-1, 0, 0)$
- $T_\pi(0, 1, 0) = (0.\cos\pi - 0.\text{sen}\,\pi, 1, 0.\text{sen}\,\pi + 0.\cos\theta) = (0, 1, 0)$
- $T_\pi(0, 0, 1) = (0.\cos\pi - 1.\text{sen}\,\pi, 0, 0.\text{sen}\,\pi + 1.\cos\theta) = (-\text{sen}\,\pi, 0, \cos\pi) = (0, 0, -1)$

Então,

$$[T_\pi] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (2, 2, 3) = 2(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (2, 2, 3)

Assim,

$$[(2, 2, 3)] = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T_\pi(2, 2, 3)] = [T_\pi].[(2, 2, 3)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

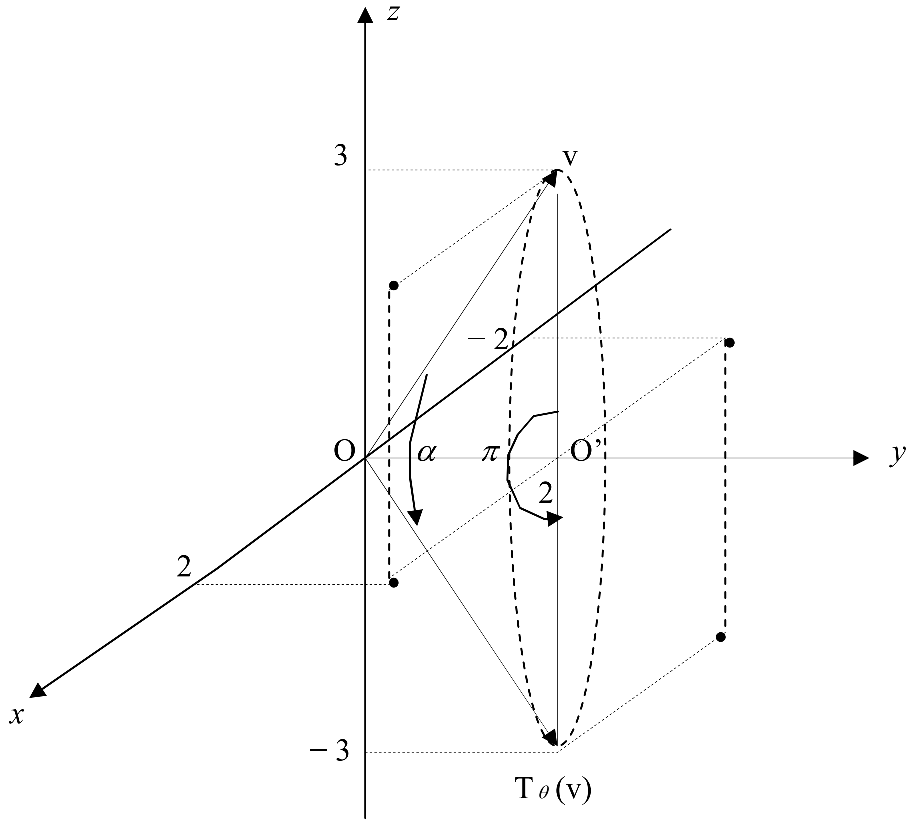


Figura 2.2.6

2.2.7. Operador Rotação no $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo dos z

2.2.8. Definição: **Um Operador Rotação no espaço em torno do eixo dos** z é um operador linear $T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ da forma

$T_\theta(x, y, z) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta,\ z)$, θ real e fixado,

Esse operador também pode ser representado por sua matriz na base canônica:

Aplicando os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ, tem-se:

- $T_\theta(1, 0, 0) = (1.\cos\theta - 0.\text{sen}\,\theta,\ 1.\text{sen}\,\theta + 0.\cos\theta,\ 0) = (\cos\theta,\ \text{sen}\,\theta,\ 0)$
- $T_\theta(0, 1, 0) = (0.\cos\theta - 1.\text{sen}\,\theta,\ 0.\text{sen}\,\theta + 1.\cos\theta,\ 0) = (-\,\text{sen}\,\theta,\ \cos\theta,\ 0)$
- $T_\theta(0, 0, 1) = (0.\cos\theta - 0.\text{sen}\,\theta,\ 0.\text{sen}\,\theta + 0.\cos\theta,\ 1) = (0, 0, 1)$

Então, a matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o vetor (x, y, z) como combinação linear dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$, teremos:

- $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z)$

Assim, a matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ é:

$$[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz da aplicação do vetor (x, y, z) ao operador T_θ em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada pelo produto da matriz da aplicação dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ ao operador T_θ pela matriz da combinação linear do vetor (x, y, z) em relação aos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$[T_\theta(x, y, z)] = [T_\theta].[(x, y, z)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

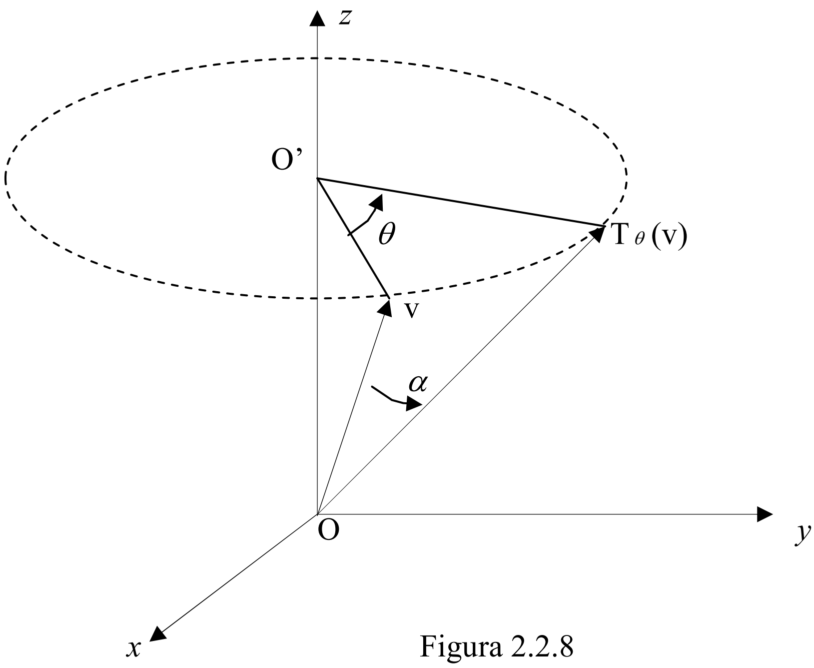


Figura 2.2.8

Para “conferir” se T representa a rotação de um ângulo θ em torno do eixo dos z, observemos o seguinte:

a) T gira de θ, em torno da origem O, os pontos do plano $z = 0$ (plano xOy), pois:

$$T(x, y, 0) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta,\ 0)$$

e:

b) T não altera os pontos do eixo dos z, pois:

$$T(0, 0, z) = (0, 0, z)$$

2.2.9. Exemplo: Determinar a imagem do vetor v = (2, 3, 4) pela rotação de $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ em torno do eixo dos z.

Resolução:

- $T_{\frac{\pi}{2}}(1, 0, 0) = (1.\cos\frac{\pi}{2} - 0.\text{sen}\frac{\pi}{2},\ 1.\text{sen}\frac{\pi}{2} + 0.\cos\frac{\pi}{2},\ 0) =$

  $= (\cos\frac{\pi}{2},\ \text{sen}\frac{\pi}{2},\ 0) = (0, 1, 0)$

- $T_{\frac{\pi}{2}}(0, 1, 0) = (0.\cos\frac{\pi}{2} - 1.\text{sen}\frac{\pi}{2},\ 0.\text{sen}\frac{\pi}{2} + 1.\cos\frac{\pi}{2},\ 0) =$

  $= (-\text{sen}\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{\pi}{2},\ 0) = (-1, 0, 0)$

- $T_{\frac{\pi}{2}}(0, 0, 1) = (0.\cos\frac{\pi}{2} - 0.\text{sen}\frac{\pi}{2},\ 0.\text{sen}\frac{\pi}{2} + 0.\cos\frac{\pi}{2},\ 1) = (0, 0, 1)$

Então,

$$\left[T_{\frac{\pi}{2}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (2, 3, 4) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1) = (2, 3, 4)

Assim,

$$[(2,3,4)] = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T_{\frac{\pi}{2}}(2,3,4)] = \begin{bmatrix} T_{\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}.[(2,3,4)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

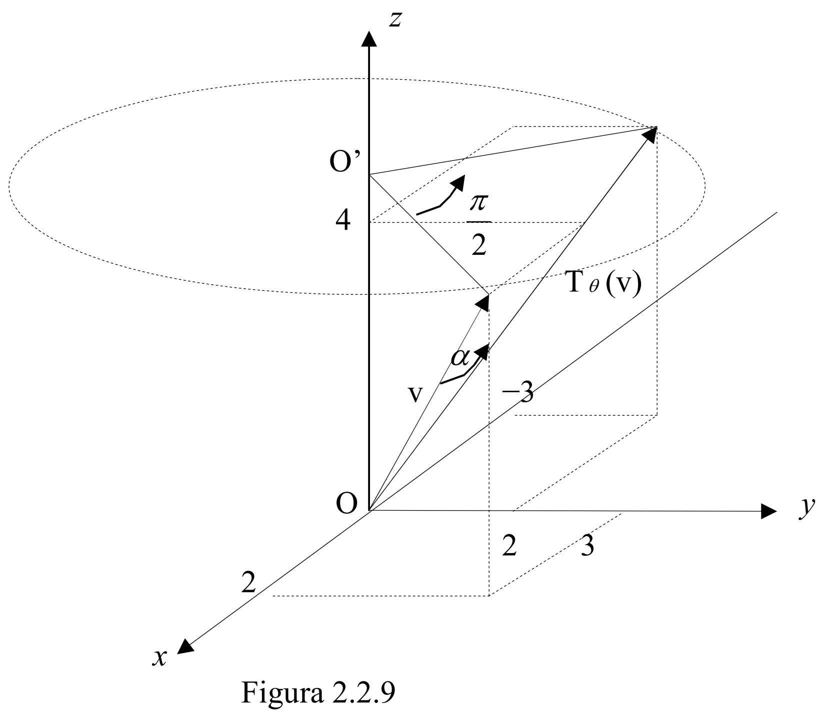


Figura 2.2.9

Observação:

Nos itens 2.2.2, 2.2.5 e 2.2.8 o ângulo θ corresponde ao ângulo central cujos lados interceptam, na circunferência de centro O', um arco de medida θ. Esse ângulo θ não é o ângulo α formado pelos vetores v e T_θ(v), mas sim, o ângulo descrito pelo vetor v na rotação em torno da origem.

2.2.10. ***Teorema:*** *Se T é um operador linear no $\mathbb{R}^n$ ortogonal tal que o determinante de $[T]_{can}$ é igual a 1, então T é uma rotação no $\mathbb{R}^n$.* ([1], pg. 257 e 258)

Demonstração: Faremos a demonstração para n = 2. Como can é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$ e T é um operador ortogonal, então a matriz

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal.

Logo,

$$[T]^t \cdot [T] = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \quad (I) \\ c^2 + d^2 = 1 \quad (II) \\ ac + bd = 0 \quad (III) \end{cases}$$

- $ac + bd = \langle (a, b), (c, d) \rangle = 0$ (comprovado na equação III).
- $\sqrt{\langle (a,b),(a,b) \rangle} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1} = 1$ (com base na equação I)
- $\sqrt{\langle (c,d),(c,d) \rangle} = \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{1} = 1$ (com base na equação II)

Com base no sistema concluímos que os vetores (a, b) e (c, d) são unitários e ortogonais entre si. Portanto, usando trigonometria, existe um ângulo θ tal que $\cos\theta = a$ e $\operatorname{sen}\theta = b$ e $(c, d) = \pm(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, isto é, o vetor (c, d) que é a segunda coluna da matriz $[T]_{can}$ é igual a menos um ou mais um vezes $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$. Logo a matriz de T em relação à base B pode ter duas formas:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [T]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

mas por outra hipótese o determinante da matriz deve ser igual a 1, sobrando assim uma única alternativa para a matriz $[T]_B$ que é dada por cos e sen como na matriz rotação:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

pois neste caso teremos:

$$\det([T]_B) = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \quad \blacksquare$$

3. Imagem de Triângulos pelos Operadores Homotetia e Rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

A imagem de figuras geométricas por operadores lineares é importante na computação gráfica, por exemplo em programas tipo CAD.

Daremos alguns exemplos somente para ilustrar geometricamente, mais adiante daremos exemplos numéricos.

3.1. Exemplo: Imagem de uma figura do $\mathbb{R}^3$ obtida pelo operador homotetia.

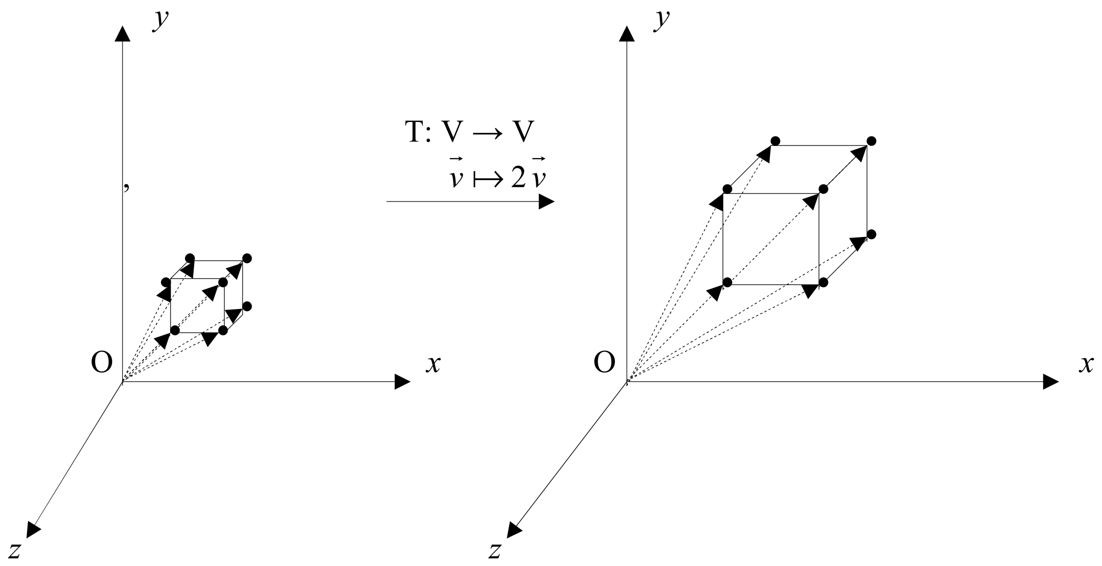


Figura 3.1

3.2. Exemplo: Imagem de uma figura do $\mathbb{R}^3$ obtida pelo operador rotação.

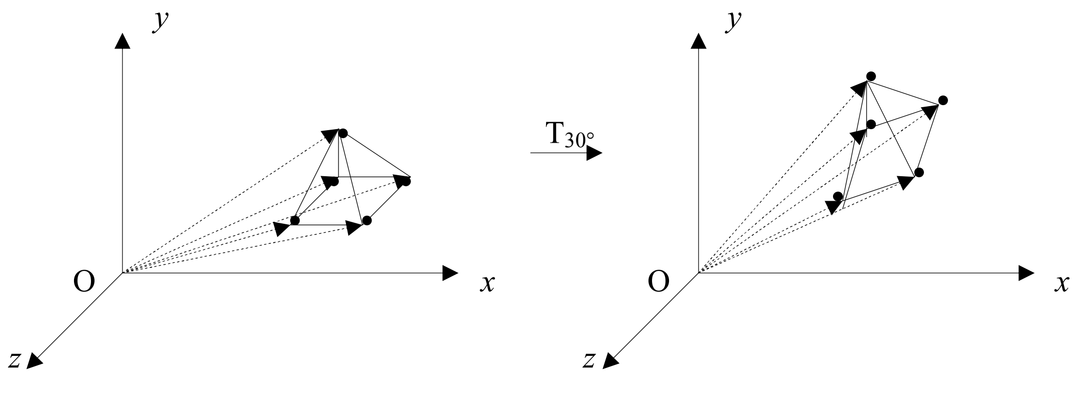


Figura 3.2

3.3. Imagem de triângulos pelo Operador Homotetia no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

3.3.1. <u>Proposição</u>: No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, o operador homotetia leva triângulo em triângulo, cujos ângulos internos dos triângulos são congruentes e as medidas dos lados são multiplicadas pelo fator k.

Demonstração: Seja o triângulo ΔABC formado pelos vértices A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C), no $\mathbb{R}^2$. A sua imagem obtida pelo operador homotetia T(x, y) = k(x, y), k $\in$ $\mathbb{R}$, é:

Aplicando os pontos A, B e C ao operador T, tem-se:

- $T(A) = T(x_A, y_A) = k(x_A, y_A) = (k\,x_A, k\,y_A)$
- $T(B) = T(x_B, y_B) = k(x_B, y_B) = (k\,x_B, k\,y_B)$
- $T(C) = T(x_C, y_C) = k(x_C, y_C) = (k\,x_C, k\,y_C)$

Assim, graficamente teremos:

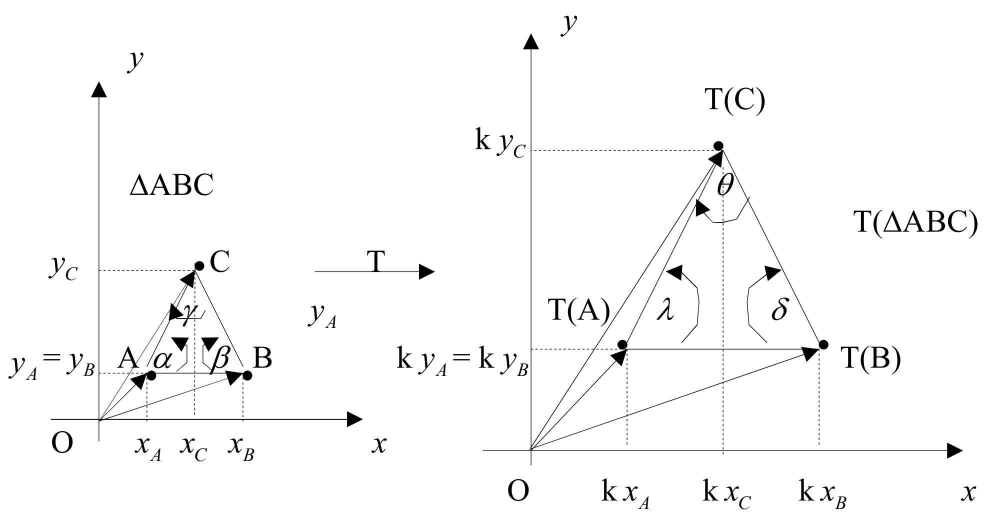


Figura 3.3.1

Observe que a medida do lado $\overline{AB}$, representada por d_{AB}, é igual à medida do lado $\overline{T(A)T(B)}$, representado por $d_{T(A)T(B)}$, dividido por k, ou seja,

$$d_{AB} = \frac{d_{T(A)T(B)}}{k}.$$

De fato,

$$\text{(I)} \qquad \frac{d_{T(A)T(B)}}{k} = \frac{\sqrt{(kx_B - kx_A)^2 + (ky_B - ky_A)^2}}{k} =$$

$$= \frac{\sqrt{(k^2x_B^2 - k^3x_Ax_B + k^2x_A^2) + (k^2y_B^2 - k^3y_Ay_B + k^2y_A^2)}}{k} =$$

$$= \frac{\sqrt{k^2(x_B^2 - kx_Bx_A + x_A^2) + k^2(y_B^2 - ky_By_A + y_A^2)}}{k} =$$

$$= \frac{\sqrt{k^2(x_B - x_A)^2 + k^2(y_B - y_A)^2}}{k} = \frac{\sqrt{k^2[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^2}}{k} =$$

$$= \frac{\cancel{k}\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\cancel{k}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = d_{AB}.$$

Pode-se trabalhar analogamente, dois a dois, para se demonstrar que a medida do lado $\overline{BC}$, representada por d_{BC}, é igual à medida do lado $\overline{T(B)T(C)}$, representado por $d_{T(B)T(C)}$, dividido por k, e que a medida do lado $\overline{AC}$, representada por d_{AC}, é igual à medida do lado $\overline{T(A)T(C)}$, representado por $d_{T(A)T(C)}$, dividido por k.

Para determinação do $\cos\lambda$, sendo λ o ângulo formado pelos segmentos $\overline{T(A)T(B)}$ e $\overline{T(A)T(C)}$, aplicaremos a lei dos cossenos. Assim:

$$(d_{T(B)T(C)})^2 = (d_{T(A)T(B)})^2 + (d_{T(A)T(C)})^2 - 2.(d_{T(A)T(B)}).(d_{T(A)T(C)}).\cos\lambda$$

ou, colocando-se a equação acima em função de $\cos\lambda$:

$$\text{(II)} \qquad \cos\lambda = \frac{(d_{T(B)T(C)})^2 - (d_{T(A)T(B)})^2 - (d_{T(A0)T(C)})^2}{-2(d_{T(A)T(B)})(d_{T(A)T(C)})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{(kx_C - kx_B)^2 + (ky_C - ky_B)^2})^2 - (\sqrt{(kx_B - kx_A)^2 + (ky_B - ky_A)^2})^2 - (\sqrt{(kx_C - kx_A)^2 + (ky_C - ky_A)^2})^2}{-2(\sqrt{(kx_B - kx_A)^2 + (ky_B - ky_A)^2})(\sqrt{(kx_C - kx_A)^2 + (ky_C - ky_A)^2})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{k^2[(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2]})^2 - (\sqrt{k^2[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})^2 - (\sqrt{k^2(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})^2}{-2(\sqrt{k^2[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})(\sqrt{k^2[(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})} =$$

$$= \frac{(k\sqrt{[(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2]})^2 - (k\sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})^2 - (k\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})^2}{-2(k\sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})(k\sqrt{[(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})} =$$

$$= \frac{k^2(\sqrt{[(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2]})^2 - k^2(\sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})^2 - k^2(\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})^2}{-2k^2(\sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})(\sqrt{[(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})} =$$

$$= \frac{k^2[(\sqrt{[(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2]})^2 - (\sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})^2 - (\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})^2]}{-2k^2(\sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})(\sqrt{[(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{[(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2]})^2 - (\sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})^2 - (\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})^2}{-2(\sqrt{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]})(\sqrt{[(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]})} =$$

$$= \frac{(d_{BC})^2 - (d_{AB})^2 - (d_{AC})^2}{-2(d_{AB})(d_{AC})} = \cos\alpha .$$

Logo, $\lambda \cong \alpha$.

De forma análoga se demonstra que $\theta \cong \gamma$ e $\delta \cong \beta$. ■

Observação: Por similaridade se demonstra esta proposição no $\mathbb{R}^3$.

3.3.2. Exemplo: Dado o triângulo ΔABC, de vértices A(1, 1), B(3, 1) e C(2, 3). Determinar sua imagem pelo operador T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = 2(x, y)$.

Resolução:

Aplicando os pontos A, B e C ao operador T, tem-se:

- T(A) = T(1, 1) = 2(1, 1) = (2, 2)
- T(B) = T(3, 1) = 2(3, 1) = (6, 2)
- T(C) = T(2, 3) = 2(2, 3) = (4, 6)

Assim, graficamente teremos:

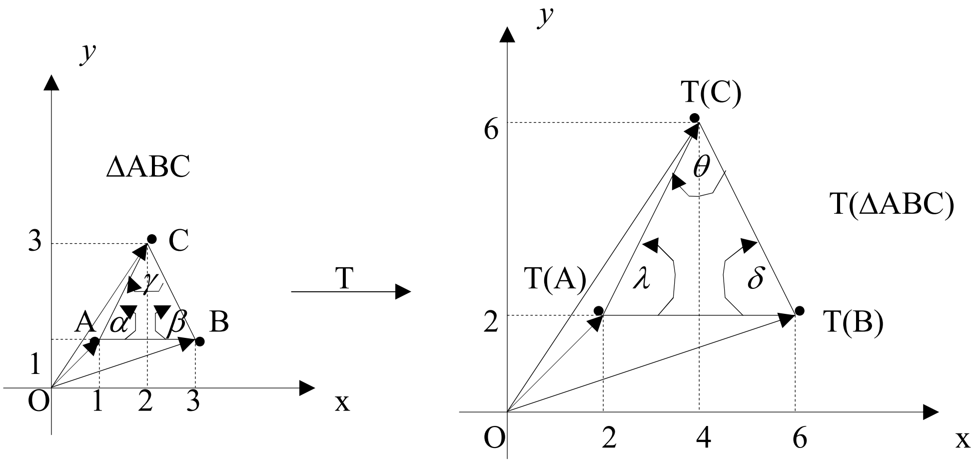


Figura 3.3.2

Observações:

- $\alpha \cong \lambda$, $\beta \cong \delta$ e $\gamma \cong \theta$;

- $\dfrac{AB}{T(A)T(B)} = \dfrac{BC}{T(B)T(C)} = \dfrac{AC}{T(A)T(C)}$.

3.3.3. Exemplo: Dado o triângulo ΔDEF, de vértices D(1, 2, 1), E(3, 2, 1) e F(2, 3, 2). Determinar sua imagem pelo operador T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que T(x , y , z) = 3(x , y , z).

Resolução:

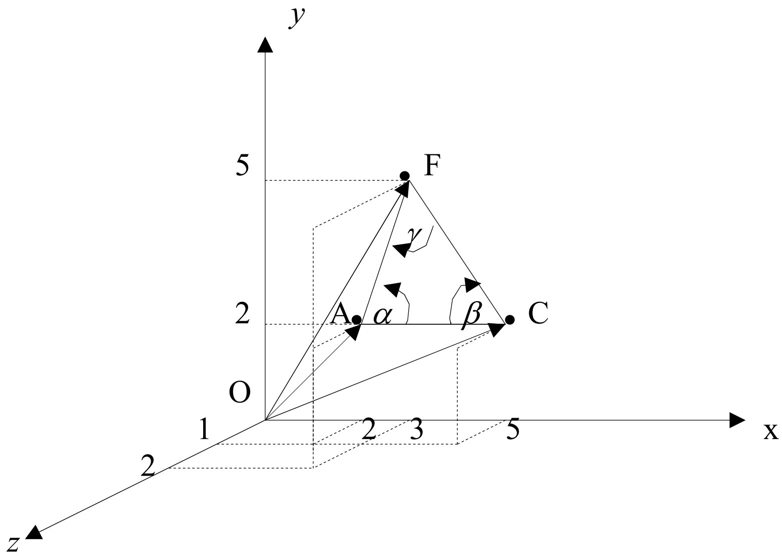
Aplicando os pontos D, E e F ao operador T, tem-se:

- T(D) = T(2, 2, 1) = 3(2, 2, 1) = (6, 6, 3)

- T(E) = T(5, 2, 1) = 3(5, 2, 1) = (15, 6, 3)

- T(F) = T(3, 5, 2) = 3(3, 5, 2) = (9, 15, 6)

Assim, graficamente teremos:



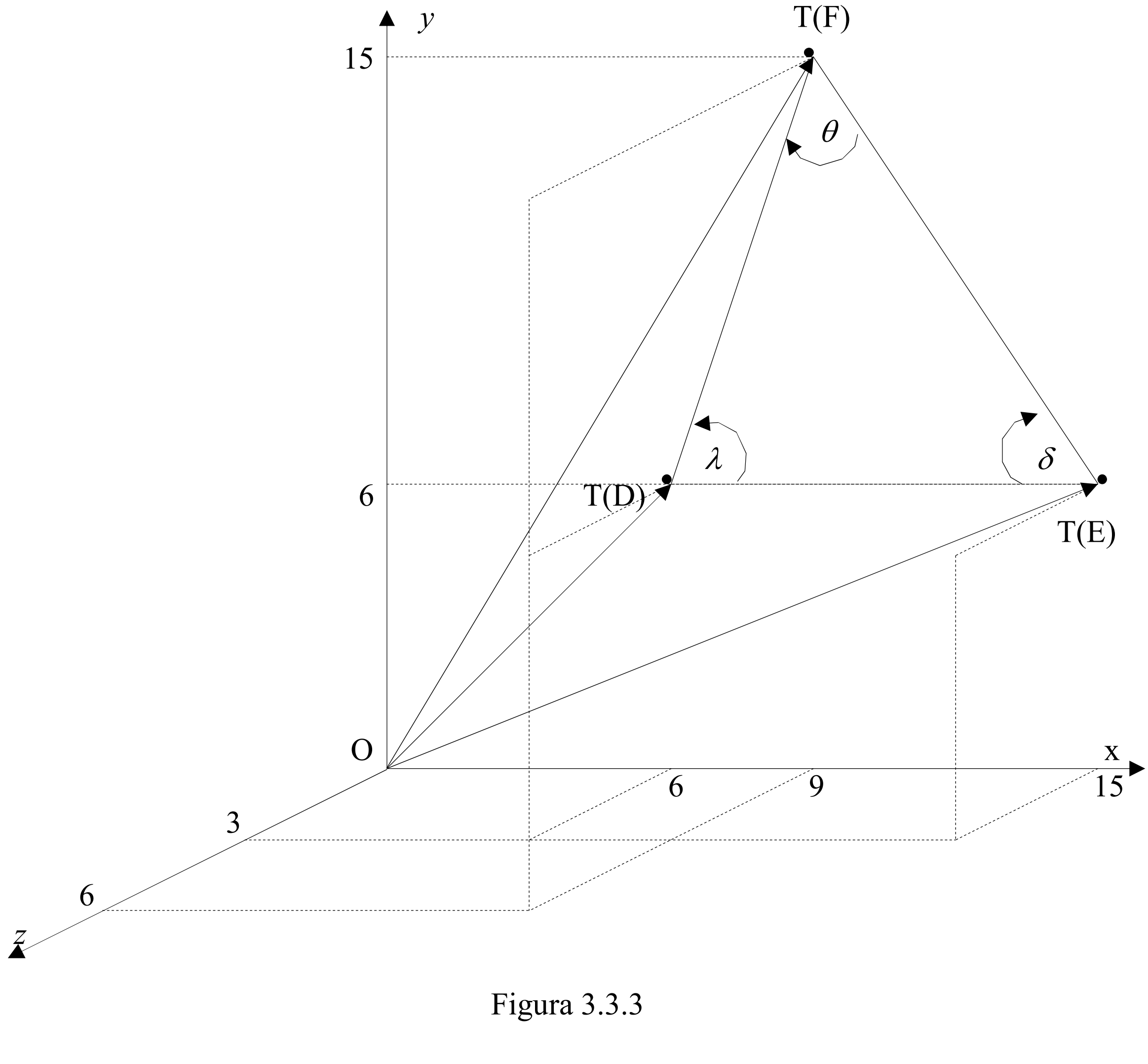


Figura 3.3.3

Observações:

- $\alpha \cong \lambda$, $\beta \cong \delta$ e $\gamma \cong \theta$;
- $\dfrac{DE}{T(D)T(E)} = \dfrac{EF}{T(E)T(F)} = \dfrac{DF}{T(D)T(F)}$.

3.4. Imagem de triângulos pelo Operador Rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

3.4.1. <u>Proposição</u>: No operador rotação, considerando-se o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, o triângulo obtido como imagem é congruente ao triângulo submetido à transformação, conservando os ângulos internos e as medidas dos lados.

Demonstração: Seja o triângulo ΔABC formado pelos vértices A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C), no $\mathbb{R}^2$. A sua imagem obtida pelo operador rotação $T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$ é:

(I) $\|T_\theta(x, y)\| = \|(x\cos - y\,\mathrm{sen},\ x\,\mathrm{sen} + y\cos)\| =$

$$= \sqrt{(x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta, x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta).(x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta, x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta)} =$$

$$= \sqrt{(x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta)^2 + (x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2\cos^2\theta - 2x\cos\theta.y\,\mathrm{sen}\theta + y^2\mathrm{sen}^2\theta + x^2\mathrm{sen}^2\theta + 2x\,\mathrm{sen}\theta.y\cos\theta + y^2\cos^2\theta} =$$

$$= \sqrt{x^2(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + y^2(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - \cancel{2x\,\mathrm{sen}\theta.y\cos\theta} + \cancel{2x\,\mathrm{sen}\theta.y\cos\theta}} =$$

$$= \sqrt{x^2.1 + y^2.1} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x, y).(x, y)} = \|(x, y)\|$$

Logo, o operador T faz com que todos os pontos do triângulo sejam rotacionados em um ângulo θ, mas conserva seus módulos, o que garante a igualdade das medidas dos lados correspondentes.

(II) $\cos\lambda = \dfrac{(d_{T\theta(B)T\theta(C)})^2 - (d_{T\theta(A)T\theta(B)})^2 - (d_{T\theta(A)T\theta(C)})^2}{-2(d_{T\theta(A)T\theta(B)})(d_{T\theta(A)T\theta(C)})} =$

Por (I) sabe-se que:

$$d_{T\theta(A)T\theta(B)} = d_{AB}$$

$$d_{T\theta(B)T\theta(C)} = d_{BC}$$
$$d_{T\theta(A)T\theta(C)} = d_{AC}$$

Então,

$$\cos\lambda = \frac{(d_{T\theta(B)T\theta(C)})^2 - (d_{T\theta(A)T\theta(B)})^2 - (d_{T\theta(A)T\theta(C)})^2}{-2(d_{T\theta(A)T\theta(B)})(d_{T\theta(A)T\theta(C)})} = \frac{(d_{BC})^2 - (d_{AB})^2 - (d_{AC})^2}{-2(d_{AB})(d_{AC})} =$$

$$= \frac{(d_{BC})^2 - (d_{AB})^2 - (d_{AC})^2}{-2(d_{AB})(d_{AC})} = \cos\alpha \, .$$

Logo, $\lambda \cong \alpha$.

De forma análoga se demonstra que $\theta \cong \gamma$ e $\delta \cong \beta$. ■

Observação: Por similaridade se demonstra esta proposição no $\mathbb{R}^3$.

3.4.2. Exemplo: Dado o triângulo ΔABC, de vértices A(1, 2), B(4, 2) e C(2, 4). Determinar sua imagem pelo operador T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T_{90°}(x, y) = (x \cos 90° - y \text{ sen } 90°, x \text{ sen } 90° + y \cos 90°)$.

Resolução:

Aplicando os pontos A, B e C ao operador T, tem-se:

- $T_{90°}$ (A) = $T_{90°}$ (1, 2) = (1cos 90° − 2sen 90°, 1sen 90° + 2cos 90°) = = (1.0 − 2.1, 1.1 + 2.0) = (−2, 1)

- $T_{90°}$ (B) = $T_{90°}$ (4, 2) = (4cos 90° − 2sen 90°, 4sen 90° + 2cos90°) = = (4.0 − 2.1, 4.1 + 2.0) = (−2, 4)

- $T_{90°}$ (C) = $T_{90°}$ (3, 4) = (3cos90° − 4sen 90°, 3sen 90° + 4cos 90°) = = (2.0 − 4.1, 2.1 + 4.0) = (−4, 3)

Assim, graficamente teremos:

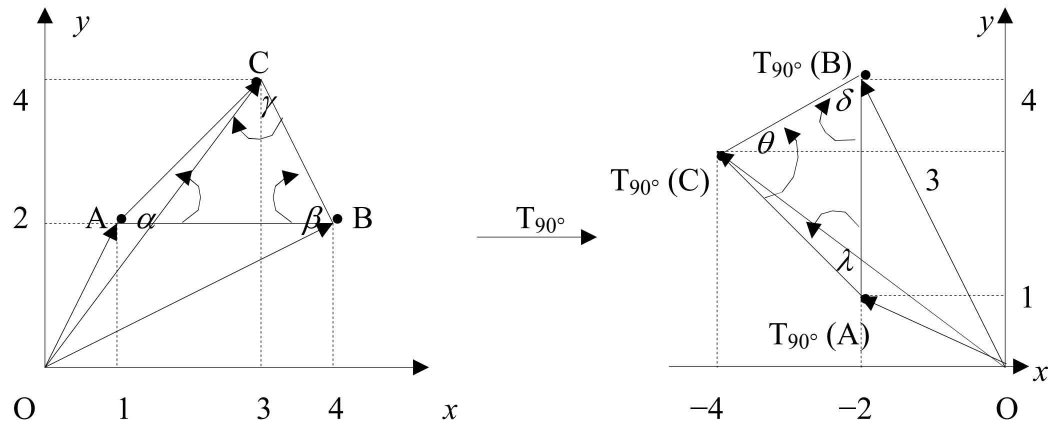


Figura 3.4.2

Observações:

- $\alpha \cong \lambda$, $\beta \cong \delta$ e $\gamma \cong \theta$;
- AB = $T_{90°}$ (A)$T_{90°}$ (B), BC = $T_{90°}$ (B)$T_{90°}$ (C) E AC = $T_{90°}$ (A)$T_{90°}$ (C).

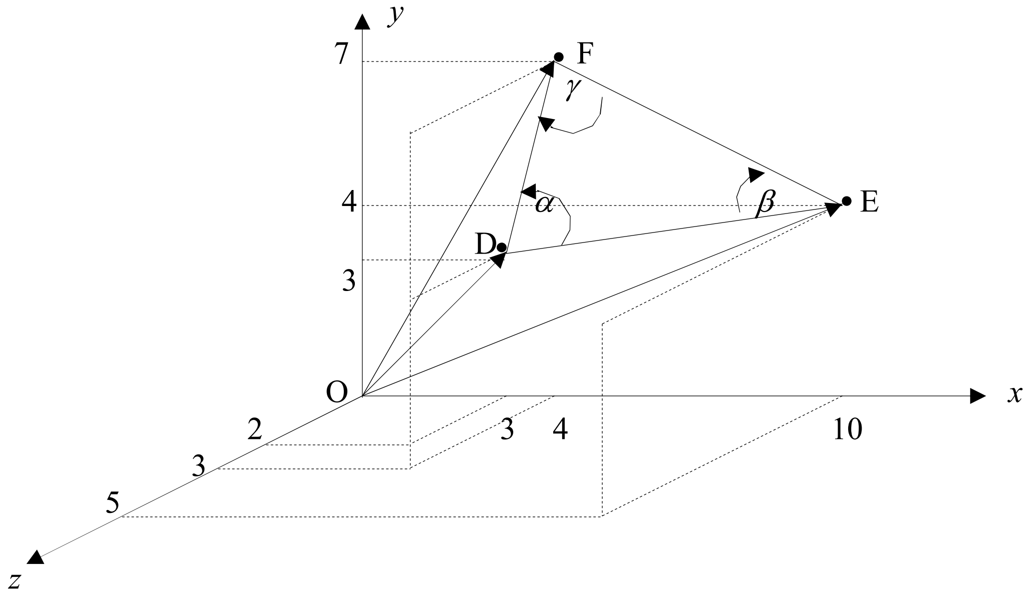
3.4.3. Exemplo: Dado o triângulo ΔDEF, de vértices D(1, 2, 2), B(6, 2, 5) e C(4, 3, 3). Determinar sua imagem pelo operador T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T_{180°}(x, y, z) = (x\cos 180° - y\,\mathrm{sen}180°, x\,\mathrm{sen}180° + y\cos 180°, z)$, em torno do eixo das cotas.

Resolução:

Aplicando os pontos D, E e F ao operador T, tem-se:

- $T_{180°}$ (D) = $T_{180°}$ (3, 3, 2) = (3cos180° − 3sen180°, 3sen180° + + 3cos180°, 2) = (3.(−1) − 3.0, 3.0 + 3.(−1), 2) = (−3, −3, 2)
- $T_{180°}$ (E) = $T_{180°}$ (10, 4, 5) = (10cos180° − 4sen180°, 10sen180° + + 4cos180°, 5) = (10.(−1) − 4.0, 10.0 + 4.(−1), 5) = (−10, −4, 5)
- $T_{180°}$ (F) = $T_{180°}$ (4, 7, 3) = (4cos180° − 7sen180°, 4sen180° + + 7cos180°, 3) = (4.(−1) − 7.0, 4.0 + 7.(−1), 3) = (−4, −7, 3)

Assim, graficamente teremos:



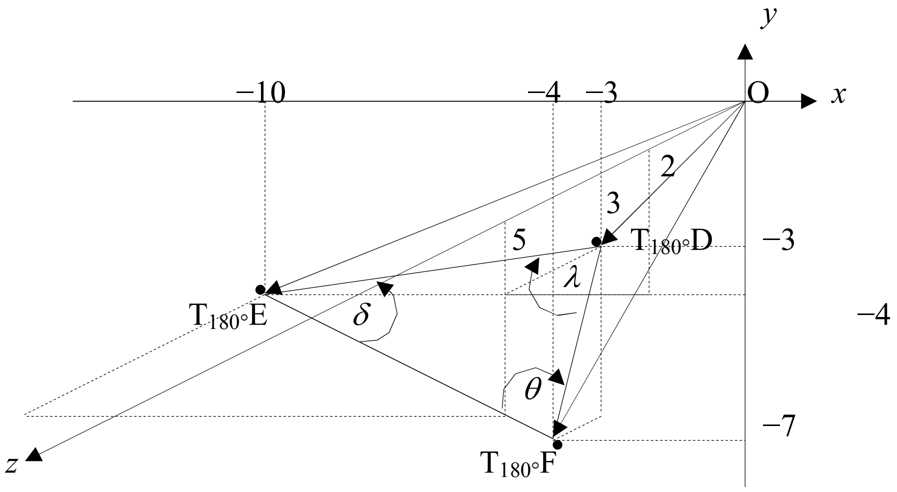


Figura 3.4.3

Observações:

- $\alpha \cong \lambda$, $\beta \cong \delta$ e $\gamma \cong \theta$;
- DE = $T_{180°}$ (D)$T_{180°}$ (E), EF = $T_{180°}$ (E)$T_{180°}$ (F) E DF = $T_{180°}$ (D)$T_{180°}$ (F).

Analogamente se obtém imagens de triângulos pelo operador rotação no $\mathbb{R}^3$ em torno dos eixos das abscissas e das ordenadas.

3. Conclusão

Neste trabalho estudamos um pouco sobre operadores homotetia e rotação no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e imagens de triângulos por estes operadores. Tínhamos como objetivo reunir algumas das principais características destes operadores e de sua aplicação em triângulos. Começamos caracterizando o operador homotetia de razão k (dilatação ou contração) no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, em seguida tratamos do operador rotação, também no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ e, ainda, demonstramos a imagem destes operadores em triângulos. Definimos cada operador e exemplificamos cada um dos casos particulares em relação aos dois espaços, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, sendo representados pelas transformações, por matrizes e graficamente.

Este trabalho nos permitiu descrever de uma forma bem simples, utilizando-se de uma linguagem técnica, mas de fácil compreensão e bem objetiva, permitindo que todos os interessados pelo estudo destes operadores possam usá-la como fonte de pesquisa, principalmente alunos graduandos em Matemática.

As várias representações utilizadas nos exemplos - transformação, matrizes e gráficos - permitem uma visão geral da aplicação destes operadores em vetores e triângulos.

Como trabalho futuro, pretendemos ampliar este trabalho estudando a utilização destes operadores em programas computacionais, como o CAD e o Cabri-géomètre II.

4. Referências Bibliográficas

[1] BOLDRINI, Costa e FIGUEIREDO, Wetzler, Álgebra Linear, 3a edição, Harbra, São Paulo, 1980.

[2] CALLIOLI, Carlos A, DOMINGUES Hygino H. e COSTA, Roberto C. F, Álgebra Linear e Aplicações, 6a edição reformulada, Atual, São Paulo, 1990.

[3] STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo, Álgebra Linear, 2a edição, Pearson Makron Books, São Paulo, 1987.