Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Convergência, Estimativas e Aplicações de Séries Numéricas

Marcos Teixeira Alves

Orientador: Prof. Dr. Alcides Buss

Florianópolis – SC

Março de 2011

Marcos Teixeira Alves

Convergência, Estimativas e Aplicações de Séries Numéricas

Monografia submetida à Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática - Formação do professor em cumprimento parcial para o título de Especialista em Matemática.

Florianópolis – SC

Março de 2011

Agradecimentos

Esta monografia só pôde ser concluída graças à amizade e ao companheirismo de várias pessoas. Registro aqui meus agradecimentos especiais a meu orientador prof. Alcides. Não apenas pela orientação que recebi, mas sobretudo pela paciência, dedicação e pelo exemplo de vida profissional. Agradeço também aos professores: Eliezer e Joel, pela leitura desta monografia e pelas palavras de incentivo.

Aos amigos que sempre estiveram presentes neste momento, em especial: Cinthia, Rodrigo e Carlinha, agradeço pelo apoio, pela hospedagem, pelas alegrias e pelos momentos felizes que passamos.

Por fim, e não menos importante, dedico este trabalho a meus pais: Joraci e Shirlei, aos irmãos: Éderson e Mariane e a toda família de Treze de Maio. E claro, à minha sobrinha favorita: Ana Beatriz e a meu afilhado Enzo que está a caminho.

Sumário

Introdução

Nesta monografia de especialização, apresentamos o estudo das séries numéricas do ponto de vista da convergência absoluta e incondicional. Os assuntos abordados foram divididos em três capítulos.

No capítulo 1, estabelecemos os conceitos básicos para compreensão do capítulo 2. As sequências de números reais são estudadas visando a este objetivo.

O capítulo 2 é todo dedicado a convergência de séries numéricas. De início, definimos convergência de uma série e estabelecemos os principais critérios usados para decidir a respeito de sua convergência. Em seguida, demonstramos a equivalência entre convergência incondicional e convergência absoluta para séries numéricas. Esta demonstração é tida o "ponto áureo" deste capítulo.

No capítulo 3, último desta monografia, citamos algumas aplicações de séries numéricas. E por fim, analisamos estimativas de soma para algumas séries convergentes estabelecidas no capítulo 2.

O trabalho é finalizado com algumas considerações finais e as bibliografias utilizadas.

Capítulo 1

Sequências Numéricas

As ferramentas primordiais de que necessitamos para o desenvolvimento dos capítulos 2 e 3 são apresentadas neste capítulo. Basicamente exibimos resultados de interesse das sequências numéricas. Para um estudo completo destes fatos indicamos as referências [2] e [5].

1.1 Limite de uma Sequência em $\mathbb{R}$

Definição 1.1 *Uma* sequência de números reais *é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um número real x_n, denominado o* enésimo termo *da sequência.*

Notação. $(x_1, x_2, \dots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n).

Definição 1.2 *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma* subsequência *de x é uma restrição da função x a um subconjunto infinito: $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\} \subset \mathbb{N}$ com a propriedade: $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \dots$.*

Notação. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_{n_k}).

Definição 1.3 *Dizemos que o número real l é o* limite da sequência (x_n) *se dado $\varepsilon > 0$,* *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - l| < \varepsilon$ *sempre que* $n > N$*. Nesse caso, escrevemos* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ *ou simplesmente* $\lim x_n = l$*.*

Uma sequência que possui limite é denominada *convergente* e dizemos que (x_n) converge para l ou que l é o limite de (x_n). Em caso contrário, afirmamos que a sequência é divergente (ou diverge).

Teorema 1.1 *(*Unicidade do limite*) Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos, isto é, se* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$*, então* $a = b$*.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ com $a \neq b$. Seja $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$. Como x_n converge para a e x_n converge para b, garantimos a existência de N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > N_1$ e $|x_n - b| < \varepsilon$ se $n > N_2$. Escolhemos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Como consequência, se $n > N$, temos $n > N_1$, $n > N_2$ e ocorre $|b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |b - x_n| + |x_n - a| < 2\varepsilon = |b - a|$, o que é absurdo. Logo, $a = b$. ■

Teorema 1.2 *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$*, então qualquer subsequência de* (x_n) *converge para* l*.*

Demonstração: Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Como (x_n) converge para l, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, temos $|x_n - l| < \varepsilon$. Tomemos k_0 tal que $n_{k_0} > N$. Como consequência, se $k > k_0$, temos $n_k > n_{k_0} > N$ e então $|x_{n_k} - l| < \varepsilon$. Logo, (x_{n_k}) converge para l. ■

Em geral, o teorema acima é bastante usado em sua forma contra-positiva, conforme veremos no Exemplo 1.1.

Teorema 1.3 *Qualquer sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < 1$ sempre que $n > N$. Segue daí que $|x_n| = |x_n - l + l| \leq |x_n - l| + |l| < 1 + |l|$ sempre que $n > N$. Escolhemos $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, 1 + |l|\}$. Portanto, $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, (x_n) é limitada. ■

Exemplo 1.1 *Seja (x_n) uma sequência dada por $x_n = 1+(-1)^n = (2, 0, 2, 0, \dots)$. Observamos que (x_n) é limitada, porém não converge via Teorema 1.2, pois possui subsequências: (x_{2n-1}) e (x_{2n}) que convergem para limites distintos (2 e 0 respectivamente).*

Exemplo 1.2 *A sequência $(1, 2, 3, 4, \dots)$ é divergente, pois não é limitada (devido ao Teorema 1.3).*

Definição 1.4 *Uma sequência (x_n) é denominda* monótona *se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou $x_{n+1} \leq x_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso, dizemos que a sequência é* monótona não-decrescente *e no segundo caso, (x_n) é* monótona não-crescente. *Se tivermos $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1}$) dizemos que a sequência é* monótona crescente *(respectivamente* monótona decrescente*).*

Teorema 1.4 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência monótona limitada. Faremos a prova para o caso em que (x_n) é não-decrescente, isto é, $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos o conjunto: $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Observamos que $X \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto não-vazio e limitado superiormente. Logo, existe $\alpha = \sup X$. Mostraremos que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \varepsilon < x_N$, pois α é a menor cota superior para X. Se $n > N$, temos $x_N \leq x_n$ e assim $\alpha - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$. Logo, $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ quando $n > N$, isto é, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$.

Omitiremos a prova no caso em que (x_n) é não-crescente, pois esta é semelhante a que foi feita. ∎

Lema 1.1 *Qualquer sequência (x_n) contém uma subsequência monótona.*

Demonstração: Para provarmos este lema, usaremos a definição: um número natural n é denominado *ponto de pico* da sequência (x_n) se $x_m < x_n$ para todo $m > n$.

Estudaremos, então, os seguintes casos:

Caso 1. A sequência (x_n) possui uma infinidade de pontos de pico.

Nesse caso, suponhamos que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ sejam os pontos de pico. Então, temos $x_{n_1} > x_{n_2} > \cdots > x_{n_k} > \ldots$. Construímos daí uma subsequência (x_{n_k}) monótona decrescente.

Caso 2. A sequência (x_n) tem uma quantidade finita de pontos de pico.

Escolhemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > m$ para todo ponto de pico m. Como n_1 não é ponto de pico, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \geq x_{n_1}$. Também n_2 não é ponto de pico, logo existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \geq x_{n_2}$. Prosseguindo desse modo, obtemos uma subsequência monótona não-decrescente. ∎

Teorema 1.5 *(*Teorema de Bolzano-Weiertrass*) Qualquer sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência limitada. Decorre do Lema 1.1 que (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) monótona. Observamos que (x_{n_k}) é limitada, visto que (x_n) o é. Logo, garantimos via Teorema 1.4 que (x_{n_k}) é convergente. ∎

Exemplo 1.3 *A sequência* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é monótona limitada e portanto convergente. Além disso,* $\lim \frac{1}{n} = \inf\left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

1.2 Limites e Desigualdades

Teorema 1.6 *Seja (x_n) uma sequência de números reais tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$. Se $b < l$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b < x_n$ sempre que $n > N$. Se $l < b$, então existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < b$ qualquer que seja $n > M$.*

Demonstração: Provaremos a primeira afirmação. Escolhemos $\varepsilon = l - b > 0$. Da convergência de (x_n), garantimos a existência de $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon$ sempre que

$n > N$. Daí, se $n > N$, obtemos:

$$|x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow b < x_n < 2l - b.$$

Logo, $b < x_n$ toda vez que $n > N$.

Para provarmos a segunda afirmação, basta tomar $\varepsilon = b - l > 0$. ■

Corolário 1.1 *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números reais tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = k$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$. Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ temos $x_n \leq y_n$, então $k \leq l$.*

Demonstração: Por absurdo, suponhamos $k > l$. Escolha $c \in \mathbb{R}$ tal que $l < c < k$ (por exemplo, $c = (l+k)/2$). Pelo Teorema 1.6, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < c < x_n$ sempre que $n > N$, o que contradiz a hipótese dada. Logo, devemos ter $k \leq l$. ■

Observamos que se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y_n$ para todo $n > N$, então não podemos concluir que $\lim x_n < \lim y_n$.

De fato, tomemos, por exemplo, as sequências (x_n) e (y_n) definidas por: $x_n = 0$ e $y_n = \frac{1}{n}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Observamos que $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mas $\lim x_n = \lim y_n$. O correto (usando o Corolário 1.1) é inferir que $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Teorema 1.7 *(*Teorema do Confronto*) Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências de números reais. Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n > N$ e se $\lim x_n = l = \lim y_n$, então $\lim z_n = l$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Decorre da convergência de (x_n) e (y_n), a existência de N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > N_1 \Rightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \text{ e } n > N_2 \Rightarrow l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon.$$

Consideremos $N_0 = \max\{N_1, N_2, N\}$. Logo, temos $l - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < l + \varepsilon$ sempre que $n > N_0$. Portanto, $\lim z_n = l$. ■

1.3 Operações com Limites

Teorema 1.8 *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada, então* $\lim(x_n y_n) = 0$.

Demonstração: Como (y_n) é uma sequência limitada, existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Uma vez que $\lim x_n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$ sempre que $n > N$. Dessa forma, se $n > N$, temos $|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < |x_n|c < \varepsilon$. Logo, $\lim(x_n y_n) = 0$. ■

Exemplo 1.4 *Via Teorema 1.8, concluímos que a sequência* $\left(\dfrac{sen(n)}{n}\right)$ *converge para 0.*

Observação. Na demonstração do teorema seguinte, uaremos que se (x_n) uma sequência de números reais, então

$$\lim x_n = l \Leftrightarrow \lim(x_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - l| = 0.$$

Teorema 1.9 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$, *então:*

(i) $\lim(x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim(x_n - y_n) = a - b$;

(iii) $\lim(x_n y_n) = ab$;

(iv) $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$ *e* $y_n \neq 0$ *(pelo menos a partir de um certo* $N \in \mathbb{N}$*).*

Demonstração:

(i) Seja $\varepsilon > 0$. Logo, por hipótese, existem N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definimos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Logo, para todo $n > N$, temos:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

(ii) A demonstração deste item será omitida, visto que é semelhante a do item **(i)**.

(iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, observamos que

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n.b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a).$$

Como (x_n) é convergente, segue do Teorema 1.3 que (x_n) é limitada. Além disso, do item **(ii)** acima, temos $\lim(y_n - b) = \lim y_n - b = 0$ e $\lim(x_n - a) = \lim x_n - a = 0$. Usando **(i)** e o Teorema 1.8, concluímos que

$$\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[b(x_n - a)] = 0.$$

Logo, $\lim(x_n y_n) = ab$ (via observação anterior).

(iv) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{x_n}{y_n} = x_n \dfrac{1}{y_n}$. Mostraremos que $\lim \left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \dfrac{1}{b}$.

Fixemos $\varepsilon > 0$. Como $\lim y_n = b$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| \geq \frac{|b|}{2}$. Desta convergência, também garantimos a existência de $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_2$, temos $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}|b|^2$. Escolhemos $M = \max\{N_1, N_2\}$. Desse modo, se $n > M$, vemos que

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{b y_n}\right| = \frac{|y_n - b|}{|b||y_n|} \leq \frac{|y_n - b|}{|b|}\frac{2}{|b|} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}|b|^2}{|b|}\frac{2}{|b|} = \varepsilon.$$

Daí, concluímos que $\lim \left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \dfrac{1}{b}$.

Portanto, decorre do item **(iii)** que $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = (\lim x_n)\left[\lim \left(\dfrac{1}{y_n}\right)\right] = \dfrac{a}{b}$.

∎

Proposição 1.1 *(*Teste da Razão para sequências*) Seja (x_n) uma sequência de números reais. Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e* $\lim \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = l$ *com $l < 1$, então* $\lim x_n = 0$.

Demonstração: Como $l < 1$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $l < c < 1$. Seja $\varepsilon = c - l > 0$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n} - l\right| < \varepsilon$. Daí, segue que

$$n > N \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < l + \varepsilon = c, \text{ isto é, } n > N \Rightarrow 0 < x_{n+1} < c x_n.$$

Desse modo, para todo $n > N$, temos $0 < x_{n+1} < cx_n < c^2x_{n-1} < \cdots < c^{n-k+1}x_k$, ou seja, se $n > N+1$, temos $0 < x_n < x_k c^{n-k}$. Fixemos $k = N+1$. Vemos que $0 < x_n < x_{N+1}c^{n-(N+1)}$,para todo $n > N+1$. Definimos $M = \dfrac{x_{N+1}}{c^{N+1}}$. Como consequência, escrevemos $0 < x_n < Mc^n$ sempre que $n > N+1$. Visto que $0 < c < 1$, $\lim c^n = 0$.

Portanto, segue do Teorema do Confronto que $\lim x_n = 0$. ■

Exemplo 1.5 *Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$. Então $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a sequência: $x_n = \dfrac{n^k}{a^n}$. Observamos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot a^{-1} \text{ e então} \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = a^{-1} < 1.$$

Via Teste da Razão para sequências garantimos que $\lim x_n = 0$.

1.4 Limites Infinitos

Definição 1.5 *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que "*o limite de x_n é mais infinito*" quando dado $L > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > L$ sempre que $n > N$. Quando isso ocorre, escrevemos* $\lim x_n = +\infty$.

Analogamente, '$\lim x_n = -\infty$' significa que para todo $L > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, temos $x_n < -L$.

Observação.

(i) Em qualquer um dos casos da Definição 1.5, dizemos que (x_n) não converge ou diverge.

(ii) $\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-x_n) = -\infty$ (via definição de limites infinitos).

(iii) Por definição, se $\lim x_n = +\infty$, então (x_n) não é limitada superiormente.

A recíproca da afirmação em **(iii)** é falsa. Para provar isso, consideremos a sequência (x_n) definida assim $x_n = n+(-1)^n.n$. Esta é ilimitada superiormente, porém não temos $\lim x_n = +\infty$ pois $x_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

No entanto, se (x_n) é não-decrescente, então (x_n) ilimitada superiormente implica $\lim x_n = +\infty$. De fato, dado $L > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N > L$. Para todo $n > N$, temos $x_n \geq x_N > L$. Daí, por definição, garantimos que $\lim x_n = +\infty$.

Exemplo 1.6 *Seja $a > 1$ e definimos a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esta sequência é ilimitada superiormente e crescente. Em decorrência da observação anterior,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

Teorema 1.10 *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números reais.*

(i) *se* $\lim x_n = +\infty$ *e (y_n) é limitada inferiormente, então* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$*;*

(ii) *se* $\lim x_n = +\infty$ *e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então temos* $\lim(x_n y_n) = +\infty$*;*

(iii) *se existe $c > 0$ tal que $x_n > c$ e $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e* $\lim y_n = 0$*, então* $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = +\infty$*;*

(iv) *se (x_n) é limitada e* $\lim y_n = +\infty$*, então* $\lim\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = 0$.

Demonstração:

(i) Como (y_n) é limitada inferiormente, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geq c$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Do fato de $\lim x_n = +\infty$, dado $L > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, verificamos $x_n > L - c$. Logo, para todo $n > N$, obtemos $x_n + y_n > (L-c) + c = L$ e portanto $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(ii) Fixemos $L > 0$. Uma vez que $\lim x_n = +\infty$, garantimos a existência de $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \frac{L}{c}$ sempre que $n > N$. Daí, segue que $x_n y_n > \left(\frac{L}{c}\right) c = L$. Logo, $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(iii) Seja $L > 0$. Visto que $\lim y_n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < \frac{c}{L}$ quando $n > N$. Então, para todo $n > N$, ficamos com $\dfrac{x_n}{y_n} = x_n \dfrac{1}{y_n} > c\frac{L}{c} = L$. Em consequência, $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = +\infty$.

(iv) Existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois (x_n) é limitada. Fixemos $\varepsilon > 0$. Como $\lim y_n = +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, obtemos $y_n > \frac{c}{\varepsilon}$. Assim, qualquer que seja $n > N$, temos $\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right| = |x_n|\dfrac{1}{|y_n|} < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$, uma vez que $|y_n| \geq y_n > \frac{c}{\varepsilon}$ sempre que $n > N$. Portanto, $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = 0$.

■

1.5 Sequências de Cauchy

Definição 1.6 *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que (x_n) é uma* sequência de Cauchy *quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$, sempre que $m, n > N$.*

Lema 1.2 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Consequentemente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$ se $m, n > N$. Em particular, $|x_n - x_{N+1}| < 1$. Para todo $n > N$, $|x_n| \leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|$. Seja $\beta = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\}$. Daí, fica garantido que $|x_n| \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (x_n) é limitada. ■

Lema 1.3 *Se uma subsequência de uma sequência de Cauchy converge, então a sequência de Cauchy converge para o mesmo limite.*

Demonstração: Seja $L = \lim x_{n_k}$ em que (x_{n_k}) é uma subsequência da sequência de Cauchy (x_n). Mostraremos que $\lim x_n = L$.

Fixemos $\varepsilon > 0$. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $m, n > N_1$, $m, n \in \mathbb{N}$ ((x_n) é de Cauchy). Segue da convergência de (x_{n_k}) a existência de $k_1 \in \mathbb{N}$ com

$n_{k_1} > N_1$ tal que $k > k_1$ implica $|x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Desse modo, para todo $n > N_1$, temos $|x_n - L| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Portanto, $\lim x_n = L$. ■

Teorema 1.11 *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Então, (x_n) converge se e somente se (x_n) é de Cauchy.*

Demonstração: Suponhamos $\lim x_n = L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ se $n > N$. Como consequência, se $m > N$ e $n > N$, obtemos

$$|x_n - x_m| = |x_n - L + L - x_m| \leq |x_n - L| + |x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daí, concluímos que (x_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que (x_n) é de Cauchy. Decorre do Lema 1.2 que (x_n) é limitada. O Teorema de Bolzano-Weiertrass garante que (x_n) admite uma subsequência convergente. Em consequência ao Lema 1.3, (x_n) é convergente. ■

Capítulo 2

Séries Numéricas

Neste capítulo, estudaremos as séries numéricas. Iniciaremos definindo o conceito de série de números reais e alguns exemplos. Em seguida, estabelecemos os principais critérios de convergência de séries. Na última seção, demonstraremos a equivalência entre as noções de convergência absoluta e incondicional de séries numéricas.

2.1 Definição e Exemplos

Definição 2.1 *Uma série numérica é uma sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, *isto é,* $(a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots)$, *em que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de números reais dada. Denotaremos esta série por* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. *Os elementos* s_1, s_2, $\ldots$, s_n, $\ldots$ *são chamados de* somas parciais *da série. A parcela* a_n *é chamado o* n-ésimo termo *ou* termo geral *da série.*

Definição 2.2 *A* série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é dita* convergente *se a sequência das somas parciais* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente. Dizemos que a* série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente *quando sua sequência das somas parciais for divergente. Se a série for convergente e a sequência das somas parciais* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* s, *então* s *é chamada a* soma da série *e escrevemos* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$.

Proposição 2.1 *Se uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, então sua soma é única.*

Demonstração: Suponhamos que existam $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = r$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$. Como consequência: $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = r$ e $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$. Da unicidade do limite de sequências, garantimos que $r = s$. ■

Proposição 2.2 *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *séries convergentes. Então, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *converge e* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Demonstração: Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = r$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = s$. Assim, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = r$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = s$ e então

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = r + s.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ converge e vale $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. ■

Proposição 2.3 *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n)$ *também converge para todo* $c \in \mathbb{R}$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Demonstração: Seja $s \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$. Logo, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$. Qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$, temos $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}(ca_k) = \lim_{n\to+\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k = c \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = cs$. Consequentemente, $\sum_{n=1}^{+\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. ■

Exemplo 2.1 *Uma série geométrica é uma série da forma* $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$, *em que* $a, r \in \mathbb{R}$ *e*

$a \neq 0$. *Observe que* $s_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k$ *e* $rs_n = \sum_{k=0}^{n} ar^{k+1}$. *Como consequência*

$$(1-r)s_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k - \sum_{k=0}^{n} ar^{k+1} = a - ar^{n+1}.$$

Considerando $r \neq 1$, *escrevemos* $s_n = \dfrac{a - ar^{n+1}}{1-r} = a \cdot \left(\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}\right)$.

Se $|r| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} r^{n+1} = 0$ *e daí* $\lim_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{a}{1-r}$. *Desse modo* $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$, *se* $|r| < 1$.

Supondo $|r| > 1$, (r^{n+1}) *tende ao infinito (em módulo). Com isso,* (s_n) *não converge. Logo,* $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^n$ *diverge quando* $|r| > 1$.

Consideremos agora $|r| = 1$. *Se* $r = 1$, *temos* $s_n = (n+1)a$ *e então* $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ *e a série diverge. Caso* $r = -1$, $(a, 0, a, 0, a, 0, \dots)$ *é a sequência das somas parciais da série* $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$. *Esta sequência diverge, pois admite duas subsequências (a saber,* (s_{2n}) *e* (s_{2n-1})*) convergindo para limites distintos, visto que* $a \neq 0$. *Logo, a série é divergente, se* $r = -1$.

Portanto, uma série geométrica da forma: $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$, *com* $a \neq 0$, *converge se e somente se* $|r| < 1$. *Nesse caso,* $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$.

Exemplo 2.2 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *é convergente, uma vez que* $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos* $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ *e vale* $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$. *Com isso,* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

2.2 Critérios de Convergência

Teorema 2.1 *(*Condição de anulamento*) Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge, então* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Demonstração: Seja $s \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$ e consideremos $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Com isso, $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ e também $\lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s$ (uma vez que (s_{n-1}) é subsequência de (s_n)). Da igualdade $s_n = s_{n-1} + a_n$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

∎

Exemplo 2.3 *O Teorema 2.1 garante que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ *diverge, pois* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

A condição de anulamento é uma condição necessária, mas não suficiente para a convergência de séries, conforme constatamos no exemplo a seguir:

Exemplo 2.4 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é denominada* série harmônica. *Qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$, *observamos que* $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ *e* $s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$. *Assim, se* $n > 1$, *podemos escrever*

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

ou seja, $s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. *Como consequência,* (s_n) *não é uma sequência de Cauchy em* $\mathbb{R}$ *e assim não converge. Portanto,* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente.*

Teorema 2.2 *(*Critério de Cauchy*) A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente se e somente se para todo* $\varepsilon > 0$, *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$ *sempre que* $n > m > n_0$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, a sequência (s_n) de suas somas parciais converge em $\mathbb{R}$ e assim (s_n) é de Cauchy. Por definição, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - s_m| < \varepsilon$ sempre que $n > m > n_0$, ou seja, $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$ para todo $n > m > n_0$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que para todo $\varepsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$ sempre que $n > m > n_0$. Isto equivale a afirmar que (s_n) é uma sequência de Cauchy.

Logo, (s_n) converge e portanto $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. ∎

Teorema 2.3 *(*Critério da limitação*) Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \geq p$, $p \in \mathbb{N}$. A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e somente se o conjunto de suas somas parciais for limitado.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ o conjunto das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Sendo esta série convergente (por hipótese), (s_n) converge e portanto, existe $M > 0$ tal que $s_n \leq |s_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ é limitado.

$(\Leftarrow)$ Como o conjunto da somas parciais de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é limitado, a sequência (s_n) é limitada. Além disso, $a_n \geq 0$ para todo $n \geq p$ o que garante que $s_n \leq s_{n+1}$ para todo $n \geq p$, isto é, $(s_n)_{n \geq p}$ é uma sequência não-decrescente. Decorre do Teorema 1.4 que (s_n) é convergente. Logo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. ∎

Teorema 2.4 *(*Critério da comparação*) Seja $p \in \mathbb{N}$ e sejam (a_n), (b_n) sequências tais que $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ e $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq p$.*

(i) *Se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*

(ii) *Se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.*

Demonstração: Sejam (s_n) e (t_n) as sequências das somas parciais da séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, respectivamente.

(i) Para $n \geq p$, temos

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} + a_p + \cdots + a_n \\ &= s_{p-1} + a_p + \cdots + a_n \leq s_{p-1} + b_p + \cdots + b_n = s_{p-1} + t_n - t_{p-1}, \end{aligned}$$

ou seja, $s_n \leq s_{p-1}+t_n-t_{p-1}$ para todo $n \geq p$. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, (t_n) é limitada. Logo, segue da desigualdade anterior que (s_n) também é limitada. Decorre do critério da limitação que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(ii) Suponhamos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergente. Segue de **(i)** que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, o que é absurdo.

■

Exemplo 2.5 *O Teorema 2.4 garante que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ *é convergente, uma vez que* $0 < \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n(n+1)}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *é convergente (Exemplo 2.2).*

Exemplo 2.6 *Seja* $p \in \mathbb{R}$ *com* $p \leq 1$. *Temos* $\dfrac{1}{n^p} \geq \dfrac{1}{n} > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *O critério da comparação implica a divergência da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, *visto que a série harmônica é divergente (Exemplo 2.4).*

Teorema 2.5 *Se* $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ *finito,* $l \neq 0$, *então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge se e somente se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Notemos que $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, pois $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo $\varepsilon = l > 0$, garantimos a existência de $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_1$, temos $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| < l$. Logo, para todo $n > N_1$,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < l \Rightarrow -l < \frac{a_n}{b_n} - l < l \Rightarrow 0 < \frac{a_n}{b_n} < 2l \Rightarrow 0 < a_n < 2lb_n. \tag{2.1}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2lb_n$ também converge (Proposição 2.3). Do critério da comparação aplicado em (2.1), obtemos o resultado.

($\Rightarrow$) Tomemos $\varepsilon = \dfrac{l}{2} > 0$. Logo, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| < \dfrac{l}{2}$ sempre que $n > N_2$, isto é, se $n > N_2$, temos

$$0 < \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow 0 < \frac{b_n}{a_n} < \frac{2}{l} \Rightarrow 0 < b_n < \left(\frac{2}{l}\right) a_n.$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{l}\right) a_n$ converge (Proposição 2.3) e pelo critério da comparação, concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente. ■

Exemplo 2.7 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1}$ *diverge. De fato,* $\dfrac{n+1}{n^2+1} > 0$ *e* $\dfrac{1}{n} > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Além disso,* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{n+1}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+1} = 1 \neq 0$. *Como* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ *é divergente, segue do Teorema 2.5 que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1}$ *diverge.*

Exemplo 2.8 *O Teorema 2.5 implica a convergência da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, *pois* $\dfrac{1}{n^2} > 0$, $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ *é convergente (Exemplo 2.5) e vale*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1^2 \neq 0.$$

Definição 2.3 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é denominada* absolutamente convergente *quando* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *é convergente. Dizemos que uma série é* condicionalmente convergente *quando for convergente, mas não for absolutamente convergente.*

Teorema 2.6 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente. Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} (2|a_n|)$ converge (Proposição

2.3), segue do critério da comparação que $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + |a_n|)$ é convergente. Usando a Proposição 2.3 com $c = -1$, temos que $-\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ converge. Como $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, via Proposição 2.2, garantimos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. ■

Exemplo 2.9 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$ *é convergente. Inicialmente, observamos que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen} n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$. *Como* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ *converge (Exemplo 2.1),* $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} n}{2^n}\right|$ *também converge (devido ao critério da comparação). Concluímos então que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$ *é absolutamente convergente e portanto convergente (Teorema 2.6).*

Teorema 2.7 *(de Dirichlet) Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série (não necessariamente convergente) com a sequência das somas parciais* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *limitada. Se* (b_n) *for uma sequência não-crescente tal que* $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *é convergente.*

Demonstração: Observamos que a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ é dada por $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Iremos mostrar que

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n, \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Para isso, aplicaremos o Primeiro Princípio de Indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos $n = 1$. Logo $s_1 = a_1$ e então $a_1b_1 = s_1b_1$.

Suponhamos que (2.2) seja válida para algum $n > 1$. Como consequência

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + \cdots + a_{n+1}b_{n+1} &= s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} \\
&= s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} + s_nb_{n+1} - s_nb_{n+1} \\
&= s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n(b_n - b_{n+1}) + (s_n + a_{n+1})b_{n+1} \\
&= s_1(b_1 - b_2) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n(b_n - b_{n+1}) + s_{n+1}b_{n+1}.
\end{aligned}$$

Logo, (2.2) é verificada para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n b_n = 0$, pois (s_n) é limitada e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ por hipótese.

Afirmamos que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ é convergente.

De fato, (s_n) é limitada, logo existe $M > 0$ tal que $|s_n| \leq M$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Com isso

$$|s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)| = |s_{n-1}||b_{n-1} - b_n| \leq M|b_{n-1} - b_n|, \ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Sendo (b_n) não-crescente, ficamos com $|s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)| \leq M(b_{n-1} - b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Além disso, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_{n-1} - b_n)$ é convergente pois

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}(b_{k-1} - b_k) = \lim_{n\to+\infty} [(b_1 - b_2) + \cdots + (b_{n-1} - b_n)] = \lim_{n\to+\infty} (b_1 - b_n) = b_1,$$

já que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Consequentemente, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} M(b_{n-1} - b_n)$ converge e pelo Critério da Comparação, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)|$ também converge. Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ converge devido ao Teorema 2.6.

De (2.2), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} s_{k-1}(b_{k-1} - b_k) + s_n b_n \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} s_{k-1}(b_{k-1} - b_k).
\end{aligned}$$

Como consequência de nossa afirmação, garantimos que existe $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)$ e este é finito. Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ é convergente. ∎

Teorema 2.8 *(de Abel) Se* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série convergente e* (b_n) *é uma sequência não-crescente com* $b_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(não necessariamente com limite nulo), então* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *converge.*

Demonstração: Como (b_n) é uma sequência monótona e limitada, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ (devido ao Teorema 1.4). Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - b) = 0$ e a sequência $(b_n - b)$ é não-crescente. Além disso, sendo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente, garantimos que a sequência de suas somas parciais é limitada (Teorema 2.3). Pelo Teorema de Dirichlet, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b)$ converge. Como $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ba_n$ converge (pois $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge), a igualdade: $a_nb_n = a_n(b_n - b) + ba_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, permite-nos concluir que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$ converge. ∎

Teorema 2.9 *(de Leibniz) Se (b_n) é uma sequência não-crescente e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, então as séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} b_n$ são convergentes.*

Demonstração: As séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ possuem suas sequências das somas parciais limitadas. Desse modo, segue do Teorema de Dirichlet que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} b_n$ convergem. ∎

Definição 2.4 *Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. As séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$ são chamadas séries alternadas.*

O Teorema de Leibniz é bastante usado para estabelecer a convergência de séries alternadas. Uma aplicação simples é a seguinte

Exemplo 2.10 *A série alternada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ é convergente pelo Teorema de Leibniz, uma vez que $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é uma sequência não-crescente com $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. Também vemos que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$, isto é, esta série não é absolutamente convergente. Esse exemplo mostra que nem toda série convergente é absolutamente convergente (não valendo assim a recíproca do Teorema 2.6).*

Teorema 2.10 *(Comparação de razões) Seja $p \in \mathbb{N}$ e sejam (a_n), (b_n) sequências tais que $a_n > 0$, $b_n > 0$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n \geq p$.*

(i) *Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*

(ii) *Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.*

Demonstração: Para todo $n \geq p$, temos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, ou seja, $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \dfrac{a_n}{b_n}$. Com isso, garantimos que a sequência $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ é não-crescente para todo $n \geq p$. Em particular, $\dfrac{a_n}{b_n} \leq \dfrac{a_p}{b_p}$ se $n \geq p$, ou seja, $a_n \leq \left(\dfrac{a_p}{b_p}\right) b_n$ para cada $n \geq p$. Usando o critério da comparação (Teorema 2.4), obtemos **(i)** e **(ii)**. ∎

Exemplo 2.11 *A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, em que $a_n = \dfrac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n}$, diverge.*

De fato, escolhendo a sequência $b_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, verificamos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1.3.5.....(2n+1)}{2.4.6.....(2n+2)}}{\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} > \frac{2n}{2n+2} = \frac{n}{n+1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, segue do Teorema 2.10 que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n}$ diverge.

Teorema 2.11 *(Critério da razão) Sejam (a_n) uma sequência e $p \in \mathbb{N}$.*

(i) *Se $a_n > 0$ e existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$ para todo $n \geq p$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.*

(ii) *Se $a_n > 0$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ para todo $n \geq p$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*

Demonstração:

(i) Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$. Consideremos a sequência $b_n = k^n$. Dado $n \geq p$, temos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq k = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} k^n$ converge (Exemplo 2.1), o Teorema 2.10 garante que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Escolhemos a sequência $b_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, qualquer que seja $n \geq p$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Decorre do Teorema 2.10 que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, visto que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ é divergente.

■

No Teorema 2.11, item **(i)**, não podemos simplesmente considerar que para todo $n \geq p$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pois a sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ satisfaz essa hipótese, porém $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Teorema 2.12 *(Critério de D'Alembert) Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n > 0$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tem limite $l \in \mathbb{R}$ finito ou infinito.*

(i) *Se $l < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*

(ii) *Se $l > 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*

Demonstração:

(i) Como $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$ sempre que $n > N_1$. Sendo $l < 1$, escolhemos $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0$. Assim, se $n > N_1$, obtemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - l \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \frac{1-l}{2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1-l}{2} + l \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+l}{2}.$$

Além disso, $l < 1$ implica $\dfrac{1+l}{2} < 1$. Logo, se $n > N_1$, temos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon < 1$. Segue do critério da razão que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Da definição de limite, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$ se $n > N_2$. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{l-1}{2} > 0$ (pois, por hipótese, $l > 1$). Como consequência, para todo $n > N_2$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \frac{l-1}{2} \Rightarrow \frac{l+1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{3l-1}{2}.$$

Como $\dfrac{l+1}{2} > 1$, temos $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ sempre que $n > N_2$. Assim, concluímos do critério da razão que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Suponhamos agora que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. Por definição, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > N$. Logo, pelo critério da razão, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

■

Observação 2.1 *No Teorema 2.12, se $l = 1$, então não asseguramos a convergência e nem a divergência da série dada. Por exemplo, tomando as sequências: $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ e $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, vemos que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$. Entretanto, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, enquanto que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (Exemplo 2.8).*

Exemplo 2.12 *O critério de D'Alembert assegura a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, visto que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.*

Exemplo 2.13 *Seja $r \in \mathbb{R}$ com $0 < r < 1$. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n$ é convergente via critério de D'Alembert, uma vez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \lim_{n\to+\infty} r\left(\frac{n+1}{n}\right) = r < 1$.*

Teorema 2.13 *(Critério da raiz) Seja $p \in \mathbb{N}$ e seja (a_n) tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Se $\sqrt[n]{a_n} \leq k$, com $0 < k < 1$ para todo $n \geq p$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*

(ii) *Se* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *para todo* $n \geq p$, *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração:

(i) Para todo $n \geq p$, temos $\sqrt[n]{a_n} \leq k \Rightarrow a_n \leq k^n$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} k^n$ converge (pois $0 < k < 1$), garantimos pelo critério da comparação que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.

(ii) Uma vez que $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, temos $a_n \geq 1$ para todo $n \geq p$. Como consequência, $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$. Decorre da condição de anulamento que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

$\blacksquare$

Teorema 2.14 *(Critério da raiz de Cauchy) Seja* (a_n) *tal que* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Suponhamos que* $\sqrt[n]{a_n}$ *tem limite* $l \in \mathbb{R}$ *finito ou infinito.*

(i) *Se* $l < 1$, *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

(ii) *Se* $l > 1$, *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Demonstração:

(i) Como $l < 1$, tomemos $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0$. Da definição de $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, garantimos a existência de $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\sqrt[n]{a_n} - l| < \dfrac{1-l}{2}$ sempre que $n > N_1$. Assim, para todo $n > N_1$, temos $\sqrt[n]{a_n} < \dfrac{1-l}{2} + l$, ou seja, $\sqrt[n]{a_n} < \dfrac{1+l}{2}$. Além disso, $\dfrac{l+1}{2} < 1$. Com isso, $\sqrt[n]{a_n} < \dfrac{l+1}{2} < 1$ para todo $n > N_1$. Segue do critério da raiz (Teorema 2.13) que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(ii) Suponhamos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 1$. Logo, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ para todo $n > N_2$. Equivalentemente, $a_n \geq 1$ qualquer que seja $n > N_2$. Logo, $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ e decorre da condição de anulamento que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Caso tenhamos $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$, garantimos, via definição, a existência de $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_3$, temos $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Pelo critério da raiz, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

■

Teorema 2.15 *(critério da integral) Seja $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função não-crescente e tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1,+\infty)$. Suponhamos que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e somente se existe $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(x)dx$.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Como f é positiva e não-crescente em $[1,+\infty)$, garantimos que $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (visulizamos esta desigualdade na Figura 2.1).

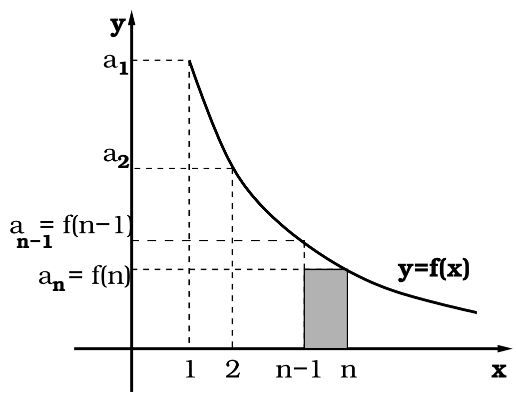

Figura 2.1: A área destacada tem valor $f(n)$. Vemos que $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx$.

Assim, para todo $n \geq 2$,

$$f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_1^2 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx \Rightarrow a_2 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Ou seja, $s_n - a_1 < \int_1^{+\infty} f(x)dx$, em que (s_n) denota a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Como, por hipótese, existe $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, temos (s_n) limitada.

Portanto, pelo critério da limitação, concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

($\Rightarrow$) Dado $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n) = a_n$. Com isso

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)dx \leq a_1 + \cdots + a_{n-1}, \ \forall\ n \geq 2. \tag{2.3}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, a sequência $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ é convergente e portanto limitada. Desse modo, segue de (2.3) que a sequência $\left(\displaystyle\int_1^n f(x)dx\right)$ é limitada. Além disso, $\left(\displaystyle\int_1^n f(x)dx\right)$ é não-decrescente, visto que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1, +\infty)$. Pelo Teorema 1.4, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx = b$.

Observe que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(x)dx = b$.

De fato, fixe $\varepsilon > 0$. Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx = b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, temos $\left|\displaystyle\int_1^n f(x)dx - b\right| < \varepsilon$. Seja $t \in \mathbb{R}$, $t \geq n_0 + 1$.

Escolhemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 + 1 \leq t \leq n$. Como consequência

$$\left|\int_1^{n_0+1} f(x)dx - b\right| < \varepsilon \text{ e } \left|\int_1^n f(x)dx - b\right| < \varepsilon,$$

pois $n \geq n_0 + 1 > n_0$. Sendo f positiva, garantimos que

$$\int_1^{n_0+1} f(x)dx \leq \int_1^t f(x)dx \leq \int_1^n f(x)dx.$$

Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$, $t > n_0$, temos

$$-\varepsilon < \int_1^{n_0+1} f(x)dx - b \leq \int_1^t f(x)dx - b \leq \int_1^n f(x)dx - b < \varepsilon \Rightarrow \left|\int_1^t f(x)dx - b\right| < \varepsilon.$$

Portanto, existe $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$ e vale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx = b$. ∎

Na demonstração do critério da integral, observamos que a existência da integral: $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ é equivalente a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)dx + \cdots .$$

Exemplo 2.14 *(Série harmônica de ordem p) Seja $p \in \mathbb{R}$ com $p > 0$. A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ *converge se $p > 1$ e é divergente quando $p \leq 1$.*

Para mostrar esse resultado, definimos a função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Notemos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1, +\infty)$ e além disso, se $1 \leq x_1 < x_2$, temos $\frac{1}{x_1^p} > \frac{1}{x_2^p}$, o que garante que f é não-crescente em seu domínio.

Consideremos a integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p}dx$. Quando $p = 1$, obtemos $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$. Se $p \neq 1$, temos

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t \to +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right).$$

Logo

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} +\infty, & se \quad p < 1 \\ \frac{1}{1-p}, & se \quad p > 1 \end{cases}.$$

Como consequência do critério da integral, inferimos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente quando $p > 1$ e diverge quando $0 < p \leq 1$. Finalmente, segue do Exemplo 2.6 que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se e somente se $p > 1$.

2.3 Reordenação de Séries

Definição 2.5 *Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dita uma reordenação da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se existe uma aplicação $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijetiva tal que $b_n = a_{\phi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Em geral, dada uma série convergente com soma $s \in \mathbb{R}$, uma reordenação desta série pode convergir para $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq s$. Este fato é ilustrado abaixo:

Exemplo 2.15 *A série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge[1] (devido ao Teorema de Leibniz).*

[1] A título de informação, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Seja $s \in \mathbb{R}$ *tal que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = s$. *Consideremos* (s_n) *a sequência das somas parciais desta série. Observamos que*

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

visto que as parcelas em parênteses são todas positivas. Como $s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, *garantimos que* $s_{2n} \geq \frac{1}{2}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e assim* $s = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_{2n} \geq \frac{1}{2}$, *ou seja,* $s > 0$.

Consideremos agora a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$. *Devido a Proposição 2.3, sua soma é* $\dfrac{s}{2}$.

Como consequência destes resultados, escrevemos

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \tag{2.4}$$

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots \tag{2.5}$$

Decorre da Proposição 2.2 que podemos somar termo a termo das séries convergentes acima. Desse modo, segue de (2.4) e (2.5) que

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Notemos que os termos da série descrita acima, cuja soma é $\frac{3s}{2}$, *exceto pela ordem, são os mesmos da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. *Além disso,* $\frac{3s}{2} \neq s$, *haja visto que* $s > 0$.

Logo, exibimos uma reordenação da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *cuja soma não é* s.

Teorema 2.16 *(de Dirichlet) Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *uma reordenação qualquer da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(i) *Se* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

(ii) *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *também é absolutamente convergente e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Demonstração:

(i) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma reordenação qualquer da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, ou seja, existe uma aplicação $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijetiva tal que $b_n = a_{\phi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Com efeito, fixemos $n \in \mathbb{N}$. Escolhemos $N = \max\{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)\}$. Com isso $\{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)\} \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ e vale

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_n &= a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + \cdots + a_{\phi(n)} \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_N \text{ (pois } a_n \geq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Como a desigualdade anterior é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Além disso, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, pois $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma reordenação de $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sempre que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for uma reordenação de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (basta considerarmos a aplicação ϕ^{-1}).

Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

(ii) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma reordenação da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ é uma reordenação da série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Decorre do item **(i)** que $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, visto que $|a_n| \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge e assim $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ também converge.

Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente. Do Teorema 2.6 segue que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

Observamos que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$, definimos $\begin{cases} x^+ = \max\{x, 0\} \\ x^- = \max\{-x, 0\} \end{cases}$. Segue que $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$ e vale

- se $x \geq 0$, então $x^+ = x$ e $x^- = 0$;

- se $x < 0$, temos: $x^+ = 0$ e $x^- = -x$.

Ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$, $x = x^+ - x^-$.

Sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^+$ uma reordenação da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^-$ uma reordenação de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$, garantimos, via item **(i)**, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^+ \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^-. \tag{2.6}$$

Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ e $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, inferimos do Critério da Comparação que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ são convergentes. Decorre de (2.6) que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^+$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^-$ também convergem.

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n^+ - b_n^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

$\blacksquare$

Definição 2.6 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é dita incondicionalmente convergente se, para qualquer aplicação* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijetiva, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ *é convergente.*

O item (ii) do teorema de Dirichlet (Teorema 2.16) afirma que toda série absolutamente convergente é incondicionalmente convergente. A recíproca desta implicação é verdadeira e será provada no Teorema 2.18. Antes, estudaremos o seguinte lema:

Lema 2.1 *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *condicionalmente convergente com* $p_n = a_n^+$ *e* $q_n = a_n^-$ *(*p_n *é a parte positiva de* a_n *e* q_n *é a parte negativa de* a_n*) de modo que* $p_n \geq 0$*,* $q_n \geq 0$*,* $p_n + q_n = |a_n|$ *e* $p_n - q_n = a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então* $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$*.*

Demonstração: Suponhamos que apenas uma dessas séries convirja (a primeira, por exemplo). Logo, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = s$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$, dado $L > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$ implica $\sum_{k=1}^{n} q_k > 2L + s$. Visto que $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = s$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\sum_{k=1}^{n} p_k - s\right| < L$ sempre que $n > N$.

Escolhemos $n_0 = \max\{M, N\}$. Como consequência, para todo $n > n_0$, temos $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} q_k < (L+s) - (2L+s) = -L$, isto é, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$, o que é absurdo, uma vez que esta série converge.

O caso em que tornamos $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n$ convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$ é similar. Sob essas hipóteses, obteremos a contradição $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n$ fossem ambas convergentes, segue da Proposição 2.2 que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, pois $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n + q_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n + \sum_{n=1}^{+\infty} q_n$. Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seria absolutamente convergente, o que é absurdo.

Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$. ■

Teorema 2.17 *(de Riemann) Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série condicionalmente convergente. Dado* $c \in \mathbb{R}$*, existe uma reordenação* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *tal que* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = c$*.*

Demonstração: Sejam (p_n) e (q_n) conforme o Lema 2.1. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge condicionalmente, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (condição de anulamento). Além disso

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = 0, \tag{2.7}$$

uma vez que $0 \leq p_n \leq |a_n|$, $0 \leq q_n \leq |a_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$. Entretanto, de acordo com o Lema 2.1, $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$.

Reordenemos os termos da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tomando como os primeiros termos: p_1, p_2,..., p_{n_1}, escolhidos na ordem com que aparecem na série, em que $n_1 \in \mathbb{N}$ é o menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > c.$$

Em seguida, escolhemos os termos negativos: $-q_1$, $-q_2$, ..., $-q_{n_2}$ (primeiro termo negativo da série, segundo termo negativo da série, etc), em que $n_2 \in \mathbb{N}$ é o menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{n_2} < c.$$

Observamos que as escolhas para n_1 e n_2 são possíveis, já que $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$.

Continuamos assim: escolhemos o menor índice $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} > c$$

e depois o menor índice $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \cdots - q_{n_4} < c.$$

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma reordenação da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ em que a sequência das somas parciais da nova série, que denotaremos por (t_n), converge para c. De fato, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, i ímpar, temos:

(i) $t_{n_{(i+1)}} < c < t_{n_i}$ (devido ao procedimento estabelecido acima);

(ii) $t_{n_i} - p_{n_i} \leq c$ (devido a escolha de $n_i \in \mathbb{N}$) $\overset{\textbf{(i)}}{\Rightarrow} 0 < t_{n_i} - c \leq p_{n_i}$;

(iii) $t_{n_{(i+1)}} + q_{n_{(i+1)}} \geq c$ (devido a escolha de $n_{(i+1)} \in \mathbb{N}$) $\overset{\textbf{(i)}}{\Rightarrow} 0 < c - t_{n_{(i+1)}} \leq q_{n_{(i+1)}}$.

Decorre de (2.7) que $\lim\limits_{i \to +\infty} p_{n_i} = \lim\limits_{i \to +\infty} q_{n_{(i+1)}} = 0$. Aplicando o teorema do confronto em **(ii)** e **(iii)**, obtemos:

$$\lim_{i \to +\infty} t_{n_i} = \lim_{i \to +\infty} t_{n_{(i+1)}} = c. \tag{2.8}$$

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, temos:

(iv) se $i \in \mathbb{N}$ for ímpar e $n_i < n < n_{(i+1)}$, então $t_{n_{(i+1)}} \leq t_n \leq t_{n_i}$;

(v) se $i \in \mathbb{N}$ for par e $n_i < n < n_{(i+1)}$, então $t_{n_i} \leq t_n \leq t_{(i+1)}$.

Portanto, usando (2.8) em **(iv)** e em **(v)**, concluímos que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = c$. ■

De posse do teorema de Riemann, estabelecemos a equivalência entre convergência absoluta e convergência incondicional para séries numéricas. Este fato é apresentado no teorema a seguir:

Teorema 2.18 *Uma série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente se e somente se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é incondicionalmente convergente.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Decorre do item **(ii)** do teorema de Dirichlet (Teorema 2.16).

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ não convirja absolutamente. Então, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é condicionalmente convergente e pelo teorema de Riemann, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = c$. Ou seja, é possível encontrarmos uma reordenação $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \neq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Essa afirmação leva-nos a uma contradição, visto que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é incondicionalmente convergente. Portanto, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente. ■

Capítulo 3

Aplicações de Séries

Nas seções seguintes, estudaremos algumas aplicações de séries numéricas em matemática. Na última delas, voltaremos nossa atenção em estimar a soma de algumas séries convergentes obtidas a partir dos critérios de convergência do capítulo 2.

3.1 Representação Decimal

Definição 3.1 *(*Representação decimal*). Seja* $(a_k)_{k\in\{0\}\cup\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ *uma sequência de números reais em que* a_0 *é um inteiro qualquer e* $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ *para todo* $k > 0$*. Um número real na* forma decimal*, representado por* $a_0, a_1a_2a_3\dots$*, é dado por*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Mostraremos que a série que define a representação decimal de um número real sempre converge.

Proposição 3.1 *Cada representação decimal denota um único número real.*

Demonstração: Para todo $k > 0$, temos $a_k \leq 9$ e daí $0 \leq \dfrac{a_k}{10^k} \leq \dfrac{9}{10^k}$. Além disso, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 1$. Do critério da comparação, a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ é convergente. Logo, concluímos que $a_0, a_1a_2\cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = c$, em que c é um número real.

Via Proposição 2.1, o número real que $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ representa é único. ∎

Exemplo 3.1 *Segue da definição de representação decimal que* $0,999\cdots = 1$. *De fato,* $0,99\cdots = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 1$. *Nesse caso, mostramos que uma representação decimal para 1 pode ser dada por* $a_0 = 0$ *e* $a_k = 9$ *para todo* $k > 0$, *ou seja, associamos* $0,999\ldots$ *ao número 1. Observamos também que 1 tem pelo menos duas representações decimais, pois podemos escrever:* $1 = 1,000\cdots = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{0}{10^k}$.

Exemplo 3.2 $a_0, 000\cdots = (a_0 - 1), 999\cdots = a_0$.

Com efeito, $(a_0 - 1), 999\cdots = (a_0 - 1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = (a_0 - 1) + 1 = a_0$.

Concluímos então que todo número inteiro a_0 *admite pelo menos duas representações decimais, a saber:* $a_0, 000\ldots$ *e* $(a_0 - 1), 999\ldots$.

3.2 Sobre a Série Harmônica

Uma aplicação interessante da divergência da série hamônica é apresentada na

Proposição 3.2 *Qualquer número racional positivo* x *pode ser escrito como soma de números distintos da forma* $\frac{1}{n}$ *(frações egípcias).*

Demonstração: Inicialmente, consideremos $0 < x \leq 1$ com $x \in \mathbb{Q}$. Então, podemos ter: **(i)** $x = \frac{1}{n}$ ou **(ii)** $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se **(i)** ocorrer, então o resultado está provado. No caso **(ii)**, suponhamos $x = \frac{p}{q}$, em que p e q são inteiros positivos. Definimos $y = x - \frac{1}{n+1} = \frac{p(n+1) - q}{q(n+1)} = \frac{p_1}{q_1}$, em que $0 < p_1 = p + (np - q) < p$, visto que $\frac{p}{q} < \frac{1}{n}$. Daí, observamos que $y = x - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1}$ e assim $0 < y < \frac{1}{n+1} < 1$.

Apliquemos agora o procedimento anterior para o número y. Para isso, definimos $z = y - \dfrac{1}{m+1} = x - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{m+1} = \dfrac{p_2}{q_2}$ para certos p_2, q_2 e m inteiros positivos com $m > n+1$ e $p_2 < p_1$. Procedendo dessa maneira, obtemos uma sequência decrescente de números positivos com $p_k = 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Como consequência, x será escrito como soma de frações distintas da forma $\dfrac{1}{n}$.

Suponhamos agora $x > 1$. Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n+1}$. Consideremos $m \in \mathbb{N}$ o menor número natural com essa propriedade. Entao, podemos escrever

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \leq x < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}.$$

Se $x = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{m}$, o resultado está provado. Consideremos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} < x < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}.$$

Definimos $w = x - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{m}\right)$. Segue que $0 < w < \dfrac{1}{m+1} < 1$. Aplicamos então o procedimento anterior para w, escrevendo-o como soma de números distintos da forma $\dfrac{1}{n}$ com $n > m+1$. Logo, $x = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) + w$ e o resultado está demonstrado. ∎

Exemplo 3.3 *Iremos escrever o número* $\dfrac{59}{60}$ *como soma de frações distintas da forma* $\dfrac{1}{n}$ *com* $n \in \mathbb{N}$.

Aplicaremos o procedimento descrito na demonstração da proposição anterior. Inicialmente, notemos que $\dfrac{1}{2} < \dfrac{59}{60} < 1$. *Definimos:* $y_1 = \dfrac{59}{60} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{29}{60}$. *Vemos que* $\dfrac{1}{3} < y_1 < \dfrac{1}{2}$. *Definimos assim* $y_2 = y_1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{60} = \dfrac{3}{20}$. *Notemos que* $\dfrac{1}{7} < y_2 < \dfrac{1}{3}$. *Seja então* $y_3 = y_2 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{140}$ *e o processo está finalizado.*

Logo, $\dfrac{59}{60} = \dfrac{1}{2} + y_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + y_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} + y_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{140}$.

Observamos que esta representação não é única, pois também podemos escrever $\dfrac{59}{60} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{30}$.

Exemplo 3.4 *Aplicaremos a Proposição 3.2 para escrever o número real* $\dfrac{19}{15}$ *como soma de frações distintas da forma* $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, vemos que $1 < \dfrac{19}{15} < 1 + \dfrac{1}{2}$. *Definimos* $w = \dfrac{19}{15} - 1 = \dfrac{4}{15}$. *Daí,* $0 < w < 1$ *e como na observação anterior, escrevemos*

$$w = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}.$$

Portanto, garantimos que $\dfrac{19}{15} = 1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{15}$.

3.3 Soma de Séries por Translação

Nesta seção, apresentamos o método da translação para obtermos a soma de algumas séries numéricas.

Exemplo 3.5 *Seja* $p \in \mathbb{R}$. *A série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^p a^k$ *converge quando* $|a| < 1$ *e diverge se* $|a| > 1$.

De fato, observamos que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{k^p a^k} = |a|[\lim_{k \to +\infty}(\sqrt[k]{k})]^p = |a|$, *pois* $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{k} = 1$. *O resultado decorre do critério da raiz de Cauchy.*

Exemplo 3.6 *Sejam* $g(k)$ *um polinômio e* $|a| < 1$. *Então* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g(k)a^k$ *é convergente. Com efeito, suponhamos* $g(k)$ *um polinômio de grau* n, *ou seja,* $g(k) = b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + \cdots + b_n k^n$. *Daí, temos*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g(k)a^k = \sum_{k=1}^{+\infty}(b_0 + b_1 k + \cdots + b_n k^n)a^k = b_0 \sum_{k=1}^{+\infty} a^k + b_1 \sum_{k=1}^{+\infty} k a^k + \cdots b_n \sum_{k=1}^{+\infty} k^n a^k.$$

As séries no membro direito da igualdade acima convergem devido ao Exemplo 3.5. Portanto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g(k)a^k$ *converge.*

Seja $s = \displaystyle\sum_{k=b}^{+\infty} g(k)a^k$ em que $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $g(k)$ é um polinômio de grau n e $|a| < 1$. Como consequência, escrevemos

$$s = \sum_{k=b}^{+\infty} g(k)a^k = g(b)a^b + \sum_{k=b+1}^{+\infty} g(k)a^k = g(b)a^b + \sum_{k=b}^{+\infty} g(k+1)a^{k+1}.$$

Além disso, $sa = \sum_{k=b}^{+\infty} g(k)a^{k+1}$. Logo

$$s - sa = g(b)a^b + \sum_{k=b}^{+\infty} g(k+1)a^{k+1} - \sum_{k=b}^{+\infty} g(k)a^{k+1} = g(b)a^b + \sum_{k=b}^{+\infty} \Delta g(k)a^{k+1},$$

onde $\Delta g(k) = g(k+1) - g(k)$. Notemos que $\Delta g(k)$ é um polinômio de grau $n-1$ na variável k. Definimos $g_1(k) = \Delta g(k)$. Apliquemos então o método descrito acima para calcular a soma da série convergente $\sum_{k=b}^{+\infty} g_1(k)a^{k+1}$. Prosseguindo desse modo, obteremos ao final um polinômio $g_r(k) = \Delta g_{r-1}(k)$ com grau zero, isto é, $g_r(k) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, para todo $k \geq b$, $k \in \mathbb{N}$. Usando as expressões encontradas, determinaremos a soma da série inicial $s = \sum_{k=b}^{+\infty} g(k)a^k$.

Aplicamos esse método nos exemplos abaixo.

Exemplo 3.7 *Suponhamos $\frac{1}{a} > 1$. Vimos que a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k$ é convergente. Iremos obter sua soma.*

Façamos $c = \frac{1}{a}$ e apliquemos o método da translação com $b = 0$, $g(k) = 1$ para todo $k \geq 0$ e $\Delta g(k) = 0$. Logo,

$$s - sc = g(0)c^0 + \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{1-c} = \frac{a}{a-1},$$

como esperávamos.

Exemplo 3.8 *Determinaremos a soma da série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k}$ usando o método da translação. Para isso, notemos que $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $g(k) = k+1$ e $\Delta g(k) = 1$. Daí, concluímos que*

$$s - \frac{s}{2} = g(0).\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{k=0}^{+\infty} 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$$

Portanto, $s - \frac{s}{2} = 2$, isto é, $s = 4$.

Exemplo 3.9 *Seja $a < 1$. Consideremos a série $\sum_{k=s}^{+\infty} \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} a^k$. Iremos mostrar via*

Princípio de Indução sobre $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *que* $\displaystyle\sum_{k=s}^{+\infty} \binom{k}{s} a^k = \frac{a^s}{(1-a)^{s+1}}$.

Para $s = 0$, *temos* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{0} a^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a} = \frac{a^0}{(1-a)^{0+1}}$ *(confirmada pelo Exemplo 2.1).*

Suponhamos válida para $s \in \mathbb{N}$, *isto é,* $\displaystyle\sum_{k=s}^{+\infty} \binom{k}{s} a^k = \frac{a^s}{(1-a)^{s+1}}$. *Mostraremos que* $\displaystyle\sum_{k=s+1}^{+\infty} \binom{k}{s+1} a^k = \frac{a^{s+1}}{(1-a)^{s+2}}$. *Façamos* $p = \displaystyle\sum_{k=s+1}^{+\infty} \binom{k}{s+1} a^k$. *Então*

$p = a^{s+1} + \displaystyle\sum_{k=s+2}^{+\infty} \binom{k}{s+1} a^k = a^{s+1} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \binom{k+1}{s+1} a^{k+1}$ *e* $pa = \displaystyle\sum_{k=s+1}^{+\infty} \binom{k}{s+1} a^{k+1}$.

Como consequência,

$$\begin{aligned}
p - pa &= a^{s+1} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \binom{k+1}{s+1} a^{k+1} - \sum_{k=s+1}^{+\infty} \binom{k}{s+1} \\
&= \sum_{k=s+1}^{+\infty} \left[\binom{k+1}{s+1} - \binom{k}{s+1} \right] a^{k+1} \\
&= a^{s+1} + \sum_{k=s+1}^{+\infty} \binom{k}{s} a^{k+1} \\
&= a^{s+1} + a \sum_{k=s}^{+\infty} \binom{k}{s} a^k - a^{s+1}
\end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução, escrevemos $p - pa = a\dfrac{a^s}{(1-a)^{s+1}}$ *e então* $p = \dfrac{a^{s+1}}{(1-a)^{s+2}}$ *o que completa a prova.*

3.4 Estimativa de Erro no Cálculo de Séries

No capítulo 2, estudamos a questão da convergência ou divergência de séries numéricas. Mesmo que saibamos que uma determinada série converge, resta ainda o problema de achar sua soma. Em geral, é sempre possível determinar a soma da série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ até o grau de precisão desejado somando-se um número suficiente de termos da série, ou seja, calculando-se a soma parcial (s_n) para um n suficientemente grande. Entretanto, para séries diferentes, "suficientemente grande" pode significar coisas muito diferentes. Se queremos tornar preciso o procedimento, temos que saber, para cada série, até que ponto o valor de n deve ser grande para assegurar a precisão desejada. Isso equivale a dizer que devemos determinar, para cada série, uma função $N(\varepsilon)$ tal que

$$|s_n - s| < \varepsilon \text{ para } n \geq N(\varepsilon).$$

Em outras palavras, os primeiros $N(\varepsilon)$ termos serão suficientes para produzir a soma s procurada com um erro inferior a ε.

Podemos enunciar isso de outra maneira, escrevendo $s = s_n + r_n$, onde r_n é o "resto". Em seguida, procuramos $N(\varepsilon)$ de modo que

$$|r_n| < \varepsilon \text{ para } n \geq N(\varepsilon).$$

Veremos que, para certas séries convergentes, podemos encontrar uma *estimativa superior* para r_n. Mais precisamente, podemos encontrar uma sequência (t_n) convergindo para 0 tal que

$$|r_n| \leq t_n, \text{ para todo } n > N_1, \ N_1 \in \mathbb{N}.$$

Caso a sequência (t_n) seja monótona não-crescente, escolhemos para $N(\varepsilon)$ o menor inteiro n tal que $t_n < \varepsilon$, pois se escolhermos $N(\varepsilon)$ desse modo e $n > \max\{N(\varepsilon), N_1\}$, teremos

$$|r_n| \leq t_n \leq t_{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Veremos a seguir como encontrar uma tal sequência monótona não-crescente (t_n) quando a série converge em decorrência de um dos critérios estudados no capítulo anterior: o critério da comparação, o critério da razão, o critério da raiz e o teorema de Leibniz para séries alternadas.

Teorema 3.1 *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sequências de números reais e a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *convergente para* s *como anteriormente. Se existir* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n| \leq b_n$ *para todo* $n > N_1$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *convergir, então* $|r_n| \leq \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m = t_n$ *para* $n > N_1$ *e a sequência* (t_n) *é monótona não-crescente e convergente para 0.*

Demonstração: Como $s = s_n + r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$r_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p} + \cdots = \lim_{p \to +\infty} \sum_{m=n+1}^{n+p} a_m.$$

Assim, se $n > N_1$, temos

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \\ &\leq b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n > N_1$, obtemos:

$$|r_n| = \lim_{p \to +\infty} \left| \sum_{m=n+1}^{n+p} a_m \right| \leq \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m = t_n.$$

Além disso, vemos que (t_n) é o resto da série de termos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Segue daí que (t_n) é monótona não-crescente. Por definição, $t_n = \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m - \sum_{m=1}^{n} b_m$. Como a série $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ é convergente, garantimos que $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m = \lim_{n \to +\infty} \sum_{m=1}^{n} b_m$. Como sequência dessas igualdades, $\lim t_n = 0$. ∎

Em outras palavras, o teorema afirma que se uma série convergir pelo critério da comparação, então o valor absoluto do resto será no máximo igual ao resto da série de comparação.

Exemplo 3.10 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ *converge via comparação com a série geométrica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Então o resto da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ *após 5 termos é, no máximo,*

$$t_5 = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} \cdots = \frac{1}{2^6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2^6}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{32}.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, *temos* $t_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{2^n}$. *Dado* $\varepsilon > 0$ *tal que* $t_n < \varepsilon$, *devemos ter* $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ *e então* $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$. *Logo,* $n \log 2 > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, *ou seja,* $n > -\frac{\log \varepsilon}{\log 2}$. *Portanto, podemos escolher* $N(\varepsilon)$ *como sendo o menor inteiro que satisfaça essa desigualdade.*

Teorema 3.2 *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *convergir pelo critério da integral com a função* $f(x)$ *decrescente para* $x \geq 1$, *então*

$$|r_n| < \int_n^{+\infty} f(x)dx = t_n$$

para $n \geq 1$ *e a sequência* (t_n) *será monótona decrescente e convergente para 0.*

Demonstração: Observamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$\int_n^{+\infty} f(x)dx = \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m, \text{ em que } b_m = \int_{m-1}^{m} f(x)dx.$$

Como consequência, $\int_n^{+\infty} f(x)dx = \lim_{p\to+\infty} \int_n^{n+p} f(x)dx = \lim_{p\to+\infty} \sum_{m=n+1}^{n+p} b_m.$

Da demonstração do critério da integral, obtemos $|a_n| < \int_{n-1}^{n} f(x)dx = b_n$. Logo, concluímos que $|r_n| < \sum_{m=n+1}^{+\infty} b_m = \int_n^{+\infty} f(x)dx.$

A sequência (t_n) dada por $t_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx$ é monótona não-crescente, pois $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1, +\infty)$. Agora, como a série dada converge, existe $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ e portanto (t_n) converge para 0. ∎

Exemplo 3.11 *Vimos que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\xi}$ *converge se* $\xi > 1$. *Decorre do Teorema 3.2 que* $0 < r_n = \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^\xi} < \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^\xi}dx = \frac{1}{(\xi-1)n^{\xi-1}}$. *Esse resultado poderá ser utilizado* *para toda série cuja convergência segue do teste da comparação com uma série harmônica de ordem ξ.*

Se, por exemplo, $p = 6$ então $t_n = \dfrac{0,2}{n^5}$. Daí, podemos escolher para $N(\varepsilon)$ o menor inteiro n tal que $n^5 > \dfrac{0,2}{\varepsilon}$. Supondo $\varepsilon = 10^{-4}$, serão suficientes somar 5 termos para calcular a série harmônica de ordem 6 com um erro inferior a ε, isto é,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \approx 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} = 1,0173.$$

Teorema 3.3 *Se $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r < 1$ para $n > N_1$, $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge pelo critério da razão, então*

$$|r_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1-r} = t_n, \ \ n > N_1$$

e a sequência (t_n) é monótona decrescente e convergente para 0.

Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então r será no mínimo igual a L.

Se $1 > \left|\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right| \geq \left|\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\right|$ para $n > N_1$, então

$$|r_n| \leq \frac{|a_{n+1}^2|}{|a_{n+1}| - |a_{n+2}|} = t_n^*, \ \ n > N_1,$$

em que (t_n^*) é monótona decrescente e convergente para 0.

Demonstração: Como na demonstração do Teorema 3.1, escrevemos

$$|r_n| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots = |a_{n+1}| \left(1 + \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right| + \left|\frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}\right| + \cdots\right) \text{ sempre que } n > N_1.$$

Por hipótese, $\left|\dfrac{a_{n+k}}{a_{n+1}}\right| \leq r^{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como consequência, para todo $n > N_1$, garantimos que $|r_n| \leq |a_{n+1}|(1 + r + r^2 + \cdots) = \dfrac{|a_{n+1}|}{1-r} = t_n$.

Também por hipótese, vemos que $t_{n+1} < t_n$ para todo $n > N_1$. Além disso, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, $\lim t_n = 0$.

Para provarmos a segunda afirmação, suponhamos por absurdo que $r < L$. Como $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r$, teremos $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r < L$, o que é absurdo. Logo, $L \leq r$.

Finalmente, fazendo $r = \dfrac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|}$, obtemos

$$|r_n| \leq |a_{n+1}| \frac{1}{1 - \left|\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|} = \frac{|a_{n+1}^2|}{|a_{n+1}| - |a_{n+2}|} = t_n^* \text{ sempre que } n > N_1,$$

o que estabelece a última desigualdade. ■

Exemplo 3.12 *Consideremos a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n2^n}$. *Observamos que esta série converge via critério de D'Alembert e* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$. *Como* $\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *garantimos que* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \dfrac{1}{2} < 1$. *Logo, podemos usar* $r = \dfrac{1}{2}$ *e pelo teorema anterior temos, por exemplo,*

$$r_5 = \frac{7}{6.2^6} + \frac{8}{7.2^7} + \cdots < \frac{|a_6|}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{192} = 0,037.$$

Teorema 3.4 *Se* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq r < 1$ *para* $n > N_1$, *de modo que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge pelo critério da raiz, então*

$$|r_n| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} = t_n, \text{ sempre que } n > N_1.$$

Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R < 1$, *então* r *será no mínimo igual a* R.

Se $1 > |a_{n+1}|^{1/(n+1)} \geq |a_{n+2}|^{1/(n+2)}$ *para* $n > N_1$, *então*

$$|r_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1 - |a_{n+1}|^{1/(n+1)}} = t_n^*, \ n > N_1.$$

As sequências (t_n) *e* (t_n^*) *são monótonas não-crescentes e convergentes para 0.*

Demonstração: Para $n > N_1$, temos

$$|r_n| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots \leq r^{n+1} + r^{n+2} + \cdots = r^{n+1}(1 + r + r^2 + \cdots) = \frac{r^{n+1}}{1-r} = t_n.$$

Supondo $r < R$, obteremos a contradição $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \leq r < R$.

Para finalizar, façamos $r = |a_{n+1}|^{1/(n+1)}$. Daí, para todo $n > N_1$, obtemos

$$|r_n| \leq |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots = r^{n+1}+r^{n+2}+\cdots = r^{n+1}(1+r+r^2+\cdots) = \frac{|a_{n+1}|}{1-|a_{n+1}|^{1/(n+1)}} = t_n^*.$$

Da definição de (t_n) e (t_n^*), garantimos que estas sequências são mónotonas não-crescentes. Além disso, convergem para 0, pois $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, por hipótese. ■

Exemplo 3.13 *A série* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ *é convergente pelo critério da raiz. Além disso, para todo* $n \geq 3$, *vemos que*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\log n}$$

e então $\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \leq \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

Por exemplo, usando o teorema anterior, inferimos que

$$r_5 = \frac{1}{(\log 6)^6} + \frac{1}{(\log 7)^7} + \cdots \leq \frac{\frac{1}{(\log 6)^6}}{1-\frac{1}{\log 6}} \approx 0,06.$$

Teorema 3.5 *Se a série* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *convergir pelo teorema de Leibniz, então*

$$0 < |r_n| < a_{n+1} = t_n.$$

Consequentemente, poderemos escolher $N(\varepsilon)$ *como o menor inteiro* n *tal que* $a_{n+1} < \varepsilon$.

Demonstração: Por indução, temos $s_2 < s_4 < \cdots s_{2n} < \cdots < s_{2n-1} < \cdots < s_3 < s_1$, em que (s_n) é a sequência das somas parciais da série alternada dada. Seja $s = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Então, devemos ter $s_{2n} < s < s_{2n+1}$ e $s_{2n} < s < s_{2n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, $0 < r_{2n} = s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{n+1}$ e $0 > r_{2n-1} = s - s_{2n-1} > s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n}$, ou seja, $0 < r_{2n} < a_{2n+1}$ e $-a_{2n} < r_{2n-1} < 0$ (visto que $a_n > 0$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, mostramos que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $0 < |r_n| < a_{n+1}$. ■

Do teorema acima, também podemos concluir que r_n é positivo se n é par e r_n é negativo caso n seja ímpar.

Exemplo 3.14 *A série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ *converge pelo teorema de Leibniz. Encontraremos sua soma com precisão de três casas decimais. Observamos que*

$$s = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \cdots$$

e além disso $a_7 = \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} = 0,0002$. *Do Teorema 3.5,* $|s - s_6| < a_7 < 0,0002$. *Esse erro menor que* $0,0002$ *não afeta a terceira casa decimal. Portanto,* $s \approx 0,368$ *com precisão de 3 casas decimais (uma vez que* $s_6 \approx 0,368056$*).*

Considerações Finais

Neste trabalho, que iniciou-se em julho de 2010, destacamos diversos pontos positivos.

Inicialmente, procuramos apesentá-lo da maneira mais didática possível. Para tanto, preparamos o capítulo "Sequências Numéricas" cujo objetivo foi introduzir as ferramentas necessárias ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Além disso, durante todo o trabalho, insistimos na formulação de vários exemplos de forma a elucidar toda a teoria desenvolvida.

No que tange ao capítulo 2, preocupamo-nos, sobretudo, com o rigor matemático na apresentação das séries numéricas e em seus critérios de convergência, buscando sempre torná-lo o mais acessível que possível. Com este intuito, recorremos a vários livros da bibliografia.

No capítulo 3, selecionamos algumas aplicações possíveis das séries numéricas. Além disso, procuramos calcular a soma de algumas séries e finalizamos construindo estimativas para esta soma, visto que nem sempre é possível estabelecê-la.

Finalmente, gostaríamos de enfatizar que a equivalência entre séries incondicionalmente convergentes e absolutamente convergentes não ocorre em espaços mais gerais. Em 1950, Dvoretzky e Rogers provaram que em espaços de Banach de dimensão infinita existem séries incondicionalmente convergentes, mas não absolutamente. Uma de nossas metas seria o estudo deste espaço, com as correspondentes definições de séries. Entretanto, para este propósito, é necessário o estudo da teoria de espaços de Banach, que tornaria este trabalho demasiadamente extenso. O estudo do Teorema de Rogers-Dvoretzky (conforme referência [3]) é tido como objetivo futuro do autor.

Referências Bibliográficas

[1] APOSTOL, T. – *Cálculo - Volume 1.* II Ed. Reverté Ltda, 1981.

[2] ÁVILA, G. – *Introdução à Análise Matemática.* 2ª Ed. Editora Edgar Blucher Ltda, 1999.

[3] BOTELHO, G. – *Séries Incondicionalmente Convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers.* Matemática Universitária, Volume: 103-111.

[4] KAPLAN, W. – *Cálculo Avançado - Volume II.* Edgard Blucher, 1972.

[5] LIMA, E. L. – *Análise - Volume 1.* IMPA, 2006.

[6] SPIVAK, M. – *Calculus.* W.A. Benjamin, 1967.

[7] STEWART, J. *Cálculo - Volume II*, Pioneira Thompson Learning, 2001.