

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO SOCIO-ECONOMICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

**EDUARDO AMENDOLA CAMARA**

**MODELOS MULTIVARIADOS DE VOLATILIDADE: UMA  
APLICAÇÃO EM SELEÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS.**

Florianópolis

2013



**EDUARDO AMENDOLA CAMARA**

**MODELOS MULTIVARIADOS DE VOLATILIDADE: UMA  
APLICAÇÃO EM SELEÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS.**

Dissertação de mestrado apresentada  
ao Programa de Pós-Graduação em  
Economia, da Universidade Federal  
de Santa Catarina, como parte dos  
requisitos para a obtenção do título  
de Mestre em Economia.

Área de concentração: Finanças

ORIENTADOR: André Alves Portela  
Santos

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborado pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC

Camara, Eduardo Amendola

Modelos Multivariados de Volatilidade [dissertação]: Uma Aplicação em Seleção e Otimização de Carteiras / Eduardo Amendola Camara; Orientador: André Alves Portela Santos – Florianópolis, SC, 2013.

94 p. ; 21 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de Pós-Graduação em Economia.

Inclui Referências

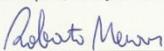
1. Economia.
2. Finanças
3. Modelos multivariados de volatilidade.
4. Otimização de carteiras.

Eduardo Amendola Camara

**MODELOS MULTIVARIADOS DE VOLATILIDADE: UMA APLICAÇÃO EM SELEÇÃO  
E OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS**

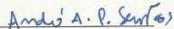
Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Economia, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 28 de junho de 2013

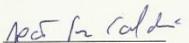


Prof. Dr. Roberto Meurer  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**



Prof. Dr. André Alves Portela Santos  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Dr. João Frois Caldeira  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul



Prof. Dr. André Alves Portela Santos  
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Dr. Francis Carlo Petterini Lourenço  
Universidade Federal de Santa Catarina



## **Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus pais, Mirela e Marco Antônio,  
Meus avós e tios que sempre me apoiaram,  
Meu irmão Diego e meus primos,  
Todos os meus amigos.  
E a Janine  
que esteve ao meu lado durante todo esse tempo.



## **Agradecimento**

Gostaria de primeiro agradecer a Deus por ter me dado força para perseverar nos piores momentos. E agora conseguir ter êxito.

Agradeço a CAPES e ao Programa pela bolsa de estudos, dado que sem ela não seria possível continuar meus estudos, como muitos que não o fazem pelo mesmo motivo.

Agradeço aos amigos que compartilharam dos mesmos objetivos que o meu e aos que abriram mão de minha convivência. Bem como todos os familiares que sempre me apoiaram em todas as ocasiões.

Ao meu orientador André Portela Santos, que mesmo á distância nunca se furtou a me auxiliar de pronto. E também a Evelise que nos ajudou em tudo que foi possível.

Finalmente gostaria de agradecer a Janine, que esteve ao meu lado durante toda esta jornada e sem a qual jamais teria chegado onde cheguei.



## Resumo

Considerando que os ativos financeiros têm como característica a variância heterocedástica e ainda, que conseguimos identificar um padrão GARCH para a matriz de covariância condicional, então, naturalmente, se impusermos algum tipo de modelagem da volatilidade para a seleção e otimização do retorno da carteira poderemos gerar resultados superiores. Foram utilizados ao longo deste trabalho quatro modelos para o cálculo da matriz de covariância: ASYDCC-GARCH, CCC-GARCH, DCC-GARCH e Risk Metrics. Os modelos foram replicados em duas amostras diferentes, uma com base nas ações que compõem o Ibovespa e outra com base nas ações que compõem o S&P 100. Percebemos que ao otimizarmos as carteiras através do método de mínima variância, os modelos Risk Metrics e ASYDCC-GARCH são superiores aos demais e também superam os respectivos *benchmarks* (Ibovespa e S&P 100). Para observarmos esta superioridade utilizamos como medidores de desempenho as seguintes medidas: média do excesso de retorno, desvio padrão, índice de Sharpe, *turnover*, retorno bruto acumulado e excesso de retorno acumulado. Para garantirmos que o índice de Sharpe e o *turnover* dos modelos foram estatisticamente diferentes empregamos o teste baseado na técnica de bootstrap de Politis e Romano (1994). Os experimentos também foram testados em diferentes frequências de rebalço da carteira de ativos. Os resultados foram consistentes. A partir do que observamos com estes rebalços por diferentes prazos foi possível perceber que o Risk Metrics apresentou desempenho superior quando a frequência do rebalço é

mais curta (diária) e o ASYDCC-GARCH é mais eficaz quando a frequência de rebalço é maior (mensal).

**Palavras chave:** Modelos multivariados de volatilidade; ASYDCC-GARCH; CCC-GARCH; DCC-GARCH; Risk Metrics; otimização de carteiras.



## **Abstract**

If we consider that the financial assets are characterized by the variance heteroscedastic and still, we can identify a pattern for the GARCH conditional covariance matrix, so naturally, if we impose some kind of modeling volatility for the selection and optimization of the portfolio return can generate superior results. It was used throughout this study four models for the calculation of the covariance matrix: ASYDCC-GARCH, CCC-GARCH, DCC-GARCH and Risk Metrics. The models were replicated in two different samples, one based on the actions that make up the Bovespa and the other based on the actions that make up the S & P 100. We realize that when we optimize the portfolios through the method of minimum variance models Risk Metrics and ASYDCC-GARCH are superior to others and also outperform their benchmarks (Bovespa Index and S & P 100). To observe this superiority used as measures of the following performance measures: average excess return, standard deviation, Sharpe ratio, turnover, gross returns and cumulative excess cumulative return. To ensure that the Sharpe ratio and the turnover of the models were statistically different employ the test based on the bootstrap technique of Politis and Romano (1994). The experiments were also tested at different frequencies of rebalancing the asset portfolio. The results were consistent. From what we observed with these rebalços different periods was possible to see that the Risk Metrics outperformed when the frequency of rebalancing is shorter (daily) and ASYDCC-GARCH is more effective when the rebalancing frequency is higher (monthly) .

**Keywords:** Multivariate volatility; ASYDCC-GARCH, CCC-GARCH, DCC-GARCH, Risk Metrics, portfolio optimization.



## **Lista de Tabelas**

Tabela 1 – (Amostra Brasil) Desempenho fora da amostra para diferentes métodos de estimação da matriz de covariância. R.B.A. e E.R.A. indicam Retorno bruto acumulado e Excesso de retorno bruto acumulado. ....67

Tabela 2 – (Amostra EUA) Desempenho fora da amostra para diferentes métodos de estimação da matriz de covariância. R.B.A. e E.R.A. indicam Retorno bruto acumulado e Excesso de retorno bruto acumulado. ....79



## Lista de Gráficos

Gráfico 1 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento diário – Amostra brasileira ).	.71
Gráfico 2 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento semanal – Amostra brasileira).	.72
Gráfico 3 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra brasileira).	.74
Gráfico 4 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento diário – Amostra brasileira).	.75
Gráfico 5 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento semanal – Amostra brasileira).	.76
Gráfico 6 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra brasileira).	.77
Gráfico 7 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento diário – Amostra EUA).	.81
Gráfico 8 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento semanal – Amostra EUA).	.82

Gráfico 9 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra EUA). .....	83
Gráfico 10 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra EUA). .....,.....	84
Gráfico 11 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento semanal – Amostra EUA). .....	85
Gráfico 12 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra EUA). .....	85



## Lista de Siglas

AIC: Akaike Information Criterium .....	52
ARCH: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.....	29
ASYDCC-GARCH: Asymetric Dynamic Condicional Correlation- Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.....	31
CCC-GARCH: Constant Condicional Correlation- Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.....	31
CDI: Certificado de Depósito Interbancário.....	27
DCC-GARCH: Dynamic Condicional Correlation- Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.....	31
GARCH: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.....	29
IBOVESPA: Índice da Bolsa de Valores de São Paulo.....	27
SV: Stochastic Volatility.....	42
S&P 100: Standard and Poor's 100.....	32
VEC-GARCH: Vector Error Correction Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.....	34



## Sumário

1. Introdução. ....	27
1.1. Relevância do Trabalho. ....	30
1.2. Objetivos específicos. ....	31
1.3. Estrutura do Trabalho. ....	32
2. Revisão da literatura. ....	34
2.1. O modelo VEC-GARCH de Bollerslev et al. (1988). ....	34
2.2. O modelo de BEKK de Engle e Kroner (1995). ....	36
2.3. O modelo exponencial de Kawakatsu (2006). ....	37
2.4. O modelo de fatores de Engle et al. (1990). ....	38
2.5. Modelo de fatores não correlacionados. ....	40
2.6. Modelos de Volatilidade Estocástica. ....	42
2.7. Modelo de Correlação Condicional Constante de Bollerslev (1990). ....	43
2.8. O modelo de Correlação Condicional Dinâmica (DCC). ....	46
2.9. O modelo Risk Metrics. ....	49
2.10. Outras Abordagens mais recentes. ....	50
3. Aplicações da Volatilidade Multivariada em problemas com ativos. .....	55
3.1. A aplicação de Ang e Bekaert (1999). ....	55
3.2. A Aplicação de Ledoit e Wolf (2003). ....	56
3.3. A aplicação de Yufeng Han (2005) . ....	58
3.4. O Trabalho de Engle e Colacito (2006). ....	60
4. Otimização de carteiras e avaliação de desempenho. ....	62
4.1. Otimização de carteira. ....	62
4.2. Avaliação de desempenho.....	63

5. ANÁLISE EMPÍRICA. ....	65
6. CONCLUSÃO. ....	87



## 1. Introdução

Nas últimas décadas, há um notável crescimento no uso da modelagem financeira e de ferramentas de otimização para o gerenciamento de carteiras de ativos financeiros. Não somente por motivos de uma natural cobrança por resultado estável e previsível por parte das empresas gestoras de recursos de terceiros, como também contribuiu para essa tendência o aperfeiçoamento das técnicas clássicas sobre a teoria de portfólio e a difusão de novos e sofisticados pacotes computacionais.

A gestão ativa de um portfólio visa à obtenção de desempenho financeiro superior as referencias (*benchmarks*) de mercado, tais como o IBOVESPA, ou o CDI. Por meio da diversificação de investimentos, para diluir risco e aumentar o retorno potencial, como visto em Fabozzi e Fong(1994). Esta atividade pode ser realizada profissionalmente por instituições habilitadas para a gestão de fundos de investimentos. Assim, através dos fundos, os pequenos investidores podem contar com uma administração especializada de seu patrimônio e conseguem alguns ganhos de escala, como o acesso a custos menores de corretagem, por exemplo. Em contrapartida, o pequeno investidor abre mão da tomada de decisão sobre o seu investimento.

Cabe observar que a indústria brasileira de fundos de investimento conta com mais de 2 trilhões de reais em recursos administrados por mais de 10 mil fundos, segundo a ANBIMA. Este volume parece não ser muito afetado nos últimos anos. Mesmo com a crise de 2008, este apresenta contínuo aumento.

A gestão dos recursos captados pela indústria de fundos é feita por cerca de 400 entidades, sendo que as 30 maiores responde por cerca de 90 por cento do total dos recursos. Portanto, dada à relevância deste mercado e a forte concorrência, os profissionais deste mercado investem cada vez mais em ferramentas de gestão sofisticadas, como os modelos de volatilidade, para atraírem novos investidores.

Desta forma, a busca pelo melhor modelo para a otimização de uma carteira é de extrema relevância. Fleming, Kirby e Ostdiek (2001) mostram que estes modelos têm significativo valor econômico quando comparado à otimização de portfólio com matriz de variância incondicional. Isso quer dizer que além da característica dos dados estatisticamente falando, indicarem que a variância para dados financeiros é condicionada ao tempo, os indivíduos também atribuem mais valor aos modelos de volatilidade condicional.

As entidades gestoras de recursos de terceiros terão como objetivo agregar o maior valor possível a seus produtos. Assim estão sempre buscando os métodos que irão gerar maior valor. O primeiro destes métodos foi a otimização de portfólio proposta por Markowitz (1952), surgindo à análise média-variância ou a teoria moderna do portfólio. Os investidores devem manter ou o risco ou o retorno constantes e otimizar o que ficou como variável, assim o problema passa ser uma simples questão matemática. A partir deste modelo as covariâncias entre os ativos ganham uma enorme importância. E a modelagem da matriz de covariância será o centro de atenção deste trabalho.

Um grande impulso para a modelagem de séries financeiras foi dado pelos trabalhos de Engle (1982), Bollerslev (1986) e Harvey, Ruiz e Sheppard (1994), entre outros, com a formulação univariada dos modelos da família ARCH, GARCH e de volatilidade estocástica. Estes modelos foram generalizados para o caso multivariado.

O desafio que enfrenta a literatura dos modelos da família GARCH multivariados consiste no número de parâmetros a serem estimados. Modelos bem simples em termos de generalidade podem rapidamente se mostrar intratáveis quando alguns ativos são adicionados ou uma estrutura temporal um pouco mais sofisticada é proposta. A especificação do modelo GARCH multivariado é dada por:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t H_t^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

na qual  $\varepsilon_t$  representa um processo de dimensão  $1 \times N$  com média zero e matriz de variância e covariância dada por uma matriz identidade de ordem  $N \times N$ . Temos então por construção que a distribuição de  $y_t$  dada à informação passada, denotada por  $I_{t-1}$ , satisfaz as seguintes propriedades:  $E[y_t | I_{t-1}] = 0$  e;  $E[y_t y_t' | I_{t-1}] = H_t$ . E tem como dimensão  $1 \times N$ , assim como também é  $\mu_t$ . Como nos modelos GARCH univariados  $H_t$  deve apresentar alguma forma de dependência dos valores defasados de  $H_t$  e de  $\mu_t$ .

Os modelos de GARCH multivariados apresentam um *trade-off*. Conseguir fazer com que sejam flexíveis o bastante para explicar a dinâmica das variâncias e covariâncias condicionais, sem que isso represente um crescimento acelerado do número de parâmetros do

modelo é muito importante. Uma outra característica destes modelos é a necessidade de que as matrizes sejam positivas definidas.

O artigo seminal proposto por Markowitz em 1952 revolucionou a construção de portfólios de ativos, no entanto a modelagem do retorno esperado e da variância esperada evoluiu bastante, assim como os pacotes computacionais disponíveis, ver, por exemplo, Brandt (2009), DeMiguel et al. (2009a) e DeMiguel e Nogales (2009). As estimativas eram feitas a partir da máxima verossimilhança, porem para isso os retornos deveriam ser normalmente distribuídos, caso contrário poderia levar a grandes mudanças nas médias e na matriz de covariância. Em virtude disso, o desenvolvimento de novos métodos para a obtenção de estimadores robustos no sentido de solucionar problemas de otimização tem sido um dos principais tópicos abordados em finanças. A grande maioria destas evoluções foi no sentido de uma carteira contendo apenas ativos de renda variável, onde os investidores escolhiam uma carteira Pareto eficiente maximizando o retorno esperado para um dado nível de risco.

### **1.1 Relevância do Trabalho.**

Como já foi dito, o mercado de fundos no Brasil conta com mais de 2 trilhões de reais em recursos administrados por mais de 10 mil fundos. A gestão dos recursos captados pela indústria de fundos é feita por cerca de 400 entidades, sendo que as 30 maiores representa cerca de 90 por cento do total dos recursos. Portanto, dada à relevância deste mercado e a forte concorrência os profissionais desta área investem

cada vez mais em ferramentas de gestão sofisticadas, como os modelos de volatilidade, para atraírem novos investidores.

O trabalho irá fazer uma indicação de modelo mais eficiente para a maximização do resultado da carteira de ativos. Para isso será estimado a matriz de covariância por diferentes métodos e então teremos diferentes variâncias e covariâncias condicionais. Desta maneira poderemos concluir qual o método mais eficaz.

## 1.2 Objetivos específicos

O objetivo geral será a análise e avaliação do desempenho de modelos de volatilidade para a gestão de carteiras de investimento. Para isso serão utilizadas duas amostras em separado, a primeira será a carteira de ativos formada pelos ativos que compõem o índice IBOVESPA e a segunda para ativos do S&P 100. Serão avaliados os modelos ASYDCC-GARCH, DCC-GARCH, CCC-GARCH e RiskMetrics. Os objetivos específicos serão:

- obter o retorno das carteiras pelos seguintes métodos de cálculo: ASYDCC-GARCH, DCC-GARCH, CCC-GARCH e RiskMetrics. E então, concluir qual deles será o mais eficiente levando em consideração o desempenho para ambas as carteiras. Através da minimização da variância. Para a avaliação de eficiência dos métodos serão utilizadas as medidas de *turnover*, Índice de Sharpe, média do excesso de retorno, desvio padrão, retorno bruto acumulado e excesso de retorno

acumulado. Poderemos também confrontar os métodos através dos gráficos de retorno acumulado, dispersão de pesos dos ativos da carteira;

- comparar o desempenho de cada método com o obtido pela carteira de referência. No caso da carteira de ativos que copõem o Ibovespa, iremos comparar com o próprio Índice Ibovespa<sup>1</sup> e também iremos utilizar o CDI como uma taxa livre de risco para servir como referência. No caso dos ativos americanos que compõem o S&P 100 a taxa livre de risco será a taxa dos títulos da dívida americana para 3 meses<sup>2</sup>; obter medidas de desempenho como *turnovers*, Índice de Sharpe, média dos retornos, desvio-padrão e excesso de retorno acumulado e retorno bruto acumulado para todos os métodos e também para as duas carteiras utilizadas no trabalho.

### 1.3 Estrutura do Trabalho

Para alcançar os objetivos propostos há de se estudar os modelos multivariados de volatilidade, que iremos ver no próximo capítulo. Como poderá ser concluído ao longo do texto, a classe de modelo mais indicada para este caso será a dos modelos de correlação condicional, mais especificamente a correlação condicional dinâmica.

---

<sup>1</sup> O índice Ibovespa é ponderado da seguinte forma:  $w_i = \sqrt{\frac{ni}{N}} x \frac{vi}{V}$ , onde  $ni$  = número de negócios com a ação “i” no mercado a vista (lote-padrão),  $N$  = número total de negócios no mercado a vista da BOVESPA (lote-padrão),  $vi$  = volume financeiro gerado pelos negócios com a ação “i” no mercado a vista (lote-padrão) e  $V$  = volume financeiro total do mercado a vista da BOVESPA (lote-padrão).

<sup>2</sup> Treasuries Bills.

Além destes dois capítulos, o capítulo três apresentará uma demonstração de trabalhos empíricos utilizando os modelos de multivariados, no quarto capítulo a otimização de carteiras e a importância dos modelos de volatilidade para este processo e ainda a descrição da avaliação do desempenho do portfólio a ser utilizada, no quinto capítulo será realizada a parte empírica do trabalho, que será a aplicação dos modelos ASYDCC-GARCH, CCC-GARCH, DCC-GARCH e RiskMetrics para a heterocedasticidade do retorno esperado de duas carteiras distintas. Uma carteira com dados brasileiros e outra com dados americanos. Por fim, no capítulo seis teremos as conclusões.

## **2. Revisão da literatura**

Este capítulo será utilizado para rever os modelos multivariados de volatilidade. Será estudado sua estrutura, seus pontos fortes e fracos. O capítulo está subdividido por modelos. Primeiro o VEC-GARCH de Bollerslev, que é o ponto de partida. Em seguida o BEKK de Engle e Kroner que pode ser considerada uma evolução do primeiro modelo. Depois surgirá o modelo exponencial de Kawakatsu que segue a mesma linha evolutiva do modelo de Engle e Kroner. O quarto modelo a ser estudado é o fatorial de Engle et al. E em seguida os modelos de fatores não correlacionados. O sexto modelo é o de volatilidade estocástica, modelo este que não pertence ao grupo dos modelos GARCH. Em seguida, os modelos Correlação Condicional Constante de Bollerslev e o modelo de Correlação Condicional Dinâmica respectivamente. E por fim, o Risk Mtrics.

## **2.1 O modelo VEC-GARCH de Bollerslev et al. (1988)**

Esta classe de modelos é uma generalização dos modelos de GARCH univariados onde a variância e a covariância condicional, ou seja,  $H_t$  depende de todos os desvios defasados entre as variâncias e covariâncias condicionais denotadas por  $H_{t-j}$  e também dependerá das defasagens dos retornos ao quadrado e do produto cruzado dos retornos denotado por  $r_{t-j}r'_{t-j}$ . Utilizou-se o operador *vech*, este empilha a parte inferior de uma matriz  $N \times N$  num vetor  $N(N+1)/2 \times 1$ . Desta forma o modelo foi escrito da seguinte maneira:

$$vech^3(H_T) = c + \sum_{j=1}^q A_j vech(r_{t-j} r'_{t-j}) + \sum_{j=1}^q B_j vech(H_{t-j}) \quad (2)$$

Como é possível perceber acima o modelo é extremamente genérico e flexível, desta forma com um número de defasagens elevada a quantidade de parâmetros torna-se muito grande. Outro grande problema deste modelo é garantir que  $H_t$  tenha um determinante positivo, com esta especificação isto pode ocorrer, mas não ocorrerá necessariamente. Desta forma a utilização da atual classe de modelos para o problema de otimização é pouco provável. Além de termos uma grande quantidade de dados, já que usualmente trabalhamos com dados diários a garantia de um determinante positivo é quase impossível.

A fim de solucionar estas questões Bollerslev et al. (1988) propõe um modelo onde  $A_i$  e  $B_j$  são matrizes diagonais. Desta forma impor um determinante positivo para  $H_t$  é mais fácil. E a estimação é menos complexa, pois as equações podem ser estimadas separadamente. Os modelos de VEC não possuem uma solução trivial. Mesmo o VEC diagonal exigirá um dispendioso esforço computacional, pois o logaritmo de verossimilhança é estimado por interações a cada período  $t$ . Para trabalhos empíricos mais recentes estes modelos estão em desuso, os motivos para isso são óbvios.

## 2.2 O modelo de BEKK de Engle e Kroner (1995)

---

<sup>3</sup> *vech* denota a vetorização de uma matriz, ou seja, transforma a matriz em um vetor coluna. Uma matriz  $A_{m \times n}$  irá ser transformada em um vetor coluna  $C_{m \times 1}$  através do empilhamento das colunas da matriz  $A$ .

Este modelo é uma versão restritiva do modelo VEC, onde em sua construção é imposto a ele que o determinante seja positivo, isto é obtido através do produto da matriz  $C$  que é triangular inferior com  $C'$  e das matrizes  $A$  e  $B$  que podem ser completas, diagonais ou escalares. Assim o determinante é positivo. O que torna o modelo bastante atrativo, pois é necessário que haja esta positividade do determinante. Visto que esta é uma das condições para que a matriz possa ser inversível. Este modelo ainda tem que garantir que o produto de Hadamard<sup>4</sup> de  $A$  por  $A$  e  $B$  por  $B$  deve ter autovalores inferior ao módulo da unidade. Garantindo assim estacionariedade da volatilidade condicional. O modelo foi construído da seguinte forma:

$$H_t = CC' + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K A'_{kj} r_{t-j} r'_{t-j} A_{kj} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K B'_{kj} H_{t-j} B_{kj} \quad (3)$$

A decomposição do termo constante em duas matrizes triangulares inferiores,  $CC'$ , garante a positividade. Engle e Kroner especificam como eliminar as redundâncias e observações equivalentes. Para a garantia da estacionariedade da matriz de covariância. A interpretação dos parâmetros da equação acima, a de número 3, é complexa. Assim podemos tentar entender melhor o modelo de primeira ordem, representativo da equação 3, onde:

---

<sup>4</sup> Dadas as matrizes  $A_{m \times n}$  e  $B_{m \times n}$  o produto de Hadamard, representado por  $C=A \otimes B$ , é a matriz onde cada elemento de  $C$  resulta do produto dos elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ , ou:  $C=A \otimes B=[c_{ij}=a_{ij} \times b_{ij}]$ .

$$H_t = CC' + A'r_{t-1}r'_{t-1}A + B'H_{t-1}B \quad (4)$$

Podemos também utilizar este modelo garantindo que  $A$  e  $B$  são matrizes diagonais e satisfaz à condição de  $B = A D$ . Este seria o modelo BEKK diagonal. De forma ainda mais restritiva poderia ser utilizado o BEKK escalar onde  $A = aI$  e  $B = bI$ , onde  $a$  e  $b$  seriam escalares.

Cada modelo BEKK irá gerar um único modelo VEC com determinante positivo para a matriz de covariância condicional, segundo Engle e Kroner (1995), os modelos serão equivalentes. Caso o valor de  $K$  seja pequeno esta equivalência pode não ocorrer, porém com um  $K$  muito grande os modelos BEKK sofrem do mesmo problema que os modelos VEC, o número de parâmetros cresce rapidamente. Assim a grande vantagem destes frente ao VEC é que o determinante é sempre positivo, no entanto temos uma relação não linear nos parâmetros. O que torna a interpretação dos resultados pouco intuitiva, apesar de ser mais fácil de obter. Assim a aplicação deste modelo ao problema na seleção de carteira por um lado torna-se possível, quando na construção do modelo é imposto um determinante positivo. Por outro a interpretação dos resultados ficaria prejudicada.

### **2.3 O modelo exponencial de Kawakatsu (2006)**

Neste modelo não é necessário à imposição de qualquer restrição visto que é um modelo exponencial e assim o determinante de  $H_t$  sempre

será positivo. O modelo é uma generalização do modelo exponencial proposto por Nelson (1991) e pode ser visto como:

$$\begin{aligned} \text{vech}(\ln H_t - C) = & \sum_{i=1}^q A_i \eta_{t-i} + \sum_{i=1}^q F_i (\eta_{t-i} | -E[\eta_{t-i}]) + \\ & \sum_{i=1}^p B_i \text{vech}(\ln H_{t-i} - C) \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $C$  é uma matriz simétrica  $N \times N$  e  $A_i$ ,  $B_i$  e  $F_i$  são a matriz dos parâmetros, com os tamanhos  $\frac{N(N+1)}{2 \times N}$ ,  $\frac{N(N+1)}{2 \times N(N+1)}$  e  $\frac{N(N+1)}{2 \times N}$ . O  $E[\eta_{t-i}]$  denota a esperança do termo  $\eta_{t-i}$ . Como temos o  $\ln H_t$  não precisamos impor nenhuma condição para que o determinante seja positivo, o próprio logaritmo neperiano é uma imposição, garantindo somente números positivos. Uma vez que o modelo contém um grande número de parâmetros, Kawakatsu (2006) discute um número de especificações mais parcimoniosas. Ele também considera a estimativa do modelo, testes de hipóteses, a interpretação dos parâmetros, que são bem mais complexos. Como podemos perceber o crescimento da amostra faz com que os parâmetros aumentem mais que proporcionalmente. O esforço computacional para obtenção destes resultados é muito grande, logo pelos mesmos motivos do modelo anterior não será a melhor escolha para a seleção de carteira.

## 2.4 O modelo de fatores de Engle et al. (1990)

Os modelos fatoriais são construídos a partir da observação empírica, nas quais se conclui que são apenas alguns fatores comuns que

explicam o comportamento das variáveis. Isto é tipicamente visto em trabalhos a respeito de retorno dos ativos. Neste modelo, assume-se que as observações são geradas por fatores que são condicionalmente heteroscedásticos e possuem uma estrutura do tipo GARCH. Esta abordagem tem a vantagem de reduzir a dimensionalidade do problema quando o número de fatores relativos à dimensão do retorno. Temos então o seguinte modelo definido por Engle:

$$H_t = \Omega + \sum_{k=1}^K w_k w_k' f_{k,t} \quad (6)$$

onde  $\Omega$  é uma matriz positiva semi-definida,  $w_k, k = 1, \dots, K$  é o vetor linearmente independente dos pesos e  $f_{k,t}$  são os fatores em comum. Supõem se que estes fatores seguem uma estrutura GARCH como se segue:

$$f_{k,t} = \omega_k + \alpha_k (\gamma_k' r_{t-1})^2 + \beta_k f_{k,t-1} \quad (7)$$

Sendo  $\omega_k, \alpha_k$  e  $\beta_k$  escalares e  $\gamma_k$  o vetor dos pesos. O  $k$  será bem menor que o número de ativos assim o modelo é menos desgastante para ser calculado e compreendido. O método de estimação utilizado foi o processo de dois estágios, que é consistente mais não é eficiente. Dois fatores foram observados para explicar a volatilidade dos retornos individuais em relação aos desvios do retorno da carteira.

Um dos problemas com estes modelos é que geralmente os fatores que afetam as variáveis são correlacionados, podendo gerar uma indesejável característica que seria de os fatores capturarem

características semelhantes a dos dados. Assim são propostas várias especificações para que os fatores sejam não correlacionados. A principal delas se dá através de uma transformação linear inversível, onde  $r_t$  representa os fatores não observados e não correlacionados e  $z_t$  que segue um processo GARCH é uma transformação de  $r_t$ . Onde  $W$ , uma matriz não singular  $N \times N$ .

$$r_t = Wz_t \quad (8)$$

A utilização dos fatores não correlacionados pode reduzir substancialmente o número de fatores relevantes para o modelo, assim teríamos uma redução na demanda por utilização de tempo de cálculo computacional e interpretação de parâmetros desnecessários.

A seguir dedica-se uma subseção somente para alargar os esclarecimentos sobre o modelo de fatores não correlacionados que tem ganhado alguma notoriedade na comunidade científica ao longo dos anos 2000.

## **2.5 Modelo de fatores não correlacionados.**

Este modelo faz parte da classe de modelos de combinação linear dos GARCH univariados, isto porque ele considera que o modelo multivariado é uma combinação linear de vários GARCH univariados e estes não irão apresentar necessariamente um GARCH padrão.

No modelo Van der Weide (2002), o GARCH ortogonal os dados são gerados por uma transformação ortogonal. A matriz da

transformação linear é a matriz ortogonal de autovetores da matriz de covariância população incondicional dos retornos padronizados. Na versão generalizada, esta matriz só deve ser invertida. Assim temos a matriz diagonal das variâncias condicionais dada por:

$$H_t^z = (I - A - B) + A \circ (Z_{t-1} z'_{t-1}) + B H_{t-1}^z \quad (9)$$

onde  $H_t^z$  é a matriz diagonal  $N \times N$  das variância condicional de  $z_t$ ,  $A$  e  $B$  são matrizes diagonais  $N \times N$ . Se  $A + B < 1$  a covariância é estacionária. Desta forma a matriz de covariância condicional de  $R_t$  pode ser expressa por:

$$H_t = W H_t^z W' = \sum_{k=1}^N w_{(k)} w'_{(k)} h_{k,t}^z \quad (10)$$

onde,  $w_{(k)}$  são as colunas da matriz  $W$  e  $h_{k,t}^z$  são os elementos da diagonal da matriz  $H_t^z$ .

Lanne e Saikonen (2007) aprofundam os estudos do modelo acima. Chegando a conclusões parecidas. Apesar da grande utilização dos modelos fatoriais, os principais pesquisadores em área de otimização atualmente trabalham com modelos de correlação condicional. Principalmente a correlação condicional dinâmica. Isso devido a grande parcimônia e facilidade de cálculo. Desta forma iremos concentrar maior esforço para o entendimento e a especificação destes modelos.

## 2.6 Modelos de Volatilidade Estocástica

O uso de modelos de volatilidade estocástica (ou SV) tem sido uma alternativa satisfatória para analisar séries temporais financeiras em comparação com os modelos usuais tipo GARCH (Kim e Shephard 1998). Os modelos SV são mais flexíveis para modelar séries financeiras, pois assumem dois processos para os ruídos: um para as observações e outro para as volatilidades latentes. Estudos comparativos entre as classes de modelos SV e do tipo ARCH são amplamente discutidos na literatura (ver, por exemplo, Taylor (1994), Ghysels (1996), Shephard (1996)).

Métodos Bayesianos usando técnicas de Monte Carlo em Cadeia de Markov (MCMC) são considerados para análise de séries temporais financeiras assumindo modelos SV (Meyer e Yu 2000) dada a grande dificuldade do uso das técnicas estatísticas clássicas usuais devido à complexidade da função de verossimilhança. Além disso, há a necessidade de que os dados sejam normalmente distribuídos, para séries financeiras nem sempre esta condição é válida. O não cumprimento desta condição altera os resultados de maneira significativa. Mais uma vez é ressaltado então que o foco deste trabalho estará na modelagem do tipo GARCH. Os modelos de volatilidade estocástica podem ser aprofundados em Hyungsok Ahn, Paul Wilmott, (2006).

## 2.7 Modelo de Correlação Condicional Constante de Bollerslev (1990)

Os modelos GARCH multivariados vistos anteriormente estavam focados em fornecer parametrizações ricas. Não consideravam a escala dos dados, desta forma todos sofrem com grande dimensionalidade. O aumento dos dados transversais faz com que o número de parâmetros a serem estimados simultaneamente aumentem pelo menos de forma quadrática. O VEC e os modelos de fatores latentes ainda precisam de restrições não lineares. Assim dentre todos os modelos vistos o trabalho irá se concentrar nos modelos de correlação condicional. Estes terão a flexibilidade de um modelo GARCH univariado, mas não a complexidade de um GARCH multivariado.

Estes são modelos inspirados na correlação incondicional. Se  $\rho$  é a correlação incondicional temos;

$$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (11)$$

ou podemos reescrever como:

$$cov(x,y) = \sigma_x \rho \sigma_y$$

condicionalmente a correlação pode ser escrita como;

$$\rho_t = \frac{E_{t-1}(\varepsilon_{x,t} \varepsilon_{y,t})}{\sqrt{E_{t-1}(\varepsilon_{x,t}^2) E_{t-1}(\varepsilon_{y,t}^2)}} \quad (12)$$

ou se dissermos que  $H_t$  é a variância condicional e  $D_t$  o desvio padrão e  $P$ , no caso da correlação constante ou  $P_t$  na correlação dinâmica condicional temos:

$$H_t = D_t P D_t \quad (13)$$

A correlação condicional é baseada na informação obtida no período anterior. Previsões multiperíodo são realizadas da mesma forma, sujeito a atender a condição de  $-1 < \rho < 1$ . A correlação condicional satisfaz essa restrição para todas as realizações possíveis de informações do passado e para todas as combinações lineares das variáveis.

A matriz de variância condicional para os modelos de correlação constante é especificada em uma forma hierárquica. Primeiro, é escolhido um modelo GARCH para cada tipo de variância condicional, afim de encontrarmos o desvio padrão de  $D_t$ . Por exemplo, alguns desvios condicionais podem seguir um modelo GARCH convencional, enquanto outros podem ser descrito como um modelo EGARCH. O segundo passo, com base nos desvios condicionais um modelo da matriz de correlação condicional, é impor um determinante positivo. Bollerslev (1990) propõe uma classe de modelos MGARCH em que as correlações condicionais são constantes e, assim, as covariâncias condicionais são proporcionais ao produto dos desvios-padrão condicionais correspondentes. Esta restrição reduz significativamente o número de parâmetros desconhecidos e, assim, simplifica a estimação. Chegamos então a equação 13, vista acima onde

$D_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2})$  e  $P = [p_{ij}]$  é positivo definido. Assim os elementos fora da diagonal principal são definidos da seguinte maneira:

$$[H_t]_{ii} = h_{it}^{1/2} h_{jt}^{1/2} p_{ij}, \quad i \neq j \quad (14)$$

Uma extensão deste modelo foi proposta por Jeantheau (1998), ele faz com que  $A$  e  $B$  deixem de ser matrizes diagonais na especificação do vetor da variância condicional. Este vetor é dado por:

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^q A_j r_{t-j}^{(2)} + \sum_{j=1}^p B_j h_{t-j} \quad (15)$$

Assim o quadrado dos retornos defasados e as variâncias de toda a série entram na equação individual da variância condicional. Uma vantagem desta extensão é que ela permite uma estrutura de autocorrelação consideravelmente mais rica para o quadrado dos retornos observados do que o modelo CCC-GARCH. Outra vantagem é a facilidade computacional com a qual o modelo é estimado, a matriz de correlação condicional deve ser invertida por interação apenas uma vez, já que esta é constante; e ainda garantir a estacionariedade da covariância é mais fácil.

A suposição de que as correlações condicionais são constantes pode parecer irreal. Desta maneira autores como Christodoulakis e Satchell (2002), Engle (2002) e Tse e Tsui (2002) propõem uma generalização do modelo CCC, tornando a matriz de correlação

condicional dependente do tempo. O modelo é então chamado de correlação condicional dinâmica ou modelo DCC.

## 2.8 O modelo de Correlação Condicional Dinâmica (DCC)

A facilidade computacional que havia nos modelos CCC-GARCH é perdida já que agora para cada período deverá ocorrer a inversão da matriz de correlação condicional. Assim o modelo passa a ser o seguinte,

$$H_t = D_t P_t D_t \quad (16)$$

onde  $P_t$  tem um determinante positivo, em cada período  $t$ . O número de propostas para definir  $P_t$  é grande. Uma das proposições mais simples é que a matriz de correlação possa ser estimada através de um exponencial suave.

$$\rho_{x,y,t} = \frac{\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^s \varepsilon_{x,t-s} \varepsilon_{y,t-s}}{\sqrt{(\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^s \varepsilon_{y,t-s}^2)(\sum_{s=1}^{t-1} \lambda^s \varepsilon_{x,t-s}^2)}} \quad (17)$$

Outros modelos também podem ser propostos, por exemplo, uma média entre um CCC-GARCH e um BEKK diagonal, um modelo assimétrico e outros. Sabemos que a correlação condicional é equivalente a covariância condicional dos erros<sup>5</sup>, então podemos

---

<sup>5</sup> ver Engle 2002

calcular a correlação por meio da covariância condicional dos erros,  $q_{x,y,t}$  que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$q_{x,y,t} = (1 - \lambda)(\varepsilon_{x,t-1}\varepsilon_{y,t-1}) + \lambda(q_{x,y,t-1}) \quad (18)$$

ou  $q_{x,y,t}$  pode ser obtido por um processo GARCH(1,1)

$$q_{x,y,t} = \bar{\rho}_{x,y} + \alpha(\varepsilon_{x,t-1}\varepsilon_{y,t-1} - \bar{\rho}_{x,y}) + \beta(q_{x,y,t-1} - \bar{\rho}_{x,y}) \quad (19)$$

onde  $\bar{\rho}_{x,y}$  é a correlação incondicional. Logo:  $\bar{q}_{x,y} \cong \bar{\rho}_{x,y}$ . Assim o estimador da correlação condicional é dado por:

$$\rho_{x,y,t} = \frac{q_{x,y,t}}{\sqrt{q_{x,y,t}q_{x,y,t}}} \quad (20)$$

no longo prazo  $\alpha + \beta \leq 1$ , assim teremos a equação 19 para  $q_{x,y,t}$ .

O DCC-GARCH de Engle é dotado de uma falha observada empiricamente. O modelo em sua concepção pondera de forma idêntica as informações, sejam elas boas ou más. Enquanto que na realidade o efeito de más notícias sobre a volatilidade e correlação são maiores que os efeitos de boas notícias. Boa parte desta assimetria pode ser explicada por dois fatores: o efeito alavancagem e a retroalimentação da volatilidade, ver Engle, Capielo e Sheppard (2006). O retorno dos ativos mostra-se assimétrico, é mais intenso nas ações do que nos títulos, mas está presente em ambos. Nos momentos de turbulência no

mercado financeiro as volatilidades no mercado de capital mostram ligações importantes e as correlações condicionais de capital, principalmente, entre os grupos regionais aumentam drasticamente. Desta forma, a volatilidade e a correlação medidos a partir de dados históricos podem não capturar mudanças no risco, a menos que os métodos sejam cuidadosamente projetados para atualizar as estimativas rapidamente, esta é a essência do modelo dinâmico de correlação condicional assimétrico.

Segundo o modelo desenvolvido por Engle, Cappiello e Sheppard, 2006, poderemos

estendê-lo em duas direções, permitindo que a volatilidade e a correlação sejam assimétricas. O modelo é uma generalização do DCC-GARCH de Engle, 2002 de forma que seja estimado em 3 estágios, no primeiro são estimados modelos de volatilidade univariados adequados para cada tipo de ativo; no segundo estágio o retorno dos ativos, transformados por seus desvios-padrões são utilizados para estimar os parâmetros do intercepto da correlação condicional e por fim, no terceiro estágio com os parâmetros do intercepto da correlação condicional estimam-se os coeficientes que regem a dinâmica da correlação. Este método é facilmente computável porém é ineficiente quanto a máxima verossimilhança para todos os parâmetros estimados de uma só vez ( Engle e Sheppard, 2005). O modelo então é construído da seguinte forma:

$$Q_t = (\bar{P} - A'\bar{P}A - B'\bar{P}B - G'\bar{N}G) + A'\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}A + G'n_{t-1}n'_{t-1}G + B'Q_{t-1}B \quad (21)$$

onde,  $A$ ,  $B$  e  $G$  são matrizes de parâmetros com dimensão  $K \times K$ ,  $n_t = I[\varepsilon_t < 0] \circ \varepsilon_t$  a matriz  $I$  é  $K \times 1$ , esta é composta somente por números 1 ou 0, 1 para argumentos verdadeiros e 0 caso contrário.  $\bar{N} = E[n_t n_t']$ . Se  $G = 0$  voltamos ao DCC-GARCH original e se  $A$ ,  $B$  e  $G$  forem escalares temos o ASYDCC-GARCH. Escrevendo o modelo escalar para analisarmos a condição de positividade definida teremos:

$$Q_t = (\bar{P} - a^2 \bar{P} - b^2 \bar{P} - g^2 \bar{N}) + a^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} + g^2 n_{t-1} n'_{t-1} + b^2 Q_{t-1} \quad (22)$$

neste caso a condição para a ocorrência da positividade definida é que  $a^2 + b^2 + \delta g^2 < 1$ , onde  $\delta$  é o máximo autovalor de  $[\bar{P}^{-1/2} \bar{N} \bar{P}^{-1/2}]$ .

## 2.9 O modelo Risk Metrics

O modelo foi desenvolvido internamente no J.P. Morgan em 1989. Apenas em 1992 ele foi disponibilizado ao público, ganhando rapidamente notoriedade entre os participantes do mercado, no entanto em 1996 que a J.P. Morgan & Reuters aprimoram os estudos. A metodologia estima o risco de mercado das carteiras. O modelo é uma modificação da matriz de covariância amostral. Esta modificação tem como base o processo de média móvel exponencialmente ponderada para modelar covariâncias condicionais.

A ponderação é feita de forma desigual. No Risk Metrics as informações mais recentes são exponencialmente mais importantes que as mais distantes do momento atual. A matriz de covariância é dada por:

$$H_t = (1 - \lambda)R_{t-1}R'_{t-1} + H_{t-1} \quad (23)$$

Onde o fator de decaimento  $\lambda$ , está entre zero e um. Para dados diários o valor recomendado para o  $\lambda$  é igual a 0,94.. Na equação (23) o primeiro termo,  $(1 - \lambda)R_{t-1}R'_{t-1}$  representa a contribuição do retorno mais recente e o termo  $H_{t-1}$  representa a dependência temporal da variância, ou seja o autorregressivo.

## 2.10 Outras abordagens mais recentes

O modelo DFGARCH é uma evolução dos modelos de fatores não observáveis que foi visto na subseção 2.5. Onde a correlação dos ativos financeiros depende de um pequeno número de variáveis não observáveis. Assim com uma dimensão menor ganha-se em flexibilidade. Os ganhos com esta nova abordagem permitem diversas especificações econométricas para os fatores e para os ativos individuais na carteira. O peso ou ponderação dos fatores podem ser variáveis no tempo.

O modelo é então definido da seguinte maneira: Cada um dos  $N$  retornos dos ativos individuais é gerado por  $K \leq N$  fatores observáveis. Note que intuitivamente o número de fatores deve ser menos que os ativos. O retorno individual,  $y_{it}$ , pode ser escrito como,

$$y_{it} = \beta_{it}f_{it} + \varepsilon_{it} \quad (24)$$

$\beta_{it}$  é uma linha da matriz de pesos dos fatores  $\beta_t$  com dimensão  $N \times K$ ,  $f_{it}$  é o vetor dos fatores não observáveis e  $\varepsilon_{it}$  é o erro, normalmente distribuído com média zero e variância de  $h_{it}$ . Os fatores são condicionalmente ortogonais para os erros de medição e não são mutuamente ortogonais condicionalmente.

A inovação proposta por esse modelo está na maneira como  $\beta_{it}$  evolui temporalmente. Ou as cargas fatoriais são não observáveis e seguem um passeio aleatório, ou as cargas fatoriais seguem um fator de aprendizagem de Adrian e Franzoni(2009)<sup>6</sup>. As equações estão respectivamente dispostas.

$$\beta_{it} = \beta_{it-1} + u_{it} \quad (25)$$

com  $u_{it}$  representando o vetor dos erros na lei de formação da ponderação dos fatores. Este é normalmente distribuído com média zero e variância de  $\sum u_i$ .

$$\beta_{it} = (1 - \Phi)B_i + \Phi\beta_{it} + u_{it} \quad (26)$$

onde  $B_i$  é a média de longo prazo,  $\beta_{it}$  e  $\Phi \in (-1,1)$  e o  $u_{it}$  segue a mesma definição da equação anterior. Quando utilizamos a primeira

---

<sup>6</sup> A ponderação do fator segue um proceso de retorno a média, porém a média de longo prazo é também desconhecida. Assim a inferência é tanto para a carga quanto para a média de longo prazo.

equação temos o DFGARCH-RW, quando utilizamos a segunda temos o DFGARCH-learning.

A matriz de covariância condicional  $H_t$ , do vetor de retornos é dada por,

$$H_t = \beta_t \Omega_t \beta_t' + \Xi_t \quad (27)$$

observamos que  $\Omega_t$  é a matriz positiva definida da covariância condicional dos fatores,  $\Xi_t$  é a diagonal da matriz de covariância dos resíduos do modelo fatorial da equação (24). Podemos então perceber que  $H_t$  é positivo pois seus componentes são positivos.

Assim poderemos através da matriz de covariância dos fatores obtermos a matriz de covariância dos retornos. Para isso basta que obtenhamos a matriz de covariância dos fatores,  $\Omega_t$ . Neste caso, o modelo que foi escolhido para obtermos a covariância dos fatores foi o modelo de Engle (2002).

A estimação por este método é feita com base em três etapas: Primeiro são estimadas pelo método de máxima verossimilhança as dinâmicas das cargas fatoriais, a equação (24). Em segundo lugar, é estimada a matriz de covariância dos fatores, estimado por um DCC ajustado para a série temporal de retorno dos fatores, assumindo inovações Gaussianas. Os parâmetros deste DCC são obtidos por verossimilhança composta. Por último consideram alternativas especificações GARCH univariadas para obter as variâncias condicionais dos resíduos dos fatores. O critério é pelo menor Akaike (AIC). Com esta nova abordagem podemos ter uma variância na carteira

de ativos menor. Esta diferença da variância para modelos consagrados é estatisticamente significativa.

Nas seções anteriores, analisamos as especificações diferentes de  $H_t$ . Eles diferem em vários aspectos. Podemos distinguir três grandes classes para a construção de modelos GARCH multivariados, (i) generalizações diretas do modelo GARCH univariado de Bollerslev (1986), (ii) combinações lineares de modelos GARCH univariados (iii) as combinações não-lineares de modelos GARCH univariados. Na primeira categoria, temos VEC, BEKK e modelos de fatores. Na segunda categoria temos modelos ortogonais e modelos de fatores latentes. A última categoria contém os modelos Risk Metrics, de correlação condicional constantes (CCC) e dinâmicos (DCC).

Como percebemos os modelos da última classe são os mais relevantes, principalmente para seleção de carteira, esta classe de modelos permite especificar separadamente, por um lado, as variações individuais condicionais, e, por outro lado, a matriz de correlação condicional. Os resultados teóricos sobre ergodicidade, estacionariedade e momentos podem não ser tão simples de se obter como para os modelos apresentados nas seções anteriores. Não obstante, eles são menos ávidos em parâmetros do que os modelos da primeira categoria, e, portanto, eles são mais facilmente estimadas. Os modelos DCC podem ser estimados de forma consistente em duas etapas, o que torna esta abordagem viável quando  $N$  é grande. Claro que, quando  $N$  é grande, a restrição da dinâmica comum fica mais rígida, no entanto, para grandes  $N$  o problema de manter a tratabilidade também torna-se mais difícil para as outras classes de modelos.

A exposição dos argumentos ao longo deste capítulo nos fazem ao fim concluir que os modelos mais indicados para a seleção de carteira são os modelos Risk Metrics, os modelos de correlação condicional constante e dinâmico, e suas variações. Visto isso há outros pontos a serem destrinchados antes que passemos a experimentação. A otimização de carteiras com e sem restrição de vendas a descoberto e as medidas de avaliação de desempenho do portfólio (média, desvio padrão, índice de Sharpe, *turnover* e outros).

### **3. Aplicações da Volatilidade Multivariada em problemas com ativos.**

A seguir são apresentadas algumas das mais relevantes aplicações de modelos multivariados de volatilidade, e como será possível de constatar o principal uso deste tipo de modelo é para ações e não para ativos de renda fixa.

#### **3.1 A aplicação de Ang e Bekaert (1999).**

A proposição dos autores é verificar se existe superioridade em fazer uma diversificação de carteira com ativos internacionais contra manter uma carteira apenas com títulos domésticos.

O trabalho mostra que as correlações entre os retornos acionários são maiores nos momentos de baixa do que nos momentos de alta. E os movimentos nos momentos de baixa são maiores do que nos momentos de alta. Essa conclusão aponta para uma estratégia não diversificadora internacionalmente já que quando mais se precisa menores são as correlações. Motivados por esta constatação teórica Ang e Bekaert resolvem testar isso empiricamente.

Usam o modelo de mudança de cenário de Hamilton (1989). No momento a volatilidade estocástica ainda é incipiente por isso não é utilizada. Desta forma, o modelo se presta a diversos cenários para o retorno internacional. Resolver numericamente e desenvolver a intuição sobre o problema prático da alocação de ativos com indivíduos dotados de aversão relativa ao risco constante são um dos objetivos do trabalho.

Além das estimativas na ótima escolha de portfólio também investiga o valor econômico dos resultados.

Segundo o modelo utilizado o investidor maximiza a riqueza ao final do período, sem levar em consideração os períodos intermediários. Os indivíduos com aversão relativa ao risco constante mantêm os pesos em sua carteira constante ao longo do tempo. Os dados são fornecidos pelo Morgan Stanley International, para os ativos dos Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha, de janeiro de 1970 a dezembro de 1997.

O trabalho chega à conclusão de que a diversificação internacional é benéfica, especialmente em prazos longos, isso é demonstrado através das compensações a quem não faz diversificação. Já para os ajustes do portfólio dinamicamente não há evidências que existem ganhos. A sugestão é que a matriz de covariância dos retornos seja constante ao longo do tempo. O resultado é consistente com outras amostras para os mesmos países.

### **3.2 A Aplicação de Ledoit e Wolf (2003)**

O artigo com base em uma constatação empírica mostra que não se deve usar a matriz de covariância amostral para fins de otimização. Esta contém muitos erros de estimação, em seu lugar o trabalho sugere que se utilize uma transformação da matriz de covariância da amostra conhecida como “encolhimento”. Isso puxa os valores extremos para o centro da distribuição. O desafio é saber a intensidade ótima dos encolhimentos. E para isso o gestor utiliza-se de dados para mostrar que o modelo aumenta as informações de uma carteira.

O problema de erro de estimação muito elevado ao utilizarmos todos os dados para a matriz de covariância condicional no modelo de Markowitz é conhecido desde o trabalho de Jobson e Korkie, 1980. Assim a utilização prática modelo média variância é pouco utilizado no dia-a-dia. O acompanhamento de um determinado índice é mais usual, ou firmas têm modelo de média variância pouco conhecido pelo grande público tornando-os obscuros demais. Então os autores propõem um modelo para aproximar a teoria da prática. Grosso modo, o método consiste em calcular a matriz de covariância dos retornos então depois, puxar os erros positivos para baixo e empurrar os erros negativos para cima, desta forma encolher o intervalo dos extremos.

As grandes questões apresentadas pela aplicação é o que reduzir? E quanto reduzir? O modelo se dispõe a versar sobre: (1) fornecer uma resposta rigorosa estatisticamente; (2) descrever o modelo para que cada individuo chegue a sua própria conclusão; (3) fornecer o código computacional e (4) mostrar com os dados reais que o método produz melhorias significativas. As vantagens do modelo estão na sua facilidade em ser estimada e em sua imparcialidade e como principal desvantagem temos que o erro na estimação torna-se demasiadamente alto quando o número de regressores é maior ou igual ao número de observações.

Para se chegar ao estimador estruturado da matriz de covariância condicional, Ledoit e Wolf (2003) sugerem que se faça uma combinação linear entre os extremos destes estimadores. Segundo ele uma escolha mediana é sempre superior a qualquer dos dois extremos. A combinação linear ótima ocorre quando a distância entre o estimador de

encolhimento e a matriz verdadeira é mínima. O objetivo do encolhimento deveria ser a matriz de covariância condicional gerada por um método CCC.

Os dados para chegar a essa conclusão são fornecidos pelo DataStream para o retorno de ativos norte americanos começando em 1983 e terminando em 2002, com rebalços mensais.

O principal resultado obtido é que ao utilizar esta modelagem representa um ganho sobre o excesso de retornos de cerca de 50% e corrobora o que os técnicos já achavam em observações muito longe da média, o que não são muito representativas.

### **3.3 A aplicação de Yufeng Han (2005)**

Ao estudar amostras com uma grande variedade de ativos Han propõe um modelo que as considere. Este seria o modelo de fatores dinâmicos multivariados para volatilidade estocástica (MFDMV), avaliando a importância econômica do modelo para grandes amostras, ele se mostra superior ao *benchmark*. Esta superioridade é consistente com diferentes medidas de desempenho, prazos, ativos e funções de investimento.

Assim o trabalho irá propor a escolha ótima para um grande número de ativos, fazendo o retorno e a volatilidade variarem no tempo. A volatilidade do retorno será um processo auto-regressivo e a matriz de covariância condicional varia no tempo (Chib, Nardari e Shephard, 2002). Os fatores seguem um processo VAR. O modelo MFDMV é mais tratável que um GARCH que é rico em parâmetros e de difícil

mensuração. A possibilidade de colocarmos uma infinidade de ativos no MFDMV também o torna muito atrativo.

O modelo utiliza técnicas bayesianas que consistem em encontrar parâmetros para a função de verossimilhança e não a própria função de máxima verossimilhança, este método é confiável até mesmo para inúmeros estimadores. Para este caso em particular da alocação de ativos os investidores são considerados avessos ao risco e são utilizados 36 ativos mais um ativo livre de risco.

Han considera o modelo média variância e diz que os indivíduos reequilibram o seu portfólio com base nas previsões do modelo MFDMV para o retorno e para a volatilidade esperados. Propõem duas estratégias a retorno e volatilidade modelada pelo MFDMV e a outra somente a volatilidade. Também considera três investidores os que fazem ajustes nos pesos de suas carteiras diariamente, os que o fazem semanalmente e os que o fazem mensalmente. Para avaliar o desempenho dos modelos para fora da amostra foram utilizados o índice de Sharpe, o retorno ajustado ao risco e a taxa de performance, que é quanto os investidores estão dispostos a pagar para sair da estratégia de ficar com os títulos até a sua maturidade. Investidores ativos tem um ganho frente à estratégia de compra e segura, o investidor que faz ajuste diário tem um ganho superior ao que compra e segura de 15,8%. Os investidores não ativos estariam dispostos a pagar cerca de 18% do seu retorno para mudar de estratégia. A eficácia do modelo MFDMV é ainda maior nos maus momentos, porque é capaz de antecipar e só é eficaz para o comerciante diário. Isso até certo ponto é presumível, pois a dinâmica dos fatores latentes não deve ser persistente para este período.

Outro importante fator é confrontar estes resultados com os custos de transação.

### **3.4 O Trabalho de Engle e Colacito (2006)**

A aplicação busca testar o modelo de Correlação Dinâmica e ainda saber qual o valor econômico deste modelo.

Em Engle e Colacito (2006), o que se buscou foi entender qual a importância da volatilidade e correlação temporal e também fazer uma comparação entre os métodos alternativos. Ao melhorar a especificação da matriz de covariância dos retornos há um aumento do retorno esperado que possa ser alcançado sem o aumento da volatilidade (Diebold e Mariano,1995). Assim eles justificam a busca de um modelo melhor para especificar a matriz de covariância condicional e ainda acrescentam que a volatilidade para a matriz de covariância bem especificada é menor, logo o risco inerente à carteira é menor.

A grande novidade deste modelo é que ele propõe-se a solucionar o problema da igualdade na interpretação das informações sejam elas positivas ou negativas. Para isso foi analisado um conjunto de dados empíricos que são dados diários do S&P 500 e títulos com vencimento para 10 anos, com frequência diária no período entre 26/08/1988 à 26/08/2003.

Para chegar ao melhor modelo foram utilizados alguns testes: (1) Teste para a matriz de covariância verdadeira – escolhe se a menor variância mesmo sem saber ao certo qual o retorno esperado; (2) Teste para a precisão do método – testa se a razão entre a variância da carteira

e a variância prevista tem média unitária, ou seja, a hipótese nula é que  $\beta_0 = 0$ , onde  $\beta_0$  é a razão descrita acima e (3) Teste de igualdade entre dois métodos – teste se o quadrado do retorno no primeiro modelo menos o quadrado do retorno do segundo é igual a zero. Neste caso  $H_0: \Delta = 0$ .

A conclusão que o trabalho de Engle e Colacito chega que o modelo ASYDCC-GARCH diminui o desvio-padrão da amostra, mas não de forma significativa e conforme a amostra aumenta o modelo dinâmico em geral perde relevância por conta das dificuldades computacionais para o cálculo. Ainda utilizando o teste de Diebold e Marianos de perda mínima mostra que três estimadores minimizam a variância da carteira o BEKK, o DCC e ASYDCC-GARCH. No entanto, repetindo o teste para os retornos esperados mais próximos aos verdadeiros o ASYDCC-GARCH mostra-se o melhor modelo.

## 4. Otimização de carteiras e avaliação de desempenho

### 4.1 Otimização de carteira

A teoria moderna do portfólio é a principal ferramenta para explicar como indivíduos racionais usam o princípio da diversificação para otimizar as suas carteiras de investimentos, e como um ativo arriscado deve ser precificado. Assim esta é a principal teoria para explicar a otimização de carteiras de ativos. O pioneiro neste campo foi Markowitz (1952) e sua proposição do modelo média-variância. A teoria do portfólio estabelece que decisões relacionadas à seleção de investimentos devam ser tomadas com base na relação risco-retorno. Ou no descrito por Markowitz como média-variância. A formulação do problema é dada por:

$$\begin{aligned} \min_{w_t} \quad & w_t \sum r_{t|t-1} w_t - \frac{1}{\lambda} w_t' \mu_{r_{t|t-1}} \\ \text{sujeito a} \quad & w_t' \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (28)$$

Neste caso  $\mu_{r_{t|t-1}}$  é a previsão de um passo a frente do vetor dos retornos esperados.  $\sum r_{t|t-1}$  é a previsão de um passo a frente da matriz de covariâncias condicionais dos retornos.  $w_t$  são os pesos ótimos e  $\lambda$  é o coeficiente de aversão ao risco. Podemos estender esta relação ao problema de variância minimia (MVP). A baixo temos o MVP irrestrito, pois não há alguma restrição para vendas a descoberto.

$$\begin{aligned} \min_{w_t} w_t' H_{t|t-1} w_t \\ \text{sujeito a} \quad w_t' \iota = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

onde  $\iota$  é um vetor de uns  $N \times 1$ . A solução para o problema é dada por:

$$w_t = \frac{H_{t|t-1}^{-1} \iota}{\iota' H_{t|t-1}^{-1} \iota} \quad (30)$$

Para o caso restrito, iremos impor que  $w_t \geq 0$ , ou seja, o peso de cada ativo no portfólio não pode ser negativo. Esta imposição gera resultados melhores, principalmente quanto ao turnover ver Jagannathan & Ma (2003). Com a adição desta restrição os pesos ótimos são obtidos com base na otimização numérica.

#### 4.2 Avaliação de desempenho.

Para cada uma das carteiras, serão calculados diferentes  $w_t$  para cada período. Cada  $w_t$  será obtido através de um método de cálculo da matriz de variância. A partir destes pesos,  $w_t$ , iremos obter o retorno de cada carteira para cada período. Para decidirmos qual dos métodos será o mais eficiente, precisaremos de uma série de indicadores pré-estabelecidos para os dados fora da amostra, em cada carteira. Os indicadores de desempenho utilizados no trabalho serão: média do retorno, desvio-padrão, Índice de Sharpe e *turnover*. Podemos escrever tais medidas como as seguintes equações:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{L-T} \sum_{t=T}^{L-1} w_t' R_{t+1} \quad (31)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{L-T-1} \sum_{t=T}^{L-1} (w_t' R_{t+1} - \hat{\mu})^2} \quad (32)$$

$$IS = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \quad (33)$$

$$turnover = \frac{1}{L-T-1} \sum_{t=T}^{L-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|) \quad (34)$$

A equação 30, calcula a média aritmética do retorno da carteira para os dados fora da amostra. De forma análoga temos o desvio-padrão na equação 31. Ambas as medidas são simples de entenderem. Considerando que  $L$  é o total de dados e  $T$  o tamanho da janela de estimação  $L - T$  serão os dados fora da amostra.  $w_t'$  será o vetor de pesos dos ativos e  $R_{t+1}$  o retorno dos ativos um passo a frente.

O Índice de Sharpe, equação 32, é o inverso do coeficiente de variação e podemos interpretá-lo neste caso como o retorno ajustado ao risco. A equação 33 mostra o *turnover*. No capítulo de análise de dados ainda será feito um teste para verificar a diferença entre os índices de sharpe e variância dos portfólios. O teste é baseado no bootstrap de Politis e Romano (1994).

## 5- ANÁLISE EMPÍRICA

Para a realização dos experimentos do trabalho foram utilizados dois conjuntos de dados. O primeiro são os retornos diários do Ibovespa e o segundo os retornos diários do índice S&P 100. Para o primeiro grupo de dados o período selecionado foi de 02/03/2009 a 24/11/2011, totalizando 677 observações. O retorno foi calculado a partir da diferença entre o logaritmo dos preços. Os dados foram obtidos na base de dados Economatica. Já o segundo grupo de dados tem uma periodicidade mais extensa começando em 04/01/2000 e terminando em 31/12/2010, totalizando 2766 observações. A fonte destes dados foi a Reuters/Ecowin.

A taxa livre de risco para o primeiro grupo de dados foi o CDI diário enquanto para o segundo foram as *Treasury Bill* de três meses. Os dados relacionados ao Ibovespa são compostos de 45 ações e os relacionados ao S&P 100 de 78 ações.

Para efeito de comparação as amostras foram divididas em duas partes. Utilizamos a metodologia de janelas móveis como em Santos (2010). Para ambas amostras foi realizado o mesmo processo, diferindo apenas no tamanho da janela. Então desta maneira temos a primeira parte da amostra servindo de base para o cálculo da matriz de covariância dos retornos, a esta primeira parte chamaremos de L. Com base nestes dados calcularemos a carteira ótima de mínima variância. A segunda parte dos dados fica reservada para repetirmos o procedimento iterativamente “rolando” a janela um passo a frente. Adiciona-se a informação mais recente e retira-se a mais antiga, mantendo assim a

janela com o mesmo número de observações. A segunda parte, que está fora da amostra, também servirá para compararmos o desempenho dos modelos propostos com o respectivo *benchmark*.

A amostra para o caso brasileiro como anteriormente descrito contém 677 observações ( $T=677$ ), a primeira parte destas observações contém 252 observações ( $L=252$ ), representando um ano útil. A segunda parte, onde a janela é “rolada” e temos a previsão é formada por 425 observações ( $T-L=425$ ). Para os dados americanos temos o  $T=2766$  observações e um  $L=2262$ , igual a dois anos úteis. Note que  $T-L=504$ . Em ambos os casos a parte que está sendo verificado o desempenho não inclui as  $L$  primeiras informações da amostra.

Para a estimação da matriz de covariância pela abordagem RiskMetrics o  $\lambda$  escolhido foi  $\lambda=0,94$ .

As frequências de rebalanceamento utilizadas são fixas e divididas em três faixas: diária, semanal e mensal. Porém em alguns trabalhos há um indício de a frequência de rebalanceamento ser variável no tempo. Em tempos de maior certeza os rebalanceamentos são feitos com frequência maior e quando a incerteza aumenta este prazo diminui. Assim a utilização da volatilidade para indicar o prazo de rebalanceamento ou testes de soma acumulada podem ser utilizados.

A seguir, veremos na Tabela 1 os resultados de diferentes métodos de estimação da matriz de covariância. O retorno médio está sendo descrito como percentual diário, assim como o desvio padrão do retorno diário e o Índice de Sharpe. Além disso, estes resultados são efetivos, caso fosse feita estas abordagens a cada dia. Logo não cabem teste de hipótese. Temos também a medida de *turnover*. O retorno bruto

acumulado (R.B.A.) é a medida em percentual ao final da amostra. No caso brasileiro, por exemplo, ao final de 425 dias úteis. O excesso de retorno acumulado (E.R.A.) segue os mesmos moldes do R.B.A.. A otimização da carteira foi feita pelo método de minimização da variância.

Tabela 1 – (Amostra Brasil) Desempenho fora da amostra para diferentes métodos de estimação da matriz de covariância. R.B.A. e E.R.A. indicam Retorno bruto acumulado e Excesso de retorno bruto acumulado. O \* representa que as variáveis são estatisticamente diferentes ao nível de significância de 5% dos valores do *benchmark*.

	Retorno-Médio	Desvio-Padrão	Índice de Sharpe	Turnover	R.A.B.
<b>Rebalanceamento Diário</b>					
Modelo ASYDCC	0,000	0,447*	-0,001*	0,358	16,807
Modelo CCC	0,010	0,551*	0,018*	0,477	21,711
Modelo DCC	-0,573	0,490	-1,170	0,479	22,272
Modelo RiskMetrics	0,013	0,437*	0,031*	0,235	23,632
Ibovespa	-0,066	0,628	-0,105		-10,641
<b>Rebalanceamento Semanal</b>					
Modelo ASYDCC	-0,015	0,492*	-0,030*	0,121	9,664
Modelo CCC	-0,007	0,549*	-0,013*	0,160	13,114
Modelo DCC	-0,012	0,520	-0,022	0,160	11,211
Modelo RiskMetrics	0,010	0,472*	0,022*	0,122	21,904
Ibovespa	-0,066	0,628*	-0,105*		-10,641
<b>Rebalanceamento Mensal</b>					
Modelo ASYDCC	-0,030	0,542*	-0,055*	0,040	2,654
Modelo CCC	-0,040	0,616	-0,065*	0,056	-1,851
Modelo DCC	-0,053	0,590	-0,090	0,056	-6,938
Modelo RiskMetrics	-0,005	0,504*	-0,009*	0,056	14,189
Ibovespa	-0,066	0,628	-0,105		-10,641

Fonte: Própria

Quanto ao retorno médio, o *benchmark* Ibovespa, ao ser confrontado com o CDI apresenta o resultado de -0,06579. Assim quando comparamos este com os resultados dos modelos testados percebemos que para o rebalanceamento diário, dois dos modelos apresentam retornos médios diários positivos. São os modelos de correlação constante ( CCC-GARCH ) e o Modelo RiskMetrics . Porém somente o resultado do modelo de correlação dinâmica ( DCC-GARCH ) é pior que o Ibovespa. Analisando os outros períodos de rebalanceamento da carteira de ativos, percebemos que o excesso de retorno médio diário diminui. Como era de se esperar, ao aumentar o intervalo de recalibragem o retorno diminui. Observamos ainda que os modelos CCC-GARCH e RiskMetrics se mantêm como a melhor escolha em todos os períodos de rebalanceamento. O Modelo RiskMetrics leva uma ligeira vantagem. Podemos ainda perceber que o DCC-GARCH apresenta uma grande inconstância quando ocorrem mudanças na recalibragem da carteira.

A próxima coluna da tabela 1 apresenta informações a respeito do desvio-padrão.

O RiskMetrics continua a apresentar resultados ligeiramente superiores aos demais. Porém, agora não mais acompanhado do Modelo CCC-GARCH mas sim do Modelo ASYDCC-GARCH. No geral os resultados são bem próximos, como desvio padrão aumentando com a elevação do intervalo de rebalanceamento da carteira.

A próxima medida de desempenho a ser analisada é o índice de Sharpe. Este é uma medida de retorno ajustado ao risco. O comportamento dos modelos é similar ao observado nos medidores de

desempenho anteriores e o resultado fica pior quando o prazo de rebalanceamento aumenta. E ainda temos como melhores modelos em todos as frequências rebalanceamento o Modelo RiskMetrics e o Modelo CCC-GARCH. O índice de Sharpe do Ibovespa é de -0,105. Assim ao observarmos os resultados percebemos que os modelos superam o *benchmark*. A exceção vem consistentemente sendo o Modelo DCC-GARCH. Este comportamento do Modelo DCC-GARCH é verificado em todas as medidas de desempenho analisadas até aqui.

Quanto ao *turnover*, há uma clara variação na magnitude da medida quando a periodicidade de rebalanceamento é alterada. Este resultado é esperado, já que o *turnover* pode ser interpretado como uma medida de custos de transação. E a correlação com aumentos na periodicidade de rebalanceamento da carteira está correta. A correlação entre as variáveis é negativa. Agora, ao analisarmos na perspectiva dos modelos o Modelo RiskMetrics é o melhor em todas as frequências de rebalanceamento. A segunda melhor escolha é o ASYDCC-GARCH que também já foi o segundo melhor quanto ao desvio-padrão.

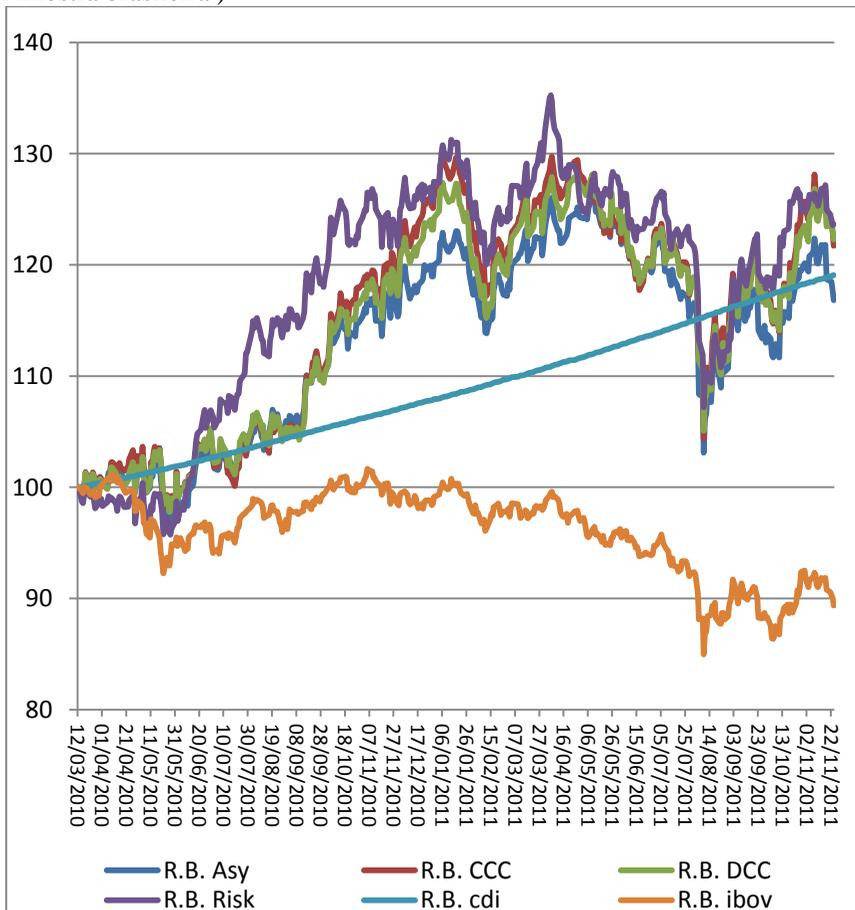
Para a diferença entre os valores da variância e índice de Sharpe entre os modelos ASYDCC-GARCH, CCC-GARCH e RiskMetrics versus o Ibovespa, foram realizados os testes de Politis e Romano (1994). Os resultados que são estatisticamente diferentes são representados por um asterisco a direita do valor. A hipótese nula é rejeitada ao nível de significância de 5%.

Diante do exposto até o momento, a primeira intuição que temos é que o modelo RiskMetrics é o melhor, pois foi superior em todos os quesitos avaliados. E em segundo lugar temos empatados o modelo

ASYDCC-GARCH e o CCC-GARCH. O Modelo DCC-GARCH mostra uma inconstância muito elevada e não parece ser muito confiável. Porém ainda iremos avançar na análise destes modelos e tentar chegar a uma conclusão final.

Ao analisarmos o retorno bruto acumulado iremos perceber que com o rebalanceamento diário todos os modelos são superiores ao Ibovespa. O retorno bruto acumulado do Ibovespa para o período é de cerca de -10,65%. Para os outros rebalanceamentos também temos um resultado superior. O Modelo RiskMetrics mais uma vez apresenta o melhor resultado seguido pelos modelos ASYDCC-GARCH para rebalanceamento diário e mensal e o CCC-GARCH para o rebalanceamento semanal. Nos gráficos a seguir são demonstrados a evolução destas medidas ao longo do tempo.

Gráfico 1 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento diário – Amostra brasileira )



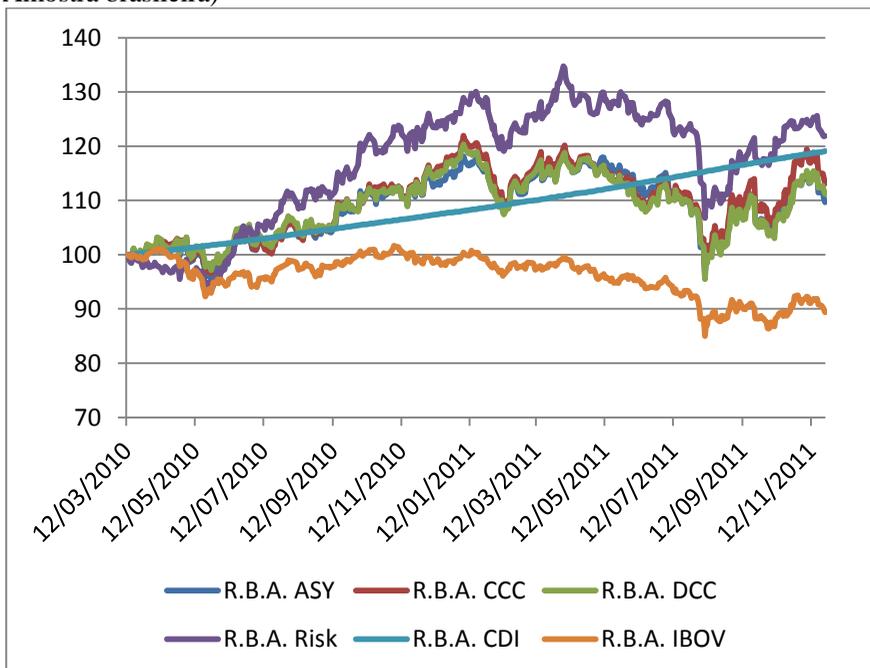
Fonte: Própria

Com o rebalanceamento da carteira de ativos diariamente fica claro que o RiskMetrics é superior para todo o período amostral. Os outros modelos são bastante próximos ao longo de todo o período. Usaremos outra periodicidade dos rebalanceamentos da carteira para dar

robustez na decisão do segundo melhor. No gráfico é possível observar que há um grande “vale” a partir de agosto de 2011. Este fenômeno é fruto de uma eventual ameaça de “calote” americano, quando o congresso americano dava indicações de não elevar o limite da dívida pública. Na ocasião os limites foram elevados e o mercado mundial voltou a se recuperar.

No Gráfico 2 teremos a mesma medida de desempenho apresentada anteriormente. Somente a frequência de rebalanceamento da carteira foi alterado, passando de diária para semanal.

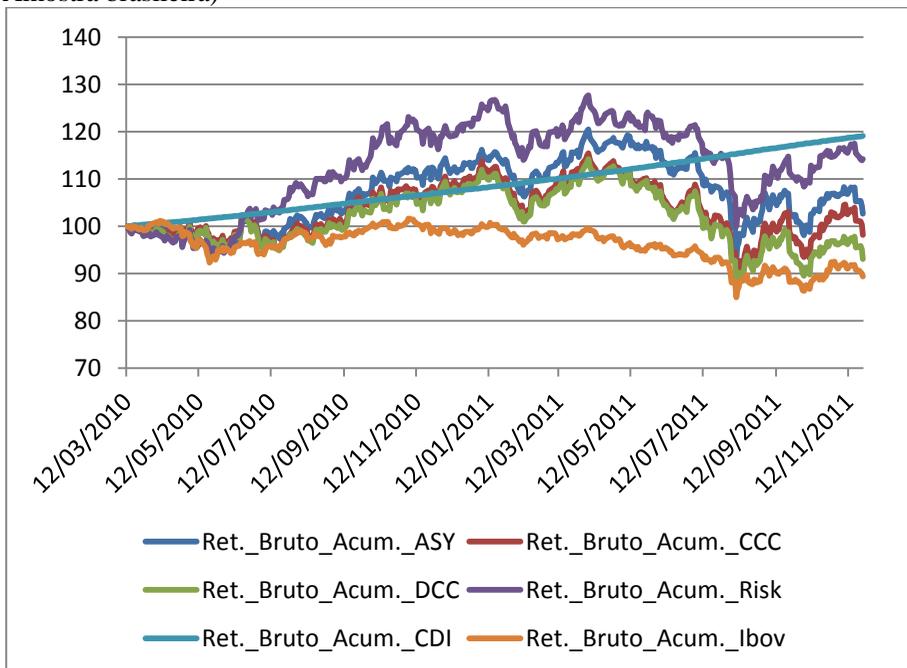
Gráfico 2 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento semanal – Amostra brasileira)



Fonte: Própria

Agora temos os rebalanceamentos semanalmente. Podemos perceber que em geral o resultado é inferior. Por exemplo, somente o retorno calculado a partir da metodologia RiskMetrics é superior ao CDI após o “vale” de agosto de 2011. No entanto para o segundo melhor temos um indício de que o modelo de correlação constante (CCC) é ligeiramente superior. Ao observarmos toda a amostra, o CCC-GARCH se mostra superior ao Modelo ASYDCC-GARCH, porém não é conclusivo a diferenças, somente com um exame detalhado e também levando em consideração os outros medidores de desempenho cheguo a esta conclusão. As eventuais carteiras são superiores ao Ibovespa em todo o período, mesmo o Ibovespa sendo calibrado diariamente. A partir de dezembro de 2010 este fato fica bastante evidente.

Gráfico 3 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra brasileira)

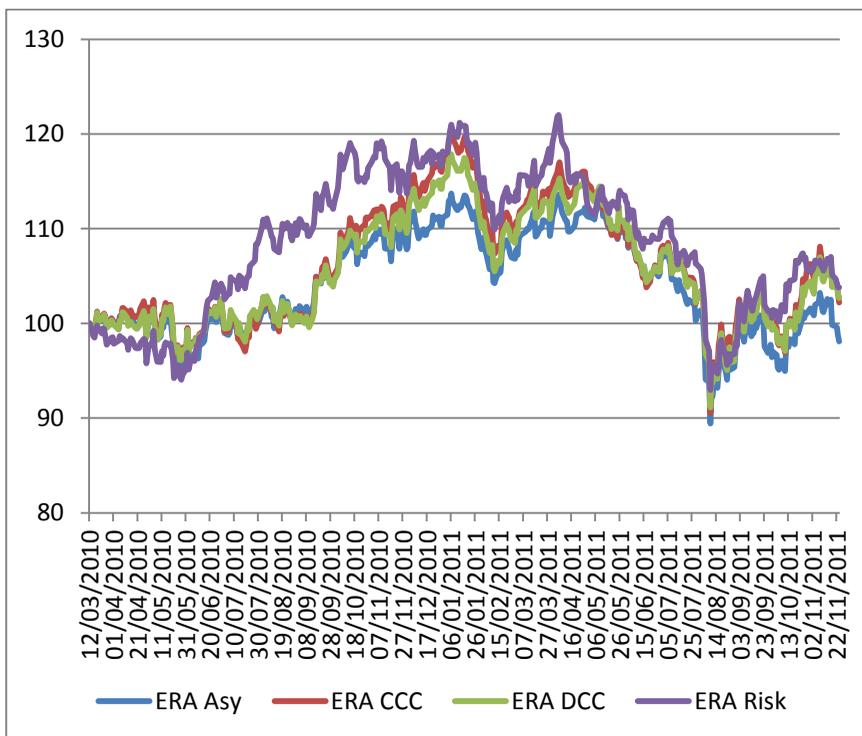


Fonte: Própria

No gráfico 3 os rebalanceamentos da carteira passam a ser mensal. E percebemos que os resultados continuam a piorar. Percebemos agora que nenhuma das carteiras supera o ativo livre de risco no final da amostra. O *spread* entre o Ibovespa e as carteiras diminuiu. O que de interessante observamos neste gráfico é a clara superioridade do modelo ASYDCC-GARCH frente ao CCC-GARCH que até então não estava clara. Aqui é nítida a superioridade do modelo ASYDCC-GARCH, seja quando o mercado está em alta ou quando em baixa.

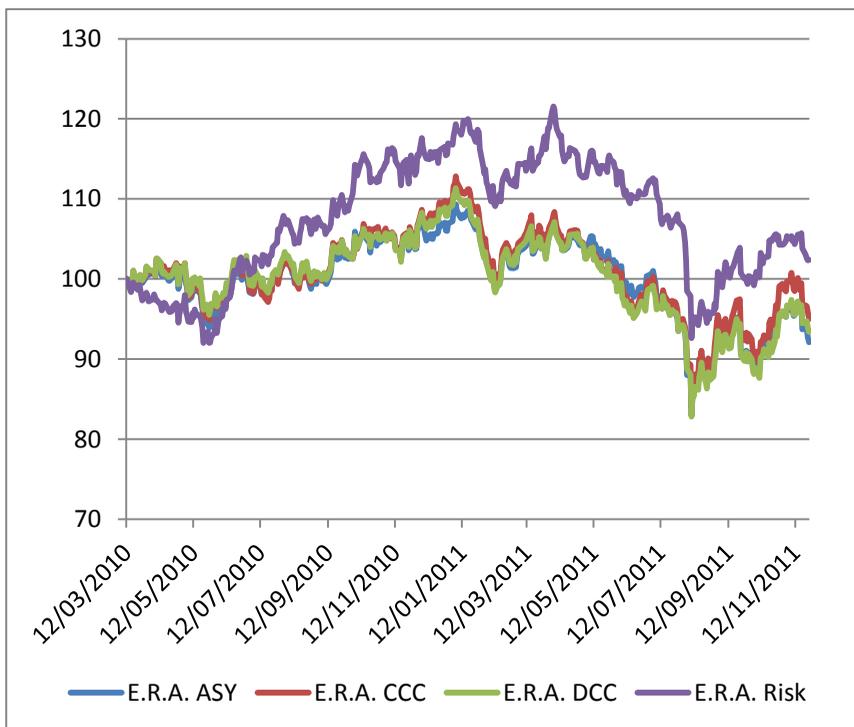
Para concluir a análise dos dados para o mercado brasileiro observaremos o comportamento do excesso de retorno em relação à taxa livre de risco acumulado ao longo de todo o período fora da amostra. A exposição dos gráficos seguirá a mesma lógica indo do rebalanceamento diário ao mensal.

Gráfico 4 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento diário – Amostra brasileira)



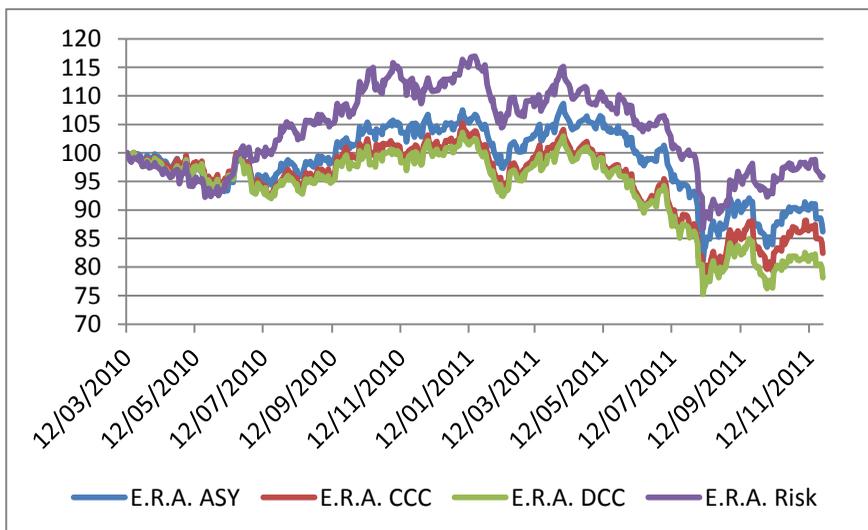
Fonte: Própria

Gráfico 5 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento semanal – Amostra brasileira)



Fonte: Própria

Gráfico 6 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento mensal–  
Amostra brasileira)



Fonte: Própria

Quanto ao excesso de retorno acumulado não há relevantes diferenças a respeito do desempenho dos modelos. O Modelo RiskMetrics continua sendo melhor e os modelos ASYDCC-GARCH e CCC-GARCH vêm em segundo lugar até o rebalanceamento semanal. Quando o prazo para o rebalanceamento da carteira passa a ser mensal o Modelo ASYDCC-GARCH é superior.

Após a análise de todos os medidores de desempenho podemos concluir que o modelo que apresenta o melhor resultado, consistente com todas as periodicidades, é o RiskMetrics. O DCC-GARCH é inconsistente quando alteramos a periodicidade dos rebalanceamentos. Dado este fato não consideramos relevantes os resultados apresentados

por este modelo. O Modelo ASYDCC-GARCH é ligeiramente superior ao CCC-GARCH, principalmente para prazos mais longos no rebalanceamento da carteira.

Os resultados para os dados americanos vêm logo abaixo. Será exposto o mesmo conjunto de medidores de desempenho, para os mesmos modelos de cálculo da matriz de covariância. A única diferença serão os dados. Aqui foram utilizados os dados do S&P100.

Na tabela 2 são apresentados os principais resultados.

Quanto a excesso de retorno médio os dados americanos corroboram o observado na amostra de dados para o Brasil. O Modelo DCC-GARCH é o pior. Já em relação aos outros modelos, se no caso brasileiro tínhamos o Modelo RiskMetrics como o melhor, aqui o resultado não é tão esclarecedor. Para cada prazo de rebalanceamento temos um melhor modelo entre os três que eram os superiores. O benchmark, S&P 100, quanto a excesso de retorno médio em relação a *treasury bill* apresenta um valor de 0,011. Podemos perceber que o melhor modelo apresenta sempre desempenho superior, em todas as frequências de rebalanceamento. A média piora conforme a frequência dos rebalanceamentos aumentam.

Tabela 2 – (Amostra EUA) Desempenho fora da amostra para diferentes métodos de estimação da matriz de covariância. R.B.A. e E.R.A. indicam Retorno bruto acumulado e Excesso de retorno bruto acumulado. O \* representa que as variáveis são estatisticamente diferentes ao nível de significância de 5% dos valores do *benchmark*.

	Retorno- Médio	Desvio- Padrão	Índice de Sharpe	Turnover	R.A.B.
<b>Rebalanceamento Diário</b>					
Modelo ASYDCC	0,019	0,368*	0,053*	0,263	12,532
Modelo CCC	0,024	0,392*	0,062*	0,325	15,284
Modelo DCC	0,000	0,528	-0,001	0,761	1,687
Modelo RiskMetrics	0,022	0,364*	0,060*	0,236	14,770
S&P 100	0,011	0,429	0,026		11,242
<b>Rebalanceamento Semanal</b>					
Modelo ASYDCC	0,017	0,386*	0,045*	0,121	11,360
Modelo CCC	0,013	0,426	0,031	0,149	8,843
Modelo DCC	-0,030	0,512	-0,059	0,288	-12,363
Modelo RiskMetrics	0,019	0,376*	0,051*	0,130	13,210
S&P 100	0,011	0,429	0,026		11,242
<b>Rebalanceamento Mensal</b>					
Modelo ASYDCC	0,015	0,388*	0,038*	0,049	9,895
Modelo CCC	0,006	0,422	0,014*	0,056	4,851
Modelo DCC	-0,003	0,537	-0,006	0,093	0,241
Modelo RiskMetrics	0,007	0,357*	0,020*	0,059	6,678
S&P 100	0,011	0,429	0,026		11,242

Fonte: Própria

Ao analisarmos o desvio-padrão voltamos a ter a hegemonia do modelo RiskMetrics assim como no caso brasileiro. Para o índice de Sharpe o mesmo não acontece. Como a diferença entre os desvios padrões é muito pequena prevalece o que ocorre com a média. Para o

índice de Sharpe, temos um modelo melhor a cada período de rebalanceamento. Seguindo a mesma lógica das médias.

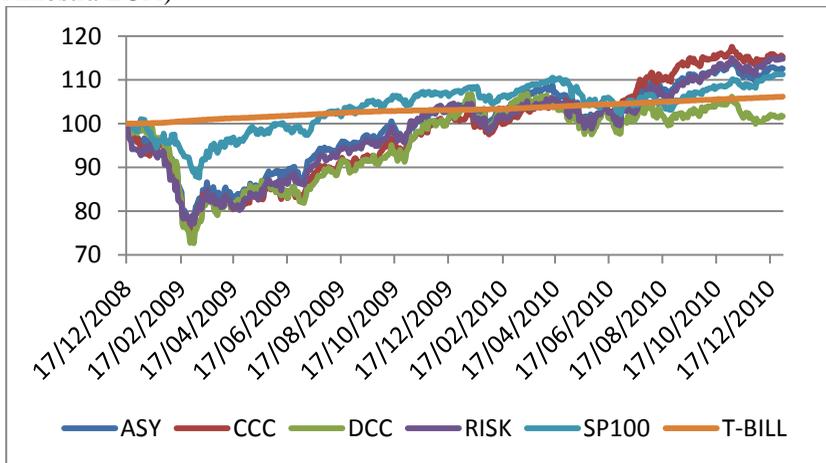
Para o *turnover* há uma repetição do padrão observado até o momento para a amostra de dados americanos. Uma alternância entre os modelos quando mudam as frequências. Para o rebalanceamento diário, o modelo com melhor resultado seria o Modelo RiskMetrics. Ao passarmos para o rebalanceamento semanal o melhor passa a ser o Modelo ASYDCC-GARCH e este se mantém quando a periodicidade passa a ser mensal. Diferente das outras medidas o Modelo CCC-GARCH, não figura entre os melhores para as frequências de referência.

Da mesma forma como foi feito na amostra de dados referentes ao Ibovespa. Utilizou-se o teste de Politis e Romano (1994), para verificar a diferença entre os modelos e o *benchmark*. A um nível de significância de 5% os modelos se mostram superiores estatisticamente ao *benchmark* quanto o índice de Sharpe e *turnover*.

Com esta análise preliminar dos dados americanos percebemos que o que tínhamos observado para os dados brasileiros é confirmado para os dados americanos. Os melhores modelos são o Modelo RiskMetrics e o Modelo ASYDCC-GARCH. Para o caso brasileiro o ASYDCC-GARCH era apenas ligeiramente superior ao CCC-GARCH, já para os dados americanos divide o primeiro lugar com o RiskMetrics. Aqui ele por várias vezes supera o Modelo RiskMetrics.

Continuando a análise dos indicadores de desempenho temos o retorno bruto acumulado e o excesso de retorno acumulado. Observemos a seguir nos gráficos.

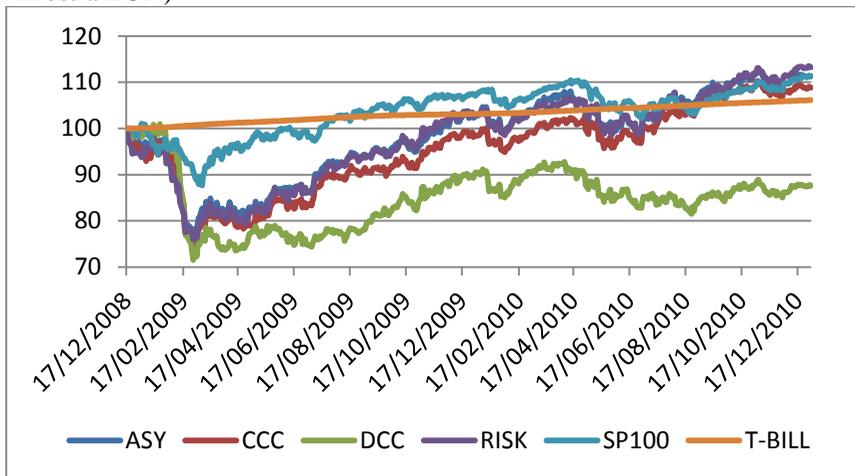
Grafico 7 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento diário – Amostra EUA)



Fonte: Própria

Para a frequência de rebalanceamento diário os modelos ASYDCC-GARCH e RiskMetrics tem desempenhos bem próximos, sendo possível perceber que após a queda dos retornos das ações no fim de 2008 todos os modelos ficam piores que o S&P 100. Neste momento o RiskMetrics é melhor e já a partir de junho de 2010 os modelos superam o *benchmark*. Quando isso ocorre o melhor modelo passa a ser o Modelo RiskMetrics.

Grafico 8 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento semanal – Amostra EUA)

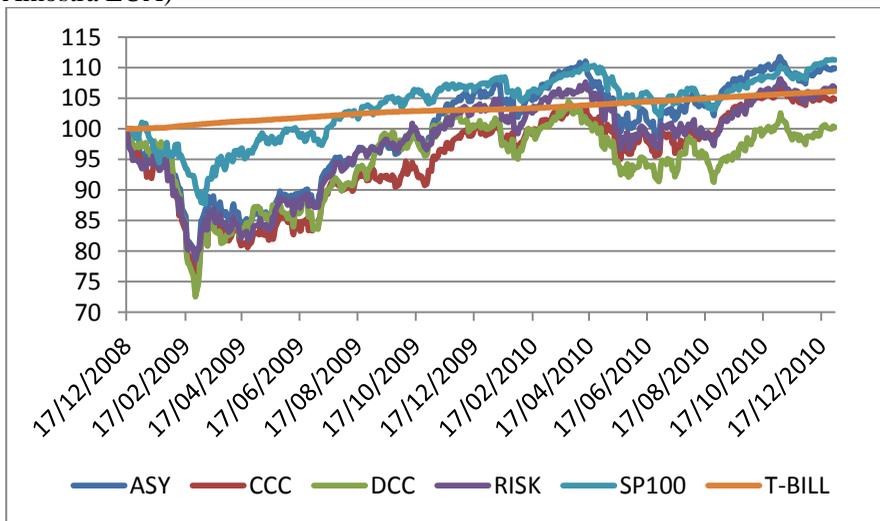


Fonte: Própria

Quando a frequência passa a ser semanal os modelos ASYDCC-GARCH e RiskMetrics continuam demonstrando o mesmo padrão observado para a recalibragem diária. No entanto agora eles se descolam dos modelos DCC-GARCH e CCC-GARCH.

Ao elevarmos ainda mais a frequência o Modelo ASYDCC-GARCH passa a ser o que apresenta os retornos médios acumulados mais elevados. Conseguindo superar o *benchmark* por alguns momentos.

Grafico 9 – Retorno Bruto Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra EUA)



Fonte: Própria

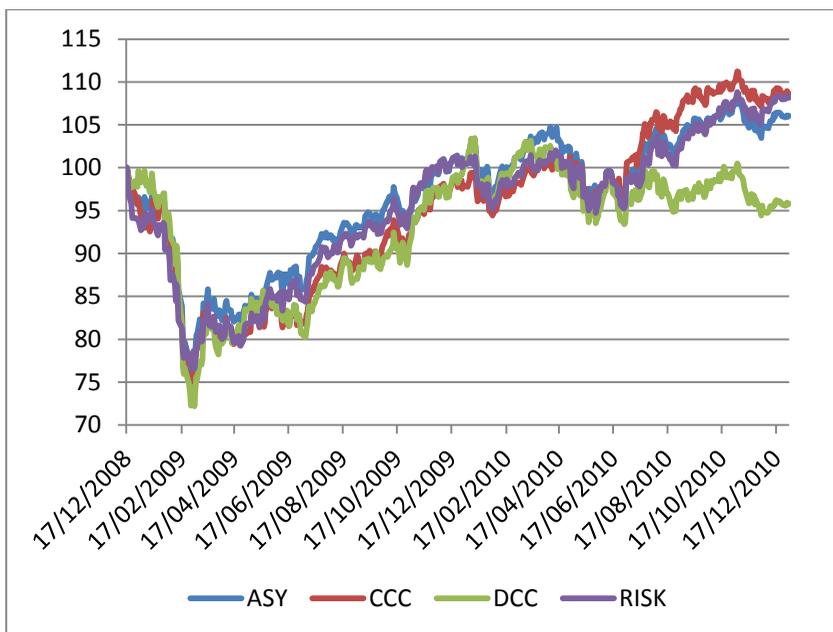
A seguir temos os gráficos dos excessos de retorno acumulado ao longo do tempo.

Inicialmente com a periodicidade diária ( ver gráfico 10). No final do período temos como melhor modelo o CCC-GARCH. Porém este comportamento é isolado neste momento e também para esta frequência de rebalanceamento da carteira de ativos. Concentrando nossa análise nos modelos ASYDCC-GARCH e RiskMetrics temos o ASYDCC-GARCH superior após o “vale” e o RiskMetrics nos momentos finais do período observado. No entanto ambos os resultados são bem próximos ao longo de todo o período.

No gráfico 11 onde a frequência de rebalanceamento é semanal, há uma significativa piora do Modelo DCC-GARCH e o CCC-GARCH

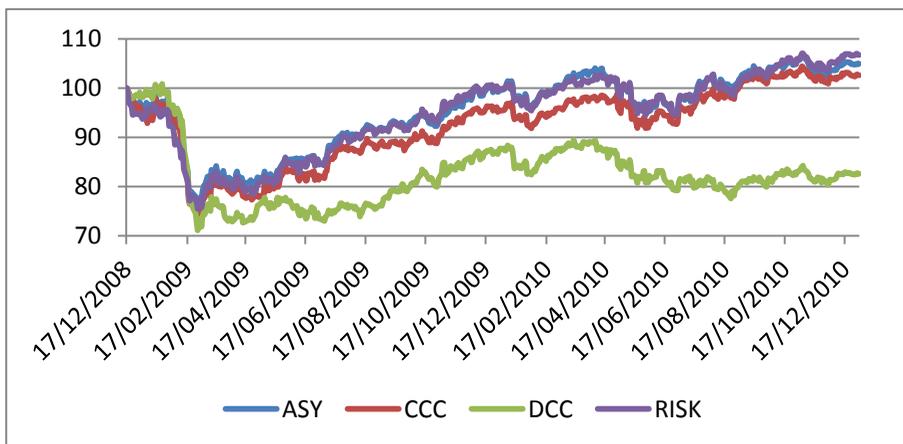
também apresenta um resultado inferior. O comportamento dos dois outros métodos de cálculo da matriz de covariância é similar ao apresentado no rebalanceamento diário.

Gráfico 10 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra EUA)



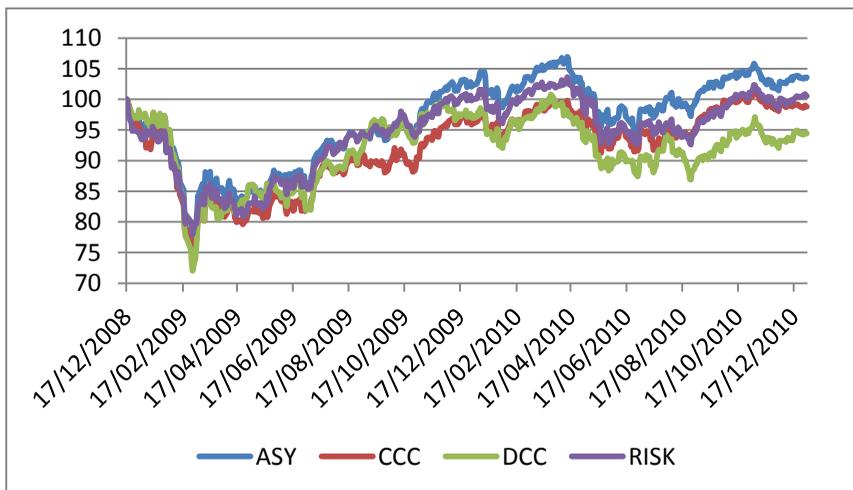
Fonte: Própria

Gráfico 11 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento semanal – Amostra EUA)



Fonte: Própria

Gráfico 12 – Excesso de Retorno Acumulado (Rebalanceamento mensal – Amostra EUA)



Fonte: Própria

Somente quando a frequência do rebalanceamento aumenta para mensal conseguimos identificar uma superioridade do Modelo ASYDCC-GARCH . Este comportamento pode ser o grande diferencial para a utilização dos modelos. Podemos usar o Modelo RiskMetrics para prazos mais curtos, levando em conta o desempenho deste para as duas amostras. E para frequências superiores de rebalanceamento da carteira , tal como a mensal, podemos utilizar o Modelo ASYDCC-GARCH.

## 6- Conclusão

No presente trabalho foi avaliado o desempenho de algumas técnicas de cálculo de matriz de covariância na otimização de carteiras. Foram utilizadas duas amostras: as ações que compõem o Ibovespa e as ações que compõem o S&P100. Consideramos distintas frequências de rebalanceamento das carteiras.

O que conseguimos observar ao longo do trabalho é que as metodologias de cálculo da matriz de covariância podem gerar carteiras otimizadas com desempenho superior aos referidos benchmarks. Caso consideremos o Ibovespa, irá refletir o comportamento da maioria dos agentes do mercado. Visto que o mesmo é calculado através de ponderações que são proporcionais ao volume de negócios do papel no dia. Assim uma estratégia de otimização diferenciada gera resultado superior em todas as medidas de desempenho. As instituições financeiras poderão utilizar este estudo para agregar valor em suas estratégias.

Um dos motivos para que o resultado destes processos de otimização apresentem um resultado extremamente superior no Brasil quando comparado com os EUA seria o desenvolvimento e conhecimento destes processos no mercado americano. Quando observamos os resultados das duas amostras fica claro a superioridade de aplicarmos distintas especificações para a estimação de matrizes de covariâncias no Brasil. O resultado da otimização é superior ao Ibovespa em escala superior ao resultados para as carteiras americanas quando comparadas ao S&P100.

Especificamente, os resultados para ambas as amostras mostram que o aumento da frequência de rebalanceamento piora os resultados. O modelo RiskMetrics apresentou o melhor desempenho para os dados brasileiros. Somente nas frequências semanal e mensal o *turnover* do Modelo ASYDCC-GARCH foi superior.

Quanto a amostra de dados americana há uma alternância muito grande dos melhores modelos nos medidores de desempenho. Porém, observando o que já havia ocorrido nos dados brasileiros, concentramos na análise dos modelos ASYDCC-GARCH e RiskMetrics. Isto se justifica, pois ao mudarmos a frequência de rebalanceamento os outros modelos não apresentam resultados estáveis. Estes são muito afetados por alteração no período de rebalanceamento da carteira.

Analisando conjuntamente os resultados para o Brasil e para os EUA chegamos a conclusão que o melhor modelo de cálculo da matriz de covariância para a otimização de carteiras é o RiskMetrics quando o período de rebalanceamento é curto e ASYDCC-GARCH quando a frequência de rebalanceamento é maior.

Ao analisarmos os dados parece haver outro padrão. Em momentos de ascensão após choques negativos, o Modelo ASYDCC-GARCH aparenta ter desempenho superior ao RiskMetrics em qualquer prazo de rebalanceamento, porém este fato não foi estatisticamente testado. Outro ponto que desperta interesse para futuras pesquisas é incluir alguma padrão para a flexibilização dos prazos de rebalço, bem como incluir os custos de transação. A ainda campo para descobrir o prazo no qual o Modelo RiskMetrics passa a ter desempenho pior que o ASYDCC-GARCH.



## Bibliografia

ANBIMA. 2011. Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais.

Ang A. e G Berkaert, 1999, “*International Asset Allocation with Time-Varying Correlations*”. NBER Working Paper No. 7056. March 1999

Ang, A., and G. Bekaert, 1998, “*Regime Switches in Interest Rates*”, NBER Working Paper 6508.

Bollerslev, T. (1990): *Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model*. Review of Economics and Statistics 72, 498– 505.

Bollerslev, T. 1986. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 31(3), 307{327.

Bollerslev, T., Engle R. F. and Wooldridge, J. M. (1988): *A capital asset pricing model with time-varying covariances*. The Journal of Political Economy 96, 116–131.

Boussama, F. (1998): *Ergodicité, mélange et estimation dans le modèle GARCH*. PhD Thesis, Université 7 Paris.

Brandt, M.W. 2009. *Portfolio choice problems*. Handbook of financial econometrics, 1, 269-336.

Cappiello, L., Engle, R.F., & Sheppard, K. 2006. *Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns*. Journal of Financial Econometrics, 4(4), 537{572.

Chib, S., F. Nardari, and N. Shephard, 2005, “*Analysis of High Dimensional Multivariate Stochastic Volatility Models*,” Journal of Econometrics, forthcoming.

- Comte, F. and Lieberman, O. (2003): *Asymptotic theory for multivariate GARCH processes*. Journal of Multivariate Analysis 84, 61–84.
- Christodoulakis GA, Satchell SE. 2002. *Correlated ARCH: modelling the time-varying correlation between financial asset returns*. European Journal of Operations Research 139: 351–370.
- DeMiguel, V., & Nogales, F.J. 2009. *Portfolio Selection with Robust Estimation*. *Operations Research*, forthcoming.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F.J., & Uppal, R. 2009a. *A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms*. Management Science, 55(5), 798{812.
- Engle, R. F. (1982): *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica 50, 987–1007.
- Engle, R. F. and Colacito, R. (2006): *Testing and valuing dynamic correlations for asset allocation*. Journal of Business and Economic Statistics 24, 238–253.
- Engle, R. 2002. *Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models*. Journal of Business & Economic Statistics, 20(3), 339{350.
- Engle, R., and Kroner, K. (1995), “*Multivariate Simultaneous GARCH*,” *Econometric Theory*, 11, 122–150.
- Engle, R.F., & Sheppard, K. 2001. *Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH*. NBER Working Paper W8554.
- Engle, R.F. 1990. *Stock volatility and the crash of '87: discussion*. The Review of Financial Studies, 3(1), 103{106.
- Fabozzi, F.J., & Fong, G. 1994. *Advanced fixed income portfolio management: the state of the art*. Probus.

- Frost, P. A. and Savarino, J. E. (1986). *An empirical Bayes approach to portfolio selection*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 21:293{305.
- Fleming, J., Kirby, C., and Ostdiek, B. (2001), “*The Economic Value of Volatility Timing*,” Journal of Finance, 67, 329–352.
- (2003), “*The Economic Value of Volatility Timing Using Realized Volatility*,” *Journal of Financial Economics*, 67, 473–509.
- Ghysels, E., A. C. Harvey, and E. Renault, 1995, “*Stochastic Volatility*,” in G. S.Maddala and C. R. Rao (ed.), *Handbook of Statistics*, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, Vol. 14, pp. 119–191.
- Gomes, F., 2002, “*Exploiting Short-Run Predictability*,” working paper, London Business School.
- Han, Y., 2005, “*Return Predictability and Model Mis-Specification: When Can an Investor Profit from Return Predictability*,” working paper, Tulane University.
- Hafner, C. M. (2003): *Fourth moment structure of multivariate GARCH models*. Journal of Financial Econometrics 1, 26–54.
- Harvey AC, Ruiz E, Shephard N. 1994. *Multivariate stochastic variance models*. Review of Economic Studies 61: 247–264.
- Jagannathan, R. and Ma, T. (2002). *Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps*. Working Paper 8922, NBER. Available as <http://www.nber.org/papers/w8922.pdf>.
- Jobson, J. D. and Korkie, B. (1980). *Estimation for Markowitz efficient portfolios*. Journal of the American Statistical Association, 75:544{554.
- Jorion, P. (1986). *Bayes-Stein estimation for portfolio analysis*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 21:279{292.

Jagannathan, R., & Ma, T. 2003. *Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps*. The Journal of Finance, 58(4), 1651{1684.

Johannes, M., N. Polson, and J. Stroud, 2002, “*Sequential Optimal Portfolio Performance: Market and Volatility Timing*,” working paper, University of Chicago

Jeantheau, T. (1998): *Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models*. Econometric Theory 14, 70–86.

Kawakatsu, H. (2006): *Matrix exponential GARCH*. Journal of Econometrics 134, 95–128.

Kim, S., N. Shephard, and S. Chib, 1998, “*Stochastic Volatility: Optimal Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models*,” Review of Economic Studies, 65, 361–393.

Lanne, M. and Saikkonen, P. (2007): *A multivariate generalized orthogonal factor GARCH model*. Journal of Business and Economic Statistics 25, 61–75.

Ledoit, O. and Wolf, M. (2003). *Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection*. Journal of Empirical Finance, 10. Forthcoming. Available at <http://www.ledoit.net>.

Ledoit, O., & Wolf, M. 2008. *Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio*. Journal of Empirical Finance, 15(5), 850{859.

Markowitz, H. 1952. *Portfolio Selection*. Journal of Finance, 7(1), 77{91.

Marquering, W., and M. Verbeek, 2001, “*The Economic Value of Predicting Stock Index Returns and Volatility*,” working paper, Tilburg University.

- Nelson, D. B. (1991): *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*.  
Econometrica 59, 347–370.
- Pitt, M. K., and N. Shephard, 1999, “*Filtering via Simulation: Auxiliary Particle Filter*,” Journal of the American Statistical Association, 94, 590–599.
- Shephard, N. G. (1996): *Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility*. In: Cox, D. R., Hinkley, D. V. and Barndorff-Nielsen, O. E. (Eds.): *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, 1–67. Chapman and Hall, London.
- Sheppard, K. 2003. *Multi-step estimation of multivariate GARCH models*. In: *Proceedings of the International ICSC. Symposium: Advanced Computing in Financial Markets*.
- Silvennoinen, A., & Teräsvirta, T. 2009. *Multivariate GARCH models*. In: Andersen, T.G., Davis, R.A., Kreiss, J.-P., & Mikosch, T. (eds), *Handbook of Financial Time Series*. Springer Verlag.
- Tse, Y. K. and Tsui, K. C. (2002): *A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations*. Journal of Business and Economic Statistics 20, 351–362.
- Van der Weide, Roy (2002), *GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model*, Journal of Applied Econometrics, 17(5), 549 – 564.