UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
FORMAÇÃO DE PROFESSOR

TRANSFORMADA DE LAPLACE: uma introdução com aplicações.

VALMEI ABREU JÚNIOR

Florianópolis – SC

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
FORMAÇÃO DE PROFESSOR

TRANSFORMADA DE LAPLACE: uma introdução com aplicações.

VALMEI ABREU JÚNIOR

Monografia apresentada ao Curso de Pós-graduação em Matemática – Formação de Professores da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientação: Prof° Félix Pedro Quispe Gómez

Florianópolis – SC

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

VALMEI ABREU JÚNIOR

TRANSFORMADA DE LAPLACE: uma introdução com aplicações.

Monografia aprovada pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade do Federal de Santa Catarina, pela Comissão Julgadora abaixo identificada.

Florianópolis, 17 fevereiro de 2011

Presidente: Prof. Félix Pedro Quispe Gómez, Dr.

Membro: Prof. Márcio Rodolfo Fernandes, Dr.

Membro: Prof. Sergio Eduardo Michelin, Dr.

Ao meu Anjo, onde quer que ele esteja.

AGRADECIMENTOS

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e divulgação deste trabalho.

Meu especial agradecimento a todos os Professores, Tutores e colegas da primeira turma de Especialização em Matemática – Formação de Professores, da Universidade do Federal de Santa Catarina, pelo companheirismo e pela disposição, sempre presente, em ajudar.

Finalmente, agradeço ao professor Félix Pedro Quispe Gómez pela orientação e pela amizade, além disso, menção especial a seu dedicado e profissional trabalho na formatação final desta monografia.

RESUMO

Este trabalho pretende abordar uma transformação especial do Cálculo Diferencial e Integral, denominada de Transformada de Laplace, apresentando, inicialmente, sua definição formal que, para sua determinação, faz uso da integral imprópria e de uma condição de existência. A Transformada de Laplace é uma ferramenta amplamente utilizada em áreas que envolvem fenômenos físicos, como as engenharias, pois as equações que modelam esses fenômenos são, com o uso da transformada, resolvidas de forma algébrica e apresentam a vantagem de não ser necessário a determinação de uma solução geral em problemas de valor inicial. Assim, considerando a Transformada de Laplace, suas propriedades e funções que fazem uso do seu conceito, tentar-se-á mostrar a vantagem do uso deste poderoso artifício.

Está evidente que nesta monografia não se cobre todo o material. Existem muitos resultados mais sofisticados os quais podem ser encontrados em trabalhos avançados, e não se encontram em nosso escopo por agora. Por exemplo, os conceitos de espaços topológicos, que foram evitados, aparecem em estágios mais avançados da teoria.

Concluindo, muito da teoria do método da transformada de Laplace, a parte que muitos estudantes precisam conhecer, pode ser feita sem os métodos avançados. É este o principal objetivo desta monografia.

Palavras Chaves: Transformada de Laplace; Transformação; Integrais impróprias.

LISTA DE FIGURAS

CONTEÚDO

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da transformada de Laplace necessita do conhecimento de alguns assuntos abordados em Cálculo Diferencial e Integral, amplamente debatido nas literaturas indicadas.

Assim sendo, planejamos este trabalho de forma que seja autossuficiente. No primeiro capítulo fazemos uma breve introdução aos conceitos e as propriedades a serem utilizadas sem fornecer uma demonstração rigorosa. No segundo capítulo discernimos sobre as distintas formas de funcionamento da transformada de Laplace, sobre funções apropriadas e, principalmente, ao tentar aplicar a transformada inversa, pois para uma abordagem completa teríamos que iniciar por uma definição que contemple os números complexos. Finalmente, no terceiro capítulo aplicamos a transformada para resolver equações diferenciais ordinárias e sistemas de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes.

No entanto, a eficiência da transformada de Laplace, no caso de resolução de equações diferenciais, está no fato de que é possível lidar com elas quando possuem coeficientes variáveis.

1.1. CONTINUIDADE DE FUNÇÕES REAIS

A idéia de continuidade pode ser relacionada, intuitivamente, como o tempo, pois ao ser representado graficamente, não há interrupções em sua linha, já que o tempo não pára, ou seja, não há quebras no seu gráfico.

Matematicamente, a continuidade também será relacionada a funções que não apresentam interrupções em seus gráficos.

A título de ilustração, as funções representadas na figura 2 não são funções contínuas, pois nos gráficos (a) e (b) há uma “quebra” na representação gráfica no ponto 1 e no gráfico (c), no ponto 2.

Para que uma função seja considerada contínua em dado intervalo, esta deve satisfazer a definição de continuidade.

Figura 1. Gráfico da continuidade do tempo

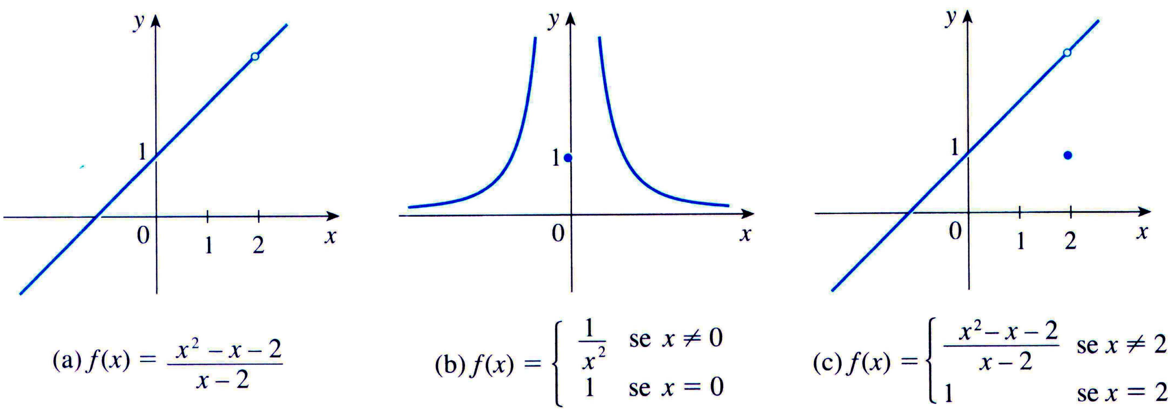

Figura 2. Gráficos de funções descontínuas

DEFINIÇÃO DE CONTINUIDADE

Uma função f é contínua em um número c se satisfaz as seguintes condições:

i) $f(c)$ é definida; ii) $\lim_{x \to c} f(x)$ existe; iii) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Se uma das três condições apresentadas na definição anterior não for satisfeita, a função será dita descontínua em c.

ILUSTRAÇÕES DE CONTINUIDADE

Exemplo 1. Considere a função real dada pela seguinte lei de formação $f(x) = x + 2$**.** Verifique a continuidade em todo seu domínio.

Solução. A função dada é contínua, resulta de aplicar a definição, anterior. De fato, para todo ponto c

$$\lim_{x \to c} f(x) = c + 2 = f(c)$$

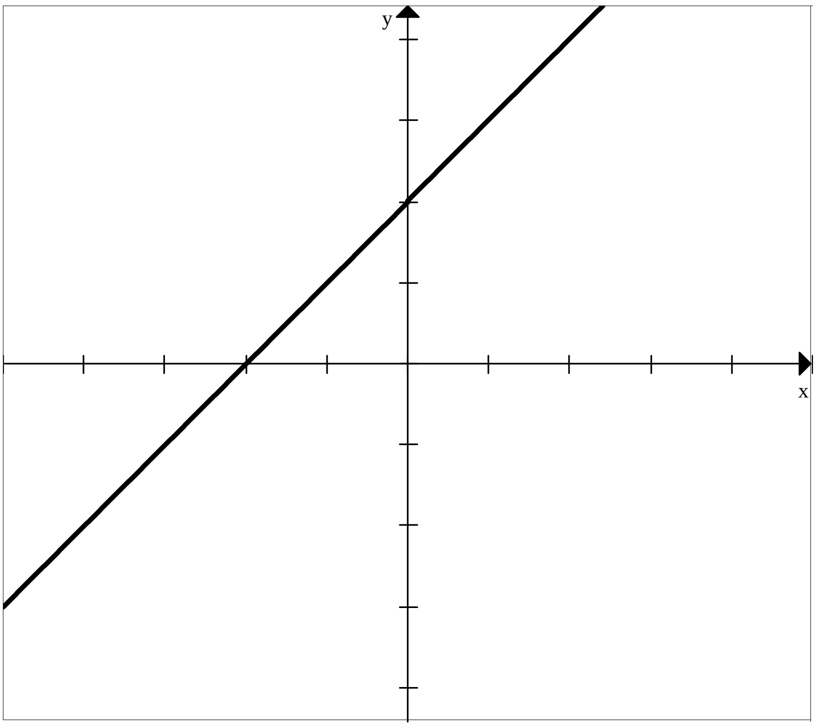

Figura 3. Gráfico da função $f(x) = x + 2$

Exemplo 2. Verifique se a função dada por

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

é descontínua para $c = 1$.

Solução. Observamos que o valor $g(1)$ é indefinido, ou seja, $g(x)$ não satisfaz a condição (i) da definição de continuidade.

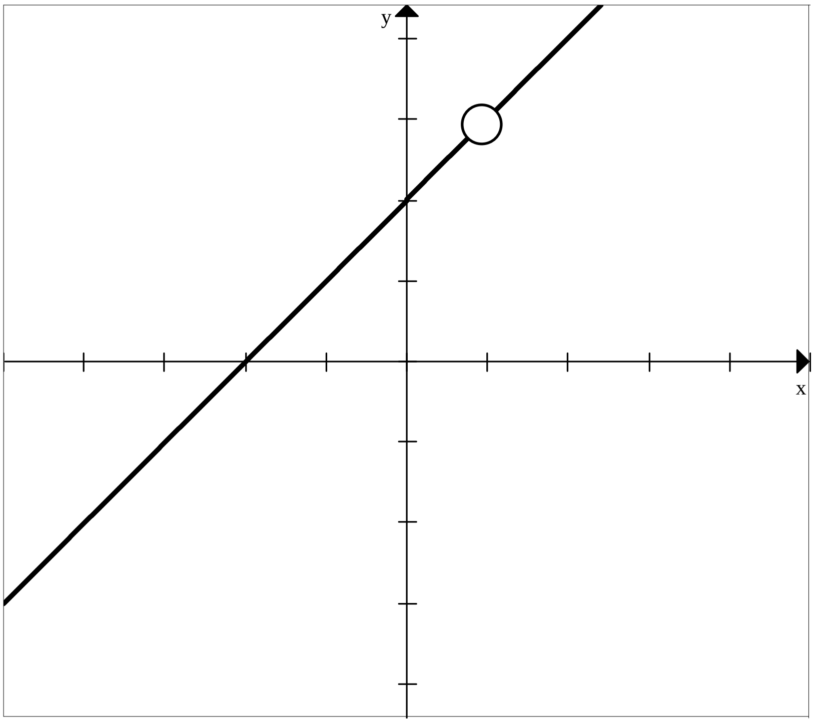

Figura 4 . Gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Exemplo 3. Considere a função definida da seguinte maneira,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Mostre que não é contínua em $c = 1$.

Solução. Aplicando a definição de continuidade,

$$\lim_{x \to 1} h(x) = 3 \neq h(1)$$

A figura 5, gráfico da função $h(x)$, mostra essa desigualdade.

Exemplo 4. Determine se a função $p(x) = \dfrac{1}{x}$ é descontínua para $c = 0$.

Solução. Novamente aplicando a definição, temos que $h(0)$ e também que $\lim_{x \to 0} h(x)$ não existem. A figura 6, gráfico da função $p(x)$, mostra nossa conclusão.

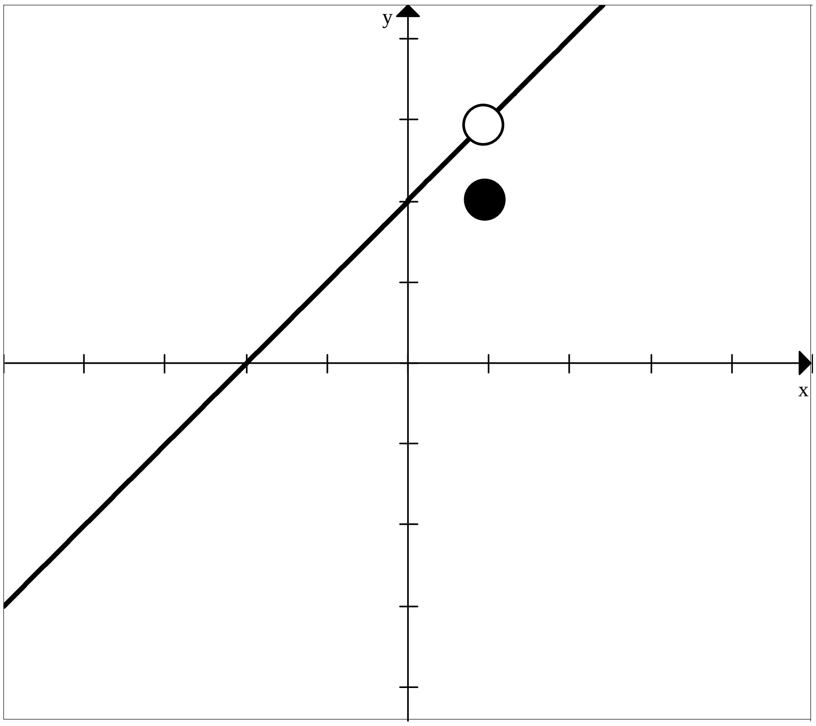

Figura 5. Gráfico da função $h(x)$

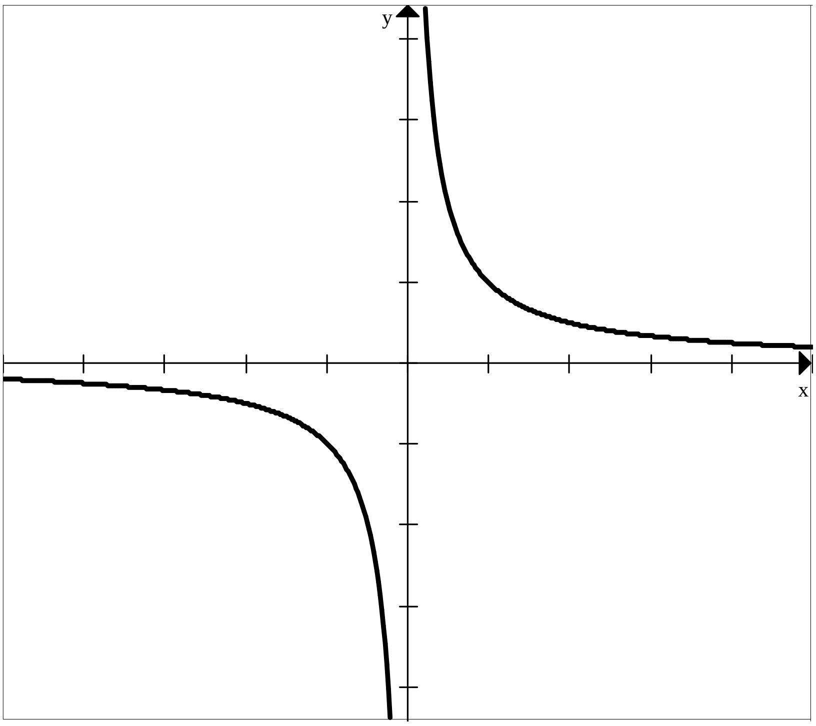

Figura 6. Gráfico da função $p(x) = \dfrac{1}{x}$

1.2. CONTINUIDADE EM UM INTERVALO FECHADO

Seja f uma função definida em um intervalo $[a,b]$. A função f será contínua em $[a,b]$ se é contínua em (a,b) e, além disso,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \tag{1.1}$$

Exemplo 1. Verifique se a função definida por $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ é contínua no intervalo fechado $[-3,3]$.

Solução. Calculando os dois limites exigidos na definição anterior, obtemos

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9-9} = 0 = f(-3)$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9-9} = 0 = f(3)$$

Assim, f é contínua à direita em -3 e contínua à esquerda em 3 e, portanto, f é contínua em $[-3,3]$.

1.3. FUNÇÃO SECCIONALMENTE CONTÍNUA

Uma função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua quando, em qualquer intervalo $[a,b]$ contido em $[0,\infty)$, f tem, no máximo, um número finto de descontinuidade e, nestes pontos, os limites laterais são finitos.

ILUSTRAÇÕES DE FUNÇÕES SECCIONALMENTE CONTÍNUA

Exemplo 1. Quando uma função f é seccionalmente contínua num intervalo fechado?

Solução. Uma função é seccionalmente contínua, se tem uma infinidade de pontos de descontinuidade, mas em cada intervalo $[a,b]$ contido em $[0,\infty)$, só tem um número finito de descontinuidade.

O seguinte gráfico ilustra a resposta anterior.

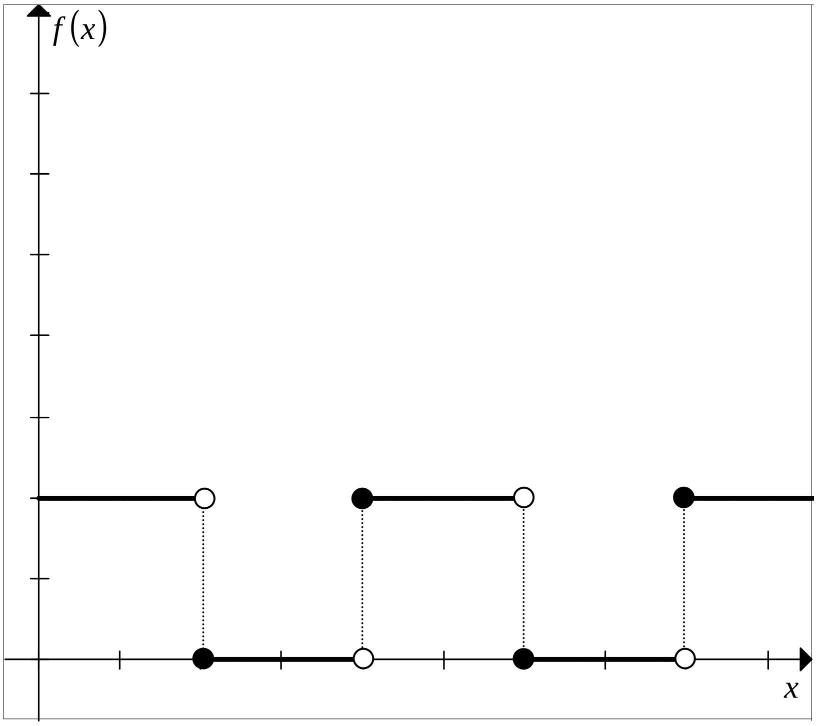

Figura 7. Gráfico da função contínua por intervalo

Exemplo 2. Esboçar o gráfico de uma função f que não seja seccionalmente contínua.

Solução. Esboçar o gráfico de uma função f que não seja seccionalmente contínua trata-se de construir uma função que satisfaz o seguinte limite, $\lim_{t \to 1^-} f(t) = +\infty$. A figura 8 representa esta função.

1.4. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Na avaliação da integral definida

$$\int_b^a f(x)\,dx \tag{1.2}$$

os limites de integração a e b são números reais e se f for contínua em $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a,b]$, a integral (1.2) representará a área sob o gráfico de f entre a e b.

Há muitos casos em que a integral definida (1.2) não representa a área de uma região, pois se $f(x) < 0$, para algum x em $[a,b]$, a integral definida pode ser negativa ou zero

Se considerarmos os limites de integração infinitos, a integral definida (1.2) será denominada INTEGRAL IMPRÓPRIA.

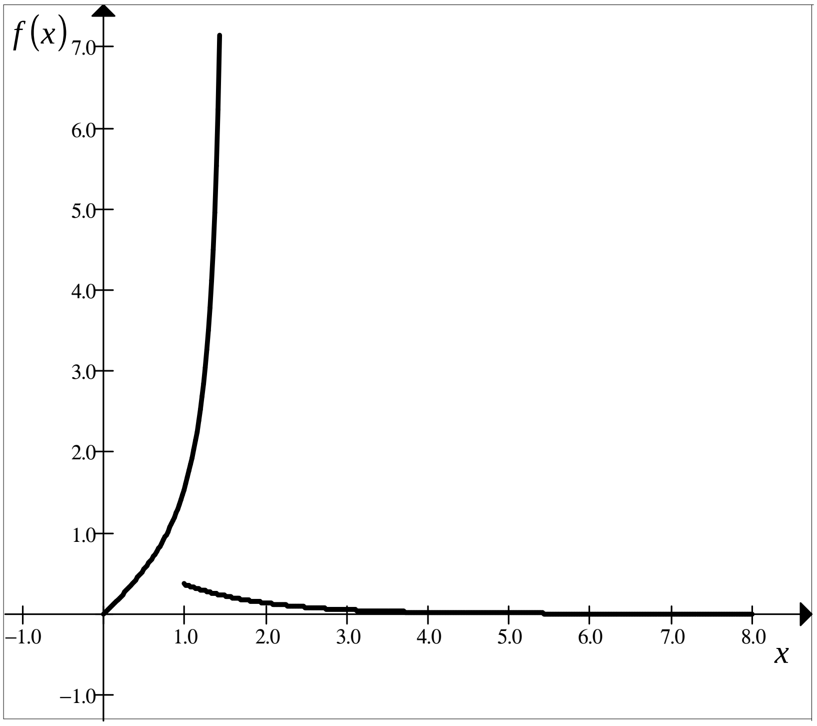

Figura 8. Gráfico da função descontínua

DEFINIÇÃO DE INTEGRAL IMPRÓPRIA

$i)$ Se f é contínua em $[\, a,\ \infty\,)$ a valores reais, então

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \tag{1.3}$$

desde que o limite exista;

$ii)$ Se f é contínua em $(-\infty, a\,]$, então

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx \tag{1.4}$$

desde que o limite exista.

Se os limites apresentados em (1.3) e (1.4) existirem, diz-se que as integrais impróprias são CONVERGENTES; o limite é então o valor da própria integral imprópria. Se os limites não existirem, as integrais serão ditas DIVERGENTES.

ILUSTRAÇÕES DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Exemplo 1. Calcule a seguinte integral imprópria,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Solução. Aplicando definição

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\, dx .$$

Como a integral definida resulta em

$$\int_1^{t} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right] \Bigg|_1^t = -\frac{1}{t} + 1$$

Aplicando limite ao infinito,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{t} + 1 \right] = 1 .$$

Portanto, como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$, a integral imprópria é convergente.

Exemplo 2. Calcular a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

se for possível.

Solução. Utilizando o teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\int_1^{t} \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^t = \ln t .$$

Assim, pela definição de integral imprópria teremos,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty .$$

Logo, a integral imprópria é divergente.

A integral (1.2) pode ter os dois limites de integração infinitos e, para esse caso, a integral será avaliada conforme a definição a seguir.

1.5. INTEGRAL IMPRÓPRIA NO INFINITO

Seja f contínua para todo x. Se a é um número real arbitrário, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \tag{1.5}$$

desde que as integrais impróprias à direita da igualdade sejam convergentes.

Se uma das integrais de (1.5) diverge, então a integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ será dita divergente, independentemente da escolha de a.

ILUSTRAÇÃO DE INTEGRAL IMPRÓPRIA.

Exemplo 1. Calcular a seguinte integral imprópria com limites de integração infinitos dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

Solução. Utilizando a equação (1.5) com $a = 0$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx .$$

Em seguida, aplicando a equação (2.3), resulta

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\arctan t - \arctan 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Analogamente, pode-se mostrar, por meio da equação (1.4), que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Conseqüentemente, a integral imprópria é convergente e tem o valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

1.6. FUNÇÕES DE ORDEM EXPONENCIAL

DEFINICAO DE FUNCAO DE ORDEM EXPONENCIAL.

Dizemos que uma função f é de **ordem exponencial** c se existem constantes c**,** chamada de "abscissa de convergência"**,** $M > 0$ e $T > 0$ de forma que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

ILUSTRAÇÕES DA DEFINIÇÃO DE ORDEM EXPONENCIAL

Exemplo 1. Considere a função trigonométrica $f(t) = \text{sen}(at)$. Mostre que é de ordem exponencial.

Solução. Aplicando a definição, temos

$$|\text{sen}(at)| \leq 1 = e^{0t} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0. \tag{1.6}$$

Pelo mesmo raciocínio, qualquer função limitada em $[0, \infty)$ é de ordem exponencial.

Exemplo 2. Considere a função polinomial $f(t) = t^n$, para n um número natural fixo. Mostre que é de ordem exponencial.

Solução. Aplicando a regra de L'Hopital n vezes no seguinte limite

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0$$

Logo, existe um t_0 tal que

$$\left|\frac{t^n}{e^t}\right| \leq 1 \quad \text{onde} \quad |t^n| \leq 1 \cdot e^{1t} \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0$$

Exemplo 3. Seja a função exponencial dada por $f(t) = e^{t^2}$ Mostre que $f(t)$ não é de ordem exponencial.

Solução. Para qualquer $M > 0$ e c,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{Me^{ct}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{M} e^{\left(t^2 - ct\right)} = \infty\,. \tag{1.7}$$

Se existisse t_0 tal que, para todo $t \geq t_0$ tivéssemos $e^{t^2} \leq Me^{ct}$, teríamos $\dfrac{e^{t^2}}{Me^{ct}} \leq 1$, o que é impossível, pois $\dfrac{e^{t^2}}{Me^{ct}}$ está tendendo ao infinito.

2. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Do Cálculo Diferencial e Integral, podemos considerar a diferenciação e a integração como *transformações*, isto é, essas operações transformam uma dada função em outra.

Uma transformação integral especial é a transformada de Laplace, onde a idéia básica consiste em considerar um conjunto de funções definidas no intervalo $[0,+\infty)$ onde, a cada função f deste conjunto, associamos uma função F definida no intervalo $(a,+\infty)$, ao qual denominamos "Transformada de Laplace de f", representada por $F=\mathcal{L}\{f\}$. Esta associação é construída de tal modo que as operações "diferenciais" com as funções f, correspondem a operações "algébricas" com as funções F. Isso possibilita, por exemplo, transformar certas equações diferenciais em equações algébricas, sendo esta a principal aplicação da transformada de Laplace.

Como, em geral, estas equações diferenciais provêm da Física, adotamos como t a variável no intervalo $[0,+\infty)$ e como s a variável no intervalo $(a,+\infty)$. Assim, consideramos $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$.

DEFINIÇÃO. Seja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$. Defini-se como **transformada de Laplace** de f como sendo a função F tal que

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\mathcal{L}\{f(t)\}, \qquad (2.1)$$

desde que a integral imprópria convirja.

Exemplo 1. Considere a seguinte função definida por, $f(t)=e^{at}$. Encontre a sua transformada de Laplace.

Solução. Pela definição e a equação (2.1), temos que:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt\,. \qquad (2.2)$$

Se $s=a$, a integral imprópria resume-se em:

$$F(s)=\int_0^{\infty} dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T} dt=\lim_{T\to\infty} t\,\Big|_0^T=\lim_{T\to\infty}(T-0)=\infty \qquad (2.3)$$

ou seja, será divergente.

Se $s \neq a$, temos:

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-(s-a)t}dt \qquad (2.4)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}\left(e^{-(s-a)t}\right)\Big|_0^T\right]=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}\left(e^{-(s-a)T}-1\right)\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{s-a}, & \text{se} \quad s>a\\[2ex] \infty, & \text{se} \quad s<a.\end{cases} \qquad (2.5)$$

Portanto, a integral só será convergente se $s>a$ e, neste caso, converge para $\dfrac{1}{s-a}$. Assim, concluímos que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a},\ \text{se}\ s>a\,. \qquad (2.6)$$

Exemplo 2. Considere a função trigonométrica, $f(t)=\cos(at)$. Encontre a sua transformada de Laplace.

Solução. Pela definição e equação (2.1), temos que:

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\cos(at)dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st}\cos(at)dt\ . \qquad (2.7)$$

Utilizando método de integração por partes, resulta:

$$F(s)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{sen}(at)\right)\Big|_0^T+\frac{s}{a}\int_0^{T}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{sen}(at)\,dt\right],\quad s>a \qquad (2.8)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{s}{a}\left(-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-st}\cos(at)\right)\Bigg|_0^T-\frac{s}{a}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}\cos(at)\,dt\right]$$

$$=\frac{s}{a}\left[\left(0+\frac{1}{a}\right)-\frac{s}{a}F(s)\right]=\frac{s}{a^2}-\frac{s^2}{a^2}F(s)$$

Assim sendo, temos

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)F(s)=\frac{s}{a^2}$$

Isolando $F(s)$, obtemos,

$$F(s)=\frac{\frac{s}{a^2}}{\frac{a^2+s^2}{a^2}}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

Assim, concluímos que $\mathcal{L}\{\cos(at)\}=\dfrac{s}{s^2+a^2}$.

2.1. CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

Como $\mathcal{L}\{f(t)\}$ é definida pela integral imprópria $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$, fica claro que nem toda função $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ terá, necessariamente, uma transformada de Laplace. No mínimo, é necessário que $\int_0^T e^{-st}f(t)dt$ exista para todo $T>0$ e, além disso, que o limite indicado seja finito. O teorema da existência dá condição suficiente para que uma função tenha transformada de Laplace. No entanto, antes de enunciá-lo, vejamos algumas definições para sua compreensão.

DEFINIÇÃO. A função $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ é seccionalmente contínua quando, em qualquer intervalo $[a,b]$ contido em $[0,\infty)$, f tem, no máximo, um número finto de descontinuidade e, nestes pontos, os limites laterais são finitos.

Exemplo 1. Considere a função dente quadrado. Discuta a sua natureza utilizando o seguinte gráfico.

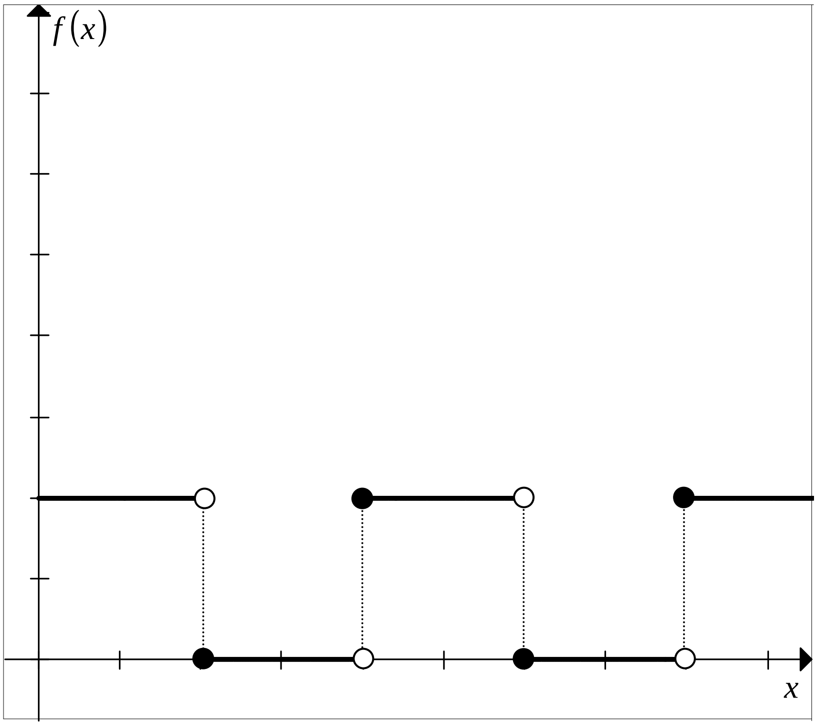

Figura 9. Gráfico da função contínua por intervalo

Solução. A função f é seccionalmente contínua, pois tem uma infinidade de pontos de descontinuidade, mas em cada intervalo $[a,b]$ contido em $[0,\infty)$, só tem um número finito de descontinuidade.

Exemplo 2. Discuta a natureza da função representada pela figura 10.

Solução. A função f não é seccionalmente contínua, pois,

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = +\infty$$

Observação: Se $f(t)$ for contínua em $[0,\infty)$, então será seccionalmente contínua.

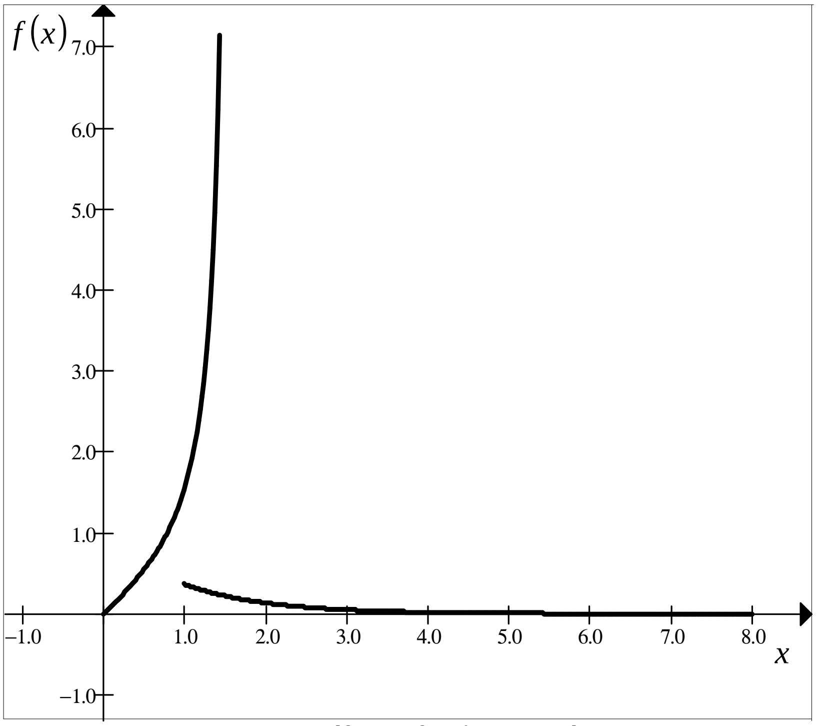

Figura 10. Gráfico da função descontínua

CONDIÇÕES DE DIRICHLET

DEFINIÇÃO. Dizemos que $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ satisfaz às "condições de Dirichlet" quando é seccionalmente contínua em $[0,\infty)$ e é de ordem exponencial.

ILUSTRAÇÃO.

As funções constantes, t^n, $\sqrt[n]{t}$, e^{at}, $sen(at)$, $\cos(at)$, $senh(at)$, $\cosh(at)$, $t^2\,sen(t)$, são exemplos de funções que satisfazem às condições de Dirichlet.

TEOREMA.

Se $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ satisfaz às condições de Dirichlet, com abscissa de convergência c, então f tem uma transformada de Laplace F definida para $s>c$.

Prova. Como f é seccionalmente contínua em $[0,\infty)$, então para qualquer $b>0$, a integral definida $\int_0^b e^{-st} f(t)dt$ existe.

Deve ser mostrado que $\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} f(t)dt$ é finito. Assim, como f é de ordem exponencial com abscissa de convergência c, existem t_0, c e $M>0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, sempre que $t \geq t_0$. Como o intervalo de integração pode ser subdividido, ou seja, $\int_0^b h(t)dt = \int_0^{t_0} h(t)dt + \int_{t_0}^b h(t)dt$, basta mostrar que $\lim_{b\to\infty}\int_{t_0}^b e^{-st} f(t)dt$ é finito.

Considere $f(t) \geq 0$, para todo $t \geq t_0$ e contínua. Fixando $s>c$ e considerando $g(b)=\int_{t_0}^b e^{-st} f(t)dt$, $g(b)$ será crescente quando b também o for, pois $g(b)$ representa a área abaixo da curva de $e^{-st} f(t)$, conforme figura 11.

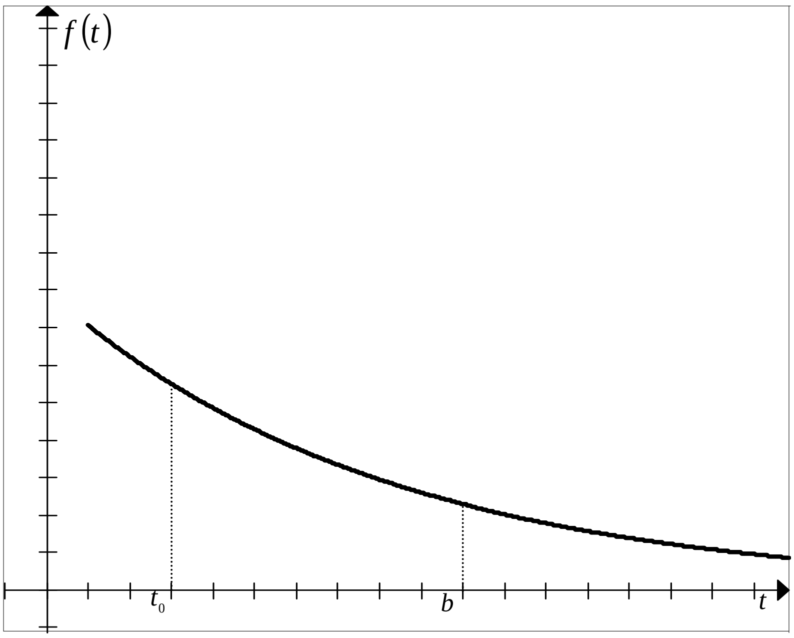

Figura 11. Gráfico de $e^{-st}\ f(t)$

Por outro lado, como $f(t) \leq Me^{ct}$, para todo $t \geq t_0$, temos que:

$$f(t)e^{-st} \leq Me^{ct}\, e^{-st} = Me^{(c-s)t}. \tag{2.9}$$

Portanto,

$$g(b) = \int_{t_0}^b e^{-st} f(t)dt \ \leq \ \int_{t_0}^b Me^{(c-s)t} \ . \tag{2.10}$$

No entanto,

$$\int_{t_0}^b Me^{(c-s)t} = \frac{M}{s-c}\left(\frac{1}{e^{(s-c)t_0}} - \frac{1}{e^{(s-c)b}}\right) < \frac{M}{(s-c)e^{(s-c)t_0}} = k\,, \tag{2.11}$$

sendo k uma constante positiva para todo b. Então, $g(b)$ é crescente e seus valores nunca ultrapassam k.

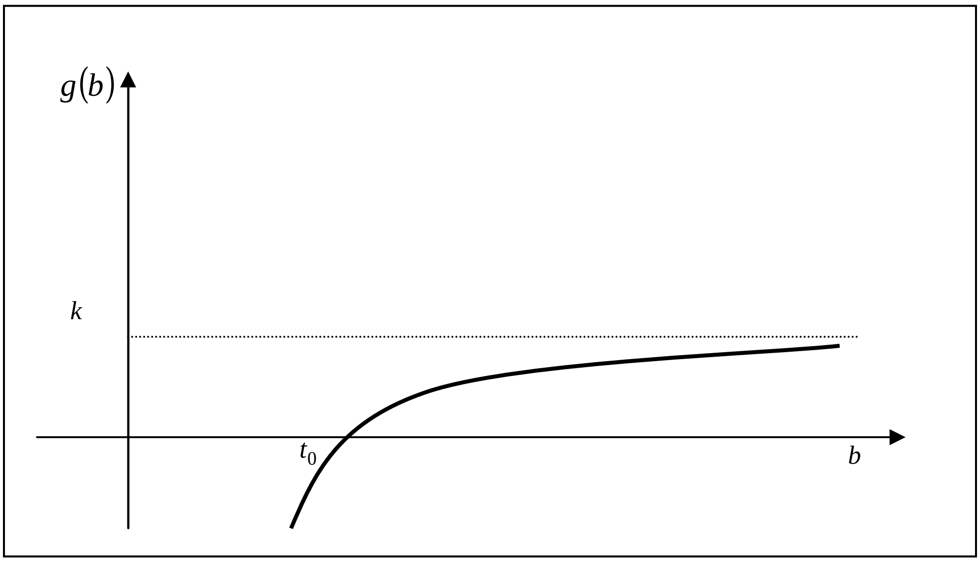

Figura 12. Gráfico da função $g(b)$

Assim, quando $b \to \infty$, $g(b)$, por ser crescente, terá um limite e este será finito, podendo ser menor ou igual a k, isto é, $\lim_{b\to\infty} g(b)$ é finito.

2.2. LINEARIDADE DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se f e g satisfazem às condições de Dirichlet, podemos verificar que $f+g$ e cf, onde c é uma constante qualquer, também satisfazem e, neste caso,

$$\mathcal{L}\{f+g\}=\mathcal{L}\{f\}+\mathcal{L}\{g\} \tag{2.12}$$

$$\mathcal{L}\{cf\}=c\mathcal{L}\{f\} \tag{2.13}$$

Demonstração. Suponha que f e g satisfazem às condições de Dirichlet e c seja uma constante qualquer, então pela equação (2.1), temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}=\int_0^\infty e^{t}\left[f(t)+g(t)\right]dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{t}\, f(t)dt + \int_0^{\infty} e^{t}\, g(t)dt \; = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Para a segunda propriedade, teremos

$$\mathcal{L}\{c\, f(t)\} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{t}\left[cf(t)\right]dt = c\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{t}\, f(t)dt = c\,\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

O que demonstra que a transformada de Laplace é uma transformação linear.

Exemplo 1. Funções Hiperbólicas

Uma vez que $\cosh(at) = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right)$ e $\operatorname{senh}(at) = \frac{1}{2}\left(e^{at} - e^{-at}\right)$ obtemos, da equação (2.5) e da linearidade da transformada de Laplace, que:

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{at}\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2} \tag{2.14}$$

Por outro lado, fazendo o mesmo, obtemos

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\} - \mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2} \tag{2.15}$$

Exemplo 2. Calcular a seguinte transformada $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}^2(at)\}$.

Solução. Como as funções hiperbólicas são dadas por,

$$\operatorname{senh}(at) = \frac{1}{2}\left(e^{at} - e^{-at}\right),$$

então

$$\operatorname{senh}^2 at = \left[\frac{1}{2}\left(e^{at} - e^{-at}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2at} + e^{-2at} - 2\right). \tag{2.16}$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh}^2 at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{4}\left(e^{2at} + e^{-2at} - 2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\mathcal{L}\left\{e^{2at}\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{-2at}\right\}-2\mathcal{L}\{1\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{s-2a}+\frac{1}{s+2a}-\frac{2}{s}\right]. \tag{2.17}$$

2.3. UNICIDADE DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sabe-se, da equação (2.5), que $\mathcal{L}\{e^t\}=\dfrac{1}{s-1}$, para $s>0$. No entanto, deve ser analisada a seguinte pergunta: existe outra função além de $f(t)=e^t$, definida para $t\geq 0$, que tenha a mesma transformada $\dfrac{1}{s-1}$, para $s>0$? É fácil verificar que sim, pois, por exemplo:

$$g(t)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad t=1\\ \mathrm{e}^t & \text{se} \quad t\geq 0 \ \text{ e } \ t\neq 1\end{cases} \tag{2.18}$$

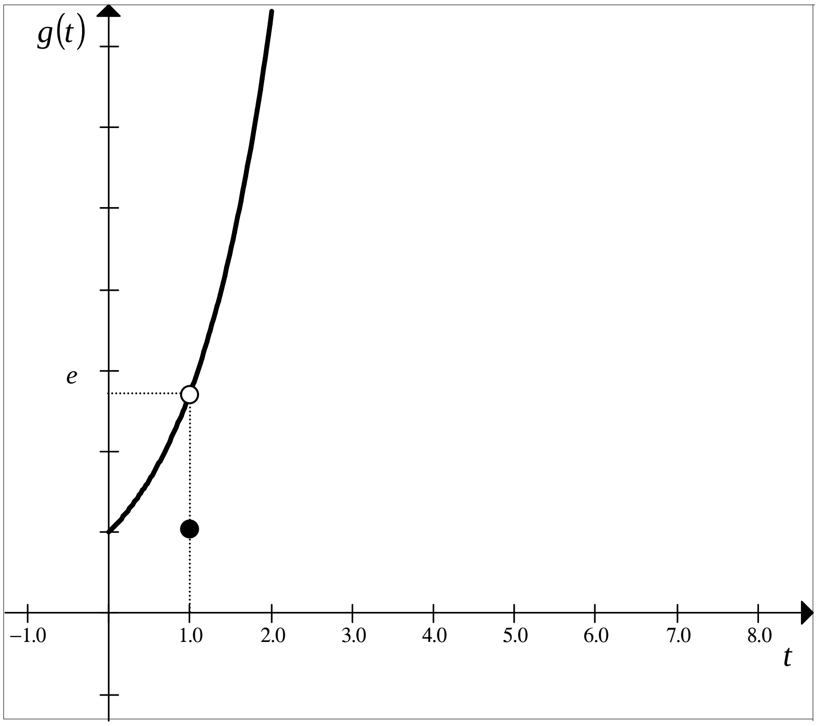

Figura 13. Gráfico da função $g(t)$

Como a integral de uma função não se altera se for mudado o valor de um número finito de pontos (Kreyszig, [4]),

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, g(t)\,dt \tag{2.19}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\, e^{t}\, dt$$

$$= \mathcal{L}\left\{e^{t}\right\} = \frac{1}{s-1}, \qquad s > 0 \tag{2.20}$$

Assim, este exemplo mostra que a pergunta “Qual a função que possui transformada de Laplace igual a $\frac{1}{s-1}$?” tem uma infinidade de resposta como, por exemplo: tomando $f(t)=e^{t}$ e modificando seus valores em um número finito de pontos. No entanto, há outra função “completamente diferente” de e^{t} que possui transformada $\frac{1}{s-1}$? A resposta a esta pergunta surge do teorema da unicidade.

TEOREMA DA UNICIDADE

Se as funções $f(t)$ e $g(t)$ possuem a mesma transformada de Laplace, então $f(t) = g(t)$, nos pontos em que estas funções são contínuas.

O teorema da unicidade permite que seja falado na “Transformada Inversa de Laplace”, representada por $\mathcal{L}^{-1}$. Por exemplo, a expressão $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^{t}$ significa que:

$i)\ \mathcal{L}\left\{e^{t}\right\} = \frac{1}{s-1}$;

$ii)$ qualquer outra função $g(t)$ que possui transformada igual a $\frac{1}{s-1}$ é igual a e^{t} exceto, no máximo, em um número finito de pontos em cada intervalo $[a\,,b]$ contido em $[0\,,+\infty)$.

Fica claro então que, dada $F(s)$, calcular $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ significa calcular uma função $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e, por esta transformação, se tem a idéia de todas as outras.

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Exemplo 1. Calcular a transformada inversa da função,

$$F(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s^2-1}$$

Solução. Aplicando as operações de transformada das funções obtemos,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{1}{s^2+1}\right\} = 2\mathrm{e}^{t} + \operatorname{sen}(t)$$

2.4. PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Propriedade 1. Primeiro Teorema do Deslocamento

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a). \tag{2.21}$$

Demonstração. Aplicando definição de Transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)dt$$

$$= F(s-a).$$

Exemplo 1. Como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, então

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\, sen\, t\} = \frac{1}{(s-2)^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2-4s+5}. \tag{2.22}$$

Propriedade 2. Derivada da Transformada

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{-t\, f(t)\} = F'(s). \tag{2.23}$$

Prova. Aplicando definição de transformada de Laplace

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\, f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(s)=\int_0^{\infty} \frac{\partial\left[e^{-st}\, f(t)\right]}{\partial s}\,dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-st}(-t)\, f(t)\,dt=\mathcal{L}\{-t\, f(t)\}$$

Exemplo 1. Como, $\mathcal{L}\{\text{sen t}\}=\dfrac{1}{s^2+1}$ e considerando a equação (2.23), resulta que:

$$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}\,t\}=-\left(\frac{1}{\text{s}^2+1}\right)'=\frac{2\text{s}}{\left(\text{s}^2+1\right)^2}. \tag{2.24}$$

Corolário: A derivada n-ésima da função F, é dada pela formula,

$$\mathcal{L}\{t^n\, f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s), \qquad n\in\mathbb{N}$$

Exemplo 1. Determine a função cuja transformada de Laplace é $\dfrac{-1}{(s-2)^2}$.

Solução. Observa-se que

$$\frac{-1}{(s-2)^2}=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-2}\right] \quad \text{e} \qquad \frac{1}{s-2}=\mathcal{L}\{e^{2t}\}.$$

Logo, pela equação (2.23), resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-2)^2}\right\}=-t\,e^{2t}. \tag{2.25}$$

Exemplo 2. Determine a função cuja transformada de Laplace é

$$F(s)=\frac{-4s}{\left(s^2+4\right)^2}$$

Solução. Observa-se que

$$\frac{-4s}{\left(s^2+4\right)^2}=\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] \quad \text{e} \qquad \frac{2}{s^2+4}=\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}.$$

Logo, pela equação (2.23), resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}=-t\,\text{sen}(2t). \tag{2.26}$$

Exemplo 3. Determine a transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{t\,\text{e}^{5t}\}$.

Solução. Para uma função como esta, a transformada pode ser determinada por três métodos diferentes:

a) Aplicando diretamente a definição da transformada de Laplace, ou seja,

$$\mathcal{L}\left\{t\,e^{5t}\right\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\,t\,e^{5t}\,dt$$

cujo desenvolvimento resulta em $\dfrac{1}{(s-5)^2}$.

b) Utilizado a equação (2.21) do Primeiro Teorema do Deslocamento, considerando $a=5$ e $f(t)=t$. Como,

$$\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}, \tag{2.27}$$

resulta que

$$\mathcal{L}\left\{t\,e^{5t}\right\}=\frac{1}{(s-5)^2}.$$

c) Na equação (2.5) foi mostrado que $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}=\dfrac{1}{s-a}$, se $s>a$. Considerando $a=5$, resulta:

$$\mathcal{L}\left\{e^{5t}\right\}=F(s)=\frac{1}{s-5}.$$

Utilizando a equação (2.23) da Derivada da Transformada e seu respectivo corolário, obtém-se:

$$\mathcal{L}\left\{t\,e^{5t}\right\}=-F'(s)=-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-5}\right]=\frac{1}{(s-5)^2}.$$

Portanto, nas três formas abordadas, foi obtido o mesmo resultado logo, pode ser concluído que

$$\mathcal{L}\left\{t\,e^{5t}\right\}=\frac{1}{(s-5)^2}. \tag{2.28}$$

Exemplo 4. Determinar a transformada de Laplace. $\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-t}\,t\cos(2t)\right\}$.

Solução. Seja $f(t)=t\cos 2t$. Encontre a sua transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{t\cos 2t\}=-\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]=-\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]$$

$$=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}. \tag{2.29}$$

Pela equação (2.21) do Primeiro Teorema de Deslocamento, adotando $a=-1$, resulta:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\, t\cos 2t\right\} = \frac{(s+1)^2-4}{\left[(s+1)^2+4\right]^2}\,. \tag{2.30}$$

Exemplo 5. Determinar $f(t)$ sabendo que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+10}$.

Solução. Aplicando a propriedade associativa no numerador e denominador

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+10} = \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+9} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{2}{(s+1)^2+3^2}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(s+1)^2+3^2}$$

Reconhecendo as somas, correspondem as seguintes transformadas:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos(3t)\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}\left\{e^{-t}\,\mathrm{sen}(3t)\right\}$$

Portanto, $f(t) = e^{-t}\left[\cos 3t + \dfrac{2}{3} sen\, 3t\right].$ (2.31)

Exemplo 6. Determinar $f(t)$ sabendo que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \dfrac{15}{s^2+10s+41}$.

Solução. Manipulando algebricamente o denominador, teremos

$$F(s) = \frac{15}{s^2+10s+41} = \frac{15}{(s+5)^2+16} = \frac{15}{4}\cdot\frac{4}{(s+5)^2+4^2}$$

Logo, se $F(s) = \dfrac{15}{4}\cdot\dfrac{4}{(s+5)^2+4^2}$, então

$$f(t) = \frac{15}{4}\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{sen}\, 4t\,.$$

Propriedade 3. Transformada da Derivada

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{2.32}$$

PROVA. Utilizando a definição da transformada de Laplace, equação (2.1), resulta que:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, f'(t)\,dt\,.$$

Para resolução da integral imprópria usa-se o método de integração por parte, considerando $u = e^{-st}$; $dv = f'(t)dt$, então:

$$du = -s\mathrm{e}^{-st}dt \qquad \text{e} \qquad v = f(t).$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = [uv]\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v\,du = \left[f(t)\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_0^\infty + \int_0^\infty s\,\mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt$$

$$= 0 - f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = sF(s) - f(0) \qquad (2.33)$$

COROLÁRIO. A transformada da segunda derivada de uma função admissível é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - s\,f(0) - f'(0).$$

PROVA. Pela equação (6.32),

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f(0)$$

$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2 F(s) - s\,f(0) - f'(0).$$

Observação. O corolário acima pode ser generalizado para a derivada *n*-ésima de uma função que satisfaz as condições de Dirichlet (Kreyszig [4]). Assim,

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \qquad (2.34)$$

Propriedade 4. Transformada de Laplace da Integral

Se a função $f(t)$ possui transformada de Laplace, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r)\,dr\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\};\; s > 0. \qquad (2.35)$$

Exemplo 1. Seja a seguinte transformada,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2\left(s^2+w^2\right)}.$$

Determine a função $f(t)$.

Solução. Pela transformada inversa de Laplace resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+w^2}\right\} = \frac{1}{w} sen\, wt\ . \qquad (2.36)$$

Pela equação (2.35), segue que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{1}{s^2+w^2}\right)\right\} = \frac{1}{w}\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(wr)\,dr \ = \frac{1}{w^2}(1-\cos wt) \qquad (2.37)$$

Novamente, pela equação (6.15), resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\left(\frac{1}{s^2+w^2}\right)\right\} = \frac{1}{w^2}\int_0^{\infty}(1-\cos wr)\,dr = \frac{1}{w^2}\left(t-\frac{\operatorname{sen}(wt)}{w}\right)$$

Portanto,

$$f(t) = \frac{1}{w^2}\left(t-\frac{\operatorname{sen} wt}{w}\right) \qquad (2.38)$$

Exemplo 2. Use a transformada de Laplace da integral para calcular $\mathcal{L}\left\{t\,e^{et}\right\}$.

Solução. Como $\int_0^t x\,e^x\,dx = t\,e^t - e^t + 1$, pela equação (2.35), resulta

$$\mathcal{L}\left\{t\,e^t - e^t + 1\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{t\,e^t\right\}. \qquad (2.39)$$

Usando a linearidade da transformada de Laplace, equação (2.12),

$$\mathcal{L}\left\{ t e^{t} - e^{t} + 1 \right\} = \mathcal{L}\left\{ t e^{t} \right\} - \mathcal{L}\left\{ e^{t} \right\} + \mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\left\{ t e^{t} \right\} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$$

Logo,

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right)\mathcal{L}\left\{ t e^{t} \right\} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 - s}.$$

Assim,

$$\mathcal{L}\left\{ t \mathrm{e}^{t} \right\} = \frac{\dfrac{1}{s^2 - s}}{\dfrac{s-1}{s}} = \frac{s}{s^3 - 2s^2 + s} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Portanto, $\mathcal{L}\left\{ t e^{et} \right\} = \dfrac{1}{(s-1)^2}$. (2.40)

2.5. TRANSFORMADA DE LAPLACE E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A transformada de Laplace é considerada um poderoso método de resolução de EDOs lineares e de seus respectivos problemas de valor inicial (PVI) no campo das engenharias, pois permite uma passagem do cálculo para álgebra, sendo este de mais fácil resolução. Além disso, permite que a solução seja encontrada de forma direta, sem que seja necessária a obtenção de uma solução geral e, para o caso de um PVI, não é necessário resolver a EDO homogênea correspondente (Kreyszig [4]).

O processo de solução consiste em três etapas, conforme esquema abaixo:

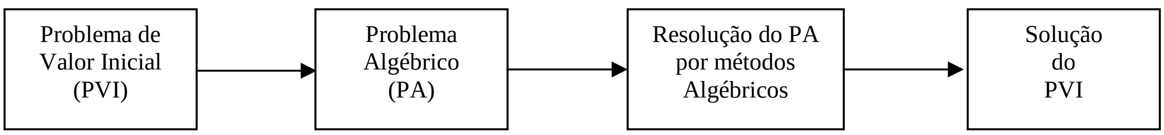

Figura 14. Resolução de um PVI por transformada de Laplace

Exemplo 1. Resolver o PVI dado por

$$\frac{dy}{dt} + y = t; \qquad y(0) = 1.$$

Solução. Adotando $\dfrac{dy}{dt} = y'$, $\mathcal{L}\{y\} = Y$ e aplicando a transformada em ambos os membros da equação, resulta:

$$\mathcal{L}\{y' + y\} = \mathcal{L}\{t\}. \tag{2.41}$$

Pela linearidade da transformada de Laplace, tem-se:

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}. \tag{2.42}$$

Aplicando a equação (2.32) da Transformada da derivada, encontra-se:

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s+1)Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2}$$

Isolando a variável da transformada,

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)}. \tag{2.43}$$

Então,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\},$$

onde

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}. \tag{2.44}$$

Para determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}$, pode ser utilizado o método de frações parciais, o que resulta em:

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}. \tag{2.45}$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = t - 1 + \mathrm{e}^{t} \tag{2.46}$$

Portanto,

$$y(t) = e^{-t} + t - 1 + e^{-t} = 2e^{-t} + t - 1. \tag{2.47}$$

Exemplo 2. Use a transformada de Laplace para resolver a EDO $y''+4y'+4y=0$ com as condições iniciais $y(0)=2$ e $y'(0)=-6$.

Solução. Fazendo o uso da transformada de Laplace para a EDO $y''+4y'+4y=0$, resulta:

$$\mathcal{L}\{y''\}+4\mathcal{L}\{y'\}+4\mathcal{L}\{y\}=0$$

Desenvolvendo,

$$s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)+4s\mathcal{L}\{y\}-4y(0)+4\mathcal{L}\{y\}=0. \qquad (2.48)$$

Substituindo as condições iniciais e agrupando os termos semelhantes, encontra-se:

$$\left(s^2+4s+4\right)\mathcal{L}\{y\}=2s-6+8=2s+2$$

Isolando a transformada, obtemos

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{2s+2}{s^2+4s+4}=\frac{2(s+2)-2}{(s+2)^2}$$

$$=\frac{2}{s+2}-\frac{2}{(s+2)^2}=2\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\right\}-2\mathcal{L}\left\{t\,e^{-2t}\right\}. \qquad (2.49)$$

Logo,

$$y(t)=2e^{-2t}-2te^{-2t} \quad \Rightarrow \quad y(t)=2e^{-2t}(1-t)$$

Exemplo 3. Considere o circuito elétrico RC com seus respectivos componentes ilustrados no seguinte gráfico,

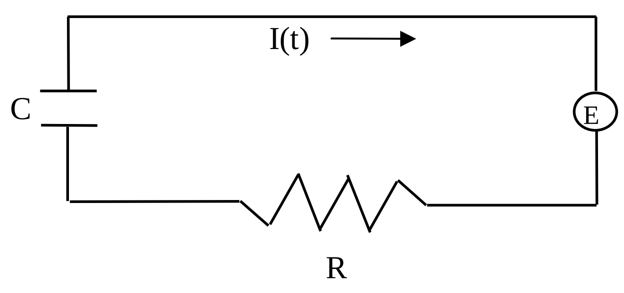

Figura 15. Circuito RC

Pela Lei de Kirchoff, pode ser considerado que:

$$RI(t)+\frac{1}{C}\int_0^t I(u)\,du=E(t). \qquad (2.50)$$

Se $E(t)=2t^2-1$ volts, $R=1$ ohm, $C=0{,}5$ Farad, determine a corrente $I(t)$ para $t\geq 0$.

Solução. Da equação (2.50) e dos dados apresentados no enunciado, resulta a equação transformada

$$\mathcal{L}\{I(t)\}+\frac{2}{s}\mathcal{L}\{I(t)\}=2\mathcal{L}\{t^2\}-\mathcal{L}\{1\}=\frac{4}{s^3}-\frac{1}{s}$$

ou

$$\left(\frac{2+s}{s}\right)\mathcal{L}\{I(t)\}=\frac{4-s^2}{s^3}. \tag{2.51}$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{I(t)\}=\frac{(2-s)(2+s)}{s^3\left(\frac{2+s}{s}\right)}=\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s} \tag{2.52}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (2.52), encontra-se:

$$I(t)=2t-1. \tag{2.53}$$

2.6. SEGUNDO TEOREMA DO DESLOCAMENTO

Em engenharia, freqüentemente, aparecem funções que podem estar “ligadas” ou “desligadas”, como o caso de uma voltagem aplicada a um circuito que pode ser desligada após um período. Neste caso, define-se uma função especial que representará tal situação, denominada função degrau unitário, $H_a(t)$, ou função de Heaviside (Zill, 2003, [11]).

$$H_a(t)=\begin{cases}0 & \text{se} \quad t\le a\\ 1 & \text{se} \quad t>a.\end{cases} \tag{2.54}$$

Pode-se obter a transformada de Laplace da função degrau unitário considerando:

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}H_a(t)\,dt \;=\int_0^\infty e^{-st}\,dt \;=\lim_{A\to\infty}\int_a^A e^{-st}\,dt$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{e^{-as}-e^{-sA}}{s}$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\}=\frac{e^{-as}}{s}, \quad s>0. \tag{2.55}$$

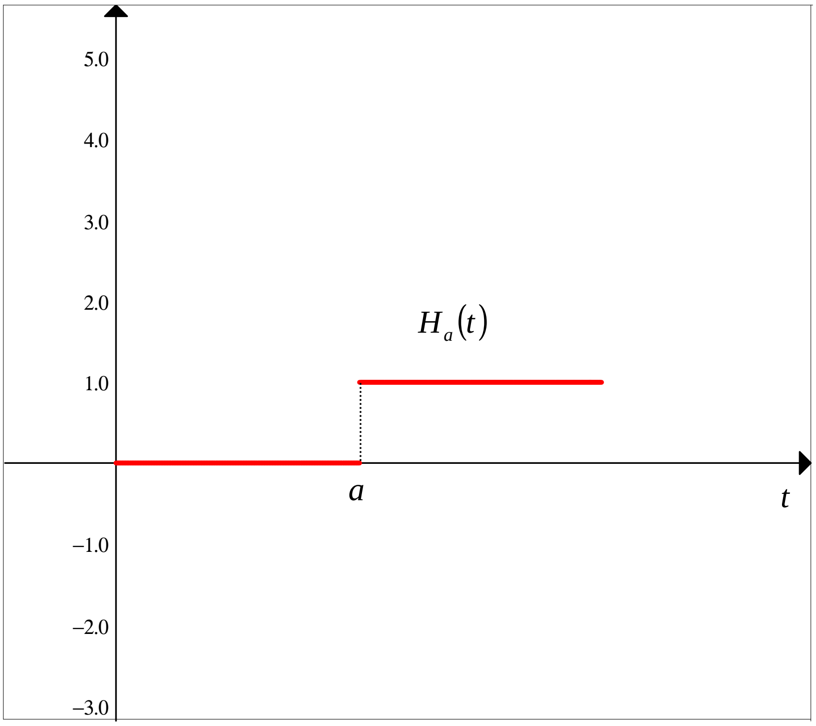

Figura 16. Gráfico da função degrau unitário.

Sejam f e g funções, onde f está definida sobre o intervalo $0 \leq t < \infty$ e g é obtida deslocando-se o gráfico de f "a" unidades à direita, isto é:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq t < \text{e} \\ f(t-a) & \text{se} \quad t \geq a. \end{cases} \tag{2.56}$$

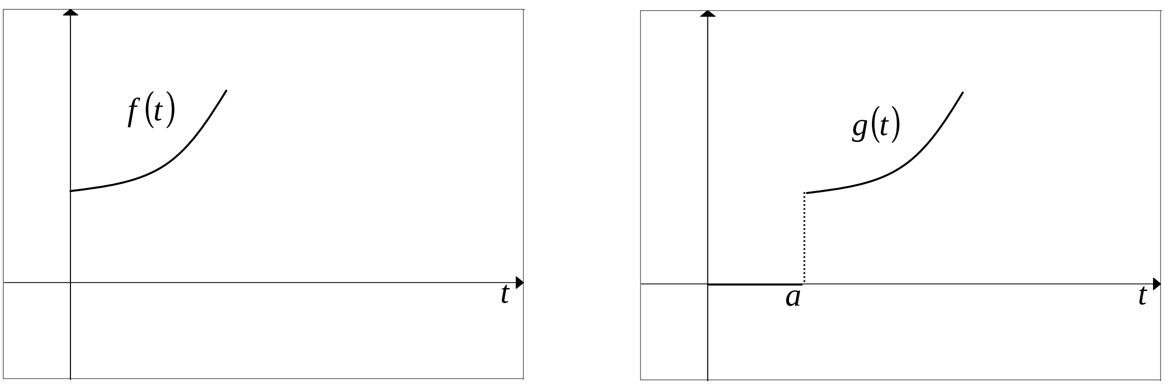

Figura 17. Representação das funções $f(t)$ **e** $g(t)$

Por exemplo: se $a = 2$, então o valor de g em $t = 7$ será o valor de f em $t = 5$. Assim,

$$g(t) = H_a(t)\, f(t-a). \tag{2.57}$$

O fator $H_a(t)$ anula g para $0 \le t < a$ e, mudando o argumento de t para $t-a$, faz com que f se desloque "a" unidades à direita.

Como a função $g(t)$ apresentada na equação (8.4) é obtida de $f(t)$ de uma maneira simples, é de se esperar que a transformada de $g(t)$ seja obtida da transformada de $f(t)$ de uma maneira também simples.

Partindo da idéia exposta anteriormente, o segundo teorema do deslocamento pode ser enunciado conforme apresentado a seguir.

SEGUNDO TEOREMA DO DESLOCAMENTO

Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\, f(t-a)\} = e^{-as}\, F(s). \tag{2.58}$$

APLICAÇÕES

Exemplo 1. Determine a função cuja transformada de Laplace é $\dfrac{e^{-s}}{s^2}$.

Solução. Pela Analise da transformada acima, resulta que $\dfrac{1}{s^2} = \mathcal{L}\{t\}$. Logo, da equação (2.58) do segundo teorema do deslocamento, encontra-se a função procurada, ou seja,

$$\frac{e^{-s}}{s^2} = \mathcal{L}\{H_1(t)(t-1)\}. \tag{2.59}$$

O gráfico 18 representa a função deslocada.

Exemplo 2. Qual é a função cuja transformada de Laplace é $\dfrac{e^{-3s}}{s^2-2s-3}$?

Solução. Observa-se que:

$$\frac{1}{s^2-2s-3} = \frac{1}{s^2-2s+1-4} = \frac{1}{(s-1)^2-2^2}.$$

Como, pela equação (2.15),

$$\frac{1}{\left(s^2-2^2\right)}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\operatorname{senh}2t\}$$

e, pela equação (2.21),

$$\frac{1}{(s-1)^2-2^2}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\operatorname{senh}2t\},$$

então, pelo segundo teorema do deslocamento, resulta que:

$$\frac{e^{-3s}}{s^2-2s-3}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{H_3(t)e^{t-3}\operatorname{senh}2(t-3)\}. \tag{2.60}$$

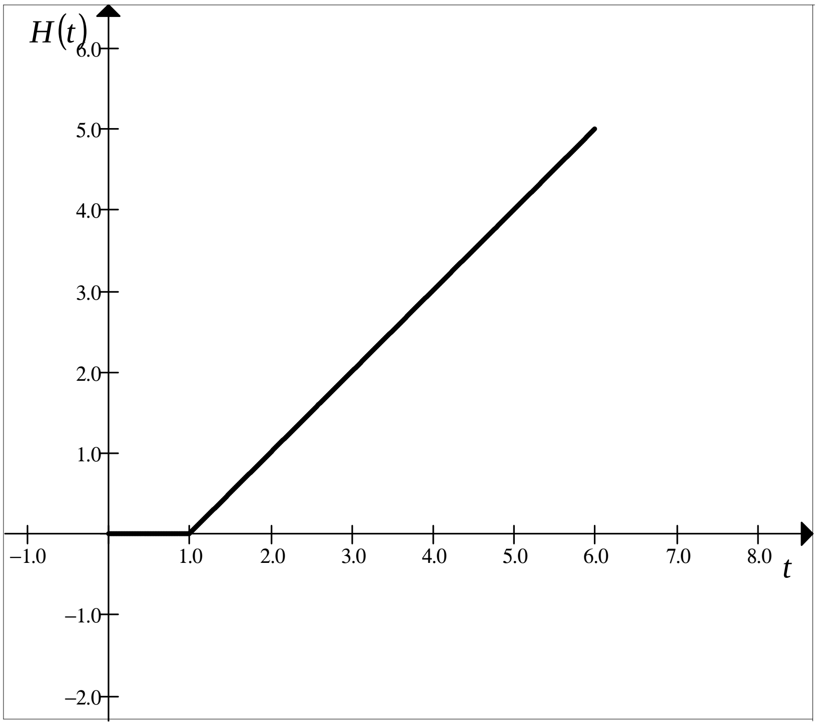

Figura 18. Gráfico da função $H_1(t)(t-1)$

Exemplo 3. Seja $f(t)=\begin{cases} t; & 0\le t<1 \\ 0; & t\ge 1. \end{cases}$ Ache $\mathcal{L}\{t\}$ sem fazer o uso de integrações.

Solução. A função $f(t)$ pode ser escrita como:

$$f(t)=t[H_0(t)-H_1(t)]=t-t\,H_1(t).$$

Logo, pela equação (2.23), se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então:

$$\mathcal{L}\{-t\, f(t)\} = \frac{d}{ds} F(s).$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{\, f(t)\} = \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{t\, H_1(t)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds}\left[\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\right]$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{-e^{-s}\cdot s - e^{-s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} \qquad (2.61)$$

2.7. CONVOLUÇÃO DE FUNÇÕES

MOTIVAÇÕES PARA A CONVOLUÇÃO

Considere o problema de valor inicial com coeficientes constantes, PVI

$$ay'' + by' + cy = f(t); \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0$$

Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da equação, tem-se que:

$$a\left[s^2 Y(s) - s y_0 - y'_0\right] + b\left[sY(s) - y_0\right] + cY(s) = F(s)$$

o que implica em,

$$Y(s) = \frac{as+b}{as^2+bs+c}\, y_0 + \frac{a}{as^2+bs+c}\, y'_0 + \frac{F(s)}{as^2+bs+c}. \qquad (2.62)$$

Sejam $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{as+b}{as^2+bs+c}\right\}$ e $y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{as^2+bs+c}\right\}$. Adotando $f(t) = 0$, $y_0 = 1$ e $y'_0 = 0$, vê-se que $y_1(t)$ é a solução da equação homogênea com condições iniciais $y_1(0) = 1$; $y'_1(0) = 0$.

De maneira análoga, adotando $f(t) = 0$, $y_0 = 0$ e $y'_0 = 1$ vê-se que $y_2(t)$ é a solução da equação homogênea com condições iniciais $y_2(0) = 0$; $y'_2(0) = 1$. Isso implica que:

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{as^2+bs+c}\right\} \tag{2.63}$$

é uma solução particular da equação não-homogênea com condições iniciais $\varphi(0)=0$; $\varphi'(0)=0$. O problema resume-se então, em determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{as^2+bs+c}\right\}$. Analisando a função $\frac{F(s)}{as^2+bs+c}$ percebe-se que:

$$\frac{F(s)}{as^2+bs+c} = \mathcal{L}\{f(t)\}\times\mathcal{L}\left\{\frac{y_2(t)}{a}\right\}. \tag{2.64}$$

Seria ótimo se $\varphi(t)$ fosse a resultante do produto entre $f(t)$ e $\frac{y_2(t)}{a}$, entretanto isto não é verdadeiro.

A maneira de duas funções serem combinadas para formar uma nova função $f*g$ na qual,

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\times\mathcal{L}\{g(t)\} \tag{2.65}$$

denomina-se convolução de f com g.

DEFINIÇÃO DE CONVOLUÇÃO

Dadas as funções $f(t)$ e $g(t)$. Denomina-se convolução de $f(t)$ e $g(t)$, representada pela notação padrão $f*g$, a integral

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du \tag{2.66}$$

APLICAÇÕES DA CONVOLUÇÃO

Se $f(t)=\text{sen}\,2t$ e $g(t)=e^{t^2}$, então:

$$(f*g)(t) = \int_0^t \text{sen}\,2(t-u)\,\mathrm{e}^{u^2}\,du. \tag{2.67}$$

PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

Propriedade 1. (Comutatividade)

$$f * g = g * f \tag{2.68}$$

Propriedade 2. (Associatividade)

$$(f * g) * h = f * (g * h) \tag{2.69}$$

Propriedade 3. (Distributividade)

$$(f + g) * h = f * h + g * h \tag{2.70}$$

Propriedade 4. (Elemento nulo da convolução)

$$f * 0 = 0 * f = 0 \tag{2.71}$$

APLICAÇÕES DAS PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

Exemplo. Calcular a convolução das seguintes funções $f(t) = t^2$ com $g(t) = 1$.

Solução. Pela equação (2.68),

$$(f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_0^t 1 \cdot u^2\, du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^t = \frac{t^3}{3} \tag{2.72}$$

TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

Sejam as transformadas $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, então:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s) \tag{2.73}$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) * g(t).$$

APLICAÇÕES DO TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

Exemplo 1. Determine a seguinte transformada $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}$.

Solução. Considere a seguinte relação,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)}\right\} = 1 * \operatorname{sen} t$$

$$= \int_0^t \operatorname{sen} u \, du = -\cos u \Big|_0^t = 1 - \cos t \qquad (2.74)$$

Exemplo 2. Determine, usando convolução, a transformada inversa de $\dfrac{1}{s^2\left(s^2+a^2\right)}$.

Solução. Observa-se que $\dfrac{1}{s^2} = \mathcal{L}\{t\}$ e $\dfrac{a}{s^2+a^2} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\}$. Logo, pelo teorema da convolução, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+a^2\right)}\right\} = \int_0^t (t-u) \operatorname{sen} au \; du \quad = \frac{\operatorname{sen} at - at\cos at}{a^2} \qquad (2.75)$$

Exemplo 3. Calcule a transformada inversa de Laplace de $\left\{s\left(s^2+2s+2\right)\right\}^{-1}$.

Solução. Observa-se que $\left\{s\left(s^2+2s+2\right)\right\}^{-1} = \dfrac{1}{s\left(s^2+2s+2\right)}$ e, também, que:

$$\frac{1}{s} = \mathcal{L}\{1\}; \qquad \frac{1}{\left(s^2+2s+2\right)} = \frac{1}{(s+1)^2+1} = \mathcal{L}\left\{ \mathrm{e}^{-t} \operatorname{sen} t\right\}.$$

Logo, pela equação (2.73) do teorema de convolução, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+2s+2\right)}\right\} = \int_0^t 1 \cdot e^{-u} \operatorname{sen} u \; du$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{e}^{-t}\left(\cos t + \operatorname{sen} t\right)\right] \qquad (2.76)$$

Exemplo 4. Calcule a seguinte transformada $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$ por convolução.

Solução. Sabe-se que $\frac{1}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)(s-1)}$. Sejam $F(s) = G(s) = \frac{1}{(s-1)}$, então:

$$f(t) = g(t) = e^t$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t).$$

Assim,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

$$= \int_0^t e^u\, e^{(t-u)}\, du \; = e^t \int_0^t du \; = t\,e^t \tag{2.77}$$

Exemplo 5. (Aplicação da convolução à resolução de equações diferenciais)

Resolva o problema de valor inicial com coeficientes constantes, PVI

$$y'' - 2y' + y = h(x); \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

não sendo necessário especificar $h(x)$.

Solução. Tomando as transformadas em ambos os lados da equação diferencial, resulta:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{h(x)\} = F(s)$$

Aplicando as transformadas em cada uma das somas,

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - 2s\mathcal{L}\{y\} + y(0) + \mathcal{L}\{y\} = F(s)$$

agrupando

$$\left(s^2 - 2s + 1\right)\mathcal{L}\{y\} = F(s).$$

Isolando a transformada, teremos

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{F(s)}{(s-1)^2}.$$

Sabe-se, pela equação (2.40), que $\mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2} = x\,e^x$. Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\{y\}=\frac{F(s)}{(s-1)^2} \; = x\,e^{x} * h(x) \; = \int_0^x t\,e^{t}\,h(x-t)\,dt\,. \tag{2.78}$$

2.8. FUNÇÕES PERIÓDICAS

TEOREMA. (transformada de Laplace de funções periódicas) Se f é uma função periódica de período p, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^p e^{-st}\,f(t)dt}{1-e^{-ps}}\,. \tag{2.79}$$

Demonstração. Sabe–se que a transformada de Laplace de $f(t)$ é dada pela equação (2.1), ou seja,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)dt\,.$$

Como, por hipótese, $f(t)$ é uma função periódica de período p, então a equação (2.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^p e^{-st}\,f(t)dt+\int_p^{2p} e^{-st}\,f(t)dt+\ldots+\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st}\,f(t)dt+\ldots. \tag{2.80}$$

Fazendo $x+np=t$ e tomando a $(n+1)-ésima$ integral da série acima, obtém-se:

$$\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st}\,f(t)dt \; = \int_0^p e^{-s(x+np)}\,f(x+np)dx$$

$$=e^{-nps}\int_0^p e^{-sx}\,f(x)dx\,. \tag{2.81}$$

Logo,

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^p e^{-sx}\,f(x)dx+e^{-ps}\int_0^p e^{-sx}\,f(x)dx+\ldots+e^{-nps}\int_0^p e^{-sx}\,f(x)dx+\ldots$$

$$=\left[1+e^{-ps}+2e^{-2ps}+\ldots\right]\int_0^p e^{-sx}\,f(x)dx\,. \tag{2.82}$$

Como a soma da série geométrica $\left[1+e^{-ps}+e^{-2ps}+\ldots+e^{-nps}+\ldots\right]$ é $\dfrac{1}{1-e^{-ps}}$ (Leithold, vol. 2, 1994, [6]), segue então que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^p e^{-st}\,f(t)dt}{1-e^{-ps}}\,.$$

APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA EM FUNÇÕES PERIÓDICAS

Exemplo 1. Calcule a transformada de Laplace da função representada pelo gráfico abaixo.

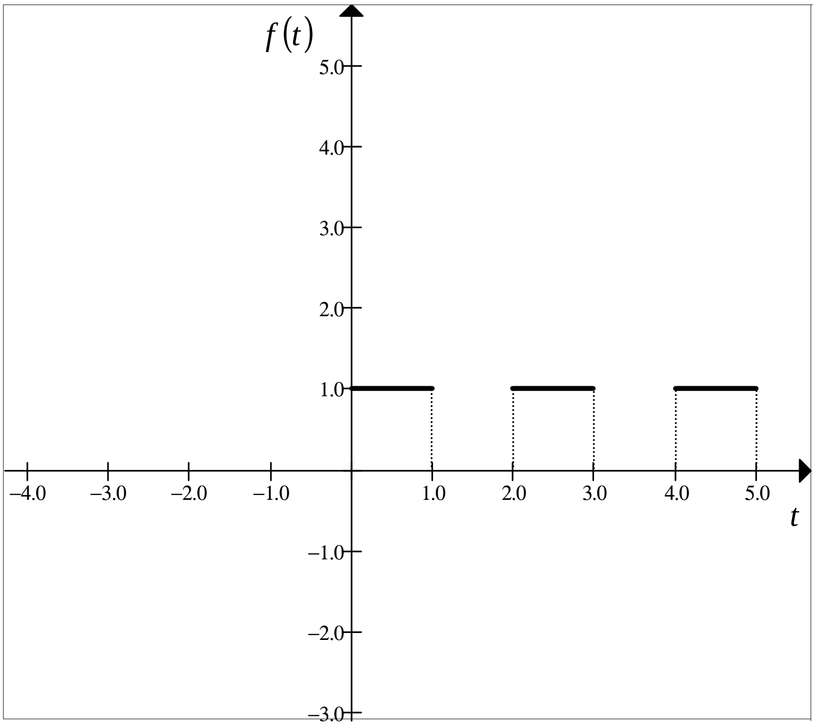

Figura 19. Gráfico da função periódica constante

Solução. Pela análise gráfica, verifica-se que a função $f(t)=1$ é periódica e possui período $p=2$. Assim, fazendo uso do teorema da transformada de funções periódicas, equação (2.79), resulta:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^2 e^{-st}\, f(t)dt}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{\int_0^2 e^{-st}\, dt}{1-e^{-2s}}=\frac{1-e^{-s}}{s\left(1-e^{-2s}\right)}=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)} \qquad (2.83)$$

Exemplo 2. Calcule a transformada de Laplace da função representada pelo gráfico abaixo.

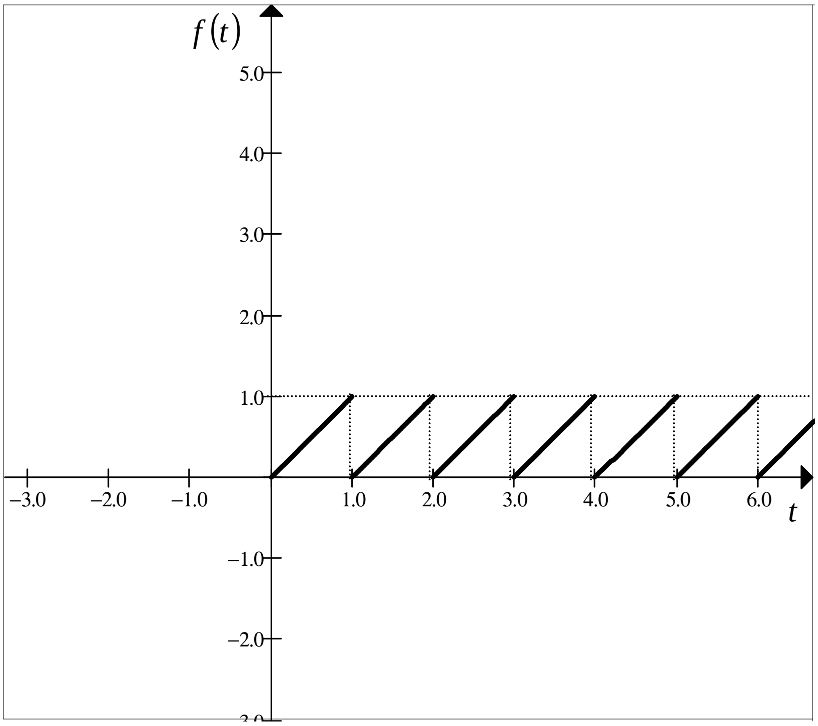

Figura 20. Gráfico da função periódica linear

Solução. Pela análise gráfica, verifica-se que a função $f(t)=t$ é periódica e possui período $p=1$. Assim, fazendo uso do teorema da transformada de funções periódicas, resulta:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^1 e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-s}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}\,t\,dt}{1-e^{-s}} \tag{2.84}$$

Utilizando o método de integração por partes para resolver a integral definida apresentada na equação (2.84), considerando $u=t \Rightarrow du=dt$ e $dv=e^{-st}dt \Rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st}$, tem-se:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{\left[-\frac{t}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_0^1+\frac{1}{s}\int_0^1 \mathrm{e}^{-st}\,dt}{1-\mathrm{e}^{-s}}=\frac{\left[-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right]\left(\mathrm{e}^{-st}\right)\Big|_0^1}{1-\mathrm{e}^{-s}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}\left(e^{-s}-1\right)}{1-e^{-s}}=\frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2\left(1-e^{-s}\right)} \tag{2.85}$$

Exemplo 3. Determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ se $f(t)$ é periódica de período $p=2\pi$, e no intervalo $0 \le x < 2\pi$, $f(t)$ pode ser definida analiticamente por;

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \pi \\ 2\pi - t & \pi \le t < 2\pi. \end{cases} \tag{2.86}$$

Solução. Graficamente, a função é dada por:

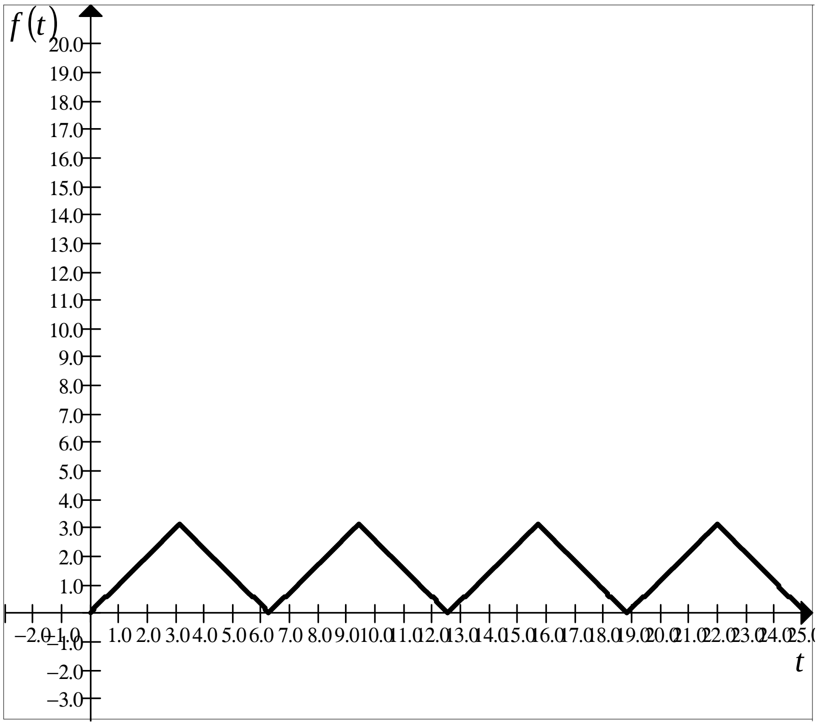

Figura 21. Gráfico da função periódica de período $p = 2\pi$

Pelo teorema da transformada de funções periódicas, equação (10.1), encontre-se que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-st}\, f(t)dt}{1 - e^{-2\pi s}}. \tag{2.87}$$

Pelas propriedades da integral definida (Leithold, vol.1, 1994, [6]), resulta:

$$\int_0^{2\pi} e^{-st}\, f(t)dt = \int_0^{\pi} e^{-st}\, t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st}(2\pi - t)dt$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(e^{-2\pi s} - 2e^{-\pi s} + 1\right) = \frac{1}{s^2}\left(e^{-\pi s} - 1\right)^2 \tag{2.88}$$

Decorre então, da equação (10.10), que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\frac{1}{s^2}\left(e^{-\pi s} - 1\right)^2}{1 - e^{-2\pi s}}$$

$$= \frac{\frac{1}{s^2}\left(e^{-\pi s} - 1\right)^2}{\left(1 - e^{-\pi s}\right)\left(1 + e^{-\pi s}\right)} = \frac{1}{s^2}\left[\frac{1 - e^{-\pi s}}{1 + e^{-\pi s}}\right] \qquad (2.89)$$

3. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

MOTIVAÇÃO

Existem situações em que há necessidade de resolver simultaneamente equações que envolvem várias funções e as suas derivadas. Suponha, por exemplo, que dois tanques contêm 100 litros de uma solução de certa substância química, com 20 Kg de substância química no primeiro tanque e 10 Kg de substância química no segundo. Em um dado instante $t = 0$, água começa a entrar no primeiro tanque a uma taxa de 2 litros por minuto; a mistura formada entra no segundo tanque a uma taxa de 2 litros por minuto e sai, também, a uma taxa de 2 litros por minuto. Determine as fórmulas para as quantidades de substâncias químicas existentes em cada tanque no tempo t.

Para a determinação das fórmulas que representam as quantidades de substâncias químicas existentes em cada tanque no tempo t, sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ as quantidades no primeiro e segundo tanque, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{100}x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{100}x_1 - \frac{2}{100}x_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

já que a taxa de variação da quantidade de substância química num tanque deve ser igual a taxa com a qual ela entra, menos a taxa com a qual sai.

As condições iniciais apresentadas no problema são:

$$x_1(0) = 20; \qquad x_2(0) = 10 . \tag{3.2}$$

Aplicando as condições iniciais na primeira equação do sistema, resulta:

$$x_1(t) = 20e^{\frac{-t}{50}}. \tag{3.3}$$

Substituindo a equação (3.3) na segunda equação do sistema (3.1), tem-se:

$$\frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{50}x_2 = \frac{2}{5}e^{\frac{-t}{50}} \tag{3.4}$$

que é uma equação dependente somente de $x_2(t)$.

A solução da equação (3.4), que satisfaz a segunda condição inicial de (3.2), é:

$$x_2(t)=\left(\frac{2}{5}t+10\right)e^{\frac{-t}{50}}. \tag{3.5}$$

Assim, $x_1(t)=20e^{\frac{-t}{50}}$ e $x_2(t)=\left(\frac{2}{5}t+10\right)e^{\frac{-t}{50}}$ são as soluções do sistema considerado e, portanto, as fórmulas que determinam as quantidades de substâncias químicas existentes em cada tanque no tempo t.

3.1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

A transformada de Laplace também pode ser usada para a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. O método é aplicado de forma análoga ao que vem sendo apresentado, com uma única diferença: ao invés de resolver apenas uma equação algébrica linear, deve ser resolvido um sistema de equações algébricas lineares.

Para exemplificar o exposto acima, considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} &y' + z = t \\ &z' + 4y = 0 \\ &y(0)=1;\quad z(0)=-1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sejam $\mathcal{L}\{y(t)\}=Y(s)$ e $\mathcal{L}\{z(t)\}=Z(s)$.

Aplicando a transformada de Laplace nas equações do sistema (3.6), tem-se:

$$\mathcal{L}\{y'+z\}=\mathcal{L}\{t\} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{L}\{z'+4y\}=0. \tag{3.8}$$

Pela linearidade da transformada, equação (2.12), e a transformada da derivada equação (2.32), resulta:

$$\begin{aligned} &\left[sY(s)-1\right]+Z(s)=\frac{1}{s^2} \\ &\left[sZ(s)+1\right]+4Y(s)=0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

ou

$$
\begin{aligned}
sY(s) + Z(s) &= \frac{s^2+1}{s^2} \\
4Y(s) + sZ(s) &= -1\,.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

A solução do conjunto de equações lineares (3.10) é:

$$
Y(s) = \frac{s^2+s+1}{s\left(s^2-4\right)}; \qquad Z(s) = -\frac{s^3+4s^2+4}{s^2\left(s^2-4\right)} \tag{3.11}
$$

Expandindo as soluções acima por frações parciais,

$$
Y(s) = -\frac{1/4}{s} + \frac{7/8}{s-2} + \frac{3/8}{s+2}
$$

e (3.12)

$$
Z(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{7/4}{s-2} + \frac{3/4}{s+2}\,.
$$

Considerando as transformadas inversas,

$$
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1/4}{s} + \frac{7/8}{s-2} + \frac{3/8}{s+2}\right\} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{8}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-2t}
$$

Também

$$
z(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{7/4}{s-2} + \frac{3/4}{s+2}\right\} = t - \frac{7}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}
$$

Portanto, a solução do sistema (3.6) é:

$$
y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{7}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t}; \qquad z(t) = t - \frac{7}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}
$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Transformada de Laplace mostrou-se de fácil utilização, pois em problemas mais complexos, como os obtidos em equações diferenciais por intermédio de modelagens, pode-se converter a equação diferencial em um problema algébrico, cujas resoluções são matematicamente mais simples, logo devemos fazer uso da transformada inversa para obter a solução desejada.

A idéia principal do texto foi apresentar a Transformada de Laplace de uma forma prática, sem a preocupação com o rigor das demonstrações das definições, das propriedades e dos teoremas, principalmente a de obter a inversa baseada somente na propriedade da transformação por ser uma aplicação injetora.

A outra característica a destacar, é o fato de que a transformada é muito melhor que outros métodos tradicionais na resolução de equações diferencias ordinárias, quando elas possuem coeficientes variáveis.

Os exemplos e modelos apresentados tiveram o caráter didático e motivador para apresentar uma pequena mostra do “poder” aplicativo deste método de transformação.

As funções aplicadas, principalmente, em engenharia, como a de Heaviside, demonstram a simplicidade e praticidade da adoção deste método, o que veio a incentivar a elaboração deste trabalho.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C**. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução Antonio Carlos Campos de Carvalho, Carlos Alberto Aragão de Carvalho. 3ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. Vol. 2. 5 ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[3] HOFFMANN, Laurence D. & BRADLEY, Gerald L. **Cálculo: Um curso Moderno e Suas Aplicações**. 6ª Ed. Tradução de Pedro P. de Lima-e-Silva. Revisão Técnica de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

[4] KREYSZIG, Erwin. **Matemática superior para engenharia**, Vol. 1 e 2. Tradução Luís Antônio Fajardo Pontes; Revisão técnica Ricardo Nicolau Nasser Kuory, Luis Machado. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

[5] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1. 3ª edição. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

[6] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 2. 3ª edição. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

[7] STEWART, James. **Cálculo**. Vol 1. Reimpressão da 6ª edição. Vários Tradutores. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

[8] SWOKOWSKI, Earl William. **Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução Alfredo Alves de Faria, com a colaboração de Vera Regina L. F. Flores e Marcio Quintão Moreno. Revisão Técnica Antonio Pertence Júnior. 2ª ed. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda. 1994.

[9] SCHIFF, Joel L. **The Laplace transform: theory and applications.** New York: Springer-Verlog, 1999.

[10] SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 2. Tradução de Seiji Hariki. Revisão Técnica de Rodney Carlos Bassanezi & Silvio de Alencastro Pregnolatto. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1988.

[11] ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem.** Tradução Cyro de Carvalho Patarra; revisão técnica Antônio Luiz Pereira. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

2. ANEXOS

INDÍCE REMISSIVO