Afrânio Austregésilo Thiel

PRÁTICAS MATEMÁTICAS NO PLANO CARTESIANO: UM ESTUDO DA COORDENAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do Grau de Doutor em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti.

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Thiel, Afrânio Austregésilo
Práticas matemáticas no plano cartesiano : um estudo da coordenação de registros de representação / Afrânio Austregésilo Thiel ; orientador, Méricles Thadeu Moretti - Florianópolis, SC, 2013.
235 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica.

Inclui referências

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Educação Científica e Tecnológica. 3. Plano Cartesiano. 4. Linguagem Matemática. 5. Semiótica. I. Moretti, Méricles Thadeu . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

"Práticas matemáticas no plano cartesiano: um estudo da coordenação de registros de representação"

Tese submetida ao Colegiado do Curso de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 18/12/2013

Dr. Méricles Thadeu Moretti (PPGECT/UFSC – Orientador)__________

Drª. Celia Finck Brandt (PPGE/UEPG – Examinadora)__________

Dr. David Antonio da Costa (MEN/CED/UFSC - Examinador)__________

Dr. Rogério de Aguiar (DMAT/CCT/UDESC – Examinador)__________

Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC/SP Examinador)__________

Drª. Sônia Elena Palomino Castro (MTM/CFM/UFSC - Examinadora)__________

Drª. Claudia Glavam Duarte (CED/UFSC -Suplente)__________

Drª. Sônia Maria Silva Corrêa de Souza Cruz (CED/UFSC - Suplente)__________

DR. CARLOS ALBERTO MARQUES
Coordenador do PPGECT

AFRÂNIO AUSTREGÉSILO THIEL
Florianópolis, Santa Catarina, dezembro de 2013.

Dedico este trabalho:

Ao meu Deus, por sempre estar comigo; à minha esposa Angela e à minha filha Sara, pelo companheirismo, pela compreensão, pelo amor; Aos meus pais, Ildefonso (*in memoriam*) e Neli que tanto me ensinaram sobre a vida e sobre os verdadeiros valores.

AGRADECIMENTOS

"Quando se diz 'obrigado' se dizem muitas coisas mais, que vêm de muito longe e de muito perto, de tão longe como a origem do indivíduo humano, de tão perto como o secreto pulsar do coração". (Pablo Neruda, 2013)

Ao concluir mais um trabalho acadêmico, na trajetória natural da profissão que abracei, elevo meu pensamento de gratidão a Deus, a quem muitas vezes recorri durante a realização deste trabalho, invocando e recebendo os dons da coragem e da persistência necessárias na busca do ideal estabelecido. Assim como não se vence sozinho qualquer jornada, tive sempre pessoas especiais que partilharam comigo esse percurso e que sem as quais não teria chegado a esse ponto da caminhada. É impossível citar todos que fizeram parte desse caminhar... Então, ouso citar apenas aqueles que definitivamente fizeram a diferença nesse período de minha vida. Agradeço:

À minha família, pelo apoio incondicional e pelo carinho.

Ao meu orientador, professor e amigo, Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti, por tudo o que tenho aprendido na convivência, nas discussões, nas orientações e trabalhos desenvolvidos, pela paciência, compreensão e direcionamentos. A você, meu carinho, admiração e agradecimentos.

Aos professores Drª. Célia Finck Brandt, Dr. David Antonio da Costa, Dr. Rogério Aguiar, Dr. Saddo Ag Almouloud e Drª. Sônia Elena Palomino Bean, pelas sugestões, comentários e críticas que muito contribuíram para a realização desta tese.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) da UFSC, Dr. Ademir Donizete Caldeira, Dra. Cláudia Regina Flores, Dr. Demétrio Delizoicov Neto, Dr. Frederico Firmo de Souza Cruz, Dr. José de Pinho Alves Filho, Dr. Méricles Thadeu Moretti, Dr. Walter Antonio Bazzo, pelo conhecimento compartilhado e experiências trocadas.

A todos os colegas da turma 2010 do doutorado, pelas discussões acadêmicas, pelos sorrisos e angústias compartilhados, pela companhia, pela amizade.

À direção e professores da Escola Básica Municipal Anita Bernardes Ganancini que me receberam de braços abertos, viabilizando a realização das atividades de investigação. Também, de modo especial, aos alunos que participaram da pesquisa, pela disponibilidade e colaboração.

RESUMO

O elemento plano cartesiano e seus espaços têm sido uma ferramenta indispensável no ensino-aprendizado de matemática seja no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, embora deva ser mais bem explorado na escola sob o ponto de vista didático/pedagógico. Sua trajetória está relacionada à geometria analítica e à formação do conceito de função partindo da Idade Antiga, e evoluindo na Média e na Moderna. Nesse contexto emerge a indagação: 'quais os procedimentos norteadores para compreensão e análise pelo aluno das representações no plano cartesiano, no contexto da aprendizagem escolar?'. Daí a importância da representação semiótica, por ser uma maneira didático-metodológica da qual o professor pode fazer uso para ensinar o objeto matemático, ou seja, o importante não são os registros de representação utilizados, mas a abstração–compreensão do objeto matemático por meio do uso desses registros; e o que garante a apreensão do objeto matemático e a conceitualização, é a capacidade do aluno de coordenar os vários registros de representações. Nesse estudo os procedimentos metodológicos e a parte experimental (sequência de ensino) serão realizados por meio da coleta e institucionalização dos dados (significados institucionais e pessoais postos em jogo), tendo como referenciais teóricos que deram suporte ao trabalho os aspectos da Teoria de Duval (Registro de Representação Semiótica - RRS) e da Teoria de Godino (Enfoque OntoSemiótico - EOS) no contexto do ensino e aprendizado de matemática buscando-se conexões entre elas. Os resultados até aqui coletados na pesquisa, com base em realizações didáticas em sala de aula, priorizando a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino, detectam avanços significativos na aprendizagem dos alunos quanto às práticas matemáticas no plano cartesiano.

Palavras-chave: Educação Científica e Tecnológica. Plano Cartesiano. Linguagem Matemática. Semiótica. Ensino e aprendizagem de matemática.

ABSTRACT

The Cartesian plane element and its spaces have been an indispensable tool in the teaching-learning of mathematics in both elementary and high school, although in a didactic/pedagogic view it should be better explored at school. Its trajectory is related to the analytic geometry and the formation of the concept of function, starting in the Ancient Age and evolving in the Middle and Modern Ages. In this context arises the question: 'what are the guiding procedures for understanding and analyzing the student representations in the coordinate plane, in the context of school learning?'. There it is the importance of semiotic representation, for being a didactic-methodological manner in which the teacher can use to teach the mathematical object, in other words, the important things are not the representation registers used, but the abstraction–understanding of the mathematical object through the use of these records, and what ensures the apprehension of the mathematical object and its conceptualization, is the student's ability to coordinate the records of several representations. In this study, the methodological procedures and the experimental part (teaching sequence) will be conducted by the collection and institutionalization of data (institutional and personal meanings put at a stake), having as theoretical frameworks, which gave the support to the work, the aspects of Theory Duval (Registration Representation Semiotics - RRS) and the Theory of Godino (Onto Semiotic Approach - EOS) in the context of teaching and learning mathematics seeking for connections between them. The results so far listed in this survey, based on educational achievements in the classroom, prioritizing the design, implementation, observation and analysis of teaching sequences, detect significant advances in students learning regarding the mathematical practices in the Cartesian plane.

Keywords: Science and Technology Education. Cartesian plane. Mathematic Language. Semiotics. Teaching and learning of mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC - Atividades Colaborativas
AI - Atividades Integralizadoras
AMFRI - Associação dos Municípios da Foz do Rio Itajaí
CG - Conceitografia
EF - Ensino Fundamental
EM - Ensino Médio
EOS - Enfoque Ontosemiótico
EPs - Estilos Pensamentos
GERED-SC - Gerência Regional de Educação-SC
GPS - Sistema de Posicionamento Global
MPP - Manual Pedagógico do Professor
PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD - Plano Nacional de Livros Didáticos
PPGECT - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica
PPP - Projeto Político Pedagógico
SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica
SSR - Sobre o Sentido da Referência
TRRS - Teoria de Registros de Representação Semiótica
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina
Nat. - Forma de linguagem Natural (texto)
Alg. - Forma de linguagem Algébrica
Gráf. - Forma de linguagem Gráfica

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

"O bom senso é a coisa do mundo melhor partilhada: pois cada um pensa estar tão bem provido dele, que mesmo os mais difíceis de contentar em qualquer outra coisa costumam desejar tê-lo mais do que têm". (DESCARTES, 2004, p. 37).

As grandes polêmicas sobre a natureza da Matemática, as suas relações com outras áreas de conhecimento e suas implicações culturais, sociais, políticas e econômicas fizeram com que seu ensino se tornasse objeto de reflexões, teorias e estudos desde a antiguidade.

Sendo a Matemática utilizada por necessidade da vida cotidiana, percebemos que, como as demais ciências, serve como instrumental para o conhecimento do mundo concreto/abstrato e domínio da natureza, dentre outros.

O bom senso nos permite dizer que a escola deve propiciar a formação do homem, interligando os vários campos do saber, tanto na dimensão cognitiva e afetiva, como na social.

Destaca-se que, como qualquer outra ciência, a Matemática apresenta suas limitações e desafios. Neste sentido, após vários anos no exercício do magistério, seja no ensino fundamental e no ensino médio, tem-se observado algumas inquietações de professores e dificuldades de alunos quanto ao ensino e aprendizado de funções.

Nos diálogos entre profissionais da área de Matemática é recorrente se ouvir falar sobre a ausência de base dos conteúdos ou dificuldade que os alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio têm para associar as regiões do plano cartesiano, interligando os símbolos de desigualdade com as formas de representação matemática tanto no registro gráfico, algébrico ou natural.

Marques (2000, p. 115) chama a atenção para o fato de que nas salas de aula "não se ensinam ou aprendem coisas ou saberes prontos, mas relações conceituais em que se articulam as práticas sociais com as razões que as impulsionam e delas derivam". O trabalho didático pedagógico objetivando promover conhecimentos matemáticos deve permitir que o aluno adquira princípios introduzindo 'regras e axiomas' e, em seguida, resolva questões que abranjam esses conceitos e princípios, expandindo dessa forma, sua estrutura de conhecimento.

O interesse pelo trabalho em questão está relacionado à prática docente, além de ser direcionado aos processos de ensino e de aprendizagem da disciplina de Matemática no 9º Ano do Ensino Fundamental. Nessa perspectiva, chama-se a atenção para a investigação das "Práticas Matemáticas no Plano Cartesiano: um estudo da coordenação de registros de representação".

Este trabalho teve o aporte da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na sua hipótese fundamental acerca da aprendizagem no contexto do ensino escolar, onde esta recomenda que, para aprender e apreender, faz-se necessário que aquele que aprende e apreende, transite entre vários registros de representação dos objetos e coordene-os. Além deste autor, buscou-se contribuições na teoria de Godino, dando enfoque para um modelo ontológico e semiótico, abordando as faces dos objetos matemáticos. Outros autores, além destes, também contribuíram com suporte teórico enriquecendo este estudo. Teve-se como objetivo compreender as dificuldades dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, na conversão das diferentes representações sobre regiões do plano cartesiano, por meio de representações na forma textual (escrita), gráfica e algébrica, indicando os elementos que devem ser levados em consideração para nortear as abordagens que buscarão uma melhoria no ensino e no aprendizado.

Visando alcançar os objetivos propostos, a estrutura textual será desenvolvida em cinco capítulos, além da introdução e reflexões finais.

No Capítulo 1 situa-se o estudo contextualizando o problema, apresentando as justificativas sobre o ensino de matemática interligado aos parâmetros curriculares nacionais.

O Capítulo 2 trata dos referenciais teóricos que dão suporte ao trabalho, ou seja, os aspectos da Teoria de Duval (TRRS) e da Teoria de Godino (EOS) no contexto do ensino e aprendizado de Matemática, apresentando as aproximações e distanciamentos entre as duas teorias.

A descrição dos procedimentos metodológicos é fornecida no Capítulo 3, onde os sujeitos pesquisados serão caracterizados, envolvendo todas as fases da pesquisa qualitativa e a forma de coleta de dados realizada por meio da prática matemática com os alunos em sala de aula, no período escolar.

O Capítulo 4 é dedicado à parte experimental - sequência de ensino, envolvendo a coleta e institucionalização dos dados (significados institucionais e pessoais postos em jogo).

Por fim, apresentar-se-ão as últimas reflexões da tese, enfatizando os principais achados do estudo.

1 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E JUSTIFICATIVA

A arte de ensinar é a arte de acordar a curiosidade natural nas mentes jovens.
Anatole France[1] (2013)

1.1 PROBLEMÁTICA

Refletir sobre como ocorre a construção dos conceitos em Matemática e o pensamento cognitivo envolvido é um processo essencial para a organização de atividades de ensino, devendo ser uma ação contínua no ensino e na aprendizagem. Não é surpresa o fato de muitos professores não conhecerem ou não reconhecerem a existência da ideia, da explicação ou o conceito que leva o aluno a entender o objeto na representação semiótica; ou seja, o conteúdo ligado por uma representação de um objeto, pode tomar forma de um pensamento e de um objeto perceptível[2]. Poucos buscam por meio da produção, manipulação e comunicação uma relação entre os objetos matemáticos e as representações numa atividade matemática, visando a conceitualização.

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) sejam um instrumento elaborado pelo MEC para orientar a educação brasileira, indicando os objetivos gerais do ensino fundamental e do ensino médio, ainda se esta aquém das metas desejadas. O que se constata no ambiente escolar é que, para muitos professores, é mais fácil repassar exercícios aos alunos simplesmente para cumprir um plano da disciplina, não tirando um tempo para refletir sobre a finalidade e abrangência do mesmo, as dificuldades dos alunos, os registros semióticos que o aluno utilizou, e aqueles que ele compreendeu e assimilou enquanto formação cidadã para a vida.

---

[1] THIBAULT, Jacques Anatole François, assinava com o pseudônimo Anatole France, (1844 – 1924) - Seu primeiro grande êxito foi '*0 Crime de Silvestre Bonnard*', premiado pela Academia francesa. Outras obras são: *Thais*, *0 Lírio* Vermelho, *O poço de Santa Clara, A rebelião dos anjos*, etc. Foi laureado em 1921 com o Prêmio Nobel de Literatura, pelo conjunto de sua obra (REBOUÇAS, 2012).

[2] Que pode ser acessível, percebido, compreendido ou que pode ser apreendido pelos sentidos.

Também se observa que os livros didáticos na área de Matemática estimulam pouco a criatividade, o desenvolvimento do raciocínio lógico, a conversão entre formas de representação (natural - texto, algébrica e gráfica), a iniciativa pessoal e o trabalho coletivo, fornecendo ferramentas que ajudem o aluno a enfrentar desafios, comprovar e justificar resultados e a desenvolver estratégias.

Segundo Dante (2009c, p. 6),

> O livro deve ser visto como um (e não o único) importante auxiliar do professor que busca ensinar Matemática de modo mais significativo para o aluno, com assuntos de vivência dele, desenvolvendo conceitos com compreensão e situações-problema interessantes, contextualizadas e/ou interdisciplinares. (Manual Pedagógico do Professor – MPP).

Amparados na concepção de Duval e de Godino et al., se observou a maneira como seis coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º Ano), conhecidos e utilizados por professores da rede pública de Santa Catarina, inclusos no guia de livros didáticos de Matemática do PNLD - Plano Nacional de Livros Didáticos (BRASIL, 2011) trabalham o conceito de plano cartesiano e as atividades de conversão dos registros envolvidas. Estas referências mais utilizadas nas escolas municipais da região da Associação dos Municípios da Foz do Rio Itajaí (AMFRI), foram indicadas pela décima terceira Gerência Regional de Educação - SC (13ª GERED - SC).

Prestou-se atenção para a dualidade forma/conteúdo ou o representante/representado das representações semióticas e à variedade dos registros de representação que se utiliza, buscando compreender os aspectos ligados à aprendizagem e ao ensino e os relacionados à forma como o saber pode ser estruturado para ser ensinado e aprendido, levando em conta o ponto de encontro de duas teorias (Registro de Representação Semiótica e Enfoque OntoSemiótico) que induziram a uma nova forma de apresentação para o assunto.

Dentre as coleções consultadas destacam-se: ‘Tudo é matemática’ de Dante (2009a, b, c, d); ‘Projeto radix: matemática’ de Ribeiro (2009a, b, c, d); ‘A conquista da Matemática’ de Giovanni Junior e Castrucci (2009a, b, c, d); ‘Matemática e realidade’ de Iezzi, Dolce e Machado (2009a, b, c, d); ‘Matemática’ de Bianchini (2009a, b, c, d); ‘Vontade de saber matemática’ de Souza e Pataro (2009a, b, c, d).

Essas coleções trabalham de forma indireta os elementos do plano cartesiano nos gráficos, tabelas, dentre outros, quando abordam exercícios envolvendo o tratamento da informação[3]. Contextualizam de forma mais geral as informações, ou seja, procurando seguir as ideias contidas no Parâmetro Curricular Nacional (PCN) e no Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD), com textos, exemplos e exercícios mais atuais e algumas vezes, próximos da realidade do aluno.

O que não significa que os alunos tenham facilidade em transformar uma linguagem gráfica em natural ou algébrica, e vice-versa, fato este também apontado nas escolas pelos professores do Ensino Fundamental.

Embora criem oportunidades para o aluno desenvolver o pensamento (numérico, algébrico e geométrico), o raciocínio (proporcional, combinatório, estatístico e probabilístico) e a competência métrica, informando que trabalham os conteúdos em uma proposta de currículo em espiral (AUSUBEL[4], 1980), sendo os mesmos retomados em vários momentos com um nível de complexidade gradativo, tratando os quatro eixos[5] temáticos dos PCN – matemática, de maneira equilibrada, verifica-se que as séries de atividades sobre coordenadas e o plano cartesiano não estabelecem uma relação entre os diferentes registros de representação semiótica (formas de linguagem), não alternando a ordem das formas e a ação de ir e vir ligadas ao tema com vistas a uma melhor compreensão por parte do aluno.

Foi possível observar ainda que as atividades não envolvem os

---

[3] O eixo tratamento da informação atende o PCN – Matemática, evidenciando sua importância, em função do uso atual na sociedade. Nas informações estatísticas, “[...] a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente no dia-a-dia” (BRASIL, 1997, p. 56).

[4] Segundo Ausubel (1980), para que o aluno possa aprender significativamente o material instrucional, deve existir subsunção ‘ação de tomar’, ou seja, uma apropriação. Essa apropriação dar-se-á com a interação entre o sistema conceitual mais relevante, que possibilite a sua conexão com a nova informação a ser aprendida, seja ela um conceito, ideia, ou proposição já existente na estrutura cognitiva do aluno.

[5] Eixos: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; tratamento da informação.

componentes 'operatórios - discursivos' que conduzem para o 'significado institucional[6] e pessoal[7]'.

As coleções também não exploram situações relacionando os símbolos de desigualdades e as regiões do plano cartesiano onde os alunos possam tirar suas considerações, como lucro, prejuízo, etc.

Professores relatam que os livros didáticos em questão fazem uso de algumas formas de registros; entretanto eles não estabelecem relações entre eles; apenas realizam poucas conversões entre pares de registros, o que não significa que os alunos tenham compreendido o tema. De forma restrita envolvem a localização de um ponto no plano cartesiano e as coordenadas do ponto, interligando geometria e álgebra. Simplesmente incluem o elemento plano de forma indireta quando estimulam os alunos a resolver atividades contextualizando o tratamento da informação com atualidades.

Atento às ideias de Godino e de Duval, não se observa nos volumes das coleções consultadas uma proposta que leve o aluno, partindo da organização de ideias, à elaboração de um conceito.

Também merece destaque a existência mínima de publicações referentes ao tema. Pesquisas realizadas nos portais da SciELO, Portal de periódicos Capes e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (IBICT) revelam que as poucas publicações (ver Apêndice B) encontradas sobre plano cartesiano estão mais focadas para a conversão de uma coordenada cartesiana (forma algébrica) para a forma

---

[6] Significado Institucional: tem conotação normativa ou convencional. Quando o objeto e seu texto são usados como recurso do professor, observando o currículo, o plano da disciplina, livros texto, além das suas explicações (GODINO, 2002).

[7] Significado Pessoal: são as respostas do aluno conforme o desenvolvimento e a ampliação do professor, incluídas nas ações do sujeito ante as tarefas propostas agrupando a 'entidades primárias que abrangem: linguagem, situações, ações, conceitos, propriedades, argumentações' ou 'entidades secundárias, tais como: práxis (ação; prática), logos (o princípio da inteligibilidade; a razão), praxeologia, conceito-sistemas (representação de um objeto formado por um conjunto de elementos interdependentes que interagem com objetivos comuns formando num todo um sistema), campos conceituais (conjunto de situações que evocam certo conceito), teoria de grupos (onde a ordem pode significar duas coisas diferentes), aritmética, geometria, dentre outros' (GODINO, 2002).

gráfica e vice-versa, além de protótipos de plano cartesiano e atividades para portadores de deficiência visual.

Constatou-se que as publicações consultadas apresentam situações pontuais, procurando melhorar o ensino e aprendizado dos alunos, porém, pouco exploram as ideias das teorias de registro de representação semiótica e da ontosemiótica.

Considerando o grau de relevância e aplicação no 'Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior', e nas diversas situações-problema que aparecem no dia-a-dia, conclui-se que o tema precisa ser mais explorado, o que comprova a relevância desta pesquisa.

Assim sendo, neste trabalho toma-se como objetivo compreender as dificuldades dos alunos, em sala de aula, na conversão entre representações significáveis (linguística, simbólica, gráfica) de regiões do plano cartesiano, por ser de fundamental importância para o estudo de comportamento da correspondência entre grandezas e construção de gráficos em vários campos da matemática.

Perceber o significado de uma atividade envolvendo situações da realidade dos alunos, a qual foi elaborada ou resolvida por eles, ligando-a a novas aptidões cognitivas, são fatores imprescindíveis na prática pedagógica. Por outro lado, compreender as representações semióticas e a congruência semântica, mais precisamente o trânsito entre as diversas representações possíveis de um mesmo objeto matemático em estudo, é o que deve assumir papel de relevância no ensino e aprendizagem da matemática.

Diante desse desafio, surge a necessidade de uma proposta de pesquisa que contemple práticas de aprendizagem matemática no plano cartesiano tendo como ponto de encontro duas teorias semióticas.

Na tentativa de solucionar a problemática levantada acima, ou seja, envolver os alunos com atividades que mobilizem diferentes formas de representação de determinados objetos matemáticos, busca-se aplicar uma nova proposta de ação integrando duas teorias: a desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval sobre registros de representações semióticas[8], quando ele as descreve como sendo as capacidades, os processos, as estratégias e as representações mentais básicas e subjacentes ao comportamento profícuo em situação de

[8] Segundo Duval (2004), um registro de representação semiótica é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais em nível do funcionamento cognitivo consciente do sujeito.

aprendizagem matemática, dentre outros. Já, Juan Diaz Godino (2002) propõe que a prática matemática para resolver problemas pode ser pensada e elaborada a partir da configuração de objetos matemáticos, tanto no campo epistêmico (ou institucional) ou cognitivo (ou pessoal), comunicando a outros a solução obtida, validando-a ou generalizando-a a outros contextos e problemas.

Diante da dificuldade de aprendizagem escolar dos alunos quanto à compreensão do objeto 'plano cartesiano e suas regiões', passa-se a relatar questões que compõem o problema de pesquisa:

a) *Como ocorre a conversão entre registros de representação significável (linguística, simbólica, gráfica) para as regiões do plano cartesiano?*
b) *Os alunos realizam conversões e tratamentos no interior dos sistemas de registros escolhidos e as conversões entre eles?*
c) *Como o aluno enfrenta a complexidade da organização visual da informação e da comunicação em representações gráficas no plano cartesiano?*
d) *Qual a relação entre a economia de tratamento, a complementaridade dos registros e o aprendizado do conteúdo, assim como a conceitualização das regiões do plano cartesiano?*

1.2 PROBLEMA DE PESQUISA

No contexto da aprendizagem escolar, quais os procedimentos que norteiam a compreensão e análise pelo aluno de diferentes registros nas regiões do plano cartesiano?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

Apontar, por meio de reflexões analíticas, a compreensão dos alunos do ensino fundamental (9º Ano) das representações das regiões do plano cartesiano, nas formas linguística (textual), gráfica e algébrica, indicando os elementos que devem ser levados em consideração para subsidiar as abordagens para o ensino.

1.3.2 Objetivos específicos

a) Identificar as ideias prévias dos alunos diante de uma situação dada na forma linguística (textual), gráfica e algébrica, tendo como referencial o plano cartesiano.
b) Compreender de que forma ocorre a conversão numa situação proposta apropriando-se da representação linguística e/ou simbólica, enquanto forma de se expressar o objeto matemático, segundo as funções de comunicação, tratamento, objetivação, defendidas por Duval.
c) Examinar, por meio de situações em classe, registros de representação gráfica no plano cartesiano envolvendo a complementaridade dos registros e o aprendizado do conteúdo, assim como a conceitualização das regiões do plano cartesiano.

1.4 JUSTIFICATIVA

Sempre seremos indivíduos de linguagem por vezes incompleta, e não conseguiremos comunicar tudo o que queremos, mesmo tendo a experiência da animação quase permanente de imagens visuais, auditivas, de sensação ou percepção do movimento, e até da capacidade que os seres têm de receber informações sobre as diferentes partes do seu corpo, que acompanham nossa vida.

Parte-se da consciência de que nossos próprios gestos e falas por vezes não passam de esboços mentais e que, sem signos e símbolos, é impossível a comunicação, a representação e a experiência por meio de conceitos implícitos e/ou explícitos, organizados por uma representação que busca a funcionalidade. A representação em seu caráter funcional organiza a ação, o comportamento e a atividade podendo ser apresentada por uma palavra e/ou conceito.

Geralmente, enquanto educadores, não se atenta para a noção de representação, ou seja, para o processo cognitivo do pensamento matemático no ensino. Dá-se mais importância às representações mentais que às representações semióticas. Considera-se em geral, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, ou seja, para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem.

Daí surge à necessidade da proposta de pesquisa, no intuito de sustentar que as representações para fins de comunicação desempenham um papel fundamental seja no desenvolvimento das representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas, e na produção de conhecimentos.

Como a aprendizagem matemática possibilita um campo privilegiado de estudo, evidencia-se a relevância de viabilizar estudos para identificar e compreender os registros de representação semiótica elaborados pelos alunos, compreendendo de que forma ocorre a conversão em situações propostas em sala de aula, examinando o nível de compreensão com relação ao objeto plano cartesiano.

Convém lembrar que muitas das dificuldades observadas em sala de aula na compreensão de conceitos, até na resolução de problemas nos diversos temas e níveis de ensino de matemática, podem ser explicadas por meio do tratamento e conversões entre as mais diversas formas de representação de um mesmo objeto matemático, seja por apreensão (perceptiva, discursiva, textual, simbólica, operatória, dentre outros), levando-se também em conta o custo cognitivo desta operação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

As palavras em si não possuem um significado fixo e recebem seu significado somente no contexto, numa área de pensamento (Ludwig Fleck); e, *A significação de uma palavra é o seu uso na linguagem* (Ludwig Wittgenstein). (CONDÉ, 2012, p. 77)

2.1 TECENDO ALGUMAS IDEIAS INICIAIS SOBRE A REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O OBJETO DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Em nosso cotidiano, seja no convívio escolar ou em qualquer ambiente, faz-se uso corrente dos termos ‘língua[9]’ e ‘linguagem[10]’ de forma espontânea, e por vezes não percebendo as diferenças e a importância deles na vida do homem. Pode-se dizer que a diferença entre língua e linguagem tem conexão com a *linguística* ‘linguagens verbais’ e *semiótica* ‘ciência de toda e qualquer linguagem’.

Considerando que a realidade, seja ela um objeto, um acontecimento, um fenômeno ou fato, proporciona uma representação, e que a linguagem é a um código organizado para a representação do pensamento, observa-se que aquilo que está em nossa mente só se realiza por meio do aprendizado, e este se concretiza, na forma de linguagens. Por meio da ‘linguagem’ pode-se relacionar uma gama intricada de formas sociais de comunicação e de significação que, além de incluir a linguagem verbal articulada, absorve outras formas de linguagem, como por exemplo, a dos sinais de trânsito, de libras - braile, dos meios de comunicação, dos computadores (inumana), o sistema codificado da música, da moda, da culinária, dentre tantos outros. Segundo Santaella (2007) veem-se muitas evidências de linguagem, como aquelas que a natureza transmite ao homem por meio das flores, dos ventos dos ruídos, dos sinais de energia vital emitidos

---

[9] Define-se a ‘língua’ como sendo a linguagem que utiliza a palavra como sinal de comunicação” (TERRA, 1997, p. 13). Ou seja, é “o conjunto de palavras e expressões faladas ou escritas por um grupo de falantes ou próprias de um povo – nação, e o conjunto de regras da sua gramática” (FERREIRA, 2009, p. 1212).

[10] Diz-se linguagem “a todo sistema de sinais convencionais que nos permite realizar atos de comunicação” (TERRA, 1997, p. 12).

pelo corpo, do silêncio, do sonho. As linguagens estão contextualizadas no mundo real e nós estamos inseridos nela.

Ao preocupar-se com a aprendizagem e o ensino da Matemática, percebe-se quanto a questão pedagógica está vinculada à concepção de como se processa o conhecimento matemático.

A concepção do professor sobre o que é a Matemática, de como se dá o seu processo de produção e construção influenciam não apenas no que ele ensina, mas também como ensina. A concepção implícita ou explícita do professor, além de influir no desenvolvimento de estratégias de ensino, contribui para a formação da imagem que o aluno faz da Matemática e do matemático. Em consequência, verifica-se o comprometimento da própria aprendizagem, por não incorporar o conhecimento integrado às vivências de cada grupo de alunos, por estar alheia à realidade em que os mesmos estão inseridos.

O que se observa é que o professor geralmente não se atenta para compreender as dificuldades cognitivas do aluno presentes no ensino da matemática, e por vezes tende a organizar suas aulas enfatizando os conteúdos que prefere e domina. Ou ainda, baseia a sua prática docente no modelo de ensino vivenciado na vida acadêmica.

Nas escolas, quando se ensina um conteúdo matemático, dá-se mais importância às representações mentais que às representações semióticas. Considera-se em geral, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais, para fins de comunicação, para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem.

Entretanto, a distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão da matemática. É evidente que os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis na percepção, ou numa experiência intuitiva imediata, como estão os objetos ‘reais’ ou ‘físicos’, sendo necessário exibir representantes destes objetos.

Nesse sentido, compete ao professor considerar a diversidade de registros que podem fazer parte no desenvolvimento da atividade matemática envolvendo a passagem de um sistema a outro, proporcionando problemas específicos ao representar um objeto matemático, não sendo conceituais.

As representações matemáticas feitas pelos alunos diante de uma situação levantada por eles ou pelo professor exercitam ‘a síntese’ – o ato de reunir coisas distintas que não estavam combinadas, e ‘a análise’ – o ato de decompor, de revelar os ingredientes componentes. Ao longo das atividades o aluno deve perceber que a matemática compreende descrições de objetos não apenas dentro de uma estrutura lógica com perfeição e transparência, mas muitas vezes envolta por construção extra lógica, com usos sempre novos e jogos de linguagem[11] em contínua reformulação.

Os significados dos objetos matemáticos encontram-se na própria linguagem matemática. Chama-se atenção para o fato de que as proposições matemáticas têm um caráter normativo e não descritivo como muitas vezes aparenta ser. Ou seja, as proposições matemáticas são regras a serem seguidas, são normas, e não resultado de algum processo empírico.

Se assumirmos que estes significados encontram-se na própria linguagem, é possível perceber que ao mudarmos o contexto da linguagem, suas proposições podem perder o sentido, ou serem modificadas. Mudar o contexto da linguagem, para Wittgenstein (2009), é mudar de jogo de linguagem. Então os significados dos objetos matemáticos estão atrelados ao jogo de linguagem em que se inserem. E todo jogo precisa de uma gramática para dar sentido às suas proposições. A gramática que Wittgenstein se refere, é aquilo que diz o que é certo ou o que é errado dentro do jogo de linguagem que se está inserido.

Gottschalk (2004) considera importante para que o aprendizado de uma linguagem se efetive, que o aluno efetue várias atividades, ou seja, há um terreno preparatório que não pode ser ignorado, ocorre uma conexão entre ensino e significado, exigindo da 'instituição escola' e 'da matemática', campo com destaque curricular no desenvolvimento dos alunos, um desempenho tal que venha a contribuir para que os mesmos operem em seu meio cultural com diferentes modos de representação.

Godino e Batanero (1994) por meio da teoria dos 'objetos pessoais e institucionais', sugerem uma prática para se entender o significado das representações dos objetos matemáticos; ideia esta, posteriormente ampliada por Font (2000) ao tratar de 'contexto'.

---

[11] A teoria do jogo assume valor essencial em Ludwig Wittgenstein (1889-1951), nomeadamente no "último Wittgenstein", que trata dos "jogos de linguagem" ou "jogos linguísticos". De acordo com o filósofo austríaco, os jogos, todos os jogos, inclusive os jogos de linguagem, têm "um ar de família", na medida em que todo jogo obedece a regras, sejam regras formais, sejam regras estratégicas, que são criadas no curso do próprio jogo (WITTGENSTEIN, 2009).

Estas noções, segundo Godino (2006, p. 92) são discutidas em termos de sistemas de práticas pessoais, considerando-se 'prática' como sendo "[...] toda atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas".

Eles consideram 'uma instituição' como sendo um grupo de pessoas inseridas em um determinado contexto, partilhando de um mesmo propósito para solucionar certas questões, de um coletivo de pessoas envolvidas em uma mesma classe de situações, compartilhando de um mesmo compromisso para a solução dessas questões.

> Denominamos instituição matemática (M) as pessoas que no seio da sociedade estão comprometidas na resolução de novos problemas matemáticos. São, portanto, os produtores do saber matemático. Outras instituições (macro-instituições) envolvidas com situações matemáticas são os utilizadores do saber matemático (matemáticos aplicados) e os professores do saber matemático (a escola do saber matemático) (GODINO; BATANERO, 1994, p. 335).

Fica evidente pela definição de 'instituição' acima apresentada que ocorre uma diferenciação entre Matemática Científica (Acadêmica[12]) e Matemática Escolar[13], evidenciando-se que os objetos emergentes da prática desses coletivos são distintos em sua essência (no tratamento dado a eles) porque provêm de instituições diferentes, interessadas na resolução de problemas específicos e relacionados ao seu sistema de práticas.

---

[12] Matemática Acadêmica: centra-se na produção de resultados originais de fronteira, nos quais a abstração e o rigor lógico são fundamentais (o processo de desenvolvimento do novo conhecimento, o caminho percorrido, os erros cometidos, as hipóteses, etc.), conforme reforçam Moreira; David (2003).

[13] Matemática Escolar: "[...] o conjunto dos saberes validados, associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática" (MOREIRA; DAVID: 2005, p.110). Estão em jogo os conhecimentos produzidos no âmbito pedagógico (técnicas de ensino, metodologias, materiais didáticos, etc.).

Concorda-se com Godino, Batanero e Font (2006, p.6) ao afirmarem que:

> A matemática compõe um sistema conceitual logicamente organizado e socialmente compartilhado e os objetos matemáticos são entidades culturais cuja natureza sistemática e complexa não pode ser descrita meramente com as definições formais quando nos interessamos pelos processos de ensino e aprendizagem dos mesmos.

Daí o fato de o professor e epistemólogo Delizoicov, do PPGECT[14] – UFSC, chamar a atenção dos acadêmicos, para a necessidade de termos clareza sobre a nossa concepção de sujeito para o desenvolvimento da prática docente, uma vez que ela interfere na forma como se vê e se trata ‘o fazer pedagógico’ e ‘o aluno’, enquanto sujeito do conhecimento ou simplesmente como receptor de informações. Hoje, ao ensinar, o professor deve pensar sobre como o estudante está aprendendo, como ele pode estabelecer relações para constituir-se sujeito crítico.

2.2 CONTRIBUIÇÕES PARA ENTENDER COMO FUNCIONAM AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Ao se considerar que a educação de um indivíduo se caracteriza por um processo contínuo de construção de conhecimentos e valores, concorda-se com a ideia de Groenwald (1999) de que aprender Matemática é ir além de aprender técnicas para utilização imediata, é interpretar, explicar o sentido das coisas, fazer ferramentas conceituais, perceber problemas, preparar-se para encontrar a solução, desenvolver o raciocínio lógico, a compreensão e a imaginação.

Tampouco se pode pensar em representação sem pensar no objeto seja ele existente ou não, e em conhecimento sem a presença da representação, que permite o acesso aos objetos do conhecimento por meio da mediação do objeto do signo (o referente) podendo ser um

---

[14] Programa de pós-graduação em educação científica e tecnológica – Universidade Federal de Santa Catarina.

conhecimento perceptível (uma coisa concreta, material do mundo), ou algo abstrato (uma entidade puramente imaginária ou mental).

Santaella (2008) afirma que Pierce[15] reconhece dois tipos de objetos: ‘o imediato’ – aquele que incita uma representação mental de um objeto, podendo o objeto existir ou não; é uma cognição produzida na mente do intérprete (é interior ao signo). Já ‘o objeto real’ (mediado ou dinâmico) é aquilo que o signo substitui, ou seja, que irá representar (é exterior ao signo). Pode-se destacar como objetos matemáticos: números, grupos, ponto, conjuntos, reta, área, volume, dentre outros.

Um dos modelos mais clássicos para explicar como o pensamento e linguagem estão entrelaçados é o triângulo de Ogden e Richards[16] (1956) constituído pelo ‘símbolo’ (significante), ‘referência’ (ou pensamento), ‘referente’ (coisa ou objeto extralinguístico). Eles mostram claramente a existência de uma separação entre três instâncias: 1ª) o mundo real; 2ª) as palavras que se usa para nomear os objetos que lá se encontram; 3ª) os pensamentos / percepções que pode se ter tanto de uma coisa quanto de outra. Este triângulo deu origem a uma tendência usual na linguística moderna, que é de considerar a língua como estrutura conceitual do universo, sendo comum afirmar que ela é o instrumento de análise ou recorte da realidade.

Fundamentando-se na tríade de Ogden e Richards, Pierce aperfeiçoou suas pesquisas no campo da semiótica, defendendo que o signo não pode ser pensado isoladamente, mas está interligado com três elementos: ‘representâmen’ (símbolo ou significante), ‘interpretante’ (conceito veiculado pelo símbolo) e ‘objeto’ (a idealidade matemática, a entidade). Também faz alusão a uma divisão dos signos em: ‘símbolo,

---

15 PEIRCE, Charles Sanders (1839 – 1914) – Lógico e filósofo americano, tinha sua preocupação com as leis e a organização geral do pensamento, das ações e da sensibilidade humanas, levando-o a postular como fundamento da lógica, uma teoria geral dos signos, também chamada de semiótica (SANTAELLA, 2008).

16 OGDEN, Charles Kay (1889 – 1957) e RICHARDS, Ivor Armstrong (1893 – 1979) – Publicaram vários artigos sobre ‘o significado de significado’ ou seja, o significado (pensamento ou referência) é um produto realizado a partir de nossas relações sociais que é estabelecido entre o significante (símbolo ou referência), determinando o objeto (referente). A mais importante relação no triângulo de Ogden e Richards é a existente entre o significante e o significado (OGDEN e RICHARDS, 1956).

ícone e índice'. Os 'símbolos', não são uma coisa singular, mas um tipo geral - são signos arbitrários, instituídos, estão associados a um objeto por uma convenção, uma ideia. Já os 'ícones' são signos que guardam um traço de similaridade com o objeto e os 'índices' são afetados diretamente pelo objeto.

De maneira geral os linguistas/filósofos das ciências têm em comum a ideia de que o signo está no lugar de algo, ele age como uma espécie de procurador do objeto, ou seja, representa alguma coisa para alguém, sob algum aspecto, podendo ser um objeto ideal, um objeto concreto, neste caso, o objeto matemático.

Santaella (2008, p. 90) de forma convincente expõe a função de substituição do signo e a distinção do objeto com a coisa representada como:

> Qualquer coisa de qualquer espécie, imaginada, sonhada, sentida, experimentada, pensada, desejada,... pode ser um signo, desde que esta coisa seja interpretada em função de um fundamento que lhe é próprio, como estando no lugar de qualquer outra coisa.

Também, quando se trabalha a referência e o sentido de uma representação semiótica, deve-se considerar que o signo não é o objeto, apenas está no seu lugar, ou seja, nunca está completamente representado naquele, faz relação, corresponde apenas de um certo modo a uma parte ou aspecto dele. Segundo Santaella (2008, p. 34) "sempre sobram outras partes ou aspectos que o signo não pode preencher completamente".

Colombo (2008, p. 95) apresenta uma situação referendando "que signos diferentes de um mesmo objeto podem revelar aspectos diferentes dele". Por exemplo,

> Um desenho de uma escola, uma figura de uma escola, um filme de uma escola, a fotografia de uma escola, a maquete de uma escola, a planta baixa de uma escola, são todos signos do objeto escola. Não são a escola e nem mesmo a ideia geral que temos de escola. Apenas representam a escola, cada um deles de uma certa maneira, dependendo da natureza do signo escolhido para a representação. Para alguns poderia suscitar o sentido de 'lugar de trabalho', para outros, 'lugar

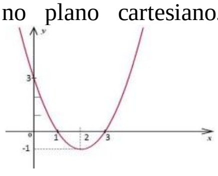
> para brincar', 'lugar para aprender', 'lugar onde se encontram crianças'.

Já, Schaff (1974) tentando ligar a linguagem à práxis social, ou seja, a respeito da relação que existe entre linguagem, percepção e pensamento, mostra que tanto a percepção quanto a linguagem estão inseparavelmente ligadas à práxis social.

Deixa claro também que o homem sendo arquiteto e ao mesmo tempo obra de sua cultura, fundamenta seus juízos e valores sempre condicionados a sua classe social. Sendo assim, a concepção de sujeito está relacionada com aculturação, pois o sujeito ao conhecer uma nova cultura se apropria dela ao interagir e adicionar 'coisas' ao objeto. Um exemplo bem conhecido é o que mostra como os esquimós percebem a cor branca; segundo Schaff (1974), eles não veem a neve do mesmo modo como nós que habitamos regiões mais quentes. Para os esquimós é uma questão de sobrevivência, por isso nomeiam 30 tipos de neve, de acordo com as tonalidades de branco que conseguem distinguir.

Também, podem ser encontrados no campo da matemática, dentre vários exemplos que existem, a ideia de signos diferentes evocando diferentes sentidos de um mesmo objeto matemático. Observe o exemplo de Moretti (2002) nas representações de uma mesma parábola:

Quadro 01 – Representação de signos diferentes do objeto matemático 'parábola'

Representação	Segundo Moretti (2002), cada uma dessas representações possui, em sua integridade, as mesmas informações do objeto matemático em referência. Todavia, do ponto de vista cognitivo, um determinado tipo de informação sobressai mais em uma do que em outra forma. Vemos:
(a) $y = x^2 - 4x + 3$	(a) a ideia mental da curva aberta (parábola) com concavidade para cima.
(b) $y + 1 = (x - 2)^2$	(b) as coordenadas do vértice da parábola.
(c) $y = (x - 3)(x - 1)$	(c) com clareza as raízes.
(d) esboço da parábola no plano cartesiano. 	(d) uma representação de um sistema semiótico diferente dos anteriores e que em muitas vezes é bastante adequado à interpretação, se for o caso, do fenômeno representado. Nesta mesma forma, no entanto, não temos com precisão, por exemplo, o valor de $y(\sqrt{2})$.

Fonte: Adaptado de Moretti (2002, p. 347).

Um dos estudiosos que mais contribuíram para esclarecer a diferença entre ‘sentido’ e ‘referência’ de um objeto, foi Frege[17] (1978), ao direcionar-se para a análise do conhecimento nos aspectos epistemológicos e cognitivos, sobretudo quanto ao caráter semântico[18] da referência, do sentido de determinada representação e do objeto como invariante de referência de muitas representações. Frege admite que duas ou mais representações não iguais possam fazer referência ao mesmo objeto, o que não acontece com o sentido atribuído a elas: “[…] a referência e o sentido devem ser distinguidos da representação associada a este sinal” (FREGE, 1978, p. 64).

De igual forma, esclarece que é preciso ter clareza da distinção entre sentido e referência de uma representação semiótica, podendo desse modo fornecer uma forma estreita e indispensável de juntar os signos aos objetos no processo de conhecimento. Frege (1978, p. 62) afirma que:

> É, pois plausível pensar que exista, unido a um sinal (nome, combinação de palavras, letra), além

---

[17] FREGE, Friedrich Ludwig Gottlob (1848 – 1925) – Matemático, lógico e filósofo alemão. Mais conhecido na linguística pela sua teoria ‘Sobre o sentido e a referência’ (SSR). Ao colocar a distinção sentido/referência em uma perspectiva histórica, o pesquisador em sua carreira acadêmica, procurou saber e provar que a aritmética é um ramo da lógica, especificamente em SSR. Destacam-se dois problemas que Frege tinha para resolver: o funcionamento do signo de identidade de conteúdo e o valor semântico de sentenças.

[18] **Nível Semântico** – “A semântica privilegia o significado da mensagem, é a relação das ideias que nós queremos transmitir. É a operação com a sintaxe que vai suspender esse significado, de acordo com a seleção e combinação que fazemos. Por exemplo: ‘as velas estão soltas” é sintático, mas ‘as velas do candelabro estão soltas’ temos um nível referencial explicito, ou seja, uma semântica. Ou, a palavra ‘manga’, pode ser ‘manga de camisa’, ‘manga enquanto fruta’, ‘manga de diferencial de um carro’” (TURIN, 2007, p. 73). **Nível Sintático** – “Quando uma qualidade, como tal, nunca é objeto de observação. [...] Neste nível de ordenação é preciso senso investigativo, saber ver ‘o detalhe no conjunto’ e ‘a relação no todo’ através de uma leitura indicial que possibilitará as reflexões lógicas. Exemplo: uma coisa é azul ou verde, é uma qualidade, falta uma maior aproximação com o objeto sígnico” (TURIN, 2007, p. 73). **Nível Pragmático** – **“**É o nível do conhecimento, o nível das relações de uso dos signos. É de extrema importância, porque é alimentado pelo repertório dos conhecimentos que possuímos” (TURIN, 2007, p. 74).

> daquilo por ele designado, que pode ser chamado de sua referência, ainda o que eu gostaria de chamar de o sentido do sinal, onde está contido o modo de apresentação do objeto.

Destacam-se pontos do texto de Frege (1978):

a) O signo também não pode ser entendido separadamente, mas sim em estreita relação com sua referência e com o seu sentido (FREGE, 1978, p. 44). Veja a descrição de um exemplo no Quadro 02:

Quadro 02 – Representação de signos do objeto matemático ‘numeral 16’

Signo	Relação Referência e Sentido
‘2^4’e ‘4 . 4’ ou ‘$2^4 = 4^2$’ e ‘$4 . 4 = 4^2$’	Tem a mesma referência (são nomes próprios do mesmo numeral ‘16’), mas não tem o mesmo sentido (não contêm o mesmo pensamento).

Fonte: Adaptado de Frege (1978, p. 44).

b) As representações podem ter em comum a referência, mas não o sentido. Uma simples expressão, a forma de um conteúdo difundido por ela, não pode ser a essência da coisa, mas pode ser o próprio conteúdo, e em última instância, o objeto - podendo tomar a forma de um pensamento, um objeto perceptível, um nome próprio ou mesmo um valor de verdade (FREGE 1978, p. 36). Veja a descrição de um exemplo no Quadro 03:

Quadro 03 – Representações que fazem referência ao ‘numeral 18’

Signo	Relação: Referência e Sentido
‘$2 . 2^3 + 2$’ e ‘3 . 6’ ou seja, **2 . 2^3 + 2** = 18 ou **3 . 6** = 18	As representações fazem referência ao mesmo objeto matemático, o numeral ‘18’. Afirma Frege: “a igualdade $2. 2^3 + 2 = 18$ exprime que a referência da sequência de sinais à direita do sinal de igualdade é a mesma que a referência da sequência de sinais à esquerda. Devo aqui me opor à opinião de que, por exemplo, 2 + 5 e 3 + 4 são iguais, mas não são o mesmo”.

Fonte: Adaptado de Frege (1978, p. 36).

c) A referência de um nome próprio é o próprio objeto que por seu intermédio designamos; a representação que dele temos é inteiramente subjetiva; entre uma e outra está o sentido

> que, na verdade, não é tão subjetivo quanto a representação, mas que também não é o próprio objeto (FREGE, 1978, p. 65). Veja a descrição de um exemplo no Quadro 04:

Quadro 04 – Referência e sentido de um nome próprio: ‘a lua’

Signo	Relação: Referência e Sentido
A lua (objeto perceptivo)	“[...] comparo a própria lua à referência; ela é o objeto da observação, proporcionado pela imagem real projetada pela lente no interior do telescópio, e pela imagem retiniana do observador. A primeira comparo-a ao sentido, a segunda à representação ou intuição”.

Fonte: Adaptado de Frege (1978, p. 65).

No entanto, quando analisamos a estrutura tríade em relação ao funcionamento dos três elementos constitutivos do signo temos: ‘símbolo’ (signo ou significante); ‘referência’ (interpretante, conceito); e ‘referente’(objeto). No processo da semiose, a referência não pode ser o objeto, mas pode ser uma relação que diz respeito a ele, que o explica, que o conceitua.

De forma objetiva podemos afirmar que a ligação entre as representações (signos) e os objetos ocorre por meio da referência da representação semiótica, podendo ser considerada então como a ideia, a explicação ou o conceito que faz entender, surgir e apreender o objeto.

Por outro lado, o sentido da representação semiótica de um objeto relaciona-se com o conjunto de aspectos revelados pelos signos utilizados, ou ainda, como apontam Godino, Batanero e Font (2006), pode ser entendido como um significado parcial dos objetos. Em outras palavras, o sentido de uma representação pode ser considerado como a possibilidade de interpretação produzida e inerente ao uso deste ou daquele signo, num determinado contexto.

A necessária distinção entre sentido e referência se mostrou especialmente importante para o ensino da Matemática, uma vez que “[...] induziu e separa com clareza a significação que depende do registro de descrição escolhido, da referência que depende dos objetos expressos ou representados” (DUVAL, 1988a, p. 7).

Observe o exemplo dado por Duval (1988a) no Quadro 05:

Quadro 05 – Representação de signos de um mesmo objeto matemático: o ‘2’

Signo	Relação: Referência e Sentido
(a) 4/2, (b) (1+1), (c) $\sqrt{4}$ [...]	“São formas escritas que designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto e que não possuem a mesma significação uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: (a) exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão; (b) em função da recorrência à unidade [...]. Simples mudanças na escrita permitem exibir propriedades diferentes do mesmo objeto, mas mantendo a mesma referência”. Portanto o reconhecimento da quantidade ‘dois’ nas expressões permite ao sujeito trocar uma pela outra, sem alterar o seu conteúdo (objeto matemático), embora possuam significados operatórios distintos. É evidente que um aluno poderá reconhecê-lo optando dentre os registros o(s) mais econômico(s), por exemplo (1 + 1; 4/2 ; 3 – 1; 2 x 1; 10 : 5; $(\sqrt{2})^2$; $\sqrt{4}$,...).

Fonte: Adaptado de Duval (1988a, p. 8).

Segundo Duval (2004) o processo de negociação dos ‘registros de representação semiótica’ entre professor e aluno, na análise do desenvolvimento dos conhecimentos e da aprendizagem, suscitam três fenômenos estreitamente relacionados: o da diversidade de registros, possuindo em cada um, questões específicas de aprendizagem; o da diferenciação entre representante (forma) e representado (conteúdo) e o da coordenação para diferentes tipos de registros disponíveis, para os quais o sujeito necessita, não só para se ter conhecimento das regras de correspondência entre eles, mas dentro do possível, ter a compreensão de congruência e não congruência.

Percebemos assim, que o sentido de uma representação relaciona-se diretamente ao modo como essa representação é apresentada, ou seja, com o registro de representação semiótico escolhido. Nestes termos, seriam os sentidos diferentes revelados pelo uso de representações distintas que forneceriam a possibilidade de tratamentos diferenciados aos objetos de conhecimento.

A preocupação sobre a natureza dos objetos matemáticos e de como as linguagens significam as coisas, são vitais na representação desses objetos, ou seja, a funcionabilidade das representações semióticas no conhecimento matemático leva diretamente à questão sobre o significado dos objetos.

Conforme a visão de Godino e Batanero (1994), o significado institucional de um objeto é o sistema de técnicas institucionais integradas ao domínio de situações de onde surgem os objetos em um dado momento.

Godino (2002) afirma que o aluno compreende determinado objeto quando o usa de maneira competente em diversas práticas[19], não podendo apenas estudar os fatores contextuais para determinar os usos linguísticos nas situações de comunicação do objeto. Isto se torna possível quando o olhar se concentrarem práticas públicas, deixando em segundo plano o interesse pelos processos mentais (forma mecanizada) dos alunos.

> O significado entendido dessa maneira possibilita parcelar em diferentes aulas de práticas mais específicas que são utilizadas em determinado contexto e com um determinado tipo de notação produzindo um determinado sentido (FONT; RAMOS; CONTRERAS, 2005, p. 6).

Godino, Batanero e Font (2006), avançando na contribuição de Duval, apontam três níveis de significados para os objetos matemáticos: o ‘significado pessoal’, sistema de práticas pessoais para resolver problemas; o ‘significado institucional’, sistema de práticas associadas ao campo de problemas da qual emergiu o conteúdo institucional; o ‘significado a priori’, para um sujeito do ponto de vista da instituição escolar.

A construção do significado acontece quando o sujeito observa o contexto[20] e a contextualização[21].

Para Font; Ramos; Contreras (2005) o termo contexto pode ter dois usos: *contexto* como um exemplo particular do objeto matemático,

---

[19] “Um objeto matemático emerge de um ‘sistema de práticas’ que contribuem para a resolução de determinados problemas, e a cada situação nova, permite resolver diferentes tipos de problemas, utilizando novas representações, gerando com o passar do tempo novos conjuntos de práticas (sentidos) que ampliam o significado do objeto”. (FONT; RAMOS; CONTRERAS (2005, p. 6).

[20] Aquilo que se constitui o texto no seu todo (FERREIRA, 2009, p. 536); também pode ser considerado como sendo o ambiente físico ou situacional (conjunto de circunstâncias) a partir do qual se considera um fato.

[21] A *contextualização* no ensino visa colocar o aluno como protagonista, trazendo o contexto do seu dia a dia para a sala de aula (FOGAÇA, 2013).

e o *contexto* que consiste em dar mais detalhes sobre um caso particular, sendo, nas palavras dos autores, o primeiro o mais importante para o ensino-aprendizagem de matemática, uma vez que envolve a relação entre o 'exemplar e tipo', entre 'concreto e abstrato' ou 'extensivo e intensivo'. Os autores definem 'problema contextualizado' como temas que representam situações de um mundo real. Os problemas que mais interessam à investigação didática são os problemas de *contexto evocado*, ou seja, os problemas ou situações lançados pelo professor que possibilitam aos alunos imaginarem uma situação ou termo onde esse fato ocorre.

Deve-se apresentar, segundo esses autores, "situações do mundo real que o aluno pode resolver com seus conhecimentos prévios, matemáticos ou não" (FONT; RAMOS; CONTRERAS, 2005, p. 4).

Santaella (2008, p. 21) argumenta que:

> O signo está relacionado com o objeto com respeito a uma qualidade... Assim sendo, algo é significante de seu objeto e possui potencialidade signica ou qualidade de acordo com três modos: qualidade interna, qualidade externa e qualidade imputada.

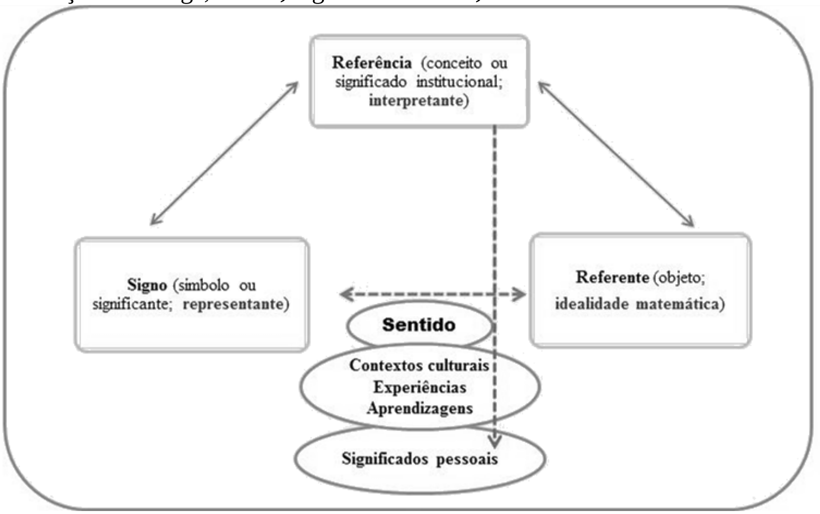
Ogden e Richards (1956) concluem que o significado (pensamento ou referência) é um produto realizado a partir de nossas relações sociais que é estabelecido entre o significante (símbolo), determinando o objeto (referente). Por sua vez Frege (1978) faz a distinção sentido/referência procurando saber e provar o funcionamento do signo de identidade de conteúdo e o valor semântico de sentenças.

Duval (2003, p. 21) "enfatiza que a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro". E Godino (2002) defende que o professor ao organizar a descrição de uma atividade dentro da trajetória semiótica deve envolver a linguagem, as situações, as ações do aluno, os conceitos-regras, as propriedades e as argumentações além das dimensões socioculturais.

Com o aporte das reflexões até então descritas, elaborou-se um esquema apresentado na Figura 01, que sintetiza as ideias de Duval, Frege, Peirce, Ogden e Richards e de Godino et al, cujos elementos poderiam ser observados com mais atenção pelos professores, na elaboração de um problema tendo em vista o ensino e a aprendizagem da Matemática.

O maior desafio nesta pesquisa foi fazer uso desses elementos, relacionando-os com o objeto ‘plano cartesiano e suas regiões’, tendo claro que o uso de um objeto[22] matemático não está implícito no conceito[23] que se tem do objeto, ou seja, explicar a ideia de plano cartesiano e suas regiões não significa que pode ser usada com êxito por uma pessoa para resolver situações-problema envolvendo formas de registros de representação.

Figura 01 – Esquema de uma representação semiótica integrando as convicções de Frege, Peirce**,** Ogden e Richards**,** Duval e Godino et al.



Fonte: Adaptado de Colombo (2008, p. 101), com ajustes e inserções de palavras visando unificar globalmente essas teorias.

---

22 Objeto matemático é tudo que é apreendido pelo conhecimento, que não é o sujeito do conhecimento (FERREIRA, 2009, p. 1421). Ou seja, tudo que é perceptível por qualquer um dos sentidos. Pode ser uma coisa material do mundo, da qual temos um conhecimento perceptivo, mas também pode ser uma entidade meramente mental ou imaginária ‘da natureza de um signo ou pensamento’.

23 Conceito Matemático é a representação dum objeto pelo pensamento, por meio de suas características gerais (FERREIRA, 2009, p. 514). Logo o conceito se torna um protótipo de um objeto matemático que reúne traços característicos partilhados por diferentes formas de representação de um objeto.

É relevante que o professor identifique e analise a representação semiótica de um objeto matemático em estudo e as relações que podem ser estabelecidas entre os elementos que compõem a tríade semiótica.

Assim, o professor no desenvolvimento de uma aula de matemática, sempre que necessário e possível, pode fazer uso da tríade. Além disso, para obter resultados favoráveis, o professor deve ter plena consciência das diferenças entre os signos utilizados para representar o saber matemático e o próprio saber. Essa consciência pode auxiliar na escolha de tarefas matemáticas que irão contribuir na explicação dessas diferenças.

Deste modo, no desenrolar do ensino e da aprendizagem, é importante se considerar as diversas representações semióticas dos objetos para determinar os diversos trajetos a fim de permitir a execução das múltiplas práticas indispensáveis para se compreender os significados institucionais dos objetos. Entende Duval (2003, p. 24) que é preciso "desenvolver um método que permita observar verdadeiramente esses fenômenos nas produções dos alunos" sendo necessário em toda análise de tarefa – resolução de problemas "distinguir cuidadosamente o que sobressalta no tratamento em um registro e aquilo que sobressalta em uma conversão".

Deste modo, o desafio ao professor é compreender o papel que a linguagem e os símbolos matemáticos desempenham nas relações conceituais que se articulam com as práticas sociais, com as razões que as impulsionam e delas derivam, trabalhando com a conversão entre uma representação significável (linguística, simbólica, gráfica) conforme a necessidade de organização, seja na forma de comunicação, seja na organização do visual da informação. A seguir apresentar-se-ão as ferramentas teóricas que sustentam esta pesquisa.

2.3 O REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta etapa procura-se discorrer algumas reflexões em torno da representação semiótica que darão suporte ao nosso trabalho, buscando contribuir no processo da organização das atividades de ensino, assim como na produção do conhecimento matemático, tomando como fundamento teórico os estudos de Duval.

Entende-se que a Matemática provém da conexão da mente com o mundo externo, das relações dela com a sociedade, das situações com a realidade, e da vivência no cotidiano escolar possibilitando a elaboração de formas de linguagem. Neste contexto, também far-se-á referência ao enfoque ontológico e semiótico posto em jogo na cognição matemática, ou seja ‘o significado institucional e pessoal de um objeto matemático’, tomando como base teórica os estudos de Godino.

2.3.1 Os registros de representações semióticas: a contribuição de Raymond Duval

A finalidade da Matemática no contexto escolar atribuído pelos PCNs (BRASIL, 2006), é de desenvolver habilidades relacionadas à representação, compreensão, visualização e análise interligadas à contextualização sociocultural. Os PCNs afirmam que essas habilidades proporcionam aos alunos os meios necessários para resolução de problematizações diárias, na Matemática e/ou incluídos noutros campos do saber.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs): matemática (BRASIL, 1999), quando o aluno compreende os elementos do objeto plano cartesiano e a relação entre seus eixos (grandezas) relacionando ao conceito de função, compreende também, além das conexões internas à própria Matemática, a descrição e o estudo do comportamento de certos fenômenos, tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, por meio da leitura, interpretação e construção de gráficos.

Empiricamente, sabe-se que muitas práticas pedagógicas têm seus recursos limitados somente ao livro didático, propiciando lacunas no processo de ensino e, como consequência, na construção dos conhecimentos pelo aluno, ou seja, na sua aprendizagem. Diferentemente de outras áreas do conhecimento, em Matemática a informação se dá embasada por representações e, sendo os objetos matemáticos abstratos, não estão diretamente acessíveis pela percepção ou numa experiência intuitiva imediata como estão os objetos dito ‘reais’ ou ‘físicos’.

Em seus estudos Duval, vem buscando compreender os aspectos ligados à ‘aprendizagem e ao ensino e os relacionados à forma como o saber pode ser estruturado para ser ensinado e aprendido’, investiga a especificidade da aprendizagem e do ensino da Matemática ligada aos aspectos semióticos das representações matemáticas, sinalizando também os possíveis problemas na aprendizagem da Matemática.

Levando em conta o pensamento de Duval (2003), vê-se que a finalidade da matemática enquanto ciência que relaciona o entendimento coerente, fruto do raciocínio, com situações habituais, compreende uma constante busca pela veracidade dos fatos por meio de técnicas precisas e exatas.

Noé (2013) afirma que a matemática, por ser acessível, está estreitamente ligada a outras ciências que necessitam dos fundamentos matemáticos e explicações práticas de suas teorias.

Sua implicação na sociedade, não é tão somente de conceber matemáticos, nem tampouco fornecer ferramentas que, ocasionalmente, no futuro, poderão ser produtivas. Essa ciência consiste sim, em contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, análise e visualização dos indivíduos, bem como auxiliá-los na resolução dos problemas que surgem no dia-a-dia.

Para Duval (2004, p. 15-17, tradução nossa), não há conhecimento matemático que possa ser mobilizado por um aluno sem o auxílio de uma representação[24]. Ele destaca três aproximações para a noção de representação, sendo elas:

> a) **Representações subjetivas ou mentais** são representações internas e conscientes de cada sujeito que ocorrem no nível de pensamento ou do que se tem em mente, ou seja, referem-se às crenças, convicções, ideias, explicações e concepções dos alunos sobre fenômenos naturais e físicos.
> b) **Representações internas ou computacionais**: são representações não conscientes, onde o sujeito executa tarefas estando despreocupado em pensar todos os passos para a sua realização.
> c) **Representações semióticas**: são representações externas e conscientes do sujeito - são produções constituídas pelo emprego de signos pertencente a um sistema de representação as quais tem suas construções próprias de significado[25] e de funcionamento. É através delas

[24] Entende-se por 'representação' a reunião de um 'significado' que permite a evolução de um 'significante' previsto por um pensamento.

[25] 'Significado' diz respeito ao conceito, é a ideia à qual a palavra se refere. E o 'Significante' aborda o conceito acústico de um vocábulo, algo captado por nossos ouvidos e registrado pelo cérebro, independente de compreendermos a língua em questão (SAUSSURE, 1996).

> que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano.

As ‘representações mentais’ possibilitam ao sujeito observar o objeto sem a presença dos significantes perceptíveis, ficando nas projeções mais difusas e globais oriundas de conhecimentos e valores compartilhados por ele com o seu meio. “Elas recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado” (DUVAL, 2012a, p. 269).

Segundo Duval (2004), Piaget (1978) associou a representação do mundo das crianças ao desenvolvimento da capacidade que o sujeito tem de gerar imagens mentais de objetos ou ações, equiparando-as a formação dos signos (símbolos ou representantes), e por meio dela chegar a uma representação.

Já as ‘representações internas ou computacionais’ privilegiam o sistema de tratamento da informação (psicologia intelectual), ou seja, trata-se de uma ação de codificar uma informação recebida (psicologia cognitiva), sem pensar em todos os passos necessários para sua realização, para se produzir uma resposta adaptada. Trata-se da consciência vivida de um sujeito, de uma codificação da informação, cujo método envolvido é dos ‘tempos de reação’.

Segundo Duval (2004), percebe-se nas representações internas e não conscientes do sujeito que a ideia de representação privilegia a ‘forma’ pela qual a informação pode vir a ser descrita e levada em consideração num sistema de tratamento. Deve ser respeitada também a ideia de que sua ‘forma’ pode mudar de acordo com o nível de tratamento considerado, isto é, essas representações computacionais transformam informações externas a um sistema, em formas que possibilitam recuperá-las e combiná-las internamente no sistema.

Ressalta-se que o desenvolvimento dos conceitos ou dos significados das palavras ocorre primeiramente por meio de generalizações do tipo mais primitivo até as de um tipo mais elevado, pressupondo “o desenvolvimento de muitas funções intelectuais tais como: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar. Esses processos psicológicos complexos não podem ser dominados apenas através da aprendizagem inicial” (VYGOTSKY, 2005, p. 104).

Entretanto, as primeiras noções de ‘representações semióticas’, por serem externas e conscientes do sujeito, surgem com o problema de modelização da linguagem e por volta de 1985 aparecem no marco dos trabalhos sobre a aquisição dos conhecimentos matemáticos e sobre os consideráveis problemas que sua aprendizagem suscita. Este termo é usado para indicar diferentes tipos de representação, como por exemplo, escrita natural, escrita algébrica, tabelas, gráficos cartesianos e figuras.

As representações semióticas, na compreensão de Duval (2012a, p. 269) "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento".

Podemos estabelecer que as representações semióticas atuam como um suporte para as representações mentais, tendo a função de comunicá-las por meio de uma representação.

Assim, Duval (2004, p. 20) ancorado em estudos dos pesquisadores como Benveniste (1989, 1995), Saussure (1967), Pierce (1977), Chomsky (1978), e em Granger (1979), destaca a importância da relação entre dois sistemas semióticos diferentes, e que no domínio do raciocínio, as línguas naturais revelam ser um registro necessário e insubstituível. Sustenta a ideia de que a conceitualização considera sistemas semióticos diferentes e uma operação cognitiva de conversão de um sistema semiótico em outro, ambos referindo-se ao mesmo objeto de conhecimento (o conteúdo).

Na visão de Duval (1999), as representações podem preencher algumas funções, sendo três fundamentais para o funcionamento cognitivo: a função de 'Comunicação, Tratamento e Objetivação'.

(1) **Função de Comunicação (Expressão)** – é a função que expressa um comunicado ou a interação de conhecimento entre dois ou mais sujeitos. Demandando o emprego de um código comum entre os envolvidos;

(2) **Função de Tratamento** – é a função que converte uma representação em outra, no interior de um mesmo sistema semiótico, empregando somente as possibilidades de execução do sistema de representação mobilizado. Duval aponta que a existência de muitos registros permite a troca deles. Essa troca tem por objetivo efetuar tratamentos de forma mais econômica e poderosa, onde a economia em um tratamento está muito vinculada à aproximação com a língua natural e, principalmente, as formas mais simples e econômicas aos procedimentos adotados;

(3) **Função de Objetivação** – é a função que consente a um sujeito dar-se conta (ou conscientizar-se) de algo que até então não tinha realizado. É o trabalho de exteriorização. Ela corresponde ao uso estritamente privado de um registro de representação.

Pode-se acrescentar, também, que identificar a representação de um objeto (neste estudo, o plano cartesiano) possibilita descobrir ou redescobrir um dado ou uma informação dentre outras, auxilia a leitura e análise, por exemplo, de um quadro de dados, identificando ou encontrando as informações solicitadas na análise de um problema. Logo é um desempenho cognitivo que consiste na reconquista e na organização das informações da memória de um sujeito ou até de um sistema informático.

Vale ressaltar que as representações mentais, representações internas e representações semióticas não são espécies diferentes de representação, mas apenas realizam funções diferentes. O Quadro 06 sintetiza essa concepção de Duval:

Quadro 06 - Tipos e funções de representações

	Interna	**Externa**
Consciente	**Mental** • Função de objetivação: *(tomada de consciência).*	**Semiótica** • Função de objetivação • Função de expressão • Função de tratamento intencional *Tem dois aspectos: 'sua forma' (o representante) e 'seu conteúdo' (o representado).*
Não Consciente	**Computacional** • Função de tratamento não Intencional: procedimento automático ou quase instantâneo. *(entendendo o significado operatório).*	

Fonte: Duval (2004, p. 35, com a inclusão das palavras em itálico).

Sob o ponto de vista de Duval (2012a), a conceitualização acontece quando o sujeito é capaz de mobilizar instantaneamente, um registro de representação semiótica do objeto matemático, escolhido entre os muitos que se apresentam, de modo a favorecer a resolução de um dado problema da forma mais econômica possível. Distinguir a representação e o objeto que ela representa é fundamental para a análise do conhecimento. Para ele, não devemos confundir o conteúdo explícito da representação e o objeto representado.

Duval (2004) argumenta que geralmente se define a 'representação' da mesma maneira como se define o signo linguístico, como uma relação entre alguma coisa (forma, traço, objeto) visual ou auditivamente apreendida e a lembrança de outra coisa que está ausente ou cuja realidade é simplesmente mental:

> O próprio da representação é... lembrar o que transborda o domínio perceptivo e motor. Quem disse representação, disse em consequência, reunião de um 'significante' que permite a evocação e de um 'significado' previsto por um pensamento." (PIAGET, 1968 apud DUVAL (2004, p. 64)

É notório que "quando se trata de um registro distinto ao da língua natural, se leva de imediato os limites e ambiguidades deste modelo de representação" (DUVAL, 2004, p. 65).

Ainda segundo Duval (2012a) o registro[26] de representação não acontece com os códigos, uma vez que possuem somente a função de comunicação, não oferecendo a possibilidade de transformá-los em outros registros sem perder a característica do objeto. Logo, por meio do registro de representação ocorre a 'comunicação' - o sujeito apresenta conscientemente o que está observando a respeito do objeto, além de pôr em prática as atividades de tratamento e conversão. Compete às representações semióticas a construção do conhecimento pelo indivíduo que apreende, tornando factível certas funções cognitivas indispensáveis ao pensamento humano.

Na compreensão de Duval (2004), diante da diversificação de registros e da passagem de um sistema de representação a outro, devemos ter a consciência que a maioria dos alunos na maior parte do tempo não reconhece o mesmo objeto. Afirma Duval (2004, p. 18) que "[...] tal separação persiste mesmo após, no processo de ensino, tendo

---

26 O termo registro de representação é utilizado por Duval (2003, p. 14), para designar diferentes tipos de representações semióticas em matemática. O termo foi emprestado de Descartes – em sua obra *Géometrie* (1637), onde ele distingue a escrita algébrica das curvas de suas representações figurais.

sido bastante utilizados esses diferentes sistemas semióticos de representação".

De acordo com Duval (2011a), podemos observar dois sistemas semióticos:

(a) Os que exercem as *funções de comunicação*, denominados por códigos; e

(b) Os que exercem as *funções cognitivas* por meio de transformações: tratamento e conversão.

O autor chama atenção para o fato de que os registros de representação e os códigos são sistemas semióticos radicalmente diferentes.

Daí a importância de não confundir um objeto com sua representação, o que só é possível quando se têm clareza da diferenciação entre 'representante e representado' essencial aos registros de representação semiótica, levando-se em consideração as funções objetivação (conversão), de tratamento e de expressão (comunicação).

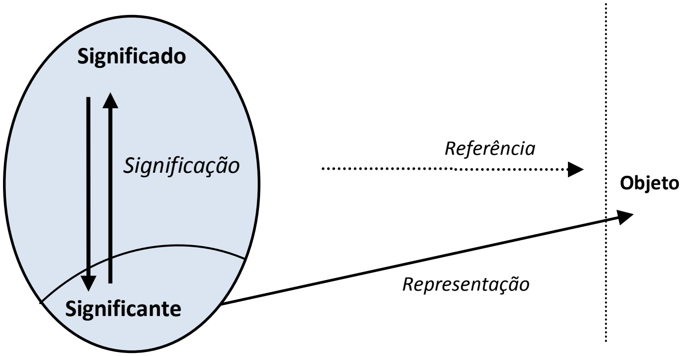
As Figuras 02 e 03 contextualizam a ideia de Duval, caracterizando a função de expressão, podendo ser 'diádica – perspectiva semiótica' ou 'triádica – perspectiva epistemológica (a estrutura, os métodos e a validade do conhecimento), estudando a relação da significação com a função cognitiva nos sujeitos que aprendem.

Duval (2004, p. 65) afirma que:

(a) *A estrutura diádica (binária)* "[...] retém apenas a relação de referência entre um significante, ou um representante, e o designado ou representado [...] como certas noções matemáticas (notações de funções, de vetores, de operadores...), não tem significação e são constituídas por uma relação instituída a um objeto".

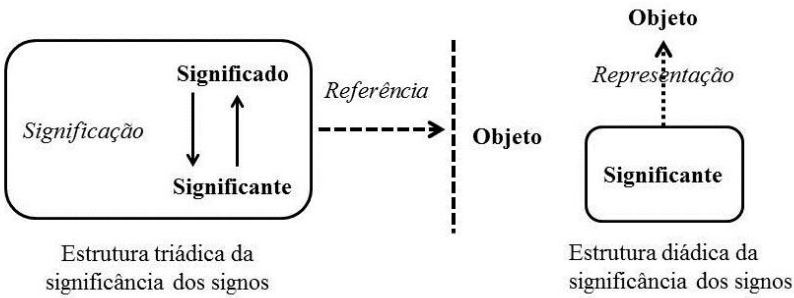
(b) *A estrutura triádica (ternária),* como os signos linguísticos (ou mesmo as figuras), ao contrário da diática "[...] subordina a relação de referência àquela de significação entre o significante e o significado", determinada pelo sistema da língua (ou pelas leis de percepção visual), sendo assegurada a relação com o objeto somente no plano do discurso. Por estar ligada à função de tratamento, permite realizar operações diferentes, ainda que representando o mesmo objeto.

Figura 02 - Estrutura triádica e diádica da significância dos signos



Fonte: Duval (2004, p. 65).
Nota: O Signo linguístico ou toda unidade definida em um sistema tem suas leis próprias de organização.

Figura 03 - Modelo de representação centrado sobre a função de expressão



Fonte: Duval (2004, p. 64).

Para Duval (1986, 2004), um fator que merece destaque na compreensão de textos é a distância que existe muitas vezes entre a organização proposta ao conteúdo cognitivo e a organização redacional. Percebe-se que o ‘conteúdo cognitivo do texto’ é o conceito que o problema considera, elaborado por meio de uma representação, sendo independente do que o texto mobiliza ou apresenta. Já a ‘organização redacional’ considera as variáveis redacionais, e estas por sua vez, tornam o problema congruente[27] ou não, quando observado o funcionamento do signo de identidade do conteúdo e o valor semântico das sentenças. Vale lembrar que os problemas de não congruência propiciam a maior dificuldade de compreensão.

Argumenta o pesquisador que as variáveis redacionais dependem de dois fatores:

(a) **Fatores intrínsecos** – quando ocorre uma correlação entre o texto do enunciado e a escrita do tratamento matemático requerido. Devem ser considerados: (1) a escolha dos elementos de organização cognitiva com os quais vamos explicitamente designar os elementos dados na redação de um enunciado de problema; (2) se o texto é redacionalmente declarado (explícito por uma proposição) ou se é redacionalmente mencionado (explícito por um termo, uma expressão); e, (3) a escolha da questão, podendo ser a partir dos dados do enunciado ou não.

(b) **Fatores extrínsecos** – conduzem as variações neutras ou não concernentes do ponto de vista de certas correspondências que são constitutivas de um enunciado de problema, mas não determinantes. Devem ser considerados: (1) a escolha da situação extra matemática; (2) a presença de informações inúteis, mas atrativas; (3) o desenvolvimento dos aspectos relativos à descrição e à compreensão da situação extra matemática envolvida no enunciado; e (4) o lugar da questão no enunciado do problema.

As vivências práticas de Duval lhe permitiram esclarecer a congruência e a não congruência nas diferentes situações de leitura, envolvidas por meio do conteúdo cognitivo ‘familiar’ e ‘novo’, disposto nas situações I, II, III e IV no Quadro que segue:

---

[27] Um problema é congruente quando: apresenta correspondência semântica entre os elementos significantes; possui univocidade semântica (registro de saída tem uma única significante no registro de chegada); e a forma de apresentação estabelece uma ordem possível de apreensão destas duas unidades de representações (DUVAL, 2004).

Quadro 07 – A congruência e a não congruência nas diferentes situações da leitura

Texto/Leitor	Congruência	Não congruência
Conteúdo cognitivo FAMILIAR	**Situação I** Trivial, sem risco de erros.	**Situação II** Trivial, com risco de erros.
Conteúdo cognitivo NOVO	**Situação III** Normativa para uma aprendizagem exigindo tratamentos paralelos ao texto.	**Situação IV** Exigindo uma pesquisa ou uma aprendizagem independente do texto

Fonte: Duval (2004, p. 299).

Situação I: há no texto um percurso rápido e único; não se faz necessário ler tudo e nem dominar gramática para compreendê-lo**.**
Situação II: quando do percurso visual, é possível haver dúvidas, incompreensões locais e necessidade de previsões, fazendo com que o aluno releia o texto. No entanto, a familiaridade leva-o a se satisfazer com a releitura.
Situação III: o aluno é levado a não compreensão do conteúdo cognitivo. Procura-se, então, em chegar a uma apreensão da organização redacional**,** tendo em vista que já existe a compreensão do conteúdo do texto. Deve seguir muito atento ao desenvolvimento do texto, revendo algumas passagens. Fazem-se necessários tratamentos paralelos.
Situação IV: Faz-se necessário um trabalho direcionado sobre o conteúdo cognitivo do texto apresentado e que seja independente do texto a ser compreendido.

Duval (2012a) considera que a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e é somente por meio de representações semióticas que uma atividade sobre os objetos matemáticos é possível. Logo, o funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Fica evidente que não há a apreensão conceitual de um objeto ‘noésis’[28], sem a apreensão

[28] Noésis: como afirma Duval (2004), refere-se mais à mobilização do entendimento, ou ainda, à inteligência no sentido da Matemática.

ou produção de uma representação semiótica, 'semiose'[29].

Assim, as representações semióticas apresentam dois aspectos, sua *forma* (o representante) e seu *conteúdo* (o representado). Logo, ocorre uma interação entre a apreensão, ou a produção de uma representação semiótica e a apreensão conceitual de um objeto. E, para que ocorra um registro de representação, são necessárias três atividades cognitivas:

(1) **Formação de uma representação identificável** – é como uma representação de um registro dado: enunciado de uma frase, elaboração de um esquema, desenho de uma figura geométrica, expressão de uma fórmula, dentre outros. Para Duval (2012a, p. 271, grifo nosso),

> Esta formação implica numa seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. Esta seleção se faz em função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto. Desta maneira, **a formação de uma representação poderia ser comparada a realização de uma tarefa de descrição**. Esta formação deve **respeitar regras** (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entraves de construção para as figuras...).

(2) **O Tratamento -** é uma transformação de representações dentro de um mesmo sistema semiótico. É uma transformação interna a um registro. Os tratamentos são ligados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Duval (2012a, p. 272, grifos nosso) considera que:

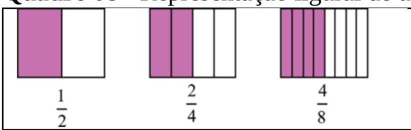
> **A paráfrase** e **a inferência** são formas de tratamento em língua natural. **O cálculo** é uma forma de tratamento das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional, [...]). **A reconfiguração** é um tipo de tratamento particular para as figuras

[29]Semiósis: representa também o 'signo' ou 'sinal'.

> geométricas: é uma das numerosas operações que dão ao registro figural seu papel heurístico[30] [...]. Há, naturalmente, regras de tratamento próprio a cada registro. Sua natureza e seu número variam consideravelmente de um registro para o outro: regras de derivação, regras de coerência temática, regras associativas de contiguidade e de similitude [...]. No registro da língua natural há, paradoxalmente, um número elevado de regras de conformidade e poucas regras de tratamento para a expansão discursiva de um enunciado completo.

Nos Quadros (8 a 10) apresenta-se a descrição de exemplos da transformação de representações envolvendo o tratamento:

Quadro 08 - Representação figural de uma sequência de frações equivalentes

	Identificando o padrão e desenhando os termos que faltam.
Vê-se que as figuras representam o mesmo objeto, mas cada uma dessas formas apresenta conteúdo distinto. Na segunda forma para perceber que representa o objeto ½, é preciso efetuar a operação de reconfiguração juntando os dois primeiros retângulos e fazer ainda a junção por reconfiguração dos dois últimos retângulos. Processo semelhante ocorre para a terceira forma em relação a primeira ou a segunda forma.	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na escrita de um número é necessário diferenciar entre a significação operatória vinculada ao significante e o número representado. O Quadro 09 apresenta procedimentos de tratamento de registro envolvendo um exemplo de representação ‘figural, fracionária, decimal, e com expoentes’ do conceito de adição dos números racionais.

[30] Heurístico: Termo que se refere à ‘arte de encontrar’, ‘descobrir’. Um método é heurístico dentro do procedimento pedagógico, “quando se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar” (FERREIRA, 2009, p. 1035), ou seja, “descobrir aquilo que se quer que ele aprenda” (JAPIASSU; MARCONDES, 1996, p. 126).

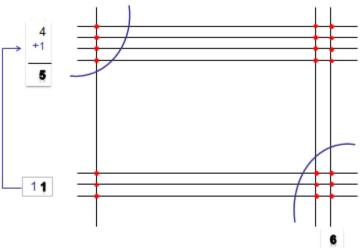
Quadro 09 - Procedimentos de tratamento de registros de representação do conceito de adição dos números racionais

<table>
<tr>
<td>(I)
Representação Figural
</td>
<td>(II)
Representação Fracionária
½ + ½ = **1**</td>
<td>(III)
Representação Decimal
0,5 + 0,5 = **1**</td>
<td>(IV)
Representação com Expoentes (base 10)
$5 \, . \, 10^{-1} + 5 \, . \, 10^{-1} =$
$= \mathbf{10 \, . \, 10^{-1}}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Nestas quatro formas distintas para efetuar a adição, vê-se que nos registros II, III e IV os significantes ‘0,5’, ‘1/2’ e ‘$5 \, . \, 10^{-1}$’ tem uma significação operatória diferente, e ainda assim fazem referência ao mesmo número. Se a significação operatória vinculada ao significante e que comanda o procedimento de tratamento não está diferenciada do objeto ‘número representado’, então a substituição por conversão de **0,5** a **½** não é concebível (não é natural e espontânea; não há congruência). Ou seja: em **0,5** (registro de partida, as unidades referem-se à regras do sistema decimal posicional) e em ½ (registro de chegada, vemos que as unidades são referentes à divisibilidade e parte/todo). Verifica-se também a não congruência para a conversão em sentido contrário, de **½** a **0,5.**</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Agora, se compararmos a transformação de uma fração para uma figura, ou seja, de ½ a  , temos uma congruência, pois nos registros de partida e de chegada ficam mantidas as unidades significativas de divisibilidade e parte/todo.
Em síntese, as ilustrações II, III e IV demarcam um sistema semiótico de representação distinta, onde a referência é a mesma, mas não tem o mesmo sentido (não contêm o mesmo pensamento), envolvendo um custo cognitivo diferente, muito menos o custo cognitivo envolvido.
Entretanto, as ilustrações I e II demarcam um sistema semiótico congruente, pois apresentam correspondência semântica, univocidade semântica (registro de saída tem uma significante no registro de chegada), e a forma de apresentação estabelece uma ordem possível de apreensão destas duas unidades de representações.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Duval (2004, p. 46 - 47).

Para se efetuar um tratamento de forma mais econômica e viável é necessário ter-se vários registros, pois isso possibilita a troca de registros (representações). Essa economia permite a escolha de formas mais simples e econômicas aos procedimentos adotados, além de manter aproximação com a língua natural. Veja o exemplo do Quadro 10 apresentando formas de registro do produto de dois fatores e os custos de tratamento:

Quadro 10 - Registros do produto de dois fatores e os custos de tratamento

<table>
<tr>
<td>43 x 12 = ????
</td>
<td>‘Pela adição de parcelas’
= 43 + 43 + 43 + ... + 43 (12 parcelas) = 516
ou
= 12 + 12 + 12 + ... + 12 (43 parcelas) = 516</td>
</tr>
<tr>
<td>‘Utilizando o algoritmo da multiplicação’
  43
x 12
———
  86
43
———
516</td>
<td>‘Pela propriedade distributiva de multiplicação em relação à adição’
43 x 12 =
= (40 + 3).(10 + 2) =
= 400 + 80 + 30 + 6 =
= 516.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">‘Multiplicação de fatores pelo método chinês’
12 x 43 = 516

</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

(3) **A Conversão -** codificação em outro registro, conservando a referência aos objetos, ou seja, a transcrição (a totalidade ou somente uma parte do conteúdo da representação inicial). É uma transformação externa ao registro inicial (registro de representação a converter). No entendimento de Duval (2012a, p. 272, grifos nosso),

> A **ilustração** é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A **tradução** é a conversão de uma representação linguística dada em uma representação linguística de uma outra língua ou outro tipo de língua. A **descrição** é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação linguística.

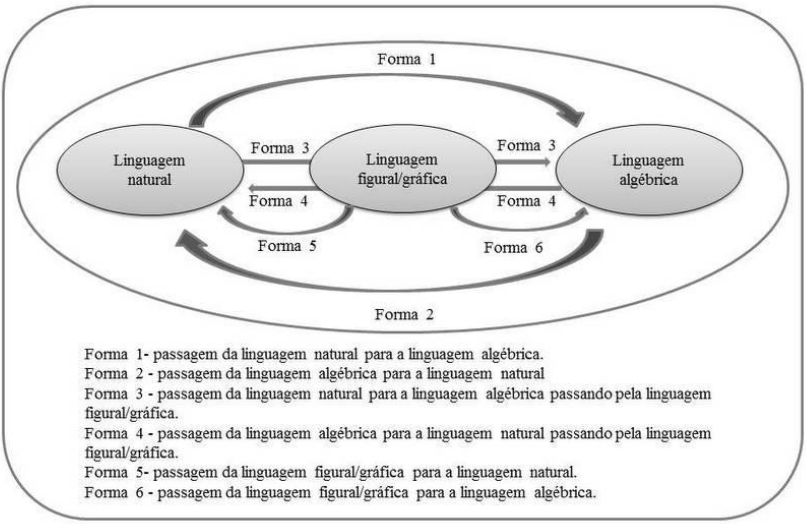
Segundo Duval (2003, p. 16)

> [...] do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro.

A atividade de conversão aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. Muito embora se observe nas escolas que a pouco explorada a conversão, ou seja, a mobilização entre vários tipos de registros de representação de um objeto matemático.

Por meio da Figura 04, apresentam-se as diferentes formas de conversão e tratamento com registros de linguagem, interligando pelo menos duas formas de registro. Cabe lembrar que a pluralidade de registros possibilita ao aluno escolher, dentre os diversos registros, os mais econômicos.

Figura 04 – Classificação quanto as diferentes formas de conversão e tratamento



Fonte: Elaborado pelo autor.

Deve-se levar em conta que "[...] mudar de registro de representação não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação. [...]" (DUVAL, 2011a, p. 73). Como exemplo expõe-se as distintas formas de representação da situação-problema 'compra de pães numa panificadora', envolvendo uma função do 1º grau conforme a ilustração no Quadro 11.

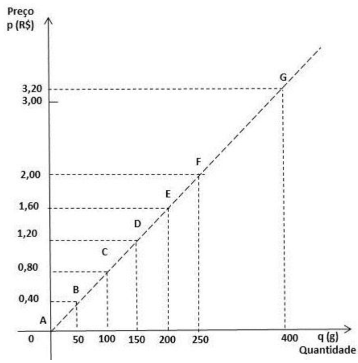
Quadro 11 – Exemplo de uma função do 1º grau nas suas distintas representações

<table>
<tr><th>Representação Discursiva</th><th>Representação não Discursiva</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Registro na Língua Natural
(forma de texto)
O valor que pagarei no caixa de uma panificadora dependerá da quantidade (da massa) de pães 'francês de 50g' que levar. Podem ocorrer as seguintes possibilidades: se não comprar nenhum pão, não terei despesa. Agora, se comprar 1 pão (50g), pagarei R$ 0,40; se comprar 2 pães (100g) o valor será de R$ 0,80; se forem 3 pães (150g) pagarei R$ 1,20; ... ; e se comprar 8 pães (400g) o custo será de R$ 3,20. Como representar essa situação na forma tabular, simbólica e gráfica?</td><td>Registro Figural dos 'pães'
</td></tr>
<tr><td>Registro na Forma Tabular
<table>
<tr><th>Pontos</th><th>q (g)</th><th>p (R$)</th></tr>
<tr><td>A</td><td>0 (00)</td><td>0,00</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1 (50)</td><td>0,40</td></tr>
<tr><td>C</td><td>2 (100)</td><td>0,80</td></tr>
<tr><td>D</td><td>3 (150)</td><td>1,20</td></tr>
<tr><td>E</td><td>4 (200)</td><td>1,60</td></tr>
<tr><td>F</td><td>5 (250)</td><td>2,00</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>G</td><td>8 (400)</td><td>3,20</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td></td><td>q</td><td>0,40 q</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

"Continua"

"Conclusão"

Quadro 11 – Exemplo de uma função do 1º grau nas suas distintas representações

Registro Simbólico	**Registro Gráfico**
Numérico {(0, 0); (50 , 0,4); (100, 0,80); (150 , 1,20); (200 , 1,60); (250 , 2,00); ... ; (400 , 3,20); ...}. ***Algébrico*** Expressão Matemática: **p = 0,40 q**, com q ≥ 0. Solução (S) do problema: S = p ≥ 0 para {q ∈ *R* /q ≥ 0}. ***Observação:*** A relação entre o preço e a quantidade de pães (massa) é um exemplo de função linear. Se **y = a x**, com a ≠ 0 Quando **a** > 0 a função é *crescente*: ($x_2 > x_1$ e $y_2 > y_1$). Quando **a** < 0, a função é *decrescente*: ($x_2 > x_1$ e $y_2 < y_1$).	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Duval (2004) considera que a não congruência é maior na análise e estudo de exercícios que envolvam tipos de operações onde ocorre mudança de registro de representação da linguagem gráfica para a natural e da linguagem gráfica para algébrica (Figura 04).

É um erro considerar que as representações semióticas têm unicamente a função de comunicar as representações mentais. As representações nas formas (descritiva, algébrica, gráfica) mobilizarão diferentes atividades cognitivas que as constituem, sendo necessário tanto examiná-las como ligá-las entre si. Como consequência, o processo de aprendizagem deverá contemplar não apenas os conteúdos dos registros de representação, com suas especificidades, limitações, particularidades, entre outros aspectos, mas também o conteúdo do objeto matemático propriamente dito, isto é, a sua conceitualização.

O importante não são os registros de representação semiótica utilizados, mas a conceitualização e compreensão do objeto matemático por meio do uso desses registros. Compete ao professor ter em mente o objeto matemático a ensinar, considerando a operação cognitiva de conversão, para depois escolher os registros de representação semiótica que o ajudarão na aquisição desse objeto matemático.

Cabe também ao professor, considerar como ponto estratégico para a compreensão da Matemática, a distinção entre um objeto e sua representação. Portanto, é necessário atribuir representações ao objeto; porém a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado.

Constata-se que no ensino da Matemática acontecem dois grandes equívocos, *o primeiro* é no tratamento, pois a transformação utilizada nas práticas de ensino provoca um aprisionamento de registros, ou seja, induz o aluno a confundir o registro utilizado com o objeto matemático representado. *O segundo* faz com que o professor considere os sentidos de uma conversão entre registros como iguais, por exemplo, passar de um gráfico para uma equação equivale a passar de uma equação para um gráfico.

Neste contexto, Duval (2003, p. 15) sustenta que as representações mentais úteis e apropriadas em matemática são as representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representação semiótica, uma vez que na produção externa, é possível tratar e controlar um maior número de informações que na produção interna.

No Quadro 12, apresenta-se uma síntese das representações semióticas ‘mental – interna’ e ‘material – externa’ segundo a teoria de Duval.

Quadro 12 – As representações semióticas não são internas nem externas – Modo fenomenológico de produção

<table>
<tr><td rowspan="5">SISTEMA DE PRODUÇÃO</td><td></td><td>MENTAL
(Interna)</td><td colspan="2">MATERIAL
(Externa)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ORAL</td><td>VISUAL
(suporte de papel ou tela de computador)</td></tr>
<tr><td></td><td>Produção para si próprio.</td><td>Produção para outros</td><td>Produção para si próprio ou para outros</td></tr>
<tr><td>SEMIÓTICO
(produção intencional)</td><td>Discurso Interior
OBJETIVAÇÃO e funções de tratamento</td><td>Interações verbais funções de COMUNI-CAÇÃO</td><td>Escrita, desenho funções de TRATAMENTO, de comunicação e de objetividade.</td></tr>
<tr><td>NATURAL
(produção automática)</td><td>Memória visual ou icônica função de objetivação</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Duval (2003, p. 31).

Assim, para que o aluno obtenha uma compreensão de um conceito matemático, o professor deve envolver pelo menos dois registros de representação desse conceito, verificando como se estabelece a presença ou ausência de congruência que torna uma conversão entre representações (registro de partida ‘enunciado’ com o registro de chegada ‘terminal’) mais ‘acessível ou difícil’ de ser apreendida. Essas práticas servirão não apenas para fins de comunicação, mas são fundamentais para atividades cognitivas do pensamento.

Deve-se oportunizar que o aluno efetue os registros de forma espontânea e automática. No entender de Duval (2011b, p. 119),

> [...] Sem esse gesto que deve ser mais ou menos automático, nenhuma atividade ou encaminhamento matemático é possível. Ficamos com o espírito bloqueado, sem nada reconhecer daquilo que é possível fazer. E se alguém sugerir a mudança de representação a fazer e desbloquear a situação, a incompreensão permanece. A questão essencial fica sem resposta: o que

> permitiria e o que permitirá, em outra situação, reconhecer a mudança a realizar? Certamente, essas vivências negativas são esquecidas rapidamente, mas elas se acumulam inconscientemente no decorrer da escolaridade

Para a verificação do fenômeno da congruência deve-se ficar atento aos três critérios utilizados por Duval (2004, p. 53-54):

(1) **Correspondência semântica entre os elementos significantes** – a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade significante elementar (toda unidade que depende de um vocabulário de um registro).

(2) **Unicidade semântica terminal -** a cada unidade significante de representação no registro de saída tem uma única significante no registro de chegada.

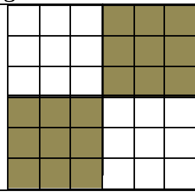
(3) **Organização que compõe cada uma das unidades significantes -** diz respeito às organizações respectivas das unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas representações. Só é pertinente quando estas têm o mesmo número de unidades significantes. Casos excepcionais podem aparecer quando a imagem se reduz a uma só dimensão, a ordem de coordenação das unidades da imagem podem comparar-se com a das unidades da frase. Este critério é importante quando o caso é comparar frases e fórmulas literais.

As representações são congruentes quando os três critérios são cumpridos, caso contrário são ditas não-congruentes. Normalmente os fenômenos de não-congruência aparecem com maior frequência, e segundo Duval (2011b, p. 124) "eles não são previsíveis, mas devem ser estudados caso a caso, para a atividade ou problema que propomos".

Observe os exemplos apresentados nos Quadros 13 e 14, que seguem:

a) O Quadro 13 revela que a dificuldade das conversões reflete a distância cognitiva oriunda da não congruência entre registros.

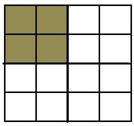
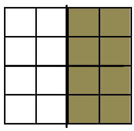
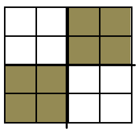
Quadro 13 – Comparação de três representações não congruentes

<table>
<tr><td>O conjunto dos pontos cujas abscissa e ordenada têm o mesmo sinal.</td><td>x . y > 0</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>O produto da abscissa pela ordenada é maior que 0.</td><td>Dois quadrantes planos determinados pelos eixos das abcissas e das ordenadas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pergunta-se: será que os conteúdos respectivos apresentam os elementos comuns que podemos colocar em correspondência de maneira a poder reconhecer em uma dessas representações as duas outras? A resposta é evidentemente ‘não’.
“Os únicos elementos que podem ser colocados em correspondência concernem às menções e ao traçado das abscissas e das ordenadas. Não existe nenhuma congruência entre as expressões ‘mesmo sinal’ e ‘> 0’. Para essa última expressão, a interpretação congruente é ‘maior que 0’.
Pode-se, analogamente, se questionar sobre a correspondência entre uma conjunção ‘e’ e a operação ‘.’ Na realidade, é preciso reelaborar por meio de símbolos e operações as palavras cuja significação é qualquer outra em língua natural.
Analogamente, para reconhecer o gráfico, é preciso romper com o ato reflexivo de pesquisa dos pontos de intersecção e considerar o termo ‘.’ correspondendo à unidade visual da superfície de uma unidade figural 2D e não mais 1D. Vemos que falta aqui critério forte de congruência, ou seja, a possibilidade de uma correspondência termo a termo, ao mesmo tempo direta e regular.
Em geral, a distância cognitiva entre os registros discursivos e os registros não discursivos é sempre maior do que parece. Existe uma dissimetria entre os dois sentidos de conversão, em razão da heterogeneidade radical dos princípios de organização dos conteúdos para esses dois tipos de registro”.</td></tr>
</table>

Fonte: Duval (2011b, p. 122-123).

b) No Quadro 14, apresenta-se uma situação envolvendo plano cartesiano e suas regiões levando em conta os três fatores que permitem determinar os graus de congruência ou não-congruência nas operações de uma conversão.

Quadro 14 – Exemplo de variação de congruência ou de não-congruência de uma conversão

Registro Natural	**Registro Simbólico**	**Registro Gráfico**	**Correspondência semântica das unidades de significado**	**A unicidade semântica terminal**	**Conservação da ordem das unidades**
(I) O conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa.	y > x		**Sim**	**Sim**	**Sim**
(II) O conjunto dos pontos que tem uma abscissa positiva.	x > 0		**Não** ‘Maior que zero’ é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	**Sim**	**Sim**
(III) O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal. **Ou,** o produto da abscissa pela ordenada é maior que zero.	x **.** y > 0		**Não**	**Não**	**Não** Globalização descritiva (dois casos)
A **situação (I)** é congruente, pois ocorre uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes respectivas, suficiente para efetuar a conversão. Neste caso, a conversão inversa permite reencontrar a expressão inicial do registro de partida.					
A **situação (II)** não é congruente, pois falta, na escrita algébrica, uma unidade significante que corresponda à perífrase ‘> **0**’**,** combinação de duas unidades significantes para amenizar essa ausência.					

“Continua”

"Conclusão"

Quadro 14 – Exemplo de variação de congruência ou de não-congruência de uma conversão

E a **situação (III)** não é congruente, pois essa distância a transpor para efetuar a conversão torna-se ainda maior. Aqui, não há mais correspondência termo a termo entre as unidades significantes respectivas das duas expressões: uma reorganização da expressão correspondente no registro de chegada. Além disso, a perífrase 'y > 0' traduz tanto 'de mesmo sinal' quanto 'positivo'. Traduz-se naturalmente por 'o produto da abscissa e da ordenada é superior a 0 (é positivo)', e não por 'o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal'.

Fonte: Adaptado de Duval (2003, p. 19; 2004, p. 50 - 51).
Nota: Incluso as representações gráficas.

Levando-se em conta as ideias de Duval, percebe-se que é no ato da 'conversão' da representação de um conceito matemático, de um registro para outro, que o indivíduo é avaliado quanto ao seu efetivo entendimento matemático do conceito.

Além disso, este tipo de análise de uma atividade matemática permite, não somente o estabelecimento de variações cognitivas próprias ao funcionamento de cada sistema ou registro semiótico envolvido na atividade, como também propicia a observação das variações semióticas, que determinam o funcionamento de cada registro.

Na compreensão de (DUVAL, 2003, p. 13), duas características sobre representações semióticas devem ser consideradas:

(1) **A importância primordial das representações semióticas** – a primeira razão fundamental é o fato de que as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado; a segunda é o fato de que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos objetos, em geral, depende de um sistema de representação. Por exemplo: os números.

(2) **A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática** – existem dois tipos distintos de registros mobilizáveis: registros multifuncionais e os monofuncionais.

Em síntese, Duval (2011b) expressa que o conhecimento matemático, pela ótica do sistema de produção, acontece porque a atividade matemática movimenta concomitantemente, ou alternadamente, vários sistemas semióticos, tanto na língua natural, como nos sistemas designados para representar os objetos presentes na atividade e acesso necessário de um sistema a outro.

> [...] Em Matemática, não pensamos jamais em um único registro, mas em vários ao mesmo tempo, mesmo se as produções vão privilegiar um único registro. E isso requer uma atividade incessante de conversões, que ficam implícitas, mas que devem ser mais ou menos espontâneas [...]. Assim, para analisar uma resolução de problemas, não podemos privilegiar o registro no qual fazemos tratamentos matemáticos que resolvem o problema. A mobilização dos outros registros relativos aos dados do problema, a maneira pela qual eles são representados é também essencial (DUVAL, 2011b, p. 116).

Vale ressaltar que é muito comum no ensino da Matemática o fato de o professor não considerar a diversidade de registros possíveis para um objeto e, com frequência, atribui a um único registro a dificuldade dos alunos.

Lembramos também sobre a importância das línguas naturais ‘linguagem’ do ponto de vista semiótico e didático. A linguagem é o viés pelo qual analisamos e utilizamos nas pesquisas didáticas as interações em classe, ou seja, todas as explicações verbais dos alunos. Daí o fato de elas cumprirem simultaneamente as funções de comunicação (línguas como códigos) e também as funções cognitivas (línguas como registros). Duval (2011b) sustenta que, a ‘expressão verbal’ (linguagem) visa comunicar para explicar ou fixar o resultado ‘do trabalho do pensamento’ (funcionamento cognitivo).

Para o autor, quando se faz uso de uma língua está se executando duas atitudes: ‘diz-se qualquer coisa, ou escreve-se, e compreende-se o que outra pessoa está querendo dizer’, ou ‘está dizendo, ou ainda, utiliza-se a linguagem escrita’. Retém-se dessas duas atitudes, o que foi falado, declarado, isto é, um enunciado ou um conjunto de enunciados onde a forma, a complexidade sintática e a maneira como foi organizado variam bastante. Não há nada em comum com a codificação e decodificação. ‘Manifestar-se’ não é codificar um pensamento manifestado, mas sim tornar objetivo e ser consciente, mesmo endereçando-se a outro. Semelhantemente ‘o ato de compreender’ não é transformar em código de palavras ou frases, mas sim, discernir as unidades de sentido tendo em vista as diferentes formas em que o discurso pode ser organizado e, pode-se também, casualmente, reformulá-las.

É preciso lembrar que não há normas ou maneiras para decodificar ou reconhecer as informações relativas à compreensão dos enunciados dos problemas, quer sejam aditivos, ou aqueles para se colocar em equação, inequação, dentre tantos outros.

Se a língua não é um código, mas um registro de representação semiótica, ela se assenta nas operações discursivas que põe em prática as funções cognitivas e, sendo assim, todo ato de expressão e de compreensão de uma fala mobiliza diversos graus.

Qualquer manifestação de pensamento precisa da utilização da língua natural, seja ela metodologicamente, estabelecendo uma relação entre pensamento e linguagem, ou então a partir de manifestações discursivas, para fragmentar um discurso em unidades com significado. Assim também, partindo-se das funções cognitiva e lógica, pode-se criar uma frase tomando-se um número sem fim de palavras não semelhantes, formada por seu valor epistêmico, lógico, pragmático, ou por seu *status* no desenvolvimento do discurso.

De acordo com Duval (2011b, p. 78 - 79) as operações didáticas discursivas do domínio da língua podem ser determinadas via: "*enunciação*, *design*ação, *expansão* e *reflexividade discursiva"* do conteúdo proposicional de um enunciado completo; via de regra entram na produção ou compreensão de um discurso e determinam as unidades de sentido da frase.

(1) **Enunciação** - Através da enunciação se dá início ou se prolonga a forma de se explicar, descrever, expressar, expor, argumentar ou qualquer outro forma de discurso. A expressão verbal geralmente suscita uma questão, uma resposta ou então uma réplica.

(2) **Designação** (referência) - Aquilo que vai ser designado, enunciado, ligando objetos através de expressões, combinando no mínimo duas palavras, salvo quando se faz necessário a codificação de alguma figura com letras e o uso de letras, criando um nome próprio contextual. Essa referência a um objeto pode até ser um tanto complexa, em razão da falta de palavras em relação a tudo aquilo se pode querer designar. Exemplo: apenas com a letra "P" ou a com a palavra "ponto" não é possível distinguir o centro do círculo, ou a intersecção dos diâmetros ou o meio do

segmento. Codificar a figura com as letras e empregar as letras é criar um nome próprio contextual, sem ter uma propriedade mobilizada.

(3) **Expansão discursiva -** Trata-se da organização sequencial de frases com o mesmo objetivo, o mesmo propósito, e que lhe dão uma lógica, uma coerência. Elas proporcionam a diferença entre um raciocínio e uma descrição ou explicação. É através da expansão discursiva que as proposições têm um *status* e que esse *status* dá uma nova dimensão de seu significado.

> A organização de um discurso depende sempre das funções discursivas que compõem e das operações discursivas realizadas. A influência das funções meta-discursivas sobre a organização de um discurso se expressa na predominância dada a uma ou outra das funções discursivas e na seleção de algumas operações específicas a esta função (DUVAL, 2004, p. 89).

Em síntese, sob o ponto de vista de Duval (2004), pode-se dizer que um discurso matemático deve conter um 'referencial' (designação de objetos), uma 'apofântica' (constituição de um enunciado completo sobre o objeto) ou enunciado verbal suscetível de ser dito verdadeiro ou falso; assim poder-se-á efetuar inferências por meio de articulação dos enunciados completos, permitindo vincular a proposição enunciada com outras de forma coerente (expansão discursiva), direcionadas pela 'reflexitividade' (pensar, refletir a atividade dentro de um conjunto de valores, regras, dentre outros), e pela 'reflexividade discursiva' (numa relação que é verdadeira quando relaciona um elemento com ele mesmo).

Duval (2004) declara que os modos de expressão, os quais são considerados como fenômenos superficiais, sendo resultado de operações discursivas que se movem, mas não se exprimem necessariamente através de marcas linguísticas, ou seja, a execução de uma só função discursiva pode movimentar muitas operações, e as etapas do discurso podem ter extremos fragilizados dentro de um enunciado de níveis diferentes. Enfatiza também que a demarcação das partes do discurso não deve ser feita somente com base em apreciações linguísticas, nem embasada em apreciações de formas linguísticas de expressão, mas sim, baseada nas operações realizadas para organizar o discurso. Portanto, a determinação deste tipo de componente depende de uma aproximação funcional.

O Quadro 15 sintetiza a ideia de Duval dos diferentes tipos de registros mobilizáveis no funcionamento matemático.

A ênfase neste trabalho é para o enfoque da relação de conversão envolvendo registros multifuncionais[31] e monofuncionais[32], buscando explorar as formas de representação discursiva[33] e não discursiva[34] procurando compreender qual a percepção dos alunos da 8ª série (9º Ano) do Ensino Fundamental quando da observação dos elementos que constituem uma expressão matemática referenciando uma igualdade, uma desigualdade e as regiões do plano cartesiano.

Essas formas de registro possibilitam identificar com mais facilidade o que varia, o que permanece constante e o que há de comum entre os elementos expressos nas conversões das representações ‘natural (texto), algébrica e gráfica’. A classificação dada por Duval (2003) está representada no quadro a seguir:

Quadro 15 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	**Língua natural Associações verbais (conceituais)** Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças,..	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3)** • Apreensão operatória e não somente perspectiva;
	• Dedução válida a partir de definição ou de teoremas	• Construção com instrumentos

“Continua”

[31] Os tratamentos não são algoritmizáveis.
[32] Os tratamentos são principalmente algoritmos.
[33] Língua natural – associações verbais (conceituais); Sistema de escritas.
[34] Gráficos cartesianos.

"Conclusão"

Quadro 15 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	**Sistema de escritas** • Numéricas (binária, decimal, fracionária,...); • Algébricas; • Simbólicas (língua formal). **Cálculo**	**Gráficos cartesianos** • Mudanças de sistemas de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

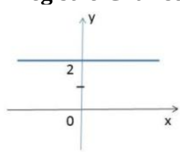
Fonte: Duval (2003, p. 14).

Todo o caminho trilhado na elaboração das atividades propostas, ao aluno, o coloca como agente para interpretar, explicar o sentido das coisas, fazer ferramentas conceituais, perceber problemas, preparar-se para encontrar a solução, desenvolver o raciocínio lógico, a compreensão e a imaginação.

Neste sentido, segundo Duval (2004), compete ao professor observar o desenvolvimento dos conhecimentos e da aprendizagem dos alunos, estando atento a três fenômenos: a diversidade de registros e suas questões específicas de aprendizagem; a diferenciação entre representante (forma) e o representado (conteúdo); e a coordenação entre diferentes tipos de registros disponíveis para os quais o aluno, não só deve ter o conhecimento das regras de correspondência entre eles, mas também dos fenômenos de congruência e não congruência, sendo que a maior parte dos registros ocorre à luz da manifestação do fenômeno da não congruência.

Nos Quadros 16 a 24, expõe-se uma síntese procurando envolver o plano cartesiano e suas regiões por meio das expressões (**y** e **x**, com valor fixo; $y = x$; $y = - x$; $y > x$; $y < 0$; $x \, . \, y > 0$; $x \, . \, y < 0$; $x \, . \, y \leq 0$; $x \, . \, y \geq 0$), analisando quanto a congruência semântica entre as representações:

Quadro 16 - Representações de pontos tendo a ordenada fixa

Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro na Língua Natural O conjunto dos pontos cuja ordenada é sempre 2.	**Registro Simbólico Numérico** **{…, (-2, 2), ..., (0, 2), ..., (1, 2), ..., (3, 2), ...}** **Algébrico** **{(x; y): y = 2}**	**Registro Gráfico** 

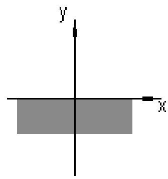
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: As expressões na forma 'discursiva (natural/texto), algébrica e gráfica' representam a informação a partir dos mesmos elementos identificadores: a ordenada de valor 2, permanece constante (não se altera, é fixa); em contrapartida variam os valores de x, tanto no sentido positivo como no negativo. Essas representações são congruentes, obedecem aos critérios de congruência.

Duval (1988a, p. 13) registra que:

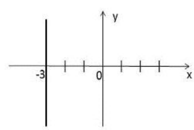
> A reta é interpretada como 'um conjunto infinito de pontos' (conjunto infinito tendo a potência do contínuo) e este conjunto está em bijeção com os conjuntos de números reais: a cada ponto corresponde um número real. Ora, é justamente esta noção de ponto que causa problema: um conjunto de pontos sobre um registro figurativo é discreto, não pode ser contínuo.

Quadro 17 - Representações de pontos tendo a ordenada negativa

Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro na Língua Natural O conjunto de todos os pontos em que a ordenada é negativa.	**Registro Simbólico Algébrico** **{** (x; y) : y < 0}	**Registro Gráfico** 

Fonte: Elaborado pelo autor.
Nota: As expressões na forma 'discursiva (natural/texto), algébrica e gráfica' representam a informação a partir dos mesmos elementos identificadores: ordenada negativa e y < 0, não possuem univocidade semântica terminal, não sendo congruentes, por não preencherem os critérios de congruência semântica.

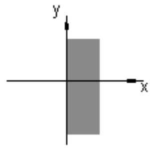
Quadro 18 – Representações de pontos tendo a abcissa fixa

Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro na Língua Natural O conjunto dos pontos cuja abscissa é sempre -3.	**Registro Simbólico Numérico** {…, (-3, -3), ...,(-3, -1), ..., (-3, 0), ..., (-3, 4), ...} **Algébrico** **{**(x; y): x = -3}	**Registro Gráfico** 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: As expressões na língua natural, algébrica e gráfica dão a mesma informação a partir dos mesmos elementos identificadores: a abscissa de valor -3, permanece constante (não se altera, é fixo); em contrapartida variam os valores de y, tanto no sentido positivo como no negativo. Essas representações são congruentes, por atenderem os três critérios de congruência semântica.

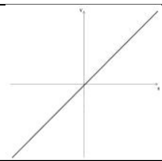
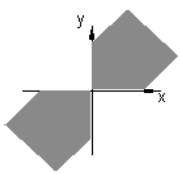
Quadro 19 – Representações de pontos tendo a abscissa positiva

Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro Natural O conjunto de todos os pontos em que a abscissa é positiva.	**Registro Simbólico Numérico** (pares ordenados) {…, (2, -2), ..., (1, -1), ..., (1, 1), ..., (2, 2), ...} **Algébrico** {(x; y): x > 0}	**Registro Gráfico** 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: As expressões na forma ‘discursiva(natural/texto), algébrica e gráfica’ representam a informação a partir dos mesmos elementos identificadores: abscissa positiva (lado positivo do eixo x). Essas representações (x > 0 e x positivo) não possuem univocidade semântica terminal, não sendo congruentes por não preencherem os critérios de congruência semântica.

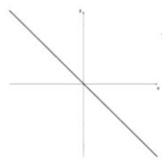
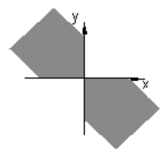
Quadro 20 – Representações de pontos tendo a ordenada e abscissa iguais (mesmo sinal)

Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro na Língua Natural	**Registro Simbólico Numérico** {…, (-2, -2), ..., (0, 0), ..., (1, 1), ..., (3, 3), ...}	**Registro Gráfico**
a) O conjunto dos pontos cuja ordenada é igual a da abscissa;	**a) Algébrico** **{**(x; y): y = x}	
b) O conjunto dos pontos em que produto da abscissa pela ordenada é maior que 0.	**b) Algébrico** **{**(x; y): x . y > 0}	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Para se reconhecer a equivalência da expressão algébrica (item d) com as expressões discursiva (c) e gráfica é preciso recodificar a base de código da expressão (a, c): é necessário passar para a equivalência "lados de mesmo sinal" ↔ "o produto das coordenadas é positivo"; ou seja, "(-) **.** (-) > 0" e "(+) **.** (+) > 0". Vemos que a passagem do registro gráfico para o registro algébrico se reduz a uma simples ação de reconhecimento, sendo menos prazerosa que a ação da passagem do registro natural para o gráfico. A diferença se explica facilmente pelo fato da não congruência (não há correspondência semântica entre as unidades significantes da expressão algébrica e o gráfico), posto que nenhuma unidade do registro algébrico permite traduzir a observação "mesmo sinal para x **.** y > 0"; é necessário recorrer a globalização descritiva de duas perífrases[35] (DUVAL, 2004, p. 58).

Quadro 21 – Representações de pontos tendo o eixo da ordenada e abcissa opostas

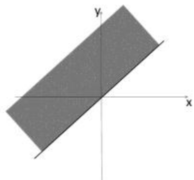
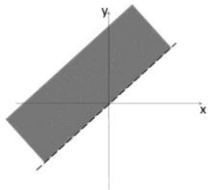
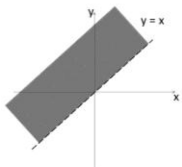
Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro na Língua Natural	**Registro Simbólico Numérico** (pares ordenados) {…, (-2, 2), ..., (-1, 1), ..., (1, -1), ..., (2, -2), ..., (3, -3), …}.	**Registro Gráfico**
a) O conjunto de todos os pontos em que a abscissa e a ordenada são opostas.	**a) Algébrico** **{**(x; y): y = -x}	
b) O conjunto dos pontos em que a abscissa e a ordenada tem sinais contrários.	**b) Algébrico** **{**(x; y): x . y < 0}	

Fonte: Elaborado pelo autor.

[35] Perífrase: do grego *perifrasis = em torno da frase,* também conhecida por *circunlóquio, rodeio, volteios;* s.f. Processo consiste em substituir uma palavra por uma série de outras, de modo que estas se refiram àquela indiretamente. Retórica: emprego de um grupo de palavras em lugar do termo próprio (FERREIRA, 2009, p. 1539).

Nota: Para reconhecermos a equivalência da expressão algébrica com as expressões discursiva e gráfica é preciso recodificar a base de código da expressão: é necessário passar para a equivalência “lados de diferentes sinais” ↔ “o produto das coordenadas é negativo”; ou seja, “(+) **.** (-) < 0” e “(-) **.** (+) < 0”. Logo não temos uma congruência semântica.

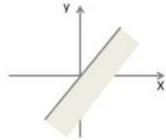
Quadro 22 – Representações de pontos da ordenada superior a abcissa

Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro na Língua Natural a) O conjunto de todos os pontos em que a ordenada é maior ou igual que a abscissa.	**Registro Simbólico** **a) Numérico** (pares ordenados) {…, (0, 0), ..., (1, 1), ..., (2, 2), ..., (3, 3), ...}. **a) Algébrico** $\{(x; y): y \geq x\}$	**Registro Gráfico** 
b) O conjunto de todos os pontos em que a ordenada é maior que a abscissa.	**b) Numérico** (pares ordenados) {…, (-3, 3), ..., (-2, 2), ..., (-1, 1),...}. **b) Algébrico** $\{(x; y): y > x\}$	
c) O conjunto de todos os pontos em que a ordenada é maior que a abscissa. *(considerando a reta y = x)*	**c) Numérico** (pares ordenados) {…,(-4, -3), ..., (-1, 0), ..., (1, 2),..., (3, 4),...}. **c) Algébrico** $\{(x; y): y > x\}$	

Fonte: Elaborado pelo autor.

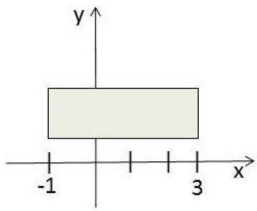
Nota: Para reconhecermos a equivalência da expressão algébrica com as expressões discursiva e gráfica, considerando a reta y = x, é preciso recodificar a base de código da expressão; é necessário passar para a equivalência , ou seja, “o sentido do crescimento dos eixos x e y, é no sentido do negativo para o positivo’ somente se “os valores do par ordenado (valor de y for maior que o valor de x), observando a reta y = x”, sendo que é possível ter dúvidas, incompreensões locais, fazendo com que o aluno releia o texto. Logo, não temos uma congruência semântica.

Quadro 23 – Representações de pontos localizados no I, III e IV quadrante

Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro na Língua Natural O conjunto de todos os pontos em que a abscissa é maior que a ordenada (*estando traçada a reta* *y* = *x*).	**Registro Simbólico Numérico** (pares ordenados) {..., (-3, -4),..., (-1, -2), ...(2, 1),..., (4, 3),...}. **Algébrico** {(x; y): x > y}	**Registro Gráfico** y = x 

Fonte: Elaborado pelo autor.
Nota: Para reconhecermos a equivalência da expressão algébrica com as expressões discursiva e gráfica, considerando a reta y = x, é preciso recodificar a base de código da expressão; é necessário passar para a equivalência , ou seja, "o sentido do crescimento dos eixos x e y, é no sentido do negativo para o positivo' ↔ "os valores do par ordenado (valor de x for maior que o valor de y), sendo que é possível ter dúvidas, incompreensões locais, fazendo com que o aluno releia o texto. Logo, não temos uma congruência semântica.

Quadro 24 – Representações de pontos localizados por intervalos

Representação Discursiva	*Representação Discursiva*	*Representação não Discursiva*
Registro na Língua Natural O conjunto de todos os pontos em que a abscissa esta compreendida entre -1 e 3, e a ordenada esta compreendida entre 1 e 3.	**Registro Simbólico Numérico** (alguns pares ordenados) {(-1, 3), (-1, 2), (-1, 3), (0, 3), ..., (3, 3), (3, 2), (0, 3), ..., (0, 2), (0, 1), (0, -1)}. **Algébrico** {(x; y): -1 ≤ x ≤ 3 e 1 ≤ y ≤ 3}	**Registro Gráfico** 

Fonte: Elaborado pelo autor.
Nota: As expressões na língua natural (texto), algébrica e gráfica dão a mesma informação a partir dos mesmos elementos identificadores, por delimitarem os espaços orientados por seus extremos via 'produto cartesiano'.

2.3.2 Teoria dos 'objetos pessoais e institucionais': a contribuição de Godino com enfoque ontosemiótico

Em nosso estudo, além da ancoragem teórica em Duval, que consiste em observar qual "[...] a compreensão de um objeto matemático procurando a razão dos bloqueios de compreensão que muitos alunos experimentam [...], e "quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aderir aos objetos matemáticos e efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos" (DUVAL 2003, p. 12 - 13), toma-se também as ideias de Godino.

O aporte em Godino se dá por entender-se que o estudo de representações semióticas nas regiões do plano cartesiano permite identificar em um conteúdo específico os significados institucionais e pessoais postos em jogo, além de identificar a compreensão dos alunos e os possíveis conflitos[36] semióticos na interação envolvendo o ensino e a aprendizagem, observados nas fases: (a) de objeto matemático a ser ensinado em uma atividade específica; (b) de objeto a ser aprendido, considerando a perspectiva teórica, em objeto aprendido pelo aluno.

Para Godino "é necessário elaborar modelos teóricos que tratem de articular as dimensões semiótica (em seus aspectos sintáticos, semânticos e pragmáticos), epistemológica, psicológica e sociocultural em educação matemática" (GODINO, 2002, p. 239, tradução nossa).

Godino, em sua teoria, também dá importância à ideia de Vergnaud (1996), segundo o qual os esquemas organizam o comportamento do sujeito para uma classe de situações dadas, estabelecendo, concomitantemente, as ações do sujeito e a representação simbólica, sobretudo linguística, que acompanha a ação.

Somente pelo simbolismo ou por meio de situações que se apresentam ao sujeito, não se pode fundamentar a aprendizagem matemática. É a partir de situações-problema que se constrói o conhecimento, sempre considerando a ação do sujeito na situação e a organização de seu comportamento.

Godino estabelece que o 'sistema de práticas' (praxeologia) inclui tanto componentes operatórios como discursivos, buscando sempre o significado institucional e pessoal de um objeto, procurando dar resposta à questão: o que é o objeto matemático em estudo? Em processo de ensino e aprendizagem, chama-se atenção para a seguinte questão: o que os alunos entendem por plano cartesiano? Como compreendem as representações de um plano cartesiano por meio de diferentes registros de representação?

---

[36] É uma ocorrência simultânea de, pelo menos dois impulsos ou motivos incompatíveis, sentidos por um indivíduo (FERREIRA, 2009, p. 522).

Essa prática de ensino e de aprendizado compreendida pela 'ação ou manifestação' operatória e discursiva, pode ser atribuída a um sujeito individual que construirá seu significado tornando-o um objeto pessoal, podendo ser compartilhada no ambiente escolar (turma/sala de aula).

Segundo Godino (2002, p. 239, tradução e grifos nosso) esta modelização requer ter em conta a:

> **Diversidade de objetos postos em jogo** na atividade matemática, tanto no plano da expressão como no do conteúdo.
> **Diversidade de atos e processos de semioses** (interpretação) entre os distintos tipos de objetos e dos modos de produção de signos.
> **Diversidade de contextos e circunstâncias espaço-temporais e psicossociais** que determinam e relativizam os processos de semioses.

Para Godino o modelo ontológico-semiótico defendido,

> Trata de aportar ferramentas teóricas para analisar conjuntamente o pensamento matemático, os ostensivos que lhe acompanham, as situações e os fatores que condicionam seu desenvolvimento. Assim sendo, podemos levar em conta as facetas ou dimensões do conhecimento matemático que podem ajudar a confrontar e articular distintos enfoques de investigação sobre o ensino e a aprendizagem e progresso havendo um modelo unificado da cognição e instrução matemática (GODINO, 2002, p. 241, tradução nossa).

Godino (2002) afirma ainda que a descrição da atividade matemática pode referir-se a objetos variados, podendo ser agrupados segundo critérios, formando categorias ou tipos de entidades consideradas primárias, conforme apresentamos no quadro que segue. Estas por sua vez podem agrupar as entidades secundárias como: práxis, logos, praxeologias, conceitos-sistemas, campos conceituais, teoria de grupos, aritmética, geometria, dentre outros. Observe os tipos de entidades no Quadro abaixo:

Quadro 25 – Tipos de entidades presentes num trabalho matemático e papéis desempenhados

Categoria	Funções Específicas
(1) **Linguagem** (termos, expressões, notações, gráficos).	Em um texto vêm dados em forma escrita ou gráfica para um trabalho matemático podendo usar-se outros registros (oral, gestual). Mediante a linguagem matemática (normal e específica) se descrevem outros objetos não linguísticos.
(2) **Situações** (problemas mais ou menos abertos, aplicações extramatemáticas ou intramatemáticas, exercícios,...).	São tarefas que induzem a atividade matemática.
(3) **Ações** do sujeito ante as tarefas matemáticas.	Envolvimento nas tarefas de operações, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimentos.
(4) **Conceitos**[37].	Dados mediante definições ou descrições (número, ponto, reta, função, ...).
(5) **Propriedades** ou atributos de objetos mencionados.	Que geralmente ocorrem como enunciados ou proposições.
(6) **Argumentações.**	Que se usam para validar e explicar as proposições (sejam dedutivas ou outro tipo).

Fonte: Godino (2002, p. 242, tradução nossa).

2.3.2.1 Faces ou Dimensões dos Objetos Matemáticos

O modelo ontológico proposto por Godino (2002) se complementa e enriquece com a consideração das cinco faces ou dimensões duplas, que junto com a noção de função semiótica como a entidade relacional entre os distintos tipos de entidades, permite

---

[37]"Os conceitos e propriedades são interpretados aqui como propõe Wittgenstein, como 'regras gramaticais sobre o uso de símbolos e expressões' para descrever as situações e as ações que realizamos ante estas situações (BAKER e HACKER, 1985, p. 285). Tais regras trocam segundo a fenomenologia dos jogos de linguagem, as formas de vida, as instituições. Outro uso habitual de conceito segundo (VERGNAUD, 1996) é como sistema heterogêneo de objetos (situações, invariantes operatórios, representações) que se pode substituir com vantagem pela noção de praxeologia" (GODINO, 2002, p. 242, tradução nossa).

descobrir e relacionar uma variedade de noções cognitivas propostas.

Segundo as circunstâncias contextuais do jogo de linguagem em que participam, as entidades matemáticas podem ser consideradas pelas faces ou dimensões duplas (a dualidade):

(a) Pessoal / Institucional – os distintos objetos contextualizados são ditos institucionais quando o texto é usado como recurso organizacional por um professor. Aqui se destacam os documentos curriculares, os livros texto, além das explicações do professor pondo em jogo os objetos institucionais, tendo conotações normativas ou convencionais, ou seja, os objetos são usados como referência no processo de ensino e aprendizagem. Já as respostas de um estudante conforme o desenvolvimento e a ampliação das dificuldades pelo professor, incluídas nas ações do sujeito ante as tarefas matemáticas propostas, contém objetos pessoais tanto em se tratando de entidades primárias como secundárias. Sob o ponto de vista de Godino (2002), as interações entre os membros de um grupo de alunos podem dar lugar a um acordo dentro do grupo, produzindo 'maneiras de atuar e falar' compartilhadas, dispostas e organizadas.

Também é habitual nas publicações usadas em matemática, a distinção entre cognição pessoal e organizacional, todavia nem sempre é concebida da mesma forma. Godino (2002, p. 244) sustenta que "a noção de relação pessoal e institucional com o objeto é a chave no enfoque antropológico proposto por Chevallard (1992), como também é importante, a distinção entre conhecimento institucional e pessoal introduzida nos enfoques socioculturais (COBBI, 1989)".

Assim sendo, na análise matemática e nos processos de ensino e aprendizagem é essencial a distinção entre pessoal e institucional, possibilitando caracterizar a aprendizagem como um acompanhamento progressivo entre significados pessoais e institucionais, podendo ser classificados como elementares ou sistêmicos (praxeológicos).

(b) Elementar / Sistêmica – Os conteúdos e seus conceitos podem ser introduzidos e trabalhados um a um com os alunos, envolvendo elementos unitários com características próprias ou funções únicas (forma elementar: traço ou propriedade específica), mas sendo integrantes de um contexto maior (dentro de um sistema) e em certos casos serem significantes para o conjunto, considerando-se como entidades compostas, com certa organização e estrutura (conceitos – sistema). Godino (2002, p. 244, tradução nossa) cita como exemplo que quando trabalhamos estatística:

> As medidas de tendência central se supõe que estão compostas pela média e mediana (a moda será estudada depois). E que entre estes dois objetos há uma determinada relação. A média é mencionada como algo que é calculado e este cálculo têm a característica ou propriedade que traz todos os dados tem de intervir todos os dados. A mediana vai se configurando como um sistema complexo que inclui certos tipos de tarefas específicas, técnicas de cálculo e a propriedade de ser melhor representada que a média em certos tipos de representações. Pelo contrário, as expressões de conjunto de dados, representações, ordenação crescente de um conjunto de dados, entre outras, como as operações aritméticas de adição e divisão se põe em jogo de maneira transparente, como se tratando de entidades unitárias ou elementares.

Esta distinção elementar ou sistêmica (unitária ou composta) é também aplicada nas restantes entidades primárias (essenciais) ou secundárias (auxiliares). No tocante aos conceitos estatísticos de média, mediana e medidas de tendência central, está se considerando como entidades compostas, com uma certa organização e estrutura (conceitos – sistema).

(c) Ostensivo / Não ostensivo – Godino (2002, p. 245, tradução nossa) baseando-se nas ideias de Bosch e Chevallard (1999) afirma que todo objeto tem uma face ostensiva (perceptível), e outra não ostensiva (não perceptível). Reforça que

> As entidades linguísticas se mostram por si mesmo diretamente a nossa percepção aparente (escrita, som, gestos). Já as entidades praxêmicas e discursivas por serem intrinsicamente diferentes das linguísticas, necessitam dessas entidades de

> maneira essencial para sua constituição e funcionamento.

A linguagem vem a ser o meio pelo qual, além de expressar o perceptível (face ostensiva) dos objetos matemáticos, também é instrumento para a sua constituição e desenvolvimento. Reforça o pesquisador que as entidades linguísticas, sendo um caso particular, só tenderiam numa primeira aproximação, para a face ostensiva. Entretanto, do ponto de vista do sujeito individual, os objetos linguísticos podem ser pensados[38]. Por exemplo, a palavra 'ponto', a anotação 'P', ou qualquer outro recurso expressivo pode ser imaginado. Desta forma, tais objetos mentais constituem a face não ostensiva dos objetos linguísticos. Godino (2002, p. 245, tradução nossa) chama atenção para o fato de que "Bosch e Chevallard (1999) para classificar o mundo dos objetos e das classes disjuntas, usam os termos ostensivo (que têm certa materialidade) e não ostensivo (que não têm materialidade, por exemplo: conceitos, noções, proposições, instituições, etc.)".

Entretanto, no modelo proposto por Godino, a distinção 'ostensiva/não ostensiva' é considerada como uma dimensão dupla aplicável aos distintos objetos primários (e secundários). O motivo é:

> Que um objeto ostensivo (uma palavra escrita, um gráfico, etc.) pode ser também pensado, imaginado, por uma pessoa, ou pode estar implícito em um discurso matemático institucional (por exemplo, o signo de multiplicar na notação algébrica). Analogamente, um cálculo pode ser realizado por uma pessoa de maneira ostensiva, ou mentalmente; um ordenador calcula internamente de maneira não ostensiva. É como se os objetos ostensivos também pudessem funcionar como não ostensivo (GODINO, 2002, p. 245, tradução nossa).

---

[38] "Um pensamento educado é aquele capaz de organizar (selecionar e combinar) o percurso das ideias formalizando raciocínios objetivos, eficientes que exponham significados adequados às intenções de emissão e recepção de mensagens" (TURIN, 2007, p. 21).

(d) Exemplar / Tipo – A dualidade 'representativo / original' é habitual na teoria da linguagem. Godino diz ser comum o uso dessa diferenciação quando se propõe uma interpretação linguística da distinção entre concreto e abstrato, sendo possível pôr em prática não só nos objetos conceituais, destinado a qualquer um dos seis tipos de entidades primárias[39] e também nas secundárias[40]. Essas expressões correspondem em alguns estudos de Godino como sendo objetos extensivos e intensivos. Segundo a compreensão do autor, é possível que seja uma noção útil para trazer a disposição matemática próximo da generalização e justificar alguns conflitos no processo de ensino e aprendizagem da matemática, oriundos da confusão que se faz entre exemplar (um modelo, cópia) e tipo (original). Considera Godino (2002, p. 245, tradução nossa) que,

> No estudo das matemáticas estamos sempre interessados em generalizar os problemas, as soluções que encontramos, e o discurso de que como se descreve e organiza. Nós nos conformamos em resolver um problema isolado, porém desejamos resolver tipos de problemas e desenvolver técnicas cada vez mais gerais. Além do mais, tais soluções são organizadas e justificadas em estruturas cada vez mais globais. Em análise de atividades matemáticas ou de um processo de estudo matemático particular, devemos precisar em cada circunstância se nos referirmos a um objeto concreto (algo que se põe em jogo por si mesmo) a um dito objeto como representante de uma classe de objetos, como exemplo de um certo tipo, ou componente de um sistema.

---

39 Entidades primárias: elementos linguísticos, conceitos, situações, proposições, procedimentos, argumentos (GODINO, 2002).

40 Entidades secundárias: a prática (situações e técnicas), linguagem (termos e expressões), praxeologia e teoria (conceitos, propriedades) teoria de grupos (a ordem pode significar duas coisas diferentes), aritmética, geometria, dentre outros' (GODINO, 2002).

No entanto, a consideração de um objeto em concreto[41] ou abstrato[42] é essencialmente relativa, pois depende do jogo de linguagem que participe. Logo, qualquer das entidades consideradas 'primárias ou secundárias' pode ser considerada como concretas ou abstratas.

(e) Expressão / Conteúdo (significante / significado) – Sob o ponto de vista de Godino,

> A atividade matemática, os processos de construção e o uso dos objetos matemáticos se caracterizam por ser essencialmente relacionais. Os diferentes objetos descritos, assim como os vários nomes que lhes designamos segundo a sua natureza e função, não se deve entender como uma entidade isolada, mas postas em relação umas com as outras. A diferença entre expressão e conteúdo nos possibilita levar em consideração o caráter peculiarmente relacional da atividade matemática (GODINO, 2002, p. 246, tradução nossa).

Godino (2002, p. 246) afirma que "a atividade matemática, os processos de construção e o uso que se faz dos termos 'expressão/conteúdo' são fundamentais para a dependência entre o texto e seus componentes e entre os componentes entre si". Trata-se, portanto, das correspondências (relações de dependência ou função) entre um antecedente (expressão ou significante) e um consequente (conteúdo ou significado), estabelecidos por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com determinado critério ou código de correspondência. Tais códigos podem ser normas (hábitos, arranjos) que instruem aos sujeitos implicados sobre os termos que se deve por em correspondência nas

---

[41] Algo que existe em forma material - que exprime uma coisa de real (FERREIRA, 2009, p. 18). Pode ser percebido pelos sentidos. O mundo físico é rico em objetos concretos, sendo utilizado principalmente para o início da aprendizagem matemática.

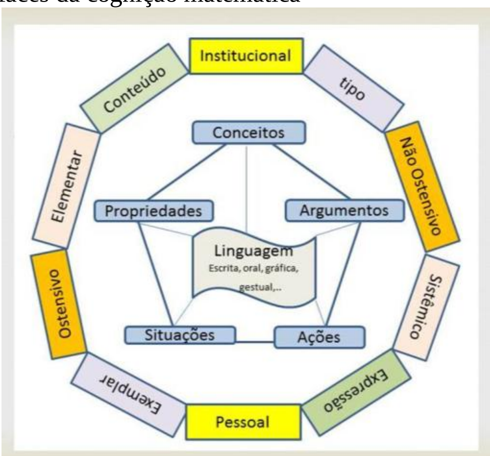
[42] Que expressa uma qualidade ou característica separada do objeto que pertence ou a que esta ligada (FERREIRA, 2009, p. 517). De forma mais clara é um objeto que não existe em nenhum momento ou lugar particular, mas existe como um tipo de coisa (como uma ideia, ou abstração).

circunstâncias fixadas. Godino também acrescenta na noção de função semiótica a ontologia matemática dizendo que qualquer das entidades abordadas pode fazer o papel de expressão ou conteúdo. Até porque,

> As relações de dependência entre expressão e conteúdo podem ser do tipo **representacional** (um objeto se põe em lugar do outro), **instrumental ou operatória** (um objeto usa a outro ou outros como instrumento), e **componencial ou cooperativa** (dois ou mais objetos compõem um sistema que emerge novos objetos), (GODINO, 2002, p. 246, tradução e grifo nosso).

Desta forma, a semiótica apresentada por Godino, torna comum de maneira radical a noção de representação, tão utilizada nas investigações cognitivas colocadas em prática na educação matemática. A Figura 05 resume o modelo ontológico-semiótico proposto por Godino, usado como meio de análise de uma atividade matemática e suas produções epistemológicas e cognitivas. Observa-se que as entidades linguísticas ocupam o centro por serem consideradas como ponto de entrada para indagar a presença e o papel desenvolvido pelas demais entidades.

Figura 05 - Modelo ontológico-semiótico proposto por Godino: componentes e faces da cognição matemática



Fonte: Godino (2002, p. 248, grifos coloridos nosso).

Godino considera no modelo ontológico-semiótico da Figura 05, que uma linguagem, seja escrita, oral ou gráfica, envolve conceitos, propriedades, argumentos, situações e ações, todas tendo uma relação umas com as outras, para que atividade matemática e os processos de construção e uso dos objetos matemáticos sejam integralizados.

Segundo o autor, todas ainda estão cercadas pelo caráter institucional (currículo, livro texto, explicações do professor) - pessoal (respostas de um aluno conforme o desenvolvimento e a ampliação das dificuldades pelo professor, incluídas nas ações do sujeito ante as tarefas matemáticas propostas), aparecendo na forma elementar (traços ou propriedade específica, envolvendo elementos unitários com características próprias ou funções únicas) e forma sistêmica (integrantes de um sistema maior), onde o objeto apresenta uma face ostensiva (perceptível) e outra não ostensiva (não perceptível), podendo aparecer sob a forma exemplar (concreto: algo que se põe em jogo por si mesmo) ou de tipo (abstrato: um objeto como representante de uma classe de objetos), contendo um conteúdo (significante) e uma expressão (significado).

Objetivamente esta noção de função semiótica torna possível uma interpretação do conhecimento e da compreensão do objeto obedecendo-se os componentes e faces aprofundadas por parte de um sujeito (pessoal ou institucional), onde ele pode determinar circunstâncias fixadas e o objeto ter função ativa.

Cada função semiótica supõe um ato de semiose por um agente que interpreta e forma um conhecimento. Falar de conhecimento é falar de significado, ou seja, de função semiótica, que resultou de vários tipos de conhecimentos, em relação com a variedade de funções semióticas que se pode fazer entre as várias entidades inseridas no modelo.

Um dos diferenciadores do modelo teórico de Godino (2002) encontra-se na análise minuciosa que propõe para os conhecimentos pessoais e também institucionais, junto aos conhecimentos procedimentais e conceituais (técnica, conceitos e proposições) considerados necessários para distinguir os conhecimentos situacionais ou fenomenológicos (situações-problemas, tarefas), conhecimentos linguístico–notacionais e conhecimentos argumentativos validativos.

Chama-se atenção, nas afirmações expostas por Godino, que o significado começa sendo pragmático relativo ao contexto, existindo tipos de usos que permitem orientar os processos de ensino e aprendizagem da matemática. E que esses tipos de usos aparecem mediante a linguagem e constituem os referencias do vocabulário institucional.

Além disso, em teoria, o uso que se faz de situações da noção de sentido, possibilita restringir a correspondência entre um objeto matemático e a ordem de situações da qual emerge, dando assim um sentido, podendo ser descrito como 'significado situacional'. E, essa correspondência é uma dúvida decisiva ao contribuir para a razão de ser de tal objeto, sua justificativa, sua origem fenomenológica, além de levar em conta as correspondências e funções semióticas entre esse objeto e os demais componentes operatórios e discursivos do sistema de prática que surgem do objeto.

Percebe-se que a noção de significado (o sentido) de um objeto matemático é o conteúdo de qualquer função semiótica, e conforme o ato comunicativo correspondente pode ser objeto ostensivo ou não ostensivo, concreto ou abstrato, pessoal ou institucional; pode referir-se a uma praxeologia (sistêmico), ou a um componente (situação-problema, uma notação, um conceito, etc.).

Por outro lado, quando pensamos numa prática matemática a ideia está centrada a partir de configurações de objetos matemáticos, tanto institucionais como pessoais.

Neste sentido, as ideias de Godino, Batanero e Font (2006, 2008) comprovam que os conflitos entre significados que as configurações possibilitam identificar, chamados de 'conflitos semióticos', contribuem para formulação de hipóteses sobre pontos críticos da interação entre os diversos agentes nos quais pode haver lacunas e vazios de significação, ou disparidades de interpretações que requeiram processos de negociação de significados e trocas no processo de estudo. Este fato pôde ser verificado durante a aplicação das atividades integralizadoras desta pesquisa, quando são envolvidos os diferentes registros de representação das regiões do plano cartesiano, onde os alunos puderam expressar suas dúvidas e formas de representação.

Godino, Batanero e Font (2008, p. 10) afirmam que 'conflito semiótico' se caracteriza por:

> [...] qualquer diferença ou desacordo entre os significados atribuídos a uma esclarecimento por dois sujeitos (pessoais ou institucionais) em interação comunicativa. Se a diferença se produz entre significados institucionais falamos de conflitos semióticos do tipo epistêmico, e quando a diferença se produz entre as práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito, designamos como conflitos semióticos do tipo cognitivo. Quando a diferença se produz

> entre as práticas (discursivas e operatórias) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor) falaremos de conflitos semióticos inter-relacionais.

Vivências práticas em sala de aula permitiram a Godino, Batanero e Font (2008) avançar e organizar uma relação de objetos e processos (ou sequência de práticas) que merecem destaque numa atividade matemática, dispostos conforme representação na Figura 10.

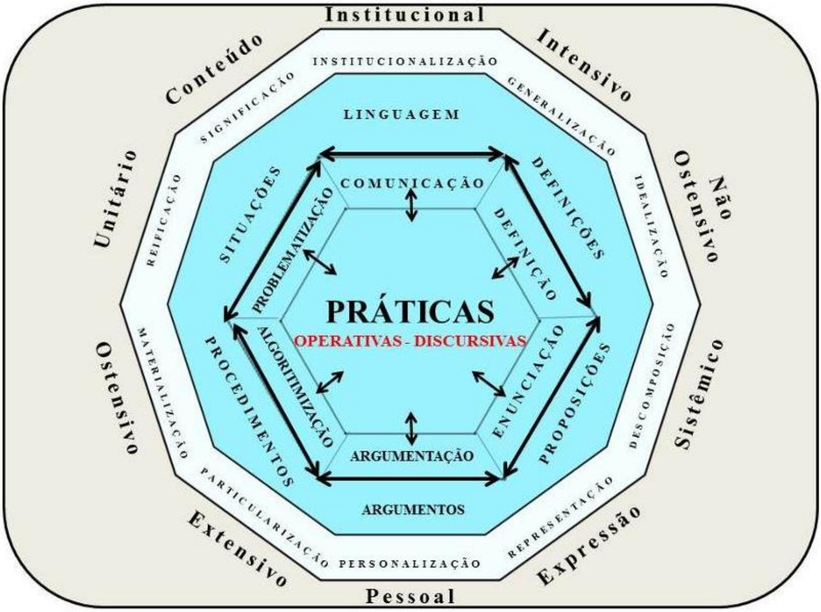
Para os pesquisadores Godino; Batanero; Font (2008, p. 8) é evidente que no Enfoque Ontosemiótico (EOS) as sequências de práticas, sejam elas de cunho cognitivo ou epistêmico envolvem a: "institucionalização-personalização; generalização-particularização; análise/decomposição – síntese/reificação; expressão/concreção – idealização/abstração; expressão/representação – significação".

Godino (2002, p. 241, tradução nossa) defende que o enfoque ontosemiótico não se limita apenas a entes abstratos ou conceitos formais de um objeto matemático, mas um objeto matemático deve ser compreendido "como tudo aquilo que pode ser indicado, [...] que pode ser compreendido ou ao que se pode fazer referência quando fazemos, comunicamos ou aprendemos matemática".

Godino; Batanero; Font (2008) argumentam que é por meio das 'práticas operatórias-discursivas' que relacionamos problematização, comunicação, definição, enunciação, argumentação, algoritmização e que interagem uma com a outra por meio de situações, linguagem, definições, proposições, argumentos e procedimentos envolvendo os componentes e faces da cognição matemática expostos na Figura 06.

Esta foi a vivência que se procurou expor na parte experimental deste trabalho.

Figura 06 – Configuração epistêmica/prática de objetos e processos matemáticos



Fonte: Godino; Batanero; Fonte (2008, p. 11, Grifos coloridos nosso).
Nota: Fundo ecológico das práticas (material, biológico e sociocultural).

Para Godino; Batanero; Font (2008), a organização visual da Figura 10, apresenta todos os elementos constituintes da ‘configuração epistêmica’ e das ‘entidades matemáticas’ postas em jogo numa prática ‘operatória – discursiva’ proposta ao aluno. Vê-se que existe uma estreita ligação entre seus elementos, ou seja, acorre a comunicação por meio da linguagem; a problematização ligada às situações, por meio de enunciados com suas proposições; tendo o aporte das definições, concluindo com a algoritmização feita por meio dos procedimentos. Todas elas se interagem tendo em vista o caráter ontosemiótico.

2.3.3 Conectando duas teorias: TRRS e EOS

A grande variedade de teorias em uso no campo da educação matemática tem possibilitado avanços significantes permitindo uma comunicação e até mesmo uma construção entre diferentes teorias numa só, fato que em algumas situações tem sido feita de forma insatisfatória.

O pesquisador Radford (2008) suscita a necessidade de buscar-se na educação matemática maneiras para conectar diferentes teorias. Desperta atenção que pesquisadores, como por exemplo Adler e Davis, apontam que a força da gramática pode ser um grande obstáculo no desenvolvimento de uma linguagem aceita em matemática. Daí o fato de vários pesquisadores defenderem uma posição intermediária, entre repudiar o isolamento de uma teoria e enfatizar o ganho de diferentes perspectivas. Entendem que o desafio é encontrar conexões na medida do possível com vistas a um grau de interação entre elas, presumindo-se um cenário de estratégias para encontrar conexões em rede. Bikner-Ahsbahs e Prediger (2010, p. 492, negritos nosso) apresentam o seguinte cenário: "***Ignorar outras teorias*** *→ Tornar compreensível – Compreender outras → Comparar – Contrastar → Coordenar – Combinar → Integrar localmente – Sintetizar →* ***Unificar globalmente"***.

Tomando por base as ideias do pesquisador Stephen Lerman[43] (2010), procuramos detectar algumas destas estratégias de conexão, entendendo que o aporte das teorias de Godino – "EOS" e de Duval – "TRRS", servem como lentes teóricas e práticas, pois juntas enriquecem o ensino e a aprendizagem de matemática. Constata-se que a 'prática matemática' se ancora em Godino e os 'registros de representações' em Duval. O primeiro pesquisador defende que 'a matemática é entendida como uma atividade socialmente compartilhada, de resolução de problemas, que possui linguagem simbólica e sistemas conceituais logicamente organizados' (GODINO; BATANERO, 1994). Já o segundo pesquisador sustenta como hipótese fundamental da aprendizagem que "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação [,] e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade de conversão". (DUVAL, 1993 apud MORETTI, 2002, p. 349). Para Duval(2004), não há conhecimento matemático que possa ser mobilizado por um aluno sem o auxílio de uma representação.

Pode-se observar que essas teorias, ao possuir uma utilidade na educação matemática, ao contrário de ser um problema, são na verdade

[43] LERMAN, Stephen: é professor do Departamento de Educação, da Universidade de London South Bank, Londres, Inglaterra – realiza pesquisas sobre as teorias intelectuais como recursos na educação matemática.

um ingrediente indispensável para possibilitar a identificação de possíveis conflitos semióticos na interação didática, permitindo determinar os significados institucionais e pessoais postos em jogo.

Sob o ponto de vista do semioticista Yuri Lotman (1990), uma das características marcantes da semiosfera[44] ou seja, a prática de ligação social e sua metalinguagem[45] é sua heterogeneidade. Segundo Lotman (1990, p. 125, tradução nossa), "Heterogeneidade é definida pela diversidade de elementos e por suas diferentes funções". Logo uma metalinguagem ao conectar duas ou mais teorias, tem o papel de assegurar formas possíveis de conectar diferentes elementos heterogêneos, onde as teorias e suas conexões se tornem objeto de discurso e pesquisa.

Radford (2008, p. 320), chama atenção afirmando que tudo vai depender do 'objetivo da conexão', considerando os três componentes básicos que podem ser observados e levados em conta, quando buscamos uma conexão entre teorias: "um sistema de princípios básicos 'P'; uma metodologia 'M' que inclui técnicas de coleta de dados e dá suporte a interpretação dos mesmos; e um conjunto 'Q' de questões de pesquisas paradigmáticas*"*. É evidente que uma conexão entre teorias poderá envolver a combinação destes três componentes.

Sendo assim, busca-se uma proposta de prática cujo 'objetivo da conexão' esteja voltado para 'a linguagem matemática no campo do ensino-aprendizado', e que ocorra de forma participativa e colaborativa.

Nas análises realizadas abrangendo as seis coleções ora apresentadas, constatou-se um distanciamento entre o quê é proposto pelos autores nas orientações pedagógicas e as atividades propostas envolvendo a conversão entre as formas de registro. Na prática, os exercícios não encaminham os alunos para a elaboração do conceito de plano cartesiano e coordenadas cartesianas, aplicando ainda, em boa parte deles, uma matemática mecanicista.

Entende-se que a linguagem na forma algébrica pode ser mais

---

44 Semiosfera – contexto do encontro de várias linguagens e tradições intelectuais; ou seja, é um espaço multicultural de processos de significação e entendimentos gerados por indivíduos à medida que vêm à conhecer e interagir uns com os outros.

45 Metalinguagem – espaço conceitual onde as teorias e suas conexões se tornam objetos de discurso e de pesquisa; de ligação da prática e sua linguagem.

explorada nos livros didáticos a partir do 6º. Ano do Ensino Fundamental (EF), induzindo o aluno de modo individual e/ou coletivamente por meio de situações-problema, a procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações e pensar de maneira lógica, como forma de adquirir ‘competências, habilidades, atitudes e valores’.

Pode-se também trabalhar, com atividades que envolvam a passagem da linguagem na forma natural para a forma algébrica e vice-versa. A linguagem na forma algébrica, sendo considerada como instrumento facilitador na simplificação de cálculos..., pode ser contextualizada no estudo de alguns conteúdos, tais como: perímetros, áreas, equações, sistema de equações, inequações, entre outros.

Já a argumentação dada pelas Diretrizes da Educação Nacional, pressupõe o uso da linguagem natural por meio do argumento na forma (verbal e textualmente) envolvendo os conteúdos matemáticos, permitindo defender os diferentes pontos de vista em diferentes discursos.

Logo, fazer a conversão de uma linguagem natural para a linguagem algébrica ou vice-versa, passando pela linguagem figural/gráfica, pode ter a atribuição de ilustrar as informações do enunciado, imprescindíveis para que a resolução possa ser dada também em linguagem natural/ algébrica.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática para o ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 117), este tipo de linguagem deve estabelecer relações com diferentes representações, a linguagem algébrica tem o papel de descrever simbolicamente regularidades:

> é interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente.

Já, a representação na linguagem figural/gráfica tem como propósito: complementar o enunciado, ilustrar o exercício dado ou ser uma forma visual de estudo produzida pelo aluno, preferencialmente com simplicidade[46], clareza[47] e veracidade[48], buscando uma fácil compreensão.

Presume-se que o livro didático deva ser utilizado apenas como um instrumento de apoio em sala de aula. Desta forma, tomando a crítica de Freire à educação bancária que predomina nas escolas, destaca-se aqui a importância da contextualização no ensino da matemática, uma vez que, como ressalta esse pensador, cabe à 'Escola/Professor' a missão de ensinar o aluno a ler o mundo para poder transformá-lo (FREIRE, 1988).

Assim sendo, pleiteia-se no 'Capítulo 4 – parte experimental', apregoar uma nova forma de apresentação e aplicação deste conteúdo no contexto da prática escolar, tendo o envolvimento das ideias de Duval (RRS) e Godino (EOS).

---

46 O gráfico deve ser destituído de detalhes de importância secundária, assim como os traços desnecessários que possam levar o observador a uma análise morosa ou com erros.

47 O gráfico deve possibilitar uma correta interpretação dos valores representativos da situação-problema em estudo.

48 O gráfico deve expressar a verdade sobre a situação em estudo.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

> *[...] escrever não é apenas comunicar resultados definitivos de uma análise, mas escrever é em si uma forma de análise. É uma continuação do processo de análise sob uma restrição mais severa, porque precisamos dar contorno e forma aos nossos pensamentos interiores [...] escrever significa aprofundar nossa pesquisa e nossa reflexão.* (ALTRICHTER; POSCH; SOMEKH, 1996, p. 192)

3.1 O CONTEXTO DA ESCOLA

O contexto no qual a escola está inserida remete-nos a características bastante peculiares. O Projeto Político Pedagógico da Escola (CAMBORIÚ, 2012, p. 11) contempla no aspecto da 'filosofia e concepções' que a instituição está inserida numa comunidade heterogênea, onde a maioria das pessoas vieram de outras cidades de Santa Catarina ou de outros estados do Brasil. Ressalta que com esse diagnóstico fica visível perceber alguns pontos:

> (a) Uma cultura bastante flexível e até divergente quanto à questão de valores e atitudes, o que corresponde à realidade vivenciada socialmente pelos adolescentes, com muitas famílias desestruturadas, sem preocupação com a formação cidadã do filho.
>
> (b) Observam-se jovens sem perspectiva para o futuro, não percebendo que a escola é o principal agente de transformação para um mundo melhor.
>
> (c) As famílias desta comunidade possuem baixo índice de escolaridade. Os alunos são filhos de pais com poder aquisitivo variável entre a classe média baixa e baixa. A maioria possui casa própria e tem como profissão os serviços populares (serviços domésticos, jardineiros, serventes, cozinheiras, copeiros, arrumadeiras, pedreiros, marceneiros e pintores), gerando baixa renda.

Nesse contexto social a escola busca contemplar, a partir de seu projeto pedagógico, um sujeito comprometido com valores ético-morais, preparando-os intelectualmente para a leitura de mundo, sendo preciso reconhecer, antes de qualquer coisa que ‘não é possível transformar o mundo sem interpretá-lo’.

3.1.1 Os participantes

O estudo de campo foi desenvolvido no período matutino com o universo de noventa e sete (97) alunos com faixa etária entre 14 e 16 anos, dos quais dez (10) estavam repetindo a série, utilizando-se como amostra a 8ª Série (9º Ano) do Ensino Fundamental (Turmas: T801, T802, e T803), da Escola Básica Municipal Anita Bernardes Ganancini, localizada no Município de Camboriú – SC. Todas as atividades foram desenvolvidas no período de março a maio de 2013, com a colaboração da professora de Matemática dessas turmas, nos horários normais das aulas. O tempo de duração de cada aula é de 45 minutos, não sendo geminadas.

Cabe também o registro de que em cada uma das turmas tinha uma professora monitora para atender a(o) aluna(o) com necessidades especiais, tendo um aluno(a) em cada turma. Os princípios da inclusão nas instituições educacionais são o de reconhecer e valorizar a diversidade como característica inerente à constituição de uma sociedade democrática. Nesta Escola encontramos alunos com variadas deficiências, tais como: DI (deficiência intelectual, autismo, síndrome de Down, síndrome de Wesz, síndrome de Asperger, etc.). Sendo assim, há necessidade de se trabalhar com olhares diversos, levando em conta os comprometimentos cognitivos e neurológicos de cada um e também aspectos sócio/cultural-familiares. Recebem atendimento educacional especializado, integrando-os com os demais, evidenciando diferentes compreensões, terminologias e modalidades para melhores resultados psicopedagógicos, garantindo a promoção da acessibilidade a todos os educandos que necessitem de suporte pedagógico e amparo em suas carências emocionais. Cabe o registro de que algumas das noções trabalhadas com o grupo, eles conseguiram acompanhar e desenvolver em parte, outras não.

3.1.2 A Estrutura física da escola

A Escola apresenta uma boa estrutura com os seguintes espaços físicos: sala da direção, dos professores, da orientação educacional, da supervisão escolar; salas de aulas bem zeladas, com quadro para giz e pincel branco, porém com iluminação do ambiente satisfatória; uma biblioteca com um acervo de livros em quantidade pequena; laboratório de informática com 20 computadores em ótimo estado de conservação; auditório para eventos; pátio e quadra para a educação física; cozinha para a preparação da merenda escolar.

3.2 A PESQUISA: COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Para fazer a coleta e análise dos dados experimentais, tomou-se como referência atividades do cotidiano dos alunos que despertassem motivação, interesse e participação, caracterizando-se como uma proposta de ensino realizada em sala de aula, onde se aborda a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino. Nesse sentido, a execução da pesquisa contempla três etapas: a) análises preliminares (elaboração das atividades colaborativas e integralizadoras dos Momentos 1, 2, 3 e 4) com reflexões junto à professora das turmas; b) aplicação das atividades da sequência didática; c) análise das atividades em cada Momento e avaliação dos resultados.

3.3 AS AÇÕES DESENVOLVIDAS

As ações desenvolvidas em 29 encontros foram distribuídas em quatro **Momentos (M)** tendo como instrumento de ensino e aprendizagem as Atividades Colaborativas[49] (AC) e Atividades Integralizadoras[50] (AI).

(**M 1**) Introdução da noção de Coordenadas e a formação de um Plano Cartesiano envolvendo três evoluções práticas (croqui do trajeto casa/escola, planta do bairro buscando coordenadas de localização, e acesso localização via tecnologia da informática). Nesse momento os

---

49 São as atividades realizadas em classe com a participação dos alunos, de forma dialogada, observando as dúvidas levantadas, as sugestões e encaminhamentos tendo em vista a solução da situação-problema apresentada.

50 São as atividades realizadas em classe pelos alunos observando-se a compreensão cognitiva quanto às formas de representação solicitadas na situação-problema.

alunos foram estimulados por meio de diálogo a citar exemplos onde aparece e/ou pode ser utilizado esse instrumento. Com essa ação, colocamos o aluno em condições de descobrir, estabelecer perguntas e problemas cujas respostas óbvias ou não, demonstravam sua capacidade de articulação.

(M 2) Professor/Alunos elaborando o conceito de plano cartesiano (suas regiões) e coordenadas cartesianas; Organização da configuração epistêmica e as entidades matemáticas relacionadas aos exemplos de situações apresentadas, para compreender as formas de uma representação significável (linguística, simbólica, gráfica) de um objeto matemático.

(M 3) Organização da configuração epistêmica e as entidades matemáticas das atividades; atividades envolvendo exercícios onde o aluno realiza a operação cognitiva de conversão (a qual tem seus critérios) e os tratamentos no interior do sistema; tratamento da informação, visando a compreensão visual da informação e da comunicação em representações gráficas; compreensão do símbolo das desigualdades com relação as regiões do plano cartesiano.

(M 4) No último momento acontece a apresentação de atividades integralizadoras visando os tratamentos e conversões de diferentes registros de representações de um ponto quanto ao uso das regiões no plano cartesiano e desigualdade, segundo as funções de comunicação, tratamento e de objetivação, indicando os elementos observados e que foram levados em consideração para nortear as abordagens buscando um ensino eficaz para garantir aprendizado.

Os alunos foram estimulados por meio das situações-problema apresentadas e trabalhadas em classe, a uma perspectiva mais ampla, ou seja, identificando não só os conceitos, assim como, os procedimentos e as atitudes, enriquecendo assim o processo de ensino e aprendizagem. Lembramos que também foram explorados números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas, além do tratamento da informação.

Neste momento foram envolvidas situações e acontecimentos do cotidiano, realização de experimentos e observação de eventos (em espaços equiprováveis), sendo fornecidas algumas formas de registro de representação e solicitando mais duas formas de registro do objeto matemático em estudo.

Considerou-se que toda a trajetória semiótica e os conflitos semióticos potenciais identificáveis fossem envolvidos pela práxis (situações, técnicas), pela linguagem (termos e expressões; notações), e teoria (conceitos, propriedades, e argumentos).

3.4 SOBRE O INSTRUMENTO E TRATAMENTO DOS DADOS

Foi elaborado um instrumento diagnóstico tendo a intenção de identificar durante sua aplicação e análise, alguns elementos com relação às concepções dos alunos sobre a noção de ‘Representação Semiótica no Plano Cartesiano: estudo da coordenação de vários registros de representação matemática’.

Como instrumento de coleta, os dados foram analisados qualitativamente, utilizando-se fichas de observação apresentadas de duas formas: ‘observações passivas’ – que incluem a visão e a audição, isto é o pesquisador vê e ouve; e, as ‘observações participativas’- em que o pesquisador inclui entrevistas, conversas informais e a revisão de documentos/atividades durante as aulas de Matemática, observando as operações cognitivas de tratamento e conversão, realizadas pelos alunos.

Nossa meta incluiu também tomar ciência de nosso ponto de partida na atividade docente em sala de aula antes da introdução do estudo sobre funções, motivados pela ideia de como organizar atividades e um ensino que auxilie os alunos a coordenarem as distintas representações de um objeto matemático com vistas a seu reconhecimento (conceito) e aplicação.

A organização das atividades foi elaborada por meio de leituras e reflexões compartilhadas com a professora de matemática das turmas, de modo que contribuíssem para a formação de conceitos referente ao conteúdo, tendo em vista a compreensão e aprendizagem por parte dos alunos e contemplasse a participação efetiva dos mesmos.

Foram levadas em consideração as ideias de Duval e de Godino, agregando os elementos norteadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática (BRASIL, 1997) para a resolução de problemas no ensino de Matemática no Ensino Fundamental.

Além disso, considerou-se o pensamento de Tall e Vinner (1981, p.151), segundo os quais:

> [...] geralmente é dado um símbolo ou um nome que é capaz de ser comunicado e auxilia nas manipulações mentais, porém a estrutura

> cognitiva que evidencia os significados do conceito é muito mais que a evocação de um símbolo. Na verdade, durante o processo de trazer de volta e manipular um conceito, muitos outros processos associados são colocados em jogo de forma consciente ou inconsciente, afetando portanto o significado e o uso deste conceito.

Em vista disso, organizou-se para o primeiro dia um momento para a apresentação oral da proposta do trabalho a ser realizada, e algumas informações sobre o pesquisador, explanando a metodologia a ser empregada. E, para as aulas seguintes articulamos paralelo aos conceitos construídos de forma participativa com os alunos, algumas atividades explorando os conceitos apreendidos.

3.5 SOBRE AS ATIVIDADES

Tendo como base os referenciais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): matemática (BRASIL, 1998) e olhando para a função da Matemática no Ensino Fundamental – séries finais, percebe-se que não há único caminho para o ensino e aprendizado em sala de aula. Faz-se necessária a busca de diversas atividades envolvendo o conteúdo ‘plano cartesiano e suas regiões’ que explorem a prática escolar.

Entre as sugestões de atividades constam três ligadas ao ‘espaço e forma’, possibilitando ao aluno a construção e apreensão de conceitos geométricos, levando a desenvolver a percepção espacial que faz com que melhore o entendimento do mundo.

Já as atividades que abordam ‘números e operações’, além dar estímulo ao aluno para que perceba a existência de diversas categorias de números que foram criadas em função das diferentes necessidades do homem, propõe o desenvolvimento de atividades envolvendo a álgebra onde o educando pode:

> Reconhecer as diferentes funções da álgebra (modelizar, demonstrar, resolver problemas insolúveis), representando problemas através de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e contatando com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a ‘sintaxe’ (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 55), e até mesmo inequação.

Por fim algumas atividades que tratam do ‘tratamento da informação’, tendo por finalidade permitir que o aluno desenvolva noções de estatística e “venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia” (BRASIL, 1998, p. 56).

Todas as atividades tiveram como foco a criação de um elo entre o contexto do aluno e a abstração através da percepção e produção de sentidos no processo do ensino e da aprendizagem da matemática na escola.

A abordagem inicial dos conteúdos, na prática, envolveu atividades com linguagem acessível visando o envolvimento dos conhecimentos prévios dos alunos, juntando-se com as atividades exploratórias e embasamento teórico, possibilitando o aumento do grau de complexidade nas atividades finais, fazendo com que mais objetivamente os alunos chegassem à abstração e entendessem os conceitos matemáticos.

De acordo com o PCN: matemática – ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 25) deve-se levar em conta que

> O conhecimento prévio dos alunos na construção de significados geralmente é desconsiderado. Na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas dos alunos, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para um tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdos proveniente da experiência pessoal.

Apresentar-se-á na parte experimental todas as Atividades Colaborativas (AC) e Atividades Integralizadoras (AI) aplicadas no caminhar do processo, ampliando o grau de dificuldade e o nível de compreensão na ação do projeto de pesquisa, considerando-se os tratamentos nos diferentes tipos de conversões: da representação algébrica para a representação natural; da representação gráfica para a representação algébrica; e da representação natural para a representação gráfica.

As atividades foram desenvolvidas nos Momentos 1 ao 3 em duplas e no Momento 4 de forma individual.

3.6 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Obedecendo à metodologia proposta, foram efetuadas análises em todos os momentos, observando o pensamento cognitivo dos alunos no decorrer de todo o processo da pesquisa, visando, se necessário, à reorientação de cada atividade dentro da sequência planejada.

Esses momentos possibilitaram a identificação das conexões cognitivas (mentais, computacionais e semiótica) nas transformações por tratamento e conversão presentes no estudo dos registros de representações de regiões no plano cartesiano. Ou seja, a determinação de significados a partir da análise semiótica, no campo da ontosemiótica envolvendo: grupos de atividades; a trajetória semiótica e conflitos semióticos potenciais (prática, linguagem e teoria matemática).

4 A PARTE EXPERIMENTAL

Conhecer, portanto, significa, em primeiro lugar, constatar os resultados inevitáveis sob determinadas condições dadas. Estas condições correspondem aos acoplamentos ativos, formando a parte coletiva do conhecimento. Os resultados inevitáveis equivalem aos acoplamentos passivos formando aquilo que é percebido como realidade objetiva. O ato de constatação compete ao indivíduo. (FLECK[51], 2010, p. 83)

4.1 A EXPERIÊNCIA

O processo[52] de pesquisa, por ser dinâmico, constitui-se por um movimento constante de idas e vindas que exigem do pesquisador uma constante avaliação e consequente reorganização de seu planejamento didático.

Assim, com o intuito de alcançar as metas propostas, dedicou-se à parte experimental uma sequência de ensino envolvendo a coleta e institucionalização dos dados, ou seja, os significados institucionais e pessoais postos em jogo, diante do estudo da coordenação de registros de representação de regiões no plano cartesiano.

Os 30 encontros com as aulas não geminadas foram realizados tendo uma participação (média) de: 97 alunos no Momento 1 – Construção do conceito de plano cartesiano e seus elementos; 75 alunos no Momento 2 – Atividades Compartilhadas (AC) e Integralizadoras (AI); 69 alunos no Momento 3 – Atividades integralizadoras; e 64 alunos no Momento 4 – Atividades Colaborativas e Integralizadoras – envolvendo os símbolos de desigualdade.

A redução dos alunos participantes registrado foi de 33 (34,02%). Os motivos registrados foram: alguns ausentes no dia da aplicação das atividades, outros mudaram de Escola e/ou de Cidade, ou desistiram de estudar para trabalhar.

---

[51] FLECK, Ludwik (1896 – 1961), foi um médico e microbiologista polonês que realizou uma série de inovadoras reflexões epistemológicas sobre a natureza da atividade científica (CONDÉ, 2012).

[52] Entende-se por processo um conjunto de práticas matemáticas envolvendo determinado conteúdo.

4.1.1 A trajetória semiótica e conflitos semióticos potenciais: prática, linguagem e teoria.

A trajetória foi estruturada de forma a possibilitar aos participantes (pesquisador/alunos) o diálogo envolvendo explicações e perguntas, partilhando a troca de experiências; atividades para serem realizadas individualmente e em duplas; situações do cotidiano relacionadas ao tema; retroalimentação dos conceitos ao final de cada momento.

Coube ao pesquisador planejar e organizar a atividade por meio da ilustração ‘quadros’ referente ao tema Plano Cartesiano, contendo: a) a ‘configuração epistêmica: situação-problema, definição, propriedade, procedimento, argumento’; b) ‘entidades matemáticas - as unidades elementares de análise da situação-problema: prática, linguagem, teoria, técnica, notação, propriedade’, seguido das atividades propostas.

Foram propostas atividades em três níveis: elementar, intermediário e com maior nível de dificuldade; todas intercaladas para melhor compreensão do tema.

Acompanhe os Momentos (1, 2, 3 e 4):

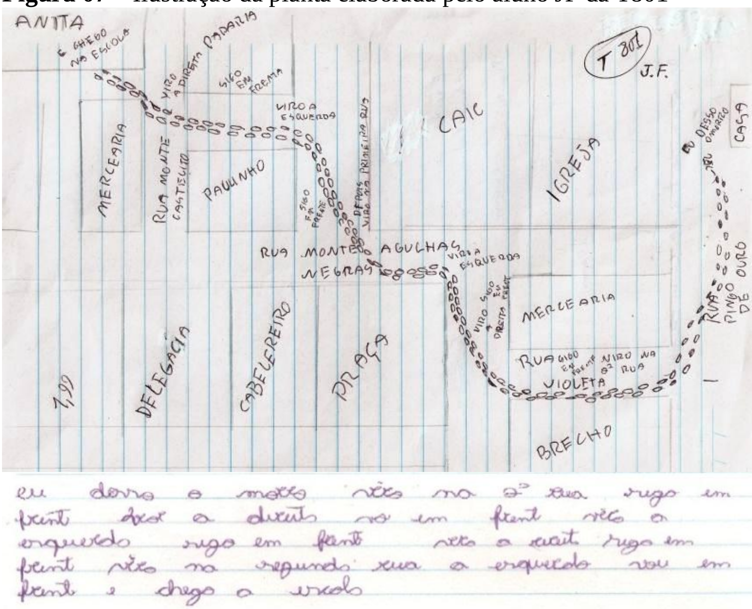
Momento 1 (**1º** ao **7º encontro**)– *Apresentação do pesquisador e início das atividades com os alunos, tendo em vista a conceitualização de plano cartesiano e a sua utilidade no cotidiano.*

No **1º encontro** com os alunos foram repassadas de forma descontraída as informações necessárias, referente à pesquisa onde o pesquisador se colocou como membro do processo, estando à disposição dos alunos a qualquer pergunta, dúvida, bem como complemento de ideias e até exemplos do dia-a-dia que porventura queiram compartilhar coletivamente. Em seguida, o pesquisador deixou um tempo para eventuais perguntas e/ou dúvidas dos alunos. Nas três turmas (801, 802, e 803), o pesquisador foi indagado com as seguintes questões: qual sua formação? Se era professor há muito tempo e em qual escola? Onde morava? Se o professor conhecia o bairro, a escola? Coube ao pesquisador de forma harmoniosa responder todas as indagações.

Transcorridas as formalidades, passou-se para a segunda parte do Momento 1, ou seja, como atividade inicial foi solicitado aos alunos que juntassem as carteiras, e que cada um desenhasse numa folha de caderno o trajeto realizado por eles, tendo sua residência como ponto de partida e a Escola como ponto de chegada. A atividade procurou, de forma descontraída, reproduzir o mundo ao redor dos alunos, explorando os conhecimentos prévios quanto à localização, ponto de referência, nome de ruas, ruas extremantes com a quadra onde moram, além de avaliar a desenvoltura deles, por meio da linguagem de signos ‘desenho e escrita’ e ‘espaço e forma’.

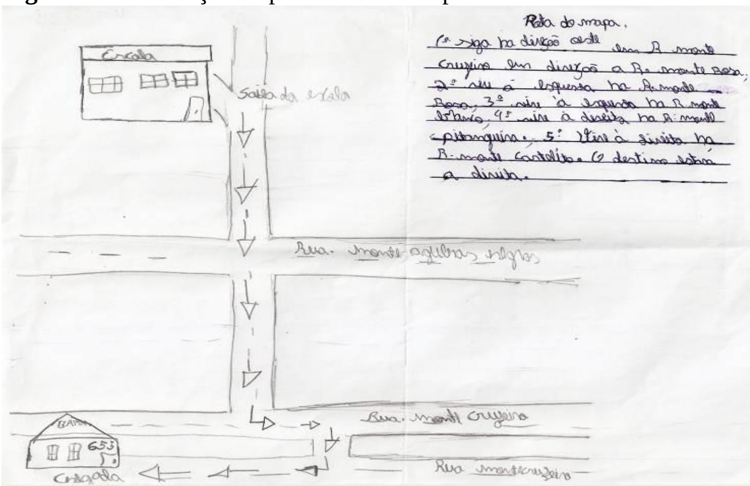
Um fato na turma 801 que despertou o olhar do pesquisador foi que num dos grupos, o aluno LWF, de posse do celular acessou o *google maps*, indicando as referências da escola e de sua casa, obtendo a imagem da localização dos dois pontos. Este acontecimento motivou-o a formalizar o agendamento de horário para uso do laboratório de informática para que todos os alunos pudessem realizar esta prática também com o apoio dos computadores.

Figura 07 – Ilustração da planta elaborada pelo aluno JP da T801



Fonte: Documentos do autor.

Figura 08 – Ilustração da planta elaborada pelo aluno SL da T801



Fonte: Documentos do autor.

O pesquisador constatou o interesse e envolvimento dos alunos quanto à forma de elaboração do mapa simples (esboço), buscando de alguma forma apresentar as localizações da sua casa e da escola, indicando e descrevendo o caminho a seguir. Procurou-se nesta atividade investigar se o aluno tinha habilidade no uso de instrumentos de desenho e/ou se ele conseguia elaborar um croqui do trajeto.

Nesse momento presenciou-se o despertar dos estudantes para o exercício da noção de representação, mas não sendo semiótica. Simplesmente transcreveram a imagem do trajeto feito por eles todos os dias.

Constatou-se pouca habilidade dos alunos para representar um mapa (espaço e forma), utilizando a régua para efetuar os traçados de retas paralelas e retas concorrentes (perpendiculares e oblíquas) das ruas/quadras. Alguns não tinham o conhecimento do nome de algumas ruas e a localização da sua 'casa/escola', proporcionando o diálogo entre eles por meio da troca de ideias e explicações, fato de extrema importância para a aprendizagem dos alunos.

Esse fato sinaliza o desconhecimento das técnicas de desenho o que dificultou a representação do esboço solicitado.

Esta ação envolveu ainda que de forma rústica a prática (situação/técnicas).

No **2º e 3º encontro**o pesquisador contextualizou o objeto plano cartesiano a partir do envolvimento de pontos de referência (localização e orientação) utilizando o mapa do município de Camboriú – bairro Monte Alegre, envolto pelas quadras e ruas.

Cada aluno recebeu uma folha com o mapa do bairro impresso em folha de papel milimetrado - formato A3, sendo solicitado que localizassem no mapa onde se situava a escola e sua casa, registrando com um **x** dentro da quadra **(**com caneta colorida) os dois lugares. As folhas tinham linhas horizontais e verticais.

O desafio era despertar nos educandos a reflexão e iniciativa de se construir duas retas que possuíssem um ponto em comum, chamadas de retas concorrentes (ou secantes), devendo formar um ângulo reto (de 90^{o}), sendo, portanto, perpendiculares entre si.

Essa ideia foi elaborada pensando no plano cartesiano, ou seja, numa rede de linhas perpendiculares, tomando uma linha horizontal e outra vertical como ponto de referência para a leitura das distâncias tanto na horizontal (eixo x) como na vertical (eixo y) enumeradas por meio de letras e números.

Diante da curiosidade dos alunos disponibilizou-se um momento para discussões, surgindo algumas dicas apresentadas pelos alunos/turma e colocadas para a análise da classe:

(1) A aluna IAP, T801 expõe: “professor, o caderno de classe, onde faço a presença dos alunos, tem quadrinhos, parecidos com estes. Se nós riscar forte dois deles, acho que vai dar certo”. Já o aluno FBB, T801 pergunta: “professor será que posso usar os quadrinhos tipo do jogo de xadrez?”.

(2) O aluno OJBS, T802 afirmou: “professor, já temos os quadrinhos com as distâncias iguais e localizamos a casa e a escola. Não dá pra aproveitar as linhas fortes do papel como base”. O pesquisador perguntou o que a turma achava da ideia? Os alunos então perguntaram para o colega: “como vamos fazer isso?”.

(3) A aluna JCS, T803, retrucou: “professor, não tenho nenhuma ideia de como se faz isso”, fala reforçada por mais alguns colegas.

(4) O pesquisador perguntou em todas as turmas, quem já foi ao cinema e como funcionava o processo de compra da poltrona (acento)? E eles ficaram pensando e conversando com o colega do grupo.

Findado os 15 minutos da aula destinados para debate e surgimento de ideias em cada turma, o pesquisador socializou com a classe a proposição de se aproveitar da folha de formato A3 a linha vertical (em negrito) e na linha horizontal, traçar com destaque mais forte outra linha. Todos entenderam e aceitaram, partindo para a prática.

Após o término do mapa do bairro, na parte inferior, sendo escrito dentro de cada campo da linha (da esquerda para a direita) os números. No espaço de encontro das retas os alunos registraram 0. E na linha vertical os alunos registraram de baixo para cima, dentro de cada espaço, as primeiras letras do alfabeto, começando pela letra A.

Em seguida foi solicitado que dessem as coordenadas da localização da escola e da casa na 'legenda', indicando o caminho na planta e escrevendo por meio de texto o roteiro do menor trajeto à seguir saindo de sua casa com destino para a escola. Destaca-se que:

a) Os alunos, por meio de reflexões no grupo e de forma investigativa, perceberam que para poder encontrar mais facilmente um determinado ponto no plano, precisamos de duas informações oferecidas pelo mapa: primeiro uma letra, representando a localização da linha e a segunda sendo um número, representando a localização da coluna. Ou seja, o mapa foi constituído por um sistema alfanumérico. Nesta etapa eles já haviam pesquisado o nome das principais ruas que circundam a escola/casa. Essa prática matemática esta alicerçada em Godino, ao defendermos que os conteúdos e seus conceitos podem ser introduzidos e trabalhados um a um com os alunos, envolvendo elementos unitários com características próprias ou funções únicas (forma elementar), mas sendo integrantes de um contexto maior (dentro de um sistema).
b) Os estudantes demonstraram pouca habilidade com a prática/manuseio da régua, sendo perceptível a ausência de conhecimentos sobre o que são as retas perpendiculares (ângulo reto = 90^{o}) no traçado das duas coordenadas sobre o plano cartesiano. Além disso, percebeu-se a dificuldade que os alunos têm para escrever o trajeto na forma discursiva (corrente), observando vários erros de Língua Portuguesa (ortografia, concordância e pontuação).

O **4º e 5º encontro** foi direcionado para a reflexão dos alunos no sentido de que em algumas situações precisamos encontrar um endereço de forma mais rápida e ágil, mas não sabemos exatamente sua localização. Então o que podemos fazer? Sendo aberto o tempo de 15 minutos em cada classe para reflexão dos alunos, e não obtendo nenhuma contribuição significativa, o pesquisador compartilhou sobre a ideia de poder-se recorrer a um guia de ruas que contém o mapa da cidade, que dependendo da área física poderá estar dividido em várias plantas ou não. Outro caminho para localizar é o caminho via tecnologia da informática, ou seja, o acesso via *Google Maps*.

O Sistema de Posicionamento Global (GPS), um sistema de navegação por satélite que fornece a um aparelho receptor móvel a posição do mesmo, permite que saibamos nossa localização exata na Terra, desde que tenhamos em mãos esse receptor de sinais GPS, informando a latitude, a longitude e a altitude com o auxílio de satélites em órbita ao redor da Terra. O controlador de voo de aeronaves conta com o aporte do GPS que monitora a rota a seguir durante a viagem para não colidirem com outras.

Acrescenta o pesquisador: uma aeronave conta também com um repetidor de rádio frequência, denominado de transponder[53], sendo um dispositivo de comunicação eletrônico complementar de automação, instalado a bordo da aeronave, tendo como objetivo receber, amplificar e retransmitir um sinal em uma frequência diferente ou transmitir de uma fonte uma mensagem pré-determinada em resposta à outra pré-definida 'de outra fonte'.

Alguns passos básicos foram observados para a localização das referências desejadas tendo em vista que o projeto estava sendo realizado na cidade de Camboriú S/C, no Bairro Monte Alegre:

(1) Selecionar no *Google Maps*, Camboriú – Santa Catarina;
(2) Clicar no ícone como chegar:
(3) **A** (local de saída): Rua onde reside o aluno, número de sua casa, Camboriú, Santa Catarina.
(4) **B** (local de chegada): Rua Monte Castelito, 39, Camboriú, Santa Catarina;
(5) Para melhor planejamento do percurso, clicar em uma das opções: vai "a pé", "transporte público" ou "carro".
(6) Percebendo que agora aparecem dois ícones "como chegar", escolher a opção que se encontra em um quadro abaixo do endereço indicado;
(7) O programa oferece opções de caminhos a seguir: "trajetos sugeridos" (dependendo da localização). Cabe ao usuário

---

[53] Abreviação de '*transmitter* – responder'.

escolher o melhor trajeto observando (distância em metro e o tempo a percorrer).

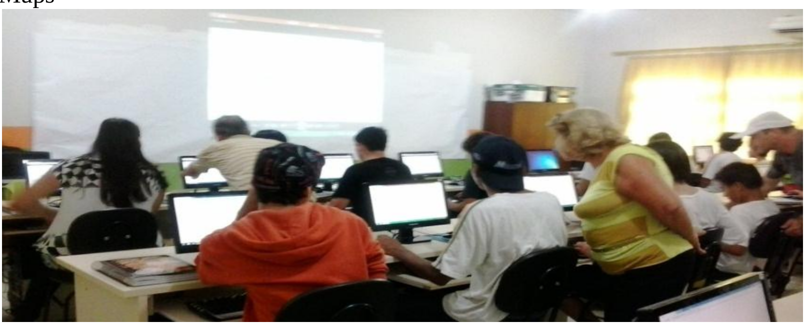
Nota: (a) o próprio programa orienta quanto ao caminho a ser seguido; (b) para salvar o texto do roteiro e a imagem do percurso, basta pressionar as teclas ***alt*** e, sem soltar, pressionar também a tecla ***print screen*** (prt sc).

Diante da curiosidade dos alunos e do agendamento antecipado do laboratório de informática para a realização desta atividade prática, encaminhou-se cada uma das três turmas conforme os dias programados (11/03/13, na 2ª aula – T802; 15/03/13, na 3ª aula com a T801, e na 5ª aula com a T803). No laboratório foram formados grupos com dois alunos e em alguns casos ficando um aluno por máquina, onde cada aluno de forma organizada, com a orientação do pesquisador e do professor de informática, seguia os passos e o preenchimento das informações nos espaços respectivos para obter a localização da escola – da sua casa, tendo como tarefa a descrição do trajeto a ser percorrido da casa até a escola, indicando o tempo a ser gasto a pé e a distância a ser percorrida pela pessoa.

Nas Figuras (09 a 13), mostra-se o momento em que são apresentadas as atividades aos alunos no laboratório de informática e o trajeto a ser realizado pelos mesmos, fazendo uso do Google Maps.

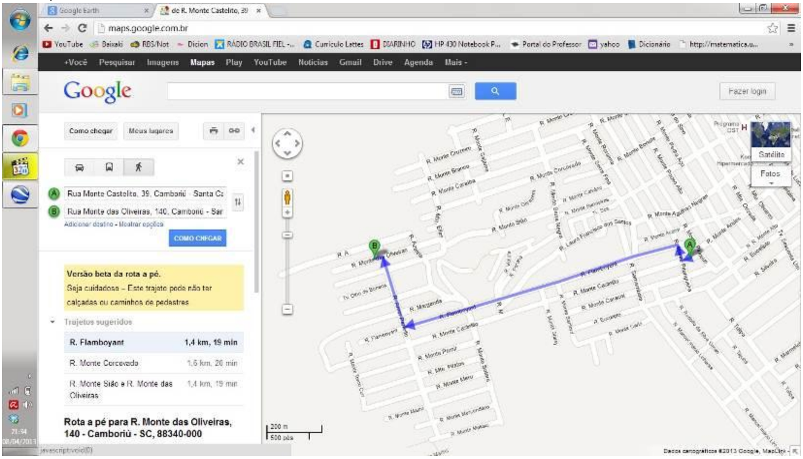
Pôde-se observar o interesse dos alunos em participar da prática matemática com olhar para a configuração institucional e pessoal (Figura 06), representando o objeto de estudo na linguagem figural e na forma natural (texto).

Figura 09 – Alunos da T802 em atividade prática: localização via Google Maps



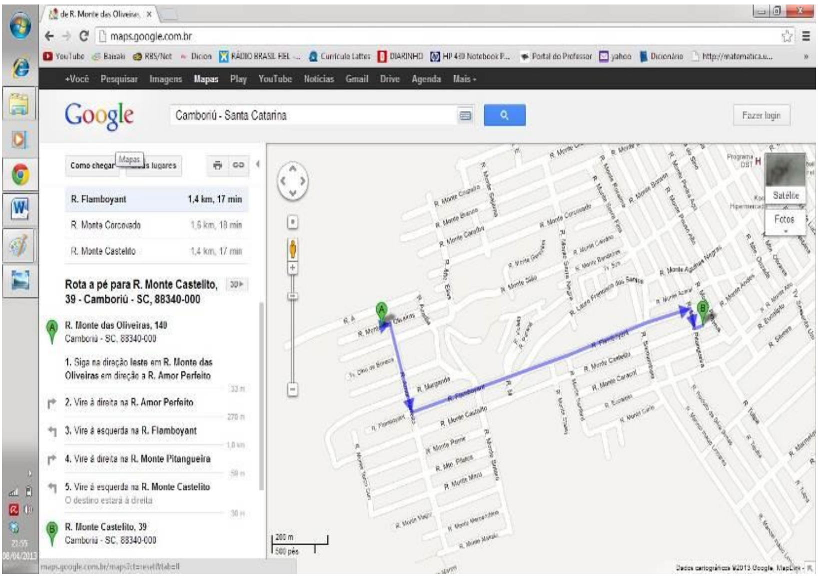
Fonte: Documentos do autor.

Figura 10 – Ilustração via Google Maps do trajeto da casa → escola - aluna DLP, da T802



Fonte: Documentos do autor.

Figura 11 - Ilustração via Google Maps do trajeto casa → escola indicando distância e tempo do trajeto e orientação do caminho a seguir. Aluna DLP, da T802



Fonte: Documentos do autor.

O acesso de todos os alunos a essa ferramenta no laboratório da escola, lhes permitiu além do uso da informática, efetuar uma leitura e compreensão de um mapa, resgatando o pensamento de espaço e forma.

O pesquisador também informou que caso houvesse interesse, os alunos poderiam estender essa atividade extraclasse em suas casas e/ou *lan house* colocando outras referências de saída e chegada.

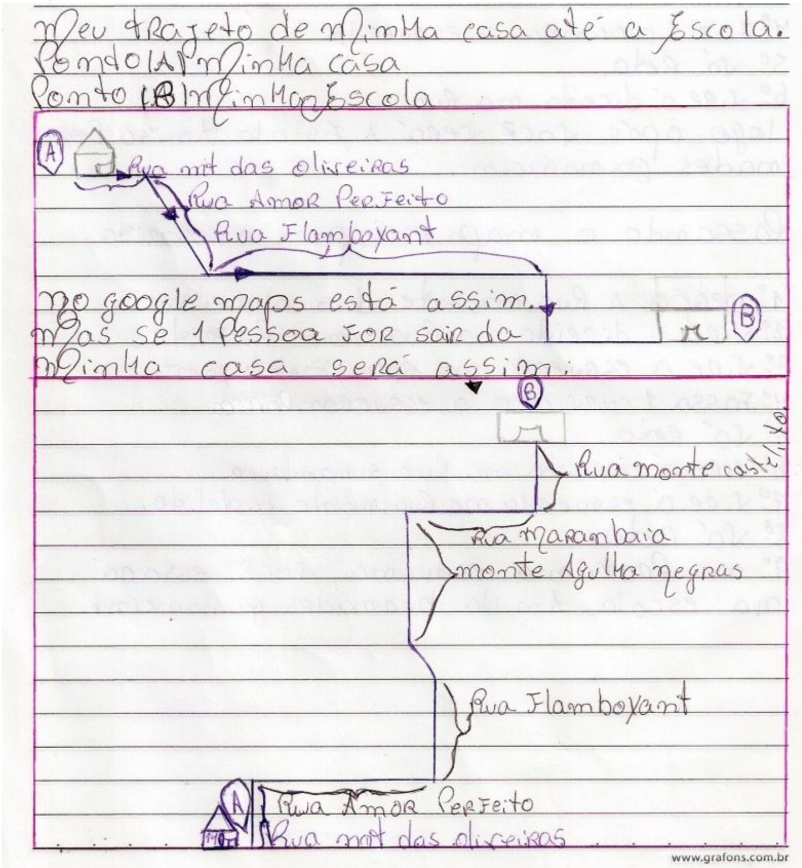
Nestas atividades os alunos puderam vivenciar a elaboração de forma rústica, por meio de um mapa do bairro, e pelo acesso à tecnologia via satélite propiciando rápida localização desde que exista acesso à internet e as condições metereológicas sejam propícias (tempo não esteja nublado).

Observou-se que 73 alunos (79,34%) conseguiram com êxito fazer a atividade proposta.

Chama-se atenção a uma das afirmações de Godino, de que em análise de atividades matemáticas, deve-se precisar em cada circunstância se nos referirmos a algo que se põe em jogo por si mesmo, ou se o objeto de estudo é um representante/componente de uma classe de objetos ou de um sistema. Nesta atividade verificou-se a habilidade dos alunos no uso da aplicação por meio dos computadores (*desktop*), destacando os pontos de referência e o caminho a ser seguido (tempo do percurso e a distância a ser percorrida entre os pontos).

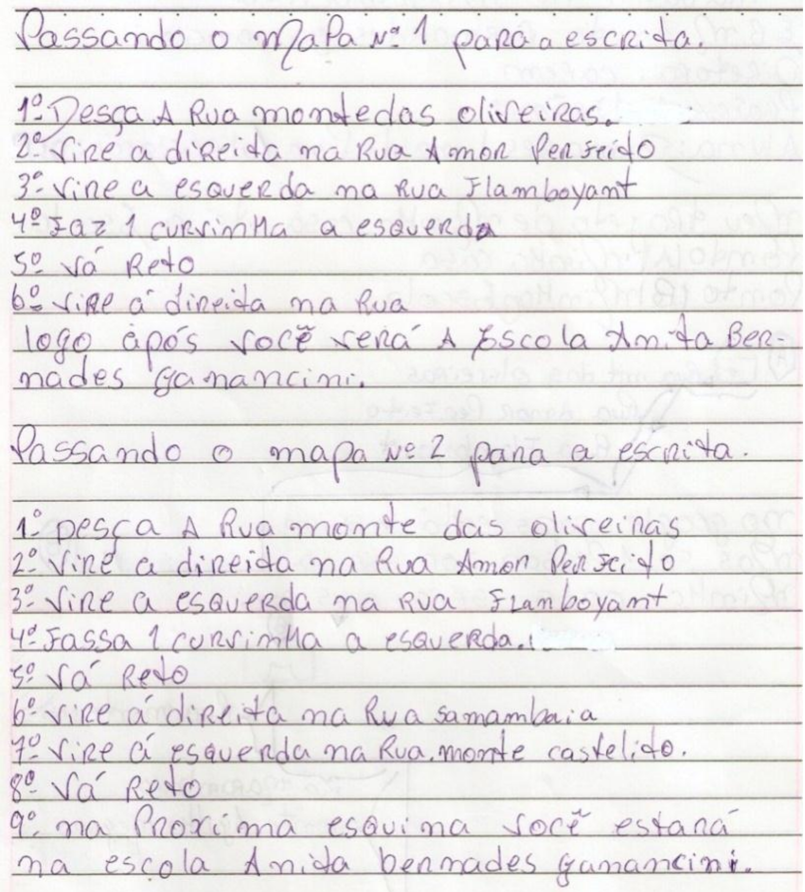
As Figuras (12 e 13) apresentam o mapa (desenho) e o trajeto (texto) elaborado por um dos alunos, referendando a linguagem na forma figural para a forma natural, envolvendo uma situação corriqueira do cotidiano. Observa-se nestas Figuras uma prática discursiva envolvendo a comunicação na forma de linguagem, tendo uma forma pessoal de tratar a situação-problema.

Figura 12 – Integralização de atividade: Mapa e texto elaborado pela aluna DLP, T802



Fonte: Documentos do autor

Figura 13 – Descrição do caminho a ser seguido elaborado pela aluna DLP, T802



Passando o Mapa nº 1 para a escrita.

1º Desça A Rua montedas oliveiRas.
2º Vire a direita na Rua Amor Perfeito
3º vire a esquerda na Rua Flamboyant
4º Faz 1 curvinha a esquerda
5º vá Reto
6º vire á direita na Rua
logo após você verá A Escola Anita Bernades Ganancini.

Passando o mapa nº 2 para a escrita.

1º desça A Rua monte das oliveiras
2º vire a direita na Rua Amor Perfeito
3º vire a esquerda na Rua Flamboyant
4º Fassa 1 curvinha a esquerda.
5º vá Reto
6º vire á direita na Rua samambaia
7º vire á esquerda na Rua. monte castelo.
8º vá Reto
9º na Proxima esquina você estará na escola Anita bernades ganancini.

Fonte: Documentos do autor.

Nessa atividade, apenas 19 alunos (20,66%) tiveram uma ou outra dificuldade em seguir os passos e localizar as referências dadas (escola/casa). Conforme relato dos alunos, atribui-se este fato à dificuldade cognitiva de compreender e seguir os passos indicados e até de digitar os dados necessários.

Em seguida foram orientados a fazer o registro em forma texto escrito, explicando o menor trajeto indicado no mapa virtual. Observando as manifestações verbalizadas por eles, notou-se que a maior dificuldade foi descrever o caminho indicado pelo *Google maps*.

Após explorar com os alunos as características e elementos que contemplam o mapa, lançou-se a questão: **o que devo fazer para facilitar a mobilidade numa cidade e como faço a localização de um determinado ponto no mapa?**

Os alunos TM, BSO e GAL (T801), APS, IA, GTAFS, MMA, NSS, VS e AGC (T802), IA, RSD, ESD e PJ (T803) de forma oral explicaram aos colegas que mobilidade é "poder ocupar o espaço urbano tendo acesso a transporte, trânsito e circulação de pessoas, bicicletas, motos, carros. Por isso é importante ter ruas paralelas e outras que as cortam formando as quadras, facilitando o trânsito".

O pesquisador complementou: "... ou seja, a ocupação do solo deve ser elaborada de maneira conjunta e harmoniosa, socialmente inclusiva e ecologicamente sustentável. Daí o fato da obrigatoriedade de cada cidade ter um plano diretor estratégico, elaborado com a participação da comunidade, tendo contribuições de urbanistas, técnicos em transportes, em trânsito e legisladores, de modo a diminuir o número de deslocamentos, proporcionando ao munícipe o acesso amplo e democrático ao espaço urbano".

Retomou-se nesse momento o desafio inicial de localização de um determinado ponto. Desta forma, quanto à localização de um determinado ponto no mapa, os alunos perceberam a importância de se traçar duas retas numeradas que se cruzam tendo um ponto de origem, formando um ângulo de 90^o (retas perpendiculares), sendo organizadas com espaçamentos iguais, para favorecer a localização do ponto, observando-se sua distância em cada um dos segmentos de reta.

No **6º** e **7º encontro** o pesquisador apresentou alguns traços históricos do objeto matemático plano cartesiano, mais precisamente das ideias de Nicole d'Oresme (Idade Média) e de René Descartes (Idade Moderna), além da evolução do conceito até os dias atuais.

Relatou-se que a formação do conceito de um elemento matemático, ou seja, da representação de um objeto pelo pensamento, por meio de suas características gerais ou pela ação de formular uma ideia por meio de palavras historicamente vai criando forma, quase sempre passando de mãos em mãos, diante de uma necessidade prática do ser humano para encontrar resposta a algo que o incomoda, seja ele real ou fictício, produzindo sentido ao saber. Evidentemente que a concepção do ser humano esta firmada no ato de conceber ou criar mentalmente, de compreender, de formar ideias, especialmente abstrações, chegando a uma noção, ou até um conceito. Apresenta-se a seguir o percurso histórico desse conceito:

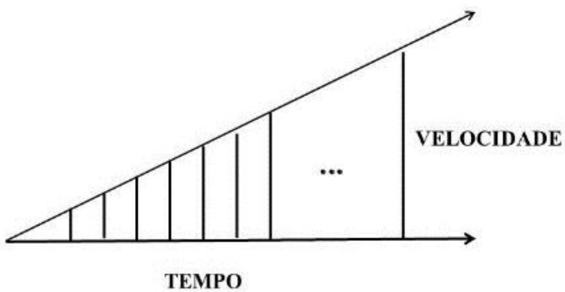
a) Ideias de Nicole d'Oresme

Uma das indagações do período medieval levantada por pesquisadores matemáticos era: 'será que é possível traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual as coisas variam?'

Este foi o pensamento que ocorreu a Nicole d'Oresme (1323-1382), filósofo e matemático francês, e que talvez tenha sido a primeira manifestação do que atualmente chamamos representação gráfica de uma função, e que no fim do período médio era conhecida como latitude das formas.

Oresme em 1361 descreveu na forma gráfica a dependência entre a velocidade e o tempo usando linhas verticais e horizontais, para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo da reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitude de um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. "Os termos latitude e longitude que Oresme usou são equivalentes num sentido amplo à ordenada e abscissa e a sua representação gráfica assemelha-se a geometria analítica" (BOYER, 1974, p. 193). O pesquisador se detinha a representações totalmente imaginárias e qualitativas, jamais utilizando medidas, pois naqueles dias os instrumentos de análise eram inadequados e faltavam aos matemáticos da época técnicas algébricas e geométricas, aparecendo somente mais tarde. Seu objetivo era permitir que as pessoas tivessem a compreensão mais breve e simples da natureza das mudanças. A Figura 14a seguir, ilustra a forma gráfica da correspondência entre a velocidade e o tempo, elaborada por Oresme.

Figura 14 – Forma gráfica da correspondência entre a velocidade e o tempo segundo Oresme



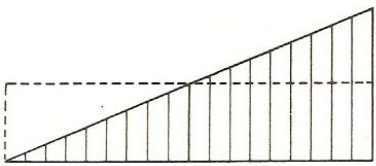
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Boyer (1974, p. 192) expõe que:

> [...] As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta, e se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos ordenadas) preencherá um triângulo retângulo. Como a área desse triângulo representa a distância percorrida, Oresme forneceu assim uma verificação geométrica da regra de Merton, pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final.

Observe na Figura 15 a representação geométrica feita por Oresme:

Figura 15 – Representação geométrica da regra de Merton, elaborada por Oresme



Fonte: Boyer (1974, p. 193).

Ele representou de forma bem primitiva apenas as relações lineares, não conseguindo imaginar como representaria as curvas. Em 1360, generalizou a teoria das proporções, sendo equivalentes com as regras atuais, de potências de bases iguais; além de desenvolver o uso de notações específicas para potências fracionárias, descreveu verbalmente a equação de uma reta.

Em fins do século XVI e a partir do século XVII deu-se início de forma mais intensa os estudos e pensamentos contribuindo para a evolução da noção de ‘relação entre as grandezas e suas dependências’.

b) Ideias de René Descartes

Um dos estudiosos que mais contribuiu para facilitar as localizações[54] utilizando códigos foi o filósofo francês René Descartes (1596-1650), considerado o pai da filosofia moderna. Enquanto pesquisador matemático aplicou de forma independente a álgebra à geometria. Segundo Boyer (1974, p. 246) observa-se o crescimento cumulativo progressivo da matemática "A matemática cresce por acreções, com pouca necessidade de descartar irrelevâncias, ao passo que a ciência cresce em grande parte por substituições quando coisas melhores são encontradas". Logo, não é surpresa à matemática que os fundamentos da geometria analítica de Descartes foram motivados por uma tentativa de voltar ao passado. "Se Descartes em 1628 estava ou não em completa posse de sua geometria analítica não é claro, mas a data efetiva da invenção da geometria cartesiana não pode ser muito posterior a isso" (BOYER, 1974, p. 247).

A geometria cartesiana hoje é sinônimo de geometria analítica, mas o objetivo principal de Descartes era muito diferente dos textos modernos. Veja a frase: "Todo problema de geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para a construção." (BOYER, 1974, p. 247). A afirmação indica que o objetivo visava geralmente uma construção geométrica, e não necessariamente a redução de geometria à álgebra. Na verdade pode ser caracterizado pela tradução de operações algébricas em linguagem geométrica.

Em duas obras publicadas em 1637, vemos que sua ideia para esse sistema colaborou para dar mais um passo ao conceito de função.

Segundo Boyer (1974), na obra 'Discurso sobre o Método' na segunda parte, Descartes apresenta a ideia de um ponto ou objeto numa superfície, usando dois eixos que se interceptam, e na primeira parte da obra 'La Géométrie' com o mesmo título 'Como os cálculos de aritmética se relacionam com operações de geometria'; já na segunda parte descreve 'Como a multiplicação, a divisão, e a extração de raízes quadradas são efetuadas geometricamente', fazendo o que até certo ponto tinha sido feito de Al-khowarizmi a Oughtred. Boyer (1974, p. 247) afirma que fornecia um correspondente geométrico de operações

[54] Porém, mesmo em outras épocas, essas situações já estavam presentes, como na navegação e na astronomia.

algébricas. Mostra que as cinco operações aritméticas correspondem a construções simples com régua e compasso, justificando assim a introdução de termos aritméticos em geometria".

Em La Géometrie, pela primeira vez de modo claro e de forma mais detalhada, Descartes sustentava:

> A ideia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas correspondendo aos valores dados da outra. Assim distingue a classe das curvas algébricas (curvas geométricas, nome dado por ele): todos os pontos destas curvas estão em relação com todos os pontos de uma reta, com a possibilidade de representar esta relação por uma equação, a mesma para cada ponto da curva dada (OLIVEIRA, 1997, p. 18).

Sua expressiva contribuição volta-se para a geometria analítica, apresentando que uma equação de duas variáveis poderia ser representada geometricamente por meio de uma curva, indicando a dependência de duas variáveis (BOYER, 1974). Seus trabalhos também permitiram o desenvolvimento de áreas científicas como o cálculo infinitesimal e a cartografia.

c) Na atualidade (período pós-moderno), verifica-se que os livros didáticos simplificam o caminho seguido pelos seus criadores ou dão outra ordem ao caminho já percorrido até a elaboração dos conceitos. Um esboço e ordenação são mostrados na apresentação de um conceito de forma mais didática onde, na história da matemática, este desenvolvimento sofreu vez ou outra uma ruptura, períodos de estagnação e retornos ao longo do processo.

Neste momento, foram retomadas as situações reais, por exemplo, uma imagem representando a planta baixa de uma sala e o nome dos alunos que sentam em cada carteira, planta baixa de uma cidade/localidade ou a posição de um assento num cinema, dentre outras, conduzindo-os para a ideia das coordenadas do plano cartesiano onde a reta **x** representa as fileiras e a reta **y** representa a ordem das carteiras em cada fileira, enfim chegando a um conceito.

O pesquisador explicou que a representação de um ponto por meio de coordenadas é possível devido ao plano cartesiano desenvolvido por René Descartes. Descartes introduziu a noção de coordenadas, baseando-a em dois eixos que se cruzam perpendicularmente em um único ponto.

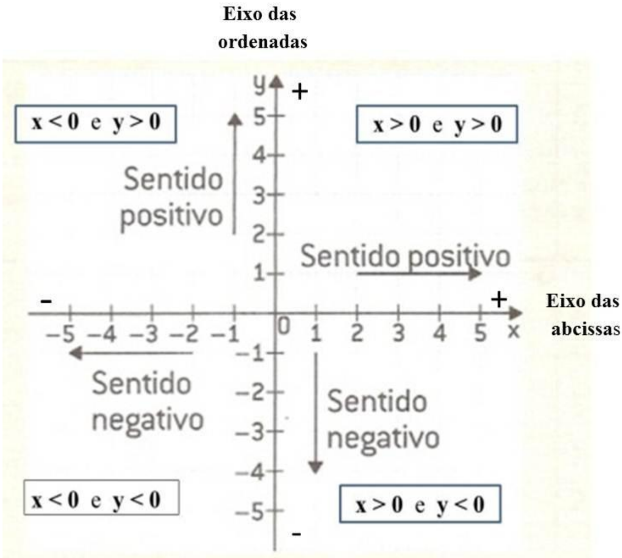
Em concordância com o pensamento de Ribeiro (2009d, p. 143), chamou-se atenção para o fato de que:

> O método apresentado era para localizar pontos e figuras, numa rede de linhas perpendiculares, por meio de letras e números. Mais tarde, as letras foram substituídas por números, e essa rede de linhas perpendiculares (retas numeradas) dando a noção de coordenada evoluiu para o que hoje chamamos plano cartesiano.

Para melhor entendimento, acrescentou-se que a palavra ‘cartesiano’ vem de ‘*Cartesius*’ que, em latim, significa Descartes. Destaca-se que o plano cartesiano é composto por duas retas numeradas, uma horizontal, que recebe o nome de eixo das abscissas (eixo x) e uma reta vertical, que recebe o nome de eixo das ordenadas (eixo y). Ressaltou-se ainda que cada reta é numerada, utilizando-se uma unidade de medida. As setas indicam a orientação crescente de cada reta. O ponto de interseção dessas duas retas é chamado de origem O, de coordenadas (0, 0). Sendo que cada ponto correspondente é a representação geométrica do par ordenado (x, y). Diz-se que (x, y) são as coordenadas do ponto.

Nesse momento o pesquisador apresentou por meio de uma ilustração o plano cartesiano e seus componentes com as desigualdades envolvidas, observando a orientação do sentido de cada eixo, conforme é ilustrado na Figura 16 a seguir:

Figura 16 – Plano cartesiano e suas regiões



Fonte: Elaborado pelo autor.

Diz-se que um par de números, dispostos numa certa ordem determinam a posição de um ponto no plano. Onde o primeiro representa a distância medida horizontalmente, e o segundo representa a distância medida verticalmente em relação a um ponto P (x, y).

Observando um plano cartesiano também nota-se que ele fica dividido pelos eixos cartesianos em quatro partes, chamadas de quadrantes. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas. Pode-se também expor na linguagem de forma algébrica a relação quanto ao sentido dos eixos e as desigualdades envolvidas.

Dando sequência, os alunos foram estimulados por meio de diálogo entre os elementos do grupo, **a citar exemplos onde aparece e/ou pode ser utilizado o objeto matemático plano cartesiano**. Devido ao horário da aula estar findando, deixamos essa atividade como desafio de pesquisa extraclasse, para que cada aluno registrasse numa folha de caderno e entregasse na próxima aula de matemática, para então compartilharmos com a sala.

Nessa ação, os alunos foram colocados em condições de descobrir, formalizar perguntas e problemas, cujas respostas, óbvias ou não, demonstravam a capacidade de articulação de cada um.

Considerando a realidade na qual a escola está inserida, sendo visível perceber uma cultura bastante flexível e até divergente quanto à questão de valores e atitudes, o que corresponde à realidade vivenciada socialmente pelos adolescentes, com muitas famílias desestruturadas, sem preocupação com a formação cidadã do filho, o pesquisador notou após três encontros um avanço, pois 40 alunos (43,47%) realizaram a tarefa e os 52 alunos (56,52%) restantes realizaram de forma incompleta.

Tamanha foi a nossa surpresa ao socializar com as turmas, observar que referente à mobilidade e localização, todos os alunos enfatizarem que ruas paralelas, ruas perpendiculares, e cidades bem planejadas proporcionam um fluxo mais rápido do trânsito, uma melhor mobilidade, um melhor planejamento urbano, fazendo referência às duas primeiras atividades práticas realizadas com eles, ou seja, da planta que eles desenharam e da plantado Bairro Monte Alegre fornecida a cada aluno.

Com relação ao uso do objeto matemático plano cartesiano, que permite uma série de operações, entre elas, de localização, relacionar grandezas, etc., as respostas dadas foram socializadas pelos alunos junto a sua turma.

A Figura 17 apresenta o texto elaborado pela aluna SA, da T802, sendo compartilhado com os alunos/turma registrando-se em cada classe outras contribuições dos colegas. Registra-se a seguir apenas os exemplos diferentes, tais como:

1) Exames médicos; numa partida de futebol para dar a localização (OJBS, T803).
2) Telas de equipamentos de navegação, corte de chapas via computador para uso de maçarico, plantas para traçados de ruas (PCE, T803).
3) Sistema de Posicionamento Global (GPS), informando a latitude, a longitude e a altitude (TVA, T803).
4) Nas aplicações, desde a construção de um simples gráfico até os trabalhos relacionados à cartografia: localização geográfica, pontos estratégicos de base militar, localização no espaço aéreo, terrestre e marítimo (JH, T801).
5) Escolha de uma poltrona num cinema (TASC, T802).
6) Em arquibancadas de jogos de futebol (LZM, T802).
7) Em um avião, para localizar poltronas; em um ônibus para localizar poltrona (ÉFT, T802).

Figura 17 – Texto onde utilizamos o Plano Cartesiano; da aluna SA, T802

Onde utilizamos o Plano Cartesiano em nosso dia-a-dia?

O plano Cartesiano é muito utilizado na construção de gráficos de funções, onde os valores relacionados à X constituem o domínio e os valores de y, a imagem da função.
Vemos inúmeras aplicações, desde a construção de um simples gráfico até os trabalhos relacionados à cartografia, localizações geográficos, temos exemplos como plantas de construção, exames medicos, plantas para traçados de ruas, mapas em gradediagramação de revistas, usamos para representar informações de costura, corte de chapas para um veículo, fabricação de pisos.
Podemos associar o Plano Cartesiano com a latitude e a longitude, temos relacionados aos estudos geográficos e a criação do atual sistema de posicionamento o GPS. Um exemplo de utilização do GPS são os aviões, para não se colidirem são monitorados e informados e informados em qual rota devem seguir viagem, pontos de bases militares localizações no espaço aéreo, terrestre e marítimo.

Fonte: Documentos do autor.

Enquanto educador, além de estimular nos adolescentes a questão de valores e atitudes, tendo em vista à realidade vivenciada socialmente por eles, procurou-se trabalhar os objetos ‘institucional e pessoal’ correspondentes. Nesta fase o desafio aumentou, exigindo nos encontros que se seguiram, a busca de estratégias para elevar a auto estima desses alunos. Todos os encontros foram acompanhados pelo pesquisador buscando motivar os alunos esclarecendo as dúvidas pendentes, também sorteando nomes para as contribuições e explicações pertinentes ao tema em curso.

Momento 2 (**8º** ao **18º encontro**) – *O pesquisador, com a colaboração dos alunos, vivenciou uma sequência de ensino acerca do tema, envolvendo situações-problema tendo como suporte o plano cartesiano e suas regiões, buscando as conversões nas formas natural, algébrica e gráfica, visando ao tratamento da informação.*

No **8º e 9º encontros,** o pesquisador trabalhou a expressão/conteúdo (significante/significado) sob o ponto de vista de Godino (2002) elaborando a configuração epistêmica e as entidades matemáticas envolvidas na situação-problema, despertando a atenção dos alunos quanto às relações mútuas entre um antecedente (expressão, significante) e um consequente (conteúdo, significado), colocadas por um sujeito (pessoal ou institucional) de acordo com determinado critério ou código de correspondência, proporcionando códigos e hábitos instruindo os alunos na busca da consolidação do conceito de plano cartesiano e os termos que se devem pôr em correspondência nas diferentes formas de conversão e tratamento com registros segundo Duval (2011a, 2011b) por meio de atividades propostas e realizadas em sala.

Com o intuito de buscar atenção das turmas/alunos foram indicados de forma aleatória com base no número da chamada, alguns colaboradores para expor sua compreensão ao grupo referente:

a) Como é formado o plano cartesiano;
b) Onde se localizam o (1º, 2º, 3º, e 4º) quadrantes;
c) O nome dado para os eixos **x** e **y;**
d) Os sentidos positivos e negativos associando à linguagem algébrica $x > 0$, $x < 0$, $y > 0$, $y < 0$, tendo como referência os quadrantes (eixo **x**: para direita - esquerda; e eixo **y**: para cima - baixo);
e) Como se representa algebricamente um ponto **P** qualquer no plano cartesiano?;
f) Mudando a ordem das Coordenadas, altera a localização do ponto no plano, por exemplo: P (x , y) para P (y , x)?;
g) Onde se localiza a origem e quais são os valores do ponto de encontro do eixo x (abscissa) com o do eixo y (ordenada)?;
h) Quando numa Coordenada (ponto ou par ordenado) aparece um valor sendo fração, como proceder para localizá-lo no eixo x ou no eixo y?;
i) Dadas as coordenadas do ponto na forma algébrica, quais os procedimentos a seguir para colocar na forma gráfica?;
j) Dada a localização do ponto representado na forma gráfica, quais os procedimentos a seguir para colocar na forma algébrica?;
k) Dadas as coordenadas do ponto na forma discursiva, como representar na forma gráfica, algébrica e vice-versa?

Numa das classes (T802), um dos alunos (aluno JFK) perguntou ao pesquisador: “professor, consegui entender o que os colegas falaram e as dicas dadas pelo professor, mas afinal como posso definir plano cartesiano?”. O pesquisador então retomando o percurso histórico visto anteriormente, explicou para a classe, e posteriormente para a T801 e T803, que:

1) Em matemática, um **plano** é um objeto geométrico infinito a duas dimensões, e pode ser definido de várias formas equivalentes.
2) **Cartesiano:** é um adjetivo que se refere ao matemático francês e filósofo Descartes que, dentre outras coisas, desenvolveu uma síntese da álgebra com a geometria euclidiana. Seus trabalhos permitiram o desenvolvimento de áreas científicas como a geometria analítica, o cálculo e a cartografia.

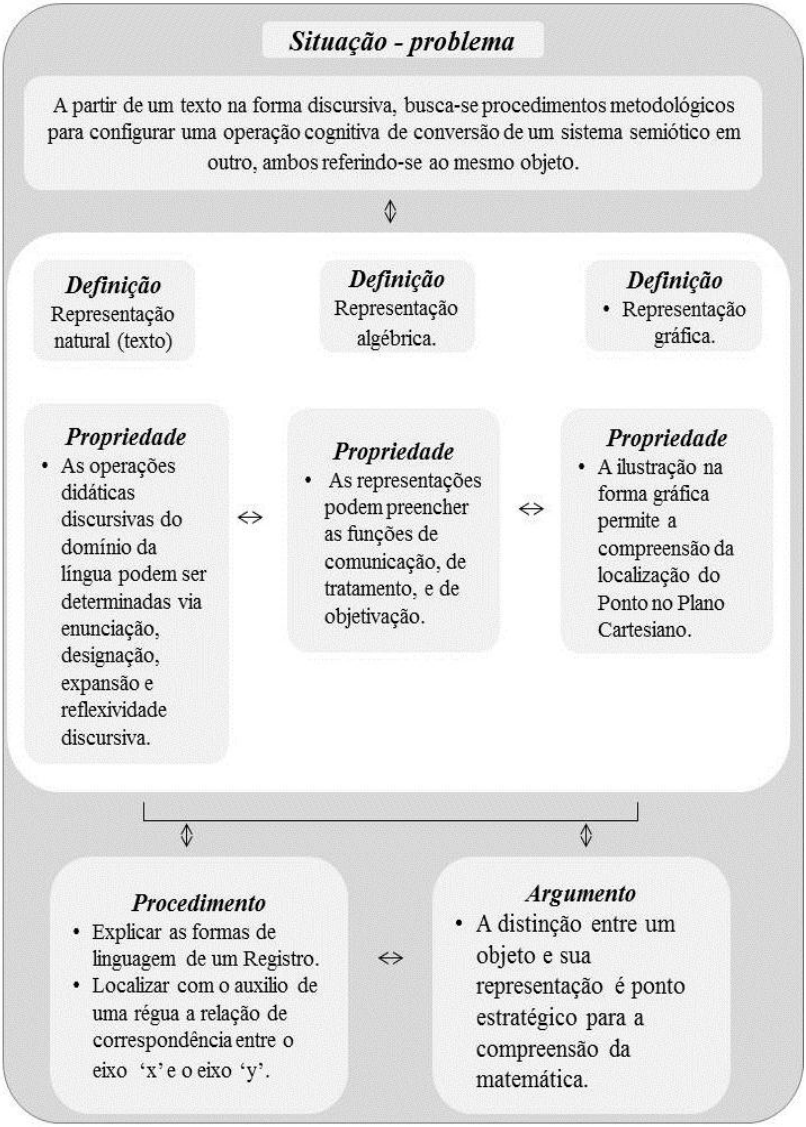
Logo, o objeto matemático **plano cartesiano** é feito através da junção de dois eixos, perpendiculares entre si que se cruzam no ponto 0, o qual é a origem de ambos os eixos. O eixo horizontal é chamado de eixo das abscissas (eixo x). O eixo vertical é chamado de eixo das ordenadas (eixo y). Os eixos são divididos em quatro ângulos retos chamados quadrantes enumerados no sentido anti-horário.

Cada ponto do plano cartesiano é identificado por um par de números chamados de coordenadas, determinando uma posição sobre a superfície. Nesse caso, um dos números determina a distância medida horizontalmente e o outro, a distância medida verticalmente. Para obter um ponto P, basta traçar as perpendiculares ao eixo x e y. Nas situações matemáticas práticas, cada eixo é nominado e enumerado observando a grandeza correspondente, acompanhada por sua respectiva unidade de medida.

Enfim, despertou-se nas turmas o envolvimento na busca do entendimento e formalização do conceito das partes componentes de um plano cartesiano e as formas de representação (natural, algébrica, gráfica), entendendo o processo de transformação delas.

Nos Quadros(26 e 27), veem-se as ‘configuração epistêmica’ e ‘entidades matemáticas’.

Quadro 26 – Configuração epistêmica: estudo da conversão entre os registros na forma natural, algébrica e gráfica



Fonte: Elaborado pelo autor.

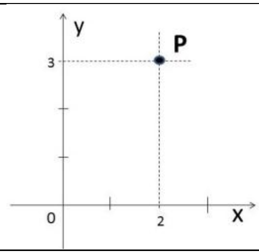
Quadro 27 – Entidades matemáticas: as unidades elementares de análise da situação-problema ‘formas de representação de um objeto matemático’

Prática	**Linguagem**	**Teoria**
Situação • Tradução de uma operação significável (linguística, simbólica, gráfica) apresentando as representações solicitadas.	***Termo e expressões:*** • Discurso matemático. • Plano Cartesiano. • Representação de um objeto matemático.	***Conceitos*** • Plano Cartesiano e suas regiões. • Formas de linguagem da localização de um ponto no plano cartesiano.
Técnicas • Após leitura do Registro apresentado, elaborar as outras formas de registro. • Compreender a mobilização entre as representações.	***Notações*** • Do ponto: P (x ; y). • Do plano cartesiano. • Texto discursivo.	***Propriedades*** • Ponto. • Registro gráfico. • Registro algébrico. • Registro natural

Fonte: Elaborado pelo autor.

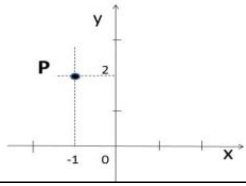
Nos Quadros (28 a 30) são apresentados os exemplos de atividades contextualizadas exploradas em sala com a participação dos alunos visando à compreensão do tema.

Quadro 28 – Atividade ‘a’ em sala: alunos desenvolvendo a ideia da conversão do registro da forma natural→ forma algébrica e forma gráfica

Natural	**Algébrica**	**Gráfica**
Represente na forma simbólica e na forma gráfica o ponto “P” cujas coordenadas, são: no eixo abscissa o valor dois e no eixo da ordenada o valor três.	P (2 , 3)	

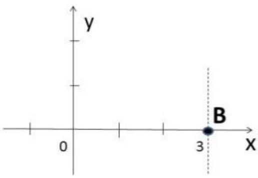
Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 29 – Atividade ‘b’ - Momento 2: alunos desenvolvendo a ideia da conversão do registro da forma algébrica → forma gráfica e forma natural

Algébrica	Gráfica	Natural
Sendo P (-1 , 2), represente na forma gráfica e descreva o significado do ponto.		O ponto P cujas coordenadas são: no eixo x igual a menos um e eixo y igual a dois.

Fonte: Elaborado pelo autor.

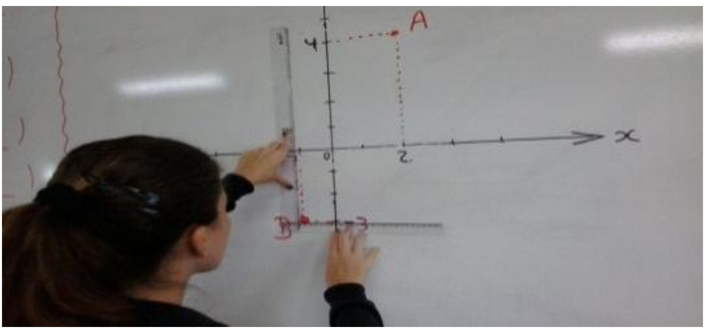
Quadro 30 – Atividade ‘c’ - Momento 2: alunos desenvolvendo a ideia da conversão do registro da forma gráfica → forma natural e forma algébrica

Gráfica	Natural	Algébrica
Observando o gráfico transcreva para forma discursiva e forma simbólica. 	O ponto B tem como coordenadas no eixo x (da abscissa) o valor três e no eixo y (da ordenada) o valor zero.	B (3 , 0)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas Figuras (18 a 20), pode se observar algumas imagens das atividades práticas realizadas na lousa, envolvendo o professor e os alunos das turmas (T801, T802, T803).

Figura 18 – Aluna IAP da T802, mostrando como localizar um ponto no plano cartesiano



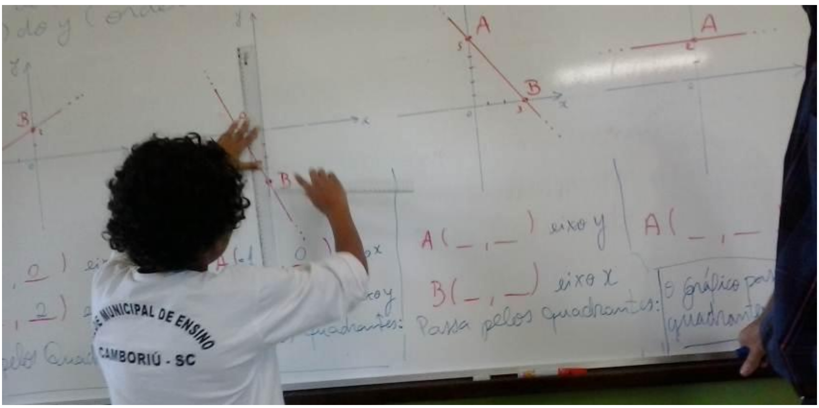
Fonte: Documentos do autor.
Nota: Explorado com a participação dos alunos.

A classe pôde verificar que para localizar um ponto no plano cartesiano deve-se:

a) Localizar o valor correspondente na abscissa (horizontal) traçando uma reta auxiliar, paralela ao eixo vertical.
b) Localizar o valor correspondente na ordenada (vertical) traçando uma reta auxiliar, paralela ao eixo horizontal.
c) A intersecção das retas auxiliares é a coordenada da localização do ponto P (x, y).

Na T801 o aluno JFK pediu a palavra e disse: "galera, para marcar um ponto é só a gente correr uma régua no eixo x (paralela ao eixo y) observando o valor dado à x; correr outra régua no eixo y (paralela ao eixo x) observando também o valor dado à y. O encontro das réguas nos fornece as coordenadas do ponto". Na imagem das Figuras (19 e 20), pode-se notar que o aluno posiciona corretamente as coordenadas do ponto localizado no eixo y (ordenada) e no eixo x (abscissa). Ele, simplesmente projetou o ponto no eixo x, lendo o valore em seguida projetou o ponto no eixo y, lendo o valor. Em seguida, escreveu na lousa as coordenadas do ponto.

Figura 19 – Aluno JFK da T801, com o uso de réguas mostra para a plateia como se interpreta um registro gráfico obtendo um registro algébrico do ponto B



Fonte: Documentos do autor.

Nas turmas T802 e T803 os alunos perguntaram ao professor se o processo poderia ser o mesmo quando temos um ponto no gráfico e queremos passar para a forma algébrica. Então o professor pediu a colaboração dos alunos, para que de forma alternada apresentassem para a classe como se projeta um ponto no plano cartesiano, com relação ao eixo x e ao eixo y. A Figura 20apresenta dois alunos convertendo o registro gráfico para o algébrico sob a observação dos colegas de classe.

Figura 20 – Os alunos KB e GWP da T802, mostrando para a classe a conversão na forma gráfica para a forma algébrica

Fonte: Documentos do autor.

Nestas atividades foi possível constatar que os alunos, pouco a pouco, iam tendo maior habilidade no uso da régua, fazendo a correspondência entre o ponto de encontro delas, dando as coordenadas e/ou localizando o ponto num dos quadrantes e/ou eixos. Eles vivenciaram as conversões entre a linguagem na forma algébrica para a forma gráfica e vice-versa, estando de acordo com as ideias de Duval (2003, p. 22) ao sustentar que é a operação cognitiva de conversão dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática. Para o autor é necessário mobilizar a conversão, no mínimo, entre duas formas de registro.

O desafio nessa etapa, segundo Duval (2004, p. 89) são as três funções meta-discursivas (comunicação, tratamento e objetivação).

No **10º encontro**, buscando o interesse e participação espontânea dos alunos do 9º Ano do EF - turmas (801, 801, 803), o pesquisador e cada turma escolheram o nome de um aluno para abrir uma microempresa - no ramo da produção de salgadinhos (coxinha, pastel, bolinho de carne, risoles, etc.). A atividade envolveu inicialmente um registro representado na forma tabular, na qual cada aluno pôde observar e fazer a leitura das grandezas envolvidas, efetuando a correspondência entre (receitas e despesas: ‘forma tabular’) do primeiro semestre da empresa, elaborando uma representação na forma algébrica (pares ordenados: ‘pontos’). Dando sequência, cada aluno elaborou a representação gráfica.

Em seguida o pesquisador perguntou aos alunos qual a compreensão deles referente às informações apresentadas no gráfico. Grande parte dos alunos disse: “professor, é só olhar o quadro para entender o gráfico”. O pesquisador retrucou: olhar o quê? Então alguns alunos explicaram na forma verbal, sua compreensão das informações do quadro relacionando-as coma ilustração apresentada. Diante das respostas dadas, foi solicitado a redação de um texto tratando a informação vista.

Na Figura 21, apresenta-se toda a sequência realizada na Atividade ‘d’:

Figura 21 – Atividade ‘d’ - Momento 2: alunos desenvolvendo as formas de conversão do registro (algébrico → gráfico → natural)

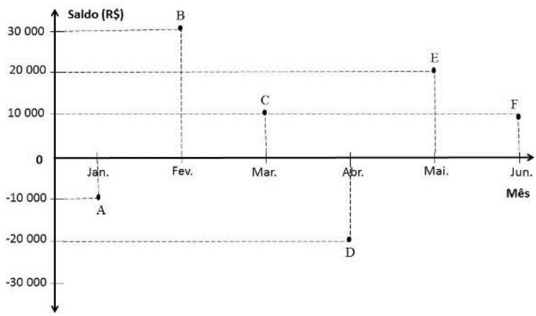
Uma empresa de salgadinhos registra todo semestre o Saldo (**S**) mensal de seus negócios **(S = Receita – Despesa)**. Observando a tabela do primeiro semestre, elabore:

Mês	**Jan.**	**Fev.**	**Mar.**	**Abr.**	**Mai.**	**Jun.**
Receita (R$)	60.000	75.000	72.000	37.000	80.000	74.000
Despesa (R$)	70.000	45.000	62.000	57.000	60.000	64.000

a) Tabela (*forma “tabular – algébrica”,* ou seja, *forma discursiva* “sentido bidimensional”: **Saldo** versus **Mês**).

Ponto	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Mês (Sem.)	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.
Saldo (R$)	-10.000	30.000	10.000	-20.000	20.000	10.000

b) **Gráfico**: Saldo versus Mês.



“Continua”

“Conclusão”

Figura 21 – Atividade ‘d’ - Momento 2: alunos desenvolvendo as formas de conversão do registro (algébrico → gráfico → natural)

c) **Texto** discorrendo sobre as informações contidas no Gráfico. A figura ilustra o saldo de uma empresa de salgadinhos no primeiro semestre sendo que: em janeiro o saldo foi de 10 mil reais negativos; em fevereiro foi de 30 mil reais; em março foi de 10 mil reais; em abril foi de 20 mil reais negativos; em maio foi de 20 mil reais; e em junho foi de 10 mil reais.

Fonte: Elaborado pelo autor.
Nota: Explorado com a participação dos alunos.

Acompanhando a atividade transcrita por eles no caderno quanto ao registro na forma tabular/algébrica, pôde-se constatar que a maioria dos alunos (78%) realizou a correspondência entre as grandezas. Alguns até ousaram relacionar a ideia do aumento da receita (crescimento) e a diminuição da receita (decrescimento). Desta forma percebe-se a ligação com a ideia de Duval (formas de registro) e de Godino (distinção entre o conhecimento institucional e pessoal).

Apenas 43% dos alunos tiveram dificuldades para elaborar o gráfico da situação-problema. E, aproximadamente 62% tiveram dificuldade para descrever a leitura do gráfico e/ou da tabela, expressa na forma tabular para a forma textual (natural).

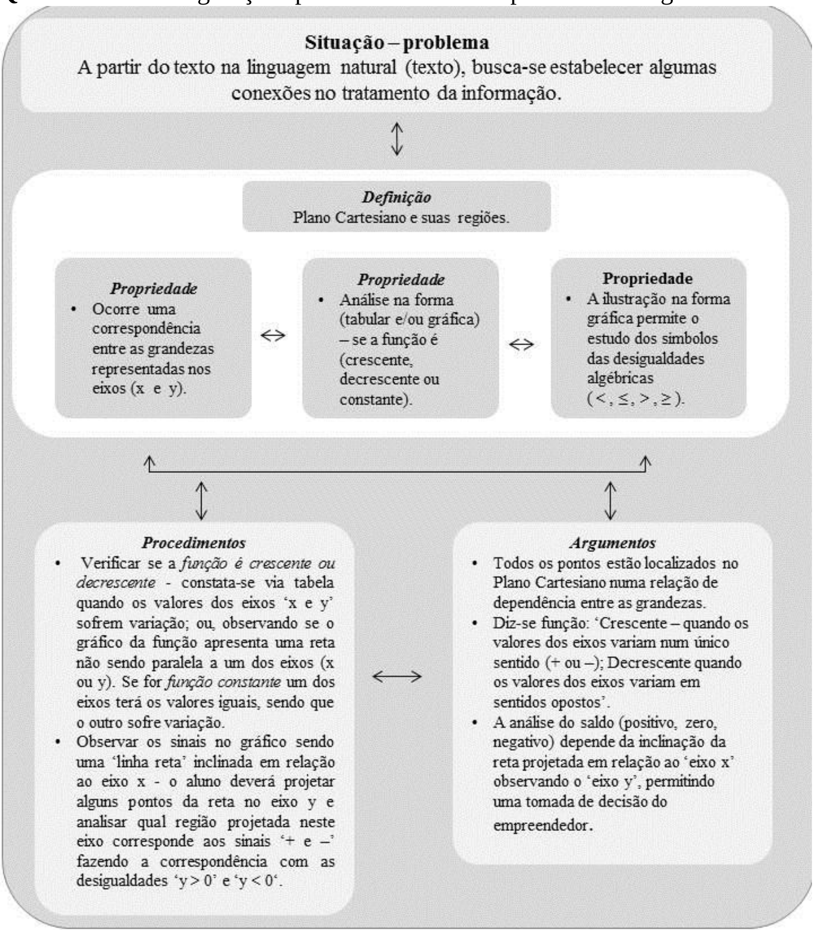
Registra-se neste momento, que o pesquisador e os alunos vivenciaram a compreensão dos outros alunos e deles próprios quanto à complexidade da organização visual da informação e da comunicação em representações gráficas no plano cartesiano. A dificuldade inicial deles foi de visualizar e compreender a relação de dependência entre Saldo versus Mês, preenchendo os campos em aberto da tabela (item a) da Figura 33.

Nos **11º** e **12º encontros,** o autor sorteou o nome de uma menina da sala no intuito de abrir ficticiamente uma empresa de confecção – ramo camisetas. Algumas observações sobre empreendedorismo foram compartilhadas (as despesas básicas, marketing, vendas, investimento). Em seguida, deu-se início a elaboração de texto escrito (natural) buscando outras formas de conversão.

Amparado na teoria de Godino, apresenta-se no Quadro 31, a configuração epistêmica de uma situação-problema realizada com os alunos, onde os conceitos na linguagem matemática podem ser trabalhados para a compreensão das entidades matemáticas envolvendo o jogo de trânsito entre os diferentes registros.

Já o Quadro 32, procura contextualizar a prática, a linguagem e a teoria, dentro do enfoque ontosemiótico, com relação à atividade proposta.

Quadro 31 – Configuração epistêmica: estudo do plano e suas regiões



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 32 – Entidades matemáticas: as unidades elementares de análise da Situação-problema “Saldo versus produção de peças”

Prática	Linguagem	Teoria
Situação Texto elaborado contendo uma expressão matemática; busca-se a análise das possibilidades de saldo da Empresa constituída em correspondência com a sua produção.	***Termo e expressões*** • Plano Cartesiano e as grandezas envolvidas. • Gráfico: reta representando uma função (crescente ou decrescente). • Regiões ocupadas no plano e a interpretação geométrica quanto a inclinação da reta e os sinais (+ e -) e símbolos ($>, \geq, <$, e $\leq$). • Formas de representação: natural, algébrica, gráfica.	***Conceitos*** • Plano Cartesiano e suas regiões. • Posições relativas de duas retas em um plano. • Símbolos da desigualdade. • Registros na forma (natural, gráfica e algébrica).
Técnicas • Cálculo das coordenadas em que o gráfico (reta) intercepta o *eixo x* e o *eixo y*. • Elaboração do Gráfico. • Sombreamento das regiões em que o Saldo será positivo (+) e negativo (-), representando com símbolo(s) da desigualdade. E onde o saldo será nulo (0). • Representar numa reta a síntese da situação-problema “Saldo (R$) versus Produção (camisetas), respondendo na forma (natural e algébrica) a produção para ter (lucro, prejuízo, ou nem lucro/prejuízo).	***Notações*** • $P(x, y)$ • $y = a x + b$, com $a \neq 0$ • $y < 0,\ y > 0,\ y = 0$	***Propriedades*** • Como a reta e o plano são conjuntos de pontos, considera-se o ponto como um elemento desses conjuntos. • Duas retas concorrentes (possuem um único ponto em comum) que se cortam formando ângulos retos são chamadas perpendiculares entre si. • Uma linguagem matemática pode ser expressa na forma discursiva (texto), gráfica e simbólica (algébrica).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: A geometria euclidiana tem como pontos de partida os conceitos intuitivos de ponto, reta e plano. Não existem definições para essas ideias, pois elas são criadas pela nossa imaginação, sendo consideradas ideias intuitivas.

Na Figura 22, destaca-se a compreensão do(s) Pesquisador/Alunos com as conexões realizadas sobre a situação-problema, tendo em vista a configuração epistêmica - Quadro 31, e as entidades matemáticas envolvidas, incluindo agora com as desigualdades, conforme ilustra o Quadro 32.

Figura 22 – Atividade ‘e’ - Momento 2: alunos desenvolvendo as formas de conversão do registro (natural → algébrica → gráfica)

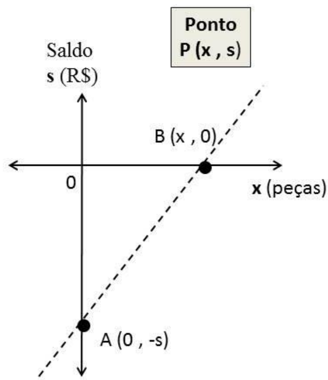
Forma Natural:

Em Camboriú/SC, a Srta. Ester tem uma empresa de confecção – ramo camisetas. A equação matemática que representa seu empreendimento (saldo em correspondência com a quantidade de camisetas) é expressa por

S = 5 x – 1500, onde ‘**s**’ representa o saldo e ‘**x**’ representa a quantidade de peças (camisetas).

Diante do exposto podemos refletir, perceber e estabelecer algumas conexões, tais como:

a) Elabore a ilustração que representa as informações descritas acima.



Ideia Inicial: Com dois pontos pode-se traçar uma linha reta. Este gráfico ‘ reta’ representa uma função (crescente ou decrescente) interceptando o eixo x e o eixo y. A ilustração acima convenciona as coordenadas dos pontos **A** e **B** em cada eixo, quando a função é crescente.

Forma Tabular:

Ponto	**x** (peças)	**S** (R$)
A	0	-1500
B	100	-1000
C	200	-500
D	300	0
E	400	500
F	500	1000

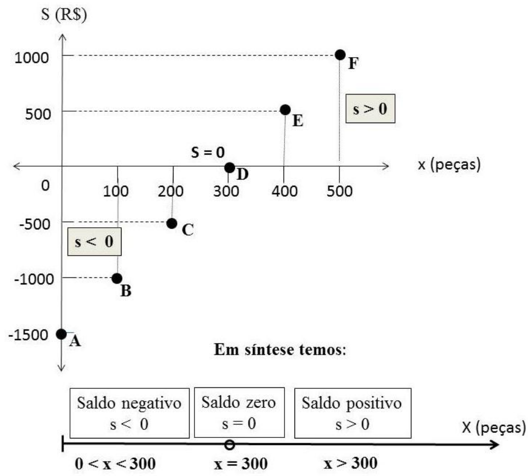
Forma Algébrica: A (0 , -1500) e B (300 , 0).

Forma Gráfica: Saldo versus Peças.

“Continua”

"Conclusão"

Figura 22 – Atividade 'e' - Momento 2: alunos desenvolvendo as formas de conversão do registro (natural → algébrica → gráfica)



b) Quantas camisetas deverá produzir a Srta. Ester para que **o saldo seja zero**? *Forma Algébrica:* x = 300. *Forma Natural:* deverá produzir 300 camisetas.
c) Quantas camisetas deverá produzir a Srta. Ester para que **tenha saldo positivo**? *Forma Algébrica:* $x \in N$ / x > 300. *Forma Natural:* deverá produzir acima de 300 camisetas (ou seja, mais de 300 camisetas).
d) Quantas camisetas deverá produzir a Srta. Ester para que **tenha saldo negativo**? *Forma Algébrica:* $x \in N$ / 0 < x < 300. *Forma Natural:* deverá produzir entre zero e trezentas camisetas (ou seja, de 1 até 299 camisetas).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Explorado com a participação dos alunos

Na Atividade 'e', o pesquisador aumentou o nível de dificuldade da questão. A atividade exigiu um grau de cognição maior tendo em vista o direcionamento e a compreensão de alguns elementos atuantes na matemática, proporcionando reflexões acirradas buscando o senso comum entre os componentes de cada turma quanto à resolução da situação-problema.

Na ideia e ilustração exposta no início da resolução desta atividade, convencionou-se de forma aleatória as coordenadas dos pontos A e B em cada eixo (x e y), tomando por base a expressão algébrica e os resultados obtidos por intermédio de cálculos sendo organizadas as informações do **‘saldo** versus **peças**’, apresentando na forma tabular, algébrica e na forma gráfica.

Obstáculos cognitivos dos alunos, detectados pelo pesquisador:

a) Compreender que os valores de uma tabela são atribuídos de medições reais instantâneas ou por meio da relação entre duas grandezas variáveis onde a substituição do número de peças ‘camisetas’ (eixo **x**) na expressão matemática.

b) Efetuando-se as operações chega-se ao valor do saldo (eixo **s**). Ou seja, acontece uma ‘correspondência – relação de dependência’ entre e o eixo das camisetas (partida) e o eixo do saldo (chegada). O saldo depende do número de camisetas produzidas.

c) Efetuar as operações aritméticas necessárias tendo compreensão dos passos a seguir encontrando o valor do saldo. Nesta etapa registrou-se uma das dificuldades eminentes desta atividade, substituir o valor de x na expressão matemática e determinar o valor de y.

d) Elaborar a tabela proposta com os resultados dos cálculos realizados.

e) Compreender que o gráfico da expressão é outra forma de representar a situação vivenciada, sendo que para a elaboração dele é necessário construir primeiro o plano cartesiano ficando atento aos eixos e seus valores, localizando as coordenadas nas regiões do plano ou nos eixos. Um detalhe que mereceu destaque foi o espaçamento deixado entre os valores em cada um dos eixos.

f) Interpretar o gráfico observando os símbolos de desigualdade e sentido dos sinais em cada eixo.

Registra-se que 71% dos alunos não conseguiu representar o gráfico (pontos) com êxito, além de não associar à região de abrangência dos pontos (eixo x e y) no tocante aos símbolos da desigualdade.

Segundo exposição feita pelos estudantes, associar o eixo x (as peças) e eixo y (ao saldo) foi a primeira dificuldade; em seguida foi para localizar as coordenadas de cada ponto no plano cartesiano; finalmente determinar o que deve ser projetado no eixo y fazendo uma correspondência dos sinais com os símbolos de desigualdade emitindo então a solução da situação-problema.

Coube então ao pesquisador rever todo o percurso com os alunos, incluindo agora a informação (síntese) numa reta à parte - eixo x (peças) fazendo o tratamento da informação e respondendo as questões levantadas na situação-problema, solicitadas na forma natural e na forma algébrica.

Durante a realização da atividade ocorreram alguns questionamentos por parte dos alunos:

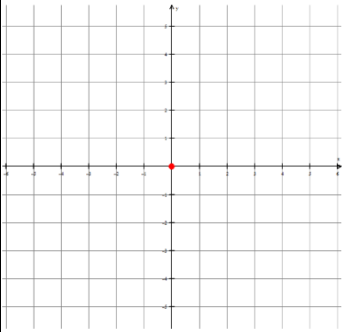
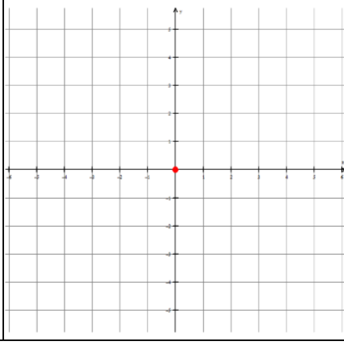
a) Como posso construir o gráfico, se tenho apenas a expressão matemática?
b) Com apenas dois pontos posso traçar uma reta?
c) O que devo fazer para encontrar esses dois pontos?
d) Qual o caminho que deve se feito para indicar na reta (eixo x) os símbolos da desigualdade?
e) Qual a região que compreende o prejuízo, o lucro, e nem lucro nem prejuízo?
f) Porque não posso traçar uma reta para representar os pontos
g) A forma natural significa que devo responder na forma de texto?

Como observação, registra-se que nesta atividade o objetivo foi de que os estudantes assimilassem a compreensão de tratamento e conversão de registros de representação.

A partir do **13º encontro** até o **18º encontro** os alunos, reunidos em grupos, passaram a contextualizar as **'Atividades Integralizadoras (AI) – Momento 2'** para que o pesquisador pudesse avaliar a compreensão do que eles assimilaram sobre o tema em estudo. Observe as atividades:

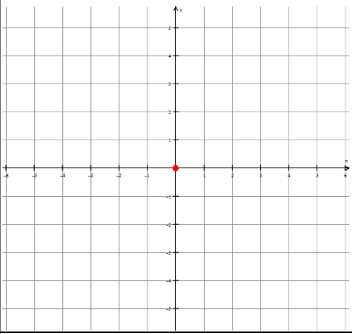
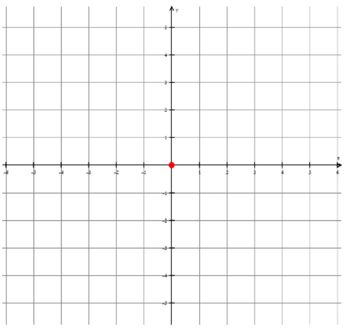
Nas Figuras (23 e 24) apresentam-se as Atividades (1 e 2) as quais propiciaram aos estudantes trabalhar a passagem da 'forma algébrica para a forma gráfica', ou seja, localização de pontos no plano cartesiano.

Figura 23 – Atividade 1 (M 2)

<table>
<tr><td colspan="2">Atividade 1 - Os vértices de um retângulo são determinados pelas coordenadas apresentadas abaixo. Dado o registro simbólico represente ele na forma gráfica.</td></tr>
<tr><td>a) Registro Simbólico Numérico:
A(-2, 2); B(3, 2); C(3, -2); D(-2, -2).</td><td>b) Registro Simbólico Numérico:
A(4, 4); B(6, 4); C(6, 7); D(4, 7).</td></tr>
<tr><td>Registro Gráfico:
</td><td>Registro Gráfico:
</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 24 – Atividade 2 (M 2)

<table>
<tr><td colspan="2">Atividade 2 - Os vértices de um triângulo são determinados pelas coordenadas descritas abaixo. Após elaborar o desenho, pede-se:
Classifique esses triângulos quantos às medidas de seus lados e de seus ângulos.</td></tr>
<tr><td>Registro Simbólico Numérico:
a) A(0, 1); B(6, 5); C(0, 5).</td><td>Registro Simbólico Numérico:
b) A(4, 0); B(0, 3); C(0, -4).</td></tr>
<tr><td>Registro Gráfico:
</td><td>Registro Gráfico:
</td></tr>
<tr><td>Quanto aos lados é:
Quanto aos ângulos é:</td><td>Quanto aos lados é:
Quanto aos ângulos é:</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor.

A Tabela 01 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 01 - Resultados obtidos na execução da Atividade 1 e 2

Atividade		**Participantes**	**Nº. Acertos e (%)**	**Nº. Erros e (%)**
1	a	75	59 (78,66)	16 (21,34)
	b	75	40 (53,33)	35 (46,67)
2	a	75	48 (63,13)	27 (36,84)
	b	75	47 (62,66)	28 (37,34)
			-----	20 td (26,66)

Fonte: Documento do autor.

Embora o assunto tenha sido amplamente discutido com as turmas em sala de aula e os alunos tivessem a compreensão dos elementos constituintes de um plano cartesiano, observou-se como fator limitante a dificuldade de abstração por parte de alguns para compreender os espaços para deslocar a reta na distância dada, tanto para o eixo x quanto para o eixo y, onde no encontro dessas retas é registrado o ponto.

Ao devolver a atividade realizada para que cada aluno observasse o acerto e/ou erro, dez deles declararam que o erro ocorreu por pura falta de atenção ao contar os riscos (distâncias - os espaçamentos) no eixo (x e y). Destaca-se a não percepção dos alunos para a forma geométrica, demonstrando a faltam de domínio da nomenclatura dos triângulos quanto aos ‘lados e ângulos’ e dos quadriláteros principais.

No Quadro 33 apresenta-se a configuração epistêmica das atividades (3 a 10); e no Quadro 34 são representadas as entidades matemáticas envolvidas.

Quadro 33 – Configuração epistêmica: estudo da conversão entre os registros na forma gráfica, natural, algébrica

Situação - problema

A partir do registro na forma figural/gráfica mobilizar para a forma algébrica e/ou natural.

↕

Definição

- Formas de registros de representação.

Definição

- Plano cartesiano.
- Coordenadas cartesianas.
- Vértice.
- Triângulos - nomenclatura quanto aos lados e aos ângulos.
- Quadriláteros - nomenclatura quanto aos lados e aos ângulos.
- Diagonal.

↕

Propriedade

- As coordenadas de um ponto são descritas conforme a sua localização no plano cartesiano.
- O enunciado de uma situação-problema esta relacionado a classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático. Os registros podem ser funcionais ou não-funcionais e ser representado na forma discursiva ou não-discursiva.

↕

Procedimentos

- Verificar a localização do ponto.
- Escrever na forma discursiva (texto) a imagem observada.

↔

Argumentos

- Na compreensão de textos muitas vezes existe uma distancia entre a organização proposta ao conteúdo cognitivo e a organização redacional. Esta distancia relaciona-se ao custo cognitivo e é oriunda do fenômeno da congruência semântica.
- Quando penso, não penso a coisa pensada e sim sua representação. O objeto, o fenômeno é o mesmo, o que muda é o processo de representação = substituição.

Fonte: Elaborado pelo autor.

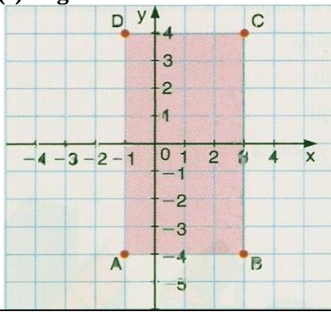
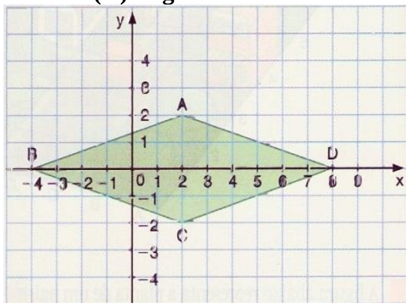
Quadro 34 – Entidades matemáticas: as unidades elementares de análise da situação-problema 'formas de representação de um objeto matemático'

Prática	Linguagem	Teoria
Situação • A partir de uma representação na forma gráfica, determinar a representação na forma algébrica.	***Termo e expressões:*** • Formas de Representação. • Figuras geométricas planas. • Plano cartesiano. • Coordenadas cartesianas.	***Conceitos*** • Formas representativa: algébrica e gráfica. • Coordenadas Cartesianas. • Figuras geométricas planas: triângulos e quadriláteros.
Técnicas • Para localizar um ponto e determinar suas coordenadas basta: a) localizar o valor correspondente no eixo 'x' (horizontal), traçando uma reta auxiliar paralelo ao eixo vertical. b) Para localizar o valor correspondente no eixo 'y' (vertical), traçando uma reta auxiliar paralelo ao eixo horizontal.	***Notação*** • Registro figural/gráfico • Registro algébrico.	***Propriedades*** • Registro algébrico e representado por meio das coordenadas cartesianas. • Os triângulos são classificados de acordo com a medida dos lados e dos ângulos: a) Um triângulo equilátero também é acutângulo. b) Um triângulo escaleno também é obtusângulo. c) Um triângulo isósceles sempre será acutângulo, retângulo ou obtusângulo. • Os quadriláteros são classificados de acordo com os lados e ângulos podendo ser nominados: quadrados, retângulos, paralelogramo, losango, trapézio. • A intersecção das retas auxiliares e a coordenadas da localização do ponto P (x ; y).

Fonte: Elaborado pelo autor.

As Atividades (3 a 10) abaixo descritas espelham situações-problema, despertando a atenção dos alunos para a passagem da 'forma gráfica para a forma algébrica'. Aqui o detalhe fica para a projeção do ponto com relação ao eixo x e ao eixo y, além da ordem de representação na forma algébrica das Coordenadas do ponto P (x , y). Também visou estimular a observação de números e operações, forma e espaço, grandezas e medidas, tratamento da informação, como se pode observar no quadro abaixo:

Figura 25 – Atividade 3 (M 2)

<table>
<tr><td colspan="2">Atividade 3 - No quadro abaixo temos as figuras de dois quadriláteros. Nessas condições, responda:</td></tr>
<tr><td>(I) Registro Gráfico:

</td><td>(II) Registro Gráfico:

</td></tr>
<tr><td>a) Qual é o nome da figura:</td><td>a) Qual é o nome da figura:</td></tr>
<tr><td>b) Quais são as coordenadas dos seus vértices A, B, C e D?
A (,   ); B (,   );
C (,   ); D (,   ).</td><td>b) Quais são as coordenadas dos seus vértices A, B, C e D?
A (,   ); B (,   );
C (,   ); D (,   ).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">c) Quais são as medidas dos lados da figura, em unidades de comprimento (u.c.)?
Lado menor (AB) = __________ u.c.

Lado maior (BC) = __________ u.c.</td><td>c) Qual é a medida da diagonal menor (AC), em unidades de comprimento (u.c.)? ____________ u.c.</td></tr>
<tr><td>d) Qual é a medida da diagonal maior (BD), em unidades de comprimento (u.c.)? ____________ u.c.</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Givanni, J. R; Givanni Junior, J. R. (2010, p. 260).

A Tabela 02 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 02 - Resultados obtidos na execução da Atividade 3

Atividade		Participantes	Nº. Acertos e (%)	Nº. Erros e (%)
03	1/a	75	46 (61,33)	29 (38,67)
	b	75	36 (48,00)	39 (52,00)
	c	75	22 (29,93)	53 (70,07)
03	2/a	75	55 (73,33)	20 (26,67)
	b	75	25 (33,33)	50 (66,67)
	c	75	17 (22,66)	58 (77,34)
	d	75	16 (21,33)	59 (78,67)

Fonte: Documento do autor.

Nessa atividade ficou evidente que dos 75 alunos que participaram, para alguns faltou a compreensão de geometria (nome dos quadriláteros) – (3) 1/a: 29 alunos erraram o nome; e (3) 2/a: 20 alunos erraram o nome.

No que se refere à representação na forma algébrica, registra-se que dos 75 alunos, em (3) 1/b - 36 acertaram e (3) 2/b –25 acertaram; isso demonstra a dificuldade que os alunos têm de interpretar um gráfico. Com relação aos números e medidas, atividade (3) 1/c – 22 alunos acertaram e em (3) 2/c e d apenas 16 e 17 alunos, respectivamente, acertaram. O comentário feito por eles foi de não compreender se deviam contar os espaços em cada eixo e registrar em unidade de comprimento. Outros, perguntaram se poderiam dar as medidas utilizando o instrumento ‘régua’. Contudo alguns deles conseguiram contar os espaços entre os quadrinhos e até medir a distância em ‘cm’.

Além de receberem no início de cada aula uma régua, nesta atividade foi entregue para cada aluno uma folha abordando tipos de telhados (figura triângulo – nomes quanto aos lados e ângulos), assim como dos principais quadriláteros. Como sugestão, foi solicitado aos grupos que efetuassem a leitura, já que haviam estudado o assunto nos 7º e 8º Anos do Ensino Fundamental; e as dúvidas ainda pendentes iriam ser esclarecidas aos grupos com dificuldades.

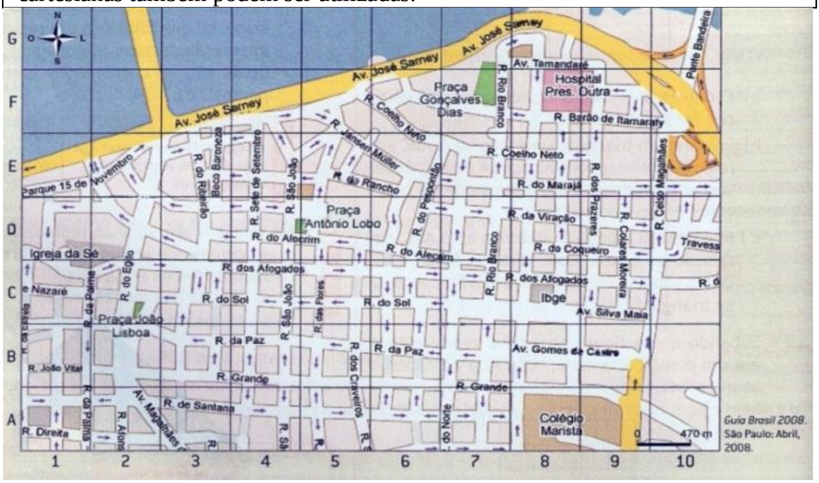
Conclui-se que embora possamos pensar que localizar um ponto no plano cartesiano seja uma atividade fácil, notou-se que, vários adolescentes não conseguiram perceber semelhanças, identificar regularidades, deslocar nos eixos a régua e observar os espaçamentos com relação às medidas de comprimento, e até de projetar o ponto nos eixos ‘x e y’, para determinar as coordenadas do ponto.

Na Atividade 4 – Momento 2, procurou-se envolver os alunos por meio de uma situação-problema na forma gráfica para que fosse transformada em outra forma de representação(algébrica ou natural – ‘forma de texto’).

Atividade 4) Uma cidade bem planejada propicia várias vantagens, permite a fácil localização, oportunizando uma melhor trafegabilidade (mobilidade) com relação ao trânsito, dentre outros. No Brasil, temos algumas cidades que foram planejadas: Maringá-PR, Rio Claro-SP, Belo Horizonte-MG, Brasília-DF, Palmas-TO. Em algumas situações precisamos encontrar um endereço, mas não sabemos precisamente a sua localização. Então podemos recorrer a um guia de ruas que contem o mapa da cidade, podendo estar dividido em várias plantas. A maioria dos mapas utiliza um código composto por letras e números que permitem localizar um ponto nessa planta, estando organizado com colunas e linhas, sendo que: as colunas (verticais) estão indicadas por números naturais; e as linhas (horizontais) estão indicadas por letras do alfabeto. Observe os exercícios propostos nas Figuras (26 a 28):

Figura 26 – Atividade 4.1 (M 2)

Atividade 4.1 - O mapa abaixo, extraído do "Guia Brasil 2008, São Paulo: Abril, 2008" representa parte da cidade de São Luiz, no estado do Maranhão, sendo organizado por meio das coordenadas cartesianas. Por exemplo, o "Colégio Marista" está localizado na coluna **8** e na linha **A**, ou seja, na posição **(8 , A)**. **Ajudem-nos a**:
a) Indicar por meio de coordenadas, a posição (localização): - do Hospital Presidente Dutra: **(,).** - da Praça João Lisboa: **(,).**
b) Qual praça está localizada na posição **(7 , F)**:
c) Se as coordenadas cartesianas nos auxiliam na localização de um ponto em mapa de uma cidade, na sua opinião, em que outras situações as coordenadas cartesianas também podem ser utilizadas:



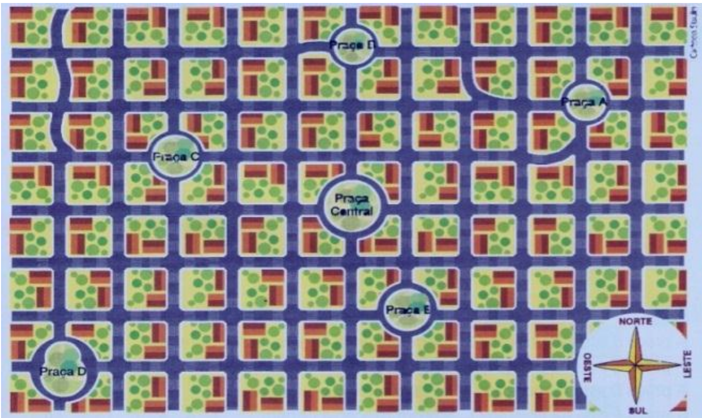
Fonte: Ribeiro (2009d, p. 150).

Figura 27 – Atividade 4.2 (M 2)

Atividade 4.2 - No esquema abaixo, temos parte da planta de uma cidade qualquer com indicações de algumas praças. **Precisamos da sua ajuda:**

a) Como você explicaria a uma pessoa que esta na **'praça Central'** o caminho que ela deve fazer para chegar à **'praça A'**?

b) Você precisa orientar uma pessoa que está na **'praça D'** para chegar à **'praça A'**. Como você daria essa orientação?



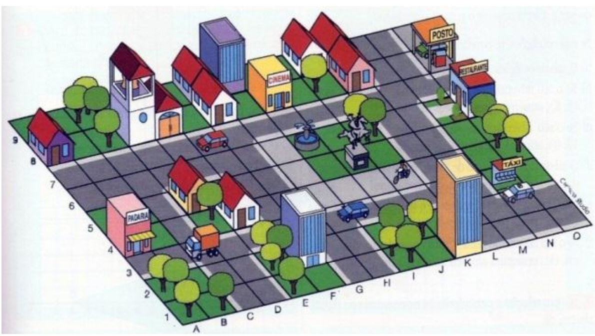
Fonte: Givanni, J. R.; Givanni Junior, J. R. (2010, p. 256).

Figura 28 – Atividade 4.3 (M 2)

Atividade 4.3 - Na maquete abaixo, estão localizados alguns pontos da cidade e um sistema de referência indicados por letras e números. Considere que a letra deve ser o primeiro elemento do par, e o número deve ser o segundo elemento. Pode-se então afirmar que a coordenada **(D , 8)** localiza:

( ) a padaria ( ) o ponto de táxi ( ) a torre do sino

( ) o cinema ( ) a estátua



Fonte: Givanni, J. R.; Givanni Junior, J. R. (2010, p. 259).

A Tabela 03 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 03 - Resultados obtidos na execução da Atividade 4

Atividade		Participantes	Nº. Acertos e (%)	Nº. Erros e (%)
04	1/a	75	36 (48,00)	39 (52,00)
	b	75	48 (64,00)	27 (36,00)
	c	76	57 (75,00)	19 (25,00)
04	2/a	75	51 (68,00)	24 (32,00)
	b	75	52 (69,33)	23 (30,67)
04	3	75	41 (54,66)	34 (45,34)

Fonte: Documento do autor.

Surpreso com o resultado constata-se que aproximadamente 27 alunos declararam que tiveram dificuldade na compreensão e interpretação das ilustrações. Registra-se que dos 75 alunos que participaram da atividade, o percentual de acerto nos itens variou entre 48% a 75%. Contatou-se no item (4) 1/a, que os alunos não observaram a ordem do par ordenado (x, y).

Os exercícios visaram situações corriqueiras do cotidiano dos alunos procurando envolver o tratamento da informação. Coube então ao pesquisador fazer uma revisão sintetizando todos os componentes trabalhados até aquele momento.

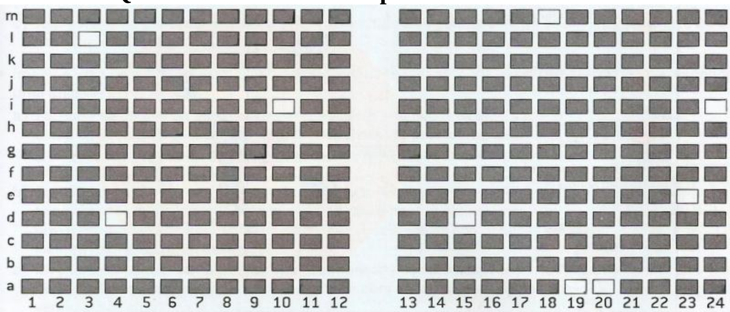
Ao término da atividade 4.3, alguns grupos nas Turmas 801, 802 e 803, associando espontaneamente a planta que receberam do bairro Monte Alegre, alertaram quanto ao péssimo planejamento da organização das ruas, por elas não serem paralelas tomando como exemplo as Atividades 4.2 e 4.3.

É oportuno ressaltar o envolvimento de entidades matemáticas arroladas por Godino (2002), e contextualizar as atividades elaboradas pelo pesquisador por meio de texto e figura, observando-se as respostas dadas pelos alunos, tendo a finalidade de envolver traços integrantes de um contexto maior (plano cartesiano – planejamento urbano) de forma perceptível. Com relação as ideias de Duval, os exercícios procuraram envolver ‘espaço e forma’, fazendo correspondência entre as formas figural e algébrica. Os resultados da Tabela 03 revelam que a atividade cognitiva de conversão não foi contemplada.

Na Atividade 5 (Figura 29) propõem-se exercícios para as turmas, resgatando a ideia das primeiras aulas, apresentando outra situação presente no dia a dia dos alunos, já que 50% deles pelo menos uma vez foi ao cinema. E na Atividade 6 (Figura 30), a intenção foi a compreensão da localização de um ponto no plano.

Figura 29 – Atividade 5 (M 2)

Atividade 5 - As bilheterias do Cinema do "Shopping Camboriú", localizado no Município de Balneário Camboriú, apresentam na tela do computador a disposição das poltronas das salas onde são passados os filmes, conforme as coordenadas (*poltrona, fileira*). Num determinado horário estavam vagas apenas as poltronas em branco. **Qual desses assentos você pode escolher:**

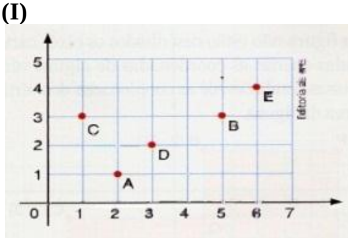


Poltronas Vagas:
(,); (,); (,); (,); (,); (,);
(,); (,); (,).

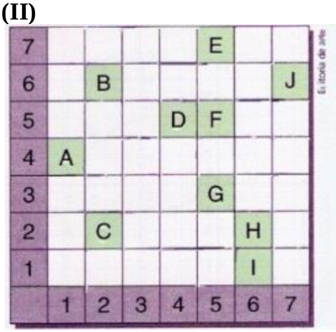
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 30 – Atividade 6 (M 2)

<table>
<tr><td colspan="2">Atividade 6 - Comparando as ilustrações dos itens I e II você verifica alguma diferença? Comente no espaço em branco do quadro.</td></tr>
<tr><td>(I) A figura abaixo representa a planta de um bairro. O prédio D está na esquina da rua 3 com a avenida 2, tendo a localização D (3 , 2). Dê as localizações dos prédios A, B, C e E, usando pares ordenados.</td><td>(II) Escreva o par ordenado que identifica a posição dos quadrados (A, B, E, G, I e J) destacados na figura.
Por exemplo: D (4 , 5).

A (, .); B (.....,......); E (,);
G (.. .. , ...); I (,); J (,).</td></tr>
<tr><td>(I)


Fonte: Givanni, J. R; Givanni Junior, J. R. (2010, p. 259).

A (,); B (,);
C (,); E (,).</td><td>(II)


Fonte: Givanni, J. R.; Givanni Junior, J. R. (2010, p. 259).</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor.

A Tabela 04 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 04 - Resultados obtidos na execução da Atividade (5 e 6)

Atividade		**Participantes**	**N^o. Acertos e (%)**	**N^o. Erros e (%)**
05	-	76	65 (85,27)	11 (14,73)
06	1	76	57 (75,00)	19 (25,00)
	2	76	63 (82,89)	13 (17,11)

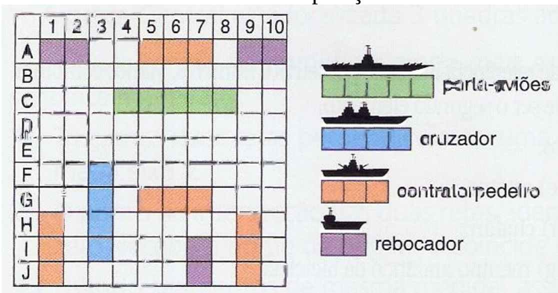
Fonte: Documento do autor.

Detectou-se que o percentual de acerto foi expressivo (81%), considerando que a compreensão de um conteúdo ocorre de maneira gradativa. Nas três turmas os alunos ressaltaram a importância da atividade/pesquisa realizada em aulas anteriores para citar exemplos de situações onde aparece o plano cartesiano/coordenadas. Também ficou evidente a dificuldade de alguns alunos (18,95 %) quanto à localização de um ponto na forma figural, para representá-lo na forma algébrica.

As Atividades (7, 8 e 9) – Momento 2, visou fortalecer a representação para a forma algébrica procurando aguçar o raciocínio envolto por outras áreas do conhecimento (geografia, educação física, artes), conforme as Figuras (31 a 33):

Figura 31 – Atividade 7 (M 2)

Atividade 7 - Você esta jogando ‘batalha naval[55]’ e seus navios estão colocados na sua folha de acordo com a disposição abaixo:



Vamos combinar que o número deve ser o primeiro elemento do par e a letra deve ser o segundo elemento. **Nessas condições responda:**

a) Quais as posições ocupadas pelo seu porta-aviões?
(,); (,); (,); (,); (,).

b) Se o seu adversário disparar um ‘tiro’ para a posição (6, E), atingirá algum de seus navios? ( ) sim ( ) não

c) Se o seu adversário disparar um ‘tiro’ para a posição (7, G), atingirá algum de seus navios? ( ) sim ( ) não

d) Qual o número mínimo de ‘tiros’ que seu adversário deve dar para afundar todos os seus rebocadores? _______tiros.

e) O seu cruzador será afundado se o seu adversário disparar quatro ‘tiros’ para quais posições? (,); (,); (,); (,).

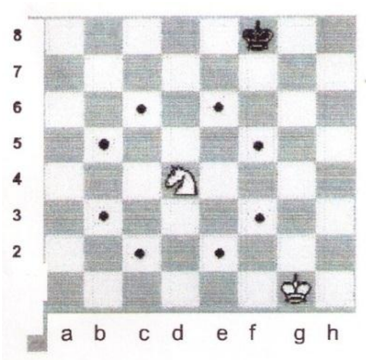
f) Se o seu adversário der 25 ‘tiros’ seguidos e todos certeiros, ele conseguirá afundar toda a sua frota? ( ) sim ( ) não.
Afundará a frota com quantos tiros? _______

Fonte: Givanni, J. R.; Givanni Junior, J. R. (2010, p. 259).

[55] A aplicação do jogo ‘batalha naval’ envolve: a) o conceito de par ordenado por meio de uma atividade lúdica onde o aluno identifica e registra as possíveis coordenadas dos navios adversários - (cada aluno tem uma frota de navios de várias dimensões e duas tabelas: uma onde vai posicionar os mesmo se a outra serve para identificar a possível localização da frota inimiga); b) a representação de números inteiros relativos, entre outros.

Figura 32 – Atividade 8 (M 2)

Atividade 8 - Num 'tabuleiro de xadrez[56]', jogamos com várias peças que se movimentam de maneiras diferentes. O cavalo se move para qualquer casa que possa alcançar com movimento na forma de **"L",** de três casas. Na posição da figura, os pontos marcados representam as casas que o cavalo pode alcançar, estando na casa **d4**. Dentre as casas que o cavalo poderá alcançar, partindo da casa **f5** e fazendo uma única jogada, estão:



Alternativas:

(a) **g3** ou **d6**

(b) **h5** ou **f3**

(c) **h7** ou **d7**

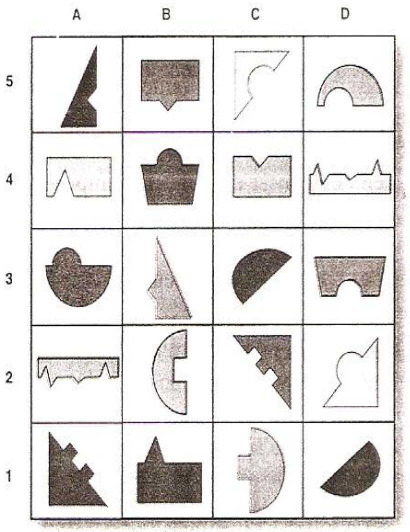
(d) **d3** ou **d7**

Fonte: Brasil (2012a, p. 6).

[56] O 'xadrez' ao exercitar áreas do cérebro humano, propicia alguns benefícios. Segundo Gomes (2013) o jogo é divertido; faz conhecer pessoas divertidas e interessantes; ajuda a ter melhores resultados na escola; desenvolve a memória; melhora a concentração; desenvolve o pensamento lógico; estimula a visão global; desenvolve a autoconfiança; ensina independência e responsabilidade pessoal; desenvolve imaginação e criatividade; melhora a autodisciplina; ensina técnicas de procura, dentre outros. Pode ser utilizado como atividade envolvendo coordenadas cartesianas.

Figura 33 – Atividade 9 (M 2)

Atividade 9 - **Observe o quadro[57]:**



As figuras de coordenadas **(A, 5) e (B, 3)**, quando colocadas lado a lado, encaixam-se formando um triângulo.

Escreva as coordenadas dos demais pares de figuras que podem ser encaixadas.

(,) e (,);
(,) e (,);
(,) e (,);
(,) e (,);
(,) e (,);
(,) e (,);
(,) e (,);
(,) e (,);
(,) e (,).

Fonte: Souza (2009c, p. 80).

A Tabela 05 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 05 - Resultados obtidos na execução da Atividade (7, 8 e 9)

Atividade		**Participantes**	**Nº. Acertos e (%)**	**Nº. Erros e (%)**
07	a	75	33 (44,00)	42 (56,00)
	b	75	61 (81,33)	14 (18,67)
	c	75	64 (85,33)	11 (14,67)
	d	75	27 (36,00)	48 (64,00)
	e	75	26 (34,66)	49 (65,34)
	f	75	37 (49,33)	38 (50,67)
08	-	75	43 (57,33)	32 (42,67)
09	-	75	43 (57,33)	32 (42,67)

Fonte: Documento do autor.

57 Ao montar o quebra-cabeça o aluno desenvolve o raciocínio lógico, a coordenação motora, a criatividade, a percepção das formas ao juntar as peças, a curiosidade para visualizar a figura montada. Também pode envolver as coordenadas cartesianas.

Nestas atividades, o pesquisador além de relacionar o conteúdo com outras disciplinas, propicia atividades voltadas para a concentração e o raciocínio lógico dos alunos, ligando as formas de linguagem e jogos de matemática por meio do ‘jogo batalha naval’, das regras do ‘jogo de xadrez’, e de ‘quebra-cabeça’, envolvendo a percepção para as formas geométricas.

O resultado revela que nesta atividade a capacidade de abstração e atenção dos alunos foi baixa. Nos itens das atividades (7a, 7c, 7e, 8, 9) que exigiam a conversão da forma figural para a forma algébrica, obtiveram uma média de 44,93% de acerto.

Os alunos presenciaram uma prática envolvendo as coordenadas cartesianas. Além disso, o jogo por sua dimensão lúdica e educativa (consideração dos erros), desenvolve segundo Smole et al (2008, p. 10) “o espírito construtivo, a imaginação, a capacidade de sistematizar e abstrair e a capacidade de interagir socialmente”, fato este presenciado pelo pesquisador. Estas atividades reforçam a ideia de Godino (2002) de que o significado do objeto pessoal pode ser compartilhado pela prática no seio de uma instituição escolar (turma/sala de aula). Deve-se levar em conta a diversidade de objetos postos em jogo na atividade matemática; de atos e processos de semioses; de contextos e circunstâncias espaço-temporais e psicossociais. Duval (2004, p. 39) expressa que “a produção de imagens mentais depende de processos físicos ou psicológicos análogos aos que estão em jogo na percepção” admitindo que “a produção de representações semióticas, ao contrário, está submetida ao respeito de ‘regras sintáticas’ de formação e de tratamento de unidades significantes”.

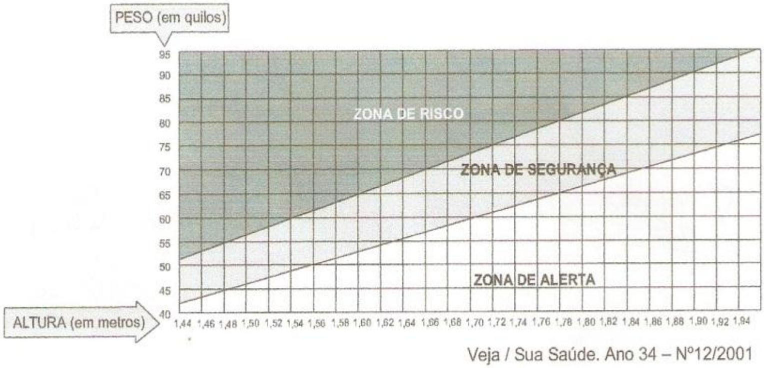
A Atividade 10 (Figura 34) procura envolver o tratamento da informação, onde o pesquisador associa uma situação do contexto atual ‘a obesidade[58]’, relacionando (altura versus peso) de uma pessoa, conforme os indicadores: zona de alerta, zona de segurança, zona de risco. A ilustração gráfica permitiu a análise e projeção dos pontos limites encaminhando os alunos para a indicação da alternativa correta.

---

[58] Deposição excessiva de gordura no organismo, levando a um peso corporal que ultrapassa a 15%, ou mais, o peso ótimo (FERREIRA, 2009, p. 1420).

Figura 34 – Atividade 10 (M 2)

Atividade 10 **-** Observe o gráfico:



Ao marcar no gráfico o ponto de intersecção entre as medidas de altura e peso, saberemos localizar a situação de uma pessoa em uma das três zonas. Para aqueles que têm 1,65 m e procuram permanecer na zona de segurança, o peso deve manter-se, aproximadamente, entre:

(a) 48 e 65 quilos. (b) 50 e 65 quilos. (c) 56 e 68 quilos.
(d) 60 e 75 quilos.

Fonte: Brasil (2012b, p. 12).

A Tabela 06 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 06 - Resultados obtidos na execução da Atividade 10

Atividade		Participantes	Nº. Acertos e (%)	Nº. Erros e (%)
10	-	75	45 (61,64)	28 (38,36)

Fonte: Documento do autor.

O pesquisador observou que 61,64% dos alunos conseguiram, com o auxílio de uma régua, indicar que o peso deve manter-se entre 55 e 68 quilos. Os demais alunos (38,36%) não acertaram por não compreender a organização visual da informação e a comunicação por meio de representações gráficas no plano cartesiano (neste caso envolvendo o 1º Quadrante).

Nesta atividade a ilustração na forma gráfica exigiu que os alunos estabelecessem uma relação entre os eixos (peso em função da altura). Constatou-se que aos poucos os alunos notavam a correspondência entre grandezas, princípio básico no estudo de funções.

As perguntas corriqueiras nesta atividade estavam em como movimentar a régua sobre os eixos para descobrir o limite entre as regiões de abrangência das zonas correspondentes considerando a informação fornecida. Também, alguns alunos de maior estatura puderam conferir se estavam dentro dos padrões da zona de segurança.

Esta atividade envolveu a conversão de registro da linguagem da forma gráfica para a forma algébrica (RRS - Duval), relacionando a representação do objeto matemático, sendo discutido em termos de práticas pessoais (EOS - Godino).

Nas Atividades 11, 12, 13 e 14 (Figuras 35, 36, 37 e 39), procurou-se explorar os resultados numéricos obtidos por meio de cálculo envolvendo a substituição de uma das coordenadas (variável independente - eixo x) do par ordenado numa expressão matemática, determinando o valor da variável dependente, comprovando se o par ordenado representado por um ponto pertence a uma das retas.

Diante do fator limitante dos alunos em nominar e determinar as coordenadas do ponto, o pesquisador recomendou que eles elaborassem uma tabela citando os respectivos valores, ou seja, indicando as coordenadas na forma tabular/algébrica em que a reta intercepta o eixo x e o eixo y. Além disso, que relacionassem as coordenadas do ponto com a reta, efetuando a análise do porque a função é crescente, decrescente ou constante; assim como qual expressão matemática representa o gráfico.

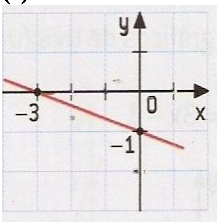
Com relação à classificação da expressão em ‘função crescente’, os alunos, observando as tabelas e/ou gráfico, puderam constatar que quanto maior o valor dado para x, maior será o valor correspondente a **y** = f(x) **= ax + b**. Já na ‘função decrescente’ nota-se que quanto maior o valor dado para x, menor será o valor correspondente a **y** = f(x) **= ax + b.** Agora se aumentando o valor de x, o valor de y permanece o mesmo (não varia), a ‘função é constante’.

O estudo e análise entre a variação nos eixos foi compartilhada com os alunos em sala, oportunizando que alguns alunos nas turmas 801, 802 e 803, explicassem seu entendimento aos demais colegas, antes de ser repassado as Atividades Integralizadoras 11, 12, 13 e 14.

Figura 35 – Atividade 11 (M 2)

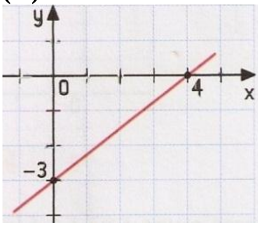
Atividade 11 - Faça uma breve leitura das expressões matemáticas representadas pelos gráficos (**I, II, III**), e responda:

(I)



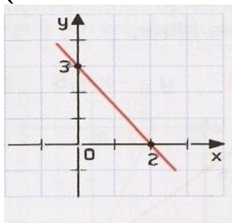
Ponto	x	y
A		
B		

(II)



Ponto	x	y
A		
B		

(III



Ponto	x	y
A		
B		

a) Quais são as coordenadas do ponto em que cada reta cruza o **eixo x**?
(I) (,   ); **(II)** (,   ); **(III)** (,   ).

b)Quais são as coordenadas do ponto em que cada reta intercepta o **eixoy?** (**I**) (,   ); **(II)** (,   ); **(III)** (,   ).

c) Em todos os gráficos, a medida que aumentamos os valores de **x**, os valores de **y** também aumentam? (   ) **Sim**.   (   ) **Não**. **Explique por quê.**
(I) -
(II) -
(III) -

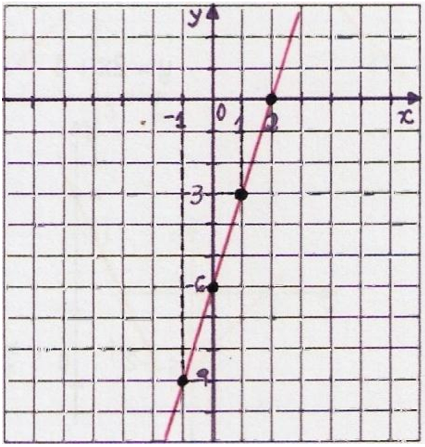
d) Qual dos gráficos representa a expressão matemática
y = 3x/4 - 3 ?   (   ) **I**   (   ) **II**   (   )**III**

Fonte: Elaborado pelo autor.

A atividade 12 apresentada na Figura 36 reforça novamente o direcionamento do pesquisador para a atribuição de significação às palavras do texto ‘relação de correspondência entre grandezas’.

Figura 36 – Atividade 12 (M 2)

Atividade 12 - Afrânio construiu um gráfico para representar a relação de dependência da grandeza **y** em função da grandeza **x**. De acordo com a ilustração elaborada, responda as questões que seguem:



a) Observando os valores de **x** e **y** do gráfico, classifique a expressão em:

( ) **Crescente**

( ) **Decrescente**

Ponto	x	y
A		
B		
C		
D		

Explique por quê.

b) O gráfico corresponde a qual das expressões:

(I) $\mathbf{y = x - 6}$

(II) $\mathbf{y = 3x - 6}$

(III) $\mathbf{y = 2x - 6}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 07 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 07 - Resultados obtidos na execução das Atividades (11 e 12)

Atividade		Participantes	Nº. Acertos e (%)	Nº. Erros e (%)
11	a	68	61 (89,70)	07 (10,30)
	b	68	60 (88,23)	08 (11,77)
	c	68	54 (79,41)	14 (20,59)
	d	68	36 (52,94)	32 (47,06)
12	a	61	42 (68,85)	19 (31,15)
	b	61	31 (50,81)	30 (49,19)

Fonte: Documento do autor.

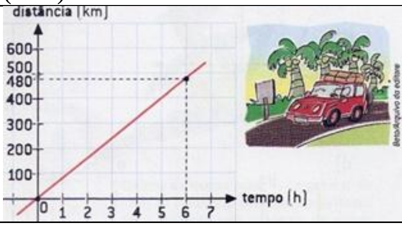
Nesta fase da pesquisa foi possível detectar nos alunos uma maior compreensão do conteúdo. Apenas nos itens 11d e 12b, o autor pôde constatar a dificuldade dos alunos (média de acertos igual a 51,87%) em substituir o valor de uma variável numa expressão dada, além das operações dos sinais e tabuada. Reforça-se que antes da aplicação destas duas atividades foram resolvidos alguns exemplos com a participação dos alunos; inclusive alguns deles resolvendo na lousa.

As atividades oportunizaram reconhecer um registro na forma gráfica e na forma algébrica (coordenadas dos pontos; notação na forma de expressão matemática).

Na atividade 13, partindo de um registro gráfico o objetivo foi possibilitar que os alunos fizessem o registro na forma natural (texto) determinando a expressão matemática (forma algébrica) que melhor representasse a situação. Esta atividade está exposta na Figura 49.

Figura 37 – Atividade 13 (M 2)

Atividade 13 - Escreva com suas palavras o enunciado de um problema de acordo com as informações do gráfico que representa a situação da função (**d** x **t**).



Ponto	x	y
A		
B		

a) Enunciado:

b) Qual é a expressão algébrica que representa a ilustração (**d** x **t**)?

(r1) d = 30 t (r2) d = 48 t (r3) d = 60 t (r4) d = 80 t

Fonte: Ribeiro (2009d, p. 187).

A Tabela 08 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 08 – Resultados obtidos na execução da Atividade 13

Atividade		Participantes	Nº. Acertos e (%)	Nº. Erros e (%)
13	a	64	41 (63,26)	23 (36,74)
	b	64	39 (60,51)	25 (39,43)

Fonte: Documento do autor.

Considerando que a atividade exigiu uma compreensão das grandezas dispostas no plano cartesiano em seus respectivos eixos, tendo um custo cognitivo, levou-se os alunos a interpretar o gráfico e seus dados. Embora pareça ser de fácil compreensão exige um alto grau de abstração das informações para resolver o problema.

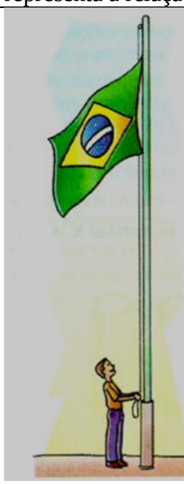
Percebeu-se a dificuldade dos alunos sem transformar um registro gráfico em algébrico mesmo considerando o desenvolvimento das atividades anteriores, e o desencadear da acomodação dos conceitos construídos pelo coletivo (professor e alunos). O maior obstáculo registrado pelos alunos foi de observar a variação do tempo, e entender que quando o móvel estava parado o tempo era zero (cronômetro desligado), e que quando o veículo iniciou o movimento as grandezas ‘distância versus tempo’ foram alterando. Outro detalhe apontado foi para fazer a leitura das coordenadas do tempo e a respectiva distância percorrida pelo veículo.

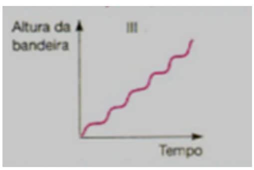
Mesmo que 39 (63,51%) dos alunos conseguiram responder o item 7b, o comentário deles foi de inicialmente não conseguir compreender a leitura do gráfico e fazer a correspondência: ‘o carro andou 480 Km no tempo de 6 h’, dificultando a compreensão da operação matemática ‘distância/tempo’, chegando então na expressão ($y = a\,x$, com $a \neq 0$), ou seja, $d = 18\,t$ (função crescente).

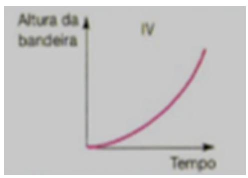
Na atividade 14 os alunos foram desafiados a se posicionar como se estivessem hasteando uma bandeira num mastro, levando-se em conta a altura da mesma em relação ao solo e a relação de dependência com o tempo gasto na ação, como é representado na Figura 38:

Figura 38 – Atividade 14 (M 2)

Atividade 14 – Toda manhã, o auxiliar da prefeitura do Município de Cidade Feliz, vai até o centro, na praça matriz içar a bandeira para o alto do mastro. Os gráficos seguintes podem representar a relação de dependência entre o tempo gasto para erguer a bandeira e a altura da bandeira em relação ao solo. Observe todos os Gráficos e assinale com (I, II, III, IV, V e VI) o texto escrito que mais se aproxima do gráfico, ou seja, que melhor representa a relação desses crescimentos.







“Continua”

"Conclusão"

Figura 38 – Atividade 14 (M 2)

( ) A bandeira começou a subir lentamente, depois foi acelerada e finalmente foi parando na parte superior do mastro.
( ) A bandeira foi içada em solavancos, provavelmente o auxiliar mudava de mão a cada puxada.
( ) A bandeira foi içada a um ritmo constante.
( ) A bandeira foi içada rapidamente no início e em seguida devagar na parte superior.
( ) A bandeira foi içada lentamente no início e depois o ritmo foi acelerado gradualmente.
( ) Impossível.

Fonte: Adaptado de Bigode (2000, p. 241).

Tabela 09 apresenta os resultados (acertos) obtidos:

Tabela 09 - Resultados obtidos na execução da Atividade 14

G I	G II	G III	G IV	G V	G VI
52 (65,00%)	46 (57,50%)	64 (80,00%)	46 (57,50%)	41 (61,25%)	49 (61,25%)

Fonte: Documento do autor.
Nota: a letra G corresponde à notação 'Gráfico'.

Nesta atividade, dos 80 participantes, 28 alunos (35%) relacionaram corretamente cada gráfico ao seu respectivo texto. Os outros resultados (acertos) envolvendo a conversão (gráfico - texto) estão registrados na Tabela 09, sendo satisfatório com uma média de acertos dos gráficos de 63,75%.

Em todas as turmas os alunos perguntaram como deveriam proceder. Como motivação, o pesquisador explicou: 'vocês devem se posicionar como se estivessem hasteando a bandeira do Brasil e as situações que podem acontecer (devagar, rápido, parado); então pouco a pouco eles foram analisando as possibilidades'.

A situação-problema exigiu dos alunos a leitura de registros na representação gráfica relacionando-os ao texto escrito. Vê-se que a complexidade da organização visual da informação e da comunicação em representações gráficas exigiu dos alunos bastante atenção. Fica evidente que se fosse solicitado ao aluno para escrever um texto, os percentuais de acerto seriam menores.

Considerando todas as atividades realizadas do Momento 2, pode-se ressaltar a limitação que os alunos têm em interpretar uma ilustração gráfica passando para a forma de texto (natural), dado ao fato de não associarem no gráfico a relação de correspondência entre as grandezas envolvidas, neste caso altura da bandeira versus tempo gasto para hastear. Essa dificuldade pode ser explicada em termos de conteúdo do registro de representação.

Momento 3 (**19º** ao **26º encontro)** – *Os alunos passam a vivenciar o tratamento da informação representado na forma gráfica, devendo ser contextualizado nas formas natural e algébrica, também* explorando de forma articulada, a mobilização entre as três formas de representação, envolvendo *itens como: os quadrantes, coordenadas, gráfico (reta) e a expressão matemática correspondente, interpretação do gráfico traduzido para a forma de texto, tratamento da informação, análise envolvendo os símbolos da desigualdade* ($>$, $\geq$, $<$, e $\leq$).

Dos **19º** ao **26º encontros**, os alunos reunidos em grupos, passaram a contextualizar as ‘Atividades Integralizadoras (1 a 15) com nível mais elevado de dificuldade, dando continuidade à metodologia de ensino prevista pelo pesquisador.

Coube ao pesquisador inicialmente organizar as entidades presentes na situação-problema expressa nos Quadros (35 e 36), apontando as ferramentas teóricas para analisar conjuntamente o pensamento, expressar uma linguagem perceptível, as situações e os fatores que condicionam o desenvolvimento.

Quadro 35 - Configuração epistêmica: estudo da conversão entre o registro gráfico/figural para registro algébrico

Situação – problema

Considerando a , mobilização e coordenação de registros, responda as atividades integralizadoras de 1 a 15, integrantes do 3º momento.

Definição

- Regiões do Plano Cartesiano
- Símbolos de desigualdade.

Definição

- Expressões Algébricas.
- Registro natural, algébrico e gráfico.

Propriedade

- Uma Reta pode passar por um ou mais quadrantes.
- Todo gráfico ilustra uma relação de dependência entre as grandezas (Ex.: preço unitário e quantidade de unidades; distância e tempo; volume e tempo; população e tempo).
- Uma ilustração na forma gráfica possibilita o estudo dos símbolos da desigualdade que abrangem cada região do Plano.

Propriedade

- A partir de uma expressão algébrica pode-se elaborar uma tabela das grandezas relacionadas entre signos matemáticos de uma expressão matemática.
- A partir de um desenho na forma gráfica é possível traduzir ele para a forma tabular, algébrica e natural (texto).

Procedimento

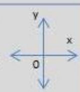
- Representar uma reta na forma de gráfico observando as informações de uma tabela.
- Interpretar e analisar num gráfico as regiões que representam desigualdades ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$).
- Efetuar o tratamento de uma informação dada, seja na forma natural, gráfica ou algébrica.

Argumento

- É possível interpretar formas de registros e transformá-las em outra forma, desde que facilite a compreensão, evitando um custo de tratamento.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 36 – Entidades matemáticas que compõem uma situação-problema envolvendo formas de registro

Prática	**Linguagem**	**Teoria**
Situação • Interpretação de um gráfico no Plano Cartesiano. • Localização dos pontos de um gráfico. • Elaboração gráfica de tabelas contendo par ordenado, associando cada par ordenado da expressão ao seu gráfico correspondente. • Produção de um texto observando um gráfico.	***Termo e expressões*** • Discurso matemático. • Tratamento da informação. • Plano Cartesiano. • Coordenadas Cartesianas. • Mobilização entre registros.	***Conceitos*** • Plano Cartesiano. • Registros natural (texto). • Registro simbólico (algébrico). • Registro gráfico.
Técnicas • De posse de uma forma de registro escreva as outras formas de linguagem solicitadas. • Compreender a mobilização entre os registros.	***Notações*** • Plano cartesiano:  • Expressão algébrica: $y = a\,x + b$ • Ponto: P (x , y) • Reta: \ , / , | ou —	***Propriedades*** • Em um plano há infinitos pontos e infinitas retas. • As retas podem ser construídas tendo-se dois de seus pontos distintos. • Uma reta possui infinitos pontos alinhados; só tem uma dimensão (unidimensional) • Um registro da representação de um objeto matemático pode ocorrer por meio da linguagem na forma gráfica, simbólica, natural (texto), etc.

Fonte: Elaborado pelo autor.

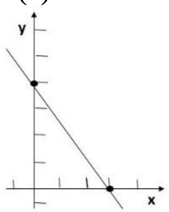
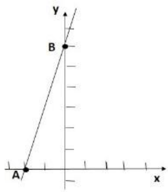
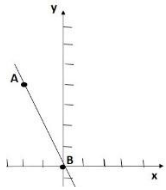
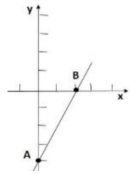
Apresentar-se-á uma sequência de atividades organizadas, prevendo que o estudante seja capaz de converter e de transitar entre uma e outra representação, por meio de uma atividade visando ao raciocínio e ao caráter colaborativo, que além de abstrair o objeto matemático, quando da relação entre representação e referência, permitirá apreendê-lo, independentemente da representação que se use (natural, algébrica, ou gráfica) considerando o registro de representação semiótica. Dessas três representações que serão mobilizadas nas atividades, umas terão mais eficiência que outras.

A seguir são apresentadas as Atividades Integralizadoras:

A Atividade 1abrangeu o conhecimento das regiões (quadrantes) do plano cartesiano, e a(s) coordenada(s) do ponto em que o gráfico intercepta 'o eixo x e o eixo y' conforme ilustra a Figura 39:

Coube a cada estudante observar que os pontos A e B foram nominados considerando o valor da variável x aumentando (da esquerda para a direita); e de posse da localização desses pontos determinar as coordenadas cartesianas. Outro detalhe a ser observado pelos alunos foi o de contar os espaços (riscos) e enumerar nos eixos os valores, antes do registro das coordenadas.

Figura 39 – Atividade 1 (M 3)

<table>
<tr><td colspan="4">Atividade 1 - No cenário abaixo, determine qual é a representação gráfica que melhor representa a equação $y = 3x + 6$.</td></tr>
<tr>
<td>a ( )

</td>
<td>b ( )

</td>
<td>c ( )

</td>
<td>d ( )

</td>
</tr>
<tr>
<td><table><tr><th>Ponto</th><th>x</th><th>Y</th></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>Ponto</th><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>Ponto</th><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>Ponto</th><th>x</th><th>Y</th></tr><tr><td>A</td><td></td><td></td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td></tr></table></td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 10 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 10 - Resultados obtidos na execução da Atividade 1 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
1	62	34 (54,84)	28 (45,16)

Fonte: Documento do autor.

Nesta atividade, dos 62 participantes, 17 alunos (27,42%) conseguiram relacionar a expressão matemática ao gráfico.

Um dos entraves citados pelos alunos foi sobre a não compreensão quanto a contar os espaços em cada eixo (x e y) registrando o valor. Para facilitar a compreensão deles, orientou-se sobre a ideia de o registro das informações ser descrito primeiro na forma tabular.

Outro complicador encontrado por eles foi para nomear o ponto no gráfico estabelecendo as coordenadas (registro algébrico), substituindo o valor da variável x na expressão determinando o valor da variável y para confirmar qual gráfico representa a expressão. Registra-se que poucos alunos conseguiram utilizar as informações do gráfico sem a ajuda de uma tabela.

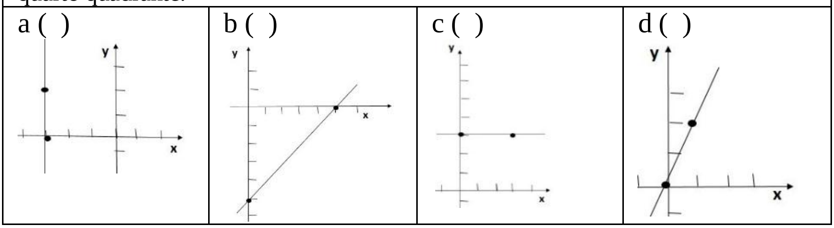
Nesta atividade a dimensão institucional (orientação do professor) contribuiu significativamente na dimensão pessoal do aluno (maneira de interpretar e extrair as informações).

Ressalta-se que, mesmo sendo compartilhado com as turmas exemplos resolvidos em classe envolvendo a operação de substituição de uma das variáveis na expressão, 45 alunos não conseguiram completar a atividade.

As Atividades 2 (Figura 40) e Atividade 3 (Figura 41) basicamente envolveram o reconhecimento das regiões de um plano cartesiano. Consiste em verificar qual o grau de abstração cognitiva sobre os quadrantes (I, II, III, IV).

Figura 40 – Atividade 2 (M 3)

Atividade 2 – Encontre o registro gráfico que apresenta uma reta passando no quarto quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 11 - Resultados obtidos na execução da Atividade 2 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
2	56	46 (82,14)	10 (17,86)

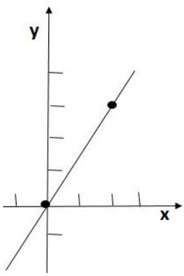
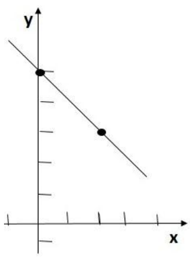
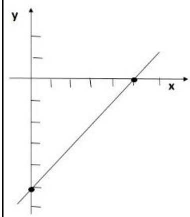
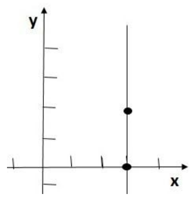
Fonte: Documento do autor.

Dos 56 participantes 46 acertaram a atividade, expressando de forma oral que o mais difícil foi compreender onde se localizavam as regiões (quadrantes) do plano cartesiano. Os 10 alunos restantes localizaram e/ou enumeraram os quadrantes (I, II, III e IV) de forma equivocada não conseguindo fazer a correspondência entre o texto e a representação gráfica.

A Atividade 3 exercitou a compreensão das turmas com relação aos quadrantes, conforme vemos na Figura 41.

Figura 41 – Atividade 3 (M 3)

Atividade 3 - Qual dos gráficos abaixo apresenta uma reta que passa no segundo quadrante:

a.( )	b.( )	c.( )	d.( )
			

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 12 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 12 - Resultados obtidos na execução da Atividade 3 (M 3)

Atividade	Participantes	N°. Acertos (%)	N°. Erros (%)
3	56	41 (73,21)	15 (26,79)

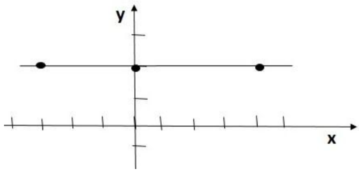
Fonte: Documento do autor.

Dos 56 participantes, 41 acertaram (73,21%). Os demais alunos afirmaram que foi simplesmente por falta de atenção. Comparando as Atividades 1 com a (2 e 3), pode-se afirmar que eles têm dificuldade para substituir os valores da variável x na expressão e efetuar as operações matemáticas encontrando o valor de y.

A Atividade 4 indicada pela Figura 42 envolve a correspondência entre um registro gráfico com uma das frases. Coube aos alunos assinalar a frase que representa a ilustração gráfica.

Figura 42 – Atividade 4 (M 3)

Atividade 4 - No registro gráfico abaixo, observa-se que



Ponto	**X**	**y**
A		
B		
C		

a. ( ) a reta intercepta o eixo das abscissas.
b. ( ) a reta esta localizada no I e IV quadrante.
c. ( ) a reta não intercepta o eixo das ordenadas.
d. ( ) podemos observar que para **y** qualquer, o valor de **x** não sofre variação, permanecendo constante e igual a 2.
e. ( ) podemos observar que para **x** qualquer, o valor de **y** não sofre variação, permanecendo constante e igual a 2.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 13 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 13 - Resultados obtidos na execução da Atividade 4 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
4	83	35 (42,17)	48 (57,83)

Fonte: Documento do autor.

Embora o pesquisador tenha procurado sanar todas as dúvidas no desenvolvimento das aulas, pôde-se notar a dificuldade no processo cognitivo que alguns alunos tiveram para associar o gráfico ao texto e vice-versa.

Procurando contribuir, o pesquisador orientou que após identificar cada ponto do gráfico (reta) registrassem as coordenadas numa tabela, avaliando qual a grandeza (x ou y) que variou. A tabela teve a intenção de contribuir para a análise do texto, embora os estudantes também pudessem relacionar o texto com o gráfico.

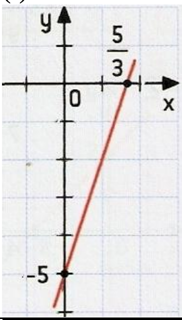
Um número razoável de alunos (30) argumentou que não conseguiram interpretar o texto; fato muito presente em atividades matemáticas. Apenas 35 alunos acertaram (42,17%) esta atividade.

Já a Atividade 5 resgatou a ideia de transformar uma linguagem gráfica em linguagem simbólica por meio das coordenadas, além de associar cada expressão matemática ao seu gráfico, como se observa na Figura 43:

Figura 43 – Atividade 5 (M 3)

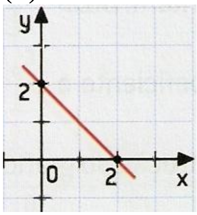
Atividade 5 - Os gráficos que seguem apresentam a relação entre duas grandezas (x e y), sendo y dado em função de x. Após fazer a análise deles, responda:

(I)



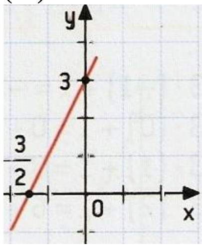
Ponto	x	Y
A		
B		

(II)



Ponto	x	y
A		
B		

(III)



Ponto	X	Y
A		
B		

a) No gráfico (I), qual é a coordenada do ponto em que a reta cruza o eixo **x**?
(,   ).

b) No gráfico (II), escreva a coordenada do ponto em que a reta cruza o eixo **y.**
(,   ).

c) Associe a cada uma das expressões matemáticas abaixo, um dos gráficos acima. Coloque nos parênteses o símbolo romano correspondente a ilustração.
c.1) **y = -x + 2** corresponde ao Gráfico (   ).
c.2) **y = 3x – 5** corresponde ao Gráfico (   ).
c.3) **y = 2x + 3** corresponde ao Gráfico (   ).

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 14 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 14 - Resultados obtidos na execução da Atividade 5 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
5.a	81	41 (50,62)	40 (49,38)
5.b	78	32 (41,03)	46 (58,97)
5.c	78	45 (57,70)	33 (42,30)

Fonte: Documento do autor.

Constata-se acentuada dificuldade (próximo de 50%) que os alunos têm para determinar as coordenadas do ponto e substituir o valor de uma das variáveis na expressão para definir qual dos gráficos corresponde à expressão.

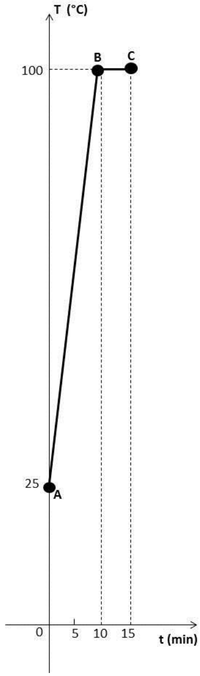
Nesta atividade a atenção dos alunos voltou-se para determinaras coordenadas do ponto, devendo seguir no eixo x o sentido da esquerda para a direita, nomeando o ponto (A, B,...) e dando as respectivas coordenadas cartesianas, por exemplo A (x , y).

Observou-se que uma parcela dos estudantes não conseguiu efetuar as operações matemáticas, principalmente em substituir o valor de x na expressão matemática, por falta de base dos anos anteriores, muito embora tenham sido compartilhadas algumas atividades em sala.

A Atividade 6 (Figura 44) apresentou uma atividade realizada num laboratório envolvendo a mudança de estado de agregação da substância água (H_2O). A intenção do pesquisador é a de que o aluno, visualizando a linguagem na forma gráfica, descreva as coordenadas dos pontos A, B e C, observando no gráfico os intervalos de tempo (0 a 10 min e10 a 15 min) e classifique a função em (crescente, decrescente, constante). Além disso, solicitou-se que ele explicasse o que aconteceu nessa relação entre temperatura e tempo**.**

Figura 44 – Atividade 6 (M 3)

Atividade 6 – Num laboratório um físico com seus alunos buscam comprovar a mudança de estado físico da água (vaporização = estado líquido para o estado gasoso). Eles aquecem certa quantidade de água até ela começar a ferver. O objetivo é estudar a variação de Temperatura (T) desse líquido em função do tempo (t) de aquecimento. Para tanto, a cada minuto, ele mergulha um termômetro na água e lê a temperatura. Procedendo assim, elaboraram uma tabela e construíram o gráfico abaixo, que relaciona a temperatura T (em graus Celsius) com o tempo t (em minutos). Observação: a chama que sai do bico de gás é constante.



Determine as coordenadas dos pontos A, B e C classificando a função nos intervalos de tempo em (crescente, decrescente, constante), ou seja, entre os pontos AB e BC. Também descreva em forma de texto a interpretação da tabela/gráfico.

A (,   )
B (,   )
C (,   )

A reta entre os pontos A e B representa uma função ________________.

A reta entre os pontos B e C representa uma função ________________.

Texto:

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 15 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 15 - Resultados obtidos na execução da Atividade 6 (M 3)

Atividade	Participantes	N°. Acertos (%)	N°. Erros(%)
6	75	48 (63,50)	27 (36,50)

Fonte: Documento do autor.

O primeiro passo solicitado aos alunos foi de que escrevessem ao lado do gráfico a coordenada correspondente conforme a indicação do texto. Em seguida verificassem se cada reta formada pela união de dois pontos representava uma função crescente, decrescente ou constante e qual dos eixos Além, disso que explicassem a situação em forma de texto.

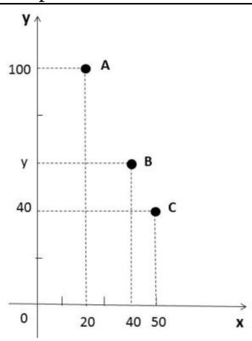
Nessa atividade o pesquisador constatou que dos 78 alunos que participaram apenas 48 (63,50%) conseguiram interpretar o gráfico e redigir um texto simples. Os demais alunos informaram que a dificuldade esteve em acompanhar as coordenadas do eixo x (tempo).

Registrasse que antes de repassar a atividade o pesquisador compartilhou dois exemplos com o intuito de que os alunos observassem o que muda nas expressões para que as mesmas sejam retas paralelas.

A Atividade 7 envolveu a forma geométrica relacionando semelhança entre figuras (triângulos), efetuando os desenhos com as medidas para determinar a ‘y’. Também o aluno poderia resolver por meio de sistema de equações (conteúdo do 8º Ano) - antes teria que encontrar as coordenadas de cada ponto. Já, nos itens 7 (a, b) precisariam apenas extrair a informação do gráfico. Como se observa na Figura 45:

Figura 45 – Atividade 7 (M 3)

Atividade 7 - Na ilustração abaixo vemos que o preço unitário **y**, em reais, de um produto diminui de acordo com a quantidade **x** de unidades compradas. Pede-se:



a) Comprando-se 20 unidades desse produto, o preço unitário será:

b) Comprando-se 50 unidades desse produto, o preço unitário será:

c) Comprando-se 40 unidades desse produto, o preço unitário será:
(r1) R$ 60,00 (r2) R$ 68,00 (r3) R$ 70,00 (r4) R$ 72,00 (r5) R$ 74,00
Cálculos:

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 16 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 16 - Resultados obtidos na execução da Atividade 7 (M 3)

Atividade	**Participantes**	**Nº. Acertos (%)**	**Nº. Erros (%)**
7.a	67	64 (95,52)	03 (04,48)
7.b	67	63 (94, 03)	04 (05,97)
7.c	67	15 (22,39)	52 (77,61)

Fonte: Documentos do autor.

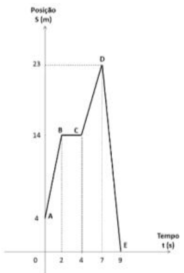
Observa-se que os resultados dos itens 7a e 7b foram significativos, perfazendo uma ótima média de acertos (94,77%), já que só bastava ao aluno compreender o gráfico.

Entretanto, o item 7c exigiu mais conhecimentos e raciocínio, ou seja, para resolver esse item, eles precisavam compreender sobre a semelhança entre figuras, neste caso entre triângulos. Daí o fato do baixo aproveitamento (apenas 22,39% de acertos). Essa atividade, após ser respondida por cada aluno, teve a resolução compartilhada com toda a turma.

A Atividade 8 procurou envolver um pouco da física já que os alunos estavam estudando o movimento uniforme (M.U.) na disciplina de ciências. O desafio envolvendo a matemática era para que cada aluno nomeasse os pontos indicando as suas coordenadas; e redigisse um texto observando a tabela e/ou o gráfico. Na Figura 46 que segue vê-se a atividade.

Figura 46 – Atividade 8 (M 3)

Atividade 8 - Na figura abaixo, temos o registro do movimento de um carro, considerando uma estrada plana e em linha reta (sem curvas), cujo gráfico representa a posição versus tempo (em relação a posição 'zero' da estrada). Faça a leitura do gráfico e elabore um texto descrevendo sua compreensão sobre o que visualizou da imagem. Em seguida determine a distância percorrida pelo carro ao término de 9 segundos.



Texto:

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 17 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 17 - Resultados obtidos na execução da Atividade 8 (M 3)

Atividade	**Participantes**	**Nº. Acertos (%)**	**Nº. Erros (%)**
8	69	41 (59,42)	28 (40,58)

Fonte: Documento do autor.

Todos os alunos conseguiram indicar as coordenadas dos pontos, sendo que alguns grupos até explicaram, observando no gráfico, quando a função é crescente, decrescente, constante. Como estavam estudando o ‘movimento retilíneo uniforme - MRU’ na disciplina de ciências, sete duplas relacionaram o MRU com a situação-problema em estudo.

O pesquisador pôde constatar nessa atividade a dificuldade que os alunos tiveram em acompanhar as variações do eixo x (do tempo ‘t’) e eixo y (da posição ‘s’), descrevendo a situação na forma de texto (natural).

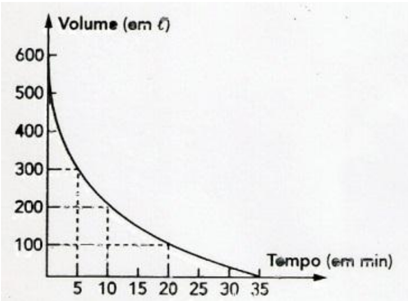
Dos 69 alunos que participaram apenas 41 (59,42%) souberam descrever o movimento do carro, posteriormente explicando a(s) turma(s) o movimento dele: quando ‘andou, parou, andou novamente e retornou para a posição inicial (início do ponto de partida na estrada)’.

O restante dos estudantes (28 – 40,58%) informaram que não conseguiram interpretar as informações por não relacionar as coordenadas de cada ponto (A, B, C, D e E), ou seja P (tempo , posição).

A Atividade 9 apresentou uma situação que ocorre também em nossas casas: ‘volume da caixa d’água versus tempo para esvaziá-la quando abre-se o registro da torneira’. Tem o intuito de converter uma linguagem gráfica para a forma algébrica (simbólica) e uma linguagem algébrica para a forma natural (texto explicando a coordenada fornecida) observando a relação entre o volume de água do reservatório no decorrer do tempo. Assim representado na Figura 47:

Figura 47 – Atividade 9 (M 3)

<table>
<tr><td colspan="2">Atividade 9 - A equipe técnica de uma empresa de laticínios ‘Bom Deguste’, instalou uma caixa de água com capacidade máxima para 600 litros de água, dispondo de uma válvula na sua parte inferior. Também instalaram um dispositivo para registrar o volume de água no reservatório, a cada instante, a partir do momento em que a válvula foi aberta. Os valores obtidos durante a operação permitiram construir o gráfico do volume de água (em litros) no decorrer do tempo (em minutos). Observando o gráfico, responda as indagações:</td></tr>
<tr><td>Registro Gráfico</td><td>Indagações</td></tr>
<tr><td>



</td><td>a) Decorridos 5 minutos do início da operação, qual o volume de água existente no depósito? Represente por meio de coordenada cartesiana: (,).

b) Em quanto tempo a caixa de água foi esvaziada? Como você representa essa informação na forma de coordenada? (,).

c) O que você pode explicar com relação ao ponto localizado em (10, 200)?</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Giovanni e Dante (1998, p. 47).

A Tabela 18 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 18 - Resultados obtidos na execução da Atividade 9 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
9.a	68	59 (86,76)	09 (13,58)
9.b	68	50 (73,53)	18 (26,47)
9.c	68	41 (60,29)	27 (39,71)

Fonte: Documento do autor.

Nos itens 9a e 9b o número de acertos foi bom, ou seja, dos 68 alunos participantes, obteve-se uma média de 54 acertos (80,14%); este resultado indica que os alunos conseguiram fazer a leitura da representação gráfica escrevendo as coordenadas. Os estudantes que erraram os itens acima expostos informaram que ainda tinham dúvidas para relacionar os eixos ‘volume versus tempo’.

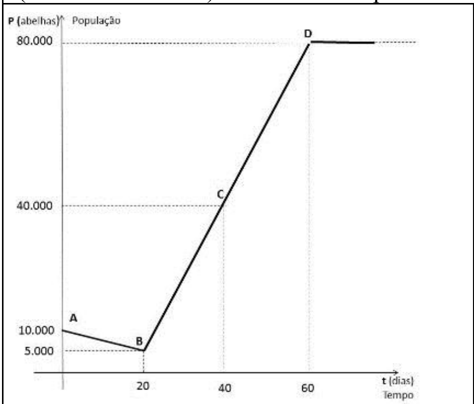
Já no item 9c que envolveu a elaboração de um texto, faltou aos alunos compreender que se a torneira está aberta, no passar dos minutos, pouco a pouco o volume da caixa de água diminui.

Neste item ocorreram 41 acertos (60,29%), ou seja, os alunos que acertaram, conseguiram efetuar a leitura e compreender a relação de correspondência entre volume (l) e tempo (min).

A Atividade 10 envolveu uma informação real da natureza representando graficamente a ‘formação de uma colmeia’. No gráfico pode-se observar a natalidade/mortalidade do enxame: função crescente, decrescente ou constante. Também retoma com a análise dos intervalos de tempo e a variação da população, representando na forma simbólica (algébrica); assim como, a elaboração de um texto explicando o que aconteceu com a população. Fato observado na Figura 48:

Figura 48 – Atividade 10 (M 3)

Atividade 10 - A ilustração que segue apresenta a “formação de uma colmeia (enxame de abelhas) no decorrer tempo”.



Ponto	**t** (dias)	**P** (abelhas)
A		
B		
C		
D		

“Continua”

"Conclusão"

Figura 48 – Atividade 10 (M 3)

I) Observando o gráfico, explique com suas palavras o que aconteceu com a população dessas abelhas:	
II) A população inicial do enxame é de: (a) 5000 (b) 10000 (c) 40000 (d) 80000	**III)** No 60º dia o enxame estava com a população de: (a) 5000 (b) 10000 (c) 40000 (d) 80000
IV) Determine em que **intervalo de tempo (t):** **a)** *A população diminui (*morrem abelhas): **b)** *A população aumenta* (nascem abelhas): **c)** *A população permanece a mesma:*	**V)** Determine qual a **variação da população (p)**, quando: **a)** *Ela diminui:* **b)** *Ela aumenta:* **c)** *Ela não sofre variação* (permanece constante):
VI) Afunção é ***constante*** do **ponto D em diante**. Entretanto a função que compreende os pontos **AB** é:_________________________ **BD** é:_________________________	

Fonte: Adaptado de Biembengut e Hein (2000, p. 105).

A Tabela 19 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 19 - Resultados obtidos na execução da Atividade 10 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
10 (I)	68	41 (60,29)	27 (39,71)
10 (II)	68	52 (76,47)	16 (23,53)
10 (III)	68	52 (76,47)	16 (23,53)
10 (IV)	68	30 (44,12)	38 (55,88)
10 (V)	68	31 (45,59)	37 (54,41)
10 (VI)	68	50 (73,53)	18 (26,47)

Fonte: Documento do autor.

Esta atividade procurou envolver a linguagem gráfica, simbólica (utilizando o símbolo das desigualdades), as coordenadas dos pontos (A, B, C e D) e a elaboração de um texto relacionando 'população versus tempo' da formação de um enxame.

Registra-se que dos 68 alunos participantes, os resultados (número de acertos) registrados foram:

a) No item 10 (I), formação de um texto – 41 acertos (60,29%) constata-se um resultado satisfatório, reforçando a dificuldade que os alunos têm para interpretar um gráfico e redigir um texto.

b) Nos itens 10 (II) e 10 (III) envolvendo o tratamento da informação retirada do gráfico, foram registrados 52 acertos (76,47%), sendo um bom aproveitamento. Os alunos que erraram, relataram que foi por não observar atentamente a localização do ponto A e do ponto D.

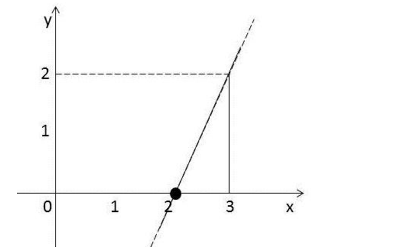
c) Nos itens 10 (IV) e 10 (V) que exigiu um nível maior de compreensão (abstração), o número de acertos foi pequeno, ou seja, 31 alunos (45,59%) conseguiram descrever o intervalo de tempo e variação da população usando os símbolos de desigualdade. Os alunos que erraram e/ou não conseguiram registrar os intervalos da variação (tempo e população) declararam que o elemento complicador foi converter a representação da forma gráfica para a forma simbólica (algébrica), ou seja, não conseguiram fazer a correspondência entre o tempo e a população do enxame (abelhas), associando o conjunto dos números reais, bem como relacionar os símbolos de desigualdade, mesmo diante da participação plena nas atividades colaborativas (AC) intermediadas pelo pesquisador com debate e esclarecimento de todas as dúvidas existentes.

d) Neste item 10 (VI) destaca-se um bom aproveitamento dos alunos: 50 (73,53%). Foram trabalhadas algumas situações envolvendo ‘gráfico e tabela’ em aulas anteriores sobre ‘função crescente, decrescente e constante’ facilitando a compreensão dos alunos. Os estudantes que não completaram o item esclareceram sobre a falta de atenção na leitura e compreensão das informações da tabela. Além disso, 10 alunos disseram que não recordaram como se pode avaliar por meio de uma tabela e/ou gráfico se a função é crescente, decrescente ou constante.

A atividade 11 (Figura 49) envolveu os símbolos de desigualdade: bastando apenas saber onde o gráfico intercepta o ‘eixo x’, sombreando no gráfico a região em que o ‘eixo y’ é (+ , -) e quando o eixo y tem valor 0 (zero), para responder os itens a, b e c.

Figura 49 – Atividade 11 (M 3)

Atividade 11 - Observe o gráfico e determine ao lado de cada item, para que valores de x, o y é:



a) $y > 0$, se x

b) $y = 0$, se x

c) $y < 0$, se x

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 20 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 20 - Resultados obtidos na execução da Atividade 11 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
11.a	67	24 (35,82)	43 (64,18)
11.b	67	31 (46,27)	36 (53,73)
11.c	67	31 (46,27)	36 (53,73)

Fonte: Documento do autor.

A atividade fez com que cada aluno pudesse detectar que para determinar uma reta é necessário ter pelo menos duas coordenadas cartesianas (pontos) e que quando a reta intercepta o ‘eixo x’; o eixo y apresenta valor nulo ‘y = 0’. O valor do ‘eixo x’ é o marco de referência para análise do sinal da função que representa o gráfico (reta). Para os valores maiores que a raiz (valor que o gráfico corta o eixo x) os valores de y são ‘ + ’, ou seja ‘y > 0’ desde que a função seja crescente. E, para os valores menores que a raiz da função os valores de y são ‘ - ’, ou seja, ‘y < 0’.

Observando os resultados pode-se constatar um aproveitamento muito baixo; nos três itens (11a, 11b, 11c); apenas 31 alunos (46,27%) responderam corretamente.

Percebe-se a dificuldade que os alunos têm em converter uma linguagem gráfica em linguagem algébrica, principalmente quando envolve a desigualdade.

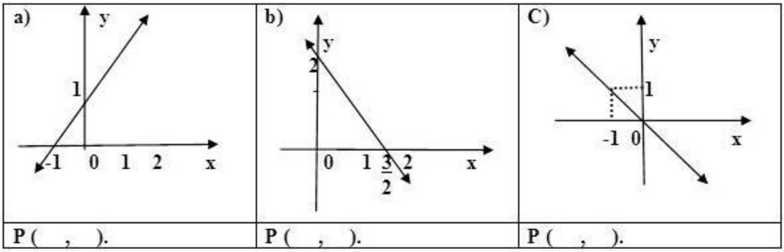
O pesquisador indagando as turmas sobre quais os bloqueios encontrados, ouviu da parte de 36 alunos que mesmo efetuando os cálculos e obtendo a raiz (zero da função), não conseguiram identificar como projetar o gráfico nos eixos x e y, fazendo a relação entre o sinal‘ + ’ e ‘ - ’, e o símbolo de desigualdade ‘> 0’ e ‘< 0’, ou seja, o conjunto dos pontos que têm uma ordenada positiva e ordenada negativa.

No início da aula de matemática seguinte, o pesquisador diante das dúvidas apontadas retomou os pontos principais para compreensão das desigualdades.

A Atividade 12 (Figura 50) apresentou três itens resgatando a compreensão do plano cartesiano (eixos e regiões).

Figura 50 – Atividade 12 (M 3)

Atividade 12 – Observe os gráficos e determine os pontos de intersecção com o **eixo x:**



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 21 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 21 - Resultados obtidos na execução da Atividade 12 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
12.a	69	51 (73,91)	49 (26,09)
12.b	69	46 (66,67)	54 (33,33)
12.c	69	44 (63,76)	56 (36,24)

Fonte: Documento do autor.

O pesquisador pôde confirmar a dificuldade que os alunos têm quando são solicitadas as coordenadas de um ponto nos eixos ‘x e y’.

Mesmo diante dos exemplos e participação dos alunos no quadro, alguns alunos não elaboraram corretamente as coordenadas cartesianas quando o gráfico passa pelo eixo x ‘P_1 (x , 0)’ e quando passa pelo eixo y ‘P_2 (0, y)’; alguns se esqueceram da ordem de apresentação do par ordenado, P (x , y). Entende-se que o resultado poderia ser mais expressivo, pois o maior percentual de acertos foi 51 (73,91%)

A Atividade 13 utilizou uma situação prática vivenciada pelo proprietário de uma empresa. Resgatou as informações repassadas nos exemplos discutidos com os alunos (todas as turmas) envolvendo os símbolos das desigualdades (> e <). A situação é ilustrada na Figura 51.

Figura 51 – Atividade 13 (M 3)

Atividade 13 - Uma indústria produz e vende um único produto. Sabe-se que o lucro dela é obtido pela diferença entre a receita e o custo (L = R – C). A equipe administrativa dessa empresa elaborou uma expressão matemática para melhor estimar o (prejuízo; nem lucro e nem prejuízo; lucro), assim descrita: L = 4 x – 12000. Sabe-se que o Lucro (L) da indústria depende (é dado em função) da quantidade de produto (x) vendido. **Pede-se:**

a) Faça o esboço gráfico desta situação.

b) Determine a quantidade mínima desse produto que deve ser vendida para que 'não haja lucro, nem prejuízo'.

c) Determine a quantidade mínima desse produto que deve ser vendida para que 'haja prejuízo'.

d) Determine a quantidade mínima desse produto que deve ser vendida para que 'haja lucro'.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 22 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 22 - Resultados obtidos na execução da Atividade 13 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
13.a	73	54 (73,97)	19 (26,03)
13.b	73	39 (53,42)	34 (46,58)
13.c	73	31 (42,46)	42 (57,54)
13.d	73	31 (42,46)	42 (57,54)

Fonte: Documento do autor.

Embora os alunos tenham elaborado uma tabela com base na expressão, tendo em vista os pontos que o gráfico intercepta o eixo x, A(x , 0) e o eixo y, B(0 , y); em seguida fazendo o esboço do gráfico da situação (54 alunos acertaram = 73,97%). Os que não conseguiram efetuar as operações do item a (19 alunos = 26,03%), registraram que não relacionaram corretamente as coordenadas cartesianas dos pontos que interceptam os eixos (relação: lucro versus quantidade produzida);

outros não souberam substituir as coordenadas do ponto na expressão matemática fornecida.

O índice de acertos foi baixo nos itens 13b (39 acertos – 53,42%), e 13c - 13d com 31 acertos (42,46%).

Registra-se que o pesquisador solicitou aos alunos que concluíssem a elaboração do esboço (gráfico) da situação, tomando como referência o valor que o gráfico intercepta o eixo x, projetando o gráfico até a linha do eixo y, associando o sinal ‘ + ’ com o símbolo da desigualdade ‘ > 0 ’ e o sinal ‘ - ’ com o símbolo ‘ < 0 ’, para facilitar a compreensão da resolução da situação-problema.

Nesses itens os alunos declararam que mesmo tendo a expressão matemática, eles são conseguiram compreender a relação entre a quantidade (eixo x) e o lucro (eixo y), logo não souberam dar as coordenadas do ponto que o gráfico passa pelo eixo x (abscissa), ou seja, P (x , 0).

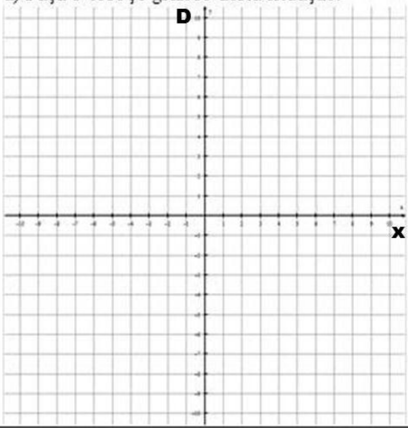
A Atividade 14 apresentou outra indagação presente no mundo do comércio: quando vou ter lucro, prejuízo, ou nenhum dos dois? Duas situações iguais a essa foram apresentadas em aulas anteriores.

Apresenta-se a seguir uma Atividade Integralizadora, conforme ilustra a Figura 52:

Figura 52 – Atividade 14 (M 3)

Atividade 14 - A despesa mensal de uma pequena empresa 'de doces' com encargos sociais é dada pela expressão $\mathbf{D = 20 + \frac{x}{10}}$, em que **D** é a despesa em milhares de reais e **x** é o número de funcionários. Diante do exposto, **pede-se:**

a) Faça o esboço gráfico desta situação.



b) Qual será a despesa quando a empresa tiver 100 funcionários?

c) Qual será o número de funcionários quando a despesa dessa empresa for 50 mil reais?

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 23 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 23 - Resultados obtidos na execução da Atividade 14 (M 3)

Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
14.a	72	52 (72,22)	20 (27,78)
14.b	72	22 (30,56)	50 (69,44)
14.c	72	16 (22,22)	56 (77,78)

Fonte: Documento do autor.

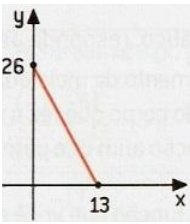
Elaborar uma tabela e representar as informações por meio de um gráfico não foi a maior dificuldade dos alunos. O maior obstáculo se concentrou na compreensão do texto para substituir as informações dos itens 14b e 14c na expressão. Nestes itens o rendimento foi aquém do esperado: 22 (30,56%) e 16 (22,22%) dos participantes acertaram demonstrando falta de conhecimentos.

A Atividade 15 procurou por meio de uma linguagem natural associar a representação gráfica que representa a informação do texto. A ideia era contextualizar uma situação presenciada em nossas casas quanto ao consumo de gás. Veja o que apresenta a Figura 53:

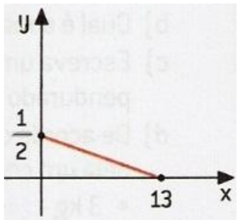
Figura 53 – Atividade 15 (M 3)

Atividade 15 - Considerando que um botijão de gás contém 13 kg de gás, e que em média é consumido por dia 0,5 kg do seu conteúdo. Diante dessas informações, qual esboço do gráfico que melhor expressa a massa **y** de gás no botijão em função de **x** (dias de consumo)?

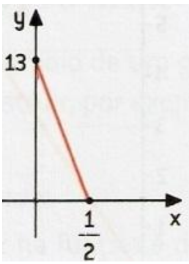
(a)



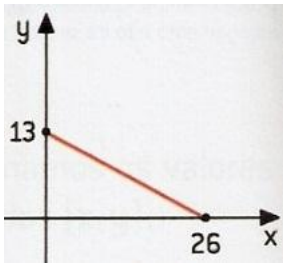
(b)



(c)



(d)



Espaço para os Cálculos:

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 24 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 24 - Resultados obtidos na execução da Atividade 15 (M 3)

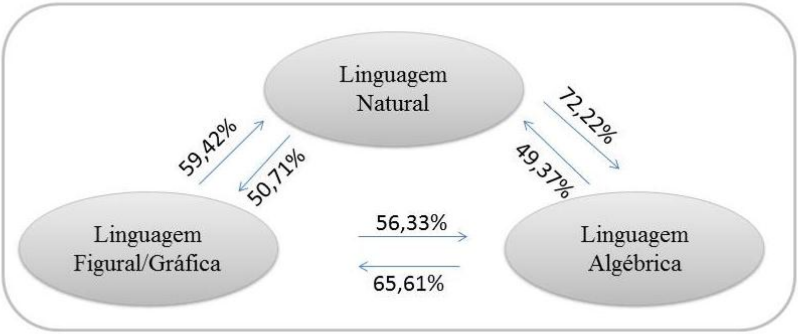
Atividade	Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros (%)
15	73	44 (60,27)	29 (39,73)

Fonte: Documento do autor.

Constatou-se nessa atividade que 85% dos alunos efetuaram o cálculo: botijão contém13 Kg de gás; o consumo por dia é de 0,5 Kg; logo um botijão de 13 Kg leva 26 dias para terminar o gás, porém não observaram as informações relacionadas aos eixos ‘x – dias de consumo' e 'y – massa de gás do botijão'. Portanto, faltou compreender que ao colocar o botijão cheio, o fogão estava desligado – tempo 'zero', tendo o ponto as coordenadas (0 , 13); e, quando o botijão estava sem gás (vazio – massa 'zero') as coordenadas são (26 , 0). Uma parcela de 15 alunos (20,54%) registrou que não compreenderam as informações ao efetuar a leitura do texto. Apenas 44 alunos (60,27%) assinalaram o gráfico correto.

No Quadro 37, pode-se observar um panorama geral (% de acertos) das atividades desenvolvidas pelos alunos, envolvendo a conversão entre as formas de linguagem. Deve-se considerar que o estudo não envolveu o vai-e-vem entre as formas, por serem distintas cada situação-problema. Os resultados deste quadro foram organizados considerando as Atividades Integralizadoras organizadas por itens, sendo classificados pelas formas de linguagem envolvida em cada atividade.

Quadro 37 - Panorama geral das atividades desenvolvidas nos Momentos (2 e 3) em percentuais de acertos



Fonte: Documento do autor.

Considerando que as Atividades (2 e 3) foram elaboradas alternado os níveis de dificuldade (básico, intermediário, alto), constata-se que a dificuldade dos alunos se concentra na conversão da linguagem algébrica para natural (49,37%), seguido da linguagem natural para gráfica (50,71%), gráfica para algébrica (56,33%) e da linguagem gráfica para natural (59,42%).

Embora possa ser observado um acréscimo na compreensão dos alunos referente ao tema, percebe-se que eles ainda apresentam dificuldades para interpretar um texto e convertê-lo para a forma gráfica.

Deve-se ressaltar que em todas as fases da pesquisa foi vivenciada a interação entre o pesquisador e os alunos, objetivando sanar todas as dúvidas e obstáculos que dificultavam a compreensão e aprendizagem do tema ‘Plano Cartesiano e suas regiões’.

É compreensível que os alunos ainda estejam assimilando as formas de linguagem, já que o primeiro contato envolvendo conversões ocorreu apenas no 9º Ano do Ensino Fundamental.

Momento 4 (27º ao 29º encontro) – *Momento em que o pesquisador conclui a sequência de ensino apresentando atividades didáticas considerando a noção dos conceitos, mobilização e coordenação de registros de representação em regiões do Plano Cartesiano.*

Nesse Momento as atividades foram organizadas para promover o desenvolvimento dessas habilidades com o objetivo da conceitualização do objeto matemático em estudo.

O pesquisador nos **27º e 28º encontros**, fez um apanhado geral envolvendo o plano cartesiano e suas regiões por meio de uma realimentação com respeito às desigualdades, tirando dúvidas ainda existentes. Após as explicações, solicitou que cada aluno desenhasse o plano cartesiano e por meio de uma legenda, indicasse em qual região (quadrante) estavam localizadas as expressões ($x < 0$; $y > 0$; $x > 0$; $y < 0$; $x \cdot y > 0$; $x \cdot y < 0$), possibilitando aos alunos, de forma individual, expressar sua compreensão com relação aos diferentes registros.

Todas as atividades propostas foram respondidas individualmente, dividindo cada turma em dois grupos para evitar conversas localizadas pontuais objetivando uma melhor atenção.

No **29º Encontro** foram realizadas as Atividades Integralizadoras (4.1 a 4.3), expostas nas figuras (54 a 56) oportunizando os alunos resolver situações envolvendo os sinais, os símbolos de desigualdade e a correspondência entre as linguagens: ‘algébrica e natural (texto)’, ‘gráfica e algébrica’ e ‘natural e gráfica’.

Registra-se que a orientação dada a cada aluno foi que observasse as informações partindo do sentido (coluna da esquerda para a coluna da direita) ou (coluna superior para a coluna inferior), a fim de facilitar a escolha dos itens, tendo em vista a correspondência entre as formas de linguagem.

Na Atividade 4.1 (Figura 54) apresentaram-se expressões algébricas na 1ª coluna sendo solicitado ao aluno para efetuar a leitura na 2ª coluna fazendo a correspondência com apenas uma das frases.

Figura 54 - Atividade 4.1 (M 4): conversão da forma algébrica para a forma natural

Atividade 4.1 - Dadas as EXPRESSÕES MATEMÁTICAS do **Item 1** abaixo, fazer a correspondência com apenas uma das FRASES do **Item 2** não levando em consideração os pontos sobre os eixos**.**

Item 1. EXPRESSÕES MATEMÁTICAS	* **Item 2. FRASES**
( ) X > 0	**(A)** O conjunto de todos os pontos em que a abscissa e a ordenada têm o mesmo sinal.
( ) Y < 0	**(B)** O conjunto de todos os pontos em que a abscissa e a ordenada têm sinais opostos.
( ) Y > X	**(C)** O conjunto de todos os pontos em que a ordenada é positiva.
	(D) O conjunto de todos os pontos que tem a abscissa positiva.
( ) X > Y	**(E)** O conjunto de todos os pontos em que a abscissa é positiva e a ordenada também é positiva.
( ) XY > 0	**(F)** O conjunto de todos os pontos que tem a ordenada negativa.
	(G) O conjunto de todos os pontos em que a abscissa é negativa.
( ) XY < 0	**(H)** O conjunto de todos os pontos em que a ordenada é maior do que a abscissa.
	(I) O conjunto de todos os pontos em que a abscissa é negativa e a ordenada também é negativa.
	(J) O conjunto de todos os pontos em que a abscissa é maior do que a ordenada.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 25 registra o número de alunos que conseguiram efetuar a correspondência das seis expressões matemáticas com o seu texto correspondente.

Tabela 25 - Atividade 4.1: Linguagem Algébrica para Linguagem Natural

Número de Alunos participantes:						69
Total de questões:						6
Nº de Acertos	1	2	3	4	5	6
Total de Alunos	7	8	10	15	23	6
Porcentagem (%)	10,15	11,60	14,49	21,73	33,33	8,70
Acertos e **(%)**	De 1 a 3 acertos		**36,24**	De 4 a 6 acertos		**63,76**

Fonte: Documento do autor.

Pode-se observar que 25 alunos (36,24%) obtiveram de 1 a 3 acertos e 44 (63,76%) obtiveram de 4 a 6 acertos.

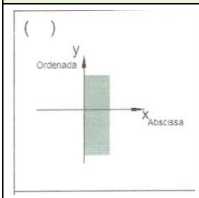
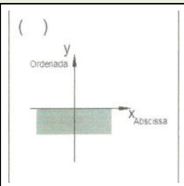
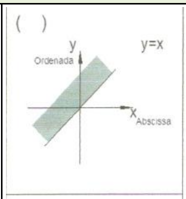
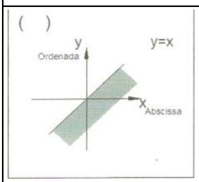
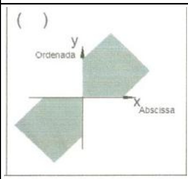
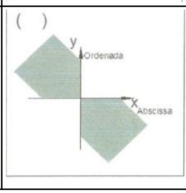
O pesquisador perguntou aos alunos onde ocorreu a dificuldade de compreensão, sendo informado que de que foi ao relacionar a expressão matemática com os símbolos de desigualdade, e associá-la ao texto.

Ressaltaram que abstrair a ideia dos sinais ligando o sentido dos eixos e as regiões do plano cartesiano foi o primeiro obstáculo. O segundo obstáculo se concentrou na significação operatória vinculada ao significante e que comanda o tratamento, ou seja, "associar o sinal ' + ' com o símbolo de desigualdade ' > 0 ' e o sinal ' - ' com o símbolo ' < 0 ' isso, para os alunos, não ocorre de forma natural e espontânea".

Essa dificuldade pode ser analisada em termos da significação e do fenômeno da congruência semântica expostos nos Quadros (13, 14, 17, 19, 20, 21, 22 e 23).

Na Atividade 4.2 (Figura 55) apresentaram-se os registros gráficos na 1ª coluna sendo solicitado ao aluno para efetuar a leitura na 2ª coluna fazendo a correspondência com apenas uma das expressões.

Figura 55 – Atividade 4.2 (M 4): conversão da forma gráfica para a forma algébrica

<table>
<tr><td colspan="3">Atividade 4.2 – Dados os gráficos do Item 1 abaixo, fazer a correspondência com apenas uma das EXPRESSÕES MATEMÁTICAS do Item 2 não levando em consideração os pontos sobre os eixos e retas.</td><td rowspan="2">Item 2. EXPRESSÕES MATEMÁTICAS
O conjunto de pontos (x, y) do plano cartesiano, tais que:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Item 1. GRÁFICOS</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td rowspan="2">(A) Y < 0
(B) X > 0
(C) Y > 0
(D) X < 0
(E) X > Y
(F) Y > X
(G) Y = - X
(H) XY > 0
(I) XY < 0</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 26 registra o número de alunos que conseguiram efetuar a correspondência dos seis registros gráficos com a sua expressão matemática (algébrica) correspondente.

Tabela 26 – Atividade 4.2: Linguagem Gráfica para Linguagem Algébrica

Número de Alunos participantes:						69
Total de questões:						6
Nº de Acertos	1	2	3	4	5	6
Total de Alunos	10	0	8	13	15	23
Porcentagem (%)	14,49	0,00	11,59	18,84	21,73	33,33
Acertos e (%)	De 1 a 3 acertos		**26,08**	De 4 a 36 acertos		**73.92**

Fonte: Documento do autor.

Pode-se observar que 18 alunos (26,08%) obtiveram de 1 a 3 acertos e 51 (73,92%) obtiveram de 4 a 6 acertos. 43 estudantes informaram que o fator limitador esteve em efetuar a leitura do gráfico observando a região sombreada no plano cartesiano e a expressão matemática correspondente.

O pesquisador no intuito de compreender o que eles queriam dizer com aquela afirmação, retrucou: “então, vocês não conseguiam interpretar o significado de cada gráfico, tendo como referência a origem dos eixos e os respectivos Sinai sem cada eixo associando os símbolos de desigualdade correspondente para, em seguida organizar a expressão matemática”. Eles concordaram com a afirmativa.

Ressalta-se que compreender a significação operatória entre o sinal e o símbolo continua sendo o maior obstáculo enfrentado pelos alunos.

Na Atividade 4.3 (Figura 56) apresentam-se os registros na forma de texto (1^a coluna) sendo solicitado ao aluno para efetuar a leitura na 2^a coluna fazendo a correspondência com apenas um dos gráficos.

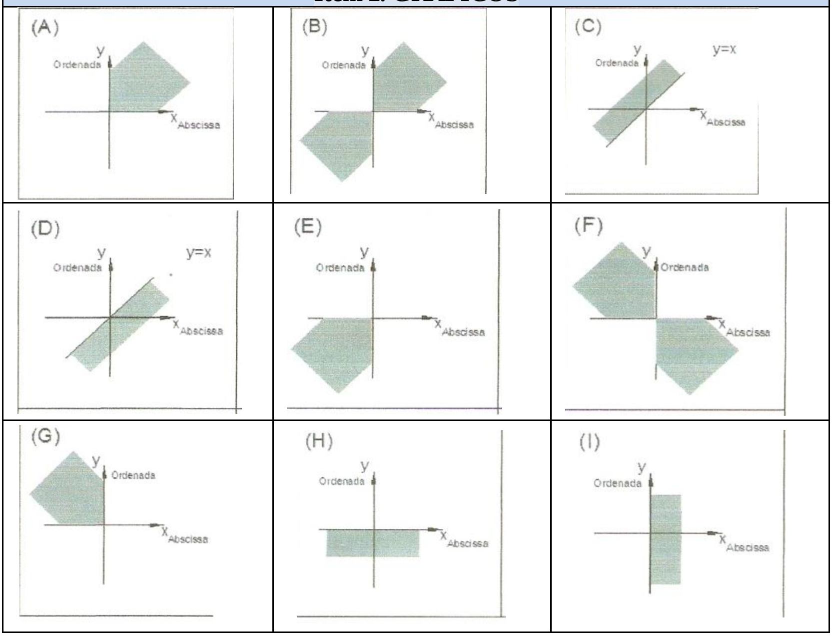
Figura 56 - Atividade 4.3 (M 4): conversão da forma natural para a forma gráfica

Atividade 4.3 - Dadas as frases do **Item 1** abaixo, fazer a correspondência com apenas um dos **GRÁFICOS** do **Item 2** não levando em consideração os pontos sobre os eixos e retas.

Item 1. FRASES

(   ) o conjunto de todos os pontos que tem a abscissa positiva.
(   ) o conjunto de todos os pontos que tem a ordenada negativa.
(   ) o conjunto de todos os pontos em que a ordenada é maior do que a abscissa.
(   ) o conjunto de todos os pontos em que a abscissa é maior do que a ordenada.
(   ) o conjunto de todos os pontos em que a abscissa e a ordenada tem o mesmo sinal.
( ) o conjunto de todos os pontos em que a abscissa e a ordenada tem sinais opostos.

Item 2. GRÁFICOS



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 27 registra o número de alunos que conseguiram efetuar a correspondência das seis frases (registro textual – forma corrente) com o seu gráfico correspondente.

Tabela 27 - Atividade 4.3: Linguagem Natural para Linguagem Algébrica

Número de Alunos participantes:						69
Total de questões:						6
Nº de Acertos	1	2	3	4	5	6
Total de Alunos	12	18	15	5	8	11
Porcentagem (%)	17,40	26,08	21,74	7,24	33,78	15,94
Acertos e (%)	De 1 a 3 acertos		65,22	De 4 a 36 acertos		34,78

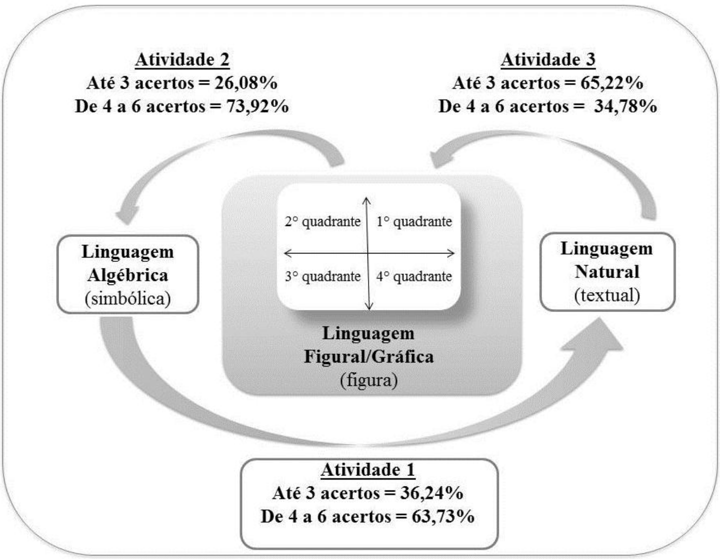
Fonte: Documento do autor.

Pode-se observar que 45 alunos (65,22%) obtiveram de 1 a 3 acertos e 24 (34,78%) obtiveram de 4 a 6 acertos.

O pesquisador querendo compreender onde se concentrou a dificuldade deles, indagou: “nesta atividade, vocês não conseguiram compreender o texto?”. Os estudantes responderam: “professor, qualquer um consegue ler o texto, a dúvida foi em relacionar o eixo da ‘abscissa’ e da ‘ordenada’, com o significado dos sinais e os símbolos de desigualdade representados em cada gráfico”.

Considerado os percentuais de aproveitamento dentro de uma faixa de acertos obtêm-se os resultados apresentados no Quadro 38 - síntese geral das Atividades Integralizadoras (4.1 a 4.3).

Quadro 38 - Mobilização entre os registros (natural, gráfico e algébrico): percentuais do aproveitamento dos alunos (M 4)



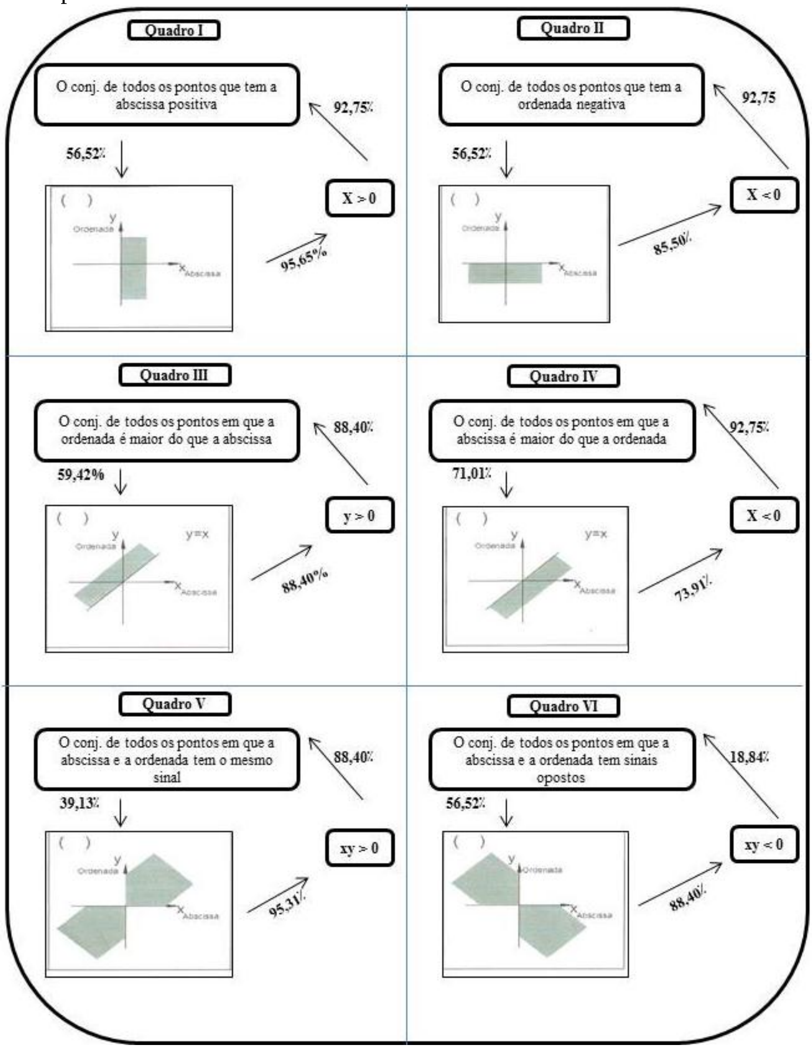
Fonte: Documento do autor.

O pesquisador ficou surpreso com os resultados das atividades desenvolvidas, diante das inúmeras dúvidas levantadas pelos alunos no 19º encontro. Cabe o registro de que eles participaram ativamente do processo.

Entretanto deve-se estar atento para a relação da significação operatória vinculada ao objeto e ao fenômeno da congruência semântica, buscando mecanismos para que o aluno possa ter uma melhor compreensão do objeto de estudo.

O Quadro 39 apresenta uma síntese geral da compreensão dos alunos nas Atividades Integralizadoras (1 a 3) – Momento 4, considerando a conversão entre os registros das formas (natural → gráfica, gráfica → algébrica, e algébrica → natural).

Quadro 39 - Mobilização entre registros: percentuais considerando a correspondência entre os itens 1 e 2.



Fonte: Documento do autor.

Constata-se por meio dos resultados apresentados nos quadros (I, II, III, IV, V e VI) do Momento 4, que a menor porcentagem de acertos dos alunos se concentrou na passagem da forma natural para a forma gráfica; e a maior sendo a passagem da forma algébrica para a forma gráfica.

Concluindo o Momento 4, o pesquisador registra que todas as atividades contribuíram para envolver a dimensão pessoal e institucional do objeto “plano cartesiano”.

Destaca-se também a necessidade e envolvimento dos alunos no sentido de buscar a compreensão da significação entre os sinais e os símbolos de desigualdade em cada quadrante.

4.1.2 Considerações finais sobre o desempenho dos alunos correlato ao problema de pesquisa

Muitos foram os desafios do pesquisador para organizar a parte experimental, dentre eles, a elaboração de uma sequência didática voltando-se para situações do cotidiano que despertassem uma maior motivação e interesse dos alunos.

Na experiência realizada tomou-se como ênfase que o trabalho envolvesse, simultaneamente, o processo e os conteúdos matemáticos, seguindo as ideias de Duval e de Godino. Contudo, cabe frisar que ao fazer a opção no âmbito do seu trabalho, cada professor, em função de sua experiência e do seu discernimento, cria alternativas para superar as dificuldades que, com certeza, aparecerão.

Com relação às questões investigadas no problema de pesquisa destacam-se alguns pontos relevantes:

a) É de suma importância que o pesquisador/professor tenha sempre em mente os significados institucionais e pessoais postos em jogo, estando aberto para o diálogo e participação dos alunos, permitindo-lhes o repasse de sua compreensão sobre a situação-problema em estudo.

b) Mesmo o pesquisador tendo experiência (anos de profissão), foi significante elaborar o esboço da configuração epistêmica e das entidades envolvidas na(s) situações-problema, para não fugir do conteúdo proposto.
Cabe o registro de que as análises das dificuldades dos alunos foram realizadas à luz da manifestação expressa por eles, de forma oral, após cada Atividade Integralizadora (AI) realizada.

c) Merece destaque a compreensão dos alunos sobre as formas de linguagem (natural, simbólica e gráfica) no contexto do tema ‘Plano Cartesiano e suas regiões’. Porém, não significa que o rendimento dos alunos foi excelente, mas que foram envolvidos por situações do cotidiano com níveis de dificuldade variados (básico; intermediário e com alto nível de dificuldade), todas intercaladas para melhor compreensão do tema.

d) O primeiro contato dos alunos relacionando a matemática com as formas de linguagem ocorreu nesta pesquisa (no 9º Ano do EF), o que pode ter sido um fator dificultador, dada a inabilidade apresentada em converter as diferentes linguagens.

e) Os alunos puderam trabalhar algumas atividades colaborativas (AC) e integralizadoras (AI) efetuando conversões por meio da (ilustração, tradução, descrição) procurando minimizar os custos de tratamento para resolver/explicar uma situação-problema, associando conceitos aos diferentes registros nas regiões do plano cartesiano. Ficou evidente que alguns tratamentos dificultam a compreensão dos estudantes; pode-se considerar que o desempenho (rendimento) dos participantes nas atividades propostas foi satisfatório.

f) O pesquisador constatou que nos Momentos (2 e 3), ao dividir as turmas em grupos de dois alunos, possibilitou o diálogo e a troca de conhecimento entre eles, além de maior concentração. Todos compreenderam os elementos que constituem o plano cartesiano: os eixos (abscissa e ordenada), as coordenadas de um ponto, seguindo o sentido dos eixos tendo como referência a origem (ponto onde os eixos se cruzam).

g) Algumas dificuldades foram observadas, principalmente na substituição de um valor de uma incógnita numa expressão; também em associar os símbolos de desigualdade (> , <) com as regiões do plano cartesiano quando aparecem situações que envolvem lucro, prejuízo, ou receita zero.

h) As Tabelas das atividades destacando o aproveitamento (nº de acertos) dos alunos e o Quadro 39 (panorama geral) indicam nos Momentos (2 e 3) um baixo aproveitamento na conversão da linguagem algébrica para linguagem natural (49,37% de acertos), assim como da linguagem natural para a linguagem gráfica (50,71% de acertos). A conversão entre as outras formas variou entre 59% e 72% de acertos. Com estas informações percebe-se a dificuldade dos estudantes do 9º Ano para interpretar um texto, e converter ele para outra forma de linguagem (gráfica ou algébrica).

i) Observando o aproveitamento dos alunos no momento 4 (Quadro 41), e considerando que todas as explicações foram trabalhadas dividindo cada turma em dois grupos para facilitar a concentração e o entendimento, constata-se que nos quadros (I, II, III, V, VI) os alunos tiveram maior dificuldade de compreensão na conversão da linguagem natural para a forma gráfica. No quadro VI, ocorreu baixo aproveitamento (18,84%) na conversão da linguagem algébrica para a forma natural.

j) Em se tratando da complexidade da organização visual e sua representação gráfica no plano cartesiano com respeito ao tratamento da informação, pode-se observar uma dificuldade na compreensão (leitura) da imagem (figura) apresentada; muito embora fossem feitas várias revisões no transcurso da pesquisa, sobre a correspondência que existe entre as grandezas dos eixos (x e y), ainda assim alguns alunos não compreenderam. Deve-se esclarecer que as representações semióticas além de atuar como um suporte para as representações mentais, tendo a função de comunicá-las por meio de uma representação, têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento; sendo resultante do estado de espírito do sujeito quando observa o objeto.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa voltou-se o olhar para as práticas de ensino e para o conhecimento que se transmite nas escolas, podendo-se constatar o distanciamento entre a teoria do currículo e as questões escolares. As discussões vão muito além do currículo, envolvem questões e problemas de abrangência sociocultural, política e econômica para a construção de uma escola de qualidade no país.

Por outro lado, temos o professor com sua formação e identidade, com seus saberes e prática profissional dentro do cotidiano escolar, o qual precisa estar atento à sua ação pedagógica no sentido de buscar compreender os limites e indagações sobre as questões que interferem na educação escolar, e criar mecanismos para despertar no aluno a busca por caminhos que o conduza à construção do conhecimento.

O problema do ensino no Brasil envolve também questões relativas às condições de trabalho, atuação dos professores, origem dos alunos, suas necessidades de atendimento escolar, à necessidade de entender melhor o que se ensina na escola, por que se ensina tal conteúdo, o que se deixa de ensinar e o que faz com que os alunos não tenham sucesso.

Este desafio é corrente na área da Matemática, por ser histórica a dificuldade de compreensão e rendimento dos alunos, como revelam dados fornecidos pelo Sistema de avaliação da educação básica (Saeb) / Prova Brasil, que mede o desempenho de alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio das escolas do Brasil.

Diferentemente de outras áreas do conhecimento, em Matemática a informação se dá embasada por representações e, sendo os objetos matemáticos abstratos, não estão diretamente acessíveis na percepção ou numa experiência intuitiva imediata como estão os objetos ditos ‘reais’ ou ‘físicos’.

É lamentável constatar que muitas práticas pedagógicas têm seus recursos limitados somente ao livro didático, propiciando lacunas na construção do ensino-aprendizado do aluno. É preciso compreender que nas salas de aula os saberes não estão prontos, mas vivenciam relações conceituais articuladas com práticas sociais, observando as razões que as impulsionam e delas derivam. Além disso, os níveis de significação variam de aluno para aluno.

A pesquisa focalizou uma prática diferenciada dentro do tema ‘Plano Cartesiano e suas regiões’, enfrentando o desafio de alimentar nos alunos o desejo para adquirir conhecimentos matemáticos contribuindo para a sua formação cidadã e uso na vida cotidiana. As aulas realizadas de forma participativa, dialogada, procuraram incentivar os adolescentes a elaborar, expor, discutir e até mesmo defender suas ideias, recorrendo a diferentes registros de representação de um conceito, desenvolvendo a capacidade de tratar e fazer a conversão das diversas formas de registros de representação semiótica relacionadas ao objeto de estudo. Essa busca proporcionou ao professor-pesquisador reflexões que apontaram novos caminhos para a apropriação e uso na sua prática docente.

Conclui-se que mesmo com os distintos tipos de Atividades Colaborativas (AC) e Integralizadoras (AI) ligadas ao tema ainda não houve um avanço significativo no processo de ensino e aprendizagem dos alunos tendo em vista o objeto matemático 'Plano Cartesiano e suas regiões', o que aponta para uma maior dificuldade quando não há a presença de tais atividades na prática docente.

Por outro lado, nesta pesquisa, destacou-se também a importância da linguagem enquanto elemento que selecionou e intermediou todos os momentos de ensino constituindo-se de uma linguagem matemática escrita (linguagem natural, simbólica e gráfica) e oral, compartilhando significados próprios desse contexto para que os alunos se aproximassem do saber institucionalizado.

Envolver o tratamento e a conversão de registros relacionando Plano Cartesiano foi um grande desafio. Entretanto trouxe uma gama de aprendizados e detalhes que devem ser observados pelo pesquisador/professor no estudo do tema. Percebeu-se a variedade de representações de um mesmo objeto matemático em diferentes contextos do cotidiano do aluno e a necessidade de aproximar teoria e prática para uma maior abstração.

Neste sentido pode-se afirmar que ignorar os registros de representação semiótica na construção do conhecimento matemático tendo o aporte da teoria de Duval significaria desconsiderar a essência da evolução do pensamento matemático, envolvido por representações.

Limitar a possibilidade para o sujeito adquirir novos conhecimentos matemáticos, bloqueia a imaginação de novos conhecimentos, contrariando o processo histórico de sua construção, pois a existência de um objeto matemático não se destina até uma representação.

Observando os resultados da pesquisa concretizada, assegura-se que as atividades elaboradas e sequências de ensino bem estruturadas são de grande importância e muito contribuem, porém não são suficientes, tendo em vista que elas, por si mesmas, não asseguram o ingresso ao saber e que necessitam ser contínuas, ou seja, devem estar presentes em todos os anos de formação.

Há que se ressalta também que esses processos necessitam ser mediados e ponderados, pois devem estar conectados com outras ferramentas da aprendizagem, do mesmo modo ou da mesma forma como a natureza das tarefas escolares, aspectos afetivos envolvendo a aprendizagem da matemática, condições socioeconômicas dos alunos, atendimento às pessoas com necessidades específicas dentre outros, como enfatizou Godino em seus estudos.

Considerando o meio socioeconômico em que a escola está inserida e embora a pesquisa aspirasse a uma integralização plena de acertos, pode-se dizer que os resultados foram satisfatórios diante do fato dos alunos terem tido o primeiro contato com uma prática diferenciada de ensino apenas no último ano do ensino fundamental. Sugere-se a inserção desta metodologia, em todas as séries do ensino fundamental.

Com relação ao livro didático, reforçamos que ele não é o único meio auxiliar do professor. Cabe ao docente, na organização da sua aula, envolver as conversões (linguística, algébrica, gráfica,...), atentando para as realidades e os resultados, e com criatividade, organizar aulas dinâmicas, o uso de tecnologias e práticas que envolvam maior participação dos alunos. Lembra-se aqui que, para todo registro da representação de um objeto, existe um conteúdo próprio (conceito) e uma forma que permite levar em conta o sistema no qual ele foi produzido.

Nas coleções de livros pesquisadas, pode-se observar que os autores apresentaram poucos exercícios envolvendo o tratamento e a conversão entre os diferentes registros, o que em nossa visão, com base nas teorias de Duval e de Godino, não facilita a construção do conhecimento matemático e suas aplicações.

Também enquanto prática de ensino é sempre bem vinda a conexão entre teorias, desde que se priorize a linguagem matemática no campo do ensino-aprendizado com a participação dos elementos fundamentais no processo, ou seja, ‘escola, família, professor e aluno’.

A pesquisa realizada reaviva a necessidade de que todo professor deve observar durante o processo de ensino e aprendizagem o as dificuldades e o avanço cognitivo quanto às práticas matemáticas nas regiões do plano cartesiano.

Nesta experiência, ficou evidente que a dificuldade dos alunos concentrou-se na inabilidade referente à passagem do registro de representação da linguagem algébrica para a natural, assim como da linguagem natural para a linguagem gráfica e da linguagem gráfica para a algébrica, constituindo uma tarefa difícil para grande número de alunos. O que acontece, na verdade, é que a compreensão dos alunos fica limitada à forma de representação que eles conhecem e que sabem operar.

Também foi recorrente as limitações para associar os símbolos da desigualdade quando integrados às grandezas em correspondência, ou seja, aos eixos da abscissa e da ordenada.

Partindo das implicações da diversidade de representações em matemática e das operações de tratamento e conversão, pode-se perceber o ensino de matemática como uma porta facilitadora no aprendizado desta disciplina pelos estudantes, que se abre a nós professores de matemática

Essa realidade só é possível se ocorrer uma continuidade pedagógica nas ações desenvolvidas pelos professores, ou seja, menor alternância de professores de matemática no ensino fundamental.

Evidentemente que numa sala geralmente com muitos alunos, o professor não pode esquecer que cada um, assim como ele, possui sua própria individualidade. Isso significa que cada aluno estabelece uma relação específica com seu professor, que ao mesmo tempo estabelece uma relação específica com cada membro da classe.

Este trabalho não teve como propósito esgotar o estudo de metodologias de ensino do tema Plano Cartesiano e suas regiões, mas buscou-se despertar a preocupação e a necessidade na área da educação matemática no Brasil para o ato de ensinar e de aprender sobre esse tema.

Novas pesquisas podem vir a contribuir com a área e com o objeto desta pesquisa, pois todo conhecimento pode ser ampliado e existe um leque de oportunidades ainda desconhecidas, esperando para serem estudadas, pesquisadas, exploradas e investigadas. O que já é conhecido permite experimentar novos saberes e incita a todos a buscar respostas mais precisas, no intuito de uma compreensão mais ampla.

REFERÊNCIAS

ALTRICHTER, H.; POSCH, P.; SOMEKH, B. **Teachers investigate their work**: an introduction to the methods of action research. London: Routledge, 1996.

AUSUBEL, P. D. et al. **Psicologia educacional**. Tradução de Erla Nich. Rio de Janeiro: Iberamenicana, 1980.

BACCA, P. C.; BAIER, T. Representação de pontos no plano cartesiano: atividades didáticas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 2013. Disponível em: <http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/3463_1912_ID.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2013.

BAKER G. P.; HACKER P. M. S. **Wittgenstein rules, grammar and necessity**: of an analytical commentary on the Philosophical Investigations. Glasgow: Basil Blackwell, 1985. v. 2.

BIANCHINI, E. **Matemática**: 6º Ano. São Paulo: Moderna, 2009a.

______. **Matemática**: 7º Ano. São Paulo: Moderna, 2009b.

______. **Matemática**: 8º Ano. São Paulo: Moderna, 2009c.

______. **Matemática**: 9º Ano. São Paulo: Moderna, 2009d.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**: 8ª Série. São Paulo: FTD, 2000.

BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. Networking of theories: an aproach for exploiting the diversity of theorical approachs. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Ed.).**Theories of mathematics education**: seeking new frontiers. Berlin: Sringer, 2010. p. 483-505.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs.Objet d’étude et problématique.

Recherches em Didactique des Mathématiques, Grenoble, v. 19, n. 1, p. 77–124, 1999.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exemplo de questões**: 9º ano do Ensino Fundamental: Matemática. Disponível em:<http://provabrasil.inep.gov.br/downloads>. Acesso em: 08 out. 2012a.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Modelo teste Prova Brasil**: 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=7998&Itemid=>. Acesso em: 08 out. 2012b.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de Livros Didáticos**: PNLD 2011: Matemática. Brasília: MEC, 2010.

______. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/CEB, 2006.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática: Brasília: MEC, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática: ensino fundamental de 5.ª a 8.ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática: ensino médio. Brasília: MEC/SETEC, 1999.

BREUNIG; Raquel Taís; NEHRING, Cátia Maria; POZZOBON, Marta Cristina Cesar. Análise dos procedimentos de conversão de alunos de oitava série na perspectiva dos registros de representação. In: ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DO SUL (EREMATSUL), 16., 2010, Porto Alegre. **Anais...** Porto

Alegre: Fapergs; EdiPUCRS, 2010. p. 91-103. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/31RAQUELBREUNIG.pdf>. Acesso em: 08 nov. 2013.

CAMBORIÚ. Secretaria de Educação e Cultura. Escola Básica Municipal Anita Bernardes Ganancini. **Projeto Político Pedagógico**. Camboriú, 2012.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une aproche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

COBB, P. Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. **For the learning of mathematics**, Georgia, v. 9, n. 2, p. 32-42, 1989.

COLOMBO, J. A. A. **Representações semióticas no ensino:** contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar. 2008. 232 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Centro de Educação, Ciências Físicas, Biológicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

CONDÉ, M. L. L. Ciência e linguagem: Ludwik Fleck e Ludwik Wittgenstein. In: CONDÉ, M. L. L. (Org.). **Ludwik Fleck**: estilos de pensamento na ciência. Belo Horizonte: Fino Traço, 2012. p. 77-107.

COSTA, A. B; GONÇALVES, F. S; ANGELOTTI , V. C.; GONÇALVES, S. G. C. Atividade integrada de ensino, pesquisa e extensão: uma experiência com o ensino de plano cartesiano para alunos com cegueira total simulada. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO ESPECIAL, 4.; ENCONTRO NACIONAL DOS PESQUISADORES DE EDUCAÇÃO ESPECIAL, 6., 2010, São Carlos. **Anais...** São Carlos, 2010. Disponível em:<http://www.4shared.com/web/preview/doc/lfqsQjcd>. Acesso em: 08 nov. 2013.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**: 6º Ano. São Paulo: Ática, 2009a.

______. **Tudo é matemática**: 7º Ano. São Paulo: Ática, 2009b.

______. **Tudo é matemática**: 8º Ano. São Paulo: Ática, 2009c.

______. **Tudo é matemática**: 9º Ano. São Paulo: Ática, 2009d.

DESCARTES, R. **Discurso do método.** Porto Alegre: L&PM, 2004.

DUARTE, Rafael de Souza; FREITAS, Maria Teresa Menezes. **O jogo de xadrez no ensino da matemática**. Uberlândia, 2012. Disponível em: <http://www.xadrezreal.com.br/documentos/artigo_01.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2013.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012b. Disponível em:<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p97/22381>. Acesso em: 14 out. 2012.

______. Écartes sémantiques et chérence mathématique: introduction aux problémes de congruence. In: DIDATIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES, 1988, Strasburg. **Annales...** Strasburg: Irem de Strasburg, 1988a. v.1, p. 7-25.

______. Graphiques eté quations: I'articulation de deus registres. In:DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES, 1988, Strasburg. **Annales...** Strasburg: Irem de Strasburg, 1988b. v.1, p. 235-253.

______. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011a. Disponível em:<http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96/21794>. Acesso em: 22 jan. 2012.

______. **L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique**: cours sur les apprentissages intellectuels donné à la PUC-SP. São Paulo: Février, 1999.

______. **Lecture et compréhension dês textes**. Strasbourg: ULP-IREM, 1986.

______. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de lapensée. In: DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES, 1993, Strasbourg. **Annales…** Strasbourg: ULP-IREM, 1993. v. 5, p. 37-65.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 22 jan. 2012.

______. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Veja Restrepo. 2. ed. Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2004.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011b.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo dicionário da língua portuguesa.** 4. ed. Curitiba: Positivo, 2009.

FLECK, L. **Gênese e desenvolvimento de um fato científico:** introdução à doutrina do estilo de pensamento e do coletivo de pensamento, Georg Otte e Mariana Camilo de Oliveira (Trad.). Belo Horizonte: Fabre factum, 2010.

FOGAÇA, Jennifer. **Contextualização**. Disponível em: <http://educador.brasilescola.com/trabalho-docente/ contextualizacao.htm>. Acesso em: 04 dez. 2013.

FONT, V. M. **Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràphiques**. Barcelona: Universidade de Barcelona, 2000. Tese doctoral..

FONT, V. M.; RAMOS, A. B.; CONTRERAS, A. Contexto e contextualización em la enseñanza e em la aprendizaje das matemáticas: uma perspectiva ontosemiótica. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. **Actas...** Porto, 2005.

FREIRE, P. **A importância do ato de ler**: em três artigos que se completam. 22 ed. São Paulo: Cortez, 1988.

______. **Educação e terra**. 26. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

FREGE, G. **Lógica e filosofia da linguagem**. São Paulo: Cultrix, 1978.

GIOVANNI, J. R; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; DANTE, L. R. **Matemática**: teoria – exercícios – aplicações, v. 1, 2º grau. São Paulo: FTD, 1998.

GIOVANNI, J. R. GIOVANNI JUNIOR, J. R. **Matemática**: pensar e descobrir, 9º Ano. São Paulo: FTD, 2010.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**: 6º Ano. São Paulo: FTD, 2009a.

______. **A Conquista da Matemática**: 7º Ano. São Paulo: FTD, 2009b.

______. **A Conquista da Matemática**: 8º Ano. São Paulo: FTD, 2009c.

______. **A Conquista da Matemática**: 9º Ano. São Paulo: FTD, 2009d.

______. **Matemática:** pensar e descobrir: 9º Ano. São Paulo: FTD, 2010.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, v. 22, n. 2/3, p. 237-284, 2002. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em: 10 set. 2012.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994. Disponível em:

<http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em 10 jan. 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. **Um enfoque Ontosemiótico para la didáctica de las matemáticas**. Granada: Universidade de Granada, 2006. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino>. Acesso em: 13 out. 2012.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução matemática. Tradução de Edson Crisóstomo dos Santos e Claudia Lisete Oliveira Groenwald. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 7-37, jul./dez. 2008. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em: 10 jan. 2013.

GOMES, E. **Benefícios do jogo de xadrez**. 2013. Disponível em: <http://gomferr.com.br/p/beneficios-do-jogo-de-xadrez/>. Acesso em: 02 dez. 2013.

GOTTSCHALK, C. M. C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, p. 305-334, 2004.

GROENWALD, C. L. O. A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, n.1, p. 23-30, 1999.

HUGUENIN, R. C.; LOPES, A. M. de A.; MOREIRA; FREITAS, M. Protótipo de um plano cartesiano digital para portadores de deficiência visual. In: CONGRESSO FLUMINENSE DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA (CONFIT), 5., 2013, Campos dos Goytacazes. **Anais...** Campos dos Goytacazes: Essentia, 2013. Disponível em: <http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/confict/issue/view/119>. Acesso em: 11 nov. 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**: 6º Ano. São Paulo: Atual, 2009a.

______. **Matemática e realidade**: 7º Ano. São Paulo: Atual, 2009b.

______. **Matemática e realidade**: 8º Ano. São Paulo: Atual, 2009c.

______. **Matemática e realidade**: 9º Ano. São Paulo: Atual, 2009d.

JAPIASSU, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de filosofia.** Rio de Janeiro: J. Zahar, 1996.

LERMAN, S. Theories of mathematics education: is plurality a problem? In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Ed.). **Theories of Mathematics Education**: seeking new frontiers**.** Berlin: Springer, 2010. p. 97-117.

LOTMAN, Y. M. **Universe of the mind**: a semiotic theory of culture. Bloomington: Indiana University, 1990.

LUIZ, L. dos S. Caça às coordenadas: construindo o conceito de representação cartesiana através de um jogo didático. **Educação em Rede**, Florianópolis, v. 2, n. 1, dez. 2007. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/educacaoemrede/article/view/1767/1383>. Acesso em: 11 nov. 2013.

MARQUES, M. O. **Aprendizagem na mediação social do aprendido e da docência**. Ijuí: Ed. da Unijuí, 2000.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

______. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, p. 57-59, jan./jun. 2003.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Contrapontos**: Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, n. 6, p. 343-362, set./dez. 2002.

MORETTI, M. T.; THIEL, A. A. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **Revista Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 379-396, jul./dez. 2012. Disponível em: <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa>. Acesso em: 07 nov. 2013.

NERUDA, Pablo. **Frases de Pablo Neruda**. Disponível em: <http://www.frase.co/de/pablo-neruda>. Acesso em: 09 de out. 2013.

NOÉ, M. **Matemática**. 2013. Disponível em: <http://www.brasilescola.com/matematica/>. Acesso em 30 nov. 2013

OGDEN, C. K.; RICHARDS, I. A. **The meaning of meaning.** New York: Hartcout, Brace, 1956.

OLIVEIRA, N. de. **Conceito de função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. 174f. Dissertação de Livre docência (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 1997.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança:** imitação, jogo, sonho, imagens e imitação. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

RADFORD, L. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. **ZDM Mathematics Education**, New York, v. 40, p. 317-327, 2008. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/39_ZDMWebVersion.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2013.

REBOUÇAS, F. **Jacques Anatole François Thibault**. 2012. Disponível em: <http://www.infoescola.com/biografias/anatole-france/>. Acesso em: 26 fev. 2013.

REDE INTERATIVA VIRTUAL DE EDUCAÇÃO. **Guia do professor: sistemas de coordenadas**. Disponível em: <http://mdmat.mat.ufrgs.br/rived/coordenadas/guiaprof_coordenadas.pdf>. Acesso em: 07 nov. 2013.

RIBEIRO, J. da S. **Projeto radix**: matemática, 6º Ano. São Paulo: Scipione, 2009a.

______. **Projeto radix**: matemática, 7º Ano. São Paulo: Scipione, 2009b.

______. **Projeto radix**: matemática, 8º Ano. São Paulo: Scipione, 2009c.

______. **Projeto radix**: matemática, 9º Ano. São Paulo: Scipione, 2009d.

ROQUE, R. R.; PEREIRA, P. S. Da atividade ao conceito de plano cartesiano: uma vivência na escola. In: ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EIEMAT), 3.; ENCONTRO NACIONAL PIBID-MATEMÁTICA, 1., 2012, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria, 2012. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/edicao_3/apresentacao.html>. Acesso em: 11 nov. 2013.

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos:** como as linguagens significam as coisas. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

______. **O que é semiótica?** São Paulo: Brasiliense, 2007.

SAUSSURE, Ferdinand de. Curso de Lingüística Geral. Tradução Antônio Chelini et al. 25. ed. São Paulo: Cultrix, 1996.

SHAFF, A. **Langage et conaissance**. Paris: Anthropos, 1974.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; PESSOA, N.; ISHIHARA, C. **Cadernos de mathema**: jogos de matemática de 1º a 3º ano – ensino médio. Porto Alegre, 2008.

SOUZA, J. R. de; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática**: 6º Ano. São Paulo: FTD, 2009a.

______. **Vontade de saber matemática**: 7º Ano. São Paulo: FTD, 2009b.

______. **Vontade de saber matemática**: 8º Ano São Paulo: FTD, 2009c.

______. **Vontade de saber matemática**: 9º Ano.São Paulo: FTD, 2009d.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics whith particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics,** New York, n. 12, p. 151-169, 1981.

TERRA, E. **Linguagem, língua e fala**. São Paulo: Scipione, 1997**.**

TURIN, R. N. **Aulas:** introdução ao estudo das linguagens. São Paulo: Annablume, 2007.

ULIANA, M. R. A Confecção de um plano cartesiano de metal para ensinar função a um deficiente visual. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010, Salvador. **Anais...** Salvador, 2009. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/ocs/index.php/xenem/xenem/paper/view/278>. Acesso em: 08 nov. 2013.

VERGNAUD, G. Lá théorie des champs conceptuels, Jean Brun (Org.). In: **Didactique des mathématiques**, Lausanne: Delachaux et Niestlé, p. 197-240, 1996.

VYGOTSKY. L. S. **Pensamento e linguagem.** 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações filosóficas**. 6. ed. Petrópolis: Vozes, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Centro de Ciências da Educação
Centro de Ciências Biológicas
Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, Afrânio Austregésilo Thiel, estou desenvolvendo um Trabalho de Tese de Doutorado para o Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina sob orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti. A pesquisa tem como objetivo apontar, por meio de reflexões analíticas, a compreensão dos alunos do Ensino Fundamental (9º Ano) das representações das regiões do plano cartesiano, nas formas natural, gráfica e algébrica, indicando os elementos que devem ser levados em consideração para subsidiar as abordagens para o ensino. Será realizada entre os meses de Março e Maio de 2013, no horário normal das aulas da Escola, sendo que a coleta de dados será feita através de sequências de estudo e registros de observações referentes às práticas em sala de aula. A professora da disciplina de Matemática que atua na Turma, participará como colaboradora no processo. O princípio teórico metodológico desta pesquisa é de ordem qualitativa, fazendo-se, no entanto, uso da estatística descritiva na elaboração de tabelas, gráficos, percentuais, se necessário. Os dados coletados serão utilizados exclusivamente na presente pesquisa e em publicações na área de Educação Matemática relacionadas ao assunto. Fica garantido o caráter anônimo e sigiloso da participação de seu filho(a), ou seja serão expressos nomes por código, por exemplo J.P.S.; A.T.; A.M.S.;...O conteúdo faz parte do plano da disciplina de Matemática da 9ºAno do Ensino Fundamental sendo que seu filho(a) terá liberdade para desistir da sua participação a qualquer momento, mesmo depois de ter assinado este consentimento, bastando para isso comunicar ao pesquisador pelo endereço de e-mail afraniothiel@ifc-camboriu.edu.br ou pelo telefone (47)33637723.

Assinaturas:

Afrânio Austregésilo Thiel (Doutorando):________________________________

Eu, ____, fui esclarecido(a) sobre a pesquisa: "Práticas Matemáticas no Plano Cartesiano: um estudo da Coordenação de Registros de Representação" e concordo que meu filho(a) ____, participe da sequência de ensino.

Camboriú, _________ de _____________ de 2013.

(Assinatura Pai/Mãe):_______________________________RG:_______________

APÊNDICE B - ARTIGOS E PUBLICAÇÕES ABORDANDO O ELEMENTO PLANO CARTESIANO E SUAS REGIÕES

Pairar os olhos sobre os estudos já efetuados em um tema próximo ao nosso, nos direciona a dois propósitos: buscar temas iguais alterando o que for possível, criando assim o diferente ou então, simplesmente mudar; buscar temas semelhantes visando compartilhar e complementar, produzindo o que ainda não foi criado.

Neste momento, os olhos voltam-se para as pesquisas já realizadas no país que focaram a questão da representação semiótica no ensino-aprendizado (prática da matemática) de plano cartesiano e suas regiões. Optou-se por estudar aquelas que utilizam a noção da TRRS (teoria de registros de representação semiótica) ou do EOS (enfoque ontosemiótico) tendo como tema central o plano cartesiano e suas regiões, tendo como objetivo compreender os problemas de aprendizagem da matemática relacionado ao tema e também porque os construtos destas teorias são as molas propulsoras que nos levam a pensar o papel da representação semiótica da matemática escolar. Tudo está voltado para que se entenda o que acontece em sala de aula quando se faz uso dessas ideias, procura-se os resultados positivos, investiga-se pesquisas semelhantes a essa, e também procura-se articular as representações semióticas às orientações propostas nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais).

Descreve-se a seguir o que foi rastreado via meio virtual referente o tema:

a) Rede Interativa Virtual de Educação – RIVED: Guia do professor – "*Sistemas de Coordenadas"*, descreve aplicações de uso do sistema de coordenadas em situações do cotidiano, tipo: mapas disponíveis em algumas listas telefônicas; nos livros de Geografia em atlas geográficos. Cita que também aparece nos livros de História, podendo ser utilizado na Marinha, na Aeronáutica, e no Transporte Terrestre – via navegação GPS; ou em outras áreas como Engenharias, na Química, na Física e na Matemática – servindo para descrever pontos em gráficos de funções.

b) BACCA, Paula Cristina; BAIER, Tania (2013), trabalho "*Representação de pontos no plano cartesiano: atividades didáticas"*, apresentado no XI ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), relata a experiência realizada com estudantes da educação básica e do ensino superior. São descritos os resultados obtidos com a realização de atividades diagnósticas relacionadas com a representação de pontos na reta real e no plano cartesiano. Também são apresentadas as atividades, realizadas com os mesmos alunos, visando superar as dificuldades por eles encontradas, a saber, o conhecimento da densidade da reta numérica real e a localização de números decimais.

c) BREUNIG, Raquel Taís; NEHRING, Cátia Maria; POZZOBON, Marta Cristina Cesar (2010), artigo *"análise dos procedimentos de conversão de alunos de oitava série na perspectiva dos registros de representação"*, apresentado no Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul (EREMATSUL). O texto traz algumas conclusões parciais da pesquisa que discute a aquisição conceitual de conceitos algébricos na Educação Básica, tendo como referencial teórico a 'Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003)' e os 'Conceitos Algébricos', e observando os Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (BRASIL, 1998). Analisaram uma Coleção de Livros Didáticos – Tudo é Matemática (DANTE, 2009), um dos mais adotados na região, sendo o livro didático um grande norteador das ações do professor. O artigo tem como objetivo analisar e refletir os procedimentos de conversão e tratamento dos Registros de Representação Algébricos, realizados por alunos.

d) COSTA, Ailton Barcelos da; GONÇALVES, Fernanda Scabio; ANGELOTTI, Vanessa Cristina; GONÇALVES, Sabrina Gomes Cozendey (2010), artigo *"Atividade integrada de ensino, pesquisa e extensão: uma experiência com o ensino de plano cartesiano para alunos com cegueira total simulada"*, apresentado no CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO ESPECIAL, 4.; ENCONTRO NACIONAL DOS PESQUISADORES DE EDUCAÇÃO ESPECIAL.A pesquisa consistiu em uma aula expositiva apresentada a alunos com cegueira total simulada, isto é, alunos com visão normal totalmente vendados. A aula teve como objetivo trabalhar a localização no plano cartesiano, através de um material didático desenvolvido pelo grupo. Como recurso didático foi utilizado uma adaptação do jogo conhecido como Batalha Naval. Durante a aula expositiva o material desenvolvido foi utilizado como recurso ao ensino do conceito de plano cartesiano.

e) DUARTE, Rafael de Souza; FREITAS, Maria Teresa Menezes (2012), artigo *"O jogo de xadrez no ensino da matemática"*. Descrevem que o ensino de Matemática tem sido percebido por muitos alunos como algo monótono, em que o professor transfere conceitos fundamentais através de aulas tediosas e maçantes. O projeto intitulado "Projeto Xadrez-Matemática" envolveu a criação de propostas abrangendo materiais concretos, jogos, aspectos lúdicos ou uma dinâmica diferenciada para o ensino da Matemática do Ensino Básico relacionando as coordenadas cartesianas, com jovens matriculados na 5ª e 7ª séries de um colégio, sendo que Rafael de Souza Duarte faz parte do corpo docente.

f) HUGUENIN, Rodrigo Curty; LOPES, Arilise Moraes de Almeida; MOREIRA, Melissa Freitas (2013), artigo *"Protótipo de um plano cartesiano digital para portadores de deficiência visual"*, apresentado no V CONFIT (Congresso Fluminense de Iniciação Científica e Tecnológica); 18º. Encontro de IC da UFNT; 10º. Circuito de IC do IFF; 6ª. Jornada de IC do IFF. O artigo faz menção à um protótipo digital capaz de fazer uma representação gráfica de duas dimensões (2D), utilizando o plano cartesiano. O protótipo deverá realizar a reprodução de gráficos em alto relevo quando as funções forem digitadas no software Matlab.

g) LUIZ, Learcino dos Santos (2007),artigo *"Caça às coordenadas: construindo o conceito de representação cartesiana através de um jogo didático",* publicado na Revista Educação em Rede - UFSC. Relata a aplicação de uma sequência didática utilizada para levar os alunos à construção do conceito de coordenadas cartesianas. Esta sequência é baseada em um jogo chamado caça ao tesouro. Sem deixar de lado o caráter lúdico e competitivo da atividade, a aplicação da atividade foi baseada em uma Engenharia didática, objetivando mostrar que alunos com idade escolar de 12 anos (estudantes de 6ª série do ensino fundamental) são capazes de por eles próprios, construírem o conceito de representação cartesiana no plano.

h) MORETTI, Méricles Thadeu; THIEL, Afrânio Austregésilo, (2012), artigo *"O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica"*, editado pela Revista Práxis Educativa. Discute a luz da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, o significado do ensino de matemática hermético, fechado sobre si mesmo, em relação ao modo como os registros semióticos são utilizados.

i) ROQUE, Ricardo Roberto; PEREIRA, Peter Schweigert (2012), trabalho *"Da atividade ao conceito de plano cartesiano: uma vivência na escola"*, apresentado na ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EIEMAT), 3.; ENCONTRO NACIONAL PIBID-MATEMÁTICA, 1., 2012, Santa Maria. Relatam uma vivência realizada em uma turma do 8º ano do EF (ensino fundamental), desencadeado pelo componente curricular de Matemática do EF, onde o conteúdo matemático a ser ensinado foi o plano cartesiano, a partir de algumas ações como: pontos de referência; localização e orientação; uso do mapa do município; quadras e os eixos cartesianos. Estas atividades permitiram por meio da vivência que as ações de ensino levassem ao conceito de plano cartesiano. Tomaram como referenciais os documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais e Lições do Rio Grande: matemática e suas tecnologias.

j) ULIANA, Márcia Rosa (2009), trabalho *“A Confecção de um plano cartesiano de metal para ensinar função a um deficiente visual”*, apresentado no Encontro Nacional de Educação Matemática, 10º.; relata a experiência de ser professora de um aluno deficiente visual, pertencente a uma turma do 9º Ano do EF comenta sobre a dificuldade de se promover a inclusão escolar de crianças deficiente visuais nessa sociedade excludente que não disponibiliza equipamentos e materiais necessários para dar a elas igualdade de oportunidade. Esses recursos e equipamentos são essenciais para o estudo de alguns conteúdos de Matemática, uma disciplina abstrata. Descreve a adaptação e utilização de um plano cartesiano de metal (Plano Richard), o qual permite que um deficiente visual construa e analise sozinho, gráficos de funções matemáticas polinomiais do primeiro e do segundo grau.

APÊNDICE C – **QUADROCOMPARATIVO DO NÚMERO DE ATIVIDADES APRESENTANDO FORMAS DE LINGUAGEM DOS LIVROS DIDÁTICOS**.

Quadro I – Livros e as formas de linguagem envolvidas nas atividades proposta referente ao plano cartesiano

Forma de Represen-tação	Linguagem		Nat. → Gráf.	Gráf. → Nat.	Alg. → Gráf.	Gráf. → Alg.	Nat. → Alg.	Alg. → Nat.	Outras	Total Ativi-dades.
Coleções de livros didáticos indicados pelo PNLD, utilizados pelas Escolas da 13ª GERED-SC	**Tudo é Matemática** (2009)	6º	-	-	02	-	-	-	07	**09**
		7º	-	05	06	05	-	-	06	**22**
		8º	-	-	02	02	-	-	03	**07**
		9º	-	-	-	-	-	-	04	**04**
	Sub Total	-	-	**05**	**10**	**07**			**20**	**42**
	Projeto Radix – Matemática (2009)	6º	01	-	01	-	-	-	17	**19**
		7º	-	02	07	09	-	-	16	**34**
		8º	-	-	01	-	-	-	09	**10**
		9º	-	01	06	15	03	-	08	**33**
	Sub Total	-	**01**	**03**	**15**	**24**	**03**	**-**	**50**	**96**
	A Conquista da Matemática (2009)	6º	-	02	01	03	-	-	06	**12**
		7º	-	-	-	-	-	-	03	**03**
		8º	-	-	-	-	-	-	06	**06**
		9º	-	01	11	07	-	-	13	**32**
	Sub Total	-	-	**03**	**12**	**10**	**-**	**-**	**28**	**53**
	Matemática e Realidade (2009)	6º	-	-	-	-	-	-	-	**-**
		7º	-	-	03	-	-	-	03	**06**
		8º	-	-	02	01	-	02	06	**11**
		9º	-	-	01	01	-	-	10	**12**
	Sub Total	-	-	-	**06**	**02**	**-**	**02**	**19**	**29**
	Matemática (2006)	6º	-	-	-	-	-	-	04	**04**
		7º	-	-	-	-	-	-	04	**04**
		8º	-	-	05	03	-	-	01	**09**
		9º	-	-	01	01	-	-	12	**14**
	Sub Total	-	-	-	**06**	**04**	**-**	**-**	**21**	**31**
	Vontade de Saber Matemática (2009)	6º	-	-	-	-	-	-	23	**23**
		7º	-	-	-	-	-	-	27	**27**
		8º	-	-	07	06	-	-	15	**28**
		9º	01	-	-	03	-	-	13	**17**
	Sub Total	-	**01**	**-**	**07**	**09**	**-**	**-**	**78**	**95**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: a) O termo ‘outras’ envolve respostas contextualizadas tratando a informação da forma gráfica → forma discursiva (numérica, simbólica, tabular,...), ou seja, os autores tem como foco, que o aluno por meio da observação e leitura de um gráfico (de colunas, de linhas retas ou de curvas) extraia algumas informações propostas. b) O termo Nat. se refere à forma de linguagem natural (texto escrito).

APÊNDICE D - Estatística das Atividades Integralizadoras: M2 – T801, T802, T803 e Média Geral.

ESCOLA BÁSICA MUNICIPAL ANITA BERNARDES GANANCINI

Quadro I – Estatística das atividades integralizadoras: Momento 2, T801

Atividade		Participantes	Nº. Acertos (%)	Nº. Erros e (%)
01	**a**	25	13 (52,00)	12 (48,00)
	b	25	01 (04,00)	24 (96,00)
02	**a**	25	12 (48,00)	23 (52,00)
	b	25	16 (64,00)	09 (36,00)
			------	03 td (12)
03	**1/a**	25	13 (52,00)	12 (48,00)
	b	25	15 (60,00)	10 (40,00)
	c	25	07 (28,00)	18 (72,00)
	2/a	25	19 (76,00)	16 (24,00)
	b	25	11 (44,00)	14 (56,00)
	c	25	05 (20,00)	20 (80,00)
	d	25	05 (20,00)	20 (80,00)
04	**1/a**	25	13 (52,00)	12 (48,00)
	b	25	19 (76,00)	06 (24,00)
	c	25	19 (76,00)	06 (24,00)
	2/a	25	16 (64,00)	09 (36,00)
	b	25	16 (64,00)	09 (36,00)
	3	25	14 (56,00)	11 (44,000
05		26	17(72,00)	09 (28,00)
06	**1**	26	19 (76,00)	07 (24,00)
	2	26	22 (88,00)	04 (12,00)
07	**a**	25	14 (56,00)	11 (44,00)
	b	25	23 (92,00)	02 (08,00)
	c	25	23 (92,00)	02 (08,00)
	d	25	03 (12,00)	22 (88,00)
	e	25	05 (20,00)	20 (80,00)
	f	25	08 (32,00)	17 (68,00)
08		25	22 (88,00)	03 (12,00)
09		25	05 (20,00)	20 (80,00)
10		21	15 (71,42)	06 (28,58)
11	**a**	21	19 (90,47)	02 (09,53)
	b	21	19 (90,47)	02 (09,53)
	c	21	16 (76,19)	05 (23,81)

	d	21	11 (15,34)	10 (84,66)
12	**a**	18	14 (77,78)	04 (22,23)
	b	18	08 (44,44)	10 (55,56)
13	**a**	18	10 (55,56)	08 (44,44)
	b	18	09 (50,00)	09 (50,00)
14	**G1**	23	06 (26,08)	17 (73,92)
	G2	23	08 (34,78)	15 (65,22)
	G3	23	21 (91,30)	02 (08,70)
	G4	23	07 (30,43)	16 (69,57)
	G5	23	08 (34,78)	15 (65,22)
	G6	23	06 (26,08)	17 (91,31)
	---	23	02 td G (08,69)	-----

Fonte: Documentos do autor.

ESCOLA BÁSICA MUNICIPAL ANITA BERNARDES GANANCINI

Quadro II – Estatística das atividades integralizadoras: Momento 2, T802

Atividade		**Participantes**	**Nº. Acertos e (%)**	**Nº. Erros e (%)**
01	**a**	25	23 (92,00)	02 (08,00)
	b	25	21 (84,00)	04 (16,00)
02	**a**	25	18 (72,00)	07 (28,00)
	b	25	22 (88,00)	03 (12,00)
			-----	02 td (08)
03	**1/a**	25	18 (72,00)	05 (28,00)
	b	25	17 (68,00)	08 (32,00)
	c	25	15 (60,00)	10 (40,00)
	2/a	25	22 (88,00)	13 (12,00)
	b	25	11 (44,00)	14 (56,00)
	c	25	12 (48,00)	13 (52,00)
	d	25	10 (40,00)	15 (60,00)
04	**1/a**	25	14 (56,00)	11 (44,00)
	b	25	18 (72,00)	07 (28,00)
	c	25	18 (72,00)	07 (28,00)
	2/a	25	20 (80,00)	05 (20,00)
	b	25	20 (80,00)	05 (20,00)
	3	25	20 (80,00)	05 (20,00)
05		25	20 (80,00)	05 (20,00)
06	**1**	25	19 (76,00)	06 (24,00)
	2	25	21 (84,00)	04 (16,00)

07	**a**	25	10 (40,00)	15 (60,00)
	b	25	20 (80,00)	05 (20,00)
	c	25	21 (84,00)	04 (16,00)
	d	25	15 (60,00)	10 (40,00)
	e	25	12 (48,00)	13 (52,00)
	f	25	18 (72,00)	07 (28,00)
08		25	13 (52,00)	12 (48,00)
09		25	20 (80,00)	05 (20,00)
10		27	17 (62,96)	10 (37,04)
11	**a**	26	25 (96,15)	01 (03,85)
	b	26	24 (92,30)	02 (07,70)
	c	26	21 (80,76)	05 (19,24)
	d	26	15 (57,64)	11 (42,36)
12	**a**	26	16 (61,53)	10 (38,47)
	b	26	14 (53,84)	12 (46,16)
13	**a**	26	18 (69,23)	08 (30,77)
	b	26	16 (61,54)	10 (38,46)
14	**G1**	29	26 (89,65)	03 (10,35)
	G2	29	22 (75,86)	07 (24,14)
	G3	29	25 (86,20)	04 (13,80)
	G4	29	25 (86,20)	04 (13,80)
	G5	29	20 (68,96)	09 (31,04)
	G6	29	26 (89,65)	03 (10,35)
	- -	29	19 td G (65,51)	-----

Fonte: Documentos do autor.

ESCOLA BÁSICA MUNICIPAL ANITA BERNARDES GANANCINI

Quadro III – Estatística das atividades integralizadoras: Momento 2, T803

Atividade		**Participantes**	**Nº. Acertos (%)**	**Nº. Erros (%)**
01	**a**	26	23 (88,46)	03 (11,54)
	b	26	18 (73,07)	05 (26,93)
02	**a**	26	18 (69,23)	08 (30,76)
	b	26	09 (34,61)	17 (65,39)
			-----	15 td (57,69)
03	**1/a**	26	15 (57,69)	11 (42,31)
	b	26	04 (15,38)	22 (84,62)
	c	26	00 (00,00)	26 (100,00)
	2/a	26	14 (53,84)	12 (46,16)
	b	26	03 (11,53)	23 (88,47)
	c	26	00 (00,00)	26 (100,00)
	d	26	01 (03,84)	25 (96,16)
04	**1/a**	26	09 (34,61)	17 (65,39)
	b	26	11 (42,30)	15 (57,70)
	c	26	20 (76,92)	06 (23,08)
	2/a	26	15 (57,69)	11 (42,31)
	b	26	16 (61,53)	10 (38,47)
	3	26	07 (26,92)	19 (73,08)
05		26	20 (79,92)	06 (20,08)
06	**1**	26	19 (73,07)	07 (26,93)
	2	26	20 (76,92)	06 (23.08)
07	**a**	26	09 (34,61)	17 (65,39)
	b	26	18 (69,23)	08 (30,77)
	c	26	20 (76,92)	06 (23,08)
	d	26	09 (34,61)	17 (65,39)
	e	26	07 (26,92)	19 (73,08)
	f	26	11 (42,30)	15 (57,70)
08		26	08 (30,76)	18 (69,24)
09		26	18 (69,23)	08 (30,77)
10		25	13 (52,00)	12 (48,00)
11	**a**	21	17 (80,95)	04 (19,05)
	b	21	17 (80,95)	04 (19,05)
	c	21	17 (80,95)	04 (10,05)
	d	21	10 (47,62)	11 (52,38)
12	**a**	17	12 (70,50)	15 (29,50)
	b	17	09 (52,94)	08 (47,06)
13	**a**	20	13 (65,00)	07 (35,00)

	b	20	14 (70,00)	06 (30,00)
14	**G1**	28	20 (71,42)	08 (28,58)
	G2	28	16 (57,14)	12 (42,86)
	G3	28	18 (64,28)	10 (35,72)
	G4	28	14 (50,00)	14 (50,00)
	G5	28	13 (46,42)	15 (53,58)
	G6	28	17 (60,71)	11 (39,29)
	---	28	07 td G (25,00)	-----

Fonte: Documentos do autor.

ESCOLA BÁSICA MUNICIPAL ANITA BERNARDES GANANCINI

Quadro IV – Estatística das atividades integralizadoras: Momento 2,Média Geral (por atividade) das três turmas.

Atividade		**Participantes**	**Nº. Acertos e (%)**	**Nº. Erros e (%)**
01	**a**	75	59 (78,66)	16 (21,34)
	b	75	40 (53,33)	35 (46,67)
02	**a**	75	48 (63,16)	27 (36.84)
	b	75	47 (62,66)	28 (37,34)
			-----	20 td (26,66)
03	**1/a**	75	46 (61,33)	29 (38,67)
	b	75	36 (48,00)	39 (52,00)
	c	75	22 (29,93)	53 (70,07)
	2/a	75	55 (73,33)	20 (26,67)
	b	75	25 (33,33)	50 (66,67)
	c	75	17 (22,66)	58 (77,34)
	d	75	16 (21,33)	59 (78,67)
04	**1/a**	75	36 (48,00)	39 (52,00)
	b	75	48 (64,00)	27 (36,00)
	c	76	57 (75,00)	19 (25,00)
	2/a	75	51 (68,00)	24 (32,00)
	b	75	52 (69,33)	23 (30,67)
	3	75	41 (54,66)	34 (45,34)
05		76	65 (85,27)	11 (14,73)
06	**1**	76	57 (75,00)	19 (25,00)
	2	76	63 (82,89)	13 (17,11)
07	**a**	75	33 (44,00)	42 (56,00)
	b	75	61 (81,33)	14 (18,67)
	c	75	64 (85,33)	11 (14,67)
	d	75	27 (36,00)	48 (64,00)
	e	75	26 (34,66)	49 (65,34)

	f	75	37 (49,33)	38 (50,67)
08		75	43 (57,33)	32 (42,67)
09		75	43 (57,33)	32 (42,67)
10		73	45 (61,64)	28 (38,36)
11	**a**	68	61 (89,70)	07 (10,30)
	b	68	60 (88,23)	08 (11,77)
	c	68	54 (79,41)	14 (20,59)
	d	68	36 (52,94)	32 (47,06)
12	**a**	61	42 (68,85)	19 (31,15)
	b	61	31 (50,81)	30 (49,19)
13	**a**	64	41 (63,26)	23 (36,74)
	b	64	39 (60,51)	25 (39,43)
14	**G1**	80	52 (65,00)	28 (35,00)
	G2	80	46 (57,50)	34 (42,50)
	G3	80	64 (80,00)	16 (20,00)
	G4	80	46 (57,50)	34 (42,50)
	G5	80	41 (51,25)	39 (48,75)
	G6	80	49 (61,25)	31 (38,75)
	---	80	28 tdG(35,00)	------

Fonte: Documentos do autor.

APÊNDICE E – Estatística de Atividades Integralizadoras: M3 – T801, T802, T803 e Média Geral.

ESCOLA BÁSICA MUNICIPAL ANITA BERNARDES GANANCINI

Quadro V – Estatística das atividades integralizadoras: Momento 3, T801

Atividade		Participantes	Nº. Acertos e (%)	Nº. Erros e (%)
01		14	08 (57,14)	06 (42,87)
02		08	08 (100,00)	00 (00,00)
03		08	07 (87,50)	01 (12,50)
04		24	10 (41,67)	14 (58,33)
05	**a**	23	15 (65,22)	08 (34,78)
	b	23	13 (56,52)	10 (43,48)
	c	20	12 (60,00)	08 (40,00)
06		22	13 (59,09)	09 (40,91)
07	**a**	19	18 (94,73)	01 (05,23)
	b	19	18 (94,73)	01 (05,23)
	c	19	05 (26,32)	14 (73,68)
08		20	14 (70,00)	06 (30,00)
09	**a**	19	18 (94,73)	01 (05,27)
	b	19	12 (63,16)	07 (36,84)
	c	19	10 (52,63)	09 (47,37)
10	**I**	19	10 (52,63)	09 (47,37)
	II	19	14 (73,68)	05 (26,32)
	III	19	14 (73,68)	05 (26,32)
	IV	19	08 (42,11)	11 (57,89)
	V	19	08 (42,11)	11 (57,89)
	VI	19	16 (84,21)	03 (15,79)
11	**a**	21	08 (38,10)	13 (61,90)
	b	21	13 (61,90)	08 (38,10)
	c	21	09 (42,86)	12 (57,14)
12	**a**	21	17 (80,95)	04 (19,05)
	b	21	14 (66,67)	07 (33,33)
	c	21	13 (61,90)	08 (38,10)
13	**a**	21	16 (76,19)	05 (23,81)
	b	21	12 (57,14)	09 (42,86)
	c	21	08 (38,10)	13 (61,90)
	d	21	08 (38,10)	13 (61,90)

14	**a**	20	13 (65,00)	07 (35,00)
	b	20	07 (35,00)	13 (65,00)
	c	20	03 (15,00)	17 (85,00)
15		20	13 (65,00)	17 (35,00)

Fonte: Documentos do autor.

ESCOLA BÁSICA MUNICIPAL ANITA BERNARDES GANANCINI

Quadro VI – Estatística das atividades integralizadoras: Momento 3, T802

Atividade		**Participantes**	**Nº. Acertos e (%)**	**Nº. Erros e (%)**
01		29	16 (55,17)	13 (44,83)
02		29	24 (82,76)	05 (17,24
03		29	24 (82,76)	05 (17,24)
04		31	16 (51,61)	15 (48,39)
05	**a**	30	11 (36,67)	19 (63,33)
	b	30	11 (36,67)	19 (63,33)
	c	30	12 (40,00)	19 (63,33)
06		25	15 (60,00)	10 (40,00)
07	**a**	21	21 (100,00)	00 (00,00)
	b	21	21 (100,00)	00 (00,00)
	c	21	05 (23,81)	16 (76,19)
08		21	14 (66,67)	06 (33,33)
09	**a**	21	17 (80,95)	04 (19,05)
	b	21	15 (71,43)	06 (28,57)
	c	21	15 (71,43)	06 (28,57)
10	**I**	21	12 (57,14)	09 (42,86)
	II	21	16 (76,19)	05 (23,81)
	III	21	16 (76,19)	05 (23,81)
	IV	21	10 (47,62)	11 (52,38)
	V	21	10 (47,62)	11 (52,38)
	VI	21	16 (76,19)	05 (23,81)
11	**a**	28	08 (28,57)	20 (71,43)
	b	28	10 (35,71)	18 (64,29)
	c	28	09 (32,14)	19 (67,86)
12	**a**	21	17 (80,95)	04 (19,05)
	b	21	16 (76,19)	05 (23,81)
	c	21	15 (71,42)	06 (28,58)
13	**a**	28	18 (64,28)	10 (35,72)

	b	28	14 (50,00)	14 (50,00)
	c	28	13 (46,43)	14 (53,57)
	d	28	13 (46,43)	14 (53,57)
14	**a**	28	21 (75,00)	07 (25,00)
	b	28	08 (28,57)	20 (75,00)
	c	28	03 (10,71)	25 (89,29)
15		28	13 (46,43)	15 (53,57)

Fonte: Documentos do autor.

ESCOLA BÁSICA MUNICIPAL ANITA BERNARDES GANANCINI

Quadro VII – Estatística das atividades integralizadoras: Momento 3, T803

Atividade		**Participantes**	**Nº. Acertos e (%)**	**Nº. Erros e (%)**
01		**19**	**10 (52,63)**	**09 (47,37)**
02		**19**	**14 (73,69)**	**05 (26,31)**
03		**19**	**10 (52,63)**	**09 (47,37)**
04		**28**	**19 (67,86)**	**09 (32,14)**
05	**a**	**28**	**15 (53,57)**	**13 (46,43)**
	b	**28**	**08 (28,57)**	**20 (71,43)**
	c	**28**	**21 (75,00)**	**07 (25,00)**
06		**28**	**20 (71,43)**	**08 (28,57)**
07	**a**	**27**	**25 (92,59)**	**02 (07,41)**
	b	**27**	**24 (88,89)**	**03 (11,11)**
	c	**27**	**05 (18,51)**	**22 (81,49)**
08		**28**	**13 (46,43)**	**15 (53,57)**
09	**a**	**28**	**24 (85,71)**	**04 (14,29)**
	b	**28**	**23 (82,14)**	**05 (17,86)**
	c	**28**	**16 (57,14)**	**12 (42,86)**
10	**I**	**28**	**19 (67,86)**	**09 (32,14)**
	II	**28**	**22 (78,57)**	**06 (21,43)**
	III	**28**	**22 (78,57)**	**06 (21,43)**
	IV	**28**	**12 (42,86)**	**16 (57,14)**
	V	**28**	**13 (46,43)**	**15 (53,57)**
	VI	**28**	**18 (64,29)**	**10 (35,71)**
11	**a**	**18**	**08 (44,45)**	**10 (55,55)**
	b	**18**	**08 (44,45)**	**10 (55,55)**
	c	**18**	**06 (33,34)**	**12 (66,66)**
12	**a**	**27**	**17 (62,96)**	**10 (37,04)**
	b	**27**	**16 (59,26)**	**11 (40,74)**

	c	**27**	**16 (59,26)**	**11 (40,74)**
13	**a**	**24**	**20 (83,34)**	**04 (16,66)**
	b	**24**	**13 (54,17)**	**11 (45,83)**
	c	**24**	**10 (41,67)**	**14 (58,33)**
	d	**24**	**10 (41,67)**	**14 (58,33)**
14	**a**	**24**	**18 (75,00)**	**06 (25,00)**
	b	**24**	**07 (29,17)**	**17 (70,83)**
	c	**24**	**10 (41,67)**	**14 (58,33)**
15		**25**	**18 (72,00)**	**07 (28,00)**

Fonte: Documentos do autor.

ESCOLA BÁSICA MUNICIPAL ANITA BERNARDES GANANCINI

Quadro VIII – Estatística das atividades integralizadoras: Momento 3, Média Geral

Atividade		**Participantes**	**Nº. Acertos e (%)**	**Nº. Erros e (%)**
01		62	34 (54,84)	28 (45,16)
02		56	46 (82,14)	10 (17,86)
03		56	41 (73,21)	15 (26,79)
04		83	35 (42,17)	48 (57,83)
05	**a**	81	41 (50,62)	40 (49,38)
	b	78	32 (41,03)	46 (58,97)
	c	78	45 (57,70)	33 (42,30)
06		75	48 (63,50)	27 (36,50)
07	**a**	67	64 (95,52)	03 (04,48)
	b	67	63 (94, 03)	04 (05,97)
	c	67	15 (22,39)	52 (77,61)
08		69	41 (59,42)	28 (40,58)
09	**a**	68	59 (86,76)	09 (13,58)
	b	68	50 (73,53)	18 (26,47)
	c	68	41 (60,29)	27 (39,71)
10	**I**	68	41 (60,29)	27 (39,71)
	II	68	52 (76,47)	16 (23,53)
	III	68	52 (76,47)	16 (23,53)
	IV	68	30 (44,12)	38 (55,88)
	V	68	31 (45,59)	37 (54,41)
	VI	68	50 (73,53)	18 (26,47)
11	**a**	67	24 (35,82)	43 (64,18)
	b	67	31 (46,27)	36 (53,73)

	c	67	31 (46,27)	36 (53,73)
12	**a**	69	51 (73,91)	49 (26,09)
	b	69	46 (66,67)	54 (33,33)
	c	69	44 (63,76)	56 (36,24)
13	**a**	73	54 (73,97)	19 (26,03)
	b	73	39 (53,42)	34 (46,58)
	c	73	31 (42,46)	42 (57,54)
	d	73	31 (42,46)	42 (57,54)
14	**a**	72	52 (72,22)	20 (27,78)
	b	72	22 (30,56)	50 (69,44)
	c	72	16 (22,22)	56 (77,78)
15		73	44 (60,27)	29 (39,73)

Fonte: Documentos do autor.