UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

Jaison Schinaider

MECÂNICA QUÂNTICA, QUASE-CONJUNTOS E ESTRUTURAS NÃO-RÍGIDAS

Florianópolis

2014

Jaison Schinaider

MECÂNICA QUÂNTICA, QUASE-CONJUNTOS E ESTRUTURAS NÃO-RÍGIDAS

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia para a obtenção do Grau de Doutor em Filosofia (Epistemologia e Lógica).
Orientador: Prof. Dr. Décio Krause

Florianópolis

2014

Dedico este trabalho a minha esposa Claudia, pela paciência, incentivo e amor nesses quatro anos, e aos meus pais e a minha irmã, por estarem sempre presentes, apesar de não estarem por perto.

AGRADECIMENTOS

São muitas as pessoas às quais eu deveria de uma forma ou de outra agradecer, tantas que se fossem citadas, não caberiam neste espaço. Todavia, reservo um agradecimento especial a todos os professores do departamento de filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina, àqueles que foram os responsáveis pela minha formação desde a graduação. Também tenho um carinho especial com todos os meus amigos que, de um modo ou de outro, participaram da 'gestação' desse texto ou que foram refúgio nos momentos de esgotamento. À família da minha esposa, que por entenderem a dificuldade de um curso neste nível, sempre me olharam com admiração: isso nunca será esquecido. Por fim, um agradecimento excepcional reservo ao meu orientador, Décio Krause, pelo simples fato de acreditar em mim: nele, acabei encontrando um amigo.

The answer, my friend, is blowin' in the wind
The answer is blowin' in the wind.

Bob Dylan

RESUMO

Nesta tese são discutidas questões relacionadas às noções de identidade e individualidade presentes nas teorias formais, mais precisamente atreladas ao conceito de *estrutura rígida*. Inicia-se o texto discorrendo sobre teorias de identidade do ponto de vista filosófico em geral, para depois explorarmos como este assunto é tratado na lógica, teoria de conjuntos e matemática clássica. Argumentamos que estas últimas teorias, ao assumir uma identidade para seus 'objetos', parecem se comprometerem também com a individualidade dos mesmos. Obviamente, poder-se-ia dizer que por serem formais, tais sistemas não deveriam se comprometer com uma metafísica, mas a ideia é exatamente que construímos tais sistemas para dar conta de alguma parcela da realidade e, assim, acabamos também nos comprometendo com algum tipo de metafísica (no caso, aqui, como defendemos, individualizadora). Em seguida mostramos que tudo leva a crer que na ciência moderna — em particular na mecânica quântica (MQ) — podemos encontrar objetos (as partículas quânticas) que podem ser entendidos como não possuindo identidade, tornando-se então não indivíduos de acordo com uma interpretação bastante plausível. Como argumentamos que as teorias formais usuais dão a impressão de se comprometerem com a identidade e individualidade de seus entes, novos formalismos parecem ser necessários (aqui, em especial relacionado ao uso de uma teoria de conjuntos alternativa) na qual se possa 'manipular' tal não individualidade quântica. Mostramos em seguida uma teoria conjuntista que foi formulada tendo em vista estes requisitos: a chamada teoria de quase-conjuntos ($\mathfrak{Q}$), na qual aparecem objetos (os chamados *m*-átomos) para os quais a lei reflexiva da identidade $x = x$ não vale. Tal restrição (pensa-se) capta formalmente a 'perda da identidade' das partículas quânticas. Como argumentamos acima que objetos que têm identidade são indivíduos, a ausência da identidade para os *m*-átomos os fazem então *não-indivíduos* em certo sentido. Não obstante, algumas características das teorias clássicas poderiam impugnar mesmo tal teoria conjuntista alternativa: no nosso caso, estaremos preocupados com a noção de estrutura rígida, conceito este erigido em um arcabouço conjuntista. Uma estrutura é rígida quando seu único automorfismo for a função identidade. Em teorias de conjuntos clássicas, tais como a de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, um teorema mostra que toda estrutura não-rígida pode ser estendida a uma rígida, de modo que a partir do único automorfismo existente *é sempre possível dotar os elementos da estrutura de uma 'identidade'*. Deste modo, em um primeiro momento, nos preocupa mostrar (através de uma análise bastante detalhada do

teorema da rigidificação clássico) que algumas estruturas alicerçadas na teoria de quase-conjuntos — no caso, aquelas nas quais seus domínios contêm apenas *m*-átomos — não podem ser rigidificadas e, assim, acreditamos que realmente não podemos dotar os *m*-átomos de uma possível 'identidade'. Isto é importante, pois se mesmo estruturas fundamentas em $\mathfrak{Q}$ pudessem ser rigidificadas, o intuito formal da teoria de quase-conjuntos (qual seja, manipular objetos para os quais a identidade não faz sentido) cairia por terra. A partir de tal impossibilidade, como mostraremos, esta teoria aparenta realmente ser um alicerce seguro para se manusear as partículas quânticas. Em seguida, daremos alternativas quase-conjuntistas a estes conceitos. Definiremos uma noção de *quase-identidade* e de *quase-automorfismo*, e provamos um teorema que mostra que *toda quase-estrutura não quase-rígida pode ser estendida a uma quase-estrutura quase-rígida* (resultado, assim, paralelo ao teorema clássico). Não obstante, agora destoante das estruturas clássicas, enfatizamos que mesmo em uma quase-rigidificação não estaremos introduzindo uma noção de identidade 'disfarçada' para os *m*-átomos, desta feita não se tornando o teorema provado um resultado opositivo aos preceitos básicos da teoria de quase-conjuntos. Em sequência, é discutido o uso das estruturas matemáticas para alicerçarem e fundamentarem as teorias científicas em geral e as vantagens que se pode obter disso. Construímos exemplos de estruturas que parecem servir para alicerçar tanto a MQ bem como a química em particular, e ressaltamos o ganho conceitual que obtemos em se erigir tais estruturas na teoria $\mathfrak{Q}$ (exatamente pela não rigidificação das mesmas). Por fim, a partir da constatação de que algumas áreas da ciência parecem justificar efetivamente o uso de estruturas quase-conjuntistas, discutimos a possibilidade de irmos na direção de um 'pluralismo estrutural' — além de fortalecermos uma metafísica sem identidade — e defendemos a ideia de que a noção de identidade aparenta não ser tão essencial assim em alguns quadros teóricos bem justificados, tal como o nosso.
Palavras-chave: Estruturas rígidas. Teoria de conjuntos. Teoria de quase-conjuntos. Estruturas conjuntistas em ciência.

ABSTRACT

In this, thesis we discuss some questions about the notions of identity and individuality, in special connecting these subjects to the concept of the "rigid strucuture". In the beginning, we talk about the theories of identity in an general philosophical view, to speak later how the identity is handle in logic, set theory and classical mathemathics. We argue that these theories, to assume an identity for its 'objects', seem also to commit to an individuality to these objects. In sequence, we show that we have reasons to believe that in modern science - particularly, in quantum mechanics (QM) - we can found objects (the quantum particles) that can be understood as having no identity, thus becoming not-individuals (according to a very plausible interpretation). As we argue that the classical formal theories give the impression that they commit with identity and individuality for your objects, new formalisms seem to be necessary (here, especially related to the use of an alternative set theory) in which that we can 'manipulate' such quantum non-individuality. We show one set theory that was formulated in view of these requirements: the so-called quasi-set theory, where we have objects (the *m*-atoms) that do not respect the reflexive law of the identity ($x = x$). This restriction (it is thought) formally captures the 'loss of identity' of quantum particles. As argued above that objects having identity are individuals, the lack of identity for the *m*-atoms do make then *not*-individuals in a sense. Nevertheless, some features of the classical theories could even challenge this ensemblistic alternative theory: in our case, we are concerned with the notion of rigid structure; concept always erected on a set-theoretic framework. A structure is rigid when its only automorphism is the identity function. In classical theories of sets, such as Zermelo-Fraenkel with the axiom of choice, a theorem shows that every non-rigid structure can be extended to a rigid, so that with this only existing automorphism, *is always possible to provide an 'identity' to the elements of the structure*. Thus, at first, we will concern to show that some structures grounded in the theory of quasi-sets — in this case, those in which your domains have only *m*-atoms — cannot be rigidificate and, thus, we believe that we really cannot provide a possible identity to these *m*-atoms. This is important because if we make a possible rigidification to $\mathfrak{Q}$ structures, the formal ideia of the theory of quasi-sets (manipulate objects for which identity does not make sense) would collapse. From such impossibility, as we will show, this theory appears to be a really good foundation to handle quantum particles. In sequence, we provide alternative quasi-ensemblistic notions to some classical concepts. We define a notion of *quasi-identity* and *quasi-*

automorphism, and we prove a theorem that shows that *all non quasi-rigid structure can be extended to a quasi-rigid structure* (thus, a result similar to the classical theorem). Nevertheless, now unlike classical structures, we emphasize that even in a quasi-rigidification we will not can be introducing a notion of identity 'disguise' for *m*-atoms. In sequence, we discusses the use of mathematics to ground scientific theories with quasi-set structures, and the advantages that one can get it. We construct examples of structures that seem to serve to underpin both the QM and chemistry in particular, and we emphasize the conceptual gain that we get in erecting such structures in the theory $\mathfrak{Q}$. Finally, from the fact that some areas of science seem to effectively justify the use of quasi-set structures, we discussed the possibility of going towards to an 'structural pluralism ' — together with an reinforcement to an metaphysical without identity — and defend the idea that the notion of identity does not seem to be essential in some well-justified theoretical frameworks, such as our.
Keywords: Rígid structures. Set theory. Quasi-set theory. Set structures in science.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Alguns conceitos na filosofia são tão importantes que se tornam fundamentais nas suas áreas. Por exemplo, na filosofia política, a noção de "justiça" parece ser essencial. Com efeito, boa parte da discussão tida nessa disciplina gira em torno do debate filosófico sobre como ter um governo, uma constituição ou um conjunto de regras que sejam justas e que promovam, assim, o progresso da cidade e o desenvolvimento pleno dos seus cidadãos. Na área de ética, por sua vez, a concepção de virtude é um dos principais problemas, haja vista que uma das finalidades da ética (pelo menos segundo Aristóteles em sua *Ética a Nicômaco*) é o estudo de 'regras morais' que conduzam a uma vida virtuosa e feliz. Esta concepção de eticidade presente ainda em tal filósofo helênico, dificilmente não será aludida em qualquer exame filosófico sobre concepções morais. Na epistemologia, por sua vez, a referência ao empirismo e a filósofos empiristas irá ser um dos conceitos-chave em qualquer discussão sobre o valor de verdade do nosso conhecimento sobre o mundo; e assim sucessivamente.[1]

Na área de lógica e filosofia analítica, um dos conceitos primordiais é o da identidade. Não obstante ser tal tema tão vasto que sua altercação se irradia e transpassa várias áreas da filosofia em geral, é na área filosofia analítica — e em especial na disciplina de lógica — o lugar em que a noção de identidade encontra seu 'edifício teórico-formal', de modo que aqui a discussão toma corpo de uma forma mais objetiva, em geral se eximindo assim do debate meramente informal. O conceito de identidade é tão importante que poderíamos, parafraseando Einstein, dizer que nos imbuímos dele praticamente junto com o leite materno, de modo que o mesmo ainda se torna, agora nas palavras de Russell, uma "relíquia da filosofia".[2] Outrossim, o problema

[1]Como dito no texto, esses temas são citados apenas como exemplos e de forma alguma queremos dizer que em tais áreas da filosofia as discussões fiquem restritas apenas a tais assuntos.

[2]No futuro citaremos novamente essa posição de Russell e indicaremos onde a mesma se encontra. A passagem de Einstein que aqui parafraseamos se encontra na apresentação que o mesmo fez para o livro de Max Jammer, *Conceito de Espaço: a história das teorias do espaço na física* (JAMMER, 2010 (1953), p. 15), de 1953. Segundo Einstein, "os olhos do cientista voltam-se para os fenômenos que são acessíveis à observação, para sua percepção e formulação conceitual. Na tentativa de chegar a uma formulação conceitual, imerso no conjunto imensamente vasto de dados da observação, o cientista serve-se de um arsenal de conceitos dos quais se imbuiu praticamente junto com o leite materno. Raras vezes ou mesmo nunca tem consciência do caráter eternamente problemático de seus conceitos. Usa esse material conceitual — ou, em termos mais exatos, esses instrumentos conceituais do pensamento — como um dado óbvio e imutável, algo que tem um valor objetivo de verdade, do qual raramente se pode duvidar, ou, pelo menos, não se deve duvidar seriamente [...]. No entanto, a bem da ciência, é preciso que nos empenhemos repetidas vezes na crítica desses conceitos fundamentais, para não sermos governados inconscientemente por eles.".

da identidade está também intimamente ligado ao problema da individualidade, de modo que parece que para reconhecermos um objeto como sendo um *indivíduo* em particular, temos que dotá-lo de algum tipo de identidade — e vice-versa — a ponto do próprio Quine afirmar que "não há entidade sem identidade" (QUINE, 1996)[3]. Não obstante, dada sua importância, da mesma forma que os problemas antes citados das outras áreas da filosofia, o problema da identidade acaba por ter diversas facetas e particularidades, de modo que pode ser 'atacado' de várias frentes e a partir de várias perspectivas.

Com efeito, uma das formas de analisar este problema se refere exatamente ao modo como ele é estabelecido nas disciplinas formais, tais como a já citada lógica, a matemática e a teoria de conjuntos clássicas. A identidade, como não poderia deixar de ser, também está presente nestas últimas disciplinas, e também aqui guarda algumas minúcias que se tornam dignas de serem consideradas. Em especial, aqui aparece a noção de identidade via uma estrutura matemática, este último conceito construído tendo sempre por base uma teoria de conjuntos: no modo clássico, usualmente na teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC). A noção de estrutura matemática é tão importante que muitos pensadores acreditam que boa parte da matemática e da ciência em geral poderiam ser fundamentadas em tal arcabouço teórico, de modo a assim obtermos um tipo de 'esqueleto formal' de cada área do conhecimento. Esta tese, então, é *de um modo geral* um estudo sobre o conceito de identidade existente nas *estruturas matemáticas* que podem ser usadas para fundamentar a ciência, e com o que isso parece nos comprometer. Como veremos, a identidade é um conceito tão forte que mesmo quando queremos de algum modo 'esquivar-nos' do mesmo, ele encontra um modo de adentrar ao nosso edifício estrutural clássico via outros meios. Em particular, para o nosso estudo em apreço, esse conceito adentra ao nosso debate via a noção de "estrutura rígida", noção essa sempre exequível em ZFC e a partir da qual sempre podemos dotar os objetos das estruturas de uma 'identidade' (em um sentido que será esclarecido avante). Todavia, como sustentaremos, a existência de estruturas rígidas nas quais os objetos podem ser sempre identificados e distinguidos entre si é um pouco 'desconfortável', por assim dizer, para a fundamentação de áreas do conhecimento em que se quer que os mesmos não sejam dotados de identidade e que possam, assim, ser tomados como *não-indivíduos* em um certo sentido (como, de um modo que ficará claro no futuro, os objetos da mecânica quântica (MQ), segundo uma interpretação plausível que voltaremos oportunamente). Como diremos mais

[3]Não obstante, é preciso tomar um pouco de cuidado com essa afirmação, pois poderíamos ainda assim pensar em eventos que têm identidade (como um pensamento ou uma tempestade), mas que não são (ou fica um pouco difícil afirmar que sejam) indivíduos. Neste sentido, veja (LOWE, 1998).

à frente, seria deveras interessante que tivéssemos (por motivos que exporemos) uma teoria de conjuntos alternativa em que não houvesse tal 'problema', a saber, em que não pudéssemos sempre dotar de uma identidade os seus elementos via a rigidificação das estruturas nela baseadas, opostamente assim ao que ocorre em ZFC. *Voilá*, tal teoria existe e se chama *Teoria de Quase-Conjuntos* ($\mathfrak{Q}$). Deste modo, em particular, esta tese tem o intuito de mostrar que certas *estruturas que têm por fundamento a teoria de quase-conjuntos não podem ser rigidificadas* e que, por conseguinte, *não podemos de nenhum modo dotar de uma 'identidade' certos elementos de alguns quase-conjuntos*. Com tal impossibilidade de rigidificação de tais estruturas, de acordo com o que falamos acima promove-se assim um tipo de legitimidade em assumir esses objetos como não-indivíduos autênticos. Não obstante, como também mostraremos, um conceito mais *'fraco'* de rigidificação (que nomeamos de *quase-rigidificação*) é ainda assim alcançável em $\mathfrak{Q}$. Todavia, destoante do caso clássico, este conceito não irá fornecer uma 'identidade' aos objetos das quase-estruturas e teremos assim realmente êxito em falar — a partir de tal teoria quase-conjuntista — de objetos indistinguíveis, mas que não são "o mesmo" (num sentido que também ficará claro no decorrer deste trabalho). Dada tais virtudes, em seguida sustentamos que certas áreas do conhecimento podem efetivamente ser alicerçadas em teorias e estruturas conjuntistas diferentes da clássica, aqui em particular na teoria de quase-conjuntos, e então mostramos exemplos tanto da MQ bem como da química que servem para exemplificar tal posição. A partir de tal discussão, por fim analisamos aonde tal abordagem alternativa pode nos levar, especificamente defenderemos que a partir dos nossos resultados um 'pluralismo estrutural' pode ser assumido; onde utilizamos as ferramentas formais mais indicadas para se trabalhar em cada área específica do conhecimento.

Sendo assim, esta tese está estruturada do seguinte modo. No primeiro capítulo é dado um apanhado geral sobre o problema da identidade em filosofia. Como dito acima, dado a vultuosidade dessa discussão, ela não está apenas atrelada a abordagens formais, mas também a abordagens sintéticas próprias do debate filosófico mais clássico. Deste modo, nesse capítulo, expomos e discutimos filosoficamente alguns problemas clássicos da identidade, tais como o problema da identidade através do tempo e o da individuação via posição espaço-temporal, de modo a esta tese se tornar assim autocontida. Não obstante, nessa primeira parte, não nos preocupa debater pormenorizadamente todas as facetas do problema da identidade, mas sim apenas oferecer algumas discussões mais gerais com o intuito de apresentar a problemática sob outros ângulos que não somente o lógico. Entretanto, ainda assim, muitas das contendas presentes em tal capítulo serão retomadas em capítulos posteriores (em especial no capítulo três) agora atreladas também a outras áreas do conhecimento, o que igualmente justifica este estudo inicial. No segundo capítulo faremos um estudo (agora sim, um pouco mais detalhado) de como a identidade é tratada nas disciplinas formais, tais como a lógica e a teoria de conjuntos clássicas. Mostraremos como a identidade é caracterizada na lógica de 1^a ordem, bem como na de ordem superior, como ela é assumida em uma das teorias de conjuntos mais usuais (ZFC) e como poderíamos, em uma estrutura matemática, manipular objetos para os quais não queremos que a identidade tome forma. Aqui, já precedendo temas a serem tratados em capítulos futuros, falaremos do modo como definimos uma estrutura matemática, no que isso parece implicar e como uma tal estrutura nos compromete com a individualidade de seus entes via a sua rigidificação, tal como dissemos acima. Um debate que ainda se faz presente nesse capítulo — e que deve ser enfatizado — é a defesa da posição de que a matemática, a lógica e a teoria de conjuntos clássicas realmente parecem se comprometer com a individualidade dos objetos que representam (apesar delas mesmas não expressarem isso objetivamente), seja porque, como dito, sempre é possível rigidificar as estruturas nelas baseadas, seja pelo próprio modo como a noção de identidade é assumida em tais disciplinas. Argumentaremos que uma análise dos alicerces formais de tais matérias podem nos levar efetivamente a assumir que, do ponto de vista de tais disciplinas, *não há* coisas verdadeiramente indiscerníveis sem ser a mesma coisa. No terceiro capítulo desta tese, por sua vez, é feita uma exposição dos motivos que poderiam nos levar a assumir a visão de que os objetos da mecânica quântica podem ser entendidos como 'entes desprovidos de identidade', sendo assim *não-indivíduos* de acordo com uma posição bastante plausível. Não obstante, nesse capítulo, primeiramente são mostrados vários argumentos que nos ajudam a compreender como os objetos da *física clássica* podem ser entendidos como tendo identidade e como sendo indivíduos na acepção plena do termo. Em sequência, e mais importante, argumentaremos que todos os 'requisitos' usuais necessários para se dotar um objeto de individualidade parecem falhar no domínio quântico. Como se sabe, a física quântica subverteu várias concepções intuitivas que tinhamos sobre a nossa realidade externa, e argumentaremos aqui que a própria identidade de seus objetos também é um desses dogmas que podem ser postos à prova. Da mesma forma que na física clássica, mas em sentido inverso, mostraremos vários argumentos que nos fazem acreditar que é problemático (pelo menos do ponto de vista filosófico) tomar os objetos da física quântica como possuindo uma identidade e uma individualidade, seja devido às suas distribuições estatísticas, seja devido à impossibilidade de os acompanharmos espaço-temporalmente, seja no sentido de que não podemos nunca saber se um dado elétron, por exemplo, foi 'trocado' por um outro elétron em um certo átomo (dado que pela 'falta de identidade', qualquer elétron pode ‘fazer o trabalho’ do elétron ‘original’) e assim por diante, ou até mesmo apresentando vários físicos e filósofos que se inclinam para tal posição não-individualizadora (embora, é claro, no momento isto possa parecer um *argumentum magister dixit*, no futuro mostraremos que tal posição não advém da autoridade de tais pensadores). Entretanto, ainda assim, ressaltaremos que o formalismo quântico não necessariamente nos obriga a adotar essa visão de mundo em particular, mas que todavia também podemos continuar a falar que os objetos quânticos são indivíduos, apenas que para que isso funcione no formalismo matemático se faz necessário a assunção de pressupostos externos à teoria, como veremos. Não obstante, como defenderemos, isso não deixa de ser um tipo de embuste que não se coaduna com uma filosofia que quer interpretar, *desde o início*, o mundo de um modo mais conformado com os fatos empíricos tais como ditados pela MQ ortodoxa. Outrossim, dada a defesa feita no capítulo dois de que a teoria de conjuntos clássica parece tomar seus objetos como indivíduos de alguma forma, e dado o fato de que os objetos quânticos podem ser entendidos como não-indivíduos em certo sentido, uma nova teoria de conjuntos se faz necessária para se fundamentar a MQ, uma em especial que também tome seus elementos como entes desprovidos de individualidade e identidade. A apresentação de uma teoria de conjuntos alternativa que se coaduna com tais pressupostos, baseada por sua vez em uma *lógica não-reflexiva*, é o que aparece no capítulo quatro desta tese, o mais descritivo entre todos. Sendo assim, nessa passagem, faremos uma apresentação geral da chamada de *Teoria de Quase-Conjuntos* ($\mathfrak{Q}$) mostrando alguns de seus axiomas e principais teoremas, e enfatizando como esse arcabouço formal pode ser usado para sustentar objetos que são indistinguíveis, mas não são apenas um, tais como os objetos quânticos. Por enquanto, basta dizer que essa teoria irá admitir um tipo especial de objeto, nomeado de m-átomo, para o qual a lei reflexiva da identidade da lógica clássica ($x = x$) não se aplica e que por isso pode ser assim entendido como não tendo identidade e como sendo um não-indivíduo (de um modo que definiremos formalmente no futuro). Não obstante, e aí começaremos a nos aproximar do cerne desta tese, no final desse capítulo ainda faremos uma discussão geral sobre a relação existente entre a teoria de quase-conjuntos e a questão das estruturas rígidas. Como já dissemos no capítulo dois, as estruturas matemáticas baseadas em teorias de conjuntos usuais, mesmo quando não-rígidas, podem ser rigidificadas de modo a sempre se ‘dotar’ um objeto de identidade. Agora temos uma teoria de quase-conjuntos na qual a identidade não vale para certos tipos de objetos. Então tudo leva a crer que uma determinada estrutura matemática baseada em $\mathfrak{Q}$ (assumindo apenas m-átomos), devido à ausência de identidade para tais elementos, não pode ser rigidificada de forma alguma. Se isso é verdadeiro, então realmente podemos encontrar estruturas matemáticas adequadas para fundamentar a mecânica quântica em tal teoria alternativa, haja vista que não teremos, de modo algum, meios de se 'incluir' na mesma a noção da identidade via qualquer tipo de rigidificação das estruturas nela baseada. Todavia, se isso se mostrar falho e se mesmo estruturas quase-conjuntistas também puderem ser rigidificadas de alguma forma, o intuito formal da teoria $\mathfrak{Q}$ se mostrará inútil, pois neste caso mesmo nesta teoria alternativa também poderemos identificar seus objetos através da rigidificação de estruturas nela baseada. Sendo assim, para comprovar que isso é realmente impossível e que não podemos de modo algum rigidificar uma estrutura quase-conjuntista, adotamos nesta tese a 'tática' de *analisar detalhadamente a prova de que toda estrutura clássica* (baseada em ZFC) *pode ser rigidificada*. Este, então, é o tema do nosso quinto capítulo. Nessa parte do trabalho, faremos uma análise bastante minuciosa da prova da rigidificação clássica tentando entender se ela pode ou não tomar corpo na teoria de quase-conjuntos. Com efeito, antes que a prova da possibilidade de rigidificação das estruturas de ZFC realmente tome corpo, vários teoremas paralelos são provados e várias definições são estabelecidas: iremos então comparar vários desses teoremas e definições à luz da teoria de quase-conjuntos. Mostraremos que muitos conceitos e definições que podem ser estabelecidos na teoria de conjuntos clássica não podem tomar forma na teoria $\mathfrak{Q}$, seja pela falta de identidade de seus objetos, seja pela impossibilidade de ordenação dos mesmos, o que acaba então por minar todo o edifício teórico onde a prova clássica está erigida (e devido à falta da noção de identidade, não nos parece que haveria outra possibilidade de prova). Como dito, esse estudo minucioso se justifica pelo fato de termos certeza de que o(s) teorema(s) da rigidificação de estruturas clássicas realmente não pode ser estabelecido em $\mathfrak{Q}$ e que, assim, poderemos realmente falar, do modo que estamos defendendo, de não-indivíduos legítimos. Todavia, embora não se possa seguramente rigidificar certas estruturas quase-conjuntistas e, assim, identificar autenticamente nossos objetos, uma forma mais branda de "quase-rigidificação" na teoria $\mathfrak{Q}$ pode ser alcançada: este é o tema do nosso sexto capítulo. Nele, definiremos noções como quase-identidade e quase-automorfismo e, a partir delas, consoante ao que acontece em ZFC, mostraremos que as estruturas quase-conjuntistas podem ser *quase-rigidificadas*. Não obstante, como veremos, a grande vantagem e a grande diferença para o caso clássico é que esta forma de quase-rigidificação *não nos comprometerá com a (ou dotará uma) identidade dos (aos) m-átomos das estruturas quase-conjuntistas*, mostrando-se tal prova como que um complemento a toda essa teoria de conjuntos alternativa. Outrossim, como dito acima, segundo alguns pensadores boa parte do conhecimento científico pode ser alicerçado na noção de estrutura. No capítulo derradeiro desta tese, o sétimo, são então dados alguns exemplos de estruturas para se fundamentar tanto a MQ bem como a química, e é defendida a ideia de que se quisermos erigir essas estruturas em uma teoria de conjuntos mais 'genuína', teremos que fazê-lo em uma teoria de quase-conjuntos, em especial devido exatamente ao fato da impossibilidade de rigidificação das estruturas nela alicerçadas, que mesmo quando quase-rigidificadas ainda assim continuam a preservar a não-individualidade de seus objetos. Dada a presença dessas estruturas que não são rígidas e nem rigidificáveis, temos exemplos de outros casos onde o uso da teoria $\mathfrak{Q}$ realmente se justifica preeminentemente, o que fortalece — agora também por outros motivos — toda a discussão encontrada nos capítulos dois e três desta tese. A partir disso, no final desse capítulo sétimo, ainda faremos uma discussão geral sobre a relação que pode existir entre os conceitos de quase-rigidificação e estruturas quase-conjuntistas e no que tais noções parecem implicar para as estruturas da ciência. Em especial (como defenderemos) tais resultados parecem nos indicar tanto a direção de um 'pluralismo estrutural', bem como a do fortalecimento de uma possível ideia de 'metafísica sem identidade', consequência da constatação de que o conceito de identidade parece não ser tão imprescindível como normalmente se apregoa (pelo menos para alguns quadros teóricos bem definidos e justificados tal como o nosso), posição que abre frentes filosóficas bastante amplas e relevantes.

Vale ressaltar que algumas ideias presentes nesta tese foram ou serão publicadas em forma de artigo em (DA COSTA, *et. al.*, 2012) e (SCHINAIDER, 2013), mas imaginamos que este trabalho não se esgota nestas páginas, haja vista que muitas abordagens conjecturadas principalmente nos últimos capítulos ainda gerarão outros artigos (alguns já em vias de análise por revistas especializadas em (SCHINAIDER, 2014B), (SCHINAIDER, 2014C) e (SCHINAIDER e KRAUSE, 2014D). Por fim, vale mencionar que esta tese, apesar de se arranjar estruturalmente como um todo, foi pensada e construída para ter capítulos independentes, de modo que os mesmos se tornassem autocontidos e que conseguissem (dentro do possível) esgotar seus assuntos em si mesmos. É claro que isso nem sempre foi factível, e em certos momentos (embora acreditamos que não muitos) talvez a leitura de um capítulo prévio se revele realmente imprescindível a um outro posterior. De todo modo esperamos que este trabalho — juntamente com a bibliografia nele citada — se mostre um bom lugar para consulta futura dos temas tratados.

2 PROBLEMAS DA IDENTIDADE

2.1 INTRODUÇÃO

Como dito na introdução desta tese, este capítulo ainda intróito tem como objetivo perpetrar — de um ponto de vista mais *filosófico* que formal — uma discussão geral sobre a problemática relativa à identidade de objetos físicos. Neste sentido, nosso propósito neste primeiro momento é apenas discutir algumas facetas e abordagens gerais de tal problema, bem como algumas teorias e propostas de solução de questões a ele relacionado. Não faremos aqui (e nem nos interessa neste momento) realizar discussões exegéticas e nem apresentar soluções inovadoras ao clássico problema da identidade dos objetos. Não obstante, muitas vezes, relacionaremos as teorias apresentadas com aspectos da mecânica quântica, que é o nosso caso de estudo, como também recuperaremos parte da discussão tida neste primeiro tomo em capítulos subsequentes. De toda forma, o que agora pretendemos, como dito, é apenas nos ambientarmos com a discussão e com algumas propostas consagradas, de modo a esta tese se tornar auto-contida e haja vista ser este trabalho — afinal de contas — um trabalho de filosofia.

De princípio, pode-se dizer que a noção de identidade é bastante intuitiva: qualquer objeto ou coisa que seja possui a relação de identidade consigo mesma e com nada mais. Sendo assim, este problema pareceria ser bastante simples e não reservaria maiores dificuldades: afinal de contas, coisas são idênticas se elas são uma coisa e não duas; se elas são idênticas a si mesmas e a nada mais. Opostamente, podemos refutar a alegação de que essas coisas são idênticas se encontrarmos uma característica que uma delas tem, e a outra não. Não obstante, por trás dessa aparente simplicidade, se escondem problemas filosóficos profundos e de longa data.

2.2 IDENTIDADE E SUBSTÂNCIA

Com efeito, uma das primeiras facetas relativas ao problema da identidade de objetos é de pronto a discussão sobre a *substância* de que as coisas são feitas. Isto porque, de certo modo, é a substância (entre outras coisas) que possivelmente poderia prover uma identidade aos objetos. Esta então é uma das perguntas clássicas da filosofia: qual é, afinal de contas, o 'último material' de que as coisas são feitas? Dentro das possíveis respostas a este problema, temos duas vertentes principais. A primeira delas encerra as chamadas *teorias positivas da substância*, as quais explicam a unificação de elementos complexos para formar um todo (como uma pessoa por exemplo) usando para isso um 'elemento identificador' (ou unificador) especial. Este elemento identificador, único para cada objeto, seria exatamente o que faria o objeto ser idêntico apenas a si mesmo e a nada mais. Vale ressaltar que na maior parte das vezes, esse "elemento identificador" é de natureza metafísica. Como veremos em capítulos mais à frente, esta tese também é chamada de "identidade transcendental".[1] Na outra vertente estão as chamadas *teorias negativas*: para tal visão, há apenas uma coleção de propriedades que formam um elemento complexo, resultando que apenas o conjunto das propriedades (sem a necessidade de um tal 'elemento identificador') por si só já bastaria para prover a identidade aos objetos e permitir, assim, que os reconheçamos como iguais ou diferentes.[2] A diferença entre essas duas visões é que nesta última não se admite propriedades para além do conjunto completo de propriedades materiais do objeto.[3]

É claro que a discussão pode ser agora desviada à questão do que seriam tais propriedades. No decorrer deste texto iremos retomar tais contendas a partir de diferentes propposituras interligadas. Não obstante, Quinton (QUINTON, 1973, p. 3ss), mostra quatro problemas da substância distintos, e de certo modo independentes, que são de difícil solução exatamente porque muitos filósofos não percebem a sutil distinção que existe entre eles:[4]

1) *individuação*: como usualmente se supõe, todo indivíduo (ou objeto) tem um certo número de qualidades e relações que possui ou partilha com outros objetos.[5] Todavia, a própria distinção existente na lingua-

[1]É bom citar que alguns autores tomam o termo "substância" como sinônimo de "substrato", embora outros achem que tais termos não devam ser entendidos como sinônimos. Não obstante, nesta tese, tomaremos "substância" e "substrato" como sinônimos.

[2]Tal teoria também é conhecida como "teoria dos feixes" (de propriedades). A teoria de feixes também costuma vir acompanhada de um 'elemento unificador', o qual é em geral entendido como uma relação de 'co-presença' que mantém as propriedades de um indivíduo unidas, mas todavia não devendo por isso ser entendido como sendo algo de natureza *identificatória* tal qual acontece na identidade transcendental (agradeço ao prof. Jonas R. Becker por ter me alertado sobre isso.)

[3]Entre os pensadores que partilham da tese positiva temos por exemplo Aristóteles, Locke (com seu "substratum") e Kant ("a coisa em si"). Para a tese negativa, temos filósofos como Hume, Russell, Quine, Goodman, Ayer, além dos pensadores da vertente empirista (*cf.* (QUINTON, 1973).

[4]Nas primeiras sessões deste capítulo tomaremos como base o livro de Quinton (*op. cit.*). Isto porque, entre o grande número de filósofos que trataram sobre o tema da identidade na filosofia, escolhemos um dos mais consagrados filósofos contemporâneos que abordaram o assunto. Não obstante, nas próximas seções (bem como ainda nesta), também travaremos contato e citaremos outros autores.

[5]No entanto, a física presente parece contestar tal posição para o caso dos objetos quânticos. Com efeito, não é unânime a ideia de que um elétron tenha a propriedade chamada *spin*, por exemplo: segundo alguns físicos, principalmente os da chamada "Interpretação de Copenhague"

gem natural entre sujeito e predicado (como por exemplo na afirmação "a mesa é branca") sugere que o indivíduo estaria relacionado com as propriedades como fosse apenas um possuidor *contingente* dessas propriedades (com efeito, a mesa poderia ser cinza em outra ocasião). Dado que em geral tais propriedades são contingentes, é estranho afirmar que elas poderiam de alguma forma servir como individualizadoras dos objetos (o que reforça a tese positiva acima de não atrelar a identidade a propriedades materiais do objeto). Não obstante, apesar deste argumento, a tese negativa que identifica um indivíduo ou objeto apenas como um feixe ou coleção de propriedades ainda tem seu valor exatamente pelo fato de ser *mais econômica* do ponto de vista metafísico.

2) *Identidade através do tempo:* Poucos são os casos em que observamos um objeto durante toda a sua 'carreira temporal'. O que confere então identidade (no sentido de re-conhecermos o objeto) a estes estados ou fases de uma coisa desconectadas temporalmente? Do mesmo modo acima descrito, a teoria positiva diz que existe algo imutável que confere a identidade através do tempo sobre uma série de alterações de estados (Demócrito — com a sua teoria atômica — seria um exemplo de tal visão (veja (ROLAND, 1984, p. 82-7)). Na teoria negativa, por sua vez, temos a ideia de que a identidade transtemporal se dá através de uma descrição relacional: as relações — muitas vezes repetitivas — que vão se estabelecendo entre um objeto e as outras coisas é que o torna passível de reidentificação. Locke e Hume são exemplos de autores que partilham desta última posição (*cf.* loc. cit. (QUINTON, 1973)) No decorrer deste capítulo, será reservado uma seção especial ao tema "identidade através do tempo".

3) *Objetividade*: os objetos diretos ou imediatos da percepção seriam impressões privadas ou aparências. O que conferiria então unidade — e tornaria objetivo — um conjunto de impressões que tomamos como sendo as aparências desta coisa? Novamente, a teoria positiva diz que somente uma substância — ou um tipo de *substrato* — poderia conferir objetividade a um sistema de aparências. Na visão oposta, temos o chamado fenomenalismo: a nossa concepção do objeto como algo contínuo advém da constância e da coerência das nossas impressões (*cf. ibid.*).

4) *Os fundamentos do conhecimento*: o conhecimento empírico tem fundamentação? Se sim, de que tipo? Existe um tipo elementar de indivíduo a partir do qual todos os outros tipos de indivíduos são construídos? Se sim, o que são esses objetos básicos?

Como dissemos, apesar de muitas vezes esses problemas parecerem

da mecânica quântica, as propriedades das partículas quânticas são como que 'criadas' no ato da medição. Falaremos mais sobre isso durante esta tese.

todos facetas de apenas um problema mais geral, segundo Quinton (QUINTON,1973, p.7) a falha em reconhecer essas quatro questões relativas à substância como distintas tem levado a um grande número de soluções divergentes e confusões diversas. Filósofos de tendência Lockeana, por exemplo, são levados à convicção de que existe algo a mais do que simplesmente um conjunto de qualidades ou de aparências para um dado objeto: além destas, como dito, existiria algo "para além" de tais qualidades. Empiristas radicais, por sua vez, afirmam que não existe tal "substratum": eles insistem que uma coisa deve ser somente um conjunto de qualidades. O problema é que desta afirmação, diz Quinton, eles derivam a errônea conclusão de que qualidade e aparência são a mesma coisa. Aparências não são qualidades, *são coisas com qualidades*: a "coisa", nas próprias palavras de Locke, é um "não sei o que" que está debaixo das diversas qualidades, das diversas sensações e das diversas impressões que uma coisa nos produz.[6]

Outra confusão é igualar o problema da individuação com o problema da identidade. Russell e Wittgenstein, por exemplo, acreditaram durante um certo período que um continuante (definido como qualquer coisa que puder ser identificável como sendo a mesma coisa em diferente épocas) é simplesmente uma legítima sequência de eventos. Para Russell, a carreira de um carro exemplifica, se não as leis físicas, no mínimo algumas regularidades em termos das quais os sucessivos estágios de um carro podem ser pensados como tendo uma certa 'casualidade conectada'.[7] A partir disso, como este au-

[6]A posição de Locke se encontra no seu texto "Ensaio sobre o Entendimento Humano" (LOCKE, 1989, parte 2, cap. XIII, §3 e 4), onde diz que "**(3. Espécies de substâncias)** Sendo, deste modo, formado uma obscura e relativa ideia de *substância geral*, adquirimos as ideias de espécies particulares de substâncias apreendendo essas combinações de ideias simples descobertas pela experiência e observação dos sentidos humanos como existindo unidas e, por conseguinte, são supostas derivar da específica constituição interna *ou da essência desconhecida dessa substância*. [...] Apenas devemos tomar conhecimento de que nossas ideias complexas de substância, além de todas as ideias simples que as formam, têm sempre a confusa ideia de algo a que pertencem, e em que subsistem; por conseguinte, quando mencionamos qualquer espécie de substância, expressamos com isto que se trata de uma coisa com tais e tais qualidades, como, por exemplo, o corpo, que é uma coisa, extensão, forma e capaz de movimento, e espírito, uma coisa capaz de pensamentos, assim como a dureza, a friabilidade e o poder de atrair o ferro [...] Estas e modos semelhantes de expressar indicam que *a substância sempre supõe algo, além da extensão, forma, solidez, movimento, pensamento, ou de outras ideias observáveis, apesar de não sabermos o que é.*". E em "**(4. Nenhuma ideia clara e distinta da substância em geral)** Por conseguinte, quando mencionamos ou pensamos em qualquer espécie particular de substâncias corporais, como cavalo, pedra etc., embora nossa ideia de qualquer uma delas seja apenas a complicação ou coleção de várias ideias simples de qualidades sensíveis que costumamos encontrar unidas na coisa denominada cavalo ou pedra e, ainda, porque não podemos imaginar como podem subsistir sozinhas, nem uma na outra, *supomos que existem e são sustentadas por algum substrato geral, cujo suporte denominamos substância, mesmo sendo evidente que não possuímos nenhuma ideia clara e distinta disto que conjecturamos como suporte*" (grifo meu).

[7]Veja (RUSSELL, 1978, terceira parte).

tor pontuou, os sucessivos estágios do carro podem ser então pensados como formando uma "linha causal" (*cf.* (HIRSCH, 1982, p. 121).). Mas acontece, diz Quinton (*ibid.*), que o fato de não existir para um continuante mais do que uma legítima sequência de suas fases não tem relevância alguma para a questão de se afinal existe, para uma dada coisa, algo além do conjunto de suas qualidades.

Mas de que modo estamos realmente autorizados a pensar que existiria algo além da soma das propriedades de alguma coisa? Filósofos da linguagem, como visto acima, dizem que o que corrobora esta tese é o fato de que quando falamos de um objeto, usamos um termo para nos referir às propriedades, e outro para nos referir à coisa mesmo (como por exemplo, quando falamos que uma casa é amarela, tem dois andares, quatro quartos e assim por diante). Mas para Quinton (*ibid.*, p. 12), tal argumento ainda não comprova tal tese: temos sim, diz ele, diferentes termos para coisas e para partes das coisas que as compõem, mas isso não prova que uma casa é mais que simplesmente as coisas que a compõem. Para este autor, uma das principais razões para se pensar que existe para um dado objeto algo além das suas propriedades reside no fato de que as propriedades, por sua própria natureza, *são gerais*: como já enfatizamos, elas podem ser aplicadas a muitos objetos e identificar um grande número de instâncias individuais. Mesmo que possamos 'exaurir' um indivíduo por progressivamente especificar suas propriedades únicas, no sentido de não haver nenhuma outra coisa que lhe seja qualitativamente similar, isto ainda não pode garantir que chegamos a um conjunto de propriedades que têm somente uma instância (a coisa individual em questão), haja vista que novamente pode continuar a ser um fato contingente que o conjunto completo de propriedades desta coisa seja suficiente para individualizá-la como um indivíduo único nesse momento. Outrossim, pode também ser possível que sempre exista uma propriedade *ainda não descoberta* que consiga diferenciar tais objetos. Além disso, se o conjunto completo de propriedades for muito amplo, talvez seja muito difícil (ou até mesmo impossível) estabelecer uma especificação de fato completa das propriedades de um dado objeto. Até mesmo se o conjunto das propriedades de um dado objeto for realmente peculiar somente a ele, pode ser muito difícil ter certeza de tal fato, haja vista que não podemos até mesmo provar que não exista um número infinito de indivíduos concretos. Disto segue que uma propriedade — ou um conjunto delas — parece não ser realmente suficiente para individualizar uma coisa e, desta forma, a única individualidade possível de um dado objeto parece ser algo transcendental aos seus conjuntos de propriedades: uma *individualidade transcendental* (*ibid.*, p. 15). Tal tese, inclusive, é corroborada pela distinção entre troca substancial e troca qualitativa, na qual as coisas continuam a existir embora diferentes predicados se tornam verdadeiros para ela; isso novamente reforça o fato de que deveria existir uma substância identificadora que não muda através do tempo. Como veremos no capítulo 3, a mecânica quântica dita ortodoxa parece não permitir uma individualidade via propriedades e nem mesmo uma individualidade transcendental (que é a que Quinton parece defender para os objetos materiais).

2.3 INDIVIDUAÇÃO VIA POSIÇÃO ESPAÇO-TEMPORAL

Embora varie constantemente, não poderíamos realmente defender que a única propriedade 'material' que dotaria os objetos de um tipo de individuação é, enfim, a sua posição no espaço-tempo? Ora, se tivermos duas coisas distintas, mas entre as quais não podemos encontrar estritas diferenças qualitativas de tamanho, peso ou cor, por exemplo, podemos sempre distinguí-las por referência a suas respectivas posições. O que prova tal tese é o fato de que duas coisas não podem estar no mesmo lugar no mesmo tempo: indivíduos são impenetráveis.[8] Existe, porém, um peculiaridade com referência a predicações posicionais em relação às outras propriedades: designar uma posição no espaço-tempo para um indivíduo envolve uma essencial e não eliminável referência a outro indivíduo ou posição. Como diz Quinton: "a *posição individua parasitamente*" (p. 18).

Mas vale ressaltar que posição é um tanto difícil de descrever. Usualmente, pode-se definir "posição" como sendo um ponto no espaço-tempo e representar (matematicamente) tal ponto como um ponto em um plano cartesiano que segue a concepção geométrica euclidiana. Todavia, como se sabe, a geometria euclidiana não é efetivamente válida no nosso mundo empírico: como já mostrado por Einstein e sua teoria da relatividade, corpos com massa 'entortam' a curvatura do espaço-tempo. Logo, a geometria ideal para nosso universo seria uma geometria de Riemann, a qual permite representar o espaço-tempo encurvado pelas massas. Todavia, mesmo neste caso, existiria um ponto no espaço-tempo que seria a posição do objeto (apesar de ser um pouco mais difícil de descrevê-lo), e é isso que importa para esta teoria. A necessidade de um espaço-tempo duradouro parece ser, inclusive, necessária

[8] Como veremos no futuro, tal característica também é 'enfraquecida' no domínio atômico. É claro que existem alguns tipos de indivíduos *não-concretos* que não ocupam posições no espaço-tempo (como por exemplo, as entidades mentais (ideias, pensamentos etc.) e as entidades abstratas (como os entes matemáticos)). Todavia, na nossa discussão, estamos deliberadamente não incluindo tais entes: como dito, o objetivo deste capítulo é apenas dar uma visão geral sobre a problemática relativa à identidade, de modo que algumas facetas desse problema serão deixadas de lado. Ainda assim é interessante citar, novamente, a posição de Quinton, para o qual uma das características de um indivíduo é sim a de ocupar uma extensão no espaço-tempo envolvendo ambas posição e qualidades (*ibid.*, p. 32). Tais entes não-concretos então seriam para ele não-indivíduos de algum tipo?

para a própria definição de objeto. Com efeito, para Hirsch (HIRSCH, 1982, p. 97), um critério de unidade espacial que se relaciona a um extenso sentido da noção de "objeto" e que se aplicaria a qualquer porção contínua de matéria, é o seguinte: "um agregado de matéria constitui um único objeto, no sentido de uma única porção de matéria, se, e somente se, o agregado é espacialmente contínuo"'. Se assumirmos a noção geométrica de uma curva contínua, podemos definir a continuidade espacial de x quando qualquer duas partes de x podem ser conectadas por uma curva contínua em todos os pontos os quais tocam x.

Desta forma, como é usual, podemos tomar os objetos primários absolutos de referência como sendo mesmo as posições: uma determinada ocupação do espaço é, então, a feição essencial dos indivíduos e das coisas em geral. Esta doutrina, diz Quinton (p. 46), é ainda reminiscente a Descartes para o qual extensão é o atributo essencial da matéria: a palavra "extensão", para Descartes, é sinônimo de ocupar espaço, ter volume ocupando uma região contínua do espaço tridimensional. Isto envolve, deste modo, forma e tamanho. Finalmente, é necessário que o espaço ocupado seja impenetrável ou logicamente sólido, no sentido de que os objetos que neles estão são os únicos ocupantes daquela região do espaço-tempo. Não obstante, embora possamos sustentar uma individualidade espaço-temporal, tal posição pode não ser bem vista por ser esta propriedade como um 'rótulo' que muda constantemente, não se configurando assim em algo próprio do 'objeto em si'. Entremeado ao texto que decorre, ainda falaremos mais sobre a individuação pela posição no espaço-tempo e as dificuldades em sustentarmos essa posição.

2.4 O PRINCÍPIO DA IDENTIDADE DOS INDISCERNÍVEIS

A crença de que não existe para um dado objeto nada mais que a soma de suas propriedades advém, boa parte, da autoridade do chamado Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII), o qual é um princípio de ontologia analítica formulado explicitamente por Leibniz, por exemplo, em seu "*Discurso sobre a metafísica*" (LEIBNIZ, 1980, seção 9). Ele declara que duas coisas distintas não podem ser iguais ou, ao contrário, que dois objetos não podem ser idênticos sem ser o mesmo objeto: se duas coisas são diferentes, então existe algo que é predicado por uma delas mas não pela outra.[9] Tal princípio de identidade pode ser formulado em linguagem atual como segue:

[9]Nas próprias palavras de Leibniz: "não é certo que duas substâncias se pareçam completamente e sejam diferentes *solo número.*" (*ibid.*). Ele também expressa isso em "*A monadologia*" (LEIBNIZ, 1989), seção 9, onde diz que "nunca há, na natureza, dois seres que sejam perfeitamente idênticos e nos quais não seja possível encontrar uma diferença interna, ou fundada em uma denominação intrínseca.".

se para toda propriedade F, o objeto x tem F se e somente se o objeto y tem F, então x é idêntico com y. Em notação da lógica (aqui em segunda ordem): $\forall F(Fx \leftrightarrow Fy) \rightarrow x = y$. O reverso deste princípio $(x = y \rightarrow \forall F(Fx \leftrightarrow Fy))$ é chamado de Princípio da Indiscernibilidade dos Idênticos (ou Lei de Leibniz). Como veremos na seção 2.3, é usual chamarmos a conjunção de ambos os princípios de Lei de Leibniz.[10]

Do modo assim formulado, a 'verdade' do princípio parece não problemática para objetos de tamanho usual como árvores e pedras, pois eles são complexos o suficiente para terem características individuais distintas, e assim poderem ser sempre distinguidos por alguma diferença física. Como vimos, objetos espaço-temporais podem ser até mesmo exatamente similares sem serem idênticos, pois eles podem ser originados (ou estar) em diferentes tempos ou lugares. Neste sentido, o princípio também é válido, por exemplo, em um universo no qual existem três esferas qualitativamente idênticas, A, B e C, onde B e C estão a 3 unidades de distância uma da outra, C e A, 4 e A e B, 5. Não obstante, o princípio passa agora a ser questionado quando consideramos objetos qualitativamente idênticos em um universo simétrico. Considere, por exemplo, um universo perfeitamente simétrico contendo somente duas esferas qualitativamente idênticas, A e B: neste caso, parece não haver nenhuma propriedade que distingue uma dessas esferas da outra. Este é o argumento de Max Black (BLACK, 1952), no qual é proposto que pode existir simetria exata no universo e é sugerido, então, um universo totalmente simétrico contendo nada além de exatamente duas esferas semelhantes. Em tal universo completamente simétrico, as duas esferas devem ser indiscerníveis, e o PII falharia:

> Para encontrar indivíduos numericamente distintos, mas materialmente indiscerníveis, filósofos têm feito experiências mentais com universos simétricos. Max Black (1952) previu um universo consistindo de somente duas esferas qualitativamente indistinguíveis, com indiscerníveis histórias. Cada esfera e cada parte de uma esfera é materialmente indiscernível de uma esfera numericamente distinta ou parte de uma esfera numericamente distinta. [Desta forma] cada parte do universo tem um par [doppelgänger] numericamente distinto. O universo de Black parece possível, então as esferas devem também ser distintas formalmente, violando o princípio. (SIMONS, 1998).

Ainda assim, teóricos positivos podem continuar a defender o prin-

[10] Nos capítulos subsequentes, veremos algumas 'limitações' desse princípio (tanto em primeira como em segunda ordem), bem como interpretações recentes da MQ que sugerem que o mesmo falha no domínio quântico.

cípio por afirmar que existem, como visto, propriedades metafísicas (como uma 'thissness' ou um 'haeccety' que estão para além das suas propriedades materiais do mesmo), que faz o objeto ser idêntico apenas a si próprio mesmo nos casos das esferas de Black, e que o quantificador do PII poderia também atuar sobre tais propriedades (*cf.* (SIMONS, 1998).). Não obstante, tal posição metafísica não é unânime. Dada tal problemática, é comum então distinguir diferentes formulações do princípio a partir do aceite, ou não, dos 'tipos' de propriedades que "caem" nele. Uma das primeiras distinções é entre identidade qualitativa e identidade numérica. Dizer que a e b são qualitativamente idênticos, é dizer que a assemelha-se exatamente a b; e dizer que a e b são numericamente idênticos, é dizer que a e b são uma coisa e não duas. Desta forma, embora gêmeos — ou clones — 'idênticos' sejam qualitativamente idênticos, por exemplo, eles são numericamente distintos. Com essa distinção, é possível afirmar que a fórmula "$x = y$" diz que x e y são numericamente (e claro, também assim qualitativamente) idênticos. Não obstante, como diz Gallois (GALLOIS, 2011): "Se a e b podem ter todas as suas qualidades em comum sem serem numericamente idênticos é algo controverso. [...] Parece que a e b podem ser numericamente idênticos, sem ser qualitativamente idênticos, por terem qualidades diferentes em momentos diferentes". Como veremos no futuro, é um problema filosófico bastante complexo saber se dois objetos numericamente distintos (como dois elétrons, por exemplo) podem todavia ser qualitativamente idênticos (isto é, ter exatamente as mesmas propriedades) mesmo sendo mais que um, pois isso vai depender do que chamamos de "propriedades" de um elétron.

Outra distinção que é feita entre as propriedades que podem ser aceitas no PII é entre puras e impuras, relacionais, intrínsecas e extrínsecas. Uma propriedade é impura se é dita existir em termos de uma relação com alguma *substância* particular, de outro modo é pura. Propriedades relacionais, por sua vez, são aquelas que envolvem algum tipo de *relação entre os objetos*, como por exemplo "x é maior que y", ou alguma menção à localização espaço-temporal. Por outro lado, a qualidade que um objeto físico tem quando possui uma certa forma (*e.g.,* ser triangular), ou uma certa massa, é uma propriedade não relacional desse objeto. Outrossim, propriedades intrínsecas de um objeto são aquelas que o objeto tem apenas em virtude da sua natureza; apenas em virtude de ser o objeto que é, ou seja, em virtude da sua existência e identidade própria, e não em virtude da existência ou identidade de algum objeto totalmente distinto dele. As propriedades extrínsecas ou externas de um objeto são aquelas que ele possui em virtude, pelo menos parcialmente, da existência ou identidade de outros objetos totalmente distintos dele. As habituais propriedades de massa, composição molecular, forma etc., são propriedades intrínsecas de objetos físicos. Mas a qualidade que uma pessoa tem quando é alta, ou a qualidade que um objeto tem quando está em repouso, são propriedades extrínsecas da pessoa ou do objeto. Algumas propriedades intrínsecas são também impuras, mas todas as propriedades não relacionais são puras (*cf.* (MENDONÇA, 2009).).[11] Uma vez que admitamos propriedades relacionais, nós radicalmente aumentamos o alcance do quantificador $\forall F$ e ampliamos, assim, o que podemos discernir. Neste caso, embora dois elétrons possam ser qualitativamente indiscerníveis, se um está a um metro de distância de uma terceira partícula, enquanto o outro, por exemplo, está a meio metro, estes elétrons podem ser distinguidos por tal propriedade relacional (*cf.* (WILLIAMSON, 1998)). No decorrer deste texto, e em particular no capítulo 3, novamente discutiremos mais a questão das propriedades relacionais no universo atômico.

De toda forma, deixando a auto-identidade de lado, dependendo das propriedades F que caem sob o quantificador podemos listar três diferentes 'formas' possíveis de PII (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, cap. 1). A forma mas fraca, denotada por PII(1), estabelece que não é possível haver dois indivíduos possuindo todas as propriedades e relações em comum. A segunda forma, PII(2), exclui desse conjunto aquelas propriedades que podem ser descritas como espaço-temporais. Por fim a forma mais forte do princípio, denotada por PII(3), assume como válidas somente propriedades monádicas, não relacionais. Segundo Forrest (FORREST, 2011), entre as várias possibilidades, as duas que parecem ser de maior interesse são a versão forte do princípio (que para ele se restringem a somente propriedades intrínsecas puras) e a fraca (somente as propriedades puras). Se permitirmos também propriedades impuras, diz ele, o princípio irá se enfraquecer e trivializar. Além disso, diz Quinton (QUINTON, 1973, p.25), Leibniz foi impelido a tomar o princípio apenas em sua forma mais estreita, qualitativa, negando que o espaço e o tempo eram elementos individualizantes. Passa por isso sua visão de que o tempo e o espaço não eram totalmente reais e, assim, as propriedades posicionais estavam mais ou menos enganando as aparências apresentadas por qualidades subjacentes. Entretanto, se a referência a propriedades for entendida de um modo a incluir somente propriedades qualitativas que são aplicáveis a muitas coisas, não há razão para supor que o princípio seja necessariamente verdadeiro. Isto porque podemos supor, *e. g.*, duas mesas iguais que podem passar por qualquer escrutínio elaborado com a ajuda do mais imaginável refinamento técnico. Desta forma, tirando o fato de uma estar em um canto e outra estar no centro da sala, por exemplo, não teríamos nenhuma razão para negar que as duas são iguais, contrariando assim o PII (ou uma versão dele). Como falado acima, a questão que se põe é exatamente esta: se podem existir dois indivíduos materialmente indiscerníveis, mas distintos, e o exemplo de

[11] Convém enfatizar que tais distinções nem sempre são claras e consensuais.

Black parece mostrar que sim.

Não obstante, as evidências mais duras e perturbantes contra o PII são mesmo as que vêm da física:

> O caso é pior para fótons, os quais são bósons e podem estar temporariamente indiscerníveis em todas as suas propriedades materiais, como também em suas posições e relações uns com os outros. Eles podem se tornar uma 'sopa' superposta: um laser é somente uma sopa muito homogenia de fótons. Já a intensidade de um feixe de laser depende de quantos fótons existem no laser [...]. Um Leibniziano pode manter a indiscernibilidade aqui somente se negar que os fótons são indivíduos: falar de fótons [como indivíduos] deve entaõ ser somente um dispensável *façon de parler* dos físicos. (SIMONS, 1998).

Tal posição, por exemplo, também é defendida por French e Krause (FRENCH e KRAUSE, 2006), e no futuro, como já enfatizado, exploraremos com mais detalhes essas características dos objetos da MQ. Por fim, citaremos um último argumento contrário ao princípio, a saber, que o mesmo apela ao empirismo. Como poderíamos ter uma evidência empírica para dois itens indiscerníveis? Se pudéssemos, empiristas poderiam dizer, tais itens deveriam estar diferentemente relacionados e, por isso, teriam que ser dois e assim possuir alguma diferença (como por exemplo, espaço-temporal). Não obstante, uma resposta a tal crítica vem de Forrest (FORREST, 2011), para quem a premissa não deve ser proposta como algo melhor que apenas contingentemente verdadeira: podem haver situações, diz este autor, nas quais existem razões teóricas para acreditar em itens indiscerníveis como uma consequência da teoria que melhor explica os dados empíricos. Como veremos mais à frente, este também parece ser o caso da MQ.

2.5 IDENTIDADE ATRAVÉS DO TEMPO

Talvez um dos mais interessantes problemas da identidade concerne à questão da identidade através do tempo. Como se percebe facilmente, é mais intuitivo afirmarmos que observamos os indivíduos como continuantes do que propriamente como fases momentâneas ou fatias temporais, de modo que por isso concebemos as coisas como retendo sua identidade através do tempo. Segundo Hirsch (HIRSCH, 1982, p. 3), quando indagamos em que consiste a identidade através do tempo de um objeto físico, estamos perguntando sobre a *unidade de uma carreira* de um objeto físico; uma carreira que podemos pensar como sendo composta de uma sucessão temporária de estágios momentâneos. Estas sucessivas partes ou estágios de tal carreira de um objeto, diz esse autor, devem se conectar de algum modo particular, pois caso contrário não haveria nada que nos prevenisse de combinar em uma única carreira os estágios mais novos de um objeto com os últimos estágios de um objeto diferente. Sendo assim, pode-se dizer que nem toda sucessão temporal se relaciona com um particular objeto persistindo no tempo: somente a certas sucessões privilegiadas é designado o status privilegiado de se conectarem ao mesmo objeto persistente.

Neste livro de Hirsch (*op. cit.*), este autor tenta então entender qual é a natureza desta 'unidade criadora de relacionamentos' que vincula os estágios sucessivos de uma carreira de um único objeto. Como tais ideias não são muito usuais em textos que trabalham com a identidade de objetos através do tempo, vejamos com mais detalhes como ele tenta compreender tal 'unidade criadora de vínculos' seguindo de perto seus argumentos. A primeira coisa que se conclui, diz ele, é que os estágios contínuos de uma única carreira devem ser qualitativamente muito similares e espacialmente muito próximos. Em um grande período de tempo, um objeto pode significativamente alterar suas características qualitativas e sua localização espacial, mas parece que tais alterações devem ocorrer continuamente e em pequenos graus. Temos então nossa primeira e mais simples possibilidade na análise da persistência dos objetos (chamada pelo autor de "análise contínua simples" (HIRSCH, 1982, p. 8)), a qual pode ser articulada da seguinte forma: uma sucessão *S* de objetos-estágio corresponde a estágios na carreira de um único objeto persistente se, e somente se, (1) *S* é espaço-temporalmente contínuo; e (2) *S* é qualitativamente contínuo. Podemos agora considerar como a análise contínua simples se aplica a proposições como "algo era uma mesa vermelha no tempo *t*, e uma mesa verde no tempo *t'* ". De acordo com a concepção acima, esta proposição é verdadeira se, e somente se, for possível traçar uma sucessão *S* de estágios do objeto, tal que *S* contém um estágio-mesa vermelho no tempo *t*, um estágio-mesa verde em *t'*, e *S* é espaço-temporalmente e qualitativamente contínuo. A noção de "caminho no espaço-tempo" também é frequentemente empregada para nomear essa visão de "sucessão de objetos-estágio". Assim, podemos definir um caminho espaço-tempo como uma série de lugares-tempo, *i.e.*, uma série de pares ordenados (*p, t*), onde *p* é a região do espaço e *t* é o momento do tempo. Dizer que o caminho espaço-tempo *P* é espaço-temporalmente contínuo, significa dizer que onde (*p, t*) e (*p', t'*) são lugares-tempo em *P*, então se *t* é muito próximo de *t'*, *p* é muito próximo a *p'*. E dizer que *P* é qualitativamente contínuo, significa dizer que onde (*p, t*) e (*p', t'*) são lugares-tempo em *P*, então se *t* é muito próximo a *t'*, o objeto que ocupa *p* em *t* exemplifica qualidades em *t* que são muito similares às qualidades exemplificadas em *t'* pelo objeto que ocupa *p'* em *t'* (*cf. ibid.*, p.

9).

De toda forma, o que significa essa continuidade qualitativa acima requerida? Ou, em outras palavras, o que significa "exemplificar qualidades muito *similares* em dois tempos distintos"? Uma carreira de um objeto exibe continuidade qualitativa, diz Hirsch (p. 11), enquanto ou o objeto não muda qualitativamente, ou se muda, enquanto suas mudanças são contínuas. Uma mudança qualitativa de um objeto é contínua se, em um dado tempo, o objeto é muito similar ao modo que ele era num tempo vizinho anterior. Se definirmos uma 'pequena mudança' como uma mudança de um objeto de um estado qualitativo para um estado diferente, mas muito similar, então podemos dizer que uma troca contínua qualitativa é uma troca que pode ser pensada como sendo dividida em séries de pequenas trocas. Mas o que isso significa? Pode significar (a) que as mudanças qualitativas contínuas são mudanças que podem ser pensadas como divididas em uma série de mudanças qualitativas tão pequenas como se queira (este é o que o autor chama de "sentido forte"); ou (b) que as mudanças qualitativas são mudanças que podem ser divididas em séries de pequenas mudanças, mas não necessariamente em séries de mudanças tão pequenas como se queira (este seria o "sentido fraco"). A questão que se põe agora é se interpretamos a condição de continuidade qualitativa da nossa análise como requerendo continuidade de troca no sentido forte ou no sentido fraco. No caso de uma árvore que pega fogo, por exemplo, ou quando um dente vai nascendo em uma pessoa, temos exemplos de mudança de suas várias qualidades (como volume, formato etc) no sentido forte. Aqui, uma das questões famosas é se uma mudança que é contínua no sentido forte, a qual não envolve 'pulos' perceptíveis, necessita ter um número infinito de estados qualitativos intermediários entre quaisquer dois estados qualitativos diferentes (p. 10). Mas nem sempre, é claro, devemos requerer de um objeto que sua mudança seja contínua no sentido forte. É o caso de quando, por exemplo, um objeto tem uma parte adicionada ou uma parte retirada (como um galho de árvore que cai, ou quando se coloca um rádio novo em um carro): nestes casos temos um elemento de descontinuidade e uma mudança no sentido fraco.

De toda forma, muitos pontos levantados com relação à continuidade qualitativa aplicam-se também, diz Hirsch, à questão da continuidade espaço-temporal requerida na análise contínua simples. Um objeto exibe continuidade espaço-temporal se ele não se move ou se move continuamente. Se definirmos um 'pequeno movimento' como um movimento no qual um objeto passa de um lugar ocupado para ocupar um outro lugar diferente, mas muito próximo, então podemos definir um movimento contínuo como um movimento que pode ser pensado como dividido em uma série de pequenos movimentos. Da forma similar à anterior, uma continuidade espaço-temporal forte é exibida por um objeto somente se seus movimentos são divisíveis em movimentos tão pequenos como se queira. Um tipo mais fraco de continuidade espaço-temporal pode ser exibido se os movimentos dos objetos envolvem um pequeno 'salto' de um lugar para um outro lugar muito próximo (*op. cit.*, p. 16). Uma tentativa de explicar a ideia de dois lugares como sendo "muito próximos" pode ser dada a partir da noção de dois lugares se sobrepondo um em relação ao outro: dois lugares são ditos se sobreporem um ao outro se eles têm alguma parte em comum. De um modo mais formal, podemos dizer que a carreira de um objeto *x* exibe uma continuidade espaço-temporal no sentido fraco se, para qualquer tempo *t* na carreira de *x*, existe um intervalo de tempo próximo a *t*, tal que para qualquer *t'* no intervalo, o lugar no qual *x* ocupa em *t* sobrepõe quase inteiramente o lugar que *x* ocupa em *t'*. No caso do sentido forte, a ideia primária é que se dois lugares *p* e *p'* são idênticos uns aos outros (maximamente próximos) eles irão se sobrepor completamente. Assim, podemos definir que a carreira de um objeto *x* exibe uma continuidade espaço temporal no sentido forte se para qualquer tempo *t* na carreira de *x*, e para qualquer número positivo *n* tão pequeno quanto se queira, existe um intervalo de tempo próximo a *t*, tal que para qualquer *t'* neste intervalo, o tamanho que não se sobrepõe entre o lugar em que *x* ocupa em *t* e o lugar no qual *x* ocupa em *t'* é menor que *n* (*cf. ibid.*, p. 17). Esta definição, é claro, é limitada. Suponha novamente que uma árvore tenha um galho em *t*, mas não após (em *t'*). Então para qualquer momento *t'* após *t* (não importa quão próximo *t'* é de *t*), o tamanho não sobreposto entre o lugar ocupado pela árvore em *t* e o lugar ocupado por ela em *t'* deve ser igual ao tamanho do galho perdido. Sendo assim, neste caso, não podemos tomar o tamanho não sobreposto entre estes lugares tão pequeno quanto se queira para se ter *t'* suficientemente próximo a *t*.

Logo se vê que mesmo colocando as definições acima em modos mais formais, ainda assim é difícil fazê-las captar todas as características intuitivas que temos sobre a continuidade. Além disso, será que a continuidade espaço-temporal qualitativa é realmente necessária para a persistência de um objeto? Existem alguns tipos de casos, afirma Hirsch (*op. cit.*), que parecem mostrar que este requisito é 'desrespeitado' e que mesmo assim se imagina que os objetos retêm suas identidades mesmo após serem separados e, posteriormente, colocados novamente juntos (ou seja, mesmo após suas carreiras se tornarem radicalmente descontínuas). Tome por exemplo o caso de uma televisão que é mandada à fábrica para conserto e, para tanto, é desmontada e posteriormente remontada. Embora exista um definitivo lapso de continuidade neste caso, não parece claro qual tipo de continuidade é perdida. Quando a TV é inicialmente desmontada, e suas partes são colocadas relativamente próximas, segundo Hirsch estamos inclinados a dizer que a TV continua a existir, embora em uma forma fragmentada.[12] Se este for o caso, devemos renunciar somente à continuidade espacial mas não à continuidade temporal. Agora, quando as partes da TV são dispersadas, por exemplo, no primeiro andar da fábrica, e a mesma TV é remontada posteriormente no terceiro andar, não temos nenhuma inclinação a dizer que a TV continuou a existir durante todo o tempo. Parece que neste caso devemos dizer que em algum ponto a TV desapareceu e, então, mais tarde voltou a existir. Aqui, a continuidade espaço-temporal é então definitivamente perdida pois não é verdade que os lugares sucessivamente ocupados pela TV se sobreponham de algum modo. Não obstante, talvez possa ser argumentado que neste caso a continuidade qualitativa não é perdida se afirmarmos que no momento que a TV volta à existência, ela é qualitativamente muito similar ao modo que era no momento em que desapareceu. Disto segue, diz Hirsch, que a definição acima de análise contínua simples deve ser 'estendida' no mínimo para dar conta de acomodar tais eventos. Segundo ele, em tais casos, podemos anunciar um tipo de "critério composicional", o qual permite dizer que x é idêntico com y (até mesmo quando o critério de continuidade não se aplica) se quase todas as partes — ou talvez a maior parte — de x sejam idênticas às partes de y (*cf.* (HIRSCH, 1982, p. 23ss.).). Agora é então necessário verificar a identidade entre *as partes* de x e y. Considerações composicionais se tornam desta forma dependentes das nossas mais primárias considerações sobre que bases a identidade composicional pode ser entendida, de modo que assim parece retornamos ao nosso problema inicial de identidade dos componentes mais primários das coisas. Outrossim, posteriormente, veremos que segundo algumas experiências não há modo algum de seguir uma partícula quântica em movimento o tempo todo, de forma que não é possível garantirmos que em um certo estágio de uma sucessão S, por exemplo, uma outra partícula não tomou o lugar da primeira.

Apenas para encerrar esta seção sobre a identidade através do tempo, citaremos rapidamente o pensamento de alguns filósofos consagrados. Hume (HUME, 2000 (1739), Livro I, parte IV, Seção VI, § 7, p. 287), por exemplo, achava por sua vez que a identidade de objetos através do tempo era uma ficção. Para este autor, é conveniente "criar a simulação de identidade" [feign identity] quando falamos de objetos que "são os que consistem em uma sucessão de partes, conectadas por semelhança, contiguidade ou causalidade" e que, apesar de supormos que eles continuem os mesmos, "somente por hábito podemos afirmar que tais sucessões se referem ao mesmo objeto". No mesmo espírito, Whithehead e Russell dizem que a noção das coisas persistindo é

[12]É claro que tal posição de Hirsch é polêmica. Podemos também dizer, com bons argumentos, que nesse momento a TV não existe mais.

uma daquelas relíquias aristotélicas do qual a filosofia deveria ser purgada (*cf.* (QUINTON,1973, p.71)). Como visto, tais posições são desta forma contrárias à visão de que a identidade através do tempo possa ser dada às coisas através de algum identificador imutável e (presumivelmente) não observável. Aristóteles, por sua vez, distinguiu as mudanças de um objeto no tempo como "acidentais" e "essenciais": mudanças acidentais são as que *não* resultam em uma mudança na identidade em si de um objeto, como por exemplo quando um carro está sujo e é lavado. Mudanças essenciais, por contraste, são aquelas que *alteram* a identidade em si do objeto, como por exemplo quando uma árvore queima (*cf. ibid.*). Não somente Whitehead e Russell foram contrários a tal visão, mas muitos outros filósofos consideraram essa diferenciação entre mudanças acidentais e essenciais como problemática e desenvolveram outras soluções para o problema da identidade. Não comentaremos mais sobre tais teorias, as quais podem ser vistas na bibliografia citada no final desta tese.

De todo modo, uma outra abordagem possível ao problema da identidade através do tempo é levar em conta a questão temporal 'formalmente', no sentido de *assumir o tempo como mais uma variável na discussão*. Neste sentido, quando levado em conta a variável "tempo" na relação de identidade, os objetos podem ser diferentes e ainda assim ser 'o mesmo' objeto: por exemplo, tome uma caneca que em um certo momento quebra sua alça. Esta caneca pode estar na relação "com alça" em t_1, mas não estar na relação "com alça" em t_2: como se referem a tempos diferentes, estas duas relações não seriam incompatíveis (*cf.* (GALLOIS, 2011).). De certo modo, pode-se manter que as 'duas' canecas nunca são idênticas, mas têm somente uma parte temporal em comum. Lewis (*ibid.*), é um dos mais famosos autores que invocam a visão de que os objetos, além de suas partes espaciais, também têm partes temporais ou estágios. Assim, é possível que um objeto seja, por exemplo, redondo em t_1, e quadrado em t_2: o objeto redondo só existe em t_1, e o objeto quadrado somente em t_2. Não há nenhum problema em partes temporais mudarem seu formato, haja vista que um objeto seria uma sequência interrelacionada de tais partes temporais. Em invocar partes temporais ou estágios, Lewis endossa uma tese que tem sido chamada de "quadri-dimensionalista" [four-dimensionalism], apesar de que esta expressão tem sido aplicada de várias formas diferentes, e nem todas se referem à identidade através do tempo. Na visão de Lewis, o "quadri-dimensionalismo" é a tese de que um objeto se estende com suas partes espaciais nas três dimensões espaciais, bem como se estende no tempo (ou na dimensão "tempo") com suas partes temporais. A partir desta teoria, é possível dizer que o famoso navio de Teseu — com suas partes quadri-dimensionais — é um objeto ramificado e divisível em um número indefinido de modos:

Aqui está o modo como um quadri-dimensionalista

> como Lewis explica o navio de Theseu. Neste caso, existem inicialmente dois navios indiscerníveis. O primeiro é um extenso navio quadri-dimensionalista localizado onde o navio original se encontra, que acaba coincidindo somente com o navio remontado. O segundo, também inicialmente localizado onde o navio original está localizado, acaba coincidindo com o navio substituído. Temos, assim, um objeto em um ramo quadri-dimensionalista Y, com um navio constituído pela haste do ramo juntamente com uma ramificação, e outro navio constituído também pela haste do ramo, só que agora com o ramo restante (GALLOIS, 2011).

A tentativa de levar em conta o tempo 'formalmente' nesta discussão, nos remete ao discurso modal, tema da próxima seção.

2.6 MODALIDADES

Algumas alegadas soluções dos problemas da identidade se dão através de modalidades. Como é sabido, na interpretação do discurso modal, pode ser feita menção à ideia da "identidade através dos mundos possíveis" e, se o discurso modal é interpretado neste sentido, torna-se natural reconhecer uma declaração atribuindo uma propriedade modal para um indivíduo como assertando a identidade deste indivíduo através de tais mundos. Nesta visão, a afirmação "João pode ter sido um milionário" asserta que existe um mundo possível na qual um indivíduo idêntico a João é um milionário. Entretanto, existem dificuldades que tornam essa abordagem problemática. Por exemplo, é razoável supor que um artefato complexo — como uma bicicleta — pode ser (ou é) feito de partes diferentes. Mas agora considere uma série de mundos possíveis começando com o mundo atual, com cada um contendo uma bicicleta apenas ligeiramente diferente do mundo possível anterior, e sendo o último mundo da sequência um mundo em que tal bicicleta é composta de partes totalmente diferentes da do mundo atual.[13] Desde que identidade é transitiva, não podemos dizer que cada bicicleta é idêntica à bicicleta do mundo possível vizinho, mas não é idêntica à bicicleta correspondente em mundos mais distantes. Com isso, parece que ou devemos adotar um essencialismo mereológico extremo, para o qual nenhuma diferença de partes é possível para um indivíduo, ou rejeitar a interpretação do discurso modal como assertando identidade através de mundos possíveis (*cf.* (NOONAN, 2011).). Não obstante, poderíamos responder tal crítica adotando um tipo de "relação de similaridade" (que seria mais fraca que a de identidade): neste

[13] Algo novamente semelhante ao navio de Teseu.

caso, poderíamos dizer que a bicicleta pode ter algumas partes diferentes de acordo com cada mundo possível — sendo assim *similar* às outras de outros mundos possíveis — sem termos que dizer com isso que esta bicicleta deva ser totalmente diferente das outras (*ibid.*).

No entanto, esta solução não é tão eficiente como aparenta ser. Uma das coisas que Kripke defendeu é exatamente a tese de que é ilegítimo inferir de declarações de identidade que tenham seu *valor* contingentemente, que a relação de identidade possa valer contingentemente: dito de outra forma, *a relação de identidade é uma relação necessária* (*cf.* (GALLOIS, 2011).). Para ver como isso se verifica, considere uma estátua, Golias, e a argila da qual ela é composta. Golias e a argila coincidem em suas extensões espaço-temporais. Somos tentados a concluir que esses dois objetos são idênticos, apesar de que, é claro, eles poderiam também não ter sido. Golias poderia ter sido enrolado em uma bola e destruído, mas a argila poderia continuar a existir. Desta forma, poderíamos defender que a identidade entre a argila e Golias, se admitida, deveria ser reconhecida como meramente contingente. Mas Kripke exatamente mostrou que tal posição é equivocada: para ele, quando os termos que acompanham o sinal de identidade forem "designadores rígidos", uma declaração de identidade, se verdadeira, tem que ser *necessariamente verdadeira*. A identidade — e a distinção — devem ser relações necessárias: coisas que são de fato idênticas, não poderiam ter sido distintas (ou dito de outra forma, x e y não podem ser contingentemente idênticos: eles devem ser idênticos em todas as circunstâncias (WILLIAMSON, 1998). De um modo mais detalhado, poderíamos oferecer um argumento um pouco mais formal para mostrar que não existe identidade contingente. Eis o argumento normalmente referido como o "argumento modal para a necessidade de identidade" (GALLOIS, 2011). Suponha (1) $a = b$. Como cada coisa é necessariamente idêntica a si mesma, então temos (2) $\Box(a = a)$. Assumindo $(\lambda x \phi)$ como significando "é um x tal que ϕ" (onde ϕ é alguma fórmula lógica na qual x é uma variável livre), obtemos (3) $(\lambda x \Box(x = a))a$. Dado que na Lei de Leibniz, se (1), então a e b partilham de todas as propriedades em comum, então (1) e (3) gera $(\lambda x \Box(x = a))b$, o que por sua vez gera (5) $\Box(a = b)$. Logo, como já afirmado, se $a = b$, então a é necessariamente igual a b. Existem várias tentativas de utilizar operadores modais na mecânica quântica, em especial a de van Fraassen, que usa a noção de "situação possível". O leitor pode consultar as obras (BUENO, 2000) e (VAN FRAASSEN, 1991) se quiser maiores detalhes.

2.7 O USO DE SORTAIS

Uma última solução possível aos problemas da identidade que citaremos aqui é a que parte da ideia de que devemos fazer uso de sortais em nossas discussões. Como se sabe, os filósofos também debatem sobre quais são os *conceitos* que podem ou não persistirem através do tempo. Por exemplo, um dos conceitos que não podem são "ouro" (oposto à quantidade de *peças* de ouro), "chuva" e "neve". Para tais termos, não é possível perguntar "quantos *F* existem?" (onde *F* é o conceito em questão). Pelo contrário, a outros conceitos como de "cavalo" ou "estátua", pode existir uma resposta à questão "quantos *F* existem?". Desta feita, estes últimos conceitos são normalmente chamados de *conceitos sortais*. Conceitos sortais podem ser divididos em dois tipos: *sortais de fase* e *sortais de substância*. Sortais de fase, como por exemplo o sortal "criança", é um tipo de sortal em que o objeto pode deixar de cair sobre ele sem por isso deixar de existir: uma pessoa pode deixar de ser criança, sem por isso deixar de existir. Nos sortais de substância, pelo contrário, se um objeto cai sobre ele, ele o faz para sempre (como por exemplo sobre o sortal "ser humano") (GRANDY, 2008).

Mas, como é definido um sortal? Tal pergunta é de extrema importância, haja vista que uma análise completa e adequada da noção de persistência de um objeto é dependente de sermos hábeis, no mínimo, de conseguir caracterizar propriamente tal objeto. Além disso, como vimos, a sugestão que advém de nosso conceito intuitivo de objeto-identidade é a que do começo ao fim de suas mudanças um objeto deve permanecer do mesmo tipo: satisfazendo o mesmo termo sortal. Isso nos permite explicar o que significa dizer que dois objetos (ou dois objetos-estágio) são do mesmo tipo: a sucessão que combina estágios-carro com estágios de partes-de-carro não corresponde a um objeto persistindo em nossa linguagem, pois envolve a combinação de objetos-estágio de diferentes tipos (diferentes sortais). Por sua vez, uma sucessão contínua de árvores-estágio corresponde à carreira de uma árvore persistindo no tempo porque todos os objetos-estágio nessa sucessão caem sobre o termo sortal "árvore" (*cf.* (HIRSCH, 1982, p. 34ss.).).

Hirsch (*op. cit.*), mostra assim uma definição (a regra Sortal) que tenta capturar a 'ideia de continuidade sortal' que estamos tentando construir: uma condição suficiente para a sucessão *S* de objetos-estágios corresponder a estágios na carreira de um único objeto persistindo é que (1) *S* é espaço-temporalmente contínuo; (2) *S* é qualitativamente contínuo; e (3) existe um termo sortal *F* tal que *S* é uma sucessão de *F*-estágios (HIRSCH, 1982, p. 36). Dito de outra forma, em resumo, a regra nos permite traçar a carreira de um objeto por seguir um caminho contínuo no espaço-tempo caindo sob um mesmo sortal.[14] Outrossim, uma definição de sortal pode ser: "um termo geral F é sortal" significa que "é uma verdade conceitual (uma regra da linguagem) que qualquer espaço-temporal e qualitativamente contínua sucessão de F-estágios corresponde a estágios na carreira de uma única persistente F-coisa" (*ibid.*, p. 34ss). Com isso, podemos entender porque termos como "árvore", "caminhão" e "carro" são sortais, mas termos como "marrom" e "na garagem" não são. É claro que percebemos imediatamente que os primeiros termos são substantivos, e os últimos não são.

Interessante notar como a não dispersividade, diz Hirsch (*ibid.* p. 40), realmente é uma condição necessária para um termo ser um sortal (apesar de que, como vimos na regra acima, não é certamente uma condição suficiente). Torna-se claro porque substantivos típicos como "árvore", "caminhão" e "carro" são peculiarmente aptos a funcionar como sortais: estes termos são não-dispersivos. Isto é também evidenciado pelo fato que um termo como "árvore" é um substantivo contável paradigmático, o que significa que existe uma resposta completa e clara para a questão "quantas árvores existem em uma dada região?". A não dispersividade de nossa contagem padrão substantival é o que garante que podemos empregar esses substantivos como sortais e traçar carreiras não ambíguas sobre eles, diz este autor. Por contraste, a dispersividade dos então chamados "substantivos massivos" (como "água", "madeira" e "lama") desqualifica estes termos para funcionarem como sortais. Entretanto, novos sortais podem ser trazidos à linguagem e velhos podem ser retirados, de modo que pode permanecer irresoluto se um dado termo pode funcionar como um sortal ou não. Com efeito, alguns termos podem ser tão ambíguos a ponto de muitas vezes eles funcionarem como sortais e muitas vezes não, e sortais temporários podem ser trazidos à baila para servir a uma necessidade momentânea. Na verdade, um sinal positivo da adequação da regra sortal é precisamente que esta nos ajuda a descrever e explicar a vaguidade de nosso esquema de identidade, e uma resposta preliminar para a questão específica sobre sortais — a qual pode ser vista como no mínimo satisfazendo superficialmente — é que um conceito não dispersivo tende a figurar como um sortal em nossa linguagem enquanto esse conceito for importante para nós de algum modo prático ou de um ponto de vista teórico. Todavia, nossa dependência sobre a regra sortal não é de modo algum absoluta (*cf.* (HIRSCH, 1982, p. 44).). Não obstante, é interessante ver que a partir dessas definições de como um termo pode ser considerado um sortal ou não, não poderíamos qualificar como sortais termos como "elétrons", "prótons" e "nêutrons". Com efeito, como já alertamos, segundo as experiências da física (bem como segundo a própria teoria da MQ) não é possível

[14] Escusado dizer que anteriormente já discutimos a questão de como descrever um caminho contínuo no espaço-tempo.

seguir um elétron, por exemplo. Além disso, também fica restrita a aplicação da nossa ideia de "contagem padrão substantival" para tais objetos, de modo que a regra sortal nestes casos se esvanece. Não discutiremos as 'impossibilidades de sortalidade' para tais objetos microscópicos aqui, mas sobre esse assunto sugerimos ao leitor consulta a obra de French e Krause (FRENCH e KRAUSE, 2006, p.344ss).

Uma última questão interessante que abordaremos aqui é se podemos aplicar o conceito de identidade de um objeto físico através do tempo *mesmo sem ter conhecimento* do tipo de objeto (ou de sortal) com o qual estamos lidando. Como vimos, foi defendida a posição de podemos aplicar a regra sortal para um objeto somente enquanto reconhecermos (no sentido da identidade/sortalidade) qual o tipo de objeto que estamos lidando, já que somente assim podemos então propriamente "traçar o objeto" sobre o sortal. Hirsch, no entanto, sustenta que também existe uma importante (embora limitada) extensão para a qual podemos aplicar nosso conceito de identidade aos objetos *sem ter que reconhecer qual o tipo de objeto ele é*. Não obstante, esta proposta não irá implicar em um repúdio completo da análise sortal acima desenvolvida: ainda assim, diz o autor, aquela é a única proposta que pode dar uma descrição relativamente completa e acurada do nosso conceito de persistência. De toda forma, a ideia da "análise sortal-neutra" por ele definida irá ser hábil — mesmo que providenciando não mais que uma conta *parcial* do nosso conceito de persistência — a capturar o núcleo básico da ideia de que *podemos reconhecer e identificar um objeto físico mesmo não sabendo de que tipo ele é*.

A tese de Hirsch (HIRSCH, 1982, p. 73), a saber, que é possível enfraquecer a extrema posição de que nosso critério de identidade seja totalmente dependente de diferenciações sortais, pode ser defendida pelo fato de que uma pessoa frequentemente poderá ser capaz, diz ele, de traçar corretamente a carreira de um novo tipo de objeto sem necessitar qualquer informação sobre o critério de identidade relacionado a esse novo tipo de objeto. Podemos, por exemplo, imaginar uma criança nascida em uma fazenda que nunca viu ou ouviu um carro. Ela vê um carro pela primeira vez na vida: um carro azul e grande. Não há dúvida que esta criança está imediatamente na posição de dizer coisas como "a *coisa* azul e grande está se movendo através do campo". Nestas circunstâncias, pode parecer natural assumir que a criança está usando a expressão "esta coisa azul e grande" para se referir ao mesmo objeto que podemos nos referir como "este carro". Além disso, ela parece estar perfeitamente apta em traçar o caminho do carro (ou da coisa) que se move através do campo (como requerido na regra acima), e reidentificá-lo em outros períodos ou em circunstâncias mais complicadas. Ela parece, em resumo, capaz de reconhecer o objeto sem o alegado critério de identidade requerido para o termo sortal "carro". A explicação mais simples é que ela está empregando o conceito de identidade que, no mínimo de qualquer modo radical, não depende de sortais (talvez seja sim dependente de uma descrição definida *a là Russell*, mas não discutiremos isso aqui).

Assim, a posição extrema que Hirsch contesta é exatamente a ideia de que nosso conceito de persistência deva ser totalmente alicerçado sobre diferenciações sortais. Em outras palavras, o que ele nega é a ideia de que para sabermos "o que um objeto é", devemos ser hábeis a aplicar um tipo especial de termo para o objeto (*i. e.*, um sortal), e que é unicamente por referência a um sortal que podemos entender o que significa traçar um caminho para um objeto. Esta visão, diz ele, parece até mesmo implicar que não poderíamos nem mesmo formular uma aproximação útil para nosso critério de identidade sem apelar para sortais, o que não é verdade. Segundo ele, a nossa classificação sortal afeta nosso critério de identidade em vários aspectos significantes, mas deveria também ser possível formular alguma regra geral sustentando a identidade que nos evite estas classificações sortais; uma regra que, se não correta sempre, deva valer em quase todos os casos (*ibid.*, p. 73). Assim, para Hirsch, também deve ser possível formular uma análise de nosso conceito de identidade que seja independente das diferenciações sortais e que talvez assim, podemos dizer, poderia ser aplicada até mesmo aos objetos quânticos.

Todavia, vale ressaltar que o que Hirsch discute durante toda a sua obra é um critério *observacional* da identidade (e sendo assim, pode-se dizer que é um modo 'clássico' de identidade). Neste sentido, segundo ele, temos um critério observacional para um julgamento de identidade se formos hábeis para explicar estes critérios por referência exclusiva a tipos diretamente observáveis. Isto parece equivalente a dizer que critério observacional não deve ir além das propriedades manifestas das coisas ordinárias (*e. g.* algumas coisas (propriedades) sendo uma mesa), e das manifestas relações ordinárias entre tais coisas (*e.g.* espacial e temporal). Assim, embora não se tenham critérios observacionais diretos de identidade para alguns tipos de matéria, para esse autor ainda pode continuar a ser possível providenciar algum nível científico de análise ou explicação de nosso conceito de "matéria persistindo" se pudermos fazer uma análise de tal persistência em termos teóricos (perfazendo assim um 'critério de identidade teorético'). Dado seu caráter microscópico, interessante seria tentar comprovar se não teríamos tal critério teorético de identidade para pelo menos algumas partículas quânticas.[15]

[15] No entanto, para Hirsch, não necessariamente devemos apelar para a ciência de modo a lá encontrar os nossos critérios de identidade para *todas* as coisas. Diz ele (*ibid.* p. 136): "As leis da física (e da química) que descrevem o comportamento da matéria não são, é claro, as únicas leis da ciência que existem, embora normalmente se tenha dito que todas as leis são ultimamente

2.8 CONCLUSÃO

No presente capítulo, como se viu, não buscamos detalhar excessivamente as teorias tratadas, como também não procuramos apresentar todas as teorias, vertentes ou facetas relativas ao problema da identidade. Isso além de tarefa hercúlea, não é o objetivo desta tese, de modo que muitas outras abordagens foram deixadas deliberadamente de fora (embora para aquelas que mencionamos, tentamos sempre dar uma abordagem que não consta nos livros mais usuais sobre os temas). Nosso objetivo nesta primeira parte, como dito logo no início dessa discussão, foi apenas introduzir o problema de um ponto de vista mais filosófico que formal, tendo esse trecho apenas um caráter expositivo e explicativo (e de forma alguma resolutivo). De todo modo, como visto durante o desenvolvimento textual acima, pontuamos aqui e acolá passagens em que as teorias propostas parecem se enfraquecer perante a MQ: talvez tais esmorecimentos fiquem mais claros ao leitor no futuro. Para o próximo capítulo, reservamos o trato de como a questão da identidade é trabalhada na matemática, lógica e teoria de conjuntos clássicas, e no que isso parece implicar, de modo que já introduziremos alguns temas principais desta tese.

---

reduzíveis às leis da física e da química. Podemos talvez pensar nas condições de identidade associadas a certos conceitos técnicos essenciais como "bactéria" e "célula" como sendo determinadas por necessidades teóricas da biologia, ao invés do modo que a identidade da matéria é determinada pelas necessidades teóricas da física. Mas penso que devemos resistir à possível sugestão de que até mesmo certas noções não-técnicas como "mesma árvore" e "mesmo gato" devam ser vistas como sendo ultimamente determinadas pelo modo como estas noções possam ser configuradas para figurar nas melhores leis da biologia. Esta sugestão pode possivelmente resistir no mínimo ao se manter a visão de que existe um sentido não-técnico (nível, parte) do conceito de "mesma árvore" ou "mesmo gato", que opera um tanto independentemente da teoria biológica, e que é determinada essencialmente por considerações relativamente sinceras de observáveis numa cobertura-sortal, ou em uma troca contínua mínima. Se é aceito que nosso conceito ordinário de persistência de um carro é essencialmente não afetado pela teoria física (por exemplo, pelo princípio de constância de massa), então que razão devemos ter para supor que nosso conceito ordinário de persistência de uma árvore é de algum modo dependente de uma teoria biológica? Parece que é mais plausível caracterizar todos os nossos conceitos ordinários de persistência de objetos usuais, sejam esses objetos naturais ou artificiais, como operando essencialmente independentemente das considerações teórico-científicas, e como sendo essencialmente definíveis em termos relativamente simples de cobertura-sortal, ou troca contínua mínima".

3 IDENTIDADE E INDIVIDUAÇÃO NAS TEORIAS FORMAIS CLÁSSICAS

3.1 LÓGICA E LÓGICAS

A noção de identidade, que como vimos dá origem a problemas filosóficos bastante intrincados e complexos, também está presente na lógica, matemática e teoria de conjuntos clássicas. Nestas últimas disciplinas, mesmo estando tal problemática revestida com roupagens mais formais, ela ainda reserva grandes dificuldades e se compromete com certas visões e intuições que temos da realidade que nos cerca; ou seja, com uma metafísica. Neste capítulo faremos uma discussão um pouco detalhada sobre o conceito de identidade tal como é considerado pela lógica, teoria de conjuntos e matemática tradicionais, e que está, assim, na base das teorias físicas usuais, tentando entender com o que tal conceito parece se comprometer: em particular, como veremos, com uma individualidade para seus objetos. Neste sentido, nos preocupa agora detalhar o que significa o conceito de identidade como *tese formal*, e não o conceito de identidade de um ponto de vista filosófico (tema já tratado anteriormente, embora a concepção formal da noção de identidade também esteja imersa em concepções filosóficas do mundo, tal como dissemos), ou o conceito de identidade do senso comum. Não obstante, neste capítulo, já iniciaremos a discussão de alguns pontos fundamentais à nossa tese, em particular a questão das estruturas rígidas e no que isso parece implicar: como defenderemos, também aqui em uma individualidade (no sentido de identidade) dos objetos presentes em tais estruturas matemáticas, de modo que de um modo ou de outro tal individualidade acaba sempre por aparecer em nossas ferramentas formais. Como enfatizaremos com mais detalhes à frente, a questão é exatamente que para o trato de algumas teorias (no nosso caso de estudo, a MQ), na qual segundo algumas interpretações parecem haver objetos que não poderiam ser tomados como indivíduos, seria bom que os manipulássemos em estruturas que não poderiam ser tornadas rígidas. Isso tudo será detalhado a partir de agora, de modo que começamos assim a tocar os temas principais do nosso trabalho.

Entretanto, é bom primeiramente ressaltar que não há uma caracterização precisa e unânime do que sejam a lógica clássica e/ou a lógica-matemática clássica (ou tradicionais), de modo que vários autores propuseram formas variadas de se definir tais áreas do conhecimento. Shapiro (SHAPIRO, 2009), por exemplo, define lógica clássica como sendo basicamente uma linguagem formal (ou informal) particular, juntamente com um sistema dedutivo e/ou uma semântica modelo-teorética [model-theoretic]. O sistema dedutivo, diz ele, procura de certo modo capturar, codificar ou simplesmente indicar quais inferências são corretas para uma dada linguagem, e a semântica, por sua vez, tenta capturar, codificar ou indicar o sentido ou as condições de verdade para no mínimo uma parte da linguagem. Essa 'forma' de definir lógica apresentada por Shapiro é uma das mais usuais: lógica é um conjunto de regras que permitem deduzir fórmulas de outras fórmulas já tidas em uma linguagem particular, juntamente com uma semântica que permite dizer quais dessas fórmulas são verdadeiras e quais são falsas (nessa semântica). Mendelson (MENDELSON, 1979, p. 1), por sua vez, no intuito de definir o que seja a lógica clássica, apresenta *primeiramente* uma definição que poderia ser dita mais 'popular': lógica é a análise dos métodos de raciocínio, de forma que a sistemática formalização e catalogação dos métodos válidos de raciocínio é uma das principais preocupações do lógico. Todavia, em geral, esta forma de se definir tal área do conhecimento não é a mais bem aceita pelos profissionais da área exatamente por ser muito restritiva e, na verdade, por ser uma definição um tanto quanto atrelada à forma como a lógica foi talhada em seu início: dir-se-ia, para tal, uma definição *à la* Aristóteles e *à la* escolástica medieval. Com efeito, para Hodges (HODGES, 1983 p. 2ss.), essa definição de lógica dada por Mendelson é uma visão mais "tradicional" desta disciplina: ela representa o que era a lógica para os antigos (de Aristóteles, passando pela Idade Média, até 1847). O que temos hoje, diz ele, é uma *lógica moderna*, iniciada nos trabalhos de George Boole (1815-1864), Augustus de Morgan (1806-1871) e de Charles Sanders Peirce (1839-1914), dentre outros, passando pelos chamados "teóricos de prova": Frege (1848-1925), Peano (1858-1932), Hilbert (1862-1943) e Russell (1872-1970), entre outros, até chegar aos "teóricos de modelo" [Model Theorists]: Skolem (1887-1963), Löwenhein (1878-1957), Gödel (1906-1978) e Tarski (1901-1983), entre outros. Todavia, o progresso da lógica — diz Hodges — fez com que ela tenha várias subdivisões e que hoje existam até mesmo lógicas alternativas, sendo assim difícil definirmos *ipso facto* o que é a lógica e qual a sua extensão. Com efeito, Newton da Costa,[1] por exemplo, define a lógica clássica de uma forma que pode ser dita 'ampliada'; com seu escopo abarcando até mesmo alguma teoria de conjuntos. Neste sentido, afirma ele, o que de maneira geral chamamos de uma "lógica de clássica" é o assim chamado Cálculo de Predicados de Primeira Ordem (com ou sem igualdade) — com algumas de suas extensões tais como o Cálculo de Predicados de Ordem Superior (teoria de tipos) —, juntamente com algum sistema usual de teoria de conjuntos,[2]

[1]Conversa pessoal com o autor. Veja também (DA COSTA, 1980), em especial os capítulos I e II.

[2]Tais como o de Zermelo-Fraenkel - ZF (com ou sem o Axioma da Escolha e os Urelemente), ou o de von Neumann-Bernays-Gödel, ou o de Tarski-Morse-Kelley, ou ainda o sistema ML de

somando-se às suas variantes secundárias com respeito ao simbolismo básico ou à mudança da base axiomática. Escusado dizer que tal definição não é consensual: por exemplo, será que deveríamos realmente incluir uma teoria de conjuntos como parte da lógica clássica? Sem sim, todas deveriam ser incluídas, ou apenas as mais 'usuais' (como ZF)? Difícil dizer, haja vista que algumas teorias se comprometem com algumas coisas que não estão presentes em outras.[3] Como é sabido, geralmente as definições pecam por dois lados: ou são muito extensas, de modo que acabam por assumir em seu escopo matérias que não são unanimadamente aceitas como fazendo parte do *definiendum*, ou são muito exíguas, falhando por deixar de fora assuntos que normalmente seriam aceitos como fazendo parte de tal área. No caso de tentar definir o que é a lógica, em especial a clássica, nesta curta apresentação já percebemos que parece que aqui também padecemos destes problemas. Com efeito, já alerta Mendelson (*ibid.*) que "no começo dos nossos estudos, definições impecáveis" têm pouco valor, e o melhor meio de se saber o que é a lógica matemática é começar a trabalhar com ela: com isso, diz ele, o estudante passará a entender os propósitos e o alcance de tal arcabouço teórico. Deste modo, pode-se dizer que neste autor a 'definição' do que seja lógica contém agora até mesmo um elemento pragmático: lógica é o que o lógico faz! Enfim, deixemos então de lado a tentativa de definir tal disciplina — haja vista que não é o propósito deste capítulo — e mantenhamos em mente (apenas por uma questão didática) essas várias formas de de se conceituar tal matéria.

À parte de tentar definir o que é a lógica clássica ou qual a sua extensão, pode-se encontrar no cerne de tal arcabouço teórico a *teoria da identidade*, que é denominada por muitos (e a denominaremos aqui) como teoria clássica da identidade — TCI.[4] A formalização da noção de identidade na lógica[5] é de suma importância e tenta capturar a visão 'informal' de identidade que o homem comum possui e que, provavelmente, é a que seria definida

Quine.

[3]Por exemplo, o sistema de Quine admite a existência de classes, enquanto que no sistema de ZF não são admitidos tais 'objetos' (ou melhor dizendo, no sistema de ZF uma classe não é um conjunto, e portanto não está na teoria). Veremos mais detalhes desta diferença durante esta tese.

[4]O uso da palavra "pode" nessa frase se deve ao fato de que não necessariamente precisamos ter uma "lógica com identidade". A TCI surge exatamente se *quisermos* formalizar (*i. e.*, assumir) a noção de identidade dentro da lógica clássica. Com efeito, podemos também usar uma lógica sem identidade e obter vários resultados e teoremas relativos a tal lógica sem essa noção: com efeito, os teoremas da completude e correção do Cálculo Quantificacional Clássico, por exemplo, não fazem uso do conceito de identidade. Isso ficará mais claro no decorrer deste capítulo.

[5]A partir de agora usaremos apenas o termo "lógica" para nos referir à lógica clássica. Quanto quisermos nos remeter às lógicas não-clássicas (tais como a paraconsistente ou a intuicionista), deixaremos explícito tal prescrição.

por uma pessoa na rua a quem perguntássemos o que é a identidade. Neste caso, possivelmente tal pessoa respondesse qualquer coisa do tipo "identidade é 'algo' (uma relação, por exemplo) que o objeto tem consigo mesmo e com mais nenhum outro", como já discutimos no capítulo anterior.[6] Um dos grandes problemas dessa 'definição' informal é a redundância dos termos nela utilizados, como por exemplo o uso das palavras "mesmo" e "outro", cujos significados já parecem assim pressupor de antemão algum critério de identidade (KRAUSE, a aparecer).

A questão que se põe agora é como podemos então tratar o conceito de identidade de um ponto de vista formal, modo lógica clássica. Será que é possível captar de uma forma adequada, via tal formalização, a noção informal e intuitiva que todos temos? O problema da redundância acima apresentado ainda permanece na formalização? Se não, de que forma é evitado? Qual a diferença entre o trato da identidade nas diferentes 'divisões' da lógica (tais como a teoria de conjuntos, as lógicas de ordem superior etc.)? Com quais coisas a identidade como tratada na lógica nos compromete? São questões que tentaremos responder a partir de agora. Em particular, veremos que a formulação do conceito de identidade na lógica dependerá sempre do sistema particular considerado (por exemplo, se estamos utilizando lógicas de primeira ordem ou lógicas de ordem superior), e que há diferenças substanciais entre os resultados alcançados em uma ou em outra formulação (apesar de cada uma dessas formulações tentar captar, como já afirmado, o — ou um possível — conceito intuitivo de identidade que supostamente todos temos).

3.2 IDENTIDADE EM LINGUAGENS DE 1^A ORDEM

Nesta primeira seção, trataremos do assunto da identidade de um ponto de vista formal distinguindo o modo como tal conceito é desenvolvido nas linguagens de primeira ordem.[7] Desta forma, assuma a partir de agora $\mathscr{L}$ como sendo a linguagem da lógica clássica de primeira ordem. Como é bem sabido, tal linguagem contém um conjunto adequado de conectivos proposicionais, quantificadores, variáveis individuais, símbolos auxiliares (como os de pontuação), símbolos de predicado e símbolos para operações.[8] Esta linguagem pode ser ampliada de forma a se aceitar mais símbolos em seu escopo e assim conseguirmos 'manipular' mais coisas (por exemplo, podemos inse-

[6] Também como vimos anteriormente, de um ponto de vista um pouco mais formal poderíamos caracterizar essa formulação da identidade como sendo um tipo de identidade qualitativa.

[7] Na lógica de primeira ordem quantificamos apenas sobre indivíduos e não sobre coleções ou sobre propriedades e relações de/entre indivíduos (como veemos, isto é feito nas lógicas de ordem superior).

[8] Sobre a construção de tal linguagem, pode-se consultar (MENDELSON, 1979, p. 46).

rir o símbolo de pertinência $\in$ nesta linguagem quando ela é empregada no trato conjuntista). O que importa dizer é que há dois modos de se definir a identidade em lógica de primeira ordem: a primeira é tomá-la como conceito primitivo; a segunda, é tomá-la como conceito definido.

3.2.1 A identidade como conceito primitivo

Nos textos usuais de lógica, normalmente se costuma assumir a identidade como sendo um conceito primitivo. Neste caso, assume-se que $\mathscr{L}$ contém além dos símbolos acima um símbolo de predicado binário, A, por exemplo, e define-se que a fórmula $t = s$ seja uma abreviação para $A(t,s)$, bem como que $t \neq s$ seja uma abreviação para $\neg A(t,s)$.[9] Assim, o símbolo (ou o predicado) '$=$' é chamado de símbolo de igualdade ou de identidade, e intuitivamente afirmamos $a = b$ quando a e b forem 'o mesmo objeto'. Como diz Hodges (HODGES, 1983 p. 69), seria bom se encontrássemos uma teoria Δ[10] em $\mathscr{L}$, na qual os modelos são exatamente as $\mathscr{L}$-estruturas com a identidade padrão (como veremos abaixo, a diagonal do domínio). Porém não há tal teoria. Para toda a $\mathscr{L}$-estrutura $\mathfrak{A}$ com a identidade padrão, é possível provar que existe uma $\mathscr{L}$-estrutura $\mathfrak{B}$, a qual é modelo das mesmas sentenças de $\mathscr{L}$ como $\mathfrak{A}$, *mas que não tem a identidade padrão* (a prova disto pode ser vista na bibliografia citada). Este fato é usualmente expressado dizendo que a identidade não é uma relação de primeira ordem "elementar" (HARRY, 2008). Dito de forma coloquial, o fato de assumirmos — como fizemos acima — um predicado binário para representar a identidade, por si só *não nos garante* que semanticamente este predicado irá realmente representar o que temos como sendo a identidade em todas as estruturas da linguagem $\mathscr{L}$.

Não obstante, existe uma teoria Δ de $\mathscr{L}$ que será verdadeira em todas as $\mathscr{L}$-estruturas com a identidade padrão, ou seja, pode-se assumir certos postulados que irão sempre funcionar para todas sentenças verdadeiras de $\mathscr{L}$ em todas as estruturas de $\mathscr{L}$. Em certo sentido, podemos dizer que esses postulados irão 'reger' o predicado acima de modo que o 'force' a representar o que temos intuitivamente como sendo a identidade. Os postulados que podemos assumir e que irão 'governar' a identidade são os seguintes:[11]

---

[9] Percebe-se de pronto que o símbolo $=$ não pertence à linguagem $\mathscr{L}$, mas à sua metalinguagem (como dito, é assumido como uma abreviação de modo a facilitar o trabalho).

[10] Uma teoria é um conjunto de fórmulas Γ que seja fechado para deduções, isto é, $\Gamma = Cn(\Gamma)$, onde Cn é o Operador de Consequência de Tarski. Por exemplo, no Cálculo Proposicional Clássico, se tivermos um conjunto $\Gamma = \{\alpha, \alpha \to \beta\}$, este conjunto não é uma teoria pois de $\Gamma \vdash \beta$, mas $\beta \notin \Gamma$.

[11] Historicamente, estes postulados são atribuídos a Frege em seu *Begriffsschrift* de 1879. Para uma visão mais moderna, pode-se consultar, por exemplo, as obras (MENDELSON, 1979, p. 79;

1. $(=_1)$ **[Lei da Reflexividade ou Princípio da Identidade da lógica elementar]:** $(\forall x(x = x))$.

2. $(=_2)$ **[Substitutividade]:** $\forall x \forall y(x = y \to (A(x) \to A(y)))$, onde $A(x)$ é uma fórmula qualquer que contém a variável x livre, e $A(y)$ resulta da anterior pela substituição de x por y em algumas das ocorrências livres de x, desde que a variável y seja livre para x em $A(x)$.[12]

É fácil ver que toda a estrutura de $\mathscr{L}$ com a identidade padrão é um modelo de $(=_1)$ e $(=_2)$ acima. A partir destes postulados, e dos demais axiomas do Cálculo Quantificacional Clássico, pode-se provar que a igualdade é simétrica e transitiva.[13] Ademais, como dito acima, o símbolo de igualdade aqui é tomado com um significado intencional: se temos que $x = y$, então x e y devem ser um e a mesma coisa (quando '=' é tomado como a identidade padrão), o que então relaciona os conceitos de igualdade e de identidade (*cf.* (HODGES, 1983 p. 68).). Além disso, com tais postulados, também pode-se provar que a identidade na lógica clássica tem as propriedades de uma relação de congruência, ou seja, é uma relação que preserva as propriedades dos objetos (no sentido de que se afirmamos algo sobre x (o denotarmos com alguma propriedade), e se tivermos que $x = y$, então a mesma propriedade vale para y). Isso vale também para as relações de qualquer aridade, como por exemplo, as binárias: se temos que aRb, e que $a = c$ e $b = d$, então também temos que cRd. Isto é importante, porque uma congruência é uma relação de equivalência, de modo que podemos particionar o domínio no qual ela se aplica 'separando' os indivíduos em classes de equivalência de elementos.[14]

Na lógica elementar, no entanto, não podemos quantificar sobre propriedades ou relações (coisa que como dissemos pode ser feita em lógicas de ordem superior), e sendo assim os postulados acima nos proveem unicamente um *esquema*. Isso faz com que ocorra o seguinte fato (MENDELSON, 1979, p. 83/4; FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 251ss.; KRAUSE, a aparecer).

HODGES, 1983 p. 69; CHURCH, 1956, p. 280ss.).

[12]Segundo Krause (KRAUSE, a aparecer), o postulado da substitutividade é algumas vezes identificado com uma forma de um princípio mais geral denominado de *Indiscernibilidade dos Idênticos* (II), que diz que entidades que são iguais (idênticas) são indiscerníveis: podem ser substituídas uma pela outra *salva veritate*, como dizia Leibniz.

[13]Para tal prova, veja (MENDELSON, 1979, p. 79/80). Vale ressaltar que certos autores já assumem a simetria e a transitividade da identidade como *axiomas* que regem a identidade (este é o caso de Church (CHURCH, 1956)). Todavia, ambas as formulações — como já se percebe — são equivalentes, ou seja, delas se deduzem a mesma classe de teoremas.

[14]Em qualquer modelo para uma teoria Δ acima com igualdade, a relação de igualdade é uma relação de equivalência. *Se* esta relação é a relação de *identidade* no domínio do modelo (ou seja, o conjunto dos pares da forma $\langle x,x \rangle$, sendo x elemento do domínio conforme veremos à frente), então o modelo é chamado *normal* (MENDELSON, 1979, p. 83).

Semanticamente, como dito, o predicado $=$ deve ser entendido (já que temos como pano de fundo uma interpretação pretendida ou intencional) como representando a identidade do domínio da interpretação da nossa linguagem $\mathscr{L}$, que de acordo com $(=_1)$ expressa a ideia intuitiva que todo objeto é idêntico a si mesmo. Como sabemos, na semântica usual, esse domínio de interpretação é um conjunto não vazio D, e a identidade sobre D é tomada como sendo o sub-conjunto $\Delta_D = \{\langle x,x\rangle : x \in D\}$ chamado de diagonal de D. Se os postulados acima que regem a relação de igualdade fossem tais que se pudesse 'atribuir' a eles a diagonal de D (ou, dito de outra forma, se tais postulados *refletissem* tal diagonal), então aparentemente teríamos captado a noção de identidade formalmente. Porém, *os postulados* $(=_1)$ *e* $(=_2)$ *não garantem que essa interpretação seja realizada de forma unívoca*, isto é, apenas na diagonal mencionada. O motivo disso é o seguinte.[15]

Em resumo, basicamente o que ocorre é que usando apenas $(=_1)$ e $(=_2)$, acabamos por não conseguir distinguir entre a interpretação da identidade dada sobre indivíduos do domínio ou sobre certas classes de indivíduos. Para ver como isso acontece, suponha que temos uma estrutura padrão $\mathfrak{A} = \langle D, \rho\rangle$ para nossa linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$[16], onde ρ é a função denotação usualmente definida (isto é, para toda constante individual c da linguagem, $\rho(c)$ (notação: c^D) é um elemento de D, para todo predicado n-ário R, $\rho(R) = R^D$ é um subconjunto do conjunto D^n (a n-ésima potência de D), e para qualquer símbolo funcional n-ário f, $\rho(f)$ é uma função de $D^n \mapsto D$). Como dissemos anteriormente, a relação que interpreta o símbolo primitivo de identidade é uma relação de equivalência de um tipo específico. Vamos chamar de $\approx_D$ tal relação. Tomamos agora outra estrutura $\mathfrak{B} = \langle D', \rho'\rangle$ com uma outra interpretação para nossa linguagem: o domínio D' agora é o quociente de D pela relação $\approx_D$ (isto é, $D' = D/\approx_D$), de modo que denotamos a relação que interpreta o símbolo de igualdade nesta nova interpretação (estrutura) por $\approx_{D'}$. Assuma também $f : D \mapsto D'$ como sendo uma função que associa a cada elemento $x \in D$ sua classe de equivalência $f(x) \in D'$ (ou seja, a classe de equivalência $f(x)$ na qual x pertence). A partir disso, definimos então que:

1. $f(x) \approx_{D'} f(y)$ se e somente se (see) $x \approx_D y$
2. Para todo predicado n-ário R da linguagem, se $\rho(R) = R^D$, e $\rho'(R) = R^{D'}$, então $R^{D'}(f(x_1),\ ..., f(x_n))$ sse $R^D(x_1,...,x_n)$.
3. para todo símbolo funcional n-ário g da linguagem, se $\rho(g) = g^D$ e $\rho'(g) = g^{D'}$, então $g^{D'}(f(x_1),...,f(x_n)) \approx_{D'} f(g^D(x_1,...,x_n))$.

[15] Adaptado de (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 252-254; MENDELSON, 1979, p. 82ss.).

[16] Sobre a definição de estrutura, veja a seção "Indiscernibilidade em uma estrutura" abaixo.

4. Para toda constante individual c, temos que $c^{D'} \approx_{D'} f(c^D)$.

A partir de tais definições, podemos facilmente provar que as estruturas $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{B}$ são elementarmente equivalentes, ou seja, todas as fórmulas da linguagem que são verdadeiras em uma delas, são verdadeiras na outra: para qualquer sentença $\alpha(y_1,...,y_n)$, temos que

$$\mathfrak{U} \models \alpha(y_1/x_1,...,y_n/x_n) \textit{ see } \mathfrak{B} \models \alpha(y_1/f(x_1),...,y_n/f(x_n)).$$ [17]

Para nossa discussão, o que importa ressaltar é que este resultado de equivalência entre estruturas mostra é que a linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$ não consegue diferenciar entre as interpretações dadas para o símbolo de igualdade em $\mathfrak{U}$ e em $\mathfrak{B}$ (isto é, entre a interpretação "na diagonal dos *objetos*" do domínio, e a interpretação "na diagonal das *classes de equivalência*" do domínio, respectivamente). Com isso se percebe como os axiomas $(=_1)$ e $(=_2)$ acima *não caracterizam a diagonal sem ambiguidade*: não conseguimos saber (a partir desta lógica) se estamos tratando de *objetos* do domínio ou de *classes* desses objetos, já que, intuitivamente, este resultado diz que todo elemento do domínio D' age como um elemento de D também, fato que se reflete também na relação de identidade entre tais elementos. É essencialmente este o sentido em afirmar que tais postulados não fixam a interpretação dada à identidade como seria desejável, ou que os mesmos não garantem que a interpretação da identidade será realmente a diagonal: como o que vale para os objetos x, y etc. de D também vale para as classes (coleções de elementos de D) $f(x)$, $f(y)$ etc., nunca poderemos saber a partir da linguagem $\mathscr{L}$, como dito, se a identidade que estamos trabalhando está 'agindo' sobre os objetos do domínio ou sobre as classes de tais objetos! Como mostrado por Mendelson (MENDELSON, 1979, p. 83), para a identidade em primeira ordem *sempre é possível provar a existência de tal f* e assim sempre incorrer neste problema.[18]

Neste caso, pode-se então concluir dizendo-se que os axiomas da identidade acima apresentados (bastante intuitivos, por sinal), somados à linguagem de primeira ordem nos quais estão expressos, não permitem axiomatizar de um modo *único*, sem ambiguidade, a identidade do domínio como desejável.[19] Tal como também afirmamos, é neste sentido que a noção de identidade

[17]Duas estruturas são elementarmente equivalentes sse não se pode distinguí-las pelos recursos da linguagem $\mathscr{L}$. A prova de que tais estruturas são elementarmente equivalentes pode ser encontrada em (MENDELSON, 1979, p. 82ss.).

[18]Todavia, é bom observar que esse problema não é um problema da *linguagem* da lógica de 1^a ordem — tal como o texto deixa transparecer — mas sim da própria *lógica* de 1^a ordem em si.

[19]Como comentaremos abaixo, para caracterizar de um modo único a diagonal Δ_D necessitamos de variáveis de segunda ordem. Todavia, como também mostraremos, isso vai depender

não é uma noção lógica "elementar". Apenas para enfatizar tal situação e finalizar esta seção, vale citar aqui o que diz (DA COSTA, *et. al.* 2012):

> O predicado binário de identidade deve satisfazer essas condições [os postulados $=_1$ e $=_2$] para todas as relações da estrutura em questão. A identidade, conforme expressa pela diagonal do domínio, é ela mesma uma relação de congruência sobre qualquer estrutura $\mathfrak{E}$. A dificuldade é que, para muitas estruturas, a diagonal não é a única relação de congruência, pois [como vimos] podem existir outras relações que igualmente satisfaçam os axiomas acima. O que os axiomas $=_1$ e $=_2$ nos garantem é que o símbolo de identidade sempre será interpretado na relação de congruência em uma estrutura [e apenas isso, não fixando a interpretação, como dito]. Nos casos em que há apenas uma tal relação, esta será a diagonal e, assim, não há problemas na caracterização da relação; no entanto, nos casos em que há mais de uma congruência sobre $\mathfrak{E}$ [coisa que como vimos é sempre possível de ser construída na lógica clássica], o símbolo '$=$', dado pelos axiomas anteriores, não denotará necessariamente a relação expressa pela diagonal, mas será interpretada em uma relação de congruência que não será necessariamente a identidade, entendida agora como a diagonal do domínio [...]. A estratégia usualmente adotada para evitar essa situação consiste em postular, na metamatemática, que o símbolo da relação de identidade da linguagem $\mathscr{L}$ receberá sempre uma interpretação fixa para cada estrutura: a diagonal do domínio. Assim, a interpretação desejada é garantida por decreto; o que raramente aparece devidamente justificado nas discussões sobre o assunto.

3.2.2 A identidade como conceito definido

Ainda nas linguagens de primeira ordem, uma outra alternativa possível é tratar a identidade como um conceito definido. Neste caso, ela pode ser introduzida *por definição*, ao se mostrar que existe na linguagem $\mathscr{L}$ uma *fórmula* adequada para expressar o conceito de identidade (por exemplo, $C(x,y)$,

de certas condições que podem levar a outros tipos de incongruências em relação ao que temos como identidade do ponto de vista intuitivo, e o que obtemos quando tentamos formalizá-la.

com x e y livres). Perceba o leitor que aqui falamos de uma fórmula, e não como acima apresentado de um predicado binário, de modo que neste caso não precisamos mais escrever axiomas específicos para reger essa fórmula. Assim, podemos definir

$$x = y =_{def} C(x,y).$$

Por exemplo, suponha que tenhamos uma linguagem de primeira ordem com um número finito de símbolos de predicados (digamos, apenas dois: um unário P e um binário Q) e de constantes. O modo de tratar a identidade como um conceito definido é então *esgotar todos esses predicados em todas as possíveis substituições de x por y.* Dito de outra forma, neste caso o que se busca é definir a identidade de dois objetos como a possibilidade de que *valha a substitutividade para todas as propriedades expressas pela/na linguagem* (DA COSTA, *et. al.*, 2012). Sendo assim, neste exemplo, a fórmula $C(x,y)$ se tornaria o segundo membro de

$$x = y =_{def} (Px \leftrightarrow Py) \wedge \forall z((Qxz \leftrightarrow Qyz) \wedge (Qzx \leftrightarrow Qzy)).$$

A diferença, apesar de a primeira vista parecer supérflua, é enorme. Segundo Krause (KRAUSE, a aparecer), esta definição é a usada por Quine (apesar de ter sido originalmente apresentada por Hilbert e Bernays), que reconhece que a definição da identidade via 'exaustão das combinações possíveis' (como Quine mesmo chama) é apenas um *"fac-símile servil"* [serviceable facsimile] da noção de identidade. Isto porque pode acontecer que os objetos não sejam discerníveis completamente um dos outros apenas *devido aos predicados existentes na linguagem*, e neste caso, a definição — nas próprias palavras de Quine — "falha em definir a identidade genuína", pois todos aqueles objetos que teriam os mesmos conjuntos de predicados seriam reconhecidos pela teoria como sendo o mesmo objeto, coisa que não necessariamente é verdadeira (QUINE, 1986, p. 63). Ainda mais, termina ele, "tal falha permanece inobservável a partir da linguagem" (*ibid.*). Sendo assim, a definição dada se torna unicamente uma indiscernibilidade relativa aos predicados da *linguagem*, não se configurando assim uma identidade *tout court* (isto é, do modo que temos intuitivamente).

Com efeito, tal problema se torna realmente perene quando constatamos que podemos apresentar uma estrutura na qual dois objetos estão relacionados pela identidade *a là* Quine, *sem no entanto serem o mesmo objeto*. Apesar de apenas esboçarmos o argumento aqui, vamos ver em linhas gerais como isso se acontece (DA COSTA, *et. al.*, 2012; KRAUSE, a aparecer).

Para tanto, tome qualquer elemento fixo a do domínio D de $\mathfrak{U}$, e o substitua pelos pares ordenados $\langle a,1\rangle$ e $\langle a,2\rangle$, obtendo assim um novo conjunto D' de $\mathfrak{U}'$. Podemos em seguida definir por indução sobre as fórmulas da linguagem as condições que devem ser satisfeitas pelos elementos de D' para que estes satisfaçam as fórmulas da linguagem: para quaisquer objetos distintos dos pares introduzidos acima, postulamos que eles satisfazem os predicados e relações na linguagem em $\mathfrak{U}'$ se, e somente se, satisfazem esses predicados e relações em $\mathfrak{U}$. Para os pares $\langle a, 1\rangle$ e $\langle a, 2\rangle$ recém introduzidos, por sua vez dizemos que satisfazem uma fórmula em $\mathfrak{U}'$ se, e somente se, o elemento a acima tomado satisfaz essa fórmula em $\mathfrak{U}$, e assim por diante. Diferente do que tínhamos antes, no qual existia apenas um objeto igual a si mesmo em $\mathfrak{U}$, agora temos dois (que sabemos serem diferentes), mas que devido às definições empregadas não podem ser diferenciados nesta estrutura por nenhuma fórmula da linguagem $\mathscr{L}$. "Dito de outro modo, não há nenhuma fórmula da linguagem tal que um dos pares ordenados a satisfaz, mas o outro não, e, assim, na definição de identidade apresentada acima, [...] teremos que os dois objetos distintos do domínio irão satisfazer a fórmula que define a identidade sem que, no entanto, sejam o mesmo objeto" (DA COSTA, *et. al.*, 2012). É neste sentido que é problemático termos apenas uma indiscernibilidade relativa aos predicados da nossa linguagem, como dito, e não uma identidade preeminente, no sentido de não estar dependente do que a nossa linguagem pode (ou está) exprimindo. O mesmo argumento pode ser generalizado para n novos objetos que inserirmos em nosso domínio, o que mostra então a limitação de tal alternativa Quineana, tal como queríamos enfatizar.

3.3 IDENTIDADE EM LINGUAGENS DE ORDEM SUPERIOR

A distinção entre lógica de primeira ordem e de ordem superior aparece explicitamente somente a partir de 1928 com o livro de Hilbert e Ackermann: *Principles of theoretical logic*. Como já falamos, na lógica de ordem superior podemos quantificar também sobre propriedades, relações ou sobre conjuntos de indivíduos (no caso, em segunda ordem), ou sobre propriedades de propriedades, ou conjuntos de conjuntos (no caso, em terceira ordem), e assim por diante. A diferença é colossal: na primeira ordem, como as linguagens usuais têm em geral uma quantidade contável de propriedades, estamos falando de no máximo $\aleph_0$ propriedades. Em segunda ordem, como cada propriedade corresponde (extensionalmente) a um subconjunto de números naturais, falamos de $2^{\aleph_0}$ propriedades.

Poderíamos supor que as limitações da noção de identidade na lógica de primeira ordem poderiam ser superadas pelas lógicas de ordem superior. Entretanto, este também não é o caso: mesmo na ordem superior, a teoria de identidade mostra limitações. Não obstante, primeiramente vamos ver como se dá a edificação de tal conceito nessa teoria (no caso, aqui, ficaremos restritos apenas à lógica de segunda ordem), e posteriormente apresentaremos as limitações.

Como vimos anteriormente, uma das formas de se introduzir a igualdade (ou identidade) na lógica de primeira ordem é escolher/ adicionar um predicado binário na linguagem para que este denote tal relação entre indivíduos, além de fornecer axiomas apropriados para este predicado. Poderíamos supor que precisaríamos fazer o mesmo para o cálculo de segunda ordem, mas isso não é necessário porque agora podemos neste cálculo introduzir uma relação de igualdade por definição. Dito de outra forma, é possível aqui encontrar uma fórmula da linguagem que tem as variáveis x e y como suas únicas variáveis livres e a qual sempre possui o valor de verdadeiro ou falso de acordo com x ou y terem ou não terem mesmo valor (CHURCH, 1956, p. 300). Esta fórmula que introduz a identidade por definição é dominada de *Lei de Leibniz* (não confundir com o PII e com o II), e dado que estamos trabalhando em segunda ordem, quantifica sobre predicados (propriedades) ou conjuntos de indivíduos, como já comentado.

Sendo assim, tome F, por exemplo, como sendo uma variável para predicados de dois indivíduos x e y. Adaptando uma definição proposta por Whitehead e Russell apresentada em seus *Principia Mathematica*, a Lei de Leibniz se torna

$$x = y =_{def} \forall F(F(x) \leftrightarrow F(y)).$$

O segundo membro da definição (*i. e.*, $\forall F(F(x) \leftrightarrow F(y))$) expressa a indiscernibilidade (ou indistinguibilidade). Neste sentido, a identidade é definida em termos de indiscernibilidade: entidades indiscerníveis são idênticas (são a mesma entidade), e reciprocamente. A partir desta fórmula e das regras da lógica, todas as outras leis que regem a identidade (*i. e.*, a reflexividade, a comutatividade, a transitividade etc.), bem como os demais resultados deste cálculo de segunda ordem e alguns dos seus metateoremas podem ser provados (veja (CHURCH, 1956, p. 301ss.). Um fato interessante a ser notado é que a definição acima engloba tanto a lei da substituição (que captura o chamado Principio da Indiscernibilidade dos Idênticos, expresso pela implicação $x = y \rightarrow \forall F(Fx \leftrightarrow Fy)$), quanto o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (expresso pela implicação $\forall F(Fx \leftrightarrow Fy) \rightarrow x = y$) (*cf.* (DA COSTA, *et. al.*, 2012; FRENCH e KRAUSE, 2006, cap. 6), coisa que como vimos não é alcançada pela lógica de primeira ordem.

Um ponto a ressaltar é que o quantificador $\forall F$, como dito, quantifica sobre todas as propriedades do objeto e não apenas sobre algum subconjunto delas, por exemplo. No contexto físico, como discutimos no capítulo anterior, a questão que se põe agora é como definir qual o conjunto de propriedades que devem ser consideradas. Devemos, como já enfatizado, assumir como propriedades de um objeto do domínio físico somente as propriedades tipo intrínsecas, ou também as extrínsecas? Devemos contemplar também a propriedade tipo localização espaço-temporal — a qual é variante a todo momento do percurso de um objeto — ou esta não deve ser admitida por não se constituir uma propriedade *genuína* do objeto? Com efeito, no domínio quântico, devido a todos os elétrons serem indiscerníveis, todos os prótons serem indiscerníveis, e assim por diante, a assunção de propriedades tipo espaço-temporal parece ser essencial. Não obstante, como já alertamos, quando elétrons entram nos chamados estados de superposição, nem mesmo esse tipo de propriedade poderia nos dizer qual elétron é qual. Por outro lado, se medirmos a carga de uma partícula subatômica e a mesma tiver um valor diferente do estipulado para o elétron, temos uma outra partícula, o que parece nos levar novamente à questão do caráter essencial de algumas propriedades para os objetos quânticos, e quais seriam elas. Neste sentido, (TORALDO DI FRANCIA, 1981, p. 222) já alertava que as propriedades de tais objetos são nomológicas, ou seja, são dadas por leis, e portanto invariantes para cada classe: os elétrons, por exemplo, têm uma certa carga, um certo spin, uma certa massa e assim por diante, qualidades 'legais' que caracterizariam os *elétrons* e não os prótons em uma medição de um sistema físico qualquer. Se mdirmos o sistema e encontrarmos propriedades diferentes, sabemos que não estamos tratando de elétrons. Seriam, então, as propriedades nomológicas as essenciais? Como se viu em discussões anteriores, do ponto de vista filosófico (e mesmo físico) esse tipo de altercação é um tanto complexa, e não nos convém retomá-la aqui por não ser objetivo do presente capítulo.[20] O que importa para o ponto que estamos trabalhando nesta seção, é que a definição de identidade em lógica de segunda ordem parte do pressuposto que coisas são iguais se e somente se forem indiscerníveis, *i.e.*, se forem iguais relativamente a todas as suas propriedades, sejam tais propriedades tomadas do jeito que for.

Desta forma, nesta lógica, objetos que satisfazem exatamente os mesmos predicados deveriam ser o mesmo objeto, apenas sendo nomeados de forma diferente. Não obstante, isto também não funciona! Mostraremos que *podemos exibir em tal arcabouço teórico objetos que satisfazem os mesmos predicados, mas que sabemos que não são o mesmo objeto*, e isto trará à lume as limitações das lógicas de ordem superior (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 254ss.; KRAUSE, a aparecer; DA COSTA, *et. al.*, 2012). Para tanto, suponha que temos uma linguagem de segunda ordem (ou mais alta) em que a identidade é introduzida via Lei de Leibniz como descrito acima. Supomos que esta linguagem contém variáveis individuais x, y, z etc. (com ou sem índices),

[20]Não obstante, nos próximos capítulos, discutiremos mais sobre a questão das propriedades dos objetos quânticos e sobre as várias formas do Princípio da Identidade dos Indiscerníveis que podem ser assumidas de acordo com as diferentes propriedades que consideramos 'legítimas' esses objetos.

e variáveis para predicados X_n^i, onde n é a aridade (peso) do predicado (número que indica a quantos argumentos ele se aplica), e i um índice que indica qual o predicado em questão. Podemos estabelecer, como de hábito, uma interpretação I para esta linguagem que associa um elemento de um domínio não vazio D a cada variável individual, e uma relação R_n (n-ária) sobre D a cada variável para predicados X_n da linguagem.

Também como de hábito, uma estrutura padrão para esta linguagem é aquela que contém relações para todos os símbolos de predicados. Similarmente, podemos definir para a lógica de segunda ordem os conceitos de verdade e de falsidade em uma interpretação, além do de satisfatibilidade, estendendo sem dificuldade os conceitos semânticos habituais: uma fórmula da linguagem de segunda ordem é válida se for verdadeira em todas as estruturas, e é dita ser satisfatível se for verdadeira em pelo menos uma estrutura. Pode-se provar um teorema de correção para a lógica de segunda ordem segundo o qual todo teorema é válido (CHURCH, 1956, p. 307ss.; MENDELSON, 1997, p. 373ss.). Todavia, não vale a recíproca (*i. e.*, o teorema da completude) para esta lógica, haja vista que as lógicas de segunda ordem são incompletas relativamente à sua semântica padrão tal como mostra o segundo teorema da incompletude de Gödel. Não obstante, Henkin (CHURCH, 1956, p. 307) demonstrou um teorema 'mais fraco' de completude para a lógica de segunda ordem com relação às chamadas "Estruturas de Henkin"; estruturas nas quais não estão envolvidas todas as relações sobre o domínio, mas somente algumas devidamente escolhidas. Nas estruturas de Henkin, por exemplo, o domínio de variação de uma variável para predicados unários X_1 não é o conjunto potência D (o conjunto de todos os subconjuntos de D), mas uma subcoleção escolhida desse conjunto.[21] Em outras palavras, ao interpretar as sentenças da linguagem, só é permitido que as variáveis para conjuntos percorram subconjuntos escolhidos do domínio e não todos os subconjuntos.[22]

[21]Formalmente, o que acontece é que em um modelo *standard* para as teorias de ordem superior deveríamos levar em conta todos os subconjuntos de objetos de um determinado tipo (que Church (CHURCH, 1956, p. 307) chama de "principais"). O problema é que no caso das lógicas de ordem superior não se tem um teorema de completude para a semântica standard, como dito. Podemos tentar remediar tal problema utilizando uma semântica de Henkin na qual os modelos (chamados modelos de Henkin) são tais que os quantificadores percorrem apenas determinados subconjuntos de objetos de determinado tipo. Neste caso, garantimos uma forma mais 'fraca' de completude. Uma apresentação informal e popular de tal característica da lógica de segunda ordem aparece no artigo "Completude", do próprio Leon Henkin, que se encontra em (HENKIN 1975).

[22]Henkin descreve assim tal construção teórica (HENKIN 1975, p. 79/80): "...numa linguagem de segunda ordem, nós dispomos de [um tipo de] variáveis que percorrem os elementos do domínio de um modelo, e dispomos de outro tipo de variáveis que percorrem os subconjuntos do domínio. *Modelo generalizado* de uma linguagem desse tipo será um modelo, no sentido dado ao termo [*i.e.* do modo usual, *à la* Tarski] *acompanhado* por uma determinada classe de subconjuntos de seu domínio. Ao interpretar as sentenças da linguagem em relação ao modelo

Para se fundamentar por sua vez uma semântica sensata para as lógicas de segunda ordem em uma estrutura de Henkin, exige-se que sejam verdadeiras em tal estrutura todas as instâncias do chamado "Esquema de Compreensão" seguinte, onde $F(x_1,...,x_n)$ é uma fórmula qualquer na qual a variável para predicados X_n não figura livre:

$$\exists X_n \forall x_1 ... \forall x_n (X_n(x_1,...,x_n) \leftrightarrow F(x_1,...,x_n)).$$

Informalmente, este postulado diz que toda fórmula $F(x_1,...,x_n)$ determina uma relação (*cf.* (KRAUSE, a aparecer)).

A partir disso é possível garantir, como dito, uma forma 'fraca' de completude. Não obstante, desta forma, *a definição de identidade segundo a Lei de Leibniz deixa de ser a identidade intuitiva*. Com efeito, podemos também aqui apresentar um contraexemplo no qual objetos *distintos* satisfazem a definição de identidade via tal lei (*ibid.*). Para tanto, suponha que nossa linguagem de segunda ordem contenha duas constantes a e b, e três predicados unários P_1, P_2 e P_3. Suponha também que tenhamos escolhido uma estrutura de Henkin que tem por domínio o conjunto $D = \{1,2,3,4,5\}$, e que contenha as relações unárias $R_1 = \{1,2,5\}$, $R_2 = \{1,2,3,4\}$ e $R_3 = \{1,2,4\}$ que interpretam os três predicados dados. O que ocorre é que se interpretarmos a e b, respectivamente, como 1 e 2, então $a = b$ (ou seja, 1 = 2) é verdadeira nessa estrutura, pois 1 e 2 pertencem a todas as relações. Com efeito, de acordo com a Lei de Leibniz, $a = b \leftrightarrow \forall F(F(a) \leftrightarrow F(b))$, e isto é o que ocorre pois a variável F percorre um domínio constituído unicamente por R_1, R_2 e R_3. Se a interpretação for entretanto a padrão, obviamente $a = b$ valerá se e somente se a e b denotarem o mesmo objeto, já que neste caso estarão envolvidos *todos* os subconjuntos do domínio; mas não é isso que ocorre exatamente pelas 'condições' que são impingidas à semântica de Henkin. "Isso mostra que a relação de identidade entre dois objetos depende não somente da particular interpretação escolhida, mas de maneira mais profunda, da matemática utilizada para construir a semântica" (*ibid.*).

generalizado, só permitimos que as variáveis-conjuntos percorram os subconjuntos escolhidos do domínio, e não permitimos que percorram todos os subconjuntos" (grifo do autor). Desta forma, diz o autor, nas teorias de ordem mais elevada vale um teorema de completude que é inteiramente análogo ao resultado que Gödel estabeleceu quanto à completude das teorias de primeira ordem: as teorias de ordem mais elevada são completas em relação *à classe* de todos os modelos generalizados que satisfaçam todos os axiomas.

3.4 IDENTIDADE NA TEORIA DE CONJUNTOS

Podemos supor que temos como alicerce das teorias usuais extensionais de conjuntos clássicas (formuladas como teorias de primeira ordem) a lógica elementar clássica, apenas acrescendo à linguagem um único símbolo de predicado binário "$\in$" (pertinência). O conceito de identidade na teoria de conjuntos pode ser tratado de várias maneiras. Uma primeira delas é adotar um predicado de identidade como primitivo em uma linguagem de primeira ordem e reger tal conceito por axiomas específicos, tal qual a primeira forma mostrada anteriormente. Uma segunda opção, é também tratá-lo *à la* Quine, isto é, como um conceito definido na linguagem da teoria — no caso, pode ser na linguagem da teoria de ZFC[23] —, o que é possível dado que a teoria em apreço tem apenas um número finito de predicados primitivos. Neste caso, $x = y$ pode ser definido pela fórmula $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$.[24] Uma última possibilidade é introduzí-lo como conceito definido de uma linguagem de *segunda ordem*, expressando assim a identidade através da Lei de Leibniz que, como já comentado, incorpora o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis. Habitualmente, em ZFC, procedemos de acordo com o primeiro modo.

Sendo assim, dada a lógica clássica, podemos fazer uso dos axiomas $(=_1)$ e $(=_2)$ acima, e em especial para a teoria de conjuntos postulamos que

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \to x = y,$$

expressão que é chamada de *Axioma da Extensionalidade* e que é, em certo sentido, tomada como sendo a propriedade conjuntista da igualdade.[25] Dada as leis lógicas, continua a ser possível deduzir em ZFC (são teoremas de ZFC) todas as propriedades lógicas da igualdade, a saber, $\forall x(x = x)$ [reflexividade], $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$ [simetria], $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$ [transiti-

---

[23]Zermelo-Fraenkel com Axioma da Escolha ['C' de Choice]. A teoria de conjuntos ZFC é uma das mais usuais teorias de conjuntos, sendo que por isso será tomada como principal caso de estudo desta tese. Abaixo falaremos mais sobre ela, e, neste texto, falaremos também (ainda que por alto) sobre as várias teorias de conjuntos alternativas existentes. Entretanto, o que afirmamos neste parágrafo sobre a igualdade (e identidade) na teoria de conjuntos vale de modo geral, independente de qual teoria estamos trabalhando.

[24]Para tal caso, veja (FRAENKEL, *et. al.*, 1973).

[25]Se a teoria de conjuntos que estamos trabalhando admitir átomos (*Urelemente*, na expressão de Zermelo), ou seja, entidades que não são conjuntos, mas que podem ser elementos de conjuntos, necessitamos adicionar um predicado unário (*e.g.* U) à sua linguagem de modo a poder definir a identidade também para tais elementos. Neste caso, tomando a fórmula $U(x)$ como dizendo intuitivamente que x é um átomo (se $\neg U(x)$, então x é um conjunto), a definição então passa a ser: $x = y =_{def} \forall z(U(z) \to (z \in x \leftrightarrow z \in y)) \wedge \forall z(\neg U(x) \to (x \in z \leftrightarrow y \in z))$, que coloquialmente significa que duas entidades (conjuntos ou átomos) são idênticas se, sendo átomos, pertencem aos mesmos conjuntos, ou se sendo conjuntos, têm os mesmos elementos.

vidade] e $\forall x \forall y(\forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z) \leftrightarrow x = y)$ [substitutividade em relação à pertinência]. A recíproca ao axioma da extensionalidade pode ser derivada de $(=_2)$, bastando tomar para $A(x)$ a expressão $(z \in x)$ e usar as regras de quantificação. O axioma da extensionalidade, em ZFC, intuitivamente afirma que quaisquer que sejam dois conjuntos x e y, se x e y têm exatamente os mesmos elementos, então x e y são o mesmo conjunto; são iguais. É importante destacar isso: a partir da identidade (numa das formas acima definida), e do axioma da extensionalidade, podemos então caracterizar os conjuntos obtidos em ZFC como providos de uma *identidade*, ou seja, conseguimos saber quando dois conjuntos são iguais (o mesmo) ou não, sendo estes assim 'comprometidos' com uma teoria da identidade (e assim de individualidade) para seus objetos. Isto porque como valem as leis da lógica clássica, tem-se que para quaisquer x e y, ou temos que $x = y$ ou que $x \neq y$ (valem os princípios do terceiro excluído e da não contradição). O aspecto relevante de tal característica é que se $x \neq y$, então existe um atributo (ou uma propriedade, que aqui é identificada com um conjunto) que ou x ou y possui, mas não o outro;[26] ou, dito de outra forma, que há um conjunto ao qual apenas um deles pertence (via o princípio da compreensão que falaremos abaixo). No decorrer deste texto falaremos mais sobre como a teoria de conjuntos se compromete com um tipo de identidade (no sentido de individualidade) para seus elementos e tentaremos defender tal posição.

A forma que o princípio da identidade é entendida na teoria de conjuntos (a partir principalmente do Axioma da Extensionalidade visto acima) advém diretamente do modo como, historicamente, tal teoria foi primeiramente concebida e estabelecida. Com efeito, George Cantor (1845-1918), o principal criador da teoria intuitiva de conjuntos, já afirmava que "por um conjunto entendemos um agregado de objetos que são distintos em nossa intuição ou pensamento e que podem ser combinados em um um todo por alguma lei" (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 258)).[27] Esses objetos passariam a ser chamados, na própria definição de Cantor, de "elementos". Segundo French e Krause (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 258), a caracterização de conjuntos na formulação primária de Cantor captura os seguintes aspectos intuitivos: 1) os elementos de um conjunto são agrupados por uma certa 'lei', *i.e.*, é uma

[26]Esta é a contrapositiva do axioma da extensionalidade.

[27]Vale ressaltar que esta é apenas uma das 'definições' de conjunto dada por Cantor. Outra é que conjunto são "...muitos que podem ser pensados como um, *i. e.*, uma totalidade de elementos que podem ser combinados em um todo por uma lei", ou ainda que "uma variedade (um agregado, um conjunto) de elementos que pertencem a uma esfera conceitual qualquer é dita bem definida se, em virtude da sua definição e do princípio lógico do terceiro excluído, deve vir resguardado como *internamente determinado* seja se um objeto qualquer, pertencente a essa esfera conceitual, pertence à variedade concebida, seja mesmo se dois objetos pertencentes ao conjunto, malgrado a diversidade formal no modo de serem dados, são ou não iguais entre si" (ambas as citações estão em (KRAUSE, 2002, p. 73-4).)

'lei' que faz com que certos objetos possam ser vistos como formando uma totalidade ("elementos *de* um conjunto");[28] 2) o conjunto é determinado pelos seus elementos; 3) *os elementos de um conjunto devem ser distintos um do outro*;[29] e 4) os elementos de um conjunto são de algum modo dados antes do que o próprio conjunto.

Para os autores, estas quatro características sugerem quatro princípios básicos que subjazem à noção de conjunto, a saber: 1') *o princípio da compreensão (ou abstração)*, o qual basicamente significa que dada uma 'propriedade' ou 'condição' P qualquer existe o conjunto (*único*) dos objetos que têm essa propriedade ou que cumprem essa condição. Em símbolos, podemos expressar esse princípio da seguinte forma, sendo $F(x)$ uma propriedade aplicável aos objetos de um certo domínio:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow F(x)).$$

Como os próprios autores enfatizam (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 260/1),

> vemos que o Princípio da Compreesão incorpora uma hipótese adicional importante, a saber, que qualquer objeto pode ter propriedades, e então ser membro de um conjuto. [...] De acordo com esta teoria, como vimos, não existe lugar para objetos 'indistinguíveis', isto é, para entidades que difiram *solo numero*: se elas diferem, então existe um conjunto que corresponde a uma propriedade para o qual uma delas pertence, enquanto a outra não.

Entretanto, vale mencionar que este princípio (bastante intuitivo por sinal) é que levou a paradoxos como o de Russell, e à(s) tentativa(s) de axiomatização da teoria de conjuntos.[30] No sistema de Zermelo-Fraenkel, o

[28] A questão de como esses objetos são reunidos para constituírem uma totalidade é respondida ou dizendo que os elementos que constituem o conjunto em questão são listados de algum modo em que se possa determinar (sem ambiguidade) se um certo objeto é ou não membro de um conjunto, ou então que deva haver alguma característica que lhes será peculiar somente a eles, identificando-os como elementos do conjunto, e a qual pode ser expressa como propriedade ou condição (*cf.* (KRAUSE, 2002, p. 76)).

[29] Não obstante, vale observar que nem em todas as definições de conjunto dadas por Cantor há explicitamente a menção ao fato dos elementos do conjunto serem necessariamente distintos um dos outros (veja nota anterior). Como diz Krause (KRAUSE, 2002, p. 74), "aparentemente a intuição primeira de Cantor aceitava que o que importava era se ter uma certa *quantidade* de elementos, nada implicando na sua distinguibilidade" (grifo do autor).

[30] Não iremos reproduzir tal história aqui, dado que nosso objetivo é apenas mostrar que a teoria de conjuntos está de certo modo comprometida com a noção de indivíduo desde seu nascimento. Para nossos propósitos, basta dizer que entre as primeiras tentativas de alicerçar a teoria de Cantor em fundamentos mais firmes está a primeira versão axiomatizada desta teoria feita por Ernest Zermelo (1871-1956), em um artigo de 1908 (ZERMELO, 1967), para o qual "cer-

princípio da compreensão foi 'corrigido' de modo a evitar o paradoxo de Russell. Para tanto, assumiu-se então o chamado *Esquema da Separação*, o qual assevera que dado uma fórmula $F(x)$ de ZF (uma 'propriedade') na qual a variável y não figura livre, então são axiomas cada uma das expressões obtidas do seguinte esquema mediante $F(x)$'s distintas:

$$\forall z \forall y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge F(x)).$$

Intuitivamente, o esquema acima diz que dado um conjunto z, podemos obter um subconjunto de z tomando aqueles dentre seus elementos que têm uma determinada propriedade (expressa pela fórmula $F(x)$). A diferença aqui é que o conjunto do qual extraímos os objetos com a propriedade $F(x)$ já está dado de antemão, e isso evita os paradoxos dedutíveis do Princípio da Compreensão. Dado que temos a ideia intuitiva de que cada objeto é idêntico apenas a si mesmo, podemos sempre formar um subconjunto contendo apenas *um* elemento. Neste sentido, apesar de corrigido por Zermelo, vemos que mesmo assim o Esquema da Separação mantém a ideia original do Princípio da Compreensão, a saber, de que sempre existem *propriedades individualizadoras que podemos lançar mão a fim de obter um indivíduo* (no caso, um conjunto com apenas *um* elemento); 2') *o princípio da extensionalidade* que, como já pontuamos, de certo modo diz que coleções com os mesmos elementos não podem ser distintas ou, dito de outra forma, um conjunto é determinado pelos seus elementos (pela sua extensão); 3') o conceito da *identidade dos elementos de um conjunto*: como os elementos de um conjunto devem ser distintos uns dos outros, é de se supor que valha alguma teoria da identidade para tais elementos, ou seja, dado x e y, é sempre possível asseverar se $x = y$ ou se $x \neq y$. Como diz Krause (KRAUSE, 2002, p. 78), é necessário assim prover critérios para se saber quando dois objetos são ou não distintos, isto é, deve-se caracterizar uma teoria da identidade para tais entidades e suas coleções (conjuntos). Dado que é a lógica clássica que está baseando tal teoria, já mostramos como isso ocorre; e 4') *o conceito interativo de conjunto*, ou seja, um conjunto é formado após seus elementos terem sido formados. Segundo

tamente [a definição de conjunto dada por Cantor] requer alguma limitação...". Posteriormente, somaram-se a tal axiomática as contribuições de A. Fraenkel (1891-1965) e T. Skolem (1887-1963), entre outros, resultando no que se conhece hoje como teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel — ZF (como já comentamos, se for assumido o axioma da escolha, temos a teoria ZFC). Outros sistemas axiomáticos 'alternativos' também foram construídos, como por exemplo o de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), o de Kelley-Morse (KM), o de Quine-Rosser (NF) etc. (veja (KRAUSE, 2002, cap. 4 e 5)), tentando ou solucionar ambiguidades e paradoxos que nasceram da própria teoria de ZFC, ou devido a discordâncias (até certo ponto filosóficas) sobre quais noções a teoria deveria estar assentada. Entre os 'paradoxos' que promoveram o nascimento de teorias de conjuntos alternativas à ZFC, está o chamado 'Paradoxo de Banach-Tarski', o qual envolve o polêmico Axioma da Escolha.

Zermelo, "...conjuntos nunca podem ser definidos independentemente (...), mas devem ser separados como subconjuntos de conjuntos já dados" (citado em (KRAUSE, 2002, p. 106)). É bom lembrar que na teoria de conjuntos de ZFC podemos nos abster de Urelemente e tratar apenas com conjuntos.

O que importa ressaltar é que a partir de tais princípios básicos que a teoria dos conjuntos deve respeitar (posteriormente refletidos na própria axiomática), pode-se seguramente perceber que a noção de conjunto está firmemente assentada na noção da identidade e individualidade de seus objetos. Como visto, a partir do Princípio da Extensionalidade, *se tivermos dois conjuntos com os mesmos elementos, estamos apenas nomeando um mesmo conjunto de um modo diferente*. Do mesmo modo, *se tivermos dois conjuntos com elementos diferentes, esses conjuntos são diferentes por alguma propriedade*. Se por sua vez lançarmos mão do conceito de identidade dos elementos em geral e pensarmos um objeto como partilhando de certas propriedades individualizadoras (no sentido de que apenas esse objeto tem um certo conjunto de propriedades), tomando tal objeto como 'pertencendo' ao único conjunto de tais propriedades, logo vemos como a teoria dos conjuntos também reflete na sua axiomática a nossa visão intuitiva individualizadora desse objeto. Em resumo, o axioma da extensionalidade na teoria dos conjuntos, bem como a noção de identidade nesta teoria advinda da lógica, parecem refletir a visão usual da identidade dos objetos que temos, a saber, de que cada objeto possui um conjunto de propriedades só seu, que é um *indivíduo*.[31] Além disso, os próprios objetos da noção Cantoriana de "coleção de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou pensamento" só podem ser tratados como tais nos sistemas axiomáticos se os mesmos apresentarem identidade (ou que respeitem alguma teoria da identidade): para afirmarmos que um objeto é distinto de um outro, precisamos que exista uma teoria de identidade que mostre que tal objeto não seja é idêntico a outro! Para alcançarmos isso na teoria usual (extensional) de conjuntos, como dito, é necessário que valha então alguma forma de 'axioma da extensionalidade', de modo que os conjuntos e seus elementos, em ZFC, são sempre passíveis de ou serem comparados como iguais ou não (haja vista que vale a lei do terceiro excluído a partir da lógica clássica que está embasando tal teoria).[32] Outrossim, apesar das limitações existentes, vimos que todas as tentativas formais de se erigir o conceito de igualdade em lógica também têm em vista capturar a noção de *indivíduo* que parece que temos intuitivamente: dado que tal lógica subjaz à teoria conjuntista, como dito, nos comprometemos com a individualidade do princípio ao

[31] Vale ressaltar que tanto o princípio da extensionalidade, bem como o conceito da identidade dos elementos de um conjunto, depende como visto da teoria de identidade que estamos usando: no caso, aqui, estamos assumindo a lógica clássica e seus pressupostos.

[32] Vale apenas citar que há teorias "intensionais" de conjuntos onde há identidade mas não vale o Ax. da Extensionalidade.

fim. Podemos inclusive enunciar também outras características do sistema de Zermelo-Fraenkel que nos levam de certo modo a acreditar que tal teoria tem, como pano de fundo intencional, indivíduos na acepção intuitiva do termo, nos moldes vistos anteriormente. Primeiramente, tal qual a lógica clássica, o símbolo de igualdade '$=$' aqui é usado no sentido de identidade, ou seja, se $x = y$, então x e y denotam o mesmo objeto. Como já observado, a recíproca do axioma da extensionalidade, qual seja, que conjuntos idênticos têm os mesmos elementos, é consequência de um dos axiomas da igualdade (a substitutividade da igualdade) do Cálculo de Predicados Clássico. Sendo assim, o axioma da extensionalidade e sua recíproca, juntamente com os axiomas da igualdade do CQC, fornecem a caracterização do conceito de igualdade na teoria de conjuntos que, com tais alicerces formais, torna os seus como sendo passíveis de serem rotulados e identificados individualmente como objetos definidos e distintos, *como indivíduos*: como vimos, em ZFC, sempre é possível dizer que dois objetos são ou não são o mesmo objeto, o mesmo indivíduo, por pertencerem ou não pertencerem a todos os mesmos conjuntos; por terem ou não terem o mesmo conjunto de propriedades.[33] Isso tudo se traduz em duas palavras: identidade e individualidade.

Como é bem sabido, podemos por sua vez fundamentar a matemática usual em uma teoria de conjuntos (no caso, aqui, a de ZFC), haja vista que suas estruturas fundamentais podem ser erigidas em tal teoria.[34] Dito de outro modo, afirmar que a matemática clássica pode fundamentar-se numa teoria de conjuntos como a de ZFC, significa dizer que pode-se erigir a matemática clássica utilizando construtos conjuntistas. Se partirmos do pressuposto que a teoria de ZFC está então assentada sobre princípios que concebem seus elementos como indivíduos em alguma acepção, podemos afirmar que a matemática também apresenta os mesmos comprometimentos que a teoria conjuntista (ou seja, o que é válido em ZFC, também é válido na matemática erigida nessa teoria). Com efeito, se a teoria de conjuntos se compromete com algumas posições, a matemática erigida em tal teoria não pode se abster de também se comprometer com essas posições. Em especial, como visto, tal comprometimento se apresenta em parte pelo modo pelo qual é feita a caracterização da identidade em tal teoria conjuntista, somada à lógica que a sustenta (nesta última, como vimos, a partir dos chamados "Princípios de

[33] Apesar de não analisarmos tais casos aqui, parece que este fato também aparece nas outras teorias de conjuntos que citamos por alto acima.

[34] É claro que a teoria de conjuntos não é o único lugar onde pode ser assentada a matemática: também existem abordagens em que assentam a matemática na teoria das categorias, ou em lógicas de ordem superior, ou até mesmo em alguns tipos de mereologias, existindo assim diversas maneiras de fundamentarmos o que usualmente é chamado de matemática clássica. Todavia, como dito no texto, a teoria de conjuntos é a teoria mais usual onde a matemática é normalmente assentada, bem como também é a mais utilizada até mesmo no discurso filosófico.

Leibniz", no qual todos objetos que partilham de todas as características são o mesmo objeto). Sendo assim, podemos afirmar *que tudo leva a crer* que a matemática erigida em uma teoria de conjuntos em que a noção de indivíduo é presente, também se torna individualizante. Todavia, vale ressaltar que este é *um* ponto de vista ou uma *possibilidade* de se entender os objetos matemáticos (a saber, como comprometidos com a noção de indivíduo), a qual nem de longe é consensual. Com efeito, para outros autores, a matemática seria ontologicamente neutra (esta, por exemplo, é a posição de Mario Bunge em (BUNGE, 1977)). O que queremos defender, entretanto, é que parece razoável dizermos que a matemática está sim comprometida com alguma noção de indivíduo, já que tal comprometimento se apresenta desde as próprias teorias onde ela se assenta. Obviamente, esse argumento não pode ser provado de forma definitiva, de modo que se torna apenas uma *posição* ontológica: a prova que podemos dar para tal posição é o que enfatizemos no decorrer desse texto. Neste caso, é como se enfim não tivéssemos nenhum critério final para estabelecer se a matemática está ou não comprometida com a noção de indivíduo e que podemos apoiar, com bons argumentos, tanto uma como a outra posição (neste sentido, veja também (GELOWATE, *et. al.*, 2003)). Logo, aqui, apoiaremos a que vai mais ao encontro do que acreditamos. Abaixo, na seção 2.6, ainda falaremos mais sobre tal partido.

Não obstante a teoria de conjuntos se comprometer ou não com indivíduos, como tal teoria se assenta na lógica clássica, os problemas que vimos acima relativos à definição do conceito de identidade em tal disciplina (como por exemplo, a ambiguidade que resulta da formalização da identidade na lógica) acabam 'contaminando' também tal teoria conjuntista. Sendo assim, parece que só podemos falar de *identidade (no sentido de indiscernibilidade) entre os objetos relativamente a uma estrutura*: embora a noção de estrutura também seja erigida em uma teoria de conjuntos, existem formas de se conseguir dar um trato 'mais seguro' à questão da identidade utilizando tal noção. Não obstante, como veremos, certas particularidades das estruturas conjuntistas também irão acabar por refletir — e até mesmo fortalecer! — a ideia do comprometimento com a individualidade dos objetos em ZFC. Exploraremos tais características agora.

3.5 A FORÇA DA LINGUAGEM CONJUNTISTA

Vamos assumir, como explicitado acima, a linguagem da teoria de conjuntos como sendo a linguagem da lógica de primeira ordem, acrescida de um predicado binário de pertinência e eventualmente de átomos (os Urelemente). Em ZF, suposta consistente, podemos mostrar que não existe conjunto universal (um conjunto contendo todos os conjuntos como elementos), mas há teorias de conjuntos com conjuntos universais (como o sistema de Church ou o sistema NF). Da mesma forma, em ZF, a coleção de todos os grupos, bem como a coleção de todos os espaços vetoriais reais, *não são conjuntos*, mas podem ser considerados como *classes* próprias na teoria NBG. Nesta teoria, as classes que pertencem a outras classes são chamadas de 'conjuntos' e, de certo modo, coincidem com os conjuntos de ZF. Não obstante, mesmo entidades típicas da teoria das categorias podem ser expressas em teorias de conjuntos fortalecidas com axiomas envolvendo universos.[35] De pronto se vê que a capacidade expressiva desta linguagem, independente de qual sistema se tome, é muito grande, e muitas vezes podemos expressar em outra teoria algo não permitido em uma delas (é o caso do conjunto universal acima mostrado). No entanto, as teorias usuais de conjuntos são como já dito restritas a indivíduos, e isso pode ser desagradável para uma teoria que objetive ver as entidades quânticas como não-indivíduos (num sentido que iremos explicitar no próximo capítulo). De qualquer forma, vejamos por enquanto como a lógica, a semântica e a teoria de conjuntos poderiam tratar da indiscernibilidade (e identidade) entre objetos a partir da noção de *estrutura*.

3.5.1 Indiscernibilidade em uma estrutura

Um modo objetivo de avaliarmos a capacidade expressiva da linguagem da teoria de conjuntos é observar como podemos tratar de entidades indiscerníveis (idênticos) no contexto de alguma teoria que faça uso dessa linguagem. Aqui, iremos tratar apenas na teoria de ZFC (sem Urelemente), assumindo também o axioma da regularidade ou da fundação: $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$. Intuitivamente, este axioma diz que todo conjunto é bem fundado, ou seja, se tivermos conjuntos de subconjuntos e 'olharmos para seu interior', iremos acabar ou no conjunto vazio ou em átomos. Átomos, como já dito anteriormente, não são conjuntos, mas podem ser elementos de conjuntos.

A noção de conjunto bem fundado é consoante com a noção intuitiva de que formamos conjuntos a partir de elementos já obtidos. Deste modo, se assumirmos o axioma da regularidade acima, não é permitido a um conjunto ser elemento dele mesmo (como por exemplo, o conjunto $A = \{1, 2, A\}$: tal conjunto 'não tem fundamento'). Isso, no entanto, é matematicamente sem relevância: em outras palavras, a existência desses conjuntos estranhos à intuição em nada afetam o desenvolvimento da matemática usual. Para nossos propósitos, no entanto, ficaremos como dito restritos aos conjuntos bem

[35] Sobre as diversas teorias de conjuntos e suas diferenças, ver (KRAUSE, 2002, cap. 5).

fundados pela conveniência e porque aparentemente eles bastam para os propósitos das teorias físicas usuais, em especial a física quântica. Para entender como manipulamos objetos indicerníveis em ZFC, o que será feito relativamente a uma estrutura, durante o texto iremos necessitar definir algumas coisas.

A primeira delas é a noção de "universo dos conjuntos bem-fundados", ou "hierarquia cumulativa de von Neumann", que pode ser construída da seguinte forma se admitirmos que no universo não há Urelemente. Sendo α, β,... números ordinais, e designando como $\mathscr{P}(A)$ o conjunto das partes (ou dos subconjuntos) de um conjunto A, definimos (POTTER, 2004, p. 72/3):

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_1 = \mathscr{P}(V_0)$$
$$\vdots$$
$$V_{n+1} = \mathscr{P}(V_n)$$
$$\vdots$$
$$V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta \text{ se } \lambda \text{ é um ordinal limite}$$ [36]
$$\vdots$$
$$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha, \text{ onde } On \text{ é a classe dos ordinais.}$$

Desta forma iniciamos com o conjunto vazio, sem elementos, e vamos obtendo outros conjuntos em etapas posteriores a partir das etapas já alcançadas 'acumulando' os conjuntos já obtidos nas etapas posteriores. Todo conjunto bem-fundado está em alguma etapa dessa hierarquia e, se estiver um uma etapa, estará em todas as subsequentes (mais 'altas' que ela). O menor ordinal α para o qual $A \in V_\alpha$ é chamado de rank do conjunto A.

Por exemplo, suponha que temos dois conjuntos a e b obtidos em alguma etapa. Em uma etapa posterior, podemos obter (pelo axioma do par[37])

[36] Um ordinal limite é um ordinal que não é um sucessor. Um ordinal sucessor é um ordinal η, tal que existe um ordinal ν, de modo que $\eta = \nu + 1$. Por exemplo, ω, o primeiro ordinal transfinito, é um ordinal limite. Todos os números naturais não são ordinais limite.

[37] Este axioma é enunciado assim: "dado x e y quaisquer, existe um conjunto que contém x e y como elementos e somente eles: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$". Este conjunto é denotado por $\{x, y\}$, dito par *não ordenado* de x e y. A partir do axioma da extensionalidade, é possível provar que para quaisquer x e y, $\{x, y\} = \{y, x\}$. Além disso, nesse axioma, não está dito que o x e o y não possam ser o mesmo conjunto, daí surgindo a definição de *conjunto unitário* de x: $\{x\} =_{def} \{x, x\}$.

os conjuntos $\{a\}$ e $\{a,b\}$; em uma etapa ainda posterior obtemos, de novo pelo axioma do par, {{a}, {a, b}}, ou seja, o par ordenado $\langle a,b\rangle$.[38] Da mesma forma, uma operação binária sobre um conjunto A, que como se sabe é uma função de $A\times A$ em A, é um elemento de $\mathscr{P}(A\times A\times A)$ e, portanto, para obtê-la devemos antes dipor de A, depois de $A\times A\times A$, e finalmente de $\mathscr{P}(A\times A\times A)$.[39]

Um objeto em ZFC é então um conjunto que esteja na hierarquia cumulativa usual acima descrita, ou seja, aquela construída a partir do vazio (no caso, sem Urelemente), por meio da interação através das classes dos ordinais das operações de conjunto das partes e da união.

A partir de tal hierarquia cumulativa, podemos definir a noção de *estrutura matemática*. Em um primeiro momento, uma estrutura (matemática) pode ser definida como uma sequência finita de conjuntos base — que podem ser reduzidos a apenas um, bastando para isso fazer a união dos conjuntos que houver e adaptando os demais conceitos envolvidos —, e de relações sobre esses conjuntos (que também são operações conjuntistas) gerados do modo acima descrito. Esses conjuntos base formam o chamado domínio da estrutura. De modo geral, uma estrutura então nada mais é do que uma n-upla ordenada que contém alguns conjuntos base e elementos de uma escala de conjuntos que tem como base os conjuntos dados (ver (KRAUSE, 2002, p. 18ss.)). Sendo assim, uma estrutura em ZFC é um construto matemático abstrato de natureza conjuntista.[40]

[38]Esta definição é devida ao matemático russo C. Kuratowski (KRAUSE, 2002, p. 125).

[39]Se admitirmos a existência de Urelemente no nosso universo, não iniciamos mais com o conjunto vazio, mas com uma coleção A de Urelemente, de modo que então definimos:

$$\begin{gathered}
V_0 = A \\
V_1 = V_0 \cup \mathscr{P}(V_0) \\
\vdots \\
V_{n+1} = V_n \cup \mathscr{P}(V_n) \\
\vdots \\
V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta \text{ se } \lambda \text{ é um ordinal limite,} \\
\vdots \\
V = \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha, \text{ onde } On \text{ é a classe dos ordinais.}
\end{gathered}$$

[40]Nesta seção, daremos apenas algumas noções gerais sobre a definição de estrutura matemática que importam para os nossos propósitos de momento. No capítulo 5 será feita uma análise mais detalhada de tal conceito: para uma definição de escala de conjuntos, pode-se consultar esse capítulo.

Em geral, as estruturas em ZFC são apresentadas como uma n-upla da seguinte forma:

$$\mathfrak{A} = \left\langle A, (R_i)_{i\in I}, (f_j)_{j\in J}, (a_k)_{k\in K} \right\rangle,$$

onde A é um conjunto não vazio (o domínio da estrutura); $(R_i)_{i\in I}$ representa uma família de relações sobre A (cada uma com uma certa aridade n, podendo-se admitir $n = 1$, que chamamos de 'propriedades', e $n = 0$, que chamamos de 'constantes individuais'); f_{j_s} representa funções sobre o domínio A; a_k elementos do domínio; e I, J e K conjuntos de índices que representam a aridade de cada elemento. Um exemplo bastante comum de estrutura é a estrutura dos grupos: $\mathfrak{G} = \langle G, \star \rangle$, sendo G um conjunto não vazio, e $\star$ uma operação binária sobre G, ou seja, uma função $G \times G \mapsto G$ que associa a cada par $\langle a, b \rangle$ de elementos de $G \times G$ um elemento $a \star b$ de G. Como vimos, essa operação pode ser vista como uma relação de aridade 3 sobre G (cujos elementos são triplas ordenadas da forma $\langle a, b, a \star b \rangle$). Se $\star$ cumpre os conhecidos postulados de grupo, teremos uma *espécie de estruturas* de grupo para empregar a terminologia de Bourbaki. Os grupos propriamente ditos, são então as estruturas dessa espécie. Segundo Krause (KRAUSE, 2002, p. 79) e Krause e Coelho (KRAUSE e COELHO, 2005), devido às dificuldades antes mencionadas para o trato da identidade na lógica clássica, parece que somente se pode falar em indiscernibilidade relativizada a uma certa estrutura matemática, pois aqui temos a vantagem de se poder contar com a noção de distinguibilidade (respect., indistinguibilidade) *relativa apenas a uma estrutura*. Passaremos a falar desses conceitos agora.

Para os nossos propósitos, vamos apresentar a estrutura acima de um modo mais simples, tomando apenas o domínio e um conjunto de relações sobre esse domínio. Isso basta para introduzirmos a importante noção de *automorfismo*. De maneira geral, um automorfismo em uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle D, (R_i) \rangle_{i\in I}$ é uma função bijetiva $h : D \to D$, tal que se $R_i(x_1, ..., x_n)$, então $R_i(h(x_1), ..., h(x_n))$ para toda relação R_i de aridade n. Dito de outra forma, um automorfismo na estrutura $\mathfrak{A}$ é uma bijeção de D em D que preserva cada função de $\mathfrak{A}$, cada relação de $\mathfrak{A}$ e o complementar de cada relação de $\mathfrak{A}$. A coleção desses automorfismos, considerada com a operação de composição de funções, forma outro grupo chamado de grupo dos automorfismos de $\mathfrak{A}$ ou grupo de Galois de $\mathfrak{A}$ (*Cf.* (KRAUSE, a aparecer)).[41] Desta forma, os automorfismos da estrutura de grupo $\mathfrak{G}$ acima, por exemplo, são as funções bijetivas $f : G \mapsto G$ tais que $x \star y = f(x) \star f(y)$.

A partir da definição de automorfismo podemos introduzir uma outra noção, a saber, a de distinguibilidade relativa a uma estrutura, definição na qual desempenha um papel central a noção de invariância sob automorfismos

[41] Na seção 5.2.5 desta tese falarei disso detalhadamente.

(KRAUSE e COELHO, 2005; MARIANO, 2005, cap. 2; GELOWATE, *et. al.*, 2003):

Definição: *Seja $\mathfrak{U}$ uma estrutura e a e b elementos do domínio D dessa estrutura. Diz-se que a e b são $\mathfrak{U}$-distinguíveis (ou distinguíveis em $\mathfrak{U}$) se, e somente se, existe um subconjunto $X \subseteq D$ tal que:*

1. X é invariante sob os automorfismos de D, ou seja, $f(X) = X$ para todo automorfismo f de A;

2. $a \in X$ se e somente se $b \notin X$.

Caso contrário, dizemos que a e b são $\mathfrak{U}$-indistinguíveis (ou indistinguíveis em $\mathfrak{U}$).

Sendo assim, dois elementos a e b de uma estrutura $\mathfrak{U}$ são indiscerníveis (ou indistinguíveis) com respeito à estrutura se existe um automorfismo h de $\mathfrak{U}$ tal que $h(a) = b$. Como h, por ser bijetiva, é inversível, sua inversa também é um automorfismo da estrutura, e sendo assim b também é levado em a por um automorfismo (precisamente h^{-1}). Em contextos extensionais (como em ZFC), onde uma propriedade pode ser identificada com uma coleção de objetos, podemos afirmar que dois elementos são $\mathfrak{U}$-indistinguíveis *quando eles pertencem às mesmas coleções de elementos do domínio que são (tais coleções) invariantes sob os automorfismos da estrutura* (*cf. ibid.*). Do ponto de vista intuitivo, com o objetivo de considerar dois objetos a e b, por exemplo, como indistinguíveis, o que necessitamos então é 'esquecer' certas propriedades distintivas que eles podem ter e considerar, numa certa estrutura, somente aquelas que são relevantes para os propósitos que temos em mente, mas que não são suficientes para então reconhecê-las como indivíduos distintos. Por outro lado, como reza a definição, a e b são $\mathfrak{U}$-distinguíveis se, e somente se, não existe um automorfismo f de $\mathfrak{U}$ tal que $f(a) = b$; existindo então necessariamente um $X \subseteq D$ que é invariante sob automorfismos de $\mathfrak{U}$, tal que $a \in X$, mas que $b \notin X$ (GELOWATE, *et. al.*, 2003; KRAUSE, a aparecer).

Sendo assim, a ideia básica aqui é que a indistinguibilidade na estrutura $\mathfrak{U}$ *não requer o compartilhamento de todas as propriedades*, mas apenas daquelas que *são invariantes sob os automorfismos* de $\mathfrak{U}$ e que ficam, assim, *restritas à estrutura considerada* (*cf.* (GELOWATE, *et. al.*, 2003)). Por exemplo, no caso de uma espécie de estruturas de grupos, suponhamos que G acima é o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros e que + é a adição de inteiros, de modo que obtemos então uma estrutura $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Uma função $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = -x$ para $\forall x \in \mathbb{Z}$ é um automorfismo de $\mathfrak{Z}$. Então podemos mostrar que o grupo de Galois de $\mathfrak{Z}$ tem somente dois elementos: a função identidade $i(x) = x$ (que é sempre um automorfismo); e a função $f(x) = -x$.

Assim, qualquer que seja $x \in \mathbb{Z}$, temos que x e $-x$ são $\mathfrak{Z}$-indistinguíveis na (ou pela) estrutura. Neste caso (ou melhor, nesta estrutura), podemos afirmar que $b = -b$ porque b e $-b$ *são indistinguíveis com os recursos (ou dentro) da estrutura em questão*. Todavia, sabemos que 2 e -2, por exemplo, são diferentes, mas isso não pode ser visto a partir da estrutura em apreço. Das definições acima, pode-se concluir que no escopo da matemática e lógicas usuais, o conceito de indiscernibilidade, entendido aqui como a permutação dos elementos de um domínio de interpretação através de automorfismos, sempre é relativo a uma determinada estrutura considerada.[42]

3.5.2 Estruturas rígidas

Uma estrutura é rígida se seu grupo de Galois é unitário e é composto apenas pelo automorfismo identidade (que é sempre um automorfismo, como dito). Sendo assim, as estruturas rígidas são exatamente aquelas nas quais a indistinguibilidade (relativa a uma estrutura, tal como foi definido acima), e a identidade (aqui entendida do modo usual, como sendo o mesmo objeto), *realmente* coincidem.[43] Tal fato pode ser assim demonstrado (GELOWATE, *et. al.*, 2003). Suponha que existe um automorfismo f de $\mathfrak{U}$ que não é a função identidade. Então existe um a no domínio, tal que $f(a) = b \neq a$. Mas sendo $b \neq a$ e, por hipótese, em tal estrutura a identidade e a $\mathfrak{U}$-indistinguibilidade coincidem, então existe um subconjunto X do domínio tal que: (i) X é invariante sob automorfismos; e (ii) $a \in X$, mas $b \notin X$. Mas isso é uma contradição, pois sendo X invariante sob automorfismos, e $a \in X$, deveríamos ter $f(a) = b \in X$ (*cf.* (KRAUSE e COELHO, 2005)). Desta forma, as estruturas rígidas são exatamente aquelas nas quais podemos usar a propriedade de "ser idêntico a a" para caracterizar a e distinguí-lo (nessas estruturas) dos demais objetos do domínio por meio do conceito de distinguibilidade em uma estrutura (que, como dito, agora coincide com a identidade). Veja que em tal estrutura rígida, como a identidade e a indiscernibilidade estão coincidindo, fazemos uso de *todas* as propriedades e não apenas (tal como feito na seção anterior) das que são invariantes sob os automorfismos da estrutura considerada. Importante dizer que a indistinguibilidade relativizada a um universo de ZFC *coincide com a identidade usual*, já que sendo V o universo de ZFC, a estrutura $\mathfrak{V} = \langle V, \in \rangle$ que, digamos, é a 'estrutura de ZFC', *é rígida* (e sendo assim também o são todas as estruturas construídas em ZFC), o que nova-

[42]Não obstante, para tal conclusão ser válida, é necessário que a estrutura $\mathfrak{V} = \langle V, \in \rangle$ (que é a 'estrutura de ZFC', sendo V o universo de ZFC) seja rígida, o que de fato acontece (veja abaixo).

[43]Um exemplo de estrutura rígida é a estrutura $\mathfrak{R} = \langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ que corresponde ao corpo ordenado completo dos números reais. No capítulo 5, daremos mais exemplos de estruturas rígidas.

mente reforça a tese da identidade expressando uma individualidade.[44]

Todavia, em nosso exemplo acima, 2 e -2 (bem como quaisquer outros dois inteiros opostos nessa estrutura) são indiscerníveis em $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, pois $f(2) = -2$, e as relações da estrutura não são suficientes para discernir n de $-n$. Do modo definido, essa estrutura possui então dois automorfismos, ou seja, duas bijeções de $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que preservam as operações da estrutura: como dito, a função identidade, e a função f que mapeia cada inteiro x no seu oposto $-x$. Logo, tal estrutura não é rígida, pois seu grupo de Galois não é unitário. Mas essa estrutura está mergulhada em um universo de ZFC (ou seja, é uma estrutura que tem por alicerce a teoria de ZFC), e dissemos acima que a estrutura $\mathfrak{V} = \langle V, \in \rangle$, sendo V o universo de ZFC, é rígida. Isso seria uma contradição? Negativo, pois isso não quer dizer que x e $-x$ não possam ser discernidos de outra forma: com efeito, a rigidificação (e assim a discernibilidade no sentido de identidade entre 2 e -2) pode sim ser alcançada formalmente, apesar de poder ser percebida somente '*de fora*' da estrutura original $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, ou seja, no contexto de $\mathfrak{V} = \langle V, \in \rangle$ que é onde ela está mergulhada. O motivo disso é devido a um importante teorema que diz que *toda estrutura de ZFC não rígida pode ser estendida a uma estrutura rígida*.[45] Isso pode ser feito de várias formas, mas para a discussão do presente capítulo nos basta apresentar um exemplo. A estrutura do exemplo acima pode ser transformada em uma estrutura rígida acrescentando-se a ela novas relações (no caso, unárias) que consistem de todos os subconjuntos unitários dos elementos de $\mathbb{Z}$ (que logicamente corresponde à propriedade "ser idêntico a si mesmo"). Deste modo, obtemos a estrutura estendida $\mathfrak{Z}' = \langle \mathbb{Z}, +, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, ... \rangle$, que como facilmente se vê é rígida.[46] Todavia, esse fato se prova 'fora' de $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, isto é, exatamente no universo de ZFC onde a estrutura $\mathfrak{Z}$ está erigida (dito de outra forma, a estrutura acima em que estão incluídas as relações de primeira ordem é uma extensão da estrutura original, e suas relações rigidificadoras estão *fora* da estrutura original: no universo de ZFC que é seu alicerce).[47] Sendo assim,

---

[44] A prova de que na "estrutura de ZFC" não existem automorfismos distintos da identidade pode ser encontrada em (JECH, 1997, p. 74).

[45] Prova-se isso utilizando-se alguns teoremas relativos a isomorfismos e automorfismos. No capítulo 5 desta tese, mostraremos e discutiremos detalhadamente essa prova. Não obstante, no mesmo capítulo, mostraremos que tal fato não pode ser alcançado nas teorias de quase-conjuntos (teoria esta que mostraremos no capítulo 4).

[46] Outra forma de se fazer isso é ampliar $\mathfrak{Z}$ com a introdução da relação de ordem padrão $<$, obtendo assim $\mathfrak{Z}'' = \langle Z, +, < \rangle$ (*cf.* (DA COSTA, *et. al.*, 2012)).

[47] Neste sentido, outros exemplos de estruturas não rígidas são $\mathfrak{C} = \langle C, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, que corresponde ao corpo dos complexos (nesta estrutura, a função que associa a um número complexo o seu conjugado é um automorfismo de $\mathfrak{C}$ que não é a função identidade), e a estrutura $\mathfrak{P} = \langle V, K, +, \cdot \rangle$, dos espaços vetoriais sobre um corpo K de dimensão finita, onde V é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados de "vetores" (*cf.* (KRAUSE, 2008)). Vale ressaltar, entretanto, que essas duas últimas estruturas — por serem estruturas em ZFC — também

mesmo que dois objetos a e b sejam indiscerníveis relativamente a uma estrutura qualquer $\mathfrak{A}$, se esta estrutura estiver alicerçada em ZFC, ela pode ser estendida a uma outra estrutura $\mathfrak{A}'$ na qual 'se pode ver' (mesmo que seja de fora da estrutura original) que esses objetos são elementos (e assim indivíduos) distintos. Moral da história: em ZFC, todo objeto é um indivíduo, no sentido de que pode sempre ser discernido de qualquer outro distinto dele, mesmo que para isso tenha-se que estender (no sentido de rigidificar) a estrutura a qual o objeto pertence, e que assim a distinção acabe se mostrando de fora da estrutura original. De certo modo, pode ser afirmado com isso que em ZFC não há não-indivíduos 'legítimos'! Como dizem (GELOWATE, *et. al.*, 2003), tal como também afirmamos no primeiro parágrafo desta seção, isso é claramente um indicativo do comprometimento de ZFC (e da matemática nela erigida) com uma ontologia de indivíduos, já que o mesmo também vai acontecer em estruturas mais gerais.[48] Em resumo, mesmo tomando a definição acima de "indistinguibilidade em uma estrutura", se tivermos dois objetos que estão se mostrando indiscerníveis pelos recursos da estrutura, essa estrutura (em ZFC) pode ser expandida de modo a podermos nos 'garantir' que esses objetos são o mesmo ou que, na verdade, são sim *dois* objetos que estão se revelando iguais apenas pela estrutura original não-rígida.

Um ponto de destaque se refere ao fato de que há aqui 'dois' tipos de rigidificação envolvidas: uma se refere àquela na qual a estrutura original já está rígida e que, no sentido da discussão abordada, não haveria sentido estendê-la a uma estrutura rígida, e outra em que a rigidificação é possível de ser feita fora da estrutura não-rígida original. Neste último caso, como tentamos enfatizar no texto, estaríamos trabalhando com o apanágio do próprio universo fundamental ser rígido. Como enfatizamos acima, o fato do universo de ZFC ser rígido também nos ajuda a defender a visão de que esta teoria se compromete com uma individualidade de seus objetos, característica essa que acaba por 'afetar' todas as estruturas nela construídas. Obviamente, há aqui dois tipos de problema: um acerca da rigidificação em uma estrutura dentro do universo; e outro da rigidificação do próprio universo, e poderia ser

---

podem ser rigidificadas como mostraremos no capítulo 5. Além disso, é bom mencionar que a estrutura apresentada no exemplo dado no texto é uma estrutura de primeira ordem, ou seja, as relações envolvidas aplicam-se unicamente a elementos do domínio, e não a seus subconjuntos, subconjuntos dos subconjuntos etc., o que daria as estruturas de ordem superior. No entanto, como veremos, o resultado de rigidificação apontado pode também ser estendido para essas estruturas de ordem superior.

[48]Em (DA COSTA, *et. al.*, 2012), mostramos um caso em que poderíamos construir um modelo interno de ZFU, e um de ZFC, nas quais podemos *simular* a relação de indistinguibilidade — que como vimos é distinta da identidade — de modo que não ficamos comprometidos com indivíduos. Todavia, esta construção apenas disfarçaria essa perda de comprometimento, haja vista que como a construção ainda é feita em ZFC, a noção de indivíduo (e de identidade) na teoria de fundo subjacente permanece.

dito que a estrutura estendida (que é rígida) não é mais a estrutura original (não-rígida). No futuro discutiremos mais sobre essa 'diferença', e como um dos resultados fundamentais da nossa tese *mostraremos que estruturas feitas na teoria de quase-conjuntos não podem ser rigidificadas*, fato que então nos dará segurança para falarmos de "não-indivíduos" de acordo com uma concepção que descreveremos nos próximos capítulos.

Estruturas adequadas para descreverem certas áreas da matemática, bem como certas teorias físicas (ou para serem modelos dessas teorias), obviamente terão que ser bem mais complexas do que as descritas acima. Eis alguns exemplos. No caso da matemática, da mesma forma que temos a estrutura $\mathfrak{G} = \langle G, \star \rangle$ para grupos, temos a estrutura $\mathfrak{C} = \langle C, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ (que corresponde ao corpo dos complexos) e a estrutura $\mathfrak{P} = \langle V, K, +, \cdot \rangle$ (dos espaços vetoriais sobre um corpo K de dimensão finita), dadas estas duas últimas em nota acima, bem como também a estrutura $\mathfrak{T} = \langle A, \tau \rangle$ para espaços topológicos (novamente, A é um conjunto não vazio, e τ uma coleção de sub-conjuntos de A, chamado de uma topologia), cada uma delas satisfazendo seus postulados correspondentes. Para teorias físicas ocorre algo parecido. No caso da mecânica clássica de partículas, uma das possibilidades é uma estrutura da forma $\mathfrak{M} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$, onde P é o conjunto das 'partículas'; T é um conjunto que representa a coleção de instantes de tempo (em geral, um intervalo fechado da reta real); s é uma 'função posição' de uma partícula em um tempo dado; m é uma função de P em $\mathbb{R}^+$ (que representa a massa das partículas); enquanto que f e g são funções que correspondem as forças internas e externas do sistema, tudo isso obedecendo certos axiomas (no caso, as leis de Newton[49]). Para a mecânica quântica não relativística, segundo Dalla Chiara e Toraldo di Francia (CHIARA e TORALDO DI FRANCIA, 1979), podemos ter algo como $\mathfrak{Q} = \langle M_0, S, Q_0, ..., Q_n, \rho \rangle$, onde M_0 é o modelo da análise funcional standard (onde podemos desenvolver a teoria dos espaços de Hilbert); S é um conjunto cujos elementos são chamados de sistemas físicos; os Q_i representam observáveis físicos; e ρ é uma função que associa a cada $s \in S$ um adequado espaço de Hilbert em M_0, e a cada Q_i um operador linear Hermitiano sobre os espaços de Hilbert relevantes, novamente tudo isso satisfazendo determinados axiomas.[50] Todavia, em todos esses casos a ideia básica permanece sendo a mesma: temos conjuntos e relações de várias ordens sobre os elementos desses conjuntos e, como podemos construir tal estrutura em ZFC, se a mesma não for rígida podemos falar de elementos indiscerníveis relativamente a uma estrutura que poderão sempre ser distinguidos 'fora' da estrutura (no caso extremo, no universo $\mathfrak{V} = \langle V, \in \rangle$ que, como visto, é uma

[49] Ver (SUPPES, 1957, cap. 12)

[50] No capítulo 7 desta tese daremos mais exemplos de estruturas para 'representar' a mecânica quântica.

estrutura rígida.[51]) Isso, como estamos tentando mostrar, leva a um comprometimento com indivíduos devido a todo este arcabouço formal conjuntista subjacente. Com efeito, o mesmo é dito por French e Krause (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 246):

> Podemos dizer que não é somente a mecânica clássica que usa conceitos tomados da nossa experiência ordinária, mas essencialmente a matemática (e a lógica), em certo sentido, também o fazem. Por exemplo, quando alguém pensa em um conjunto, ele ou ela intuitivamente pensa em uma coleção de 'objetos clássicos', como àqueles que nos rodeiam, ou seja, indivíduos [...]. Então, baseado como eles são nas teorias matemáticas padrão, teorias físicas se tornam — em certo sentido — dependentes [...] de tal matemática, e uma teoria física baseada na lógica e matemática não pode recusar os teoremas de tal base lógica e matemática.

Em resumo, então o que temos é o seguinte. Em todas as situações em que podemos trabalhar com estruturas da forma $\mathfrak{U} = \langle A, (R_i) \rangle_{i \in I}$ (como, por exemplo, quando se pretende fundamentar matematicamente a física), estas são erigidas em uma teoria de conjuntos (dito de outra forma, são construtos conjuntistas). Sendo assim, todas as considerações teóricas desenvolvidas nesta teoria se aplicam a estas situações. No caso da matemática usual, construída (por exemplo) em ZFC, podemos levar em conta a indiscernibilidade unicamente mediante determinadas restrições, o que equivale ao confinamento a determinadas estruturas não rígidas. A grande dificuldade, neste caso, é que mesmo para aquelas estruturas com vários automorfismos distintos da identidade, sempre podemos enriquecer a estrutura de modo a obter novas estruturas que são, por sua vez, rígidas, dotando o objeto de uma identidade mesmo 'fora' da estrutura original: assim, como diria Lewis Carroll, o "sorriso do gato permanece".[52]

Desta forma, como veremos nos próximos capítulos, para fundamentar certas áreas do conhecimento seria bom que encontrássemos uma teoria de conjuntos alternativa na qual não conseguíssemos rigidificar as estruturas nela baseadas e, desta forma, não pudéssemos em tais estruturas identificar os

---

[51] A estrutura $\mathfrak{V} = \langle V, \in \rangle$ trata-se, no entanto, de uma estrutura que não pode ser construída em ZFC, já que é um 'modelo' de ZFC (*cf.* (KRAUSE, a aparecer)). Isso porque se conseguíssemos construir tal estrutura em ZFC, estaríamos provando a completude de ZFC no próprio ZFC, o que não é permitido devido ao segundo teorema de incompletude de Gödel (supondo ZFC consistente).

[52] Parafraseamos aqui uma frase de Michael Redhead usada em outro contexto: no caso, a mecânica quântica de campos (veja (REDHEAD, 1988)).

objetos presentes. Tal teoria existe e é chamada de teoria de quase-conjuntos. Como já afirmado, todavia, primeiramente teremos que garantir que em tal teoria alternativa as estruturas nela construídas não podem ser tornadas rígidas. Esta é uma das preocupações primordiais do nosso trabalho, a saber, mostrar que na teoria de quase-conjuntos não podem haver estruturas que possam ser rigidificadas, de modo que a mesma assim se torne um alicerce seguro para o trato de não-indivíduos, isto é, objetos indistinguíveis para os quais não vale a relação de identidade (de um modo que se tornará claro no decorrer deste trabalho). Desta forma, no capítulo 5, iremos detalhar a prova de que toda estrutura não-rígida clássica pode ser estendida a uma rígida, mas além disso mostraremos que na teoria de quase-conjuntos tal fato *não é possível de ser levado a cabo*. Em sequência, daremos alternativas quase-conjuntistas para os conceitos e definições mostrados no capítulo presente.

3.6 A 'SEMÂNTICA DE UM INDIVÍDUO'

Nessa última seção deste capítulo, apresentaremos mais alguns argumentos que podem fortalecer a visão de que a lógica clássica e a teoria de conjuntos (bem como a matemática nelas erigida) parecem realmente se comprometer com algum tipo de individualidade para seus objetos.

Na lógica clássica, todas as vezes em que falamos de a, b, Pa (respectivamente, constantes individuais e um predicado (propriedade) P de a), e assim por diante, parece que intuitivamente estamos sempre nos remetendo a algum indivíduo. Com efeito, isso se mostra na própria nomeação das constantes individuais[53] como a, b etc., as identificando univocamente, ou mesmo na visão de que um indivíduo (objeto) é algo que 'detém' um certo conjunto de propriedades (Pa, Fa etc.) individualizantes (algo refletido pelos axiomas da teoria de conjuntos, como vimos).[54] Além disso, da nossa discussão feita anteriormente, podemos concluir que o nosso 'objetivo intuitivo' é deveras que os entes da lógica clássica obedeçam *efetivamente* as leis da teoria

[53] Veja o leitor o caráter individualizador do próprio termo "constante *individual*". Vale a pena chamar a atenção para que não se confunda o termo 'indivíduo' aqui com uma pessoa: na lógica, o termo 'indivíduo' significa também um objeto, que como estamos aqui defendendo, é sempre bem determinado.

[54] Com efeito, intuitivamente pensamos que um indivíduo deve possuir alguma propriedade ou um conjunto delas (sejam elas físicas ou metafísicas), e tudo leva a crer que não poderiam existir indivíduos sem nenhuma propriedade! Todavia, como já dissemos, na MQ discussões recentes mostram que a ideia de que um indivíduo é um 'detentor de propriedades' é algo complexo. Não é nosso objetivo fazer aqui análises exegéticas da noção de propriedade de um indivíduo, embora no capítulo 3 desta tese explorarmos um pouco disso relacionado ao universo quântico. Uma boa exposição sobre tal tema e sobre as várias vertentes dessa discussão pode ser encontrada em (SWOYER e ORILIA, 2012).

clássica da identidade, que também são individualizadoras, não obstante as limitações expostas. Isso é ressaltado pelo fato de que, como vimos, a lógica standard é sustentada pela ideia Fregeana de que se $a = b$, o que temos é apenas um objeto (um indivíduo) sendo nomeado por dois nomes diferentes.[55] A ideia que queremos enfatizar aqui, então, é que tudo leva a crer que a lógica clássica, bem como as disciplinas nela assentada, efetivamente tratam (ou falam) de indivíduos que detêm algum tipo de identidade (no sentido de os reconhecermos como distintos de qualquer outro). Durante esta seção, tentaremos então mostrar alguns outros argumentos para enfatizar que tal posição pode realmente ser sustentada.

Sendo assim, para efeito de discussão vamos tomar tal tese como hipótese. Se realmente a lógica e matemática clássicas se comprometeriam com a visão de que seus 'entes' são dotados de individualidade, quais seriam então as características de um indivíduo do ponto de vista dessas disciplinas?[56] É claro que a resposta mais simples a essa questão, a qual se eleva de tais arcabouços teóricos, é que um indivíduo é um objeto, ser ou entidade que tem um conjunto de propriedades que é somente dele, que o individualiza, e que propriedades são idênticas se têm a mesma extensão (isto é, se têm os mesmos objetos que caem sob elas), algo que como vimos é assumido pelo axioma da extensionalidade. Outrossim, tal ideia também é a que é manifestada pela semântica usual da lógica clássica (*i. e.*, a semântica tarskiana padrão [standard]) que também é extensional: a extensão de um predicado é o *conjunto* de coisas às quais ele se aplica. Neste sentido, a extensão do predicado "moradores de Florianópolis", por exemplo, é o *conjunto* de todos os moradores (pessoas, indivíduos) de Florianópolis. Nesta semântica extensional, a cada variável proposicional se assinala um valor de verdade, a cada nome se assinala um elemento do domínio, e a cada predicado n-ário se assinala uma n-upla de elementos do domínio. Deste modo, a fórmula $\exists x P(x)$ é verdadeira se a extensão de P não for vazia, ou seja, se e somente se houver pelo menos um *indivíduo* satisfazendo a expressão $P(x)$; e a fórmula $\forall x P(x)$ é verdadeira se e somente se a extensão de P coincide com o domínio D (ou seja, se todos os *indivíduos* do domínio 'caem' no predicado P). Vemos como tudo isso enfatiza que os 'valores das variáveis', isto é, os objetos que são associados às variáveis da linguagem, são indivíduos: no escopo da lógica clássica atual, dizer que existe um indivíduo x que tem certa propriedade (se isso for considerado verdadeiro) significa dizer que existe um conjunto não vazio de indivíduos ao qual o referido indivíduo pertence. Se

[55] É claro que a lógica clássica é sustentada sobre outras ideias (ou leis), mas isso não vem ao caso aqui.

[56] Veja que não queremos saber quais são as características de um indivíduo *tout court* (que é algo complexo, como já dito), mas apenas como tais objetos são tratados na lógica clássica.

o predicado tomado for "idêntico a si mesmo", por sua vez, *apenas um indivíduo estaria no conjunto*. No mesmo sentido, e isso também é importante, se tivermos dois predicados com a mesma extensão (como, por exemplo, "a primeira presidenta do Brasil" e "a ex-ministra chefe da casa civil") então, segundo esta semântica, estes dois predicados têm o mesmo referente *único* (no caso, o 'indivíduo' Dilma Rousseff). Isso mostra como a quantificação e a semântica usual da lógica clássica nos compromete com hipóteses ontológicas acerca de indivíduos: existe somente um objeto que é Dilma Rousseff, que é a primeira presidenta do Brasil e que é ex-ministra chefe da casa civil (e claro, que detém mais outros predicados), e *qualquer 'outro' objeto com esses mesmos predicados é o mesmo objeto; o mesmo indivíduo*.[57] Por fim, ressalta-se o uso da noção de conjunto em tal semântica, ou seja, a semântica apresentada é realizada em uma teoria de conjuntos na qual os conceitos de 'função', 'par ordenado' etc. podem ser adequadamente definidos. Tal construto conjuntista nos faz retomar novamente ao que foi antes defendido, a saber, de que a teoria de conjuntos também parece se comprometer, via extensionalidade, com a visão individualizadora de seus elementos, fato que se aceito se transfere naturalmente à semântica extensional da lógica clássica.[58] De certo modo, é então como se tivéssemos a ideia de indivíduo sempre permeando e interligando a lógica clássica, a teoria de conjuntos e a matemática erigida sobre essas bases.

Além disso, segundo as regras da lógica elementar clássica, do ponto de vista sintático se temos uma sentença como "Aristóteles é filósofo", podemos representá-la em nossa linguagem (de primeira ordem) por Fa, sendo F — como dito acima — um símbolo para predicado unário ("ser filósofo"), e a uma constante individual do domínio (que representa "Aristóteles"). Outrossim, podemos substituir a constante por uma variável, digamos "x", obtendo "x é filósofo", ou seja, $F(x)$, e depois disso ainda ligar a variável por meio do emprego de um quantificador existencial, obtendo $\exists xF(x)$. Por Modus Ponens, se temos $F(a)$, podemos derivar que existe um x tal que x é filósofo, ou seja, podemos derivar $\exists xF(x)$.[59] Das características acima, seguem-se todas as demais propriedades clássicas dos quantificadores, em especial a de que em um enunciado da forma "existe um x que é um F", como vimos, o quantificador existencial afirma que predicado F é verdadeiro para pelo me-

[57] Perceba novamente o caráter Fregeano dessa construção.

[58] No caso em apreço, estamos exemplificando apenas em linguagens de 1^a ordem. Muitas vezes o que é chamado de semântica clássica para a lógica de primeira ordem pode também ser expressa em uma estrutura conjuntista, de forma que uma interpretação para uma linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$ é uma estrutura $\mathfrak{U} = \langle D, \rho \rangle$, onde D é um domínio de objetos (indivíduos) e ρ uma função ou uma relação sobre esses objetos (que desta forma também é um conjunto).

[59] Isso se deve ao princípio de Generalização Existencial (EG), que neste caso fica $F(a) \rightarrow \exists xF(x)$.

nos um *indivíduo x* (com ênfase na palavra 'indivíduo'). No caso em apreço, comprometemo-nos assim com a existência de pelo menos um filósofo (ou de um indivíduo) no subconjunto "filósofos" do domínio.[60] Neste sentido, vale a pena aqui relembrar a posição de Quine para quem nos comprometemos ontologicamente com aquelas entidades que podem ser valores de variáveis ligadas das sentenças da linguagem que usamos (que para ele era uma linguagem de primeira ordem com identidade). Diz este autor que "*ser assumido como uma entidade é, pura e simplesmente, ser reconhecido como o valor de uma variável.* [...] As variáveis da quantificação [...] percorrem toda a nossa ontologia, qualquer que seja ela; e ficamos atados [convicted] a uma pressuposição ontológica particular se, e somente se, o pretenso pressuposto tiver que ser reconhecido entre as entidades que nossas variáveis percorrem a fim de tornar uma de nossas afirmações verdadeira" (QUINE, 1996, grifo meu). Neste caso, vimos que a partir da semântica extensional conjuntista da lógica clássica, "o valor de uma variável" pode bem ser um *indivíduo*, ou seja, uma entidade que satisfaz a teoria da identidade da lógica e da matemática clássicas. Com efeito, segundo o dicionário de Caldas Aulete (AULETE, 2009, p. 446), "*Indivíduo*" significa ser único de determinada espécie; e "*Individualizar*" significa tornar-se único, singular, distinguir-se dos demais. Este indivíduo único — no sentido de ser o único que satisfaz um conjunto de predicados, como já dito — implica que ele possa ser reconhecido, identificado e individualizado como tal em diversos contextos.[61] Um indivíduo pode receber um nome, de modo a poder reconhecê-lo como o objeto tal e qual, possui como dito identidade (inclusive, segundo o mesmo dicionário acima, individualidade *é* identidade (*ibid.*)), eu posso, de um modo um tanto coloquial, 'apontar' para ele e dizer "este é o mesmo objeto que eu tinha antes!". Por fim, tudo isso vai ao encontro de outra visão de Quine, a saber, de que não há entidade sem identidade, como expressado na passagem: "temos uma noção aceitável de conjunto, de objeto físico, de atributo, ou de qualquer outro tipo de objeto, *somente na medida em que temos um princípio de individuação aceitável para aquele tipo de objeto. Não há entidade sem identidade*" (QUINE, 1981, p. 102, grifo meu). Tal posição leva Quine, em outro momento, a inclusive indagar sobre "que sentido pode ser dado a falar-se de entidades das quais não se pode dizer com sentido que são idênticas a si mesmas e distintas uma das outras?" (QUINE, 1996). Logo se vê que em todas as passagens citadas, as entidades que Quine tem em mente para a lógica e

[60] Ressalta-se que se a expressão for Fa, ao invés de Fx, este a deverá ser o indivíduo "Aristóteles" nesta interpretação.

[61] É claro que para tanto os predicados que caem sobre o indivíduo x devem ser os mesmos em qualquer desses contextos, e o Dicionário de Filosofia de Japiassú e Marcondes (JAPIASSU e MARCONDES, 2008, p. 146) fala exatamente isso: "*Indivíduo: é algo que possui características próprias que o distinguem das outras coisas*" (grifo meu).

matemática clássica são, em certo sentido, cantorianas, possuindo assim um critério de identidade e de individualidade.

Podemos construir a mesma argumentação para compreender o que é suposto como entidade, *a la* Quine, por uma teoria de conjuntos como ZFC para a qual, como visto, valem as propriedades lógicas e conjuntistas da igualdade. Além disso, vale ressaltar novamente que todas essas considerações também vão ao encontro, ainda na teoria de conjuntos intuitiva, com o princípio da compreensão que, juntamente com a extensionalidade, espelha — grosso modo — o princípio de Leibniz. Isso mostra mais uma vez que é legítimo entender essa discussão como apontando para a interpretação de que indivíduos distintos não podem ter todas as mesmas qualidades ou, dito de outra forma, indivíduos iguais (no sentido de partilharem todas as mesmas características) são o mesmo indivíduo. Além disso, claramente se percebe que tomando conjuntos como sendo extensões de 'qualidades', podemos admitir com uma certa garantia que as definições de identidade apresentadas neste texto (que são basicamente as da matemática usual) podem ser tomadas como Leibnizianas, *i.e.*, como apontando para a individualidade dos objetos da realidade. Como já comentado, isso estará pressuposto ou implícito na teoria cantoriana, bem como será assimilado pelas versões axiomatizadas e, assim, também na matemática padrão, além que parece se reproduzir também nas outras teorias de conjuntos 'alternativas' (NBG, NF, ML etc.) que apesar das diferenças que apresentam entre si também são teorias de indivíduos.

Durante o desenvolvimento histórico da lógica clássica, a noção de objeto, bem como a noção semântica extensional, sempre foram assentadas sobre tais distinções de individualidade. Talvez tal procedimento tenha assim se constituído devido ao fato de entendermos, via de regra, os objetos usuais que nos cercam como sendo individualizados de alguma forma, de modo que os 'objetos' da lógica acabaram como sendo também 'dotados' de individualidade, em certo sentido espelhando o que entendemos pelos objetos que nos cercam.[62] Neste mesmo sentido, Schrödinger afirmava que "quando um objeto readentra a nossa área de percepção, ele é usualmente reconhecido como uma continuação das aparências prévias, *como sendo a mesma coisa*. A permanência relativa de peças individuais da matéria é a característica mais momentânea de ambas a vida diária e da explicação científica."[63] Essa também é a posição de da Costa (DA COSTA, 1980, p. 56ss.), para quem a atividade

[62]O que se quer dizer com isso é que a lógica em certa acepção foi 'contaminada' pela noção de objeto que temos do mundo que nos rodeia, ou poderia ser dito, com a metafísica que parece que em geral adotamos. Essa contaminação talvez é o que faz a lógica clássica ser tão difícil de ser usada para manipular objetos que 'perdem' a individualidade, tais como veremos no próximo capítulo, os objetos quânticos.

[63]Schrödinger, E., *Science, theory and man*, London: Allen and Unwin, 1957 (citado em (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 247)).

científica — mesmo em lógica e em matemática — depende de uma intuição intelectual que forjamos tendo em vista nosso contato com o contorno. Essa atividade é algo construtivo, diz ele, pressupondo algo comparável à aritmética intuicionista e, desse modo, supondo o conceito intuitivo de identidade. Assim, continua o autor, da mesma forma que a mecânica clássica trata de objetos físicos que têm características que se assemelham aos objetos que nos cercam, que podem assim ser contados, individualizados, respeitarem o princípio da impenetrabilidade,[64] as teorias de conjuntos usuais (e logo a matemática erigida a partir dela) tratam seus 'objetos' da mesma forma, incorporando — como já afirmado — os conceitos de individualidade. Como afirma Krause (KRAUSE, 2002, p. 134): "todos esses fatores sugerem que os conceitos matemáticos e lógicos não são dados a priori; nós os elaboramos em função de vários aspectos, em geral pragmáticos, não podendo haver qualquer forma de dogma em se crer que haja uma só matemática e uma só lógica admissíveis".[65]

O filósofo Ferdinand Gonseth (1890-1975) afirmava que" a lógica é a física do objeto qualquer",[66] querendo com isso dizer que os princípios lógicos deveriam expressar as leis físicas mais elementares e gerais,[67] e basear-se-iam em uma espécie de evidência que seria típica das leis físicas: seus princípios não deveriam ser tornados mais independentes dos assuntos empí-

[64]É claro que esse ponto necessita de qualificação. Com efeito, no mundo real, não existe um corpo "perfeitamente inelástico" por exemplo. Mas para efeito de cálculo, tudo se passa *como se* os corpos que nos rodeiam fossem mesmo como são descritos nas teorias da mecânica clássica.

[65]Entretanto, é bom ressaltar que isso é apenas uma posição. Com efeito, para Toraldo di Francia, o ato de dividir o mundo em objetos é algo que nos é até mesmo *inato*: fazemos isso intuitivamente (esta posição de Toraldo di Francia se encontra no livro *Le cose e i loro nome*. Bari: Laterza, 1986; e é apresentada em (KRAUSE, 2008)). Neste último trabalho, Krause diz que Piaget (em quem Toraldo di Francia muito se embasa) também alicerça tal visão, a saber, de que já 'trazemos em nós' — por falta de expressão melhor — desde o nascimento, a noção de individuação (separação de um objeto de outros objetos). Todavia, diz Krause, a questão da *identidade* do objeto só se dá mais tarde. Ele cita um exemplo. Suponhamos uma criança com apenas algumas semanas de vida que está brincando com um boneco. Brincar com esse objeto exige, é claro, um sentido de individuação: estou brincando com um objeto em particular (o boneco, no caso) e não com um outro objeto (uma bola, por exemplo). Todavia, nesta tenra idade, se eu trocar o boneco que está nas mãos da criança por outro boneco similar, a criança não notará a diferença: ela apenas procurará reestabelecer a situação agradável da brincadeira em que estava. Mais tarde, porém, a criança acaba criando (através de seu próprio contato com o mundo, diria Piaget) uma noção de *identidade* para o boneco: ela passa a brincar com *este* boneco em particular. A partir de agora a criança consegue identificar o boneco em outras ocasiões e diferenciá-lo de outros bonecos similares, de modo que a criança pode pedir de volta (em um grupo de bonecos similares) *aquele* boneco em particular. A partir desse momento, diz Krause, o boneco passa a ser reconhecido pela criança como um indivíduo em toda a acepção do termo.

[66]F. Gonseth, *Les mathématiques et la realité*, p. 155 (citado em (KRAUSE, 2002, p. 179)).

[67]Como ele mesmo afirma: "La logique est un méthode à la fois 'finale' et 'objetive', dont l'objet primitif est à rechercher dans les réalités les plus immédiates et les plus communes du monde physique; et dont les fins sont celles de l'action" (*ibid.*).

ricos, por meio de abstrações, do que o são as leis da física em relação aos fenômenos (*cf. ibid.*). Esta face empírica da lógica implicaria, assim, que esta poderia depender do domínio de conhecimento sob análise, e entre os filósofos que partilham dessa posição também poderíamos citar H. Putnam (PUTNAM, 1968) e P.-D. Février (PAULETTE, 1951).[68] Se tomarmos essa afirmação como verdadeira, a saber, que a lógica é uma forma de captar a realidade, podemos sustentar novamente que ela é individualizadora (haja vista que tudo leva a crer que é assim que vemos o mundo e que, como ressaltamos, é assim que o espelhamos nas nossas teorias). Da mesma forma, como dito, podemos entender porque temos dificuldades formais em se trabalhar com partículas indiscerníveis (que concordam em todos os seus atributos) que são coisas que só passaram a ser aventadas com a mecânica quântica. Com efeito, como enfatizamos repetidamente, o fato da teoria de conjuntos (pelo menos a mais usual, ZFC) incorporar alguma forma de extensionalidade, que aliada à lógica clássica que as fundamenta confere à indistinguibilidade o caráter de identidade, faz com que a concordância em todos os atributos leve por extensionalidade a identificar apenas um objeto com certos atributos em particular. Sendo assim, se alicerçarmos as teorias da mecânica quântica em tais fundamentos individualizadores, todos os elétrons, por serem iguais, seriam apenas um elétron, o que parece não ser o caso. Todavia, isso já é assunto para capítulo posteriores. O importa aqui é entender que na matemática usual, como expressado pela Lei de Leibniz, não há objetos (no plural) absolutamente indiscerníveis, haja vista que como disse Leibniz, colocar duas coisas indiscerníveis é colocar a mesma coisa com dois nomes.[69]

[68] Max Jammer, no capítulo 8.6 de seu *The philosophy of quantum mechanics* (JAMMER, 1974), apresenta várias outras referências neste sentido e discute um pouco desse tópico.

[69] No entanto, como visto, a indiscernibilidade pode ser 'fantasiada' no escopo de ZFC mediante escolhas adequadas de estruturas não-rígidas. Como veremos no próximo capítulo, isso é feito na MQ por meio da seleção de vetores simétricos e anti-simétricos para representar os estados relevantes.

4 IDENTIDADE E INDIVIDUALIDADE NA MECÂNICA QUÂNTICA

4.1 IDENTIDADE, INDIVIDUALIDADE, DISTINGUIBILIDADE

Nos capítulos precedentes, repetidas vezes fizemos menção ao fato de que os objetos da mecânica quântica (MQ) aparentemente não se coadunam a várias características que temos como aceitas em relação à maneira como entendemos os objetos do nosso mundo, em especial à noção de identidade para os mesmos. Como comentamos, tal 'desrespeito' parece surgir seja não 'obedecendo' certas concepções filosóficas que existem sobre esta noção, seja não se conciliando com o modo como a matemática, lógica e teoria de conjuntos clássicas definem a identidade em suas disciplinas. Outrossim, principalmente no final do capítulo anterior, mencionamos a ideia de que as partículas quânticas, devido a tais características, poderiam ser entendidas como possuindo uma 'não-individualidade', afigurando-se assim em um tipo de 'não-indivíduo'. Tudo isso foi mencionado apenas por alto e não se buscou detalhar de um modo mais apurado o porque de tais interpretações. Desta forma, neste capítulo iremos mostrar vários argumentos que nos levam a defender tal visão de não-individualidade para os objetos quânticos, e que sendo assim outros arcabouços formais devem ser buscados para acomodá-los. Não obstante, nesta primeira seção, retomaremos alguns conceitos e definições já aventadas no primeiro capítulo desta tese e, particularmente, estabeleceremos de um modo mais efetivo a distinção filosófica entre algumas noções já trabalhadas anteriormente.

Primeiramente, vale mencionar que Aristóteles relacionava o conceito de "identidade" com o conceito de "entidade" via sua formulação de lógica. Os princípios da lógica Aristotélica, a saber, a existência de objetos do conhecimento, o princípio da contradição e o princípio da identidade, surgem *como condições de possibilidade para se referir a uma entidade* (RONDE, *et. al.*, 2012).[1] De acordo com uma primeira visão de Frege, por sua vez, apresentada em seu *Begriffsschrift*, a relação de identidade existe entre *nomes*; de modo que dois nomes ("Hesperus" e "Phosporus", por exemplo) estão nessa relação se e somente se eles são nomes do mesmo objeto. Desta forma, essa posição parece se sustentar sobre a diferença entre as declarações "$a = a$" e "$a = b$": a primeira, diria Frege, parece existir *a priori*, enquanto que a segunda pode representar um avanço de nosso conhecimento. Todavia, Frege

[1] Na física, a ideia de entidade teve um papel primordial na intenção de se entender os fenômenos da realidade, e podemos dizer que a história da física clássica é atrelada à história das 'entidades físicas' tais como campos, partículas, ondas etc. (*cf.* (RONDE, *et. al.*, 2012)).

percebeu que essa posição poderia levar a um aumento de conhecimento entre entidades *linguísticas*, ao invés do que entre os objetos de fato. Sendo assim, em seu *Sentido e Referência*, Frege passou a sustentar uma outra posição: a relação de identidade existe entre *objetos*, tal que dois *objetos* estão na relação se e somente se eles são o mesmo objeto. Desta forma, se verdadeira, a sentença “Hesperus é idêntico à Phosphorus” expressa então a ideia de que Hesperus e Phosphorus são o mesmo *objeto*. Agora, os nomes “Hesperus” e “Phosporus” expressam diferentes sentidos, mas se referem ao mesmo objeto, de modo que assim entendemos porque esse tipo de declaração de identidade pode ser informativa (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 4ss)). A partir de tal tese, se verdadeira, podemos afirmar que a expressão “$a = b$” não significa que temos dois objetos na realidade, mas apenas um, o qual pode ser referido tanto por a como por b. A matemática, como já discutimos, também assimila tal posição: quando afirmamos que x é igual a y, não estamos nos referindo a dois objetos, mas apenas a um, nomeado por duas designações. Muitos físicos e filósofos adjetivam tais objetos como como *indistinguíveis* (veja, p. ex., (PENROSE, 1989, p. 31-3)).[2]

Também como já discutimos no capítulo 1, a relação “$a = a$” pareceria não ser problemática. Com efeito, esta afirmação diz que um objeto “a” é idêntico a si mesmo — podendo então até mesmo ser entendida como expressando a *auto-identidade* deste objeto — e, afinal de contas, qual objeto não seria idêntico a si mesmo?[3] (*cf.* (NOONAN, 2011)). Sendo assim, a expressão “$a = a$” pode ser adotada como uma expressão verdadeira *a priori* — se a mesma for tomada como existindo entre nomes — ou, se for entendida como

[2]Na MQ, como veremos com mais detalhes à frente, a situação todavia pode ser um pouco diversa com relação à terminologia. Por exemplo, no seu livro clássico sobre os fundamentos da física quântica, J. M. Jauch apresenta uma “definição” de partículas idênticas dizendo que “duas partículas são idênticas quando concordam em todas as suas propriedades intrínsecas” (JAUCH, 1968, p. 275). Assim, o físico também chama de *idênticas* aquelas partículas que o filósofo chamaria de indistinguíveis ou indiscerníveis (relativamente a propriedades intrínsecas).

[3]Tal visão, inclusive, levou muitos filósofos a afirmarem que os problemas da identidade não seriam *genuínos* problemas da identidade. Esta é, por exemplo, a posição de David Lewis: para este pensador, embora o debate seja legítimo, ele não é genuinamente um debate *sobre a identidade*, haja vista que segundo ele não existiriam problemas *filosóficos* sobre a identidade. A identidade, diz Lewis, é uma noção totalmente não problemática: o que existem são problemas que podem ser expressos usando-se a *linguagem da identidade*, mas desde que estes podem ser ‘reconfigurados’ para não fazer uso da linguagem da identidade, eles não são problemas sobre a identidade em si. Tome, por exemplo, o chamado “problema transtemporal da identidade pessoal”: este é um problema que se refere à questão de se uma pessoa poder ter diferentes corpos em diferentes momentos, mas seria apenas um problema de quando uma *pessoa* pode ter diferentes corpos em diferentes momentos, e sendo assim não é um problema sobre a identidade, mas sobre a “pessoalidade” (*cf.* (NOONAN, 2011)). Uma posição parecida (a de que não existiriam problemas de identidade genuínos) é a de Wittgenstein, para quem “dizer de dois objetos que são idênticos é absurdo, e de um único que é idêntico consigo mesmo por certo não diz nada” (WITTGENSTEIN, 1968, prop. 5.5301).

sendo uma relação entre objetos, expressaria uma qualidade fundamental que o objeto tem consigo mesmo e que não pode ser negada. Com efeito, como vimos no capítulo prévio, "$a = a$" é tomado (em lógica, matemática e teoria de conjuntos clássica) como sendo uma verdade lógica, sendo até mesmo assumida como um postulado fundamental da lógica clássica com identidade na qual as teorias físicas estão sustentadas. Poder-se-ia inclusive dizer que a partir da noção de identidade de Aristóteles que vimos acima — e que se propagou durante o desenvolvimento histórico da humanidade —, é bem provável que tal fundamento seja também uma herança Aristotélica. Entretanto, como mostra da Costa (DA COSTA, 1980, p. 113-32) tal lei pode ser "dialetizável", no sentido de que ela não deveria ser tomada a priori.[4] Tentaremos mostrar abaixo que se a auto-identidade for tomada como uma noção de individualidade, e se as entidades quânticas forem entendidas — de um modo que deixaremos claro adiante — como objetos que são não-indivíduos, então tais objetos falham em ser auto-idênticos.

Como de praxe, iremos substantivar os particulares que existem no mundo físico como *indivíduos*. Mas o que faz algo ser um indivíduo, no sentido de podermos diferenciá-lo de outros indivíduos? Veja que aqui estamos nos referindo a duas coisas: a primeira é a noção de individualidade e a segunda é a noção de distinção. O ponto primordial a ser expugnado, então, se refere à distinção *conceitual* existente entre *individualidade* e *distinguibilidade*. O primeiro conceito é algo que pertence somente ao objeto em si, no sentido de ser interno a ele e de poder ser associado somente a ele, fazendo-o um indivíduo de um tipo particular (como vimos no capítulo 1, alguns chamam tal característica de um "princípio de individualidade"). O segundo, a distinguibilidade, envolve então uma relação dos indivíduos com outros indivíduos particulares e, sendo assim, é de certo modo algo *externo* ao objeto. Interessante notar que na definição de distinguibilidade se faz necessária a existência de outros objetos: caso não houvesse nenhum outro objeto no universo, a partir da conceituação acima, o único que existisse ainda poderá ter individualidade, apesar de não poder ter distinguibilidade (pois para tanto, como se extrai do conceito, se faz necessário um segundo elemento de comparação). Agora que já discutimos no capítulo anterior a questão da identidade dos objetos do ponto de vista formal, vale a pena então passar a questionar mais detalhadamente o que confere a individualidade e a distinguibilidade para os objetos. Da mesma forma como vimos no capítulo 1, aqui as possíveis respostas a esta questão podem ser divididas em duas correntes: (a) aquelas que apelam para algum subconjunto ou 'feixe' de propriedades da entidade, e (b) aquelas que apelam para algo além a estas propriedades.

---

[4] Sobre esse ponto, veja as seções 4.4 e 5.1 abaixo.

4.1.1 Individualidade via feixes

O primeiro princípio da individualidade, e o qual é o mais intuitivo, é chamado de "Teoria dos Feixes" por tomar a individualidade de um objeto como sendo dada a partir do conjunto completo de *propriedades ou atributos* deste objeto. Como essa alternativa explica a individualidade dos objetos em termos de propriedades possuídas pelos mesmos, objetos que possuem propriedades distintas são indivíduos distintos. Aqui a individualidade e a distinguibilidade colapsam em uma só noção: são indivíduos os distinguíveis.

Como também vimos no capítulo 1, entretanto, princípios de individualidade que envolvem conjuntos (ou 'feixes') de propriedades ou atributos devem enfrentar o problema da instanciabilidade múltipla: eles necessitam garantir que nenhuma outra entidade possa possuir o mesmo conjunto de propriedades, pois caso contrário teríamos *dois* indivíduos com as mesmas propriedades, o que faria essa abordagem cair por terra. Normalmente, para se garantir isso, se apela então para algum conjunto ou subconjunto de propriedades que se imagina serem particulares apenas ao objeto em questão, somado a algum outro princípio que assegure que nenhuma outra entidade possua este conjunto (ou subconjunto) de propriedades. Com relação às propriedades 'aceitas' para os objetos usuais, pode-se invocar as chamadas espaço-temporais e somar a elas o chamado "*Princípio da Impenetrabilidade*" da física clássica: dois objetos não podem ocupar a mesma localização espaço-temporal ao mesmo tempo, pois são impenetráveis. Todavia, para tanto, também é necessário assumir que os pontos do espaço-tempo sejam ou monogâmicos ou virginais (QUINTON, 1973, p.17), no sentido de que não há nenhum lugar ocupado permanentemente e *a priori* por um certo objeto, e que assim os objetos podem ocupar qualquer lugar no espaço-tempo: não há lugares privilegiados. Com relação ao princípio requerido, normalmente se assume o (já conhecido por nós) Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) de Leibniz que, como vimos, insiste que não pode haver dois (ou mais) indivíduos com todas as propriedades iguais (incluindo as espaço-temporais) sem ser o mesmo indivíduo.[5] Desta forma, na proposta da identidade via feixes, dois indivíduos podem ser indistinguíveis em termos de suas propriedades intrínsecas, mas não em termos de suas propriedades espaço-temporais (se a impenetrabilidade for assumida). Como se sabe, na física clássica, pode-se sempre falar em trajetórias individuais para os objetos e a localização espaço-temporal dos mesmos é um fator essencial em tal discurso (por exemplo, quando afirmo que "o carro *y* está com velocidade *x* no ponto

[5]Como vimos, em linguagem de segunda ordem podemos escrever tal princípio assim: $\forall F(F(x) \leftrightarrow F(y)) \rightarrow x = y$.

p"). Assim, a partir do PII e do Princípio da Impenetrabilidade, garantimos que mesmo possuindo todas as propriedades (não espaço-temporais) iguais, dois objetos clássicos não podem ser o mesmo objeto.

Não obstante, existem diversos argumentos bem conhecidos que afirmam que o PII não pode ser um princípio *necessariamente* válido. O mais famoso deles talvez seja o das esferas de Black (proposto por Max Black em 1952 e já comentado anteriormente). Neste caso, alega-se, temos a diversidade numérica das duas esferas, mas nenhuma propriedade que se possa utilizar para se distinguir entre elas, de modo que o PII aqui se mostra falho.[6] Como para a teoria dos feixes a discernibilidade (ou equivalentemente, a distinguibilidade) é entendida em termos da posse pelo indivíduo de propriedades que sejam somente suas, o problema se tornou então saber quais são as propriedades relevantes que deveriam ser assumidas. A partir disso, como vimos no capítulo 1, diferentes formas do princípio passaram a ser delineadas, dependendo do conjunto de propriedades escolhido e do tipo de atributos que podem ser considerados como possíveis de serem incluídos no alcance do do quantificador universal $\forall F$: a forma mais fraca — PII1 — afirma que não é possível existirem dois indivíduos possuindo todas as propriedades *relacionais e não-relacionais* em comum. PII2, por sua vez, exclui aquelas que podem ser descritas como *espaço-temporais*; e uma forma mais forte — PII3 — toma somente as propriedades *monádicas e não relacionais* (ver (QUINTON, 1973, p. 24-5; FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 11)).

Alguns afirmam que o PII1 deve ser necessariamente válido já que, como dito acima, não há dois indivíduos que possam possuir exatamente as mesmas propriedades e entrar nas mesmas localizações espaço-temporais ao mesmo tempo (apesar de que isso nos leva a ter que também admitir um postulado adicional: o princípio da impenetrabilidade) (QUINTON, 1973, p. 20). Um dos problemas desta abordagem diz respeito ao fato de que tal hipótese remete a individualidade dos objetos para a individualidade *dos* pontos no espaço-tempo: como podemos garantir a individualidade e distinguibilidade dos pontos do espaço-tempo — aos quais apelamos para garantir nosso princípio de individualidade — sem nos envolvermos em um caso de circularidade? (*cf. ibid.*) Outrossim, tanto o PII1 como o PII2 permitem relações no feixe de propriedades e, desta forma, implicam que tais relações possam

[6] Vale citar que a partir de tais ataques (entre outras críticas que destacaremos no decorrer deste trabalho), alguns filósofos 'enfraquecerem' tal princípio, afirmando que o mesmo só é contingentemente verdadeiro (CASULLO, 1984), ou que é apenas um princípio metodologicamente útil (HOY, 1974), ou ainda (RODRIGUEZ-PEREIRA, 2004) que a teoria dos feixes poderia até mesmo prescindir do PII: neste último caso, por assumir que os objetos seriam apenas *instâncias* dos feixes de propriedades, de modo que as propriedades poderiam assim ter mais que uma instância sem por isso ser o mesmo objeto (agradeço ao prof. Jonas Becker por ter me alertado sobre esta última possibilidade).

conferir individualidade. Todavia, isto também não é unânime para os filósofos, pois para tanto é necessário pressupor diversidade numérica: para que o objeto entre em uma relação, é necessário que haja outro elemento de 'comparação'. Sendo assim, por envolverem relações, tanto PII1 bem como PII2 estão enredados no problema metafísico de que, aparentemente, os indivíduos já estão de algum modo disponíveis antes de entrarem nas relações: relações pressupõem a diversidade dos objetos que estão relacionados. Se tais pressupostos não forem aceitos, então PII1 e 2 podem ser abandonados e apenas a forma mais forte do princípio (o PII3) pode ser admitida, com a variável F cobrindo estritamente propriedades monádicas. Todavia aqui também temos um problema: neste caso, o status do princípio depende de como se considera as propriedades monádicas. Em geral, acredita-se que formalmente todas as relações podem ser reduzidas a propriedades monádicas, mas novamente tal tese trata-se de posição problemática: x estar na relação R com y, por exemplo, não é o mesmo que x ter a *propriedade* "estar na relação R com y", ou então de haver uma terceira relação, H, que estabeleceria a relação entre x, y e R (*cf.* KRAUSE, 2007).

Em resumo, se conseguirmos encontrar exemplos de indivíduos que são indistinguíveis, no sentido de possuírem um conjunto comum de propriedades não espaço-temporais, podemos mostrar que PII2 é contingentemente falsa. Se este conjunto incluir as propriedades espaço-temporais, PII1 se mostrará falsa também. Se no conjunto ainda estiverem as propriedades monádicas, então PII3 também irá se mostrar falsa. No futuro, mostraremos que a MQ parece enfraquecer todas as possibilidades de PII. Como em geral a visão da individualidade via feixes necessita que alguma forma de PII para ser garantida, tudo levará a crer que a teoria dos feixes não é adequada para a MQ.

4.1.2 Individualidade transcendental

Princípios de individualidade que invocam algo para além de algum conjunto de propriedades de uma entidade são exemplos do que Heinz Post (POST, 1963) chama de "Individualidade Transcendental (TI)", pois transcenderiam os atributos do objeto. Todavia, originalmente, o termo encerrava um significado um pouco ambíguo, pois o exemplo dado por Post foi o de se perder um guarda-chuva e depois se deparar nos achados e perdidos com um número de guarda-chuvas indistinguíveis: a questão "mas qual é o meu guarda-chuva?" continua a fazer sentido e, para respondê-la diz Post, a individualidade deveria assim repousar em algo para além do conjunto de propriedades em termos dos quais os guarda-chuvas como indistinguíveis poderiam ser reconhecidos.[7] Desta forma, se imaginássemos que podem haver dois objetos exatamente similares, inclusive com as mesmas marcas e arranhões, e quiséssemos nos referir a eles como indivíduos (ou seja, como tendo identidade), ainda restaria — segundo Post — a possibilidade de admitir que sua individualidade seja atribuída por algo externo ao seu quadro de características ou propriedades. Historicamente, vários 'candidatos' foram propostos para este algo, incluindo — na Idade Média — um "haecceitas" (termo latino que poderia ser entendido como uma "essência individual"[8]), ou mais atualmente um "thisness primitivo" (que poderia ser entendido como um 'i-ismo' particular), ou uma "unidade fundamental", ou — como fez Quinton anteriormente — definí-lo como uma "substância"[9], ou até mesmo um "não sei o que é" de Locke.[10]

Sendo assim, a ideia aqui é que se dispusermos desse princípio poderíamos conferir individualidade e identidade aos objetos mesmo que tenhamos dois objetos indiscerníveis: como dito acima, mesmo tendo todos as mesmas marcas e arranhões, eles ainda seriam identificados por algo além de tais marcas, pois, para tanto, apelaríamos para alguma forma de substrato, algo que seria próprio de cada indivíduo particular e, sendo subjacente a todas as propriedades materiais, não poderia ser expresso em termos de tais propriedades. Aqui, como se pode notar, individualidade e distinguibilidade são conceitos que permanecem distintos, sendo a distinguibilidade expressa em termos de propriedades dos objetos (onde objetos iguais seriam indistinguíveis), mas a individualidade destes objetos sendo dada por esse tipo de substrato que está para além das propriedades dos mesmos (e, assim, mesmo iguais, este objetos seriam indivíduos distintos em certa acepção).

Não obstante, um dos problemas desta alternativa é o da 'describabilidade': se para lograrmos a descrição do objeto em sua forma mais primária necessitamos ter uma lista de atributos, como podemos descrever aquilo que transcende tais atributos? Parece que tudo o que podemos fazer, neste caso, é descrever este algo em uma forma negativa, tal como feito por Locke, por exemplo. Não obstante, agora o problema se transfere ao fato de como ex-

[7] Como o próprio Post discute em seu texto, tal resposta é ambígua porque poderíamos dizer, entre outras alternativas, que ainda podemos identificar o nosso guarda-chuva pela sua história caso traçássemos sua trajetória retrógrada, e desta forma não necessariamente precisaríamos assumir algo transcendental: embora não estivéssemos de posse do guarda-chuva o tempo todo e mesmo assim não conseguíssemos traçar sua trajetória retrógrada, isso seria apenas uma impossibilidade epistêmica da *nossa* parte, e não uma falta de identidade para o objeto 'em si'.

[8] Sob tal termo veja (CROSS, 2010).

[9] Vale a pena chamar a atenção para o fato de não se confundir tal substância com uma propriedade material do objeto. Essa "substância" seria sim algo metafísico, pois a individualidade nestes casos é dada por algo além das propriedades, como dito. Para mais detalhes, sugerimos consulta ao artigo *Quantum mechanics and haecceities*, de Paul Teller (TELLER, 1998).

[10] A indicação bibliográfica de Locke se encontra no primeiro capítulo desta tese.

pressar a noção de 'não-individualidade' nestes termos: se este algo 'transcendental' é literalmente indescritível, então como podemos expressar a falta dele? Desta forma, o grande desafio em qualquer das abordagens que buscam um princípio de individualidade em algo que transcende os atributos dos objetos é descrever este 'algo'. Certamente, como já enfatizado, esta descrição não poderá ser feita em termos de propriedades e, sendo assim, esta tese metafísica se torna bastante difícil de ser sustentada. Além disso, veremos no futuro que assumir na MQ um tipo de propriedade metafísica (que poderia ser tomada como uma "propriedade oculta") se torna problemático devido aos resultados teóricos e experimentais desta ciência.

Não obstante, um modo de sair desse dilema é entender a noção de 'primitive thisness' em termos da auto-identidade. Adams[11], por exemplo, toma tal 'primitivo' como sendo "...a propriedade de ser idêntico a um certo indivíduo — não a propriedade que todos nós compartilhamos, de sermos idênticos com algum indivíduo ou outro, mas minha propriedade de ser idêntico comigo mesmo, você ser idêntico com você etc.". A ideia, aqui, é aparentemente reconhecer em termos haeccetianos a individualidade transcendental como sendo a identidade que o objeto tem consigo mesmo, isto é, a auto-identidade "$a = a$". Deste modo, *iremos então defender a ideia de que a noção de não-individualidade (de um modo a ser clarificado abaixo) pode ser capturada no contexto quântico por sistemas formais nos quais a auto-identidade não é sempre bem definida, tal que a lei reflexiva da identidade, a saber,* $\forall x(x = x)$*, não é válida em geral.*

4.2 INDIVIDUALIDADE NA FÍSICA CLÁSSICA

Como vimos, existe então uma distinção entre distinguibilidade, entendida como envolvendo mais que um objeto, e individualidade, entendida como algo pertencendo somente ao objeto em si. Isto funciona muito bem para os objetos macroscópicos que nos cercam, para os quais temos um acesso epistêmico relativamente direto, mas o que acontece no caso de suas contrapartes microscópicas, tais como átomos e moléculas? Como estes não são passíveis de serem diretamente observados, como iremos proceder para considerar sua individualidade?

A resposta, como Reichenbach (REICHENBACH, 1956, p. 228-9) sugeriu, é que devemos analisar como estes objetos se comportam *coletivamente* e, de um ponto de vista epistêmico, formular assim alguma conclusão relativa à sua individualidade. Em outras palavras, mudamos da observação

[11] Adams, R. (1979), 'Primitive thisness and primitive identity', *Journal of Philosophy 76*, pp. 5-26. Citado em (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 13).

direta do objeto em si para inferências baseadas no comportamento estatístico de um *conjunto* de tais objetos. De certo modo, é como se 'reduzíssemos' as propriedades macroscópicas para propriedades microscópicas cobertas pela mecânica estatística.

Sendo assim, consideremos a distribuição de duas partículas do mesmo tipo — duas moléculas de água, por exemplo — sobre duas caixas ou estados de energia A e B. Tais partículas possuem as mesmas propriedade intrínsecas, tais como massa em repouso, forma etc. e, no sentido que discutimos anteriormente, elas seriam então indistinguíveis. Não obstante, no contexto da *física clássica*, assume-se que podemos gerar os seguintes arranjos para a distribuição das duas partículas indistinguíveis nos dois estados de energia A e B:

(a) temos 1/4 de chance de encontrar as duas partículas no estado A;
(b) 1/4 de encontrar as duas partículas no estado B;
(c) 1/4 de encontrar a partícula a em A e a partícula b em B; e
(d) 1/4 de encontrar a partícula b em A e a partícula a em B.

Esta probabilidade caracteriza as chamadas *estatísticas de Maxwell-Boltzmann*[12] e, como iremos perceber futuramente, obtemos diferentes atribuições de probabilidade quando trabalharmos com as estatísticas quânticas. Por hora, o que importa é que temos 1/4 de chance de encontrar partícula a em A e a partícula b em B (caso (c)), e 1/4 de encontrar a partícula b em A e a partícula a em B (caso (d)), e tal atribuição de probabilidade não pode envolver a distinguibilidade das partículas, dado que elas são indistinguíveis. Sendo assim, o fato de termos duas atribuições de probabilidade para esse caso advém do fato de que estamos tomando tais partículas como *indivíduos de alguma forma*, haja vista que em seu comportamento coletivo a permutação promove uma diferença na contagem (isto é, a troca de uma partícula indistinguível por outra promove uma nova situação física).

Como essa individualidade de ser entendida depende da teoria que aceitamos. De um modo mais simples, a mecânica clássica (entendendo por isso a física newtoniana, a teoria eletromagnética de Maxwell e a relatividade especial e geral) admite, por exemplo, o princípio de impenetrabilidade. Deste modo, ainda que possam ter todas as mesmas características, como

[12] Tais estatísticas têm esse nome porque Boltzmann tentou derivar, a partir da mecânica clássica, uma prova de que um gás deve evoluir para o estado de equilíbrio a partir de um estado inicial qualquer, fornecendo, assim, uma fórmula para a entropia de um gás ideal. Esta foi a tentativa de Boltzmann 'demonstrar' a segunda lei da termodinâmica, e ficou conhecida como o teorema-H de Boltzmann. Boltzmann abordou o assunto no contexto de sua busca para provar a lei da distribuição molecular apresentada previamente por Maxwell, o que ele fez de dois modos diferentes. Um deles, o que nos interessa aqui, envolve investigar as possíveis atribuições de partículas em estados possíveis. Ao propor sua demonstração, Boltzmann apelou para uma forma de distribuição chamada atualmente de estatística de Maxwell-Boltzmann (*cf.* (ARENHART e KRAUSE, 2012).

marcas e arranhões (no caso dos objetos macroscópicos), ou o mesmo estado (no caso dos microscópicos), poderíamos lançar mão da teoria dos feixes e afirmar que tais objetos seriam indivíduos distintos em função de ocuparem posições espaço-temporais distintas. Neste caso da física clássica, a teoria dos feixes, atrelada à forma mais simples de PII — PII1 — já seria suficiente para dotar seus objetos de individualidade.[13] Não obstante, mesmo assim também poderíamos delinear uma alternativa combinatória que não levasse em conta, explicitamente, considerações sobre as trajetórias das partículas: neste caso, como vimos, devemos incorporar algum tipo de individualidade transcendental aos objetos do sistema.[14] Com efeito, tal última proposta toma corpo quando constatamos que apesar da teoria dos feixes ser a mais intuitiva, a mais econômica metafisicamente e a que a maioria dos físicos aceita, requer todavia que passemos a aceitar que os pontos do espaço-tempo, por assim dizer, é que estejam conferindo identidade aos objetos, de modo que a discussão se transfere naturalmente à identidade desses pontos. A dificuldade que se tem em descrever um 'tipo' de identidade dos pontos do espaço acaba então favorecendo a posição relativa a uma identidade transcendental mesmo para os objetos da física clássica.[15] Interessante citar, entretanto, que a física não nos dá nenhuma indicação de porque devemos escolher uma teoria de feixes em detrimento a uma posição transcendental, ou vice-versa, de modo que aqui já temos um primeiro caso de indeterminação da metafísica pela física, tal como ocorre na MQ (falaremos mais disso abaixo).

[13]Como também diz Reichenbach (REICHENBACH, 1944, p. 38 e p. 255ss.), os objetos da física clássica teriam uma "*geneidentidade*". Geneidentidade seria, assim, basicamente a relação que conecta diferentes estados de uma mesma coisa em diferentes tempos. De acordo com Reichenbach, é sobre as propriedades dessa relação (a saber, continuidade; impenetrabilidade e a possibilidade de rotulagem) que se baseia a noção de identidade de objetos físicos do nosso mundo macroscópico. Sendo assim, no caso das partículas clássicas, temos as seguintes possibilidades de saber se estamos tratando com a mesma partícula ou não: a) observação contínua: podemos seguir a trajetória da partícula ou, através das equações de movimento que regem tais objetos, saber sempre qual partícula é qual; b) princípio da impenetrabilidade: apenas continuidade não é suficiente para garantir a individualidade, pois necessitamos que os objetos não possam se interpenetrar e, assim, serem 'trocados' um pelo outro; e c) rotulagem: esse é o caso mais usual para os objetos macroscópicos, haja vista que sempre podemos marcar um objeto do nosso cotidiano com algum risco, ou pintá-lo de alguma forma, de modo que possamos sempre saber se estamos tratando com o mesmo objeto ou não. Como veremos à frente, todas essas possibilidades se mostrarão inócuas para identificar os objetos quânticos (supondo a interpretação mais aceita). Para uma discussão sobre como se poderia relacionar o PII2 e o PII3 com a mecânica clássica, consulte (FRENCH e KRAUSE, 2006, cap. 2.2).

[14]Que diga-se de passagem, é o que Reichenbach parece assumir (veja (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 49/50)).

[15]Todavia, é bom lembrar que a Relatividade Geral cria uma 'heterogenia' nos pontos do espaço-tempo, de modo que poderíamos tomar isso para de certo modo 'salvar' o PII sem a necessidade de algo para além das propriedades (veja, novamente, (FRENCH e KRAUSE, 2006, seção 2.4).)

Todavia, para nossa discussão o que importa ressaltar é que como as situações (c) e (d) acima são consideradas como situações físicas distintas, pode-se considerar os objetos físicos em questão como objetos distintos também (e apesar de indistinguíveis, porque partilham suas propriedades, eles poderiam então ser tomados como indivíduos na acepção plena da palavra), o que claramente é expresso pelo processo de contagem (pela 'estatística') da física clássica.[16] Deste modo, também podemos nomeá-los (por exemplo, como 'a' e 'b' da forma que fizemos), ato que em princípio serve para identificá-los em outras situações. Os objetos que nos cercam em nossa escala macroscópica (e mesmo na microscópica, como dissemos, dependendo do modo que os consideramos), têm todos essas mesmas propriedades, e é por isso que os chamamos de *indivíduos*. Como dito, este é exatamente o tipo de postura que se assume para os objetos da física clássica: individualidade.

A assunção de que as partículas do mesmo tipo, embora indistinguíveis, são indivíduos (espelhado no fato de que a permutação das partículas nos dá uma nova possibilidade) foi incorporado por Boltzman nos princípios da sua teoria da mecânica, e é interessante citar que a forma ou princípio de individualidade que ele adotou pode ser claramente vista como uma forma de individualidade espaço-temporal (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, cap. 2)). Pontuamos acima que a impenetrabilidade, somada à continuidade da trajetória, são as duas componentes vitais da individualidade espaço-temporal. Na física clássica, a continuidade da trajetória pode ser expressa nas equações clássicas do movimento que governam a partícula que, na forma Hamiltoniana, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

onde t é o tempo; H é o Hamiltoniano (que expressa a energia total do sistema); q é a coordenada generalizada da posição; e p o momentum conjugado generalizado. A singularidade da solução dessas equações de movimento para cada partícula, dada a partir de um conjunto de condições iniciais, garante a reidentificabilidade e individualidade da partícula através do espaço-tempo e, em particular, através das permutações. Como diz Max Jammer (JAMMER, 1966, p. 341-2): "...duas partículas, uma vez 'tomadas separadas', podem sempre ser 'tomadas separadas', pois elas podem ser sempre reidentificadas graças à unicidade das soluções da equação de movimento.". Além disso, no caso de objetos macroscópicos (como bolas de bilhar, por exemplo), "[até mesmo] o estado permite distinção porque o erro da medida para a posição de

[16] A palavra "estatística" aqui significa apenas "processo de contagem", nada tendo a ver com a disciplina matemática de mesmo nome.

uma bola é muito menor que o tamanho da bola em si" (SCHILLER, 2012, p. 1053). Em resumo, o que subjaz a essa abordagem é a visão de que até mesmo se as partículas forem indistinguíveis sem terem assim nenhuma diferença intrínseca em suas propriedades, elas são *indivíduos distintos*, e o diferente comportamento cinemático já é uma condição suficiente para sua individualidade e sua reidentificabilidade transtemporal. Por ora, não discutiremos mais a questão da individualidade das partículas clássicas, haja vista que nosso objetivo foi apenas mostrar que tais partículas são (e sempre foram) tomadas como indivíduos de algum tipo. Passamos agora à questão da individualidade dos objetos da MQ, principiando tal análise também pela forma como eles se comportam estatisticamente.

4.3 IDENTIDADE, INDIVIDUALIDADE E DISTINGUIBILIDADE NA MECÂNICA QUÂNTICA

4.3.1 Um pouco de história

O começo da história das estatísticas quânticas é um pouco difícil de estabelecer. Não obstante, podemos admitir sem muita perda de fidedignidade que a mesma começa principalmente com Max Planck na sua tentativa de solução do chamado "problema da radiação do corpo negro",[17] o qual permite o estudo da natureza da radiação eletromagnética e leva em conta a distribuição de energia sobre as várias frequências de radiação. Planck percebeu que tal distribuição não se coadunava com a expressão teórica obtida a partir da teoria eletromagnética clássica.[18] Através de um processo *ad hoc*, no qual Planck leva em conta os resultados presentes em suas experiências (e que foi assim descrito como uma "construção fenomenológica" (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 85), Planck obtém uma lei de radiação que era empiricamente adequada. Com o objetivo de sustentar esta lei em uma descrição microfísica, ele se voltou para a abordagem combinatorial de Boltzmann aplicada agora para osciladores de um corpo negro (PAIS, 1982, p. 368-370). Entretanto, os detalhes das estatísticas usadas por Planck se tornaram radicalmente diferentes da de Boltzmann.

O passo crucial da derivação da lei de Planck advém do modo como

[17]Um "corpo negro" é um perfeito (e logo, idealizado) absorvedor e emissor de radiação, de modo que a radiação emitida depende não da natureza ou do material que o corpo é feito, mas somente de sua temperatura.

[18]Existe uma tradução em português do artigo original de Planck "Sobre a lei de distribuição de energia no espectro normal", publicada na *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 22, no. 4, Dezembro, 2000, pp. 538-42.

uma quantidade total de energia deve ser distribuída sobre um número N osciladores lineares, todos vibrando com uma frequência v. Ele dividiu esta energia em um número finito de elementos de energia, P, os quais foram distribuídos entre os osciladores. O número de modos que é possível de se fazer tal combinação, isto é, o número de possibilidades, é dado por

$$\frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}.$$

Tal expressão combinatória é sutilmente diferentemente da de Boltzmann acima: neste caso, Planck considerou, no mínimo implicitamente, somente o número de quantas de energia atribuídos para cada oscilador, *e não quais quantas são possuídos por quais osciladores*. Desta forma, o numerador da expressão fornece simplesmente o número total de modos de arranjar os quantas e os osciladores, e *não uma possível identidade para tais modos.* Além disso, a divisão por $P!$ implica que *as permutações dos quantas não são reconhecidas como fornecendo arranjos novos e contavelmente diferentes*, o que gera uma situação distinta da encontrada na estatística de Maxwell-Boltzmann: agora, os casos (c) e (d) passam a não ser mais contados como duas possibilidades, mas sim apenas uma, passando a existir somente o fato de uma partícula existir em cada estado, *sem importar qual delas em particular está em qual estado*. Isso será explorado com mas detalhes abaixo e, como iremos enfatizar, tal situação é uma das que podem levar à conclusão de que os quantas devem ser reconhecidos não somente como indistinguíveis, mas também não passíveis de uma possível rotulagem (pelo estado) e desprovidos, assim, de individualidade (ou seja, podem ser tomados como *não-indivíduos*). Enquanto que Boltzmann considerou a distribuição de átomos indistinguíveis — mas ainda assim individualizáveis, pois a permutação entre eles faz diferença — sobre estados de energia, Planck efetivamente considerou a distribuição de quantas também indistinguíveis, *mas todavia não-individualizáveis*, sobre osciladores. Mais perene fica tal situação quando se percebe que se os quantas forem tomados como indivíduos (no sentido de Boltzmann), *não se pode mais derivar deles a lei de Planck*, pois neste caso retornamos às estatísticas de Maxwell-Boltzmann: as quais se mostraram erradas perante os dados experimentais. Em outras palavras, a lei de Planck (que se coaduna com os fatos experimentais) só é obtida se as estatísticas clássicas forem abandonadas (veja (MCMAHON, 2006, Cap. 1)). Desta forma, parece que a "indistinguibilidade é [realmente] uma propriedade *experimental* da natureza [quântica]" (SCHILLER, 2012, 1053).

Com a criação da 'nova' MQ entre os anos de 1925 e 1927, três diferentes autores (Fermi, Dirac e Heisenberg), independentemente, aplicaram a teoria da mecânica estatística de partículas indistinguíveis *a la* Planck, na qual dois estados que diferem somente pela troca de duas partículas entre si e que são, desta forma, indistinguíveis, devem ser contados somente como um estado. Em 1926, Born, enquanto defendendo a visão corpuscular como oposta à concepção ondulatória, também passou a afirmar que estes corpúsculos *não deveriam mais ser identificados como indivíduos*.[19] Consoante a Born, no mesmo ano, Heisenberg notou que a teoria de Einstein de um gás quântico ideal também implica que a "individualidade dos corpúsculos é perdida" (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 104-5). Após isso, Weyl escreveu que "[...] a possibilidade que dado dois gêmeos idênticos, Mike e Ike, se tenha um no estado quântico $E1$ e outro no estado quântico $E2$, não cria dois casos diferenciáveis se houver uma permutação entre eles; *é impossível para qualquer um desses indivíduos reter sua identidade* tal que um irá sempre ser hábil em dizer 'Eu sou o Mike' e o outro 'Eu sou o Ike'. Até mesmo em princípio não podemos exigir um álibi para um elétron!" (*ibid.*, grifo meu). Este entendimento do que as novas estatísticas quânticas aparentemente implicam, a saber, que as partículas quânticas têm em algum sentido perdido sua identidade e não podem mais serem reconhecidas como indivíduos, foi tão ubíqua que pode ser chamada de "Visão Recebida" da não-individualidade da partícula (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, cap. 3)).

Tal visão das estatísticas quânticas foi também admitida, de um modo independente, por Einstein num artigo de 1925, no qual ele propõe — a partir dos trabalhos de um físico indiano chamado Bose que primeiro descreveu as propriedades estatísticas dos fótons — a hipótese de quanta de radiação independente da energia. O resultado de Einstein pode ser derivado usando a lei de distribuição correta, a saber, a lei de Planck acima. Com isso, a estatística usada por Planck passou então a ser conhecida como *estatística Bose-Einstein,*[20] e as partículas que obedecem tal estatística como "Bósons" (partículas que possuem spin inteiro.[21]) Um estado bosônico, consoante a teoria de Planck, é invariante sobre permutações das partículas, e dois ou mais bósons com todas as mesmas propriedades (*incluindo as espaço-temporais*) podem estar no mesmo estado. Fermi, posteriormente, criou uma estatística

[19]Born, M., "Quantenmechanik der stobvurgänge", *Zeitschrift für Physik*, 38, pp. 803-27 (citado em (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 104)).

[20]Embora em ambas as estatísticas a permutação não gere uma nova contagem, há uma diferença do 'objeto' de cálculo, por assim dizer: a expressão de Planck permite calcular o número de modos de se distribuir *P* elementos de energia sobre *N* frequências de radiação. A estatística de Bose-Einstein, por sua vez, permite calcular a distribuição de *n* partículas bosônicas sobre *k* células. Uma boa discussão sobre a 'assimilação' da estatística de Bose por Einstein, bem como a equiparação de tal construção com as ideias de Planck, se encontra no cap. 23 do livro "*Sutil é o Senhor*" (PAIS, 1982, p. 503-16), onde inclusive aparece (p. 509) a fórmula de Einstein da qual se deriva sua estatística.

[21]Entre os exemplos de bósons estão o fóton, o glúon, o átomo de Hélio-4 e o bóson de Higgs. Os bósons são os 'tipos' de partículas que mediam as *forças* entre os 'pedaços' de matéria.

diferente da de Bose-Einstein, na qual ele tentou formular uma teoria de gás ideal onde se assume a validade do Princípio da Exclusão de Pauli (*i. e.*, onde dois 'objetos' não podem estar no mesmo estado). Tal estatística ficou conhecida como *estatística de Fermi-Dirac*, e se aplica a férmions (objetos que têm spin 1/2).[22] A partir disso, diversos trabalhos foram publicados explorando estas estatísticas quânticas. Vejamos então com mais detalhes no que elas parecem implicar.

4.3.2 'Estatísticas' quânticas

Como vimos, o impacto da física moderna sobre a filosofia da individualidade pode ser avaliada pelo exame do comportamento estatístico de agregados de partículas fundamentais da física. Tal qual o caso clássico, este exame perpassa o modo de distribuição de partículas indistinguíveis sobre certo estados (duas partículas sobre dois estados de uma partícula), sendo assumido que cada resultado/arranjo tem uma certa probabilidade. No caso da mecânica quântica, o modo como são distribuídas as partículas em dois estados A e B seguindo as estatísticas de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac, é o que fortalece a conclusão de que esses objetos são não-indivíduos de alguma forma. Vejamos então como isso acontece.

Vamos novamente considerar o caso de duas partículas rotuladas como 1 e 2 distribuídas em dois estados, A e B. Se as partículas forem bósons, eis os diferentes modos em que podemos distribuí-las via estatística Bose-Einstein (B-E):[23]

5) as partículas 1 e 2 estão no estado $\left|a^1\right\rangle$;

6) as partículas 1 e 2 estão no estado $\left|a^2\right\rangle$;

7) ***uma*** partícula está no estado $\left|a^1\right\rangle$ e ***uma*** partícula está no estado $\left|a^2\right\rangle$.

[22] Vale aqui lembrar alguns pontos sobre o Princípio da Exclusão de Pauli. Os elétrons em um átomo, por exemplo, são caracterizados por quatro propriedades: a energia, n, o momento agular, l, o número quântico magnético m_l (que especifica a orientação permitida para uma nuvem eletrônica no espaço), e o spin, m_s. Os valores dessas quatro propriedades são quantizadas: $n = 1,2,...,$ $l = 0,1,2,...(n-1)$, $m_l = -l,...,0,...,l$ e $m_s = -1/2,+1/2$. De acordo com o Princípio da Exclusão de Pauli, dois férmions idênticos não pode estar no mesmo estado (*i.e.*, nenhum dois férmions podem ter todos os mesmo valores para estas quatro propriedades). Tal princípio dita como os elétrons 'preenchem' as órbitas dos átomos, dizendo em que possíveis estados atômicos os elétrons podem estar (como veremos à frente, uma forma mais rigorosa de enunciar tal princípio é dizer que a função de onda total de um sistema composto por dois férmions idênticos deve ser antissimétrica). Os férmions são as partículas que constituem os 'pedaços de *matéria*, e são exemplos os quarks, os prótons, os elétrons e os neutrinos.

[23] Passaremos a utilizar a noção de Dirac para os estados quânticos, onde $|\psi\rangle$ representa um vetor ψ qualquer em um espaço de Hilbert ("$\langle\psi|$" é chamado de "bra" e "$|\psi\rangle$" de "ket").

Aqui, se assumirmos como se faz usualmente de que cada uma das distribuições é equiprovável, teremos para os bósons que cada um dos casos 5) a 7) tem a probabilidade 1/3 de ocorrer. Em 7), o fato de não estipularmos qual partícula (a 1 ou a 2) está em qual estado simboliza precisamente o fato de que ***as permutações das partículas não geram estados diferentes***. Para os **férmions**, por sua vez, por obedecerem ao princípio de exclusão de Pauli, **apenas 7) é um estado possível**, e terá assim probabilidade 1 de ocorrer (o estado 7 acima representa assim exatamente a estatística Fermi-Dirac (F-D)).

O próximo passo é vermos como podemos representar essas situações no formalismo da mecânica quântica ortodoxa. Como temos duas partículas indistinguíveis, vamos utilizar o mesmo espaço de Hilbert H associado a ambas, e descrever seus estados através do produto tensorial $\otimes$ deste espaço consigo mesmo:

5') $|a_1^1\rangle \otimes |a_2^1\rangle$;

6') $|a_1^2\rangle \otimes |a_2^2\rangle$;

7') $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1^1\rangle \otimes |a_2^2\rangle + |a_2^1\rangle \otimes |a_1^2\rangle)$;

8') $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1^1\rangle \otimes |a_2^2\rangle - |a_2^1\rangle \otimes |a_1^2\rangle)$.

Onde em 7') e 8'), $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é uma constante de normalização. No caso, toma-se 7') quando tratamos de bósons (utilizando-se para tanto vetores de estado chamados de simétricos: com o sinal +), e 8') quando tratamos de férmions (utilizando-se vetores chamados de assimétricos: com o sinal $-$). Utilizando-se as expressões 7') e 8'), representamos assim no nosso formalismo o fato de termos uma partícula em cada estado, sem importar qual partícula (no sentido da identidade) está em cada estado e sem que a permutação dos estados crie uma diferença na contagem (*i. e.*, na estatística). Segundo alguns pensadores, esta característica de não importar qual partícula está em cada estado (já que uma permutação entre elas não gera uma diferença nas mensurações feitas no sistema final) é um dos mais fortes argumentos a favor da visão-recebida de que as mesmas deveriam ser entendidas como *não possuindo identidade*, sendo assim *não-indivíduos* de algum tipo.

Do ponto de vista experimental, o fato da permutação das partículas não gerar um novo arranjo que seja contado como distinto é explicado em termos de que não existe medida que pode ser feita e que possa resultar em alguma diferença discernível entre o resultado permutado final, e o resultado não permutado inicial. Todavia, *o produto tensorial de dois estados não é comutativo*, isto é, se tivermos um espaço de Hilbert $H_{total} = H_1 \otimes H_2$, *isso é diferente* de $H_{total} = H_2 \otimes H_1$ (se $H_1 \neq H_2$). Isso quer dizer que no caso 7'), por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1^1\rangle \otimes |a_2^2\rangle + |a_2^1\rangle \otimes |a_1^2\rangle)$ *é diferente* de $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_2^2\rangle \otimes |a_1^1\rangle + |a_1^2\rangle \otimes |a_2^1\rangle)$, o que é contrário ao que pretendemos, a saber, que a permutação dos estados gere sim *o mesmo estado final* tal qual o estado não permutado. Desta forma, para garantir tecnicamente que o produto tensorial dos espaços de Hilbert onde são expressos os estados quânticos sejam comutativos, temos que assumir no nosso formalismo um *pressuposto externo* à teoria da MQ: o chamado *"Postulado da Indistinguibilidade"* (PI). Tal postulado basicamente diz que se uma permutação das partículas for aplicada em qualquer conjunto de partículas, então não existe nenhum modo de distinguir o estado permutado resultante do estado original não permutado por meio da observação de tais partículas a qualquer momento: ou seja, qualquer permutação não pode ser "observável" (dar origem a situações físicas distintas). Dito de outra forma, ele diz que o valor esperado (esperança matemática) da medida de um observável qualquer $\hat{O}$ para um sistema num estado ψ, é o mesmo antes e depois de qualquer permutação entre partículas indiscerníveis que formem o sistema. Usualmente, tal postulado pode ser representado por insistir que os operadores $\hat{O}$ que representam observáveis, quando aplicados aos vetores de estado, devem sempre comutar com os operadores de permutação $\hat{P}$, tal que para todo operador de permutação $\hat{P}$, $[\hat{O},\hat{P}] = 0, \forall \hat{O} \forall \hat{P}$. De modo mais formal, temos que para qualquer estado arbitrário ψ, um operador hermitiano $\hat{O}$ e um operador de permutação $\hat{P}$,

$$\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \hat{P}\psi | \hat{O} | \hat{P}\psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}^{-1} \hat{O} \hat{P} | \psi \rangle.$$[24]

Consoante com as estatísticas quânticas, a assunção do Postulado da Indistinguibilidade também parece nos levar a negar a ideia de reconhecer as partículas como indivíduos que podem ser rotulados: do ponto de vista das estatísticas, os rótulos $\left| a_y^x \right\rangle$ das partículas do caso 7'), por exemplo, são ociosos. Isto porque tais rótulos apenas estão mostrando que as partículas partilham de ambos os estados e que se trocarmos os estados isso não resulta em diferença alguma. Com efeito, o PI está no centro das discussões sobre a não-individualidade das partículas quânticas e, conforme apresentamos, ele parece implicar que nada pode distinguir as partículas em questão em certas situações. Compatível com a conclusão expressa pela 'Visão Recebida', como vimos acima, diz então que as partículas clássicas são indivíduos, mas as partículas quânticas não são (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 134-146)).

Muito bem, mas o problema é que esta 'saída' (que Redhead e Teller (REDHEAD e TELLER, 1991; REDHEAD e TELLER, 1992; TELLER, 1995) chamam de *Labeled-Tensor-Product-Hilbert-Space-Formalism* - LTPHSF) requer que comecemos com indivíduos, pelo menos em certo sentido, escolhendo um vetor de base *rotulado como* $|\alpha_i\rangle$ *para cada espaço de Hilbert* e, assim, para cada partícula. *Este rótulo já serve como um tipo de identificador*

[24] *cf.* (ARENHART e KRAUSE, 2012; FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 134-146).

para cada partícula. Em sequência dizemos (assumindo os pressupostos do PI) que a permutação desses vetores não modifica o estado do sistema e 'esquecemos' o rótulo, *i.e.*, esquecemos que estes vetores representam objetos inicialmente rotulados e individualizados (logo, indivíduos), podendo assim dizer que agora não é mais possível falar qual rótulo pertence a qual partícula. Em resumo: começamos com um objeto rotulado, e assim com um certo tipo de individuação (pois no formalismo clássico não há escapatória, dado que é impossível formular — usando a matemática clássica — uma descrição dos estados que envolvam a indistinguibilidade desde o início (*cf.* (SCHILLER, 2012, p. 1056).), e em sequência dizemos que estes rótulos não importam, pois suas permutações não fazem qualquer diferença para o estado final do sistema e logo, como os rótulos são ociosos, o produto tensorial é 'salvo'.

O problema é que para se conseguir isso na matemática padrão, onde como vimos a permutação de estados *gera* um novo estado, devemos exatamente assumir algo (o PI) *externo à teoria da MQ*. Do ponto de vista filosófico, isto somente 'mascara' o problema de nossos objetos serem todos iguais (no sentido de que a permutação realmente não faz diferença), mas não conseguirmos expressar isto de forma direta (no sentido de não ter que se assumir subterfúgios) na teoria matemática fundamental. Dito de outra forma, usando a matemática clássica o fato da permutação de objetos *não* levar a um arranjo diferente somente ocorre *se estivermos tratando do mesmo objeto*. Mas as partículas do caso 7') acima não são o mesmo objeto: elas são apenas indistinguíveis! Para se 'resolver' esse problema, os físicos usam o chamado LTPHSF, mas esta alternativa — de um ponto de vista filosófico — não é 'honesta', já que de certo modo começamos com indivíduos de algum tipo (diferenciando e rotulando os espaços de Hilbert) e, em sequência, 'esquecemos' a individualidade desses elementos deixando de lado tais rótulos ao se assumir o PI.[25]. O que acontece, como dito, é que dada a linguagem da lógica e da matemática tradicionais somente conseguimos 'perder a individualidade' nos vendo obrigados a postular condições de simetria que fazem com que a distinção inicialmente atribuída às entidades, por força da necessidade da linguagem, se perca na sequência, ou melhor, seja mascarada: inicialmente supomos que as entidades são indivíduos, identificadas por rótulos, e depois usamos princípios de simetria para dizer que eles não são indivíduos, que não têm individualidade e que seus rótulos não importam. Isso é de fato bastante artificial e, como disse Schrödinger, "gets off on the wrong foot" (KRAUSE, 2003B), podendo até mesmo ser visto como um embuste. O que necessita-

[25]Todavia, vale a pena alertar que o tipo de 'superposição' que aparece no PI não deve ser entendido como uma forma de 'entrelaçamento quântico' (ou um tipo de *entangled*). As correlações originadas nas estatísticas quânticas são *diferentes* daquelas originadas nos estados entangled: veja mais abaixo, bem como os trabalhos de (PLASTINO, 2009; AMICO, *et. al.*, 2008 e DOWLING, *et. al*, 2006).

mos, então, consoante a este autor, é 'entrar com o pé direito', de modo a evitar ter que assumir outras hipóteses externas à nossa teoria. Não obstante, não há como evitar esse problema exceto de estivermos dispostos a mudar radicalmente a base lógica e matemática da teoria quântica para uma que comporte, desde o princípio, algo como *não-indivíduos*. De toda forma, esta alternativa também iria ao encontro do apelo de Heins Post para quem "partículas são não-indivíduos na teoria moderna [... e a] não-individualidade tem que ser introduzida logo no início [right at the start]" (POST, 1963). Acreditamos que tanto o apelo de Post, bem como o de Schrödinger, poderiam ser respondidos se usarmos como fundamento básico da nossa ciência uma teoria de conjuntos alternativa chamada de *teoria dos quase-conjuntos*, a qual será apresentada no próximo capítulo, e que desde o início assume em seu formalismo a existência de elementos que podem ser reconhecidos como não-indivíduos. Não obstante, por hora discutamos mais sobre a individualidade das partículas quânticas, lançando mão de outros argumentos que apóiam a visão da não-individualidade das mesmas.

4.3.3 A individualidade das partículas quânticas

Vamos lembrar da discussão anterior sobre a individualidade e as posições dela advindas. De um lado, existem aquelas visões que procuram por um tipo de economia metafísica advogando um princípio que serviria de via dupla para alicerçar tanto a individualidade como a distinguibilidade (a "teoria dos feixes"). Por outro lado, existem aquelas posições que são enraizadas na insistência que essas duas noções deveriam se manter distintas, no mínimo conceitualmente (a teoria da "identidade transcendental"). A primeira posição sustenta que devemos tentar alicerçar ambas distinguibilidade e individualidade nas propriedades dos objetos, o que requer um tipo de 'garantidor' de individualidade tal como o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII). O debate, então, passa a ser sobre o status desse princípio. Como vimos, certas formas de PII podem ser facilmente mantidas na mecânica clássica, especialmente se assumirmos o chamado Princípio da Impenetrabilidade. Com tal assunção, a localização espaço-temporal, por exemplo, passa a permitir então um papel unificador em nossa metafísica: ela permite distinguir até mesmo aquelas coisas que partilham todas as suas outras propriedades, e em termos das quais elas são indistinguíveis. A localização espaço-temporal, somada à impenetrabilidade, agiria então como o princípio de individualidade buscado. A tradição alternativa insiste que distinguibilidade e individualidade devem ser mantidas distintas. De acordo com tal posição, o que faz uma coisa um 'indivíduo' não pode ser uma propriedade multiplamente instânciavel (esta propriedade estaria relacionada somente com a indistinguibilidade), mas ao invés disso deve ser algo transcendente a tais propriedades. De acordo com alguns filósofos, tal característica metafísica poderia ser explicada em termos da auto-identidade dos objetos ('$a = a$'). Vamos examinar o impacto de tais noções na MQ.

Voltando nossa atenção para o PII em si, lembramos as várias formas que este princípio pode tomar. PII1 declara que não é possível para dois indivíduos possuírem todas as propriedades e relações em comum, PII2 exclui propriedades e relações que podem ser descritas como espaço-temporais, enquanto que a forma mais forte, PII3 inclui somente propriedades monádicas e não-relacionais. Ambos PII1 e PII2 permitem a possibilidade que relações possam ser capazes de distinguir entidades e então conferir-lhes individualidade. Entretanto, tal alternativa tem sido questionada sob a tese de que desde que relações pressupõem diversidade numérica, elas não podem dar conta da individualidade.

Vimos acima que um dos primeiros argumentos contra a visão de que as partículas quânticas são indivíduos em algum sentido advém das estatísticas quânticas e do fato de que uma permutação dos objetos quânticos não gera nenhuma alteração nas medidas sobre o estado final do nosso sistema (o que faz com que a identidade e individualidade das mesmas, assim, não importe). Outrossim, vimos também que como a matemática clássica é atrelada à noção de individualidade, para conseguirmos expressar esta 'perda de identidade' dos objetos quânticos temos que assumir hipóteses *ad-hoc* adicionais (os preceitos do PI), que no fim também acabam por aditar-se ao fato de que os objetos quânticos podem ser realmente entendidos como não tendo identidade. Nesta seção exploraremos outras facetas da MQ que nos permitem sustentar a tese de que o PII falha nesse contexto, de modo que podemos realmente afirmar por outras razões (e não apenas devido ao que já vimos acima) que os objetos quânticos realmente podem ser vistos como desprovidos de individualidade. Vamos focar neste texto principalmente o status do PII1 frente à MQ e, no final desta seção, comentaremos rapidamente sobre as outras formas de PII. Como dito, a forma mais fraca do princípio é satisfeita no contexto *clássico* porque a descrição de estado dinâmico gera uma bem definida e unicamente determinada trajetória espaço-temporal para cada partícula. Esta descrição invoca o Princípio da Impenetrabilidade (IA) e, assim, a distinção via localização espaço-temporal é assegurada. No contexto quântico, podemos de pronto afirmar que PII1 é falso a partir do argumento de que, sob a interpretação padrão, trajetórias espaço temporais únicas em geral não existem e, em particular, o PII não está até mesmo implicado pela equação de Schrödinger (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, seção 3.6)). Se puder ser mostrado que nenhuma outra propriedade distinguível (e então individualizante) é possível de ser assumida pelas partículas quânticas, então pode-se concluir que o PII1 não é satisfeito. Desde que esta é a forma mais fraca do princípio, ele em geral deve não valer na MQ.

Mas analisemos tal possibilidade com mais detalhes, focalizando, primeiramente, os estados 7') e 8') acima, onde temos uma partícula em cada estado. Poderíamos afirmar que para estes casos o PII é satisfeito, haja vista que temos apenas *uma partícula em cada estado separadamente*. Para o caso dos férmions, inclusive, poderíamos ainda afirmar que *existe* realmente uma propriedade individualizante: a partir do chamado Princípio da Exclusão, podemos assumir o PII como valendo neste contexto porque tais partículas respeitariam uma forma 'quântica' de IA. Expresso desta maneira, o Princípio da Exclusão poderia ser reconhecido como uma generalização do IA clássico, e dado que dois férmions não podem estar no mesmo estado, então temos um 'tipo' de IA e o PII1 é satisfeito.

Mas esta tentativa de salvar o PII para os elementos da MQ a partir desse 'IA quântico' nas situações 7') e 8') não é efetiva. Recordamos que se tivermos duas partículas, rotuladas como 1 e 2 e distribuídas em dois estados $|a^1\rangle$ e $|a^2\rangle$, então o que temos são as seguintes possibilidades:

7') $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1^1\rangle \otimes |a_2^2\rangle + |a_2^1\rangle \otimes |a_1^2\rangle)$;

8') $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1^1\rangle \otimes |a_2^2\rangle - |a_2^1\rangle \otimes |a_1^2\rangle)$.

Se considerarmos o estado anti-simétrico dado por 8'), que formalmente incorpora o Princípio da Exclusão via anti-simetrização do apropriado vetor, não é verdade que cada partícula esteja em um estado diferente. Na realidade, *cada partícula compartilha de ambos os estados* $|a1\rangle$ *e* $|a2\rangle$ *na superposição do produto de estados expresso em 8').* Tais estados são chamados de estados "*entangled*"; os quais não podem ser designados para partículas separadas, *fazendo com que as partículas pertençam a ambos os estados* $|a^1\rangle$ *e* $|a^2\rangle$ *ao mesmo tempo e que também compartilhem, ao mesmo tempo, das mesmas propriedades estado-dependentes*.[26] Além disso, na MQ, os estados puros perfazem os chamados "estados maximamente especificados", isto é, aqueles para os quais temos todas as informações possíveis. Todavia, para os estados entangled, *não existem estados puros que possam ser designando para partículas separadas*, o que significa basicamente que o sistema não pode ser separável (veja nota anterior). Por fim, é possível ainda provar que

[26]Formalmente o que acontece é que a função acima não é fatorável, o que nos permitiria assim obter cada uma das parcelas isoladamente e conseguirmos determinar qual partícula está em qual estado. O que temos é o sistema conjunto, descrito pela função ψ, e ela simplesmente nos diz que temos uma partícula no estado A e outra no estado B, mas jamais poderemos saber qual é qual (*cf.* (DA COSTA, *et. al.*, 2012)). Esta situação é tipicamente 'quântica' e não tem análogo na descrição 'clássica' da realidade. Schrödinger, inclusive, disse que se trata *da* peculiaridade da MQ (SCHRÖDINGER, 1935).

estados entangled não são possíveis de serem distinguidos de estados puros por meio de observações, e que dois férmions em um estado entangled, por exemplo, atualmente *têm as mesmas propriedades monádicas e relacionais um em relação ao outro* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 156). Isto tudo significa que se pensarmos nesses estados como representando as propriedades relevantes das partículas, o PII (em todas as formas) acaba sendo violado até mesmo para férmions que 'respeitam' o Princípio da Exclusão. O mesmo acontece para os bósons em 7'), para os quais até mesmo nem vale o princípio de exclusão. Além disso, para ambos os estados 7') e 8'), se separarmos as partículas depois de estarem entangled (no sentido de partículas que estavam separadas, entraram em estado entangled, e depois foram separadas novamente), é impossível identificarmos qual partícula é qual . É neste sentido que Penrose (PENROSE, 1989, p. 294) afirma que "partículas diferentes de um mesmo tipo [querendo aqui dizer que se tratam de partículas indistinguíveis, mas não a mesma] não podem ter identidades se separadas uma das outras". Com a impossibilidade de separarmos tais partículas nos casos em apreço, somado ao fato de não termos nenhum tipo de particularização para elas, temos um quadro claro onde se apresenta a perda de individualidade para esses objetos.

Vamos considerar agora os casos 5') e 6') que valem apenas para bósons. Aqui, temos uma violação definitiva do PII, "desde que a correspondente simetria da função de onda significa que dois, ou mais, bósons podem possuir todas as mesmas propriedades estado-dependentes e assim serem indistinguíveis [plenamente]" (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 150). Em resumo, como mostra a estatística, isso quer dizer que mais de um bóson pode ocupar o mesmo estado, levando ao uma falha do (equivalente em MQ) princípio da impenetrabilidade. Além disso, as trajetórias espaço-temporais dos bósons não podem servir para individualizá-los. Tome, por exemplo, dois fótons: nos pontos em que suas trajetórias se cruzam e os fótons compartilham todas suas propriedades espaço temporais em comum, se torna logicamente impossível determinar qual fóton em cada ponto tem cada história. O mesmo acontece quando experimentalmente temos uma colisão entre duas partículas deste tipo: seria necessário seguir o caminho do movimento de cada uma, "mas não temos nenhuma chance de conseguir isso" (SCHILLER, 2012, p. 1053-4) porque o erro da leitura da posição da partícula é maior do que o tamanho da partícula em si. Experiências mostram ainda que em pequenas distâncias é impossível dizer se as partículas mudaram sua direção ou não, e essa impossibilidade é uma consequência direta do quantum de ação (*ibid.*). Além disso, como já pontuado, de acordo com a interpretação padrão da mecânica quântica, trajetórias espaço-temporais únicas em geral não existem. Em outras palavras, se a interpretação padrão é adotada, então pode ser mostrado que a família de observáveis correspondendo à posição de partículas individuais não pode fornecer distintas trajetórias espaço-temporais (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 173)). Ademais, "se lembrarmos que a teoria quântica descreve as partículas como nuvens, a indistinguibilidade parece ser mais natural. Quando duas nuvens se encontram e posteriormente se separam, é impossível dizer qual é qual" (SCHILLER, 2012, p. 1054). Com efeito, *nenhuma experiência pode rastrear partículas com propriedade intrínsicas idênticas de tal modo que elas podem ser distinguidas com certeza* (*ibid.*). Essa impossibilidade foi verificada experimentalmente com todas as partículas elementares, com núcleos, com os átomos e com numerosas moléculas (SCHILLER, 2012, p. 1058).. Aqui vemos que a alternativa clássica de tanto individualizar como distinguir as partículas em termos de sua localização espaço-temporal, em conjunção com o Princípio da Impenetrabilidade (que agiria como um garantidor), padece de várias dificuldades, de modo que muitas características intuitivas que temos para dotar um objeto de individualidade (como poder seguí-lo o tempo todo — isto é, possuir continuidade espaço-temporal tendo assim uma trajetória determinada —, poder rotulá-lo, reidentificá-lo em outras situações etc.[27]) acabam sendo frustradas (*cf.* (UFFINK e HILGVOORD, 1988)). Somado a isso, o impacto das relações de incerteza, juntamente com argumentos da impossibilidade de variáveis ocultas (que mostraremos abaixo), por fim também levam à posição de que a individualidade espaço-temporal não pode realmente ser mantida no contexto quântico (WICK, 1996, cap. 5) e, assim, a abordagem do problema da individualidade segundo uma teoria de feixes de propriedades parece ser completamente descartada.[28]

Mas uma questão que se coloca é se são indistinguíveis e se não se pode seguí-los, como a ciência sabe (experimentalmente) que temos dois fótons em um certo estado, por exemplo? Como os físicos podem contar partículas indistinguíveis? A resposta é que se sabe o número de fótons através do 'peso' do sistema: saber que, por exemplo, existem dois fótons em uma caixa, pode ser determinado por notar que o total de energia da frequência v na caixa é $2hv$ e empregar a equação de Plank:

> O segundo passo é a especificação de um observável útil para determinar o número de partículas. A forma

[27]Ou seja, a genidentidade de Reichenbach.

[28]Na MQ existem várias outras situações em que não é possível distinguir entre dois caminhos possíveis de uma partícula e há autores que sustentam, inclusive, que na escala microscópica os próprios conceitos de espaço e de tempo necessitam qualificação. Por exemplo, Max Jammer (JAMMER, 2010, p. 290), afirma claramente que "o resultado obtido por Salecker e Wigner com respeito às limitações que cercam as medidas de intervalos espaço-temporais na mecânica quântica, (...) priva as noções tradicionais de espaço e tempo de qualquer significado operacional na microfísica".

> mais fácil é escolher um dos números quânticos que se somam sob uma composição, tal como a carga elétrica. A contagem é então calculada pela medição do total da carga dividida pela unidade de carga. Este método tem diversas vantagens. Primeiro de tudo, *não é importante se partículas são distinguíveis ou não; contar [deste modo] sempre funciona.* (SCHILLER, 2012, p. 1055, grifo meu).

Usando tal alternativa conseguimos saber quantas partículas indistinguíveis existem no átomo mesmo sem poder distinguí-las ou seguí-las de alguma forma. Podemos deste modo ver que este tipo de contagem não é via métodos ordinários, os quais pressupõem a distinção entre os objetos: neste 'método quântico' de contagem, *podemos contar sem determinar o que está sendo tratado como indivíduo ou o que está sendo contado como o 'primeiro', o segundo etc.*[29]

Entretanto, poderíamos argumentar (como fez Barnette (BARNETTE, 1978)) que tais fatos acima enunciados confundem a questão epistemológica com a metafísica: do fato que após as trajetórias terem se cruzado não existir nenhum modo de falar, por exemplo, qual fóton veio de onde, não nos compele a desistir do apelo metafísico de que o predicado "possuir uma história *H*" seja satisfeito por um e somente um fóton durante todo o tempo após as trajetórias se cruzarem. Dado que este predicado vale para apenas um e somente um objeto o tempo todo, isto faz com que PII não seja violado. O que Barnette clama, assim, é semelhante com a distinção entre distinguibilidade e individualidade: somente porque não existe um predicado que satisfaça o primeiro, não significa que o último esteja comprometido (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 157-8)).

No entanto, este tipo de reposta é problemática. Para Teller (TELLER, 1983, p. 314), não é o caso que na prática não se possa distinguir os dois fótons mas, ao invés disso, que não existe nada *em princípio* que possa servir para individualizá-los. Em tais situações, diz esse autor, questões epistemológicas não podem ser separadas das metafísicas: a metafísica pode estar dependente de que características estão disponíveis e que podem, a princípio, servir para individualizar as partículas. Dado a ausência total de tais características para os dois fótons no mesmo estado, é desvirtuar a questão dizer que os mesmos são individualizados por diferenças em alguma propriedade histórica. Além disso, não é claro como podemos entender a noção de 'ter uma história' neste contexto: se 'ter uma história' envolve não somente via-

[29] Nossa teoria de conjuntos alternativa que veremos no próximo capítulo também deverá refletir tal fato: deveremos ter um *cardinal*, mas não um *ordinal*; falar sobre o número de partículas em cada átomo, mas não disso extrair o 'individuo-partícula' em cada átomo a partir de sua posição na ordem numérica.

jar ao longo de alguma trajetória espaço-temporal, mas também satisfazer o Princípio da Impetrabilidade, então sobre a mais óbvia interpretação da MQ, como vimos, fótons não têm histórias.

Caso ainda quiséssemos manter a possibilidade de tratarmos as partículas quânticas como indivíduos admitindo entre elas uma possível distinção através de alguma forma de haecceties, e entendendo essa substância como um tipo de "variável oculta", podemos ficar em apuros. Segundo alguns autores, assumir algum tipo de propriedade ou relação que apesar de desconhecida poderia conferir uma diferença entre os objetos leva aos chamados "no-go theorems"; os quais declaram que uma particular situação não é fisicamente possível. Especificamente, tal termo descreve resultados em mecânica quântica — como os teoremas de Bell e de Kochen-Specker — que reprimem os tipos possíveis de variáveis ocultas que podem ocorrer nas teorias quânticas. Falando por alto, o teorema de Bell afirma que as hipóteses do realismo local de que uma partícula possui valores definitivos que não dependem do processo de observação, bem como a de que a velocidade de propagação dos efeitos físicos é finita, são incompatíveis com a interpretação padrão (ortodoxa) da MQ. O teorema de Kochen-Specker, por sua vez, exclui as teorias de variáveis ocultas que requerem que os elementos da realidade física sejam não contextuais (*i.e.* independentes do aparelho de medição). Sendo assim, se aceitarmos algum tipo de variável oculta, devido à exatidão das previsões quânticas somos levados a ter que descartar ou a Teoria da Relatividade Restrita (RR); algo um tanto caro aos físicos, ou então a visão de que as coisas são separáveis. Os físicos, obviamente, optam por esta última alternativa por ela poder coexistir juntamente com a RR, de modo que tudo leva a crer que realmente não há, na MQ, nenhuma outra propriedade (em particular, algum tipo de variável oculta) para além das descritas pela teoria.[30]

Em resumo, temos o seguinte quadro. Existem basicamente dois tipos de partículas quânticas: férmions e bósons. Em grandes quantidades,

[30] O artigo principal de Bell (BELL, 1964) foi publicado em 1964, e uma discussão muito abrangente se encontra em (BELL, 1987) e em (WICK, 1996, cap. 8). Para uma prova simples do teorema de Kochen-Specker, veja (BITBOL, 1996, anexo 3). Para uma análise geral de tais teoremas e dos problemas deles advindos, veja (PESSOA Jr., 2003; PESSOA Jr., 2006). Não obstante, este tema, qual seja, de que usando-se a lógica clássica como fundamento da MQ seríamos levados a considerar possíveis variáveis ocultas de algum tipo (lógico), é novo e necessita ser estudado. De toda forma, vale ressaltar que na mecânica quântica padrão as chamadas partículas elementares são objetos simples, no sentido de que possuem relativamente poucas propriedades essenciais descritas de modo preciso pela teoria. Elétrons, por exemplo, são caracterizados por possuírem uma certa massa, uma certa carga elétrica, um certo valor de spin (em valor absoluto, igual a $1/2$) etc. e, de certo modo, podemos listar todas as suas propriedades essenciais (intrínsecas) contrariamente à maioria dos objetos macroscópicos que nos cercam. Aqui se vê mais uma vez a problemática relativa a assumir propriedades individualizantes na MQ: de certa forma, pode-se dizer como pressuposto básico enormemente comprovado pelo sucesso da teoria que 'não há mais' o que assumir!

estas partículas se comportam de forma diferente, isto é, obedecem diferentes estatísticas: como vimos, as primeiras obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac, e as segundas as de Bose-Einstein. Um sistema não pode ser ao mesmo tempo um férmion e um bóson. Além disso, tais partículas se comportam de uma forma diferente das partículas clássicas, que obedecem a estatística de Maxwell-Boltzmann, e a qual é distinta dos dois tipos de estatísticas quânticas: como vimos, em uma permutação, um férmion e um bóson não geram uma nova contagem. Estas diferenças influenciam o modo como as partículas quânticas podem ser consideradas indivíduos: nas novas estatísticas, sugere-se, a individualidade das partículas constituintes deve ser abandonada. Além disso, se quisermos ainda assim tentar sustentar a individualidade com outras propriedades (como espaço-temporais), também incorremos em problemas. Por fim, foi mostrado que nenhuma propriedade intrínseca ou estado-dependente pode ser identificada com propriedades monádicas ou relacionais e que, além disso, dois bósons ou dos férmions — em um estado simétrico ou anti-simétrico — têm as mesmas propriedades monádicas e as mesmas propriedades relacionais um com o outro. Dadas tais características, até mesmo a forma mais fraca de PII, PII1, falha. Além disso, como os sistemas emaranhados não possuem seus estados próprios e definidos, nem consequentemente possuem suas próprias e definidas propriedades monádicas, nenhum valor definitivo para apenas *uma* partícula pode ser assinalado para qualquer observável. Como nenhuma propriedade estado dependente pode ser atribuída para cada partícula individual, se conclui que o PII2 e o PII3 são também violados e que o PII em geral é falso na MQ (para tais provas, veja (FRENCH e KRAUSE, 2006, cap. 4)).

Por fim, vale citar a posição de Erwin Schrödinger, que por sinal foi um dos maiores defensores dessa visão. Este cientista foi um dos que mais tentou explorar as conclusões filosóficas da MQ, e em vários de seus textos expressa a posição de que as partículas quânticas teriam perdido sua individualidade, tornando-se assim não indivíduos em certo sentido. Por exemplo, em seu *What is an elementary particle?*[31], tal autor já afirmava que a física se inicia com nossas experiências com os objetos macroscópicos que nos cercam de modo que

> tomamos de teorias prévias a ideia de uma partícula e toda a linguagem técnica concernente a ela. Esta ideia é inadequada [para a MQ]. Ela constantemente dirige nossa mente a indagar por informações que obviamente não têm significância. Sua estrutura imaginativa exibe características que são estranhas à par-

[31] *in Science and the human temperament*. New York: Dover Publications, 1957, citado em (KRAUSE, 2002).

> tícula real. [...] A partícula [...] não é um indivíduo identificável. [...] E não é fácil compreender esta ausência de individualidade e encontrar palavras para ela.[32]

Este autor sustenta assim que o conceito de identidade realmente carece de sentido para as partículas elementares — e o mesmo se daria para a questão da individualidade — os quais devem ser abandonados pelo advento da MQ: posição esta que defendemos durante todo esse capítulo. Com efeito, em outra passagem do mesmo texto, ele afirma claramente que "eu devo prevenir sobre um conceito errôneo (...) de que um aglomerado [de partículas] impede-nos somente de registrar a identidade das partículas, e que confundimos uma partícula com a outra. O ponto é que *elas não são indivíduos* que possam ser confundidos uns com os outros. *Uma tal afirmação (a de que seriam indivíduos de algum tipo) é sem sentido*" (grifo meu). E ainda da mesma obra se extrai que:

> Eu quero dizer isso: que a partícula elementar não é um indivíduo; ela não pode ser identificada, ela perde a 'mesmice' [sameness]. O fato é conhecido por todos os físicos, mas é raramente dado qualquer destaque em pesquisas que podem ser lidas por não especialistas. Em linguagem técnica, isto é recoberto [covered] por dizer que as partículas 'obedecem' estatísticas ultramodernas [newfangled]: ou as estatísticas de Bose-Einstein ou as Fermi-Dirac. [...] A implicação, longe de ser óbvia, é que o insuspeito epíteto 'este' não é muito adequada para, digamos, um elétron, exceto com cautela, em um senso restrito, e muitas vezes de modo algum.

Schrödinger, em várias outras ocasiões, expressou a posição de que as partículas não podem mais ser reconhecidas como indivíduos, e insitiu que uma nova interpretação capaz de acomodar esta não individualidade deveria ser buscada. Como por exemplo em seu *Ciência e Humanismo* (SCHORÖDINGER, 1952, p. 121), escreveu de modo enfático que "[...] temos [...] que desistir da ideia que [...] uma partícula é uma entidade individual que

[32]Como enfatizamos no capítulo anterior, todavia, não apenas a mecânica clássica usaria os conceitos tidos da nossa experiência ordinária, como apregoa Schrödinger, mas também a matemática clássica e a lógica, juntamente com a teoria de conjuntos nelas assentada. Como visto anteriormente, quando pensamos em um *conjunto*, intuitivamente pensamos em uma coleção de 'objetos clássicos' como aqueles que nos rodeiam (e a própria teoria intuitiva de Cantor também assume isso), sendo assim indivíduos no sentido antes discutido. Como também sustentamos, as teorias físicas baseadas em tal matemática clássica acabam por também se tornar dependentes do que estes alicerces assumem.

retém sua 'mesmisce' para sempre. Muito pelo contrário, somos agora obrigados a assertar que os últimos constituintes da matéria não têm 'mesmice' de qualquer modo". E depois, no mesmo texto:

> Quando você observa uma partícula de certo tipo, digamos um elétron, aqui e agora, isto deve ser tratado em princípio como um evento isolado. Mesmo que você observe uma partícula semelhante pouco tempo depois em um lugar muito próximo do primeiro, e mesmo que tenha todas as razões para assumir uma conexão causal entre a primeira e a segunda observação, não há nenhum sentido verdadeiro, não-ambíguo, na afirmação de que é a mesma partícula que você observou nos dois casos. As circunstâncias podem ser tais que tornem altamente conveniente e desejável que nos expressemos assim, mas é apenas uma abreviação da fala; pois existem casos onde a 'igualdade' se torna inteiramente sem sentido; e não há nenhum limite preciso, nenhuma distinção clara entre eles, há uma transição gradual nos casos intermediários. E eu insisto em enfatizar isto, e rogo que você acredite: não é uma questão de estarmos aptos a afirmar a identidade em alguns casos e não estarmos aptos em outros. Está além da dúvida que a questão da 'igualdade', da identidade, real e verdadeiramente não tem sentido.

A posição de Schrödinger foi baseada principalmente sobre duas características quânticas. A primeira delas se refere ao fato de que as partículas quânticas não podem ser rotuladas em qualquer sentido, o que como vimos favorece a perda da individualidade pelas mesmas: "Isso significa *muito mais* que as partículas ou corpúsculos são todos *iguais*. Isto significa que você não deve até mesmo imaginar qualquer uma delas como sendo marcada 'por uma mancha vermelha' tal que você possa reconhecer mais tarde como sendo *a mesma*" (SCHRÖDINGER, 1995, grifo do autor). A segunda se refere à reidentificabilidade ou transtemporalidade das partículas idênticas. Como também vimos anteriormente, uma condição necessária para a identidade transtemporal é a continuidade espaço temporal. Schrödinger afirma que é precisamente esta condição que falha no contexto quântico: onde os observáveis são apenas posição e momento, não se pode atribuir trajetórias espaço-temporais definitivas às partículas pois não podemos 'traçar de volta' o caminho da partícula. Para ele, assim, a ideia de dotar de identidade partículas que não têm trajetórias era simplesmente incoerente: "para mim, desistir da caminhos parece desistir de partículas" (BITBOL, 1996, p. 8). Todavia, vale enfatizar que a posição de Schrödinger está além da simples dificuldade em reconhecer o mesmo objeto em outros momentos. O seu problema, na verdade, não é epistemológico, mas sim *ontológico*: ele não se refere simplesmente a um tipo genidentidade, ou somente a uma identificação através do tempo, mas sim, principalmente, à *identidade em si* dos objetos quânticos.

4.3.4 A indeterminação da metafísica pela física

Um último ponto a ser esclarecido é que é importante enfatizar que o formalismo da MQ não nos obriga, necessariamente, a adotarmos a posição de que os objetos quânticos são não-indivíduos. De toda forma, podemos ainda manter a opção contrária, de que os mesmos são sim indivíduos, todavia de uma espécie diferente, mesmo que para isso tenhamos que adotar noções metafísicas problemáticas tais como assumir um tipo de substância individualizadora ou uma "primitive thisness", ou ainda restringindo os estados (simétricos ou antissimétricos) que estas partículas podem ocupar. Dito de outra forma, com a matemática clássica podemos continuar a falar da individualidade dos objetos quânticos desde que para tanto assumamos, como visto, hipóteses *ad-hoc* que digam que os mesmos são indivíduos, mas são indistinguíveis entre si, bem como que eles podem ocupar apenas certos estados em detrimento de que se possa deduzir da teoria estados 'proibidos'. Com a assunção de que certos estados são inacessíveis, ao invés de se assumir uma visão metafísica de não-indivíduos, podemos continuar a tomá-los como indivíduos, haja vista que pode ser defendido que somente porque os rótulos das partículas são ociosos estatisticamente (via PI acima), isto não significa que *metafisicamente* também sejam: as estatísticas quânticas também surgem corretamente se reconhecermos tais estados como possíveis, *mas nunca realizáveis*. Esta alternativa, como dito, nos permite reter a metafísica da individualidade para as partículas quânticas (apesar de termos que assumir hipótese metafísicas extras, como vimos) (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 148)). Os defensores de tal posição podem arguir que, no mínimo, este tipo de visão nos permite empregar nossas ferramentas lógicas e conjuntistas padrão no trato de tais objetos, e que até mesmo não está claro como a ideia de não-individualidade pode ser expressa em termos formais.[33] Todavia, como dizem French e Krause (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 193):

> Se as partículas são tomadas como indivíduos sujeitos a restrições sobre o conjunto de estados que eles podem ocupar, então àqueles estados que são inacessíveis para as partículas de um tipo particular corres-

[33]Não obstante, no próximo capítulo, veremos como uma teoria de conjuntos alternativa pode dar conta de tal formalismo.

> pondem aos "estados excedentes" [surplus structure] em nossa descrição teórica. Em particular, se as partículas são reconhecidas como indivíduos e índices para elas são introduzidos, então é inteiramente misterioso por que, em adição à combinação da simetrização padrão, da anti-simetrização e da simetrização mista [mixedsymmetric] (correspondendo às paraestatísticas), um particular subconjunto destes estados inacessíveis, excedentes, em particular àqueles que são não-simétricos, não são somente são não realizados na natureza, mas parecem não servir a nenhum propósito teórico útil. Eles podem ser tomados como sendo tanto empiricamente como teoreticamente 'excedentes'. Aplicando o princípio metodológico de que uma teoria que não contém estruturas excedentes é preferível sobre uma que tem, Redhead e Teller concluem que *temos alicerces para preferir a abordagem via não-indivíduos, e este mistério simplesmente não aparece* (grifo meu).[34]

De toda forma, se mesmo assim for aceito que estes problemas podem ser superados, e que assim é preferível manter a matemática padrão e a visão individualizadora dos objetos quânticos, então a conclusão é que o formalismo pode ser tomado como suporte para duas diferentes posições metafísicas distintas. Uma delas reconhecendo desde o início as partículas como 'não-indivíduos' em algum sentido, de modo que se deva procurar um formalismo (em especial, uma teoria de conjuntos) mais adequado para expressar essa falta de individualidade sem ter que assumirmos coisas extras à teoria. A outra posição reconhece tais partículas como indivíduos (filosoficamente) clássicos, embora de um tipo um tanto diferente dos indivíduos com os quais estamos acostumados, já que para sustentar essa visão se faz necessário introduzir uma série de restrições nos conjuntos de estados que são inacessíveis — bem como aos observáveis a serem considerados —, ou até mesmo assumir posições não realistas de substratum, como vimos. O problema é exatamente que os dados experimentais não fornecem argumentos decisivos para uma ou outra posição, de modo que podemos assumir qualquer uma delas desde que 'paguemos o preço' de nossa escolha: assumir posições 'impostas' à teoria,

[34] Lembramos que vários fatos empíricos levam à conclusão de que apenas as estatísticas 'tipo' Bose-Einstein e Fermi-Dirac existem na natureza. Entre tais fatos empíricos, temos o caso dos fótons, por exemplo, que se não obedecessem as estatísticas de Bose-Einstein, absorveriam e emitiriam a luz de um modo totalmente diferente; e os elétrons, por sua vez, que se existissem em superposições de estados simétricos e anti-simétricos fariam com que todos os elementos da tabela periódica, a partir do Lítio, possuíssem estados nos quais a camada 1*s* deveria ter mais que dois elétrons, de modo que as propriedades químicas desses elementos também deveriam ser diferentes (*ibid.*, p. 194).

ou mudar a base lógica e matemática.[35]

Como conclusão, o que acontece é que nesse arcabouço teórico o PII não pode ser descartado completamente, haja vista que a física quântica não pode gerar qualquer conclusão metafísica definitiva.[36] Uma das vantagens em se considerar estas partículas como indivíduos é que aparentemente poderemos manter a lógica e a matemática clássicas sem problemas, onde já estamos acostumados a trabalhar e em particular onde já temos versões formalizadas do Princípio da Identidade dos Indiscerníveis de Leibniz. Por outro lado, tomando as partículas como não-indivíduos desde o início, podemos obter as estatísticas quânticas de modo mais coerente sem a necessidade de assumir hipóteses adicionais, além de que, como visto, podemos ir ao encontro do pensamento de físicos como Schrödinger, Post e Heisenberg, só para citar alguns. Aqui, nos interessa então adotar essa última proposta, a saber, assumir desde o início os objetos da MQ como não-indivíduos em algum sentido, e esclarecer como isso nos leva a uma forma de não-reflexividade através da negação da auto-identidade para os mesmos, no sentido de que para esses objetos não valeria a lei lógica $a = a$. Isto porque se não-indivíduos são objetos que não figuram com sentido em relações de identidade ou diferença, a identidade deixaria de ser aplicada para esses objetos (falaremos mais disso na próxima seção). Todavia, se adotarmos essa proposta, temos que encarar problemas como o de explicar de que forma devemos entender esta não-individualidade, ou ainda de como será possível manter coerentemente a lógica e a matemática clássicas neste caso, já que a física clássica é feita nessas bases. Tentaremos responder a essas questões no decorrer desta tese.

[35] Uma indeterminação parecida também aconteceria com relação ao próprio caráter ‘objetual’ da noção de *objeto* quântico. Nesse caso, também é questão complexa decidir se os objetos quânticos deveriam ser entendidos da mesma forma que os objetos clássicos, todavia de um tipo um pouco diferentes e respondendo a outras leis, ou deveriam ser entendidos como um *novo* tipo de objeto, *totalmente contrários* ao modo que entendemos os objetos clássicos, e para os quais deveríamos buscar uma construção *ontológica totalmente nova*. Sobre tal tema, veja (BITBOL, 1996 e SCHINAIDER, 2012).

[36] Aqui vale a pena citar que Ehrenfest e Uhlenbeck tentaram analisar a conclusão se as estatísticas Bose-Einstein ou Fermi-Dirac são necessariamente requeridas pelo formalismo da MQ, ou se existem ‘áreas’ nas quais a estatística clássica continua valendo. O resultado foi que tais estatísticas são *impostas* pela simetria requerida sobre o conjunto de todas as soluções da equação de Schrödinger para um conjunto de partículas obtida por considerar a permutação de todas as partículas sobre si mesmas, e as quais produzem as combinações simétricas e anti-simétricas que resultam na estatística B-E e F-D, respectivamente. Se nenhuma restrição for imposta, então a estatística de Maxwell-Boltzmann é a mais apropriada para ser usada. Desta forma, eles demonstraram que o formalismo da MQ, por si mesmo, realmente não implica necessariamente em uma ou em outra das duas formas de estatística quântica (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 103)).

4.4 MECÂNICA QUÂNTICA E MATEMÁTICA CLÁSSICA

Como mostramos no capítulo anterior, uma das características da lógica clássica é que nela não há objetos indiscerníveis sem ser o mesmo objeto (ideia expressada pela chamada Lei de Leibniz). Da mesma forma isto ocorre no caso da teoria de conjuntos, onde se incorpora o Axioma da Extensionalidade, que aliada à lógica clássica que a fundamenta confere à indistinguibilidade o caráter de identidade e individualidade. Com isso a matemática clássica alicerçada em tais teorias também se torna individualizadora. No entanto, neste texto, estamos argumentando a favor de um caráter não-individualista para os objetos quânticos, e tal característica, como vimos, não é capturado nem pela matemática atual, nem pela lógica clássica ou pelas teorias de conjuntos usuais, de modo que vale a pena assim questionar o uso de tais teorias clássicas no ambiente quântico.[37]

Tendo consciência da necessidade de exprimir a MQ em uma linguagem formal que mais se aproximasse das características dos objetos encontrados nessa disciplina, o físico e matemático Y. Manin sugeriu que deveríamos buscar por axiomas para tratar de coleções cujos elementos não pudessem ser distinguidos uns dos outros, concebendo assim uma teoria de 'conjuntos' que mais se coadunasse com os pressupostos ontológicos de tal ciência. Disse ele:[38]

> Gostaria de enfatizar que ela (a linguagem da matemática usual) é antes uma extrapolação da física usual, na qual podemos distinguir coisas, contá-las em certa ordem etc. A nova física quântica tem nos mostrado modelos de entidades que têm um comportamento radicalmente diferente. Mesmo 'conjuntos' de fótons em uma caixa de vidro, ou de elétrons em uma peça de níquel, são muito menos cantorianos de que 'um conjunto' de grãos de areia [...] Certamente não há razões a priori para escolher os conceitos fundamentais da matemática para fazê-los corresponder aos da física. No entanto, isso parece acontecer constantemente e tem provado ser extremamente frutífero.

De forma paralela, dizem Dalla Chiara e Toraldo di Francia (CHIARA e TORALDO DI FRANCIA, 1993): "considere os elétrons de um átomo. Geralmente sabemos perfeitamente bem quantos elétrons há, mas não sabemos

---

[37] Interessante notar que o próprio Quine, em seu texto *Whiter physical objects?* (QUINE, 1976), passou a afirmar que o desenvolvimento da física neste século sustenta a *evaporação do objeto físico* — em seu fundamento, as partículas elementares — em nada mais que regiões no espaço-tempo suportando certas propriedades.

[38] Manin, Yu. I., *Mathematical problems I: foundations*, citado em (KRAUSE, 2002).

qual é qual. É costume falar do 'conjunto' dos elétrons de um átomo. Mas, constituem eles realmente um conjunto? Certamente não no sentido clássico.".

Em linhas gerais, o que esses autores estão enfatizando é exatamente que os axiomas 'padrão' na teoria de conjuntos são inadequados para representar coleções de objetos indistinguíveis. Como vimos, as teorias formais clássicas contrastam fortemente com a 'Visão Recebida' das entidades quânticas, dado que nessas teorias não existem entidades absolutamente indistinguíveis sem ser a mesma entidade, somado ao fato de que nelas *realmente* não se pode manipular não-indivíduos *verdadeiramente* indistinguíveis (vide, no capítulo anterior, a possibilidade de rigidificarmos as estruturas baseadas em teorias de conjuntos clássicas). Na mesma direção, podemos também dizer que os autores acima propõem exatamente que se busque 'a linguagem matemática própria da MQ'; uma linguagem que seja consoante com o que a teoria assume como pressuposto básico, a saber, a indistinguibilidade de seus elementos. Uma solução ao problema de Manin, portanto, tendo em vista as características extensionais e 'leibnizianas' da teoria de conjuntos e da matemática padrão, respectivamente, teria que ser construída de forma que as coleções de objetos quânticos não constituíssem um conjunto equivalente aos conjuntos encontrados nas teorias clássicas anteriormente tratadas. Precisamos falar de coleções de objetos indiscerníveis que não são o mesmo objeto e, neste caso, as teorias de conjuntos usuais parecem falíveis. O que necessitamos, deste modo, é de uma ferramenta matemática que nos permita manipular um número de partículas indistinguíveis dos átomos sem 'cair' nos problemas clássicos citados. Em suma, o que se deseja é violar a máxima de Leibniz segundo a qual "colocar duas coisas indiscerníveis é colocar a mesma coisa sob dois nomes".

Os conceitos de identidade e indistinguibilidade (ou indiscernibilidade) assumidos na lógica e matemáticas tradicionais passariam a ter que ser separados de forma que um deles não implicasse no outro, e isso deveria ser feito sem se recorrer a 'truques' como assumir postulados extras e dizer que que o que interessa são vetores ou soluções simétricas ou anti-simétricas de certas equações nas quais a permutação de rótulos deixa invariante a solução ou o vetor. Além disso, como visto, mesmo com essa 'solução' de se aplicar o postulado da indistinguibilidade, por exemplo, ainda mantemos a noção de partícula 'nos bastidores', estando ela apenas 'velada'. Com tal modo de se proceder a física pode de fato funcionar muito bem, mas a filosofia se torna um tanto 'imperfeita'. Se a intuição de Schrödinger e outros criadores da MQ (como Heisenberg e Bohr) estiver certa, o artifício de usar princípios de simetria para de alguma forma fazer de conta que se tem entidades (no plural) indistinguíveis é nada mais do que isso: um artifício. O que necessitamos, como sugere Manin, é uma linguagem mais adequada que reflita essa indistinguibilidade e não-individualidade desde o início.

Como dissemos acima, uma das maneiras de se entender a individualidade dos objetos é através de sua auto-identidade e, desta forma, uma das maneiras que temos para considerar algo como *não-indivíduo* (como fizeram French e Krause) é exatamente ***negar-lhe a auto-identidade***. De modo mais formal, podemos dizer que se não-indivíduos são objetos que não figuram com sentido em relações de identidade ou diferença, a identidade deve deixar de poder ser aplicada a esses objetos, e uma forma de se alcançar isso é exatamente 'violar' as leis usuais da identidade: *não-indivíduos*, nessa abordagem, seriam assim exatamente *as entidades que não obedeceriam às leis tradicionais da identidade*. Se por sua vez assumirmos a fórmula "$a = a$" em nosso sistema (que expressa a lei da identidade), então a expressão $\forall F(F(x) \leftrightarrow F(y)) \rightarrow x = y$ — que representa uma versão do princípio de Leibniz — é teorema da lógica de segunda ordem.[39] Assim, se quisermos ter o antecedente desta fórmula; que informalmente expressa a noção de indiscernibilidade (concordância em todas as propriedades), sem ter o conseqüente (a identidade), um modo possível é assumir uma *lógica não-reflexiva* onde a lei "$a = a$" (que como vimos expressa a auto-identidade) ***não é considerada uma fórmula bem formada***. Ao limitarmos o conceito de identidade deste modo, iremos poder elaborar uma teoria matemática na qual podemos falar de objetos indistinguíveis, mas não idênticos, de forma que em tal matemática podemos expressar a 'perda da identidade' destas entidades. Assim, aparentemente, *se mantivermos que o princípio que garante a individualidade é fornecido pela auto-identidade, negando-o temos uma maneira de compreender formalmente o que seriam não-indivíduos*. Com efeito, estamos aqui exatamente adotando essa posição, a saber, assumindo uma forte relação entre individualidade e identidade, de modo que aqui podemos caracterizar *não-indivíduos* como sendo exatamente aquelas entidades para as quais a *relação de auto-identidade "$a = a$" não faz sentido*. Todavia, é importante que se diga que ***com isto não queremos afirmar que um não-indivíduo é diferente de si mesmo, mas apenas que a 'propriedade' de ser idêntico a si mesmo não se aplica a esse tipo de entidade***.

É claro que aqui é pertinente a questão de o que estamos chamando de leis da identidade. Como já discutimos no capítulo anterior, conforme o tipo de linguagem que empreguemos e do tipo de sistema formal utilizado, a identidade — e aquilo que se compreende por "leis da identidade" — poderão ser entendidas de formas diversas, com algumas delas não relacionadas entre si. Sendo assim, dentre os sistemas formais previamente dados, podemos to-

[39]Mais precisamente, a propriedade (auto identidade de y) é $Ay(x) := x = y$. Se tal F estiver no escopo do quantificador, então $x = y$.

mar aquele no qual se assume a identidade como um *conceito primitivo* que obedece a propriedade da reflexividade e a lei da substituição correspondentes aos postulados $(=_1)$ e $(=_2)$ dados na seção 2.2.1 desta tese. Derrogar a identidade em um sistema envolvendo esses postulados compreenderia alguma limitação da sua validade, no sentido de que pelo menos um desses postulados não se aplicaria a todas as entidades das quais trata o sistema. Assim, como estamos assumindo que os não-indivíduos são objetos para os quais a noção usual de identidade formulada na lógica clássica não se aplica, podemos simplesmente representar tais objetos por termos individuais da linguagem e estabelecer, no caso por uma imposição na sintaxe, que os mesmo não 'respeitam' o postulado $(=_1)$ (*cf.* (DA COSTA, et. al., 2012)). Veremos mais disso na primeira seção do próximo capítulo.

Com relação à semântica, por sua vez, no intuito de se manter a indiscernibilidade *sem que ela acarrete a identidade*, aquela também tem que ser erigida em algum fundamento matemático alternativo, aqui em especial relacionado ao uso de uma teoria de conjuntos não-clássica na qual a noção de não-indivíduo também passe a figurar adequadamente (ARENHART, 2012) (ou seja, onde também não valha a lei reflexiva "$a = a$" em nosso sistema). Uma tal teoria que se coaduna com os requisitos acima mostrados existe e se chama "Teoria dos Quase-Conjuntos". No próximo capítulo exploraremos a axiomática e alguns teoremas de tal arcabouço teórico, bem como com o que tal teoria parece nos comprometer, de modo a entender como podemos nela expressar a não-individualidade dos objetos quânticos.

Por fim, poderia ser dito que para nos atermos a esta concepção de não-indivíduos teríamos que abandonar *parte* da lógica e da matemática usuais, pois, como enfatizado, nestes contextos a identidade está sempre definida para todos os objetos. Não obstante, esta ideia de que "vamos ter que abandonar parte da matemática" se mostrará errônea: tudo o que pode ser feito na matemática usual também pode ser feito na teoria de quase-conjuntos, de modo que esta última se apresentará muito mais como uma extensão do que propriamente como uma antinomia às teorias formais clássicas.

5 A TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS

5.1 LÓGICAS NÃO-REFLEXIVAS

Pelas razões já aventadas, tudo leva a crer que do ponto de vista filosófico, as teorias de conjuntos padrão não são adequadas para representar fenômenos da microfísica. Como também já enfatizado, uma das alternativas — e a que nos interessa aqui — consiste em propor mudanças no nível da lógica subjacente à teoria. Com efeito, durante o século XX, lógicos e filósofos não encontraram limites para derrogar as diversas proposições tradicionais consideradas como intocáveis, dentre elas os célebres princípios da não-contradição e do terceiro excluído. Motivados por razões distintas, da Costa (DA COSTA, 1980, p. 117-20) discutiu a possibilidade de criar sistemas lógicos nos quais se pudesse restringir o princípio da identidade de alguma forma. Baseado nas ideias de Schrödinger, para quem como vimos a identidade das partículas quânticas carece de sentido, segundo da Costa pode-se então formular em particular uma lógica na qual a identidade de proposições tais como $a = b$ faria sentido somente para objetos do tipo (ou que representariam os) *macroscópicos*, enquanto que para outros (que têm sua interpretação intencional como denotando as partículas quânticas), a expressão $a = b$ simplesmente não é uma fórmula bem formada. Para estes últimos objetos, desta forma, não seria assim possível dizer (com a teoria) se eles são idênticos ou distintos um dos outros. Tal arcabouço da Costa chamou de uma "Lógica de Schrödinger", a qual tem assim dois tipos de termos: T (para os qual vale a lei da identidade), e t (para os quais não vale tal lei) (*cf. ibid.*).

Os sistemas de lógica com essa característica, a saber, para os quais a fórmula $\forall x(x = x)$ não é considerada bem formada para alguns (ou todos) objetos do domínio, foram batizados de *"lógicas não-reflexivas"*, pois, como visto, violam em particular a propriedade reflexiva da identidade. Assim, se desejássemos uma definição mais rigorosa de lógicas não-reflexivas, poderíamos classificá-las como um sistema de lógica que satisfaça alguma das seguintes características: (a) derrogam alguma das leis da identidade; ou (b) limitam a aplicação da identidade a certos objetos; ou (c) limitam a aplicação da identidade a objetos em certas circunstâncias; ou (d) não encerram a identidade; ou (e) utilizam uma relação que substitui a identidade em vários contextos sem necessariamente pressupor que ela não tenha sentido; ou (f) *fuzzificam* a identidade ao permitir diferentes graus de identidade (*cf.* (DA COSTA, *et. al.*, 2012)). No entanto, como já enfatizamos, isto é diferente de aceitar a *negação* desta lei, o que resultaria na *irreflexividade* da identidade (e, respectivamente, nos sistemas lógicos irreflexivos).

da Costa (*op. cit.*) em sequência ressalta que uma semântica para tal lógica também é possível de ser erigida. Todavia, notou o autor, tal semântica não seria adequadamente alicerçada nas teorias de conjuntos padrão, como ZF, haja vista que estas teorias não conseguem expressar a ideia intuitiva de coleções de objetos para os quais o conceito de identidade não se aplica, como mostramos nos capítulos anteriores. Dito de outra forma, nas teorias de conjuntos usuais não conseguimos evitar que o símbolo de identidade esteja presente em toda a 'cadeia teórica' e seja, assim, transmitido a todos os tipos de termos. Com efeito, como o próprio da Costa notou, ao utilizarmos uma teoria de conjuntos clássica (como ZF) na metalinguagem, estamos sempre nos comprometendo com objetos para os quais a identidade ou diferença sempre fazem sentido, já que nestas teorias a identidade se aplica de modo irrestrito. Nesse trabalho da Costa então propôs a criação de um tipo de teoria de conjuntos alternativa na qual se poderia fundamentar a semântica das lógicas de Schrödinger vista acima, teoria esta que ele chamou de *Teoria de Quase-Conjuntos* (*ibid.*, p. 119). Nesta construção, o autor sugere "generalizar a noção de conjunto, edificando-se uma teoria de quase-conjuntos que contenha os conjuntos comuns como caso especial, e em tal teoria fundamentar-nos uma semântica [mais adequada] para *S*" (sendo *S* a lógica de Schrödinger) (*ibid.*).

Não obstante, da Costa não desenvolve em seu livro tal teoria conjuntista não-reflexiva, deixando-a como sugestão para trabalhos futuros. A partir de 1990, uma teoria de conjuntos não-clássica passou a ser proposta em vários trabalhos por Décio Krause (KRAUSE, 1990; KRAUSE, 1992; KRAUSE, 1996; KRAUSE, 2003A; KRAUSE, 2003B) tendo por objetivo o desenvolvimento de tais ideias.[1] Como acima já revelado, a finalidade de tal teoria — entre outras — foi explorar a contraparte formal lógica e matemática de um fundamento conjuntista para certas coleções de objetos nos quais a identidade e a diferença são noções sem sentido. Como Krause desenvolveu tal teoria tendo realmente como motivação a MQ (motivação essa já existente na própria lógica de Schrödinger, como visto), afeito à tal área da física um conceito mais fraco de *indiscernibilidade* foi então assumido no formalismo, o qual para alguns tipos de elementos dos quase-conjuntos (exatamente os que interpretam as partículas elementares) não colapsará na identidade, de um modo que ficará claro no futuro. Sendo assim, os objetos quânticos (na teoria) poderiam ser *indistinguíveis* mas *não-iguais*, que como vimos anteriormente é exatamente o que se procura. A teoria de Krause advém então como um modo de tratar formalmente tais coleções, a saber, em

[1] Citamos aqui apenas alguns trabalhos mais relevantes do autor sobre o tema. Outras indicações podem ser consultadas nas bibliografias indicadas nessas obras.

que seus elementos podem partilhar de todas as suas propriedades, mas que ainda diferem em número ('desrespeitando' assim a Lei de Leibniz), o que justifica a importância — e a necessidade — de que tal noção de indistinguibilidade esteja presente nesse formalismo. Este capítulo, desta forma, tem por objetivo apresentar a axiomática e alguns resultados principais da *teoria de quase-conjuntos* na acepção de Krause, e posteriormente discutir no que tal teoria parece se comprometer.[2]

5.2 A TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS $\mathfrak{Q}$

A teoria de quase-conjuntos $\mathfrak{Q}$ (ou teoria dos qsets) é baseada na axiomática da teoria de ZFU. Os postulados lógicos são similares àqueles do cálculo de predicados de primeira ordem, porém *sem identidade*. Os axiomas específicos para tal teoria serão mencionados no decorrer deste capítulo e discutidos aqui e em capítulos posteriores. Como temos uma interpretação pretendida (ou uma semântica informal), qual seja, manipular os objetos quânticos, falaremos de 'átomos' e de 'quase-conjuntos'; termos que nos remetem ao universo da teoria quântica. Sendo assim, destoante da teoria ZFU padrão para a qual há somente um tipo de átomo, a teoria de quase-conjuntos admite a existência de dois tipos de Urelemente: os m-átomos (para os quais a lei reflexiva da identidade não se aplica), e os M-átomos (que se comportam como os Urelemente de ZFU). Dois predicados unários primitivos expressam essa distinção: $m(x)$ e $M(x)$, respectivamente. Além disso, na linguagem, também existem dois predicados binários: $\equiv$ (indistinguibilidade) e $\in$ (pertinência); um símbolo funcional unário qc (quase-cardinalidade); e uma letra de predicado Z, tal que $Z(x)$ diz que x é um conjunto (estes irão corresponder aos conjuntos usuais de ZFU). Desta forma, usando a linguagem proposta, não conseguimos falar sobre a identidade ou a diversidade dos m-átomos (pois para estes, como dito, a identidade não se aplica). Como não se tem a noção de identidade para os m-átomos, e como sustentamos no capítulo prévio que *indivíduos* são os objetos que 'respeitam' a noção de identidade da lógica clássica (em particular a lei reflexiva $\forall x(x = x)$, haja vista que acreditamos que a identidade deve ser entendida em conformidade com algum tipo de lógica), *os m-átomos são então entendidos como não-indivíduos* na teoria dos qsets.

Além disso, se assume na teoria um conceito de *identidade extensional*

[2]Na apresentação que virá em sequência ficaremos restritos (e seguiremos de perto) principalmente a obra de French e Krause (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. cap. 7), onde é apresentado uma condensação dos principais resultados de teoria de quase-conjuntos. Como dito acima, na bibliografia citada podem ser encontrado mais esclarecimentos sobre o tema, bem como outros resultados que não apresentaremos aqui.

(representado por $=_E$) que é introduzido por definição. Tal conceito terá propriedades consoantes às da identidade padrão e ao conceito correspondente em ZFU para M-átomos, mas não será tomado como sendo *a* identidade no sentido usual, pois esta não existe para m-átomos. Dito de outra forma, para M-átomos (mas *não* para m-átomos), a identidade extensional colapsa na identidade usual. Isto é relevante porque dado que não se tem a identidade usual, mas apenas a extensional, a axiomática nos permitirá, como veremos, diferenciar entre os conceitos de *identidade extensional* e *indistinguibilidade*.

Na teoria em apreço, um qset x é definido como algo que não é um urelement. Tal qset pode ter um cardinal (o qual nomeamos como quase-cardinal e denotamos por $qc(x)$), mas para o qual não se pode associar um ordinal se ele for formado apenas por m-átomos indistinguíveis.[3] Não obstante, para os qsets que não são puros, isto é, que não são formados apenas por elementos indistinguíveis tal como definiremos, a ordenação ainda vale. O conceito de quase-cardinal é então tomado como primitivo, já que não pode ser definido pelos meios usuais, isto é, por ordinais particulares.[4] "Isto capta a ideia que partículas quânticas não podem ser ordenadas ou contadas, mas somente agregadas em certas quantidades. Entretanto, dado o conceito de quase-cardinal, existe um sentido em dizer que pode existir uma quantidade de m-átomos obedecendo certas condições, embora elas não possam ser nomeados ou rotulados" (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 276-7). Vejamos então os postulados fundamentais da teoria de quase conjuntos.

5.2.1 Definições, axiomas e teoremas

Vamos começar por descrever os detalhes formais da teoria $\mathfrak{Q}$ introduzindo algumas definições:[5]:

1. Definição de um qset: $Q(x) =_{df} \neg(m(x) \vee M(x))$.

2. Qset puro (uma coleção de átomos indistinguíveis): $P(X) =_{df} Q(x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow m(y)) \wedge \forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \rightarrow y \equiv z)$.

[3]Isso será importante para nós no futuro

[4]No entanto, Domeneck e Holik (DOMENECK e HOLIK, 2007) e, independentemente, Arenhart (ARENHART, 2011), mostraram que é possível definir o quase-cardinal de um qset finito (embora não pelos meios usais, como dito no texto).

[5]Neste trabalho, não apresentaremos todos os axiomas e definições da teoria de quase conjuntos, mas apenas os mais importantes para nosso estudo (como dito, a axiomática completa pode ser encontrada nas obras indicadas). Não obstante, neste texto, continuaremos a utilizar a numeração dos axiomas presentes em (FRENCH e KRAUSE, 2006, cap. 7).

3. Dinge: $D(x) =_{df} M(x) \vee Z(x)$ *(estes são as 'coisas clássicas' na terminologia de Zermelo).*[6]

4. Um qset no qual os elementos também são qsets: $E(x) =_{df} Q(x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow Q(y))$.

5. Identidade extensional: $(x =_E y) =_{df} (Q(x) \wedge Q(y) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \vee (M(x) \wedge M(y) \wedge \forall_Q z(x \in z \leftrightarrow y \in z))$, *onde* $\forall_Q$ *é o quantificador universal relativizado a qsets.*

6. Subqset: *Para todos os qsets* x e y, $x \subseteq y =_{df} \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$.

Vale ressaltar que, como vimos, a relação de identidade desempenha papel fundamental na nossa busca por um sistema que capte a noção de não-indivíduo, haja vista que estamos concebendo como não-indivíduos exatamente os objetos que não entram com sentido nas relações de identidade ou diferença. Para formalizar essa noção em $\mathfrak{Q}$, se faz necessário a definição de identidade extensional acima, o qual, como dito, funciona do mesmo modo que a identidade clássica para os "objetos clássicos" da teoria e possui, neste caso, todas as suas propriedades. É importante deixarmos isso claro: como a lógica subjacente à teoria de quase-conjuntos é a lógica clássica sem identidade, o único tipo de igualdade que se pode afirmar nessa teoria é a igualdade extensional que, no caso de conjuntos clássicos ou M-átomos, funciona como a igualdade clássica conforme garantido pelo axioma **(Q4)** abaixo.

Os primeiros axiomas de $\mathfrak{Q}$; aqueles que 'governam' o comportamento dos não-indivíduos indistinguíveis a partir da relação/predicado acima de indistinguibilidade (assumida como primitiva), são os seguintes:

(Q1) $\forall x(x \equiv x)$ [$\equiv$ é reflexiva];
(Q2) $\forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$ [$\equiv$ é simétrica];
(Q3) $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$ [$\equiv$ é transitiva].
(Q4) $\forall x \forall y(x =_E y \rightarrow (A(x,x) \rightarrow A(x,y)))$, com as restrições sintáticas usuais, isto é, $A(x,x)$ é uma fórmula qualquer e $A(x,y)$ advém de $A(x,x)$ pela substituição de algumas ocorrências livres de x por y, dado que y é livre para x em $A(x,x)$.

A partir desse ponto, alguns teoremas já podem ser provados (a maior parte será apenas enunciada aqui, sendo que a prova pode ser encontrada nas obras indicadas). Note-se entretanto que a reflexividade da identidade não é

[6] A teoria de conjuntos de Zermelo é relacionada com um domínio (Beireich) de indivíduos, conjuntos e Urelemente, que são referidos simplesmente como objetos (Dinge). Sendo assim, *Dinge* são os objetos clássicos de $\mathfrak{Q}$.

um teorema quando se trata de m-átomos e, portanto, o sistema aqui apresentado é classificado — a partir da definição acima — como um *sistema não-reflexivo*. Além disso, para os objetos clássicos (M-átomos e conjuntos), postulamos em $\mathfrak{Q}$ que a indistinguibilidade implica igualdade extensional (a conversa segue-se como teorema): desta forma, para quaisquer dois objetos *clássicos* da teoria $\mathfrak{Q}$, se eles forem indistinguíveis serão extensionalmente iguais, e todas as outras propriedades lógicas da igualdade clássica são provadas de modo usual para estes objetos.

Teorema 5: *se ou $Q(x)$ ou $M(x)$, então $x =_E x$.*

(Q5) Nada é ao mesmo tempo um m-átomo e um M-átomo: $\forall x(\neg(m(x) \wedge M(x)))$.

Teorema 6: *Se ou Q(x) ou M(x), então $\neg m(x)$.*

(Q6) Os átomos são vazios: $\forall x \forall z(x \in y \rightarrow Q(y))$.[7]
(Q7) Todo conjunto é um qset: $\forall x(Z(x) \rightarrow Q(x))$.
(Q8) Qsets nos quais os elementos são 'coisas clássicas' são qsets que podem ser entendidos como conjuntos clássicos, e vice-versa: $\forall_Q x(\forall y(y \in x \rightarrow D(y)) \leftrightarrow Z(x))$.

Nossa intenção é caracterizar alguns conjuntos em $\mathfrak{Q}$ tal que eles possam ser identificados com os conjuntos padrão de ZFU. Isto pode ser alcançado se tomarmos aqueles qsets nos quais o fecho transitivo não contém m-átomos. A parte '$\rightarrow$' de **(Q8)** dá metade da resposta: se todos os elementos de x são conjuntos de M-átomos ou de conjuntos (Dinge), então x é um conjunto usual de ZFU. Pelo contrário, não é suficiente postular que nenhum elemento de um conjunto seja um m-átomo, desde que pode ser que os elementos de seus elementos tenham m-átomos como elementos e assim por diante. Isto pode ser alcançado se tivermos $Z(x) \rightarrow \forall y(y \in x \rightarrow D(y))$, que é precisamente a parte '$\leftarrow$' de **(Q8)**.

Com isso, podemos classificar os qsets de acordo com os tipos de elementos que neles ocorrem:

1. **Puros:** os que contêm apenas m-átomos indistinguíveis;
2. **Standard:** qsets cujo fecho transitivo não contém m-átomos, e que se comportam como os conjuntos clássicos de ZFU, correspondendo assim aos qsets que satisfazem o predicado Z da linguagem acima apre-

[7] Este último axioma é interessante da perspectiva da física, pois sugere que os M-átomos podem ser 'compostos' de m-átomos em algum sentido mereológico.

sentada e que podem por isso ser chamados apenas de "conjuntos";

3. **qset usual**: pode conter m-átomos, M-átomos e outros qsets como elementos.

Desta forma, a teoria de quase-conjuntos que apresentamos aqui "contém" a teoria ZFU, e toda a matemática que pode ser desenvolvida em ZFU pode também ser desenvolvida na teoria que estamos considerando (na sua parte 'clássica').[8] Além disso, vale ressaltar que apesar de os qsets puros serem tais que seus elementos são apenas m-átomos, não é postulado na axiomática da teoria de quase-conjuntos que devam existir m-átomos ou até mesmo que deva existir mais de um tipo de m-átomo (ou seja, objetos x e y que satisfazem o predicado para m-átomos, mas tais que $x \not\equiv y$). A teoria, como é usual nas apresentações de teorias de conjuntos com átomos, é compatível com tais possibilidades, mas estas características ficam dependentes do modelo (*i.e.*, da aplicação) que se adota. No último capítulo desta tese, apresentaremos uma construção feita nesta teoria alternativa que exatamente utiliza m-átomos de tipos variados.

(Q9) Este axioma é a conjunção das seguintes sentenças:

$$\forall x \forall y (m(x) \wedge x \equiv y \rightarrow m(y));$$

$$\forall x \forall y (x =_E y \wedge M(x) \rightarrow M(y));$$

$$\forall x \forall y (x =_E y \wedge Z(x) \rightarrow Z(y)).$$

(Q10) [Conjunto vazio] Existe um qset (denotado por $\emptyset$) que não tem elementos: $\exists_Q x (\forall y (\neg (y \in x)))$.

Teorema 7: *O qset vazio é um conjunto e é único.*

(Q11) Dinge indistinguíveis são extensionalmente idênticos: $\forall_D x \forall_D y (x \equiv y \rightarrow x =_E y)$.

Isso nos garante que para os *Dinge*, a indistinguibilidade obedece a lei da substituição **(Q4)** acima, de modo que os objetos clássicos indistinguíveis, por também respeitarem a lei reflexiva da identidade, são substituíveis *salva veritate*.

Teorema 8: *A relação de igualdade extensional* [para Dinge] *tem todas as propriedades da igualdade clássica.*

[8]Como pontuamos no final do capítulo anterior, esta teoria se mostra assim como uma extensão da teoria de conjuntos clássica e não como uma negação da mesma.

Teorema 9: *Se $M(x)$, e $x \equiv y$, então $M(y)$. O mesmo para conjuntos: se $Z(x)$, e $x \equiv y$, então $Z(y)$.*

A distinção entre identidade extensional e indistinguibilidade primitiva pode ser vista como segue, embora os detalhes formais possam ser dados somente depois que outros axiomas tiverem sido definidos. Pelos axiomas e teoremas acima, a relação de indistinguibilidade $\equiv$ permite a substitutividade de todos os símbolos não-lógicos primitivos, exceto o de pertinência. Isto é, se B é m, M ou Z, então $B(x) \wedge x \equiv y \rightarrow B(y)$ é um teorema. Se isto fosse possível também para $\in$, então dado que $\equiv$ é reflexiva (axioma **(Q1)**), deveríamos ter substitutividade 'total' para $\equiv$, e esta não se tornaria diferente da forma usual da identidade (dito de outra forma, $\equiv$ colapsaria, para todos os efeitos 'práticos', na identidade usual). Mas com relação á pertinência este não é o caso, já que de $x \in w \wedge y \equiv x$, não temos que $y \in w$, pois a teoria $\mathfrak{Q}$ não tem axiomas que permitam isso. Desta forma, e isso é importante, indistinguibilidade não se torna a identidade 'padrão', e quando precisarmos falar que temos "dois" objetos, por exemplo, isso nos conduzirá à sua *discernibilidade* e não à sua diferença (aqui, na acepção antônima de igualdade) (*cf.* KRAUSE, 2007). Todos estes objetos, no entanto, podem estar relacionados pela relação primitiva de indistinguibilidade, e essa noção — quando aplicada aos M-átomos — formalmente coincide com a identidade usual (isto é, com a dita identidade extensional), como visto (*cf.* (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 280)). Além disso, enquanto que os *Dinge* obedecem a lei da substituição, não podemos da mesma forma substituir os m-átomos indistinguíveis *salva veritate* (ou seja, eles não podem ser sempre intersubstituíveis). Com efeito, se esse fosse o caso, junto com a reflexividade da relação de indistinguibilidade de **(Q1), (Q2)** e **(Q3)** acima, resultaria-se que a indistinguibilidade e a identidade colapsariam na mesma relação. Para evitar isso, não postulamos uma lei de substituição para a indistinguibilidade, mas antes exigimos que seja apenas uma relação de equivalência (por tais axiomas), a qual não é uma congruência, ou seja, ela não é compatível com a pertinência (isto é, se x e y são m-átomos tais que $x \equiv y$, e z é tal que $x \in z$, em geral disso não derivamos que $y \in z$).

(Q12) [Par fraco] Para todos x e y, existe um qset nos quais os elementos são indistinguíveis ou de x ou de y: $\forall x \forall y \exists_Q z \forall t (t \in z \leftrightarrow t \equiv x \vee t \equiv y)$.

Denotamos este qset por $[x,y]$ para diferenciar da notação clássica. Quando x e y são Dinge, podemos usar a notação usual {x, y}. Vamos remarcar que $[x,y]$ denotam os qsets de *elementos indistinguíveis* ou de x ou y, e, em geral, *podem conter mais que dois elementos.*

(Q13) [O esquema da separação] Considerando as restrições sintáticas usuais sobre a fórmula $A(t)$, isto é, $A(t)$ sendo uma fórmula bem formada na qual t é livre, a seguinte fórmula é um esquema de axiomas:

$$\forall_Q x \exists_Q y \forall t (t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge A(t)).$$

Este qset é denotado como $[t \in x : A(t)]$. Quando é um conjunto usual, é denotado como $\{t \in x : A(t)\}$.

(Q14) [União] $\forall_Q x (E(x) \to \exists_Q y (\forall z (z \in y) \leftrightarrow \exists t (z \in t \wedge t \in x)))$.

Este qset é denotado por $\bigcup x$ (ou por $u \cup v$ quando t tem somente dois elementos (qsets) u e v).

(Q15) [Conjunto potência] $\forall_Q x \exists_Q y \forall t (t \in y \leftrightarrow t \subseteq x)$.

Escrevemos $\mathscr{P}(x)$ para este qset.

Definição:

i) Par ordenado: $\langle x, y \rangle =_{df} [[x], [x, y]]$.

ii) Classe unitária fraca: $[x] = [x, x]$ *(isto é, a coleção dos indistinguíveis de x).*

iii) $x \times t =_{df} [\langle z, u \rangle \in \mathscr{P}\mathscr{P}(x \cup y) : z \in x \wedge u \in y]$.

Como no caso de $[x, y]$, $[x]$ é o qset de todos os *elementos indistinguíveis* de x, e desta forma *pode ter mais que um elemento*. O mesmo pode ser dito do produto cartesiano de dois qsets etc. Os conceitos de interseção e diferença de qsets são definidos como do modo usual, tal que $(t \in x \cap y)$ see $t \in x \wedge t \in y$, e $(t \in x - y)$ see $t \in x \wedge t \notin y$.

(Q16) [Infinito] $\exists_Q x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \wedge Q(y) \to y \cup [y] \in x))$.

(Q17) [Regularidade (qsets são bem fundados)] $\forall_Q x (E(x) \wedge x \neq_E \emptyset \to \exists_Q y (y \in x \wedge y \cap x =_E \emptyset))$.

5.2.2 Relações e quase-funções

As relações e funções não podem ser definidas na teoria de quase-conjuntos do mesmo modo como são feitas na matemática padrão. Isto porque se tivermos tratando com *m*-átomos, devido à falta de identidade para tais objetos nos conjuntos domínio e imagem, a função acaba por não poder distinguir entre argumentos e valores. Além disso, devido a essa falta de identidade e diferença para tais elementos em $\mathfrak{Q}$, *relações de ordem não podem ser adequadamente definidos sobre um qset que tem m-átomos indistinguíveis como elementos*. Isso será de suma importância para nós no futuro (quando estivermos tratando de estruturas rígidas), mas por hora nos ateremos apenas às definições que é o objetivo do presente capítulo. Abaixo, trabalharemos apenas com relações binárias, apesar de que as definições podem ser generalizadas para relações de qualquer aridade.

Definição: Um q set w é uma **quase-relação** (iremos chamar simplesmente de relação quando não houver possibilidade de confusão) entre x e y se satisfaz o seguinte predicado:

$$R(w) =_{df} Q(w) \wedge \forall z(z \in w \to \exists u \exists v(u \in x \wedge v \in y \wedge z =_E \langle u, v \rangle)).$$

Como se sabe, relações são importantes para se caracterizar os atributos de elementos de certas coleções de objetos. Na teoria de conjuntos padrão, são importantes as *ordens parciais* (que são reflexivas, anti-simétricas e transitivas) e as *ordens totais ou lineares* (se, além disso, a relação for conectada). Tais relações, todavia, não podem ser definidas sobre um qset nos quais os elementos são m-átomos indistinguíveis devido à falta da noção de identidade (de modo que, assim, não podemos falar que u e v são distintos e que estão em alguma ordem linear, por exemplo). Não obstante, ainda podemos definir uma relação de *ordem estrita parcial* e de *ordem estrita total*. No primeiro caso, tal relação é uma relação binária S sobre um conjunto A tal que S é irreflexiva (isto é, $\forall x \neg(xSx)$) e transitiva. No segundo caso, quando é uma relação irreflexiva, transitiva e conectada.

Quando consideramos conjuntos clássicos podemos sempre (no mínimo, em princípio) rotular qualquer elemento por associar sua classe unitária a ele: por exemplo, associar $\{x\}$ com x. Em teorias extensionais onde vale a identidade, esta classe unitária pode ser vista como uma 'propriedade' de x somente. Desta forma, em ZF, todos os objetos podem ser distinguidos um dos outros (entre outros motivos) porque sempre existe um conjunto no qual apenas um objeto pertence: a saber, a sua correspondente classe unitária. É neste sentido que na teoria clássica de conjuntos, tomada a partir da Lei de Leibniz, os elementos de um conjunto são em certo sentido 'indivíduos' bem definidos: como podemos sempre tomar a classe unitária de um elemento (que é a classe a qual só ele pertence), podemos sempre ter um indivíduo bem estabelecido por identificá-lo com essa classe. Além disso, como vimos num exemplo dado no capítulo 2, tal classe unitária também pode ser usada no intuito de rigidificarmos uma estrutura que não se mostre rígida e, assim, novamente apontarmos o 'elemento-indivíduo'. Em resumo, de um modo ou de outro, sempre nos comprometemos com a individualidade em ZF. Todavia, em $\mathfrak{Q}$, se x for um m-átomo isso não pode ser afirmado: a partir da axiomática de $\mathfrak{Q}$, não se pode provar que em uma 'classe unitária forte' de $[x]$ (isto é, no subqset que tem quase-cardinal 1) esteja o *indivíduo* (ressalta-se: indivíduo) x em particular. Novamente, tais características serão importantes a partir do próximo capítulo, exatamente por serem úteis para mostrar que na teoria de quase-conjuntos não podemos ter estruturas rígidas e, assim, paralelo ao que foi discutido no capítulo 2, não podemos identificar os m-átomos de forma alguma (o que mostrará que esta teoria conjuntista alternativa é realmente eficiente para alicerçar a teoria quântica, nos moldes discutidos no capítulo anterior).

Outrossim, quando dizemos que $\langle u,v\rangle \in w$, devemos lembrar que pela definição de par ordenado dada acima, isso significa $[[u],[u,v]]$. Todavia, desde que $u \equiv v$, *este par é indistinguível* (a partir do "Axioma da Extensionalidade Fraca" a ser apresentado abaixo) de $[[v],[v,u]]$, o qual é o 'par ordenado' $\langle v,u\rangle$. Além do mais, este qset é também indistinguível de $[[u]]$, isto é, do par $\langle u,u\rangle$. A teoria não implica que $\langle v,u\rangle$ (ou $\langle u,u\rangle$) também pertençam a w, mas o que importa é que a relação w é indistinguível das relações w' e w'' as quais têm esses pares como elementos. Isso significa que qualquer ordem estrita total w sobre um qset x de m-átomos indistinguíveis, tal que $\langle u,v\rangle \in w$, é confundida na teoria com qualquer outra w', tal que $\langle v,u\rangle \in w'$ (o mesmo acontece para w''). Assim, como afirmado, nenhuma ordem podem fazer sentido para os m-átomos de $\mathfrak{Q}$, já que a teoria não pode distinguir uma ordem definida em uma direção de qualquer outra que tem seus elementos em ordem 'reversa'. No próximo capítulo isto também nos será importante, e falaremos mais sobre tal característica dos m-átomos.

Definição: [Quase-funções] Se x e y são qsets, e R é um predicado para 'relação' definida acima, dizemos que f é uma quase-função (q-função) com domínio x e contra-domínio y se satisfaz o seguinte predicado:

$$QF(f) =_{df} R(f) \wedge \forall u(u \in x \rightarrow \exists v(v \in y \wedge \langle u,v\rangle \in f)) \wedge \\ \forall u \forall u' \forall v \forall v'(\langle u,v\rangle \in f \wedge \langle u',v'\rangle \in f \wedge u \equiv u' \rightarrow v \equiv v').$$

Podemos a partir disso definir quase-funções 'tipo' q-injetoras e q-sobrejetoras, de modo a assim também podermos definir funções q-bijetivas. Além disso, pode-se provar um teorema, como já aludido acima, no qual se mostra que nem relações de ordem totais e nem parciais podem ser definidas sobre um qset puro nos quais seus elementos são indistinguíveis uns dos outros (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 284). No próximo capítulo, exploraremos mais esse ponto quando estivermos tratando da questão de similaridade, isomorfismos e automorfismos entre estruturas quase-conjuntistas.

5.2.3 Quase-cardinais

Com o objetivo de apresentar os axiomas restantes, necessitamos mostrar que uma 'cópia' de ZFU pode ser definida em $\mathfrak{Q}$. Para tanto, define-se uma translação da linguagem de ZFU para a linguagem da teoria dos quase-conjuntos para assim mostrar que a teoria $\mathfrak{Q}$ realmente tem uma contraparte 'clássica' que coincide com ZFU.

Desta forma, seja A uma fórmula da linguagem de ZFU (a qual podemos admitir que tenha um predicado unário S como representando conjuntos), e chame de A^q sua tradução para a linguagem de $\mathfrak{Q}$ definida como segue:

i) Se A é $S(x)$, então A^q é $Z(x)$;
ii) Se A é $x = y$, então A^q é $((M(x) \wedge M(y)) \vee (Z(x) \wedge Z(y)) \wedge x =_E y)$;
iii) Se A é $x \in y$, então A^q é $((M(x) \vee Z(x)) \wedge Z(y)) \wedge x \in y$;
iv) Se A é $\neg B$, então A^q é $\neg B^q$;
v) Se A é $B \vee C$, então A^q é $B^q \vee C^q$;
vi) *Se A é $\forall x B$, então A^q é $\forall x(M(x) \vee Z(x) \to B)$.*

Teorema 14: *Se A é um axioma de ZFU, e A^q é sua tradução na linguagem de $\mathfrak{Q}$ dada pela definição acima, então A^q é um teorema de Q.*

Como dito, este resultado mostra que existe uma cópia de ZFU em $\mathfrak{Q}$. Nesta cópia, podemos definir como usual os conceitos de $cd(d)$ para "x é um cardinal", $card(x)$ para "o cardinal de um conjunto x" em seu sentido usual (isto é, um particular ordinal definido na "parte clássica" de $\mathfrak{Q}$), e $fin(x)$ para "x é um quase-conjunto finito". Com estes conceitos, podemos apresentar os axiomas seguintes para quase-cardinais:

(Q18) Todo objeto que não é um qset (ou seja, todo urelemento) tem quase-cardinal zero: $\forall x(\neg Q(x) \to qc(x) =_E 0)$.

(Q19) O quase-cardinal de um qset é um cardinal (definido na 'parte clássica' da teoria) e coincide com seu cardinal quando este qset é um conjunto: $\forall_Q x \exists! y(Cd(y) \wedge y =_E qc(x) \wedge (Z(x) \to y =_E card(x)))$.[9]

[9] Todavia, como dizem French e Krause (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 286): "Então estamos postulando que qualquer qset tem um quase-cardinal e que tal quase-cardinal é um cardinal (como definido pelos modos usuais na para 'padrão' da teoria). Este axioma parace ser contrário ao resultado mencionado na seção anterior, que mostra que nenhuma relação de ordem pode ser definida sobre um conjunto de m-átomos indistinguíveis, pois a existência deste quase-cardinal parece sugerir que qualquer quase-conjunto (incluindo àqueles em que os elementos são m-átomos indistinguíveis) pode ser ordenado, pois se definido como usual, um cardinal é um ordinal particular. A explicação desta aparente anomalia é que o ordinal associado a um quase-conjunto de m-átomos indistinguíveis não pode ser algo que pertença à parte 'clássica' da teoria [...]. Alternativamente, podemos dizer, como no caso de paradoxo de Skolem, que tal ordinal

(Q20) Todo qset não vazio tem um quase-cardinal não-nulo: $\forall_Q x(x \neq_E \emptyset \to qc(x) \neq_E 0)$.

Alguns outros axiomas relativos à quase-cardinalidade não serão listados e podem ser consultados nas obras indicadas.

No próximo axioma, $2^{qc(x)}$ denota (intuitivamente) a quantidade de subquase-conjuntos de x:

(Q25) $\forall_Q x(qc(\mathscr{P}(x)) =_E 2^{qc(x)})$.

Não obstante, se o conceito de identidade não é aplicável para m-átomos, como podemos assegurar que um qset x tal que $qc(x) =_E \alpha$ tenha precisamente 2^{α} subconjuntos? Como é bem sabido, nas teorias de conjuntos padrão (bem como na parte clássica de $\mathfrak{Q}$, ou seja, considerando apenas àqueles qsets que 'se comportam' como conjuntos de ZFU), se $card(x)$ denota o cardinal de x, então pela definição de exponenciação de cardinais, ${}^{card(x)}2$ é o cardinal do conjunto ${}^{x}2$. Todavia, em $\mathfrak{Q}$, isto não funciona. Para entender o porquê dessa impossibilidade, suponha que α é o quase cardinal de x, o qual como vimos é um cardinal por **(Q19)**. Este axioma diz que todo qset tem um quase-cardinal único que é um cardinal (definido na 'parte clássica' da teoria), e se o qset é em particular um conjunto (em $\mathfrak{Q}$), então este quase-cardinal é seu cardinal *strictu sensu*. Então, todo quase-cardinal é um cardinal, e a expressão acima "existe um único..." faz sentido. Além do mais, do fato que $\emptyset$ é um conjunto, disto segue que seu quase-cardinal é 0. Então podemos definir que $2^{qc(x)} =_{df} qc({}^{\alpha}2)$, e desde que α é um cardinal e ambos α e 2 são conjuntos em $\mathfrak{Q}$ (isto é, eles são cópias de conjuntos de ZFU), temos $2^{qc(x)} =_E card({}^{\alpha}2)$. Desta forma, podemos tomar o cardinal do qset ${}^{\alpha}2$ em seu sentido usual para significar $2^{qc(x)}$. Destas considerações, podemos concluir que quando x é um qset no qual os elementos são m-átomos indistinguíveis, não podemos provar em $\mathfrak{Q}$ que $qc(x) =_E n$ e então também não podemos contar 2^n subquase-conjuntos em x. Esta é exatamente a razão da necessidade do axioma **(Q25)** acima.

O axioma **(Q25)** tem outra implicação importante para $\mathfrak{Q}$. Em teoria de conjuntos padrão, se o $card(x)$ é um número natural n, então existem exatamente n subconjuntos de x que são classes unitárias. Este resultado também pode ser provado em $\mathfrak{Q}$? Se não, como pode fazer sentido a ideia de que se $qc(x) =_E n$, então x tem n elementos? Estas considerações motivam as definições e axiomas da próxima seção.

---

não pertence absolutamente à teoria (no sentido de que sua existência não pode ser derivada dos axiomas.". E, mais à frente: "talvez devemos eliminar dos axiomas acima o fato de que $qc(x)$ é um cardinal, e deixar sua caracterização para o modelo particular a ser considerado.".

5.2.4 Extensionalidade fraca

Se x é um qset no qual os elementos são indistinguíveis um do outro (vamos supor, novamente, que $qc(x) =_E n$), então as classes unitárias $y \subseteq x$ são indistinguíveis uma das outras tal como se segue do axioma da extensionalidade fraca **(Q26)** abaixo. Então, todas as classes unitárias (do ponto de vista intuitivo) pareceriam 'cair' em somente um qset. Não obstante, tal incongruência se mostra enganosa. Isso porque devemos lembrar que estes 'singletons' (subqsets que têm quase-cardinalidade 1) não são *idênticos* (isto é, eles não podem ser provados como sendo *o mesmo* objeto na teoria), mas sim apenas são *indistinguíveis* em um sentido preciso (dado exatamente por **(Q26)**). Em outras palavras, como a teoria não pode distinguir entre eles (já que não há o conceito de identidade), não podemos afirmar ou que eles são os mesmos qsets ou que seus elementos são idênticos, mas sim unicamente que são indistinguíveis. Então, em $\mathfrak{Q}$, é correto supor que se $qc(x) =_E \alpha$, então x tem precisamente α 'singletons'. De acordo com o axioma **(Q25)** acima, a teoria não proíbe a existência de tais singletons, a despeito o fato que em $\mathfrak{Q}$ não podemos provar que eles existem como entidades 'distintas', tal como enfatizamos.

A inexistência de um conceito de identidade para os m-átomos requer uma modificação axioma usual da Extensionalidade da teoria de conjuntos padrão, que aqui não vale. Para tanto, se faz então necessário introduzirmos a seguinte definição:

Definição: Para todos os qsets x e y não vazios:

i) *$Sim(x,y) =_{df} \forall z \forall t(z \in x \wedge t \in y \to z \equiv t)$. Neste caso, dizemos que x e y são* ***similares****.*

ii) *$QSim(x,y) =_{df} Sim(x,y) \wedge qc(x) =_E qc(y)$. Isto é, x e y são* ***q-similar*** *see são similares e têm a mesma cardinalidade.*

No axioma abaixo, $x/\equiv$ significa o qset quociente de algum qset x pela relação de equivalência $\equiv$.

(Q26) Extensionalidade fraca: qsets que têm a mesma quantidade de elementos do mesmo tipo são indistinguíveis. Em símbolos:

$$\begin{aligned}\forall_Q x \forall_Q y((\forall_z(z \in x/\equiv \to \exists t(t \in y/\equiv \wedge QSim(z,t))))\\ \wedge \forall t(t \in y/\equiv \to \exists z(z \in x/\equiv \wedge QSim(t,z))) \to x \equiv y).\end{aligned}$$

Como dito, este axioma exprime a ideia intuitiva de que dois qsets A

e B serão indistinguíveis se, e somente se, possuírem a 'mesma quantidade' (expressa por meio de quase-cardinais) de elementos do mesmo tipo. É fácil ver que se não temos m-átomos evolvidos, então a relação $\equiv$ se torna a identidade usual e o axioma coincide com o axioma padrão da extensionalidade usado em ZFC. Uma das principais aplicações do axioma da extensionalidade fraca é o teorema da *"não observabilidade das permutações"* que será mostrado abaixo. Tal teorema acaba por prover um modo de representar, a partir da teoria de quase-conjuntos, a ideia de que se um certo objeto de um qset é 'permutado' por um outro indistinguível dele, então 'nada muda no qset final'. Na matemática padrão, tal ideia de que 'nada muda no final' não tem sentido, pois como vimos não há meios de se falar de indistinguíveis mas não idênticos objetos. Com isso, nas teorias padrão, qualquer permutação de objetos não idênticos (*i. e.*, não sendo o *mesmo* objeto no sentido de identidade) gera um conjunto diferente. Na contrapositiva, nestas teorias para que a permutação de dois objetos não mude o 'conjunto final', estes têm que ser *o mesmo* objeto. A diferença está exatamente no fato de que na teoria dos quase-conjuntos, para que não se mude o conjunto final, basta que os objetos permutados sejam *indistinguíveis* entre si, como dito.

5.2.5 Permutações não são observáveis

Uma das formas de pensarmos os objetos que nos rodeiam é como se fossem coleções de moléculas, bem como de átomos e seus compostos de algum tipo. Tal concepção do mundo advém desde os gregos antigos ainda na figura de Demócrito (veja (ROLAND, 1984, p. 82-6)), chegando até a química e a física modernas. Um modo de formalizarmos tal visão da realidade é fazermos uso de conjuntos atrelados à algum tipo de estrutura quântica, mesmo que tal estrutura seja um tanto complexa.[10] Não obstante, todos temos a visão intuitiva de que se trocarmos uma molécula da minha mesa por uma do meu corpo (do mesmo composto), por exemplo, 'nada muda no final'. Além disso, imaginamos que tal situação também deva ocorrer com todos os compostos presentes em todos os elementos. Em resumo, pela falta de identidade (no sentido aqui discutido), as partículas quânticas constituintes dos objetos em geral podem ser 'trocadas entre si' sem modificar nada no arranjo final dos corpos. Com efeito, nas próprias palavras de Penrose (PENROSE, 1989, p. 360):

> De acordo com a mecânica quântica, quaisquer dois elétrons devem ser necessariamente idênticos (no jargão dos físicos: indistinguíveis), e o mesmo vale para

[10]Daremos exemplos e falaremos mais sobre isso nos últimos capítulos desta tese.

> quaisquer dois prótons e para quaisquer duas partículas de um tipo particular. [...] Se um elétron de um cérebro de uma pessoa for trocado por um elétron de um muro, então o estado do sistema deve ser *exatamente o mesmo estado* como era antes, e não meramente indistinguível daquele! O mesmo vale para prótons e para qualquer outro tipo de partícula, e para os átomos inteiros, moléculas etc. Se o conteúdo material inteiro de uma pessoa for trocado pelas correspondentes partículas de um tijolo de sua casa, então, em um sentido forte, nada deve acontecer. O que distingue a pessoa de sua casa é o *padrão* como ele está constituído e arranjado, e não a individualidade dos constituintes em si.

Do ponto de vista formal, nas teorias de conjunto padrão, podemos expressar isso dizendo que se $w \in x$, então $[(x - \{w\}) \cup \{z\} = x]$ se e somente se $z = w$; isto é, só se pode trocar (sem modificar o arranjo final) dois elementos se eles são o *mesmo* elemento (por força do axioma da extensionalidade). Sendo assim, no caso clássico, esse mesmo elemento estaria apenas sendo referido por dois nomes: z ou w, uma característica Fregeana como vimos. Mas no caso dos quase-conjuntos, como enfatizamos, podemos provar um teorema que diz que se um objeto for permutado por outro indistinguível (mas não necessariamente o mesmo), então nada muda no arranjo final:

Teorema 26: [Não-observabilidade de permutações] *Seja x um qset finito tal que $x \neq_E [z]$, e z um m-átomo tal que $z \in x$. Se $w \equiv z$ e $w \notin x$, então*

$$(x - z') \cup w' \equiv x,$$

onde $z' = [[z]]$ e $w' = [[w]]$ (unitários fortes).[11]

Intuitivamente, este teorema diz que se x tem n elementos, então se 'trocarmos' os elementos $z \in x$ pelos elementos indistinguíveis correspondentes $w \notin x$ (do ponto de vista conjuntista, isto significa fazer a operação $(x - z') \cup w'$), então o qset resultante permanece indistinguível do original. Em certo sentido, de um ponto de vista pragmático, não é importante se é com x ou com $(x - z \cup w')$ que estamos lidando, o que basicamente reflete a atitude do físico.

[11] A prova deste teorema pode ser vista na bibliografia citada.

5.3 CONCLUSÃO

Este capítulo teve apenas um caráter expositivo no qual não objetivamos mostrar todas as provas e axiomas existentes na teoria de quase-conjuntos, bem como explorar todas as suas facetas, mas vale mencionar que usando a mesma ganha-se a possibilidade de se contar com a noção de quanta indiscerníveis *ab ovo* — uma ideia que, como vimos, é mais consoante com o que vários físicos apregoam — além de que é possível provar que não é necessário assumirmos hipóteses externas (como as condições de simetria antes mostradas) para se obter as estatísticas quânticas. Apesar de tal prova ser importante perante à nossa argumentação erigida no capítulo anterior, não a exibiremos aqui por ser um pouco extensa e por não ser este o objetivo deste capítulo.[12]

Não obstante, o que realmente importa para esta tese advém da discussão principiada no capítulo 2, a saber, a que se refere à questão das estruturas rígidas. Como enfatizamos naquele momento, uma estrutura não-rígida construída em ZFC pode ser sempre expandida a uma estrutura rígida, de modo que nestas últimas sempre é possível identificarmos de modo inequívoco um indivíduo nem que seja 'de fora' da estrutura original, isto é, exatamente em tal estrutura estendida. Dito de modo mais formal, toda estrutura conjuntista clássica — que contenha automorfismos distintos da identidade — pode ser *estendida* a uma estrutura rígida na qual seu *único automorfismo é a função identidade* (desta feita, é claro, permitindo assim 'identificar' os indivíduos). A partir desta possibilidade, quando tomamos tal estrutura rígida, conseguimos então sempre assumir uma interpretação que garanta que a identidade seja realmente interpretada na diagonal do domínio. Deste modo, como enfatizamos anteriormente, estruturas em ZFC — *mesmo não-rígidas* — não são efetivas para o trato de não-indivíduos, pois em tais casos sempre podem existir expansões estruturais nas quais não existam dois objetos distintos que sejam indiscerníveis, resultando assim no fato de que nas 'estruturas base' também acabe por não existir não-indivíduos 'legítimos'. Na discussão aventada no capítulo 2, também mencionamos o fato de que para o trato dos objetos da MQ (segundo a interpretação dada no capítulo anterior), seria bom que tivéssemos uma estrutura alicerçada em alguma teoria de conjuntos alternativa que, destoante do caso clássico, não permitisse a rigidificação nem estendendo-a, e de modo que *assim não pudéssemos identificar os indivíduos nem mesmo numa possível extensão estrutural*. Pois bem, neste capítulo, exploramos a axiomática de uma teoria de conjuntos em que a noção de identidade não está presente para alguns objetos desta teoria. Logo,

[12] Caso o leitor queira ver esta prova, consulte (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 310ss.).

pela ausência da identidade, tudo leva a crer que uma estrutura que tem por fundamento os quase-conjuntos (asumindo apenas os m-átomos) não admite ser rigidificada de nenhuma forma, de modo que seus objetos realmente não podem ser dotados de identidade nem na estrutura 'base' e nem em uma possível 'extensão estrutural'. Todavia, e isso é importante, se tal situação se realizasse, isto é, se pudéssemos sim erigir uma estrutura que *mesmo sendo alicerçada na teoria de quase-conjuntos conseguisse ser rigidificada de alguma forma*, acabaríamos por identificar seus m-átomos de um modo resoluto e, assim, (mesmo sem conter a identidade em si) esta teoria também se mostraria inútil para o trato dos objetos quânticos. Isto por que, apesar de não existir a identidade para os m-átomos *na teoria*, se houver algum modo de tornar uma estrutura quase-conjuntista que tenha como domínio somente m-átomos rígida, existiria assim uma forma *'alternativa'*, por assim dizer, de se dotar os objetos quase-conjuntistas de uma possível identidade, dado que poderíamos identificá-los precisamente nesta estrutura rigidificada via essa forma alternativa. Com isso, como dito, a interpretação primordial tida em mente para a elaboração da teoria de quase-conjuntos cai por terra, e ela também acabaria por não se tornar uma legítima linguagem formal para a MQ.[13] Desta forma, precisamos garantir que uma possível identidade (até mesmo de um modo 'sorrateiro', por assim dizer) não possa *realmente* tomar corpo através uma possível rigidificação de estruturas quase-conjuntistas (ou, dito de outro modo, o que precisamos é *garantir* a não-rigidificação de estruturas quase-conjuntistas de nenhuma forma). Para tanto, *se faz então necessário primeiramente entender como se dá a prova de que toda estrutura não-rígida clássica pode ser rigidificada e, posteriormente, comprovar que esse teorema realmente não se efetiva na teoria de quase-conjuntos*. Pensamos que a partir desse ato, a saber, ao garantir que a prova da possibilidade de rigidificação de estruturas clássicas baseadas em ZFC realmente não se consagra para as estruturas quase-conjuntistas, estaremos nos assegurando de que uma identidade para os objetos quase-conjuntistas nunca se dará efetivamente. Este então será o tema do próximo capítulo, o qual é um dos principais desta tese. Todavia, já é bom alertar que o enunciado do teorema clássico que garante as expansões rigidificadoras diz que "toda estrutura não-rígida [baseada em ZFC] pode ser rigidificada *com a inclusão de um número finito de relações de primeira ordem"*. Nossa proposta, então, é tentar assim assegurar (a partir da análise da prova do teorema clássico) que *este enunciado* não tenha efeito na teoria dos quase-conjuntos, pois se mesmo em estruturas quase-conjuntistas pudermos também introduzir novas relações de primeira ordem que a rigidi-

[13]Lembramos que no capítulo anterior mencionamos o pensamento de Manin, o qual sugere que a MQ deve buscar sua própria linguagem; uma linguagem mais afeita às características e feições desta teoria.

fiquem, a função primordial da teoria $\mathfrak{Q}$, como dito, se desfaz. Em resumo, o que queremos é realmente nos certificar que a inclusão de novas relações sobre os elementos de uma quase-estrutura não surtam efeito no que tange a uma possível rigidificação. Com efeito, isto é importante, haja vista que a posição metafísica que estamos adotando aqui, qual seja, a de que os objetos quânticos são não-indivíduos de algum tipo, só pode ser verdadeiramente sustentada naquelas estruturas que não podem ser feitas rígidas nem mesmo por adicionar novos objetos, relações e funções na estrutura: como dito, se for provado que essa impossibilidade é garantida nas estruturas quase-conjutistas, temos a certeza de podermos *realmente* tratar os objetos quânticos como não-indivíduos nessa teoria fundacional.[14] Como dissemos, este estudo, o qual é dos cernes desta tese, começará a ser feito no próximo capítulo. Deste modo, a partir de agora, faremos uma análise da relação existente entre a teoria de quase-conjuntos e as teorias de conjuntos clássicas no que tange à questão das estruturas matemáticas. Veremos que muitos conceitos e resultados presentes nas estruturas baseadas em teorias de conjuntos clássicas não podem ser enunciados quando temos por base a teoria de quase-conjuntos e, em especial, exatamente o que se refere à rigidificação de estruturas (que é nossa preocupação primordial). Posteriormente, alternativas para esses conceitos clássicos serão dadas num arcabouço quase-conjuntista, e analisaremos aonde tais resultados podem nos levar.

[14]De pronto pode-se ver que uma das formas de rigidificação de estruturas clássicas dada no capítulo 2 como exemplo não surtirá, neste sentido, resultado algum nas estruturas quase-conjuntistas. Com efeito, naquele momento, dissemos que um dos modos mais simples de rigidificar uma estrutura clássica não-rígida é adicionando à mesma os conjuntos unitários dos elementos do domínio, ou equivalentemente, em contextos extensionais, a propriedade "ser idêntico com a", onde a percorre o domínio da estrutura. Todavia, haja vista que em termos teórico-conjuntistas (e logo em termos matemáticos) a existência do conjunto unitário de a corresponde à existência de um critério de identidade para a, de modo que para qualquer b, podemos dizer que $b = a$ se e somente se b pertence ao unitário de a e vice-versa, temos que neste caso usar a noção de identidade, conceito não presente na teoria de quase-conjuntos para os m-átomos. Sendo assim, a inclusão dos unitários dos elementos (m-átomos) no nosso quase-conjunto por si só não conseguirá rigidificar uma estrutura quase-conjuntista, e desta forma podemos de pronto descartar tal alternativa. Não obstante, como visto no texto, *o teorema* (da rigidificação) *em si* não fala que o único modo que temos para expandir uma estrutura não-rígida a uma rígida é via "conjuntos unitários", mas sim de que isso é possível de ser feito via *relações de primeira ordem* (como vimos, a estrutura $\mathfrak{Z} = \langle Z, + \rangle$ pôde ser rigidificada com a inclusão da relação de ordem: $\mathfrak{Z}\langle Z, +, > \rangle$). Logo, mesmo não sendo o exemplo exposto no capítulo 2 bem sucedido para o caso das teorias quase-conjuntistas, ainda assim não está descartada a possibilidade de que, *como reza o teorema clássico*, relações de primeira ordem conseguirem rigidificar mesmo as estruturas quase-conjuntistas. Dito de outra forma, o teorema que diz que existe a possibilidade de sempre se rigidificar as estruturas clássicas via relações de primeira-ordem é 'mais forte' que apenas o exemplo que demos de rigidificação via conjuntos unitários (e por isso mesmo é apenas um exemplo de uso do teorema, e não teorema em si) e, nos próximos capítulos, é exatamente esse teorema 'mais forte' que tentaremos mostrar que não é possível de ser levado a cabo na teoria de quase-conjuntos.

6 ESTRUTURAS RÍGIDAS E QUASE-CONJUNTOS

6.1 INTRODUÇÃO

Um dos conceitos mais importantes da matemática é o de estrutura. A partir de 1935, Nicolas Bourbaki — com o objetivo de se alcançar uma visão unificada da matemática — passou a usar sistematicamente o conceito de estrutura, assentou-a na teoria de conjuntos e tomou-a como fundamental para relacionar alguns domínios daquela disciplina (KRAUSE, 2002, p. 17ss.). Neste capítulo, caracterizaremos então a noção de estrutura matemática e discutiremos algumas diferenças que podem surgir entre as estruturas construídas na teoria de conjuntos clássica, e as construídas na teoria de quase-conjuntos. Neste sentido, como dito anteriormente, um dos resultados mais importantes é o que reza que toda estrutura conjuntista clássica pode ser rigidificada acrescentando à mesma novas relações de primeira ordem, de modo que assim o único automorfismo da estrutura se torna a função identidade. Neste parte do trabalho, iremos trazer a lume tais conceitos, analisaremos tais propriedades (bem como vários outros aspectos da relação entre a teoria de quase-conjuntos, a noção de estrutura na matemática e o conceito de estrutura rígida) e, por fim, mostraremos que se a nossa estrutura for adequadamente construída tendo por base a teoria dos quase-conjuntos (no caso, como veremos, assumindo uma parte dela: somente os m-átomos), realmente não podemos rigidificá-la como acontece no caso clássico. Consequentemente, como também já alertamos, tais estudos acabam por se afirmar como um alicerce realmente seguro no trato de objetos que podem ser considerados como indiscerníveis no sentido antes enfatizado.

A dinâmica deste capítulo tem então a seguinte proposta. Em um artigo chamado *Definibility and Invariance* (DA COSTA e RODRIGUES, 2007), da Costa e Rodrigues mostram como as estruturas baseadas nas teorias de conjuntos clássicas podem ser rigidificadas do modo acima enunciado, e, em outro artigo sequencial (*Remarks on Abstract Galois Theory* (DA COSTA e BUENO, 2011)), da Costa e Bueno ampliam alguns dos resultados encontrados nesse primeiro trabalho. Não obstante, antes de que tais provas sejam realmente alcançadas, várias definições são dadas e teoremas paralelos são provados. Entre estes, vale citar de antemão os importantes teoremas e definições relativos à questão de isomorfismos, automorfismos e equivalências entre estruturas. O que faremos a partir de agora, então, é analisar alguns desses teoremas e algumas dessas provas sob a ótica quase-conjuntista, testando a validade e os limites dos mesmos neste arcabouço teórico alternativo. Tal trabalho é importante exatamente para que consigamos ter fundamentos para defender a tese de que estruturas quase-conjuntistas não podem realmente ser rigidificadas. É bom alertar, no entanto, que o que apresentaremos abaixo não será uma prova no sentido 'lógico' do termo, mas muito mais uma *constatação* de que as estruturas quase-conjuntistas (restritas à m-átomos, como dito) não podem ser rigidificadas devido ao fato de que, como veremos, tal teoria alternativa exatamente não adota nenhuma das condições necessárias para uma estrutura poder ser rigidificada. Outrossim, alertamos que sempre que neste texto nos referirmos ao "caso clássico", estaremos nos remetendo a estruturas e conceitos baseados nas teorias de conjuntos clássicas (no caso, a de ZFC, que é a base matemática — ou sobre a teoria a que se referem as provas — dos artigos de da Costa e Rodrigues e de da Costa e Bueno citados). Na mesma direção, mas em sentido oposto, quando falarmos de **"estruturas quase-conjuntistas"**, *estaremos nos referindo a estruturas nas quais os seus domínios são compostos apenas por qsets de m-átomos indistinguíveis do mesmo tipo*.[1] De toda forma, os resultados apresentados a seguir podem ser facilmente ampliados para uma estrutura que tenha em seu domínio m-átomos de vários tipos, embora tenhamos restringido nossa análise de modo a facilitar o trabalho.[2] Em suma, neste capítulo, trabalharemos sempre com estruturas quase-conjuntistas 'puras', já que de acordo com a definição dada no capítulo anterior, os qsets puros são exatamente aqueles que têm somente m-átomos indistinguíveis como elementos.

À guisa ainda de introdução, vale apenas citar algumas noções gerais sobre o conceito de estrutura matemática. Segundo da Costa e French (DA COSTA e FRENCH, 2003, pp. 21-60), as três maneiras usuais de se definir estrutura matemática seriam usando uma teoria de conjuntos; através da lógica de ordem superior (teoria dos tipos); ou por meio de uma teoria de categorias. Segundo os autores (*op. cit.*), a primeira abordagem é a utilizada por Beth e Suppes na defesa da abordagem semântica.[3] A utilização da lógica de ordem superior é basicamente a abordagem adotada por Carnap e pode, do ponto de vista lógico, ser reduzida à definição conjuntista.[4] Todavia, alertam da Costa e French, nessa abordagem podemos interpretar os elementos básicos de uma estrutura como predicados e não como conjuntos, e, assim, podemos definir estruturas extensionais bem como intensionais. A terceira forma de se definir estrutura advém historicamente de Bourbaki que

[1] Não obstante, nos estudos do próximo capítulo, também utilizaremos m-átomos de 'espécie' variada.

[2] Todavia, para que os resultados encontrados neste capítulo continuem válidos, o domínio da estrutura deve sempre continuar sendo composto *somente de m-átomos* Não faremos aqui tal estudo ampliado por não ser nosso objetivo: o mesmo fica como sugestão de trabalhos futuros.

[3] Sobre a abordagem semântica, consulte os últimos capítulos desta tese.

[4] *Op. cit.*. Veja também (CARNAP, 1958).

percebeu que muitas propriedades de tais arcabouços dependem não apenas de uma estrutura particular, mas de uma coleção delas, compondo objetos matemáticos conhecidos como "categorias.[5] Neste trabalho, utilizaremos as definições de estrutura que seguem a linha conjuntista basicamente porque é a mais utilizada nas discussões filosóficas.

A linguagem da teoria de conjuntos (como a de ZFC, bem como a da teoria de quase-conjuntos), é como vimos uma linguagem de primeira ordem, mas todavia tal linguagem é tão forte que pode ser utilizada para construir linguagens de ordem superior e estruturas que não são de ordem-1. A definição de estrutura dada por da Costa e Rodrigues (DA COSTA e RODRIGUES, 2007) tem a vantagem de não se restringir a estruturas de ordem-1 e, sendo assim, as relações não se dão apenas entre indivíduos. Para esses autores, muitas teorias científicas, quando formalizadas, mostram a conveniência de se trabalhar em estruturas superiores. Com efeito, segundo Krause (KRAUSE, no prelo, p. 73), geralmente as estruturas mencionadas pelos filósofos da ciência são de ordem-1 (as quais são encontradas na teoria de modelos tradicional), mas para este autor, consoante com o que apregoam da Costa e Rodrigues, estruturas de ordem superior são também necessárias para se tratar das ciências empíricas e da matemática.[6] No entanto, vale a pena observar que não se deve confundir o fato da teoria de conjuntos ZFC, por exemplo, ser construída numa linguagem de primeira ordem, com a ordem das estruturas que são nela erigidas: podemos ter estruturas de ordem n mesmo em uma linguagem de primeira ordem (KRAUSE, no prelo, p. 74). O que acontece é que se as relações da estrutura têm como relata apenas indivíduos de D, então a estrutura é de ordem-1 (é o que acontece, por exemplo, com a estrutura de grupo); se os relata das relações da estrutura são subconjuntos de elementos de D, ou propriedades de indivíduos (em contextos extensionais), então e estrutura é de ordem-2, e assim por diante. Em geral, podemos ter uma estrutura de ordem n (com $n \in \omega$, sendo ω o primeiro ordinal limite), ou mesmo de ordens mais elevadas.[7] Sendo assim, o termo "primeira-ordem" expressa apenas o fato de que a teoria base que estamos usando (como a de ZFC) tem a lógica de primeira ordem como lógica subjacente, enquanto que estruturas de ordem-1 são aquelas estruturas que têm somente relações de primeira ordem como elementos primitivos. Isto mostra como podemos considerar estruturas de ordem maior que 1 mesmo alicerçadas em linguagens de primeira ordem.

No capítulo 2 desta tese, usamos algumas definições gerais sobre a

---

[5]Vale mencionar que a teoria das categorias surge com 'um dos' Bourbaki (Samuel Eleinberg), mas não foi usada pelo grupo (agradeço o prof. Décio Krause por me chamar a atenção para este fato).

[6]Uma boa introdução sobre a noção de estrutura matemática, bem como seu uso nas ciências empíricas, pode ser encontrado em (ABE, 1989).

[7]Veremos mais detalhes disto neste capítulo.

noção de estrutura; exatamente aquelas que nos importavam para a discussão daquele momento. Não obstante, neste capítulo, algumas definições dadas naquele capítulo serão retomadas e analisadas como mais detalhes, de modo que um ou outro conceito pode se repetir aqui (lembrando que temos como pedra de toque, como dito, o artigo citado de da Costa e Rodrigues).

6.2 TIPOS, ESCALAS E QUASE-ESTRUTURAS

Ressaltamos, então, que faremos uma comparação entre o modo que é construída a noção de estrutura nas teorias de conjuntos clássicas e na teoria de quase-conjuntos, mostrando as diferenças e os limites de cada abordagem. Além disso, buscaremos compreender como alguns resultados que são expressos em uma fundamentação podem ser (ou não) transpostos à outra, objetivando assim termos alicerces para demonstrar a impossibilidade de rigidificação de estruturas quase-conjuntistas. Não obstante, para se definir uma estrutura clássica, bem como uma estrutura quase-conjuntista, a primeira coisa que precisamos é definir as noções de tipos e de ordem desses tipos. No caso clássico, em ZFC, estas definições são dadas da forma abaixo: podemos adaptá-las para o caso quase conjuntista sem problemas usando para tanto a parte clássica de $\mathfrak{Q}$. Deste modo, daqui para frente, trabalharemos de forma que o contexto deixará claro de estamos em ZFC (que corresponde à parte clássica de $\mathfrak{Q}$) ou em $\mathfrak{Q}$ propriamente dita.

Definição [Tipos]: *O conjunto T de tipos é o menor conjunto satisfazendo as seguintes condições:*[8]

1. *O tipo i pertence a T: $i \in T$;*
2. *Se $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in T$, então $\langle a_0, a_1, ..., a_{n-1} \rangle \in T$, com $1 \leq n < \omega$, onde $\langle a_0, a_1, ..., a_{n-1} \rangle$ é a sequência finita de elementos de T, e ω é o conjunto de números naturais.*

Definição [Ordem]: *A ordem de um elemento de T é definida como*:

1. $ord(i) = 0$;
2. $ord(\langle a_0, a_1, ..., a_{n-1} \rangle) = max\{ord(a_0), ord(a_1), ..., ord(a_{n-1})\} + 1$.

Veja que podemos usar as definições de tipos e de ordem acima mesmo sobre um quase-conjunto de *m*-átomos, pois isso é feito na parte clássica de $\mathfrak{Q}$. Além disso, embora não se possa estabelecer uma ordem sobre *os elementos* de um qset puro tal como vimos no capítulo anterior, podemos fazer uso dessas definições exatamente porque elas nos fornecem apenas as arida-

[8]Para tais definições, seguiremos (KRAUSE, *et. al.*, 2011).

des e as ordens das *relações* quase-conjuntistas: se tivermos, por exemplo, $\langle a_0, a_1 \rangle$ do modo acima definido (ou seja, um tipo 2), temos uma relação quase-conjuntista binária; se tivermos $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ (isto é, um tipo 3) temos uma relação ternária, e assim por diante. Aqui, os subscritos não estão indicando (ou impingindo) uma ordem *sobre os objetos* do qset ou da relação, mas apenas nos dando a aridade (a ordem) *da relação* na hierarquia quase-conjuntista. Dito de outra forma, a definição de tipos ainda vale porque para cada tipo a, a função t nos dá o conjunto de todas as relações deste tipo construída com os elementos de D (D sendo um qset do modo antes definido). Conforme a ordem dos tipos aumenta, os objetos atribuídos a eles por t aumentam em complexidade também. Os elementos do tipo i, que são por definição os elementos de D, no caso clássico são normalmente nomeados como *indivíduos*. Todavia, não usaremos essa notação aqui devido ao fato de que tal termo implica em uma identidade para tais elementos e traz consigo uma carga semântica, tal como vimos em capítulos prévios. Como nossa intenção é trabalhar com os objetos da MQ para os quais não faz sentido os dotarmos de individualidade, chamaremos os objetos de D de m-átomos (como estamos fazendo), ou apenas de elementos. De qualquer modo, como dito, $\langle i \rangle$ é o tipo de propriedades para os elementos de D, $\langle i, i \rangle$ é o tipo de propriedades binárias dos elementos de D, e assim por diante.

Na próxima definição, usam-se as operações teórico-conjuntistas de conjunto potência e de produto cartesiano, denotados respectivamente por $\mathscr{P}$ e por $\times$. Todavia, haja vista que nosso objetivo é de fazermos uma comparação com o caso clássico, tomaremos como domínio um quase-conjunto puro não-vazio D de m-átomos indistinguíveis *do mesmo tipo*, tal como já enfatizado. Deste modo tanto o conjunto potência, bem como o produto cartesiano, devem ser estabelecidos a partir das definições dadas no capítulo anterior quando apresentamos a axiomática da teoria de quase-conjuntos.

Definição: *Dado um qset puro não-vazio D cujo elementos são m-átomos do modo acima estabelecido, definimos da seguinte forma uma quase-função t_D (ou para simplificar a notação, apenas t), tendo T como seu domínio:*

1. $t(i) = D$;
2. se $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in T$, então $t(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) = \mathscr{P}(t(a_0) \times t(a_1) \times ... \times t(a_{n-1}))$.

Desta forma, o que temos aqui é que dado um quase-conjunto D (chamado de conjunto base), podemos formar outros conjuntos tomando seus conjuntos de subconjuntos e conjuntos de subconjuntos de seus 'produtos cartesianos' (é o que expressa o item 2 desta última definição).[9] Todavia, no caso clássico — e eis aqui a primeira diferença entre a abordagem clássica e a quase-conjuntista — dado um conjunto X, o produto cartesiano de X é o conjunto de todas as n-uplas *ordenadas* $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ de elementos $a_1, ..., a_n$ de X (ver (MENDELSON, 1979, p. 5)). Uma relação clássica, neste caso, é um conjunto de n-uplas *ordenadas* de X (ou um subconjunto de X^n). Não obstante, no caso quase-conjuntista, como o que temos aqui é um *quase-conjunto de elementos indistinguíveis*, o subscrito do nosso produto cartesiano não pode indicar diferença ou ordenação entre os elementos. Isto acontece porque em um qset puro não faz sentido (e até mesmo não podemos!), como dito anteriormente, ordenar os elementos indistinguíveis: não faz sentido afirmarmos que um elemento indistinguível está antes ou depois de outro elemento indistinguível já que, pela falta de identidade, qualquer elemento pode ocupar a posição n da sequência. É por este motivo que na definição da função t_D acima apresentada, ao invés de utilizarmos os símbolos $\langle\ \rangle$ (que usualmente denotam ordenação), preferimos usar parênteses. Durante este texto ficará subentendido o uso de um ou outro símbolo.

A próxima definição que precisamos é a de *escala da estrutura*.

Definição [Escala]: *A função t_D é chamada de escala sobre o quase-conjunto D. O conjunto $\bigcup(range(t_D))$ é denotado por $\varepsilon(D)$.*

Os objetos da escala $\varepsilon(t)$, com $ord(t) > 0$, são chamados de quase-relações do tipo t.

Os objetos de $t(i)$ são chamados de elementos da escala de D. Os elementos de $t(a)$ têm tipo a.

Como vimos no capítulo 2, de modo usual uma estrutura $\mathfrak{U}$ baseada sobre um quase-conjunto D não-vazio de m-átomos do mesmo tipo é definida como sendo um par ordenado da forma

$$\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle,$$

onde r_ι — como estamos alertando — é uma sequência (uma q-relação) não ordenada de elementos de $\varepsilon(D)$. Como o domínio de nossa estrutura é um qset, podemos nomeá-la de ***quase-estrutura*** tal como já estamos fazendo. É suposto que os quase-cardinais das sequências são estritamente menores que o quase-cardinal do domínio.

Normalmente, em uma estrutura clássica, pode-se relacionar os ele-

[9] Vale alertar que o símbolo de igualdade presente item 2 da definição está na metateoria. Na verdade, como a construção é em ZFC e em $\mathfrak{Q}$ (no caso, na "parte clássica" de $\mathfrak{Q}$), "$=$" é "$=_E$", e t é uma q-função. Assim, $t(i) = D$ ou qualquer qset indiscernível de D. As estruturas são assim; pode-se trocar tudo por indiscerníveis.

mentos de D da estrutura com suas classes unitárias de modo a assim podermos identificar os elementos de D de modo único. Todavia, como na nossa quase-estrutura o domínio D é composto por m-átomos indistinguíveis, não podemos performar classes unitárias de modo a identificar (de modo único) os objetos do quase-conjunto, tal qual acontece classicamente.[10] Na teoria de quase-conjuntos, o máximo que podemos utilizar é a definição de "classe unitária forte" de um elemento x de um qset, que é o quase-conjunto que tem quase-cardinalidade 1 e o seu único elemento é indistinguível de x. Esta classe unitária é definida da seguinte maneira (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 292):

Definição [Classe unitária forte]: *Uma classe unitária forte de x é um quase-conjunto x' que satisfaz a propriedade seguinte:* $x' \subseteq [x] \wedge qc(x') =_E 1$.

Em outras palavras, uma classe unitária forte de x é o qset x' na qual o único elemento é indistinguível de x. A diferença é que neste caso não podemos provar que este elemento é um x em particular, já que como este é indistinguível de qualquer outro indistinguível dele, qualquer elemento x de um qset poderia 'fazer esse trabalho'. Assim, pode-se ter a situação na qual podemos dizer que temos somente *um elemento* de uma certa espécie (ou *um* x ou *um* y, por exemplo), mas sem o significado de identificá-lo como sendo este ou aquele. Com efeito, um teorema pode ser provado que diz que "para todo x existe uma classe unitária forte de x", e um que diz que "todas as classes unitárias de x são indistinguíveis" (ver (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 292)). Desta forma, como não podemos provar que as classes unitárias fortes de x são extensionalmente idênticas (no sentido de identidade), não podemos também dar definições ostensivas para m-átomos indistinguíveis por colocar, por exemplo, nosso dedo sobre um m-átomo e dizer "este é (ou representa) o mesmo elétron que tinha antes". Isso capta o que acontece em um átomo: em geral, sabemos quantos elétrons estão na nuvem eletrônica, mas não faz sentido falarmos de qual elétron em particular está no átomo (fato capturado pela axiomática de $\mathfrak{Q}$, como visto) (*cf. ibid.*). Tais conceitos serão importantes para nós futuramente.

Como definido antes, cada elemento de $\varepsilon(D)$ tem um certo tipo pois pertence a $t(a)$ para algum $a \in t$. Por fim, a ordem da quase-relação é também definida como sendo a ordem do seu tipo, de modo que podemos saber qual a ordem da quase-relação em apreço pela ordem de seu tipo. A ordem de $\mathfrak{U}$, denotada por $ord(\mathfrak{U})$, é a ordem do maior tipo das quase-relações da família r_ι, se existir, e se não existirem tais quase-relações definimos $ord(\mathfrak{U}) = \omega$.

Outro conceito que necessitamos definir é o de linguagem da nossa

[10] Já comentamos sobre isso nos capítulo 2, 3 e 4.

quase-estrutura. Como estamos fundamentando quase-estruturas que tenham como domínio um quase-conjunto D composto de m-átomos do mesmo tipo, como já se percebe faremos uso da linguagem de primeira ordem da teoria de quase-conjuntos, a qual — como já dito — é por sua vez uma 'ampliação' da teoria de ZFC.

Como enfatizado na introdução, passamos agora a analisar como se dá a relação dos conceitos e teoremas provados em da Costa e Bueno (DA COSTA e BUENO, 2011) e em da Costa e Rodrigues (DA COSTA e RODRIGUES, 2007) para as teorias de conjuntos clássicas em relação à teoria dos quase-conjuntos. Veremos, primeiramente, que algumas características da teoria de quase-conjuntos (principalmente as que se referem à ausência da noção de identidade e da ordenação dos objetos de um qset) acabam por minar tanto a construção da noção de definibilidade (essencial para a questão da invariância em estruturas), bem como a de expressabilidade dos elementos da estrutura, as quais por fim impossibilitarão a rigidificação das nossas estruturas quase-conjuntistas via relações de primeira ordem. Em capítulo posterior, será mostrada uma alternativa para enfraquecermos a noção de rigidificação para estruturas quase-conjuntistas e lograrmos, assim, um tipo de "*quase-rigidificação*".

6.2.1 Semântica

O primeiro ponto a ser expugnado é relacionado à verdade das sentenças. Como se sabe, pode-se interpretar mesmo as linguagens infinitárias que têm por base ZFC,[11] em estruturas clássicas da forma $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$, de modo que as constantes perfazem o domínio D e as relações r_ι são 'lugares' na escala ε da estrutura. Um teorema de da Costa e Rodrigues (DA COSTA e RODRIGUES, 2007) demonstra que toda linguagem infinitária pode ser interpretada em uma linguagem de teoria de primeira ordem e, sendo assim, permaneceremos neste texto em linguagens de primeira ordem apenas. Se φ é uma sentença, dada uma certa interpretação podemos então dizer — de modo usual — que φ é verdadeira (ou falsa) na estrutura $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$: para expressar que φ é verdadeira em $\mathfrak{U}$, escrevemos $\mathfrak{U} \models \varphi$ (respectivamente, $\mathfrak{U} \not\models \varphi$, se φ for falsa).

Aqui já temos a primeira questão delicada na relação destes conceitos com a teoria quase-conjuntista. Como bem pontuado em um artigo de da Costa e Bueno (DA COSTA e BUENO, 2009), a semântica da lógica está

[11] O que são linguagens infinitárias se tornará claro abaixo. Por enquanto pedimos indulgência ao leitor.

intimamente atrelada à noção de identidade dos objetos. Para ver como esse vínculo acontece, vamos considerar a noção tarskiana usual (ou seja, para objetos clássicos e formulada na teoria de conjuntos clássica) de *satisfatibilidade* para uma fórmula quantificada universalmente no cálculo de predicados de primeira ordem. Do modo habitual, seja I uma interpretação do cálculo de predicados de primeira ordem com o domínio D (onde D é um conjunto não-vazio 'clássico'), e seja s uma *sequência denumerável* de elementos de D. Dizemos que s satisfaz $\forall x_i \beta$ se, e somente se, toda sequência que difere de s em no máximo o i-ésimo componente satisfaz β (para detalhes, veja (MENDELSON, 1979, p. 50-58)). Claramente, a linguagem na qual podemos caracterizar tal noção necessita da identidade: primeiro, porque a noção de quantificação sobre cada sequência assume que as sequências, por si mesmas, são 'objetos' que podem ser distinguidos de outras sequências de modo que cada uma delas está subordinada à quantificação de um modo particular. Segundo, as sequências são tidas como para diferirem uma das outras com respeito ao seu i-ésimo componente. Como dito, claro se vê que a questão da identidade está permeando toda essa construção, pois se os elementos da sequência (e assim a própria sequência) não tiverem identidade, nada há do que diferir! Na verdade, temos aqui um 'sistema binário': o fato de termos *diferentes* objetos no domínio (ênfase em "diferentes") é o que permite reconhecermos tais sequências como distinguíveis uma das outras (ou seja, duas sequências diferem se elas diferem em pelo menos um de seus componentes). Por fim, dado que o domínio de interpretação é um conjunto clássico, cada um dos seus elementos é tido como sendo entidades com condições de identidade bem definidas. Além disso, devido ao axioma da extensionalidade da teoria de conjuntos clássica, já vimos também que dois conjuntos (no caso, o domínio D) com os mesmos membros são iguais: novamente, a identidade transparece em todo o argumento.

Desta forma, pode-se facilmente concluir que a lógica reflexiva com identidade tem um papel essencial na caracterização das noções semânticas como a satisfatibilidade (essencial à definição de verdade), advindo tal papel, entre outros motivos, das 'regras' de uso do quantificador universal. É por isso que para da Costa e Bueno (DA COSTA e BUENO, 2009), "a partir da lógica não-reflexiva, o problema é o de como podemos dar sentido a uma quantificação *sem* identidade. Apesar de tudo, sem invocar a identidade, não está claro como a quantificação poderia sair do chão [coult get off the groud]". Deste modo, tudo levaria a crer que devido a tal carência para os objetos do nosso domínio, não conseguiríamos definir em nossa teoria uma noção de satisfatibilidade (e assim de verdade) de um modo coerente, o que faria com que uma semântica para $\mathfrak{Q}$ também permanecesse inviável. Desta feita, se tornaria questão primária entender qual seria enfim o valor de uma teoria assim posta, a saber, na qual não se pode falar de verdade ou falsidade para sentenças das linguagens das teorias elaboradas em $\mathfrak{Q}$.

Não obstante, a problemática relativa à quantificação sem identidade, que a primeira vista pode parecer sem solução, pode ser sim resolvida: em um artigo chamado *Quantifiers and the foundations of quasi-set theory*,[12] Arenhart e Krause mostram como isso pode ser feito, tendo por base os trabalhos de Ebbinghaus, *et al.*[13] No trabalho de Ebbinghaus, *et al.*, é desenvolvido um sistema de lógica clássica de primeira ordem *dentro* de ZF, tal que ambas sua semântica e sintaxe são feitas usando uma metalinguagem clássica: a saber, a de ZF propriamente. Arenhart e Krause, por sua vez, utilizam o mesmo procedimento para desenvolver um sistema de lógica não-reflexiva em que ambas semântica e sintaxe são feitas usando como metalinguagem a teoria de quase-conjuntos (que, como vimos, tem como base uma lógica não-reflexiva). Não adentraremos aos detalhes de tal construção aqui, haja vista que nosso objetivo é apenas dar uma visão geral da problemática relativa à semântica quase-conjuntista, mas todavia é bom enfatizar que da Costa e Bueno, em sua crítica, parecem desconhecer o trabalho de Arenhart e Krause onde a questão da quantificação sem identidade parece sim tomar forma.

Em sentido consoante, o outro problema mencionado por da Costa e Bueno (*op. cit.*), a saber, o de que se tivermos apenas uma lógica não-reflexiva R, esta não poderá ser usada para oferecer uma *semântica* genuína para R (pois sendo não-reflexiva, R não possuirá os recursos para expressar a identidade; algo que como visto é essencial para a semântica), também pode ser resolvido. Segundo esses autores, como já enfatizado, as críticas apresentadas para uma quantificação sem identidade se transfeririam naturalmente para o caso de uma semântica quase-conjuntista, pois dado que a noção tarskiana de verdade é formulada em uma teoria de conjuntos clássica — onde existe o conceito de identidade — permanece um problema ainda em aberto, dizem eles, formular uma noção de quase-satisfação (e, desta forma, de quase-verdade no contexto dos quase-conjuntos) que se dê de um modo satisfatório. Todavia, tais noções para a teoria $\mathfrak{Q}$ também podem sim ser construídas: Otávio Bueno mostra como isso pode ser feito em um artigo publicado em 2000 (BUENO, 2000). Desta vez, daremos alguns detalhes gerais de tal construção.

Para estabelecermos uma semântica de uma linguagem fundamentada em uma teoria de quase-conjuntos (e, desta forma, alicerçada em uma lógica não-reflexiva), concebendo assim a noção de sentença *quase-verdadeira* a partir de um conceito de *quase-satisfação*, é necessário primeiramente de-

[12] *Principia* 13(3): 251-68 (2009).

[13] Ebbinghaus, H. D.; Flum, J.; Thomas, W., *Mathematical logic*. New York: Springer-Verlag, 1994.

finir a ideia de relações parciais.[14] Quando investigamos um certo domínio do conhecimento, Δ, formulamos um arcabouço conceitual que nos ajuda a sistematizar e organizar a informação que obtemos acerca de Δ. Usualmente, representamos este domínio por um conjunto D de objetos e passamos a estudar as relações que existem entre os objetos de tal domínio. Muitas vezes, não sabemos se uma dada relação R definida sobre D (ou n-uplas de D) está ou não relacionada a certos objetos de D, apesar de sabermos que outras relações R' estão relacionadas, e que outras, R'', não estão. R representaria então a 'incompletude' de nossa informação sobre Δ, e é formalmente acomodada pelo conceito de relação parcial.[15] Uma relação n-ária *parcial* R sobre D (não-vazio) é definida como sendo uma tripla $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle$, onde R_1, R_2 e R_3 são conjuntos disjuntos (com $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = D^n$), e tal que R_1 é o conjunto das n-uplas que sabemos que pertencem a R; R_2 o conjunto das n-uplas que sabemos que não pertencem a R; e R_3 o conjunto das n-uplas para as quais não está definido se elas pertencem a R ou não (se R_3 for vazio, R se torna uma relação n-ária usual que pode ser identificada com R_1).

Agora podemos passar a definir a noção de quase-verdade para uma linguagem elaborada na linguagem de $\mathfrak{Q}$, de modo que poderá ser visto que mesmo tendo por base uma lógica não-reflexiva ainda assim podemos falar de verdade (ou, melhor dizendo, de quase-verdade) das sentenças. É óbvio que se estivermos lidando apenas com objetos 'clássicos', dado que existe uma 'cópia' de ZFU em $\mathfrak{Q}$, simplesmente utilizamos em $\mathfrak{Q}$ as noções semânticas Tarskianas usuais. Não obstante, o caso mais interessante é exatamente quando estamos tratando de objetos não-clássicos. Vejamos, grosso modo, como se dá tal construção (*cf.* BUENO, 2000).

A primeira noção que precisamos definir é a de *quase-modelo*, o qual será restringindo apenas ao caso de quase-conjuntos que são similares, tal qual definido no capítulo anterior. Sendo assim, um quase-modelo é um par ordenado $\langle D, I \rangle$, onde D é um quase-conjunto não vazio e I uma quase-

[14] Seguiremos aqui a construção que consta do artigo de Otávio Bueno acima citado, o qual faz uso da noção de relações parciais (bem como a de quase-satisfação). Não obstante, no intuito de definirmos apenas a noção de quase-verdade, poderíamos nos abster das relações parciais e ficarmos restritos apenas a relações totais sobre o domínio (isto é, quando sabemos todas as relações que valem ou não valem no domínio, de um modo que ficará claro abaixo). Mas, como a construção de Bueno é mais ampla, assimilando outros conceitos e concepções filosóficas importantes, preferimos nos ater à forma apresentada pelo autor em seu artigo.

[15] Sobre a ideia de relações parciais e sua vinculação com a prática científica, veja (MIKENBERG, *et. al.*, 1986; DA COSTA e FRENCH, 2003; DA COSTA, 1986; DA COSTA e FRENCH, 1989; e DA COSTA e FRENCH, 1990) só para citar alguns trabalhos mais importantes. Nestes artigos, também é desenvolvida a ideia de quase-verdade a partir das relações parciais. Não obstante, Silvestrini (SILVESTRINI, 2011) mostra que a proposta de Bueno que apresentaremos no decorrer destatese é, na verdade, uma *outra* forma de quase-verdade, exatamente por agora assimilar a noção de quase-satisfação, algo não presente na definição original de da Costa, *et al.*

função, tal que: (1) para cada constante c da linguagem, $I(c) \in D$; e (2) para cada símbolo de predicado F_i^n da linguagem, $I(F_i^n) =_E \langle I_T(F_i^n), I_F(F_i^n), I_U(F_i^n)\rangle$, onde (*i*) $I_T(F_i^n), I_F(F_i^n), I_U(F_i^n) \subseteq D^n$ são dois a dois disjuntos; e (*ii*) $I_T(F_i^n) \cup I_F(F_i^n) \cup I_U(F_i^n) =_E D^n$, onde D^n é o quase-conjunto das n-uplas de objetos de D. Intuitivamente falando, I_U corresponde àquelas n-uplas que não sabemos se valem ou não, I_T àquelas que sabemos, e I_F àquelas que sabemos que não valem, de modo paralelo ao que foi definido para as relações parciais.

Da mesma forma que na noção Tarskiana de verdade em que primeiramente é introduzido a noção de satisfação, aqui se faz necessário definir primeiramente a noção de *quase-satisfação*. Sendo assim, seja s uma quase-função de modo que para cada variável individual v_i, exista um elemento d de D tal que $s(v_i) \equiv d$, e para cada constante c, $s(c) \equiv I(c)$. Esta quase-função é dita ser uma *quase-sequência* em $\langle D, I\rangle$. Usamos a notação $s \approx_v s'$ para expressar que as quase-sequências s e s' concordam em todas as variáveis, exceto possivelmente v_j, isto é, para todo $i \neq_E j, s(v_i) \equiv s'(v_i)$. A definição "a relação s *quase-satisfaz* uma fórmula α em $\langle D, I\rangle$" é feita indutivamente, tal qual o caso Tarskiano: (1) s quase-satisfaz $F_i^n t_1 ... t_n$ em $\langle D, I\rangle$, see $\langle s(t_1), ..., s(t_n)\rangle \in I_T(F_i^n) \cup I_U(F_i^n)$; (2) s quase-satisfaz $\neg A$ em $\langle D, I\rangle$, see s não quase-satisfaz A em $\langle D, I\rangle$; (3) s quase-satisfaz $A \vee B$ em $\langle D, I\rangle$, see s quase-satisfaz A em $\langle D, I\rangle$, ou s quase-satisfaz B em $\langle D, I\rangle$; (4) s quase-satisfaz $A \wedge B$ em $\langle D, I\rangle$, see s quase-satisfaz A em $\langle D, I\rangle$ e s quase-satisfaz B em $\langle D, I\rangle$; (5) s quase-satisfaz $A \rightarrow B$ em $\langle D, I\rangle$, see s não quase-satisfaz A em $\langle D, I\rangle$ ou s quase-satisfaz B em $\langle D, I\rangle$; (6) s quase-satisfaz $\exists v A$ em $\langle D, I\rangle$, see para algum $s', s \approx_v s'$ e s' quase-satisfaz A em $\langle D, I\rangle$; e (7) s quase-satisfaz $\forall v A$ em $\langle D, I\rangle$, see para todos $s', s \approx_v s'$ e s' quase-satisfaz A em $\langle D, I\rangle$.[16]

Por fim, tendo estabelecido a noção de quase-satisfação, podemos estabelecer a noção de quase-verdade para os elementos dos quase-conjuntos também seguindo o modelo Tarskiano. Desta forma, uma fórmula α será *quase-verdadeira* em $\langle D, I\rangle$ se, e somente se, A é quase-satisfeita em $\langle D, I\rangle$ por todas as sequências em $\langle D, I\rangle$.

Não adentraremos mais a este debate aqui pois não é o nosso objetivo neste texto: o que objetivamos apenas foi mostrar que a noção de fórmula verdadeira (ou quase-verdadeira) a partir de uma estrutura quase-conjuntista não necessariamente carece de significado quando estamos tratando de objetos indistinguíveis (que era exatamente a crítica de da Costa e Bueno em (DA COSTA e BUENO, 2009)). O mesmo caso acontece com a noção de modelo (ou quase-modelo, neste caso) a partir de um conjunto de sentenças. Isso trará

[16] É claro que na construção em apreço existe um componente I_U, presente na condição (1), que permite que se leve em conta àquelas relações que não estão (ainda) definidas sobre o domínio. Como já dito acima, poderíamos estabelecer a noção de quase-satisfação de uma quase-sequência sem a condição (1), mas como a construção descrita por Bueno encapsula esse fato, caracterizando-se assim como algo mais amplo, preferimos seguir as ideias do autor do artigo.

implicações para a noção que definibilidade que veremos em sequência, onde daremos uma explicação intuitiva da proposta de Bueno acima exposta.

6.2.2 Definibilidade

O próximo ponto a ser considerado, o qual todavia ainda se coaduna com o tópico anterior, se refere à questão da definibilidade de um elemento da escala da estrutura. Em da Costa e Rodrigues (DA COSTA e RODRIGUES, 2007), foi definido o conceito de definibilidade (em sentido extenso) de um elemento da escala $\varepsilon(D)$ associada a uma estrutura clássica $\mathfrak{U}$. Segundo os autores (seguindo todavia as ideias apresentadas em Tarski (TARSKI, 1983, cap. 6 e 10)), dado um objeto a da escala $\varepsilon(D)$, este pode ser definido em sentido extenso por meio de uma *sequência* b_λ de elementos de $\varepsilon(D)$. De um modo formal, dizemos então que uma relação r de tipo $a = \langle a_0, a_1, ..., a_{n-1} \rangle$ da escala $\varepsilon(D)$ é definível em $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$ se existir uma fórmula $F(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ da linguagem L (com imagem r_ι), as quais as únicas variáveis livres são $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ de tipos $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, respectivamente, tal que na linguagem L (com imagem $(r_\iota \cup r)$) a fórmula

$$\forall x_0 \forall x_1 ... \forall x_{n-1} (r x_0 x_1 ... x_{n-1}) \leftrightarrow F(x_0, x_1, ..., x_{n-1}))$$

é verdadeira em $\varepsilon(D)$. Em da Costa e Bueno (DA COSTA e BUENO, 2011) é dada uma definição mais intuitiva deste fato, mas que no fim expressa o mesmo sentido da definição de da Costa e Rodrigues. Desse outro trabalho se extrai que

> um objeto a da escala $\varepsilon(D)$ associada a $\mathfrak{U}$ é definível em sentido extenso nesta estrutura se, com a ajuda da sequência b_λ, existe uma fórmula $\varphi(x; b_\lambda)$ da linguagem de $L(R \cup \hat{b}_\lambda)$ tal que
>
> $$\mathfrak{U} \models \forall x (x = a \leftrightarrow \varphi(x; b_\lambda)),$$
>
> onde $\varphi(x; b_\lambda)$ contém x como sua única variável livre, e $\hat{b}_\lambda$ é a imagem da sequência b_λ.

Nestas definições se vê propriamente o papel da semântica na elaboração do conceito de definibilidade e da importância, para tal definição, da noção usual (tarskiana) de modelo de um conjunto de sentenças e/ou de modelo de uma sentença. Não obstante, para nossa discussão, o que importa aqui ressaltar é o relevante papel desempenhado pelas *sequências* de elementos do domínio da estrutura. Como mostrado, para que um elemento da estrutura seja definível, é necessário primeiramente que haja uma *sequência ordenada* de elementos da estrutura (isto é o que expressa a sequência $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ da definição de da Costa e Rodrigues). Outrossim, dada a identidade dos elementos da sequência (pois, como 'objetos' clássicos, estes respeitam os princípios da identidade), esta sequência é única no sentido da formulação semântica clássica antes discutida, ou seja, caso haja duas sequências com os mesmos elementos na mesma ordem, estas sequências são iguais e definem o mesmo elemento da escala.

Todavia, para o caso dos objetos representados pelos m-átomos da teoria de quase-conjuntos, pela inexistência da identidade não conseguimos garantir a unicidade (no sentido da identidade unívoca) de sequências b_λ dos mesmos. Com efeito, como vimos, se tivermos dois objetos indistinguíveis x e y em um qset, nunca poderemos saber se temos a sequência $\langle x, y\rangle$ ou a sequência $\langle y, x\rangle$. Sendo assim, podemos declarar que *não conseguimos garantir que uma relação r na teoria dos quase-conjuntos*[17] *seja definível numa quase-estrutura por meio de uma fórmula* $F(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ *já que esta sequência pode não ser feita de modo unívoco*. Da mesma forma apontada anteriormente para o caso da concepção semântica clássica da verdade (na qual o problema da falta de identidade para os objetos acaba também por 'interferir' na questão da satisfatibilidade das relações do domínio e, assim, faz com que não se possa falar de verdade ou satisfatibilidade — *à la* Tarski — para as sequências/relações), a característica acima discutida acaba por minar aqui também a noção clássica de "definibilidade em sentido extenso em uma estrutura", tal como definida nos trabalhos citados, para o caso dos qsets de m-átomos.

Com efeito, o próprio Tarski aponta isso indiretamente, entretanto agora expresso em sentido oposto (TARSKI, 1983, p. 299-300):

> Muitos anos atrás, A. Padoa[18] esboçou um método que nos permite estabelecer, em casos particular, a indefinibilidade de um termo por meio de outros termos. Por este método, com o objetivo de mostrar que um termo '*a*' não pode ser definido por meio dos termos de um conjunto B sobre a base de um conjunto X de sentenças, é suficiente dar duas interpretações para todas as constantes extra-lógicas que ocorrem nas sentenças de X, tal que *(1) em ambas as interpretações, todas as sentenças do conjunto X são satisfeitas, e (2)*

[17] Restrita aqui ao caso dos m-átomos, como dito.

[18] Tarski se refere aos trabalho de A. Padoa, os quais inspiraram seu artigo: "Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre", *C. R. Deuxième Congrèss International des Mathématiciens*, Paris, 1902, pp 249-56; e "Le problème n. 2 de M.David Hilbert", *L'Enseignement Math.*, 1903, p. 85-91. Nosso objetivo é apenas dar uma indicação ao leitor dos trabalhos nos quais Tarski se inspirou (de modo a este texto ficar autocontido) e não discutir estes trabalhos em particular.

> *em ambas as interpretações, a todos os termos do conjunto B é dado o mesmo sentido, mas (3) o sentido do termo 'a' sofre uma mudança.* (grifo meu)

E este exatamente é o caso dos objetos da teoria dos quase conjuntos: pela falta da noção de identidade para tais elementos, não podemos identificar (no sentido de identidade) as constantes do domínio D com os objetos que elas denotam, de modo que nunca poderemos saber se um objeto 'a' permanece sendo o *mesmo* objeto (novamente, no sentido de identidade.[19]) A única coisa que podemos falar, como já aventado, é que temos um domínio de elétrons com uma certa quantidade dos mesmos (como o cientista sabe que são elétrons advém da teoria que usa e de sua prática experimental). Desta forma, consoante com uma interpretação plausível da MQ — e a qual estamos adotando aqui — não podemos *identificar* qual elétron é qual (pois, para tanto, teríamos que ter a noção de identidade) e logo não podemos identificar as nossas constantes com os objetos individuais do domínio (e assim, de certa forma, "o sentido do termo 'a' sofre uma mudança").

Outrossim, logo em seguida (TARSKI, 1983, p. 302), Tarski prova um interessante teorema no qual temos que para uma dada sequência, na notação do autor, $(x,x',y',y'',...,z',z'',...)$,

$$\varphi(x';y',y'',...,z',z'',...) : (\exists z',z'',...) \wedge \varphi(x,y',y'',...,z',z'',...) \rightarrow x = x',$$

o que, intuitivamente, diz exatamente que duas sequências iguais, sob a mesma fórmula, definem o mesmo objeto. Isto, como vimos, não é verdadeiro para os quase conjuntos, já que pelos motivos já aventados duas sequências 'iguais' não necessariamente definem o mesmo objeto único (e nunca saberemos se este é ou não o caso). É neste sentido que não conseguimos garantir a unicidade da sequência como denotando tal e tal elemento pois para tanto, como dito, necessitamos da identidade para os objetos da ordenação. Com efeito, no caso clássico, temos que (*ibid.)*

$$\varphi(a,b',b'',...;c',c'',...) \rightarrow \forall x(x = a) \leftrightarrow (\exists z',z'',...) \wedge \varphi(x;b',b'',...,z',z'',...),$$

e que para que um termo 'a' possa ser definível por meio dos termos do conjunto B sobre as bases do conjunto X de sentenças é necessário e suficiente que a fórmula (teorema 2, p. 303, *ibid.*)

$$\begin{aligned}(x',x'',y',y'',...,z',z'',...,t',t'',...) : \varphi(x';y',y'',...,z',z'',...) \wedge \\ \wedge\, (x'';y',y'',...,t',t'',...) \rightarrow x' = x'',\end{aligned}$$

[19]Lembramos que para os m-átomos, como dito no capítulo anterior, não podemos dar definições extensionais apontando para um deles e dizendo "este é o João!".

seja provada, o que não pode ser afirmado ou provado para o caso de uma lógica não-reflexiva. Neste sentido, vale a pena citar por fim o teorema 3 da obra de Tarski (p. 304), que diz que para que um termo '*a*' **não possa** ser definível por meio dos termos de um conjunto B sobre as bases de um conjunto X de sentenças, é necessário e suficiente que a fórmula

$$(\exists x', x'', y', y'', ..., z', z'', ..., t', t'', ...) \wedge \varphi(x'; y', y'', ..., z', z'', ...) \wedge \\ \wedge (x''; y', y'', ..., t', t'', ...) \wedge x' \neq x''$$

seja consistente. Intuitivamente, este teorema diz que se duas sequências iguais podem definir dois objetos diferentes (entendido como não sendo o mesmo), tais termos não podem ser definíveis com base em tais sequências. Como já pontuamos, tal concurso pode muito bem ocorrer na lógica que embasa $\mathfrak{Q}$, de modo que assim também se prova que os *m*-átomos não podem realmente ser definíveis por meio de sequências dos mesmos. Neste sentido, talvez apenas metamatematicamente estaríamos em condição de dizer qual é o objeto que está sendo definível.[20]

Não obstante, o que poderia ser aventado aqui é uma noção de '*quase-definibilidade*', que pode ser definida na teoria $\mathfrak{Q}$ em termos como esses:

Definição: *Seja uma quase-estrutura $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$, onde D é um qset puro (não-vazio) de elementos indistinguíveis e r_ι uma sequência de quase-relações. Dizemos que uma quase-relação r, de tipo $a = (a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ (lembramos que os subscritos não indicam ordenação, mas apenas a aridade da relação) da escala $\varepsilon(D)$, é* ***quase-definível*** *em $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$, se existir uma fórmula com variáveis livres $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, de tipos $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, respectivamente, tal que na linguagem da teoria a fórmula*

$$\forall x_1, \forall x_2 ... \forall x_{n-1} (r x_1 x_2 ... x_{n-1}) \leftrightarrow F(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

for quase-verdadeira em $\varepsilon(D)$, mesmo que se troque na fórmula a ordem das variáveis (isto é, mesmo que se troque x_1 por qualquer outra variável pertencente à relação, x_2 por qualquer outra variável pertencente à relação, e assim por diante), com a única condição que se mantenha a aridade da relação.

[20] Interessante citar que Tarski, na página 307, mostra uma definição equivalente de definibilidade para um predicado binário '*a*' por meio dos termos de um conjunto B, de modo que $(u, v) : a(u, v) \equiv \phi(u, v, b', b'', ...)$. Claro se vê que aqui também é necessária a noção de sequência ordenada. Desta feita, somos novamente levados à discussão acima estabelecida, àquela relacionada à problemática que existe em se fundamentar uma semântica para a teoria dos quase-conjuntos.

A noção da quase-verdade é a presente na definição de Bueno acima (BUENO, 2000), de modo que aqui a utilizamos para definir a noção de quase-definibilidade. Intuitivamente, a ideia primária é então que dado um qset puro de elementos indistinguíveis (com uma quase-cardinalidade n), possamos formar quase-relações sobre esse qset não importando a identidade sobre esses objetos (isto é permitido pela definição de quase-relação). Sendo assim, haja vista que pela falta de identidade não faz sentido numerarmos ou sequenciarmos os elementos, a quase-relação binária $F(\square,\square)$, por exemplo, será *quase-definível* na quase-estrutura $\mathfrak{A}$ se esta quase-relação for quase-verdadeira para qualquer variável que inserirmos nos $\square$. Por exemplo, será verdadeira para $F(x_1,x_2)$, bem como para $F(x_2,x_1)$, ou até mesmo para $F(x_2,x_2)$ (obviamente, se $x_1 \equiv x_2$), desde que sempre se mantenha a aridade da relação.[21] Agora, não temos apenas uma sequência de objetos que satisfaz a relação, mas várias, já que qualquer objeto indistinguível de um outro pode 'ocupar' um lugar na relação.[22]

Agora que já exploramos a questão da semântica — bem como da definibilidade — na teoria de quase-conjuntos, vejamos as consequências da impossibilidade da ordenação dos elementos dos quase-conjuntos também para alguns outros teoremas apresentados nos trabalhos de da Costa e Rodrigues (DA COSTA e RODRIGUES, 2007) e da Costa e Bueno (DA COSTA e BUENO, 2011).

Segundo os autores citados, para abordar as teorias científicas podemos usar, dentre outras, a linguagem da teoria dos tipos ou as linguagens infinitárias. Estas últimas podem ser construídas com os recursos da linguagem de ZFC, tais como as linguagens $L^{\eta}_{\mu\kappa}$, onde μ, κ e η são cardinais tais que $\kappa \leq \mu$ e $1 \leq \mu \leq \omega$, e ω é o primeiro cardinal infinito. Em uma linguagem infinitária, podemos formar conjunções e disjunções de conjuntos de fórmulas com cardinalidade menor que μ e blocos de quantificadores menores que κ. Temos linguagens de primeira ordem quando $\eta = 1$, de segunda ordem quando $\eta = 2$, e assim por diante, até $\eta = \omega$, quando também temos

[21] Veja que se a relação for unária, como por exemplo $F(x_1)$, a definição continua valendo: com efeito, se trocarmos x_1 por "qualquer outra variável pertencente à relação" (como expressa a definição), só podemos trocar x_1 por ela mesma. Aqui se vê a importância da afirmação que os subscritos apenas fornecem a aridade da relação, e não a ordenação dos objetos da relação.

[22] Isso com certeza condiz com a atitude do físico: ele sabe que em um certo átomo existem dois elétrons, por exemplo, não importando 'qual elétron' em particular está no átomo. Com efeito, suponha que esse átomo perde um elétron se tornando um íon. Mais tarde, um elétron é capturado por esse mesmo átomo. Não faz sentido dizer que o elétron que foi capturado é o mesmo que o se tinha antes ou é diferente do que se tinha antes: a única asserção que se pode fazer neste caso é que há (novamente) dois elétrons no núcleo, não importando nem mesmo a sequência em que eles se encontram.

que $\kappa = \mu = \omega$, a qual é uma linguagem de ordem-ω adequada para a teoria simples de tipos (*cf.* (KRAUSE, *et. al.*, 2011)). Seguindo da Costa e Rodrigues (*op. cit.*), quando nossa linguagem for $L^{\omega}_{\omega\kappa}(R)$ com $\kappa = \omega$, podemos ainda assim dizer que uma relação r é estritamente definível em relação a esta linguagem por meio das constantes b_λ (*cf.* (DA COSTA e BUENO, 2011)). Na presente discussão, supomos que nossa linguagem é interpretada em estruturas convenientes de modo que $\kappa = k(D)$. Quando temos κ como sendo um cardinal infinito maior que ω, temos a linguagem $L^{\omega}_{\omega\omega}(R)$, por exemplo, para a qual adicionamos conjunções infinitas e disjunções infinitas de famílias de fórmulas cujo domínio são ordinais estritamente menores que κ. A definibilidade em $L^{\omega}_{\omega\kappa}$ também é chamada de definibilidade em sentido extenso ou determinação.[23]

Não obstante, para a teoria de quase-conjuntos, continuando o que foi acima demonstrado, um conceito clássico que não fará sentido é o de *"definibilidade em sentido extenso sobre as bases de um conjunto* Γ *de sentenças e em termos de uma sequência finita de constantes (ou conjunto de constantes)"* (DA COSTA e BUENO, 2011).[24] Isto porque para que tal definição tome corpo, o conjunto de sentenças Γ é definido classicamente como sendo um conjunto $\Gamma = (r, b_\lambda, c_0, c_1, ..., c_{n-1})$ na qual as únicas constantes são r, e os termos da *sequência* b_λ são os termos da *sequência* finita $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$. Como visto, no caso dos quase-conjuntos, tal definição não faz sentido pois não podemos formar sequências $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ de elementos de modo que esta se distingua de qualquer outra que dela difira por uma permutação dos seus elementos. Sob essas condições, desta forma também não podemos afirmar que uma "constante r, [na teoria de quase-conjuntos,] pode ser definível em sentido extenso sobre as bases de um conjunto Γ por meio das constantes b_λ" *(ibid.)*, já que para tanto necessitamos que exista *uma* fórmula $\psi(x; b_\lambda)$, tendo x como suas únicas variáveis livres e contendo como constantes somente as constantes da sequência b_λ, tal que $\Gamma \models \forall x(x = r \leftrightarrow \psi(x; b_\lambda))$, coisa ambígua em $\mathfrak{Q}$ como ressaltamos.[25] Como visto, esta problemática basicamente é a mesma apontada acima para o caso de definibilidade em sentido extenso em uma estrutura (caso presente em (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)).

O que importa é que com isso se mostra a impossibilidade de se provar — para o caso dos quase-conjuntos — um segundo teorema clássico (teorema 1.1 (DA COSTA e BUENO, 2011)), que reza que *"uma constante r é defi-*

[23]Já comentamos que existe um teorema que demonstra que as linguagens de ordem superior podem ser convenientemente interpretadas em linguagens de primeira ordem.

[24]Veja que anteriormente discutimos a impossibilidade da definibilidade em sentido extenso de *um objeto a da escala* de $\varepsilon(D)$, enquanto que agora discutimos a questão da definibilidade em sentido extenso *de uma constante sobre as bases de um conjunto* Γ.

[25]Além disso, veja o uso da igualdade em "$x = r$".

nível em sentido extenso sobre as bases de Γ *por meio das constantes* b_λ *se, e somente se, em todo modelo de* Γ*, o objeto denotado por r é definível em sentido extenso em termos da sequência* b_λ *dos elementos do modelo"*. Não adentraremos mais a essa discussão pois já temos os elementos necessários para a análise da questão da rigidificação de estruturas que se dará futuramente, todavia apenas vale ressaltar que na prova deste teorema acima se faz necessário assumir que se r é definível em sentido extenso em todo modelo $\mathfrak{U}$ de Γ por meio de b_λ, *então existe em* $\mathfrak{U}$ *um e somente um objeto denotado por r*, o que significa que temos $\mathfrak{U} \models \exists! x \widetilde{\Gamma}(x; b_\lambda, c_0, c_1, ..., c_{n-1})$ (onde $\widetilde{\Gamma}$ é a conjunção das fórmulas de Γ na qual r é trocado pela nova variável x em cada fórmula). Basicamente, tal resultado já está velado sob os teoremas de Tarski antes enunciados, e logo se vê, novamente, que neste caso clássico pode-se dizer que está até se *assumindo que a ordenação de uma sequência de uma relação proporciona até mesmo um 'tipo de identidade' ao objeto*, haja vista que cada relação ordenada possível está se referindo apenas a um tipo de constante/objeto, definindo-os assim de modo único! Mas, como vimos, no caso da teoria $\mathfrak{Q}$ isso não é passível de ser afirmado: com efeito, as relações em um qset puro não permitem que se determine uma identidade ao objeto (no sentido de apenas ele estar na relação), pois qualquer outro objeto dele indiscernível no domínio pode 'fazer o trabalho'. Com efeito, como nos referimos repetidamente acima, aqui uma relação do tipo $F(x_1, x_2)$ tem que ter o mesmo valor semântico de uma relação do tipo $F(x_2, x_1)$, ou de $F(x_1, x_1)$, ou na verdade de $F(x, x)$, pois os subscritos dos x's não têm significado dado a falta de identidade para os objetos (assumindo-se, é claro, que $x_1 \equiv x_2$).

Mais perene ainda fica esse caso quando analisamos o teorema 1.2 (DA COSTA e BUENO, 2011) que diz que sobre as condições clássicas acima, tendo-se u e v duas novas constantes adicionadas à nossa linguagem, para que r seja definível em sentido extenso sobre as bases de Γ por meio de b_λ é necessário e suficiente que

$$\exists x_0 \exists x_1 ... \exists x_{n-1} \widetilde{\Gamma}(u; b_\lambda, x_0, x_1, ..., x_{n-1}) \wedge \\ \exists x_0 \exists x_1 ... \exists x_{n-1} \widetilde{\Gamma}(v; b_\lambda, x_0, x_1, ..., x_{n-1}) \models u = v,$$

(onde $\widetilde{\Gamma}$ é tomado como acima), resultado este também consoante com os teoremas de Tarski antes expressos. Neste caso, como já afirmamos, dada a ausência da noção de igualdade para m-átomos, a conclusão semântica é impraticável. Além disso, da noção de indistinguibilidade presente nesta teoria, não podemos deduzir que duas novas constantes u e v sejam 'iguais' (no sentido de identidade) apenas por respeitarem as mesmas relações. Desta forma, esse teorema também não é válido para a teoria $\mathfrak{Q}$.

6.2.3 Elementos exprimíveis

Estamos novamente em ZF e, como antes, denotamos por $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$ uma estrutura, por $\varepsilon(D)$ sua escala, por s um elemento de $\varepsilon(D)$ e por $l_\mu(\mu < k_D)$ uma sequência de objetos de $\varepsilon(D)$. Sobre estas condições definimos, por indução, a relação "s é exprimível em l_μ na estrutura clássica $\mathfrak{U}$" através das seguintes cláusulas (DA COSTA e RODRIGUES, 2007):

1. s é definível em sentido estrito na estrutura $\mathfrak{U}$ para os quais adicionamos os termos de l_μ como novas relações primitivas;

2. se s não é um indivíduo, então s é exprimível em l_μ na estrutura $\mathfrak{U}$ quando todo elemento de s é expremível em l_μ em $\mathfrak{U}$; e

3. se s é exprimível pela sequência b_α de elementos de $\varepsilon(D)$ da estrutura $\mathfrak{U}$, e todo elemento de b_α é exprimível em l_μ na estrutura $\mathfrak{U}$, então s é exprimível em l_μ na estrutura $\mathfrak{U}$.

De forma resumida, para ZF, intuitivamente pode então ser dito que um elemento s de $\varepsilon(D)$ é exprimível no conjunto S de elementos de $\varepsilon(D)$ na estrutura $\mathfrak{U}$ se s é exprimível por uma sequência b_α cuja imagem é S em $\mathfrak{U}$. Não obstante, o problema aqui é que se estivermos trabalhando com estruturas quase-conjuntistas em que o domínio é composto por m-átomos indistinguíveis do mesmo tipo, novamente uma sequência l_μ de objetos de $\varepsilon(D)$ não irá conseguir definir univocamente a relação s como já comentado. Sendo assim, neste caso, não conseguiremos definir — como acima — que uma relação s seja exprimível em l_μ em uma quase-estrutura $\mathfrak{U}$: de certo modo, as cláusulas supra citadas são todas dependentes da primeira cláusula, a saber, na qual a sequência s se torna definível em sentido estrito na estrutura $\mathfrak{U}$ para a qual adicionamos os termos de l_μ *como novas relações primitivas* (definição esta que já foi mostrada inoperante para o caso dos qsets). Com efeito, como vimos, o fato de adicionarmos novas relações primitivas numa quase-estrutura não irá conseguir definir a sequência s de um modo unívoco exatamente por causa da indistinguibilidade dos elementos da relação e, assim, não conseguimos definir propriamente uma relação específica para um objeto específico (de modo que a cláusula 1 acima não pode assim se realizar). Outrossim, caso isso acontecesse, a noção de identidade poderia ser preterida frente à noção de ordenação e uma poderia ser 'substituída' pela outra, mas já vimos que com efeito esta última também não é erigível na teoria de quase-conjuntos.

Não obstante, poderíamos pensar que do mesmo modo como acima edificamos uma noção de quase-definibilidade, talvez também pudéssemos aqui conceber uma possível noção de *'quase-expressabilidade'*, a qual poderia ser erigida do seguinte modo. Do modo já definido, apenas para diferenciar passamos agora a denotar por $\mathfrak{P} = \langle D, r_\iota \rangle$ uma quase-estrutura, sendo D um qset puro de elementos indistinguíveis, $\varepsilon(D)$ sua escala, s um elemento de $\varepsilon(D)$ e l_μ uma sequência (não ordenada) de objetos de $\varepsilon(D)$. Dizemos que a relação "*s* é *quase-exprimível* em l_μ na quase-estrutura $\mathfrak{P}$" se:[26]

1. s é quase-definível em sentido estrito na estrutura $\mathfrak{P}$ para a qual adicionamos os termos de l_μ como novas quase-relações primitivas e na qual, dado uma aridade n para a quase-relação s, tais novas relações introduzidas mantêm a aridade da relação s.

Todavia, de pronto já se percebe que *tal definição não tem nenhuma eficácia*. Com efeito, o fato de adicionarmos os termos de l_μ como novas quase-relações primitivas não faz diferença pelo motivo acima aventado: com a ausência da noção de identidade para os objetos da sequência, nada nos prova que a introdução de novas quase-relações primitivas nos leve a definir (ou expressar) este ou aquele objeto em particular do domínio! Como conclusão, pode-se afirmar que uma possível noção de 'quase-expressabilidade', mesmo adaptada, não pode ser construída (ou nao surtiria efeito) na teoria dos quase-conjuntos. O que importa disso é que a partir de tais resultados conseguimos concluir que na teoria de quase-conjuntos não se pode provar o seguinte teorema de da Costa e Rodrigues ((DA COSTA e RODRIGUES, 2007), teorema 3.1): "em $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$, o objeto $s \in \varepsilon(D)$ é definível em sentido extenso em $\mathfrak{U}$ com a ajuda de uma sequência l_μ de elementos de $\varepsilon(D)$ see s é exprimível em $\mathfrak{U}$ com respeito a l_μ".[27]

Além disso, uma última característica que advém das noções de definibilidade e de expressabilidade para a teoria de conjuntos clássica é a que diz que quando s é definível em sentido extenso em termos de uma sequência l_λ, então existe um operador ϕ que expressa s em função de l_λ, de forma que assim é possível escrever $s = \phi(l_\lambda)$. Se l'_λ é outra sequência, de modo que para toda λ os tipos de l_λ e l'_λ são os mesmos, então ϕ também relaciona s' a l'_λ, onde $s' = \phi(l'_\lambda)$ (DA COSTA e RODRIGUES, 2007). Novamente, para $\mathfrak{Q}$, tal afirmação não é possível de ser enunciada. Com efeito, a noção de quase-definibilidade acima proposta não permite que haja nesta teoria um operador ϕ que expressa a quase-relação s em função da sequência λ, pois como já afirmamos a sequência não é unívoca. Sendo assim, um operador ϕ do modo acima definido não levaria necessariamente a sequência numa quase-relação de um objeto específico, mas sim em qualquer deles que estivesse em uma quase-relação de mesma aridade. Além disso, se tivermos uma

[26]Adaptaremos e tomaremos como caso de estudo apenas a cláusula clássica 1 acima.

[27]Lembramos que todos esses conceitos (e a ausência deles para o caso da teoria $\mathfrak{Q}$) serão necessários à prova de que uma quase-estrutura não pode ser rigidificada via relações de primeira ordem, tal como acontece no caso clássico.

outra sequência l'_λ, tal que para todo λ os tipos de l_λ e l'_λ são os mesmos, em $\mathfrak{Q}$ não necessariamente deveria ϕ relacionar s' com l'_λ, pois novamente não temos necessariamente o mesmo objeto na quase-relação. Com efeito, tal como vimos no capítulo anterior, isso é o que está expresso na definição de quase-função para os quase-conjuntos, a qual intuitivamente reza que se x e y são qsets, dado uma quase-relação R, se um par $\langle u, v\rangle$ pertencer a f e um par $\langle u', v'\rangle$ também pertencer a f, se u for indistinguível de u', a única coisa que ocorre é que v também será indistinguível de v', sem assim 'indicar' a qual v' em particular a quase-função deve levar (já que, com efeito, como indistinguíveis, qualquer v' pode ser 'utilizado').

6.2.4 Similaridade

Faremos aqui uma discussão informal e intuitiva sobre este tópico. Desta forma, sejam duas estruturas $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota\rangle$ e $\mathfrak{U}' = \left\langle D', r'_\lambda \right\rangle$. No caso clássico, dizemos que tais estruturas são *similares* se os ordinais das sequências r_ι e r'_ι são os mesmos e os tipos dos elementos correspondentes coincidem (DA COSTA e RODRIGUES, 2007). Percebe-se de pronto que para o caso dos quase-conjuntos não podemos assumir tal definição. Com efeito, dado que não temos a noção de sequência para os elementos do domínio da estrutura, não conseguimos dizer, como visto, que os ordinais das duas sequências são os mesmos (apesar de ser possível serem do mesmo tipo).

Além disso, no caso clássico, se h é uma bijeção de D em D', então h, é claro, pode ser estendida canonicamente para $\varepsilon(D)$ e $\varepsilon(D')$. Obtemos deste modo uma nova função $\overline{h}$ de $\varepsilon(D)$ sobre $\varepsilon(D')$, a qual é também uma bijeção. Normalmente, se identifica $\overline{h}$ com o próprio h. O problema, agora, é que nos quase-conjuntos *não se pode fazer bijeções de modo usual (ou seja, classicamente) entre os domínios de duas estruturas quase-conjuntistas*. Vejamos esse ponto com mais detalhes, pois o mesmo será importante para nós durante o resto deste texto.

Primeiramente, vale lembrar as definições usuais de função. Uma função é dita injetiva se quaisquer dois elementos distintos do domínio da função (chamemos de conjunto x) têm representantes distintos no contradomínio (ou conjunto imagem, y). Equivalentemente, pode ser dito que uma função injetiva existe se sempre que tivermos $f(a_1) = f(a_2)$, temos que $a_1 = a_2$. Uma sobrejeção, por sua vez, é uma função em que todo elemento do 'conjunto chegada' (y) está associado a algum elemento do 'conjunto de partida' (x), de modo a não sobrar nenhum elemento no conjunto de chegada. Em símbolos, uma função $f : x \mapsto y$ é uma sobrejeção se, e somente se, a imagem de f coincide com y. Por fim, uma bijeção é uma função total, *i. e.*, uma função injetiva e sobrejetiva de um domínio x em um contradomínio y admitindo, desta forma, função inversa. Como se percebe, em todas as definições acima é necessário termos a noção de *identidade* para os objetos do domínio e do contra-domínio. Com efeito, para se ter uma função bijetiva, temos que cada objeto do domínio seja 'ligado' a apenas um objeto do conjunto imagem, de modo que precisamos ter assim certeza da identidade desses objetos dos conjuntos em apreço. Isso também é retratado formalmente, já que pode-se definir uma função bijetiva como sendo uma função tal que se temos que $\langle x,y\rangle \in f$ e $\langle x,z\rangle \in f$, isto implica que $y = z$. Desta forma, para qualquer elemento x do domínio da função f, existe um único y tal que $\langle x,y\rangle \in f$ (*cf.* (MENDELSON, 1979, p. 7)).

O caso é que na teoria de quase-conjuntos, pela falta da noção de identidade, não se pode garantir que uma função bijetora do domínio x no contradomínio y 'leve' realmente cada elemento de x em um determinado elemento de y, e não em qualquer outro elemento y dele indiscernível. Não obstante, no caso clássico, como visto, para admitir função inversa, todo elemento da inversa y tem que estar associado a apenas um elemento de x. Mas se tratando de quase-conjuntos do modo que estamos trabalhando, em um grupo de x's indistinguíveis, para qual deles a inversa levaria? Haja vista a carência da noção de identidade para os objetos que estão na função, não há resposta a tal questão. Tudo o que se pode propor neste caso é uma noção quase-bijeção, edificada através das noções de quase-injeção de de quase-sobrejeção (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 284ss.). Vejamos como isto pode ser definido.

Uma função f é uma quase-injeção (q-injeção) se, e somente se, f é uma q-função de x em y do modo definido no capítulo anterior, e além disso satisfaz a condição adicional de que

$$\forall u \forall u' \forall v \forall v' (\langle u,v\rangle \in f \wedge \langle u',v'\rangle \in f \wedge v \equiv v' \rightarrow \\ u \equiv v') \wedge qc(Dom(f)) \leq_E qc(Rang(f)).$$

Onde $Dom(f)$ e $Rang(f)$ são o domínio e a imagem da q-função f com seu significado usual. Uma q-sobrejeção, por sua vez, é uma q-função f de x em y tal que

$$\forall v(v \in y \rightarrow \exists u(u \in x \wedge \langle u,v\rangle \in f)) \wedge qc(Dom(f)) \geq_E qc(Rang(f)).$$

Consoante com o caso clássico, uma q-função f que é tanto uma q-injeção quanto uma q-sobrejeção é dita ser uma q-bijeção. Neste caso, $qc(Dom(f)) =_E qc(Rang(f))$. Sendo assim, o que importa ressaltar é que uma *q-bijeção relaciona coleções de indistinguíveis a coleções de indistinguíveis, e não objeto a objeto* (devido à carência da noção de identidade).

Fácil se vê que devido a isso não é possível obtermos uma bijeção estrito senso entre os domínios D e D' se as duas estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ acima forem quase-estruturas. Isto nos será importante para a discussão apresentada a seguir.

6.2.5 Isomorfismo, automorfismos e rigidez

A partir da constatação de que não se pode definir de modo usual uma bijeção entre os domínios de duas quase-estruturas da teoria $\mathfrak{Q}$ se eles contiverem m-átomos, um outro ponto a ser examinado é o que se refere à questão de isomorfismos e automorfismos entre tais estruturas. No caso clássico, uma função bijetora h entre os domínios de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ é um isomorfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}'$ se, para todas as relações r_λ (supostamente de aridade $n, 0 < n < \omega$), temos que

$$r_\lambda(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) \leftrightarrow r'_\lambda(h(x_0), h(x_1), ..., h(x_{n-1})),$$

onde r'_λ é a relação de $\mathfrak{A}'$ que corresponde à relação r_λ de $\mathfrak{A}$ para todos $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ de tipos apropriados. Grosso modo, um isomorfismo é, então, uma função bijetora h de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}'$, de modo que os objetos das duas estruturas fiquem assim 'estruturados da mesma forma' em suas operações (ou, dito de outra forma, de modo que se assegure que a estrutura é preservada).[28] Em particular, no caso de $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, um isomorfismo é chamado de um *automorfismo*. Os automorfismos de uma estrutura formam o chamado "Grupo de Galois" da estrutura: quando o grupo de Galois de uma estrutura é composta *somente pela função identidade* (caso em que as condições da função h acima são trivialmente satisfeitas), a estrutura é dita ser ***rígida*** (ou indeformável), como já mencionamos no capítulo 2.[29]

Não obstante, no caso de estruturas quase-conjuntistas, não podemos prover um isomorfismo entre elas pelo simples fato de que dada a ausência da noção de identidade para os m-átomos — e haja vista que a definição de quase-bijeção não é feita de modo usual nessa teoria, como vimos —, não podemos provar que a função h acima esteja 'preservando a estruturação', por assim dizer, de duas quase-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$. Dito de outra forma, pela falta da noção de identidade na teoria, não podemos garantir que os elementos de

[28] Veja que para tanto já devemos saber de antemão que os objetos das duas estruturas estão estruturados da mesma forma, isto é, não temos nenhuma razão em pensar que tal h existe *de antemão* para todas as estruturas. Com efeito, o primeiro ponto a ser destacado é que para tal h existir, os domínios das estruturas em apreço devem ter a mesma cardinalidade (neste sentido, veja (KRAUSE, 2005)).

[29] Por exemplo, as estruturas $\langle \mathbb{C}, +, \times \rangle$, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, < \rangle$ e $\langle \mathbb{R}, \times, < \rangle$ não são rígidas (*cf.* (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)).

uma quase-estrutura $\mathfrak{U}$ estejam realmente relacionados da mesma forma que os elementos de uma outra quase-estrutura $\mathfrak{U}'$. Com efeito, podemos ter em $\mathfrak{U}$ uma relação xRy, com $x \equiv y$, por exemplo, mas devido à ausência de identidade não podemos comprovar que em uma estrutura $\mathfrak{U}'$ um x' *em particular* também esteja na relação R com um y' *em particular*, estruturando assim $\mathfrak{U}'$ da mesma forma que $\mathfrak{U}$.[30] Igualmente para a questão dos automorfismos, caso em que necessitamos que as duas quase-estruturas $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U}'$ sejam iguais (haja vista que neste caso a função h leva $\mathfrak{U}$ 'nela mesma'), esta igualdade — no caso de domínios compostos de m-átomos — também poderá ser estabelecida somente na metateoria e não a partir da teoria de quase-conjuntos em apreço, o que no fim diverge da definição formal de automorfismo dada acima. Além disso, e mais importante, na teoria $\mathfrak{Q}$ não se pode construir estruturas rígidas quando seus domínios são compostos por m-átomos pelo simples fato de que como a identidade não se aplica a eles, *não haverá assim sentido em se tentar caracterizar a função identidade necessária à rigidez*. De um modo mais formal, em uma estrutura rígida, como vimos, o único objeto invariante de x por um automorfismo de $\mathfrak{U} \mapsto \mathfrak{U}$ *tem que ser o próprio* x. Mas em $\mathfrak{Q}$ isso não é assim: pela definição de q-função q-bijetora, *qualquer* indiscernível de x pode desempenhar o papel de x, de modo que assim não pode haver rigidificação em sentido usual exatamente por essa falta de 'unicidade' e de identidade para x. Com efeito, poderíamos até mesmo contar com diversas q-funções bijetoras 'distintas' conduzindo 'um certo' indiscernível ao 'mesmo' indiscernível, mas isso faria com que se perdesse a unicidade requerida pela definição clássica de estrutura rígida. Conclui-se assim que *não se tem a possibilidade de se ter uma noção* ***clássica*** *de rigidez para as estruturas quase-conjuntistas*, pois não se pode provar que existe um *único* automorfismo na estrutura e que este seja a função identidade (conceito esse que, tal como requer a definição, garantiria assim a mesma estruturação pelos *mesmos objetos* nas duas quase-estruturas).[31] Todavia, tal característica mostra que os m-átomos de $\mathfrak{Q}$ podem ser realmente tomados como não-indivíduos do modo discutido nos capítulos anteriores. Como podemos formar coleções (qsets) de m-átomos indiscerníveis com cardinais maiores do que 1, eles são, de certa forma, *objetos*, podendo ser considerados isoladamente (por exemplo, quando formamos um subqset de uma desses qsets com q-cardinal 1), mas que não podem ser

[30] Vale citar que também pode existir no caso clássico um isomorfismo de ordem: quando se faz necessário que as sequências r_λ e r'_λ, das estruturas equivalentes $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U}'$, tenham os mesmos *ordinais* λ e λ' nas sequências. Como já enfatizado repetidamente, isso é algo que não se consegue quando tratamos de qsets de objetos indistinguíveis do mesmo tipo — que é o caso em apreço —, e logo um isomorfismo de ordem também está descartado de início.

[31] No próximo capítulo discutiremos mais detalhadamente tal característica das estruturas quase-conjuntistas e mostraremos como podemos erigir uma noção de quase-automorfismo, bem como de quase-rigidez, que não leve em conta a identidade.

discernidos uns dos outros em certas situações, como já comentamos. Em outras palavras, eles são *legítimos objetos indiscerníveis* e podem servir para representar matematicamente objetos quânticos que tenham essas características, sejam eles ‘partículas’ ou ‘campos’.[32]

Não obstante, o problema é que o teorema de da Costa e Rodrigues (*op. cit.*) mostra que toda estrutura clássica não-rígida pode ser transformada em uma rígida pelo *“finito acréscimo de relações de primeira ordem”* (isto é, o teorema em si não fala diretamente em “identidade”). Logo, a possibilidade de rigidificação de uma quase-estrutura ainda não está descartada por completo: mesmo não tendo uma ‘função identidade’, e não sendo possível definir automorfismos em estruturas quase-conjuntistas, será que “o acréscimo de novas relações de primeira ordem” também não poderiam de alguma forma rigidificar a nossa quase-estrutura, consoante assim ao que ocorre classicamente?[33] Dado que ainda não analisamos por completo a prova de da Costa e Rodrigues, ainda não podemos garantir tal impossibilidade na teoria $\mathfrak{Q}$ e, por isso, por enquanto temos apenas ‘metade’ do problema resolvido. Desta forma, continuemos a examinar alguns outros teoremas dos artigos que estamos focando aqui.

6.2.6 Equivalência, bases lógicas e irredutibilidade

Outra característica que pode ser analisada (ainda que informalmente) com relação às estruturas clássicas $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$ e $\mathfrak{U}' = \left\langle D, r'_\lambda \right\rangle$ acima, é que elas são definidas como equivalentes quando as relações primitivas de cada uma delas podem ser definidas em sentido extenso em termos das relações primitivas da outra. Neste caso, escrevemos que $e \equiv e'$, de outra forma, $e \not\equiv e'$ (não confundir com o ‘$\equiv$’ da indistinguibilidade). Por exemplo, sendo $\mathbb{N}$

---

[32] Isso é interessante porque poderíamos tentar reintroduzir no formalismo usual da mecânica quântica algo que a mesma deixa de lado, a saber, os objetos do discurso. Recordemos que o formalismo padrão, via espaços de Hilbert, fala dos *estados* dos sistemas físicos e dos objetos somente de forma indireta. Seria interessante tentar elaborar um formalismo que contivesse a noção de partícula, da mesma forma que na formulação de McKinsey, Sugar e Suppes (apresentada por Suppes em (SUPPES, 1957, cap. 12)) a mecânica clássica de partículas assume a existência de um conjunto P de ‘partículas’. Mas se fizermos isso em MQ, P deveria muito propriamente ser um qset. E mais: de nada adiantaria, filosoficamente falando (ainda que a física não demande isso) trabalhar em ZF, pois a estrutura poderia ser rigidificada (como mostraremos mais à frente) e os objetos do domínio acabariam mostrando a sua verdadeira face de indivíduos, como ressaltamos no capítulo 2. Em $\mathfrak{Q}$, todavia, eles permanecem com sua identidade inexistente. No decorrer desta tese falaremos mais sobre isso.

[33] Dito de outra forma, o que exatamente acontece é que o teorema de rigidificação de estruturas clássicas não faz uso da noção que falta na teoria $\mathfrak{Q}$ (ou seja, da identidade), e assim não podemos ainda enunciar por completo o fato de que as estruturas em $\mathfrak{Q}$ não podem ser rigidificadas.

o conjunto dos números naturais, e os símbolos *suc* (sucessor), $<$, $+$, $\times$ e 0 (zero) com suas interpretações comuns, tem-se que (*cf.* (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)):

$$\langle \mathbb{N}, suc \rangle \equiv \langle \mathbb{N}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \equiv \langle \mathbb{N}, 0, < \rangle$$

e que

$$\langle \mathbb{N}, \times \rangle \not\equiv \langle \mathbb{N}, suc \rangle$$ [34].

É possível provar que duas estruturas equivalentes têm grupos de Galois isomorfos (teorema 4.1, (DA COSTA e RODRIGUES, 2007))

Não obstante, no caso das nossas quase-estruturas, não se pode provar que duas estruturas são equivalentes (no sentido acima) pelo simples motivo de que não se pode provar que as relações primitivas de uma delas são definíveis em sentido extenso em termos das relações primitivas da outra, tal como já discutimos. Além disso, dado que neste caso não se pode até mesmo mostrar que existe um automorfismo entre duas estruturas similares, não se pode estabelecer, no caso dos quase-conjuntos, o teorema acima válido no caso clássico. Outrossim, no caso clássico, também é possível provar que dadas duas estruturas isomorfas $\langle D, r_\iota \rangle$ e $\langle D, r'_\iota \rangle$, este isomorfismo implica que as mesmas sejam equivalentes, *i. e.*, que $\langle D, r_\iota \rangle \equiv \langle D, r'_\iota \rangle$ (teorema 4.4, (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)). Não obstante, tal resultado também não é passível de prova na teoria dos quase-conjuntos devido à diferente noção de bijeção existente nesta teoria, de modo que não se pode exibir um isomorfismo e, assim, uma equivalência entre duas estruturas quase-conjuntistas.

Seguindo o artigo de da Costa e Rodrigues, dizemos que um subconjunto K do domínio de $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$ é logicamente fechado ou, para simplificar, fechado, se qualquer elemento de D que é exprimível em termos dos membros de K, pertence a K. Se $X \subset D$, então $\widetilde{X}$ denota o fecho lógico de X, isto é, a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm X. Mas dado que no nosso caso todos os elementos do nosso quase-conjunto D — e, por conseguinte, do conjunto X — são do mesmo tipo, a intersecção de todos os conjuntos fechados que contém X, pela falta de identidade dos elementos do domínio, se torna o próprio D. Desta forma, não se pode afirmar na teoria de quase-conjuntos — como é feito no caso clássico (DA COSTA e RODRIGUES, 2007) — que se tivermos $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$ e $\mathfrak{U}' = \langle D, r'_\theta \rangle$, de modo que as extensões de seus operadores fechados de $\varepsilon(D)$ coincidam, então temos que $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{U}'$. Com efeito, temos aqui um elemento bipartite, já que do modo antes

[34] Com efeito, neste caso, a estrutura relacionada por $\times$ não é equivalente à relacionada por *suc* pelo simples fato de que, por exemplo, 2×2 é igual a 4, que é diferente de 3 que é o sucessor de 2.

mostrado também não se pode provar a contrapositiva: de que as estruturas são equivalentes.

Continuando para o caso clássico, em $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$, se temos que $Y \subset X \subset D$, uma base lógica de X com respeito a Y é qualquer subconjunto $K \subset X$, tal que todo elemento de X é exprimível em termos de $K \cup Y$. Quando $Y = \emptyset$, K é chamado de uma base lógica de X. Para abreviar, denotamos X/Y ao invés de "base lógica de X com respeito a Y" (*cf.* (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)). Veja que estamos aqui trabalhando com a noção de expressabilidade: coloquialmente, uma base lógica é um subconjunto de X, de modo que todo elemento desse conjunto X possa ser expresso em termos dessa base lógica. Intuitivamente, então, é o conjunto mínimo pelo qual podemos expressar X. Mas, como já comentamos, no caso dos quase-conjuntos não tem sentido falarmos de "expressabilidade" pois não há sentido em falarmos de uma "definição em sentido estrito" (ou sentido extenso) para as relações sobre o conjunto. Além disso, fica estranho aqui apontar qual é a "menor base lógica de X de modo que todos os elementos de X possam ser expressos em termos dessa base lógica" devido à falta de identidade dos elementos do quase-conjunto e à impossibilidade de ordenação dos mesmos. Sendo assim, é mais fácil definir que, no caso dos quase-conjuntos, a base lógica de X é o próprio X, haja vista que pelos motivos aventados não podemos provar que exista algum subconjunto de tal conjunto X de forma que todos os elementos de X possam ser, de algum modo, expressos por tal subconjunto. Isso fica mais patente na próxima definição dada para o caso clássico (DA COSTA e RODRIGUES, 2007):

> no caso em que $d \in D$ é exprimível em termos de $K \subset D$, existe uma fórmula $\varphi(x; k_\mu)$ de $L^{\omega}_{\omega\kappa}(R \cup K)$ satisfazendo a condição
>
> $$d = \iota x \varphi(x; k_\mu),$$
>
> onde ι é o símbolo para descrição de Russell e k_μ é uma sequência de elementos de K.

Aqui, se vê claramente o 'problema' dessa definição para a teoria dos quase-conjuntos: não se pode ter uma sequência k_μ de objetos do domínio que satisfaça φ pelos simples fato que, como já enfatizamos repetidamente, não é possível fazermos sequências de objetos de qsets puros. Sendo assim, também não podemos obter *uma* (única) fórmula φ que possa descrever somente *uma* sequência. Com efeito, se, por exemplo, fosse o caso de que em uma q-relação *somente um objeto em particular*, mesmo indistinguível, pudesse ocupar um certo 'lugar' da sequência, poderíamos de certo modo dotar esse objeto de identidade *a partir* da relação. Mas como nas relações sobre qsets de objetos indistinguíveis do mesmo tipo qualquer objeto do domínio pode ocupar os 'lugares' da q-relação, esta q-relação na teoria de quase-conjuntos também não pode dar (um tipo de) identidade a este objeto. Além disso, no caso clássico, dada a condição antes especificada, uma consequência trivial é que qualquer automorfismo θ pode ser aplicado em ambos os lados da igualdade e se obter

$$\theta d = \iota x \varphi(x; \theta k_\mu).$$

Como vimos, porém, não é possível obter tal automorfismo se estivermos na teoria dos quase-conjuntos. Pelo mesmo motivos antes expostos, também não podemos afirmar — como ocorre no caso clássico — que a expressão $\iota x \varphi(x; \theta k_\mu)$ caracteriza um operador cujo domínio é o conjunto de todas as sequências θk_μ para todos os θ no grupo de Galois de $\mathfrak{U}$ (DA COSTA e RODRIGUES, 2007).

Assuma $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$ sendo uma estrutura clássica, X um subconjunto de D, e s uma relação de primeira ordem de grau $n, 1 \leq n \leq \omega$. No caso clássico, relações do tipo s são chamadas de irredutíveis em X quando temos que:

1. s é exprimível em $\mathfrak{U}$ em termos de X;

2. se s' é outra relação de primeira ordem n-ádica exprimível em $\mathfrak{U}$ em termos de X, e tal que $s \cap s' \neq \emptyset$, então $s \subset s'$. Em particular, quando $X = \emptyset$, s é dito ser irredutível.

Novamente, para uma quase-estrutura do modo que estamos assumindo, vemos que essa definição não funciona. Com efeito, a primeira cláusula requer que a "relação s seja exprimível em $\mathfrak{U}$ em termos do subconjunto X do domínio": como já aventado várias vezes, não podemos ter a expressabilidade da relação s em qsets devido ao fato de s não poder ser definível em sentido estrito. A segunda cláusula, para a teoria de quase conjuntos, se mostra ainda mais débil: intuitivamente, ela diz que se houver outra relação de primeira ordem s' exprimível em termos dos elementos do conjunto X de modo que a intersecção desta relação s' com a 'primeira' relação s seja diferente do vazio, então s é subconjunto de s'. Mas para quase-conjuntos podemos ter sim uma outra relação s' 'exprimível' (por hipótese) em termos de X, mesmo s não sendo subconjunto de s'. Por exemplo, tome o caso da relação binária $s' = P(x,y)$, e da relação unária $s = P(x)$. No caso clássico, o x presente nas duas relações tem que ser o mesmo e, desta forma, a definição clássica acima realmente funciona. Mas no caso de um qset de elementos indistinguíveis o x presente nas duas relações não necessariamente é o mesmo: ele pode ser dois x's indistinguíveis, apesar de que pela falta da noção de identidade nunca sabermos se este é ou não o caso.

O que importa é que a partir disso não se pode provar na teoria de quase-conjuntos o teorema válido para o caso clássico (teorema 4.11, (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)), que reza que em $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$, o predicado (*i.e.,* o conjunto) de tipo $\langle a \rangle$ "ser um objeto do tipo a definível em sentido extenso em $\mathfrak{U}$" é definível em sentido extenso em $\mathfrak{U}$. Em particular, *na teoria $\mathfrak{Q}$, não se pode provar que em qualquer estrutura quase-conjuntista um objeto do tipo a pertence a uma e apenas uma relação irredutível do tipo* $\langle a \rangle$, o qual também é um teorema para o caso de estruturas clássicas (teorema 4.13, p. 18, *ibid.*). Da mesma forma, não se tem que se $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$, e $d \in D$, então existe um predicado irredutível P tal que d satisfaz P (teorema 4.12, p. 17, *ibid.*), pois, como dito, não se tem a possibilidade de um objeto de tipo a ser definível em sentido extenso em uma estrutura quase-conjuntista composta de m-átomos indistinguíveis. Com efeito, se tais teoremas fossem possíveis na teoria de quase-conjuntos, a afirmação (válida para o caso clássico) de que as relações irredutíveis de tipo $\langle a \rangle$ constituem uma partição dos objetos do tipo a (teorema 4.14, p. 18, *ibid.*) também seria aqui verdadeira, o que não é o caso em $\mathfrak{Q}$ exatamente porque isso não gera tais partições nos qsets. Realmente, na teoria dos quase-conjuntos, só podemos particionar o domínio em classes de objetos indistinguíveis via os axiomas **(Q1)**, **(Q2)** e **(Q3)** da teoria; mas de tais partições não podemos deduzir que os objetos de cada partição sejam o *mesmo* objeto ou um objeto diferente (*i. e.*, a indistinguibilidade não colapsa em identidade, como já afirmado). No mesmo sentido, não se pode provar — como ocorre no caso clássico (teorema 4.15, (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)) — que em todas as estruturas quase-conjuntistas uma relação exprimível é a união do conjunto de relações irredutíveis deste tipo, e vice-versa, e que (teorema 4.16, *ibid.*) duas estruturas equivalentes são tais que seus conjuntos de relações irredutíveis de qualquer tipo coincidem. Apesar disso, o teorema 1.5 de da Costa e Bueno (DA COSTA e BUENO, 2011), que enuncia que dado duas estruturas $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U}'$ elas são isomorfas se, e somente se, suas órbitas correspondentes têm o mesmo cardinal (órbitas são os conjuntos irredutíveis de X), parece ser passível de prova para os qsets. Com efeito, na teoria de quase-conjuntos, se tivermos duas quase-estruturas $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U}'$ e definirmos sobre elas um tipo de 'quase-isomorfismo' (de um modo que mostraremos no próximo capítulo), tais estruturas terão que ter também o mesmo quase-cardinal, apesar de não terem nenhum tipo de ordinal.

Não obstante, outro teorema clássico que não podemos declarar (teorema 6.5, (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)) é o que diz que dado uma sequência r_ι de elementos de um conjunto D e de relações de $\varepsilon(D)$ da estrutura, uma condição necessária e suficiente para que qualquer relação $r \in \varepsilon(D)$ — ou indivíduo $d \in D$ — seja exprimível em termos de r_ι, é que r seja invariante sobre o grupo de Galois de $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$. Com efeito, dada a ausência da noção de identidade para os m-átomos das relações, não podemos provar que r está invariante sobre o grupo de Galois da estrutura. Neste caso, realmente as noções se completam: no caso clássico, para que um objeto seja exprimível em termos da sequência r_ι, ele deve ser invariante sobre o grupo de Galois da estrutura. Na teoria de quase-conjuntos, por sua vez, já vimos que não podemos ter a noção de 'exprimibilidade' definida do mesmo modo como feito para os conjuntos clássicos, e logo não se pode provar que uma relação está invariante sobre o grupo de Galois: temos, assim, exatamente a contrapositiva do teorema clássico aqui exposto.

Além disso, dado uma estrutura clássica $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$, dizemos que dois elementos x e y de D são G-equivalentes (onde G é o grupo de Galois de $\mathfrak{U}$) se existe um $g \in G$, tal que $y = gx$. Esta relação induz uma partição em D, e suas classes de equivalência são as órbitas de $\mathfrak{U}$ (*cf.* (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)). Intuitivamente, esta definição afirma que podemos particionar os elementos do domínio em classes pela(s) relação(ões) g, que é(são) um(os) membro(s) do grupo de Galois da estrutura. Mas como visto não podemos formar um grupo de Galois para uma estrutura quase-conjuntista pelo simples fato de que não podemos ter um automorfismo numa estrutura deste tipo. Desta forma, não é possível provarmos, por exemplo, que toda órbita é um conjunto invariante e todo conjunto invariante é uma união de órbitas (teorema 7.2, *ibid.*), além de que qualquer conjunto irredutível é invariante (teorema 7.4, *ibid.*). Com efeito, lembramos que uma relação s de primeira ordem e de grau n é irredutível em um subconjunto X do domínio D de uma estrutura clássica quando s é exprimível em $\mathfrak{U}$ em termos de X. Como nossa quase-relação não pode ser ordenada, não se pode ter que a relação s seja exprimível em termos de X (pelo menos não de acordo com a definição dada). Sendo assim, não podemos afirmar que um conjunto irredutível é invariante, ou que órbitas e conjuntos irredutíveis são exprimíveis (teorema 7.5, *ibid.*) para o caso de qsets. Legitimamente, as 'falhas' dos teoremas e definições clássicas para o caso da teoria $\mathfrak{Q}$ vêm a tona.

6.2.7 Rigidificação

Acima argumentamos que não podemos ter um automorfismo em uma estrutura quase-conjuntista pelo simples fato de não termos a noção de identidade para os elementos da q-relação, o que não permite assim que o único objeto invariante de x, por exemplo, seja o próprio x, fato que faz com que a definição de estrutura rígida não seja aqui satisfeita.[35]

[35] Além disso, também vimos que a carência de noção de ordem da q-relação tem um papel na 'falha' de algumas definições paralelas para os qsets, em especial, a que se refere à noção de

Não obstante, existe para o caso clássico um teorema mais 'forte' que diz que toda a estrutura não-rígida (em ZFC) pode ser estendida a uma rígida por meio de *finitas adições de relações (predicados) de primeira-ordem.* Tal como enfatizamos, a prova deste teorema, como indicada a seguir, *não leva em conta a noção de identidade*, o que se se torna crucial para nós ***exatamente por não fazer uso do conceito que falta para os*** m***-átomos da teoria*** $\mathfrak{Q}$. Sendo assim, o problema indicado no parágrafo anterior e na seção 5.2.5, a saber, de que a falta da noção de identidade para os m-átomos afeta a definição de estruturas rígidas, pode enfim não comprometer o teorema citado (dito de outra forma, já que tal prova clássica não usa a noção de identidade, talvez ela possa também valer em $\mathfrak{Q}$ e assim rigidificar mesmo estruturas quase-conjuntistas!). Desta forma, se faz necessário analisar efetivamente se tal teorema também não poderia ser válido para as estruturas em $\mathfrak{Q}$ (do modo que estamos delimitando). Se tal alternativa lograr êxito, isto é, se também conseguirmos rigidificar estruturas quase-conjuntistas via relações de primeira ordem, a teoria dos qsets 'cai por terra', tal como discutimos no final do capítulo anterior. No entanto, se tal resultado para as estruturas clássicas — mesmo não fazendo uso da noção da identidade — se mostrar na verdade inoperante para as estruturas quase-conjuntistas (no sentido de que nem mesmo relações de primeira ordem consigam rigidificar a quase-estrutura), logramos então êxito em afirmar que *realmente* não podemos nos comprometer de modo algum com uma possível identidade dos m-átomos. Isto porque, nesse caso, não poderíamos rigidificar estruturas quase-conjuntistas (do modo aqui expresso) de nenhuma forma (isto é, nem fazendo uso da noção da identidade, que não existe *ab initio*, e nem mesmo via relações de primeira ordem, que é o teorema clássico em apreço), e a teoria passaria realmente a ser um alicerce seguro para o trato dos objetos quânticos na acepção que estamos tomando. Analisemos, então, por fim, tal teorema.[36]

Teorema 8.1: [Rigidificação de estruturas em ZFC, (DA COSTA e RODRIGUES, 2007)] *Em qualquer estrutura* $\mathfrak{U} = \langle D, r_\iota \rangle$ [de ZFC], *existe uma base lógica finita de* $D/\emptyset$ *composta por predicados de primeira ordem (conjuntos).*

"isomorfismo de ordem".

[36]É bom alertar que o teorema abaixo não expressa *diretamente* o fato de que todas as estruturas não-rígidas podem ser tornadas rígidas, mas sim que todo elemento do conjunto D da estrutura pode ser definido em sentido extenso e, assim, ser identificado individualmente via relações de primeira ordem. Deste modo, o fato de que toda estrutura clássica pode ser rigidificada está como que nas 'entrelinhas' do teorema. Vale ainda lembrar a discussão erigida no capítulo 2, onde mostramos algumas formas 'básicas' de rigidificar uma estrutura clássica, como por exemplo adicionando os unitários dos elementos do domínio: o teorema em apreço é mais geral, mas tem um princípio semelhante, tal como também enfatizamos no final do capítulo anterior.

Demonstração: *Pelo axioma da escolha, existe uma bijeção entre D e um ordinal λ (o cardinal de D). Mas qualquer ordinal pode ser definido em sentido extenso com a ajuda de um número finito de predicados de primeira-ordem, tais como adição e multiplicação de ordinais. Então todo membro de λ, e como uma consequência de D, pode ser definido em sentido extenso por meio de um número finito de predicados de primeira ordem.* ■

Analisamos agora tal teorema, e sua prova, sob a ótica quase-conjuntista. Primeiramente se percebe que a prova clássica acima requer a noção de um ordinal 'representando' o cardinal do domínio D (e vice-versa, no sentido de que o cardinal do domínio é um particular ordinal, como é usual). Todavia, na teoria $\mathfrak{Q}$, o *quase-cardinal* de um quase-conjunto puro (somente m-átomos) *não 'representa' um ordinal* λ (ou melhor dizendo, o quase-cardinal não 'fornece' um ordinal), mas sim descreve apenas a quantidade de elementos do qset, já que o *quase-cardinal de um qset não é definido por meio dos ordinais como é no caso clássico*, mas sim é *tomado como primitivo*, exatamente para que não seja possível 'extrair' dele uma ordenação sobre o conjunto 'contado'.[37] Logo, não é possível para os quase-conjuntos existir, primeiramente, uma bijeção entre o nosso domínio D e um ordinal λ tal como acontece usualmente em teoria de conjuntos clássicas. Como se sabe, contar classicamente significa definir uma bijeção do conjunto a ser contado no conjunto dos números naturais, de modo que para tanto se faz necessária a identidade dos objetos a serem contados: sem tal conceito, como podemos garantir que não estamos contando o mesmo objeto duas vezes? Todavia, em $\mathfrak{Q}$, vimos que a definição de bijeção não é feita do modo usual (e por isso chamamos de quase-bijeção), pois exatamente devido à ausência da identidade tal bijeção não é feita 'objeto a objeto' (no sentido de identidade). Assim, não é possível "contar classicamente" um q-set de m-átomos indistinguíveis (em especial dotando-os de alguma ordem). Entre outras coisas, foi isto que motivou a introdução dos axiomas e definições presentes na seção 4.2.3 acima. Além disso, na teoria dos quase-conjuntos, temos sim um 'axioma da escolha', mas o mesmo só permite que formemos de um quase-conjunto x um outro qset que tem como elementos elementos indistinguíveis dos membros dos elementos de x, *sem permitir disso ordená-los*.[38] Eis o axioma da escolha para o caso

[37]Dito de outra forma, para que houvesse um ordinal associado, necessitaríamos da identidade: veja (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 284-90) e o capítulo 4 desta tese.

[38]Devido a esta impossibilidade (entre outras características) é que foi usado aspas simples no termo "axioma da escolha": de certo modo, o nome "axioma da escolha" em $\mathfrak{Q}$ é muito mais uma 'maneira de dizer'. Talvez o correto seria falar em '*axioma* da quase-escolha', ou algo do tipo. Convém enfatizar que no texto de French e Krause, quando da apresentação do axioma da escolha para $\mathfrak{Q}$ (p. 297), o termo "axioma da escolha" também está grafado com aspas simples.

dos quase-conjuntos (FRENCH e KRAUSE, 2006, p. 297):

$$\forall_Q x(E(x) \wedge \forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \to y \cap z =_E \emptyset \wedge y \neq_E \emptyset) \to$$
$$\exists_Q u \forall y \forall v(y \in x \wedge v \in y \to \exists_Q w(w \subseteq [v] \wedge qc(w) =_E 1 \wedge w \cap y \equiv w \cap u))).$$

Onde $[v]$ é o unitário forte de v. Intuitivamente falando, se x é um qset no qual os elementos são qsets não vazios disjuntos, então existe um qset u, tal que para todos $y \in x$ e para todo $v \in y$, u tem um elemento que é indistinguível de v (o que é expresso pela última parte do axioma).

De toda forma, o resultado que importa extrair do axioma acima *é de que não podemos usar o axioma da escolha existente na teoria de quase-conjuntos para criar uma bijeção entre o domínio/quase-conjunto D e um ordinal* λ, tal como é possível de ser feito no caso clássico. Com efeito, o axioma da escolha na teoria dos quase-conjuntos apenas nos permite que tenhamos um elemento 'escolhido' v que é indistinguível de um elemento de cada elemento da classe original x (dito de outra forma, o axioma então 'escolhe' para cada elemento do qset x um objeto indiscernível de um seu elemento). Todavia, dado que os elementos são indistinguíveis, não faz sentido (e o próprio axioma em si não permite realmente isso, como enfatizado) fazermos alguma ordenação no conjunto escolha criado, de modo que assim não se pode fazer uma bijeção deste conjunto escolha com os ordinais. Além disso, como não temos a noção de ordinal ou de identidade para os próprios elementos de qsets puros, não podemos — como visto no decorrer deste capítulo — definir um ordinal em sentido extenso com a ajuda de um número finito de predicados; coisa necessária à prova do teorema no caso clássico. Sendo assim, todos os conceitos necessários à prova do teorema para o caso clássico (*e. g.*, definibilidade em sentido extenso, ordenação no conjunto escolha, identidade etc.) falham para o caso quase-conjuntista, e desta forma não podemos afirmar que todo membro de λ, e assim de D, sendo D um quase-conjunto puro de m-átomos do mesmo tipo, possa ser definido em sentido extenso com a ajuda de um número finito de predicados de primeira ordem. Desta feita, ***realmente não podemos afirmar que toda estrutura quase-conjuntista pode ser rigidificada por predicados (ou relações) de primeira ordem***, como afirma o teorema para o caso clássico em ZFC (que era o resultado que estávamos buscando), já que todos os conceitos e definições que são necessários na prova do teorema não conseguem definir *univocamente* um elemento de um qset puro.

Por último, e de modo a complementar a discussão acima, não se pode então provar para os quase-conjuntos o seguinte teorema de da Costa e Bueno (DA COSTA e BUENO, 2011):

Teorema 1.6: *Dado uma estrutura $\mathfrak{U}$ de ordem $n, 1 \leq n \leq \omega$, existe um número finito de relações de primeira ordem que, adicionadas a $\mathfrak{U}$, transformam $\mathfrak{U}$ em uma estrutura rígida.*

Isto porque, como já vimos, mesmo que se introduzam na quase-estrutura relações de primeira ordem do tipo 'Ex', que por exemplo poderia ser interpretada como "x é um elétron", na teoria de quase-conjuntos isso não dá uma identidade para o objeto, já que qualquer x ('qualquer elétron') poderia entrar na relação. Como já enfatizado anteriormente, apenas metateoricamente sabemos que estamos tratando com um quase-conjunto que abstratamente representa uma coleção de elétrons, mas nem sempre podemos saber qual elétron é qual (no sentido de identificá-los de algum modo particular).[39] Logo, mesmo podendo reduzir as relações de uma estrutura quase-conjuntista a apenas conjuntos básicos através de um unitário forte (isto é, relações unárias no sentido de um unitário para cada objeto), esta relação não pode 'fornecer uma identidade' ao objeto, por assim dizer, pois ela é indistinguível de qualquer outra relação que tenha o mesmo 'sentido', mas um 'outro' objeto indistinguível. Na verdade, a única relação possível que poderia dar identidade a um m-átomo quase-conjuntista (e, assim, permitir uma possível rigidificação da uma quase-estrutura) é a própria relação de identidade, a qual não existe para esses elementos.

Podemos resumir os resultados acima, dizendo que a partir do fato de que a carência da noção de identidade para os objetos de um qset puro não permite que se faça nenhum tipo de ordenação sobre eles, não é possível definirmos uma noção de definibilidade em sentido extenso e/ou restrito, bem como de expressabilidade para as relações e objetos desse conjunto, ou até mesmo que o axioma da escolha de $\mathfrak{Q}$ produza alguma ordenação no conjunto escolha criado. Estes foram os grandes 'problemas' que não nos permitiu obtermos as provas, como as encontradas no caso clássico, de que podemos ter isomorfismos, automorfismos, ou em especial de que podemos rigidificar estruturas quase-conjuntistas não-rígidas incluindo novas relações de primeira-ordem às mesmas (e, até mesmo, que se tenha um único automorfismo que seja a identidade) e, assim, podemos ver que não há forma alguma de se ter em uma estrutura quase-conjuntista uma noção *clássica* de rigidez que dote os m-átomos de uma 'identidade'. Isso é interessante, pois se o axioma da escolha de $\mathfrak{Q}$ produzisse de alguma forma uma ordenação no conjunto escolha criado, poderíamos dotar os m-átomos de um 'tipo de identidade' a partir da ordenação (o que, como vimos, não é realmente o caso). Deste modo, vale

[39] Isso se torna mais ainda enfático quando pensamos que estes elétrons podem estar em estados *entangled*, tal como visto no capítulo 3, onde *efetivamente* não podemos saber qual é qual.

ressaltar que apenas a ausência da noção de identidade por si só não garante que as estruturas quase-conjuntista possam ser rigidificadas, tal como normalmente se apregoa, mas que também, somado a este fato, a impossibilidade de se ter uma ordenação em um quase-conjunto de m-átomos também se mostra essencial e se revela, assim, como uma outra face do problema (face esta em geral não conhecida pelos trabalhos que citam a impossibilidade de rigidificação de estruturas quase-conjuntistas), o que enfim mostra a relevância e originalidade do nosso estudo.[40] Obviamente, poderia ser dito que talvez haja um outro modo de rigidificar nossas estruturas quase-conjuntistas que não seja o 'modo da Costa/Rodrigues', mas então responderíamos que tal caso nos parece ser improvável, devido agora essencialmente à falta da noção de identidade para os m-átomos. Isto significa que a prova clássica que aqui estudamos não parece tomar efeito pelos motivos expostos neste capítulo, e que qualquer outra prova que se avente também parece ser impugnada *ab initio*; agora pela falta da noção de identidade, de modo que não nos parece que haveria uma outra possibilidade. É bom que se comente novamente que o que alcançamos acima não é uma prova no sentido lógico do termo, mas muito mais uma 'constatação' de que todas as exigências necessárias para se ter o teorema clássico de rigidificação não podem ser estabelecidas em $\mathfrak{Q}$.

Na verdade, o que acontece é que quando estamos trabalhando em um certo arcabouço teórico, acabamos por nos comprometer com os pressupostos básicos da(s) teoria(s) que estamos utilizando. Isto tem o mesmo teor dos comentários já feitos nos capítulos anteriores para o caso da lógica, da teoria de conjuntos e da matemática clássica se comprometerem com a noção de indivíduo, por exemplo, e não vale a pena repetí-los aqui. No caso mais específico do assunto deste tomo, Hodges (HODGES, 1997, p. 93) aponta que "uma estrutura modelo-teorética [model-theoretic] implicitamente carrega consigo todas as características que são teórico-conjuntistamente definíveis em termos dela...", e exatamente foi isso que aconteceu na nossa análise: como vimos acima, a falta da noção de identidade para os objetos na nossa teoria $\mathfrak{Q}$ acabou por 'contaminar', por assim dizer, toda a cadeira teórica erigida sobre essa teoria base, fato consoante ao alerta de Hodges. Com efeito, até mesmo da Costa e Bueno (DA COSTA e BUENO, 2011) atentam para esse fato na conclusão do seu artigo, a saber, da dependência da noção da identidade para a definição da noção de definibilidade e de expressabilidade, como também à problemática que existe em relação à 'falta' de tal conceito para os objetos da

[40] O que queremos dizer com isso é que os artigos que tratam deste problema normalmente citam apenas a questão da falta da noção de identidade para os m-átomos como sendo a única característica que leva a uma impossibilidade de rigidificação de estruturas em $\mathfrak{Q}$: o nosso trabalho exatamente mostra que aliado a esta característica, a impossibilidade de ordenação do conjunto escolha criado também é essencial, pois se este fosse o caso, através de uma ordem também poderia se dar um 'tipo de identidade' aos m-átomos.

MQ:

> Outro aspecto significante de uma teoria universal de estruturas é a ênfase que é dada ao conceito de definibilidade como um componente central no estudo de estruturas matemáticas. Nas discussões filosóficas sobre indiscernibilidade e individualidade de partículas quânticas, por exemplo, no contexto dos fundamentos da física, é muitas vezes assumido que tais conceitos representam características metafísicas dos objetos em questão. Sobre esta concepção metafísica, a indiscernibilidade e a individualidade de uma partícula é pensada como algo objetivo, independente das propriedades da linguagem usada para se referir ao objeto. Como resultado, se uma partícula é discernível, se é um indivíduo ou não, é algo que não depende da linguagem ou da lógica que é usada para descrever a partícula.
> No entanto, não está claro que a concepção metafísica da indiscernibilidade e individualidade seja estável. Afinal de contas, a fim de expressar tais conceitos, a fim de os formular linguisticamente, precisamos claramente usar uma linguagem e uma lógica. E fica claro como numa teoria universal de estruturas (da qual, como vimos, a teoria abstrata de Galois faz parte), dependente dos recursos da linguagem e da lógica que usamos, as propriedades dos conceitos que podem ser definidos, incluindo aqueles de indiscernibilidade e individualidade, irão mudar. [...] De acordo com uma teoria universal das estruturas, desde que definibilidade é uma propriedade que depende da linguagem e da lógica que usamos, a definibilidade de conceitos como indiscernibilidade e individualidade também serão linguísticos — e lógico — dependentes. Ao invés que conceitos absolutos (como a concepção metafísica deveria ser), indiscernibilidade e individualidade são relativas à lógica e à linguagem em questão.[41]

Por fim, podemos pensar em uma forma de pluralismo de estruturas matemáticas, cada uma delas mais afeita às características de cada área de modelagem da realidade. Para o caso 'clássico', temos as estruturas clássicas que respeitam os teoremas clássicos aqui discutidos; para as teorias quânticas,

[41]Vale ressaltar que também este foi um dos propósitos tidos em mente na formulação de $\mathfrak{Q}$, a saber, podermos dar conta (pelo menos do ponto de vista formal) de uma metafísica de não-indivíduos. Posteriormente falaremos mais sobre isso.

temos as estruturas quase-conjuntistas que respeitam outros teoremas. Parece assim que de acordo com a parcela da realidade que estamos trabalhando, podemos fazer uso de uma estrutura particular. Qual a estrutura certa para cada área não emerge da matemática, mas sim da experiência e conhecimento do físico a partir da construção de sua ciência: do ponto de vista da matemática pura, toda estrutura matemática parece ser aceitável (é claro, desde que respeite as 'regras' formais de sua construção). No final desta tese discutiremos mais sobre esta possibilidade de 'pluralismo estrutural'.

6.3 CONCLUSÃO

Neste capítulo vimos que vários teoremas relacionados às estruturas matemáticas clássicas não podem ser afirmados quando trabalhamos com estruturas quase-conjuntistas. Durante o texto, não procuramos apresentar detalhadamente as provas clássicas dos teoremas analisados (elas podem ser vistas na bibliografia indicada), mas apenas enunciamos os teoremas e discutimos as provas de um modo informal, sempre associando tais provas às características da teoria $\mathfrak{Q}$. Na verdade, como dito, toda a discussão que aqui se deu teve como objetivo fornecer os alicerces para que entendêssemos a última parte desse assunto, a saber, a prova da possibilidade de se rigidificar qualquer estrutura não-rígida clássica, bem como confirmar a impossibilidade de tal feito para as teorias quase-conjuntistas (de modo que por isso nosso objetivo não foi fazer um estudo exegético de todas as provas dos artigos citados). Todavia, apesar de não podermos rigidificar nossas estruturas quase-conjuntistas do modo acima mostrado, é válido se perguntar se uma forma mais 'fraca' de rigidificação não poderia ser alcançável em $\mathfrak{Q}$. Aqui, a resposta é positiva, e no no próximo capítulo exploraremos uma forma mais 'branda' de rigidificação para as quase-estruturas, a qual chamaremos de "**quase-rigidificação**". A principal vantagem de tal construção é a de que toda estrutura quase-conjuntista também poderá ser estendida a uma estrutura quase-rígida (resultado 'paralelo' ao de da Costa e Rodrigues), mas todavia a quase-rigidificação não nos comprometerá com a (ou fornecerá uma) identidade para os elementos da estrutura tal qual ocorre classicamente. Isso é de suma importância, haja vista que deste modo poderemos continuar a falar de não-indivíduos mesmo a partir de estruturas quase-rígidas (consoante assim com os preceitos da teoria de quase-conjuntos).

7 QUASE-RIGIDIFICAÇÃO

7.1 INTRODUÇÃO

No capítulo prévio mostramos que a maneira como é feita a prova de que toda estrutura não-rígida que tenha por base as teorias de conjuntos clássicas (em particular ZFC) pode ser estendida a uma estrutura rígida, não pode ser de modo análogo realizada na teoria de quase-conjuntos.[1] Como visto, grande parte desta impossibilidade se deve ao principal fato de que não podemos dotar — através do Axioma da Escolha existente em $\mathfrak{Q}$ — algum tipo de ordenação para elementos de qsets puros. Somado a isso, como também constatamos, a 'perda de identidade' para esses objetos[2] não permite que possamos ter isomorfismos/automorfismos em sentido usual na quase-estrutura, não sendo desta forma possível obtermos — entre outras coisas — a função identidade unívoca que se coaduna com a definição clássica de estrutura rígida. Na verdade, como enfatizamos, o que temos aqui é uma via de mão dupla: de antemão, a inexistência da noção de identidade para os objetos do nosso quase-conjunto não permite que possamos satisfazer a definição de estrutura rígida; e a diferente 'constituição' do axioma da escolha para o caso dos qsets não permite, por sua vez, estabelecer uma ordem para os elementos do quase-conjunto escolha criado de modo que possa ser feita uma bijeção destes elementos com ordinais. Isso, como vimos, por fim impossibilita a inclusão de relações de primeira ordem que rigidifiquem a nossa quase-estrutura, e dado que pelos motivos expostos não nos parece que haveria alguma outra possibilidade, podemos assim assumir os m-átomos como não-indivíduos legítimos.

Todavia, como dito anteriormente, vale perguntar se não há a possibilidade de instituir uma forma mais 'fraca' de rigidificação para as estruturas baseadas em conceitos quase-conjuntistas. Como de pronto percebemos, tal construção teórica não poderá ser dependente de noções de identidade ou de

[1] Uma estrutura não-rígida é também chamada de "deformável". No caso antes mostrado, como visto, ficamos restritos apenas à demonstração da possibilidade de rigidificação das estruturas deformáveis baseadas na teoria de conjuntos de ZFC. Não obstante, devido às características da prova antes discutida, tudo leva a crer que tal construção (a saber, a possibilidade de se estender uma estrutura deformável a uma rígida) também pode ser levada a cabo mesmo em estruturas fundamentas em teorias de conjuntos alternativas (como NBG ou NF, por exemplo). Este tema, no entanto, foge à alçada deste trabalho, se tornando um bom assunto de pesquisa para trabalhos futuros.

[2] É algo estranho falar em "perda da identidade" haja vista que tal noção, na teoria dos quase-conjuntos, nunca esteve presente para os micro objetos (m-átomos). Todavia, manteremos essa licença argumentativa.

ordenação para os elementos da quase-estrutura, dado que tais conceitos não estão disponíveis. Conseguinte, relações de primeira ordem rigidificadoras também não poderão ser assumidas, haja vista sua inoperância para tal intento. Desta forma, se a resposta à pergunta deste parágrafo for afirmativa e, assim, uma possível noção de *quase-rigididez* puder ser elaborada, esta reclama uma fundamentação diferente e toda uma estruturação diversa: noções como automorfismo, função e identidade (entre outras) empregadas no caso clássico, por exemplo, terão que ser substituídas, respectivamente, por noções como *quase-automorfismo* (que será definido no decorrer deste texto), quase-função e indiscernibilidade (estes duas últimas já conhecidas de capítulos prévios).

Sendo assim, o desenvolvimento de uma noção de quase-rigidificação é o que tentaremos lograr êxito no presente capítulo e, no próximo, mostraremos alguns exemplos de estruturas para a mecânica quântica onde tais conceitos podem ser usados.

7.2 QUASE-IDENTIDADE

Com o intuito a fundamentarmos a noção de quase-rigidez de modo a se adequar aos casos mais gerais, passaremos agora a tomar a nossa estrutura quase-conjuntista $\mathfrak{U} = \langle D, R_i \rangle$ como sendo composta de um domínio de m-átomos de vários tipos, juntamente com quase-relações de qualquer aridade.[3] Para lograrmos êxito na construção de um conceito de quase-rigidez, a primeira noção que necessitamos definir é a de *quase-identidade*.

Lembramos que podemos ter uma q-bijeção (do modo antes definido) de um domínio de um qset 'nele mesmo' (isto é, podemos ter uma q-função de $D \mapsto D$) e, neste caso, os domínios terão a mesma quase-cardinalidade (obviamente, somente assim teremos uma quase-bijeção). Em um domínio de m-átomos variados, uma q-bijeção de $D \mapsto D$ não obrigatoriamente liga indiscerníveis de um tipo a indiscerníveis do mesmo tipo, mas sim apenas diz que se tivermos $\langle u, v \rangle \in f$ e também $\langle u', v' \rangle \in f$, com $u \equiv u'$, então teremos obrigatoriamente que $v \equiv v'$. Não obstante, podemos tomar *apenas as q-bijeções que ligam os indiscerníveis de um tipo aos indiscerníveis do mesmo tipo* como que para 'representar' a noção de quase-identidade. Eis então nossa primeira definição:

[3] Podemos assim pensar no domínio da nossa estrutura como sendo composto de um qset puro que represente um certo número de elétrons, prótons e nêutrons. Não obstante, como será visto abaixo, provaremos teoremas tanto para o caso de q-estruturas com domínio composto de m-átomos de vários tipos, como também para q-estruturas compostas de m-átomos de apenas um tipo.

Definição 1: [q-identidade] Dado um domínio D do modo acima definido, uma **q-identidade** sobre D é uma q-função bijetiva de $D \mapsto D$ que satisfaz que para $\forall x \in D, f(x) \equiv x$.

Em resumo, dentre todas as q-bijeções possíveis do domínio, as que são definidas como sendo q-funções q-identidade são exatamente as que ligam os indiscerníveis de um tipo nos indiscerníveis do mesmo tipo (e apenas essas). Este é o máximo de 'identidade' que poderá ser obtida na teoria $\mathfrak{Q}$. É bom enfatizar que neste caso também não poderemos ter a noção de igualdade entre funções, mas apenas de indiscernibilidade entre funções (de modo que sendo f e h duas funções, podemos ter $f \equiv h$): exatamente quando *duas* funções de $D \mapsto D$ ligam indiscerníveis do mesmo tipo.[4] Com efeito, para que se provasse uma *igualdade entre as funções* f e h acima, seria necessário garantirmos que a função f ligasse os *mesmos* elementos que a função h, mas para tanto se faz necessário a identidade desses elementos. Dito de outra forma, se fôssemos raciocinar como no caso clássico, uma q-identidade seria a função identidade de $D \mapsto D$ que é única (por ser a função identidade). Mas em $\mathfrak{Q}$, podemos pensar que pode haver 'mais de uma' q-identidade porque podemos, via definição acima, associar a um $x \in D$ qualquer indiscernível de x (e do mesmo modo para os outros elementos do domínio). De certo modo, pode-se dizer que o que se estabelece aqui é uma *coleção* de q-funções q-identidade. Não obstante, todas essas q-funções seriam indiscerníveis do ponto de vista de $\mathfrak{Q}$ e, portanto, para todos os efeitos práticos, podemos dizer que 'há uma só' (mas isso, como dito, não pode ser internalizado em $\mathfrak{Q}$ em virtude de que a identidade não se aplica aos m-átomos.

Com tal definição, já podemos provar nosso primeiro teorema.

Teorema 1: *Em uma quase-estrutura $\mathfrak{B} = \langle D, R_i \rangle$, onde D é composto de m-átomos do mesmo tipo,*[5] *todas as funções q-bijetivas de $D \mapsto D$ (do modo acima definido) são funções q-identidade.*

Demonstração: *Imediata, haja vista que como neste caso todos os objetos são indiscerníveis, uma função q-bijetiva de $D \mapsto D$ será sempre do tipo $f(x) \equiv x$ para $\forall x \in D$ (isto é, será sempre uma função q-identidade).* ■

[4] Isto é, quando temos uma função f que relaciona $x \mapsto x$, e 'outra' função g que relaciona 'outro' $x \mapsto x$. Neste caso, as duas funções também são indiscerníveis (lembramos que como estamos em uma bijeção, a função só pode ligar *um* elemento do domínio em *um* elemento do conjunto imagem).

[5] Um domínio representando apenas elétrons, por exemplo.

7.3 Q-ISOMORFISMO, Q-AUTOMORFISMO E ESTRUTURAS Q-RÍGIDAS

Definição 2: [q-isomorfismo/q-automorfismos] Sejam $\mathfrak{U} = \langle D, R_i \rangle$ e $\mathfrak{U}' = \langle D', R_i' \rangle$ q-estruturas, com $D \equiv D'$ e com idênticas assinaturas (isto quer dizer que as relações R_i têm a mesma aridade que as correspondentes R_i'). Seja $h : D \mapsto D'$ uma q-bijeção. Dizemos que h é um q-isomorfismo entre $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{U}'$ se

$$R_i(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow R_i'(h(x_1), ..., h(x_n))$$

(onde os subscritos não representam a ordenação dos elementos) para cada relação n-ária R_i (e correspondente R_i'). Quanto temos que $h : D \mapsto D$, um q-isomorfismo é chamado de q-automorfismo de $\mathfrak{U}$.

Paralelo ao enfatizado acima para o caso da q-identidade, o interessante é observar que $h(x_k)$ também aqui não é unicamente determinado, pois qualquer elemento indiscernível de $x_k \in D$ poderia ser tomado como imagem de $x_k \in D'$, sem que isso 'altere' a q-função $h(x_k)$ (algo que é diferente do caso clássico, como visto). Deste modo, a definição precedente estabelece uma ***classe de q-isomorfismos/q-automorfismos indiscerníveis***.[6] Para todos os efeitos, podemos tomar qualquer um deles.

Definição 3: [q-rigidez] Uma quase-estrutura é quase-rígida quando seu único q-automorfismo for a q-função q-identidade.

Teorema 2: *Qualquer q-automorfismo de $D \mapsto D$ em uma quase-estrutura $\mathfrak{B} = \langle D, R_i \rangle$ do modo acima definido (isto é, onde o domínio D da q-estrutura é composto apenas de m-átomos do mesmo tipo), a transforma trivialmente em uma quase-estrutura quase-rígida.*

Demonstração: *Imediata, haja vista que nesse caso todas as q-funções q-bijetivas serão q-funções q-identidade pela definição acima e, assim, as relações (e seus complementos) da estrutura $\mathfrak{B}$ são preservados.* ■

Novamente, tenha-se $\mathfrak{U} := \langle D, R_i \rangle_{i \in I}$ uma estrutura com D composto de m-átomos indiscerníveis de três tipos, e onde R_i é tal que existem $x, y \in D$, e xRy.[7]

[6] De certo modo, um subgrupo do grupo de Galois da estrutura em apreço.

[7] Estamos tomando o domínio da estrutura $\mathfrak{U}$ como sendo composto de m-átomos de três tipos apenas como um caso heurístico. O domínio de $\mathfrak{U}$ também poderia ser composto de m-átomos de apenas dois tipos, por exemplo, ou até mesmo de mais de três tipos, sendo que o que queremos é apenas diferenciar este caso do caso em que a estrutura tem em seu domínio m-átomos de apenas *um* tipo, como na estrutura $\mathfrak{B}$.

Teorema 3: *Quase-estruturas 'tipo' $\mathfrak{A} = \langle D, R_i \rangle$, com D composto de m-átomos de vários tipos, não são trivialmente q-rígidas.*

Demonstração: *Basta um exemplo. Dado que o conjunto D de $\mathfrak{A}$ é variado, uma das q-bijeções $h : D \mapsto D$ possíveis de serem definidas/construídas sobre o domínio é $h(\diamond) = \square$ (e $h^{-1}(\square) = \diamond$). Obviamente que neste caso, por hipótese, tal q-bijeção deve preservar as relações da quase-estrutura, de modo a se tornar assim um quase-automorfismo. É fácil ver que pela definição 1 acima, tal h não é uma q-identidade, pois $h(\diamond) \not\equiv \square$ (e $h^{-1}(\diamond) \not\equiv \square$). Assim, nem toda estrutura quase-conjuntista composta de m-átomos de vários tipos é trivialmente q-rígida, pois podem haver q-automorfismos h distintos da q-função q-identidade.* ■

7.4 *Q*-RIGIDIFICAÇÃO

Todavia, podemos expandir a estrutura $\mathfrak{A}$ acima acrescentando à mesma uma nova relação S definida do seguinte modo, para cada $r \in R_i$:

$$xS_Ry \leftrightarrow (xR_iy \wedge y \equiv x),$$

obtendo assim a estrutura expandida $\mathfrak{E} = \langle D, R_i, S \rangle$.[8] Agora, podemos provar que na estrutura expandida $\mathfrak{E}$ todo o quase-automorfismo que existe é a q-função q-identidade e que esta estrutura é q-rígida:

Teorema 4: *Seja h um q-automorfismo sobre a q-estrutura $\mathfrak{E} = \langle D, R_i, S \rangle$. Então h é o único quase-automorfismo que existe sobre $\mathfrak{E}$, e é a q-função q-identidade. Logo, a estrutura é q-rígida.*

Demonstração: *Todo q-automorfismo h de $\mathfrak{A}$ é tal que (falando apenas de relações binárias) $xRy \rightarrow h(x)Rh(y)$ para toda a relação binária R. Mas em $\mathfrak{E}$, o único q-automorfismo que faz com que também tenhamos a relação $xSy \rightarrow h(x)Sh(y)$ é a q-identidade. Logo, essa estrutura é q-rígida.* ■

Agora, por fim, podemos provar que toda q-estrutura não q-rígida $\mathfrak{A}$ pode ser expandida a uma estrutura q-rígida $\mathfrak{E}$:

Teorema 5: *Se as relações R de $\mathfrak{A}$ são tais que não exista nenhum par da forma $\langle x, y \rangle$ com $x \equiv y$ em R, então mesmo assim a estrutura $\mathfrak{A}$ pode*

[8] É bom enfatizar que tal relação S está na metateoria e, na verdade, trata-se da abreviação de uma expressão da linguagem objeto. O mesmo acontece com todos os demais símbolos introduzidos.

ser q-rigidificável (dito de outra forma: a estrutura $\mathfrak{U}$ pode ser expandida a uma estrutura q-rígida $\mathfrak{E}$).

Demonstração: *Imediata, acrescentando-se à estrutura uma nova relação $S = \langle x, x \rangle$, tal que $\langle x, x \rangle \in S$ para algum (qualquer) $x \in D$.* ■

Sendo assim, apesar da q-estrutura original não ser necessariamente q-rígida (pois há q-automorfismos distintos da q-identidade), ela pode ser expandida a uma q-estrutura $\mathfrak{E}$ que só admite como q-automorfismo a q-função q-identidade (ou seja, ela pode ser q-rigidificável) como queríamos demonstrar. Deste modo, no mesmo sentido que no caso clássico onde toda estrutura não-rígida pode ser rigidificada pelo acréscimo de relações de primeira ordem, no caso quase-conjuntista toda q-estrutura não q-rígida pode ser expandida a uma q-estrutura q-rígida pelo acréscimo de quase-relações binárias do modo definido acima. Interessante notar então que diferente do caso clássico, aqui relações binárias, em detrimento às unárias, conseguem lograr êxito na quase-rigidificação para quase-estruturas da teoria $\mathfrak{Q}$.

Outro ponto que é importante ressaltar da nossa construção é que mesmo 'vistos de fora' (isto é, na estrutura expandida q-rígida), todos os objetos da nossa estrutura continuam a ser não-indivíduos, destoando assim do caso clássico onde eles 'se tornam' indivíduos (do modo descrito nos capítulos anteriores). Com efeito, mesmo na nossa q-estrutura q-rigidificada, em um q-automorfismo a função q-identidade ligará um indiscernível em um indiscernível do mesmo tipo, mas não necessariamente em 'um deles em particular', já que para tanto se faz necessário a noção de identidade em sua plenitude. Isto então mostra que mesmo uma quase-rigidificação não dotará os objetos quase-conjuntistas de uma possível identidade e, deste modo, os *m*-átomos podem ser realmente tomados como não-indivíduos legítimos, coadunando-se assim com a interpretação da MQ que estamos adotando aqui. Neste sentido, tais objetos pertencentes aos domínios das estruturas quase-conjuntistas não poderão ser diferenciados uns dos outros de modo algum (isto é, nem mesmo em uma q-rigidificação), o que mostra a relevância de tais q-estruturas para o trato das teorias quânticas. Além disso, como queríamos demonstrar, tal 'impossibilidade de identidade' para os objetos quase-conjuntista realmente gera um alicerce seguro para a fundamentação formal de tais teorias em $\mathfrak{Q}$. Outrossim, vale citar que a parte 'pura' da teoria dos quase-conjuntos parece estar de acordo com o propósito de encontrar estruturas quânticas que envolvam objetos indiscerníveis sem a necessidade de usar postulados externos (como o Postulado da Indistinguibilidade) para 'torná-los' indivíduos indiscerníveis, tais como vimos no capítulo 3 desta tese. Por fim, vale ressaltar que realmente encontramos uma forma de q-rigidez que não leva em conta questões de identidade ou de ordem sobre os elementos do qset, mas que mesmo assim é factível, tal como havíamos tencionados na introdução deste capítulo. No próximo capítulo, derradeiro a este trabalho, discutiremos alguns exemplos e questões relacionados ao uso de estruturas matemáticas para ‘representar’ áreas do conhecimento científico, e como podemos relacionar os resultados encontrados nesta tese com as estruturas em ciência.

8 QUASE RIGIDIFICAÇÃO E MECÂNICA QUÂNTICA

8.1 INTRODUÇÃO

A noção de estrutura matemática se mostrou bastante relevante não só nos campos da matemática e teoria de conjuntos ditas ‘puras’, mas também — a partir da chamada “abordagem semântica” — no estudo da própria natureza das teorias científicas. Com efeito, tal abordagem, se tornou hoje em dia uma das formulações mais em voga para se entender o que realmente são as teorias da ciência. Neste sentido, para os partidários de tal visão, a resposta à questão “o que é uma teoria científica?” deve passar, primeiramente, por uma análise do modo que tais teorias científicas estão estruturadas e de como podemos refletí-las numa estrutura matemática. Neste capítulo iremos apresentar brevemente tal concepção da ciência, relacionar tais ideias com a teoria de quase-conjuntos e com a noção de quase-rigidificação, e mostrar como a noção de quase-estrutura pode ser aplicada às teorias científicas via qsets.[1] Todavia, é bom que se alerte que não faremos uma recapitulação exegética de toda a história da abordagem semântica, bem como de suas críticas e defesas: tudo isso pode ser visto na bibliografia indicada. Interessa-nos aqui apenas discutir de que modo podemos relacionar a mecânica quântica com quase-estruturas baseadas em quase-conjuntos não passíveis de rigidificação, e que vantagens podemos tirar de tal aproximação.

8.2 ABORDAGEM SEMÂNTICA, PREDICADOS DE SUPPES E TEORIAS CIENTÍFICAS

Sendo assim, tentaremos primeiramente tornar claro o que a abordagem semântica entende por “teoria científica”. Segundo tal visão, para respondermos a questão “o que é uma teoria científica?”, devemos primeiramente tomar tais teorias como uma classe de estruturas, de modo que apresentar uma teoria científica é exatamente apresentar os *modelos* dessa teoria, isto é, as realizações — por assim dizer — que tornam os postulados verdadeiros.[2] É claro que o termo “modelo” pode ter várias conotações, podendo,

[1] No entanto, lembramos sempre que as estruturas relevantes em ciência não são de ordem-1. Em geral, como já enfatizamos, as relações necessárias para se caracterizar certas áreas do conhecimento científico não se dão apenas entre os elementos do domínio, mas também entre coleções deles (ordem-2), e coleções de coleções deles (ordem-3), e assim por diante.

[2] Veja, por exemplo, (VAN FRASSEN, 1980, p. 44). No entanto, como pontuaremos durante este texto, é necessário um pouco de cuidado com o uso da palavra “modelo” nessa afirmação.

por exemplo, ser tomado no sentido de uma réplica (como quando se tem um modelo de uma ponte ou de um avião a ser construído), perfazendo neste caso um tipo de modelo físico, entre outros significados.[3] Todavia, aqui, consoante com os autores que apregoam a visão semântica, "modelo" irá ser entendido como uma estrutura teórico-conjuntista satisfazendo os postulados da teoria. Desta forma, "modelo" é concebido como uma interpretação de (ou em) uma estrutura lógico-matemática que — pelo menos no caso das ciências empíricas — se imagina que capte uma parcela da realidade, e isso representaria o que se tem em mente por "teoria científica".[4] O próprio van Fraassen expressa assim tal visão: "qualquer estrutura que satisfaça os axiomas de uma teoria [...] é chamada de *modelo* desta teoria" (VAN FRAASSEN, 1980, p. 43). Para Patrick Suppes (SUPPES, 2002, p. 20) — que diga-se de passagem é um dos maiores defensores de tal abordagem — este então seria precisamente o sentido Tarskiano de nos referirmos a modelos, haja vista que a partir da concepção Tarskiana de verdade de uma sentença, esta pode ser interpretada em uma estrutura e, se esta sentença for verdadeira nesta interpretação, essa estrutura se torna um modelo desta sentença.[5] Desta forma, vale citar que os trabalhos de Tarski sobre teoria dos modelos influenciaram fortemente a abordagem semântica das teorias científicas (apesar de que na definição original de Tarski de verdade em lógica, este *não* falou de "verdade em uma estrutura"). Não obstante, o que os defensores da abordagem semântica fizeram de inovador foi exatamente identificar uma teoria científica com esses modelos, ou seja, com certos tipos de entidades matemáticas que são construídas numa teoria de conjuntos do modo como já vimos em capítulos prévios. Além

[3]Em um artigo bastante interessante, Koperski (KOPERSKI, 2013) mostra variados sentidos da palavra "modelo". O leitor pode consultar tal artigo se quiser outros sinônimos. Suppes (SUPPES, 1960) também discute as várias conotações da palavra "modelo" como usada em matemática e ciência: todavia, segundo ele, todos os usos do termo "modelo" nessas ciências se reduzem ao conceito lógico de modelo. Escusado dizer que tal posição não é unânime e que alguns filósofos acreditam que algumas maneiras de se entender o conceito de "modelo" utilizado em ciência não podem ser reduzidos ao sentido lógico-matemático, como apregoa Suppes: segundo esses filósofos, os modelos utilizados na ciência estariam um pouco afastados da noção de modelo da lógica e da matemática (uma discussão sobre isso pode ser encontrada em (KRAUSE, *et. al.*, 2011). Outros, como van Fraassen, por exemplo, defendem que o termo "modelo" é sim semelhante na lógica e nas ciências naturais: para ele, esta semelhança é um dos pilares da abordagem semântica e é exatamente a que permite relacionar a parte teórica ao fenômeno empírico (VAN FRAASSEN, 1980, p. 64-7).

[4]No entanto, isso precisa ser qualificado. Se a teoria for a própria teoria ZFC, caso ZFC seja consistente, não há como ter um modelo de ZFC *em* ZFC devido ao Segundo Teorema da Incompletude de Gödel (haja vista que assim a teoria iria ser completa e provar — em si mesma — sua própria consistência). Desta forma, o que se quer dizer aqui é que os modelos das teorias científicas são estruturas ***em*** ZFC (aí sim a visão de van Fraassen expressada na nota acima, e no decorrer do texto, realmente se aplica). O mesmo acontece na teoria $\mathfrak{Q}$.

[5]Assim se vê como os termos "modelo", "estrutura", "satisfação" etc. presentes na abordagem semântica se interligam para dizer o que é uma teoria científica.

disso, uma das características mais importantes desta abordagem é que passamos agora a dar ênfase não nos aspectos sintáticos das teorias científicas que estamos focando (que era o caso da abordagem conhecida como empirismo lógico, Received View ou abordagem sintática), mas sim aos seus aspectos semântico-estruturais e às suas diversas interpretações (isto é, seus diversos modelos) dadas através de tais estruturas. Na abordagem semântica, então, as teorias científicas passam a ser vistas como entidades extralinguísticas, não podendo assim ser meramente reduzidas a coleções de proposições como no caso da abordagem sintática (apesar de que tais teorias poderiam também ser descritas linguisticamente caso fosse necessário.[6])

De toda forma, a grande de vantagem de tal método semântico, entre outras, é que estamos trabalhando dentro da própria teoria dos conjuntos e temos assim de pronto toda a matemática que necessitamos para lidar com as teorias empíricas. Deste modo, não seria necessário fazer a menção explícita (como no caso do empirismo lógico) dos axiomas lógicos e matemáticos já que pressupomos serem estes os da lógica clássica e os de uma teoria usual de conjuntos, respectivamente. Para a abordagem semântica, podemos então pressupor como conhecidas essas teorias 'auxiliares' e partir diretamente para os axiomas específicos da teoria científica em questão (que é o que interessa ao cientista):

> Assim, se estivéssemos interessados na axiomatização da mecânica quântica, poderíamos pressupor todas as teorias auxiliares, como o cálculo tensorial, as equações diferenciais parciais, e assim por diante, como se fossem *dadas de antemão*, uma vez que todos esses conceitos podem ser descritos na linguagem da teoria de conjuntos, e por assim dizer ir diretamente para o que interessa ao cientista. Deste modo, se estamos interessados na teoria eletromagnética de Maxwell, podemos ir direto às suas equações, sem nos determos

[6]Como afirmam da Costa e French (DA COSTA e FRENCH, 2003, pp. 22-3), porém, existem diversas versões do que se denomina por abordagem semântica, e a maneira como essa natureza extralinguística é compreendida varia de acordo com o tipo de abordagem semântica adotada. Segundo os autores, por exemplo, Beth e van Fraassen irão dizer que as estruturas são capturadas em termos de espaço de estado; para Suppe, elas devem ser entendidas como sistemas relacionais; e para Suppes e Sneed, em termos de predicados conjuntistas. Todavia, todas estas diferentes formas de se entender as teorias científicas teriam, no fim, o mesmo objetivo: caracterizar estruturalmente quais os comportamentos admissíveis para os sistemas físicos de cada tipo. Além disso, vale citar que alguns autores afirmam que a abordagem sintática também teria uma contraparte 'modelar' e que não seria algo assim tão puramente sintático. Não obstante, o uso do termo "modelo" neste caso não se referiria a algo semântico *à la* Tarski, mas sim (parecer ter) uma conotação muito mais no sentido de algo icônico, isto é, de algo que é um modelo de alguma coisa ou tipo de coisa, e que funciona como um ícone daquilo que modela (neste sentido, veja (DUTRA, 2005)).

> nos detalhes acerca da linguagem ou da lógica subjacentes, bem como das definições dos conceitos envolvidos, como derivadas parciais, rotacionais ou divergentes. [...] Na visão de Suppes, *sabemos* de tudo isso ao pressupormos que *conhecemos* a teoria de conjuntos (e a lógica) que fundamenta a teoria que estudamos, e podemos recuperar toda a discussão pertinente se for necessário (KRAUSE, 2002, p. 37-8, grifo do autor).

Sendo assim, é bom que se enfatize que nesta abordagem podemos explicitar a qualquer momento a lógica e a teoria de conjuntos subjacente, bem como os procedimentos de prova, os conceitos primitivos e a linguagem que estamos empregando. A diferença aqui é apenas que se dá ênfase à parte estrutural (no sentido acima explicitado), e não à parte sintática. Segundo da Costa e French (DA COSTA e FRENCH, 2003, p.27), como os defensores da teoria de conjuntos gostam de afirmar, a linguagem da teoria de conjuntos seria uma espécie de 'linguagem universal' com a qual podemos reproduzir praticamente toda a matemática (e assim, segundo algumas visões, todo o pensamento científico) existente: é exatamente este aspecto que fortaleceria a abordagem semântica, pois se axiomatizarmos nossas teorias desse modo, então teremos toda a matemática à mão (apesar de não deixarmos isto explícito, em detrimento à parte semântica que nesta abordagem é considerada mais importante).

Com o objetivo de tornarmos mais clara a definição que o próprio Suppes defende, a saber, que ao apresentarmos uma teoria devemos definir a classe de modelos de tal teoria, podemos lançar mão do que este autor chamou de um 'predicado teórico-conjuntista' (ou, como ficou conhecido, um "Predicado de Suppes"), a qual é inclusive uma proposta que marcou o início da própria abordagem semântica. De acordo com Suppes, a axiomatização (e assim a modelagem) de uma teoria científica pode ser feita através de uma fórmula (um predicado) da teoria de conjuntos que especifica a que tipo de 'restrições' a estrutura satisfazendo tal fórmula deve se conformar. A ideia básica, então, é a de que um cientista ao se deparar com certo domínio de objetos físicos (ou com uma parcela da realidade), imediatamente também se depara com propriedades e relações entre esses objetos (veja mais abaixo) (KRAUSE, *et. al.*, 2011). A formalização desses objetos, bem como de suas propriedades e relações, é o que levará ao conceito de modelo expresso por um predicado na teoria de conjuntos: tais predicados 'forneceriam' as estruturas conjuntistas que modelam um domínio científico. As estruturas satisfazendo tal predicado são então os modelos da teoria, e o predicado pode ser visto como encapsulando uma classe de modelos de tal teoria.[7] Desta forma, segundo uma máxima de Suppes, "axiomatizar uma teoria é definir um predicado teórico-conjuntista" (SUPPES, 2002, p. p. 30). Em resumo, pode então ser dito que o conceito de predicado de Suppes nos auxilia na tarefa de esclarecer o significado da axiomatização de uma teoria científica, fornecendo a contraparte matemática de tal teoria.

Um predicado de Suppes é definido da seguinte forma. Dada a linguagem $\mathscr{L}$ da teoria de conjuntos usual (como ZFC), um predicado de $\mathscr{L}$ é uma fórmula com uma única variável livre. Suponha assim que $\mathbb{P}$ seja tal predicado definido do seguinte modo, sendo $\mathfrak{D}$ a variável livre:

$$\mathbb{P}(\mathfrak{D}) \leftrightarrow \exists x_1 ... \exists x_k \exists y_1 ... \exists y_m (\mathfrak{D} = \langle x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n \rangle \wedge AX_1, ..., AX_n).$$

Onde AX_i são expressões de $\mathscr{L}$ que correspondem aos axiomas a que os elementos da estrutura $\mathfrak{D}$ estão sujeitos. Esta estrutura é dita ser então uma "estrutura da espécie $\mathbb{P}$" (ou uma "$\mathbb{P}$-estrutura"), e se identifica com o conceito de "espécie de estruturas" no sentido de Bourbaki.[8] Este tipo de predicado, que como visto nada mais é que uma determinada fórmula da linguagem da teoria de conjuntos, é então denominado de Predicado de Suppes (*cf.* (KRAUSE, 2002, p. 20)). Um predicado de Suppes, portanto, caracteriza uma família de estruturas que são os modelos (ou as interpretações) dos axiomas AX_n.[9] Desta forma, para Suppes, axiomatizar uma teoria é portanto exibir a sua *espécie de estrutura*, isto é, um determinado predicado do modo acima mostrado, erigido na linguagem da teoria de conjuntos, que de certa forma 'forneça' todas as realizações (os modelos) de uma teoria em uma certa área do conhecimento.[10]

A ideia do predicado teórico-conjuntista de Suppes se tornará mais

[7] Todavia, é bom que se enfatize que o predicado em si não tem modelos. Há, na verdade, estruturas que podem satisfazê-lo, e essas são modelos da teoria axiomatizada pelo predicado. Vale citar que há predicados que não admitem nenhuma estrutura que o satisfaça (neste sentido, veja (DA COSTA e FRENCH, 2003, pp. 21-60)).

[8] É claro que $\mathbb{P}$ também é satisfeito por estruturas da forma $\mathfrak{U} = \langle D, R_i \rangle$, que são as estruturas que estamos tratando nesta tese.

[9] Além disso, tal família pode ser caracterizada por vários predicados de Suppes, desde que os mesmos sejam equivalentes entre si.

[10] Todavia, alerta ele (SUPPES, 1975): "Esses modelos são entidades altamente abstratas, não-linguísticas, frequentemente muito afastadas, quanto à maneira como as concebemos, das observações empíricas. E cabe perguntar que contribuição pode ser trazida pelo conceito de modelo às repetidas discussões em torno da interpretação empírica das teorias. [...] Não podemos pegar um número em nossas mãos e aplicá-lo a um objeto físico. O que podemos fazer é mostrar que a estrutura de um conjunto de fenômenos, relativamente a certas operações empíricas, é idêntica à estrutura de algum conjunto de números com referência a operações e relações aritméticas. A definição de isomorfismo dos modelos em dado contexto faz precisa a ideia intuitiva de *estruturas idênticas*. Estabelecer esse isomorfismo de modelos é de grande importância por tornar possível a utilização de nossos conhecimentos acerca dos modelos computacionais no que se apliquem ao modelo aritmético, para inferir fatos a propósito do modelo isomórfo empírico" (grifo do autor).

clara através de um exemplo, no caso, tomemos novamente a teoria de grupos que já conhecemos do capítulo 2 desta tese. Procuramos desta forma axiomatizar estruturas do tipo $\mathfrak{G} = \langle G, \star \rangle$, onde G é um conjunto não-vazio e $\star \in \mathscr{P}(G \times G \times G)$, satisfazendo os axiomas da $(A1)$ associatividade; $(A2)$ existência do elemento da identidade; e $(A3)$ existência do inverso. Desta feita, o predicado teórico-conjuntista de Suppes pode ser escrito como segue:

$$\mathbb{G}(\mathfrak{G}) \leftrightarrow \exists G \exists \star (\mathfrak{G} = \langle G, \star \rangle \wedge G \neq \emptyset \wedge \star \in \mathscr{P}(G \times G \times G) \wedge (A1) \wedge (A2) \wedge (A3)).$$

As estruturas que satisfazem o predicado são os modelos de $\mathbb{G}$, a saber, os grupos propriamente ditos (por exemplo, o grupo aditivo dos inteiros: $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$). Nesse sentido, todos esses modelos representam 'realizações' de tal predicado e assim teorias (no caso) matemáticas, o mesmo acontecendo para as teorias científicas.[11]

Em resumo, podemos dizer que quando estamos investigando um certo domínio do conhecimento erigimos algo como uma estrutura de dados que (acreditamos que) capta as relações de tal domínio. Como pontuaremos abaixo, a maneira como esta estrutura é obtida do nosso domínio de conhecimento é complexa, e da mesma forma é problemático o modo como os vários elementos da estrutura são relacionados com os objetos da realidade. De todo modo, a interpretação de uma sentença S que se refere a uma estrutura de dados é feita com a ajuda de uma estrutura conjuntista $\mathfrak{A}$, a qual matematicamente 'substitui' a estrutura de dados 'reais'. Como diz Muller (MULLER, 2008), quando consideramos estruturas que representam certas disciplinas científicas que falam algo sobre a realidade física, é exatamente que este sistema físico é ou tem esta estrutura.[12] É importante notar que não é possível provar que existe um isomorfismo entre essas duas estruturas (a da 'realidade' e a matemática), já que a noção de isomorfismos – tal como vimos – vale apenas entre estruturas formais. É claro que da mesma forma a assunção de que tais estruturas representem (ou modelem) uma realidade é uma afirmação muito forte, mas como vimos este é o uso essencial de estruturas e seu tratamento com objetos unitários que pode ser reconhecido como fundamental por acreditarmos que isso 'represente' (ou capture) matematicamente aspectos relevantes do mundo. Deste modo, as estruturas matemáticas em ciência são usadas para descrever, modelar, representar, descrever, explicar, entender etc. a natureza e, por conseguinte, as teorias científicas. Como ainda enfatizado por

[11] Outros exemplos de espécies de estruturas matemáticas podem ser construídos como para o caso de espaços vetoriais, topológicos, teoria dos corpos etc., de modo que é possível definir estruturas para todas as teorias matemáticas usuais (*cf.* (KRAUSE, 2002, p. 21)).

[12] E neste sentido, como diz F. Suppe (SUPPE, 1977, p. 3), "se algum problema em filosofia da ciência pode ser justificadamente aclamado como o problema central mais importante, é aquele da natureza e estrutura das teorias científicas".

Truesdell (TRUESDELL, 1977): "Eu não penso que seja possível escrever a história de uma ciência até que essa ciência tenha sido bem compreendida graças a uma clara, explícita e decente explicitação de sua estrutura lógica." Neste sentido, a utilização de estruturas em ciência e, por conseguinte, a axiomatização de certas parcelas do conhecimento, é componente de importância fundamental na filosofia da ciência pois seu papel – entre outros – é introduzir claridade com respeito aos conceitos básicos da teoria, uma comparação entre as mesmas, potencializar técnicas matemáticas e até mesmo para esclarecer a natureza de certos problemas filosóficos (como, por exemplo, exatamente o da identidade e da individualidade que estamos trabalhando neste texto). O método axiomático permite assim uma análise crítica das teorias científicas no sentido de sua estruturação precisa, permitindo até mesmo a demonstração de resultados metamatemáticos sobre as mesmas (como os que vimos nesta tese).[13] Entretanto, como visto, tal construção é erigida em uma teoria de conjuntos, e como estamos tentando demonstrar acaba por ficar assim comprometida com as concepções formais da teoria conjuntista que em particular utilizamos. No decorrer deste capítulo falaremos mais sobre esta ligação.

8.3 ESTRUTURAS QUÂNTICAS

Como já pontuamos, facilmente podemos sustentar a ideia que o cientista elabora suas teorias — em especial as da física — usando alguma matemática. Como também já discutimos, tal matemática pode ser em geral obtida na teoria ZFC, a qual serve para alicerçar conceitos como funções, derivadas, equações diferenciais, medidas etc., que permitem ao cientista 'modelar' *dentro* desse construto *conjuntista* os objetos físicos com os quais trabalha. O cientista associa *diretamente* às entidades matemáticas àquelas com as quais lida em laboratório, raciocinando como se de fato os vetores, por exemplo, descrevessem situações físicas "concretas". É claro que, como ressaltamos, o modo como se dá tal ligação é matéria de dabate na filosofia: os antigos positivistas lógicos, por exemplo, falavam em *relações coordenadoras* para atribuir um certo conteúdo empírico a pelo menos alguns termos teóricos (SUPPE, 1977), mas a questão é delicada e não há pleno consenso sobre como vincular as nossas teorias com 'realidade'. Isso, no entanto, não impede a prática científica.

Vejamos então agora um dos exemplos que nos interessam, a saber, o que se refere a uma estrutura que esboce os 'traços gerais' de uma teoria

[13] Não obstante, é bom ressaltar que quando procedemos a axiomatização de uma disciplina, na verdade criamos outra coisa que somente por similaridade podemos identificar com o que tínhamos antes.

como a mecânica quântica não relativística.[14] No sentido aqui exposto, do ponto de vista matemático *uma* mecânica quântica não relativística pode ser vista como uma estrutura (KRAUSE e ARENHART, 2012):

$$QM_{NR} = \left\langle S, \{\mathscr{H}_i\}, \{A_{ij}\}, \{T_{ik}\} \right\rangle_{i \in I, j \in J, k \in K},$$

onde S é um conjunto de sistemas físicos; $\{\mathscr{H}_i\}$ é uma coleção de espaços de Hilbert; $\{A_{ij}\}$ é uma coleção de operadores Hermitianos sobre o espaço $\mathscr{H}_i$; e $\{T_{ik}\}$ é uma coleção de operadores unitários sobre $\mathscr{H}_i$ (tal que $\{T_{ik}\} \subset \{A_{ij}\}$), de modo que os seguintes 'axiomas' que regem os elementos da estrutura sejam satisfeitos (MCMAHON, 2006, p. 205ss.; KRAUSE e ARENHART, 2012; MACKEY, 1962, p. 63ss.; TORALDO DI FRANCIA, 1981, p. 270ss.):

1. Para cada sistema físico $s \in S$, associamos um espaço de Hilbert complexo $\mathscr{H}_s \in \{\mathscr{H}_i\}$. Os vetores $|\psi\rangle, |\chi\rangle$ etc. deste espaço representam os estados do sistemas físico e são chamados (os vetores) de *vetor de estado do sistema*: eles representam tudo o que sabemos sobre o sistema. Tais vetores são tais que para qualquer número complexo k, $k \cdot |\psi\rangle$ representa o mesmo estado que $|\psi\rangle$. Quando temos um sistema composto por diversos elementos de S, associamos a ele o produto tensorial dos espaços de Hilbert de cada um dos elementos do sistema (tal como vimos no capítulo 3 desta tese). Sendo assim, se o cardinal do subconjunto do sistema é n, o espaço de Hilbert deste sistema composto é $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{s_1} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_{s_n}$. Um vetor neste espaço composto é então escrito como $|\psi_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_n\rangle$, ou simplesmente $|\psi_1\rangle \ldots |\psi_n\rangle$.

2. Tenha $|\psi(t)\rangle$ representando o estado do sistema no tempo t.[15] Então para cada $|\psi\rangle$, associamos um operador unitário T_s, tal que para qualquer instante de tempo t temos que

   $$|\psi(t)\rangle = T_s(t).\, |\psi(0)\rangle,$$

   onde $|\psi(0)\rangle$ é o estado do sistema no tempo $t = 0$ (estado inicial). Esta expressão representa a evolução unitária (no tempo) do vetor de estado e é determinística. Na verdade, tal equação é uma forma abreviada da chamada *equação de Schrödinger* que, em uma das formas, pode ser escrita como

   $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle,$$

[14] Uma estrutura para a mecânica clássica de partículas pode ser vista na seção 2.5.2 desta tese.
[15] O tempo, aqui, é tomado como um parâmetro externo.

onde $\hbar = h/2\pi$ (sendo h a constante de de Planck); i é o número complexo igual a $\sqrt{-1}$; $\partial/\partial t$ é a diferenciação parcial em relação ao tempo agindo sobre $|\psi\rangle$ e representa exatamente a razão de mudança de $|\psi\rangle$ com respeito ao tempo; e H é o operador Halmiltoniano que expressa a energia total do sistema (PENROSE, 1989, p. 372).

3. Dada uma quantidade física A mensurável, os autovalores de A, isto é, aqueles escalares reais a_i tal que $A|\psi_i\rangle = a_i.|\psi_i\rangle$, são os possíveis resultado da medição de A. Assume-se que um operador Hermitiano representa quantidades físicas observáveis que podem ser medidas sobre o sistema em um certo estado.

4. É sabido que qualquer operador hermitiano A é diagonalizável, o que significa que podemos encontrar uma base ortonormal $\{|\alpha_i\rangle\}$ para o espaço de Hilbert considerado formado pelos autovetores de A. Desta forma, para qualquer estado $|\psi\rangle$, escrevemos $|\psi\rangle = \sum_i c_i|\alpha_i\rangle$, onde $c_i = \langle\alpha_i|\psi\rangle$ são os coeficientes de Fourier. Além disso, temos $|c_i|^2 = P_i$ representando a probabilidade de que uma medição de A dê o valor a_i. Este último postulado é conhecido como *regra de Born*.

5. Se a medição de uma quantidade física A dá o resultado a_i, o vetor de estado $|\psi\rangle$ torna-se $|a_i\rangle$ imediatamente após a medição. Isto é conhecido como o *colapso do vetor de estado*.

Podem existir variações para a estrutura acima apresentada de acordo com o forma como descrevemos os axiomas ou o que assumimos como pertencente à n-upla da estrutura (e, por isso mesmo, utilizamos o termo "*uma* mecânica quântica não relativística" para se referir a essa estrutura). Com efeito, prof. Newton da Costa,[16] por exemplo, apresenta a seguinte estrutura quântica (ou, como ele mesmo chama, "sistema quântico abstrato") elaborada ainda em ZFC:

$$\mathfrak{M} = \left\langle \mathscr{C}, \mathscr{H}, \mathscr{E}, \psi, \mathscr{O}, P, \mathbb{R}^4 \right\rangle,$$

onde $\mathscr{C}$ é uma combinação, com repetição, de n objetos (chamados de partículas ou simplesmente de objetos quânticos); $\mathscr{E}$ são os estados possíveis do vetor ψ (o qual, como vimos, pode ser representado por um vetor unitário em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$); $\mathscr{O}$ é um conjunto que representa os observáveis do sistema (massa, spin, carga elétrica etc); P é uma função no conjunto $[0,1]$ chamada de 'função probabilidade'; e $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{R}^3$ é o espaço Euclidiano usual (com a noção de distância) e $\mathbb{R}$ a dimensão tempo.[17]

[16]Em seminário dado em 28/05/2012 no programa de pós-graduação em filosofia da UFSC.

[17]Interessante notar que, do ponto de vista filosófico, esta abordagem pode ser criticada com o argumento de que ao se tomar as "combinações com repetição de n objetos", o que se está

Esta estrutura também deve satisfazer certas condições que podem facilmente ser adaptadas das apresentadas no exemplo anterior. Além disso, predicados de Suppes para essas duas estruturas que representam a MQ podem ser facilmente erigidos. Vale ressaltar que nesta última formulação dada, temos clara menção à noção "partícula", coisa que não se apresenta no primeiro exemplo (no qual aparece apenas a noção de "sistema físico"). Com efeito, parece que a noção de partícula não é mesmo essencial à teoria quântica, pois segundo alguns filósofos poderíamos carecer deste conceito (pelo menos do prisma matemático) sem problema algum: é o caso existente nas teorias quânticas de campos. Mais à frente discutiremos um pouco mais desse detalhe, já que isso é importante para nosso trabalho.

8.3.1 Um exemplo da química

Um último exemplo é uma estrutura que erigimos com o intuito de 'descrever' os átomos e moléculas assumidos pela química, todavia agora usando como alicerce a teoria de quase-conjuntos em detrimento às teorias conjuntistas clássicas (SCHINAIDER e KRAUSE, 2014D). Neste sentido, nosso principal objetivo era encontrar um modelo matemático *conjuntista* que servisse para descrever algumas das principais características dos compostos químicos levando em conta a indiscernibilidade de seus constituintes e deles mesmos. Interessante notar que de certa forma a questão da indistinguibilidade dos elementos químicos já havia sido ressaltada por John Dalton (o pai da química moderna), quando falando em termos de "similaridade" disse ainda em 1808 que

> [s]e as partículas últimas de um corpo, tal como a água, são todas similares, isto é, da mesma forma, peso, etc. é uma questão de alguma importância. Pelo que se sabe, não há razão para considerar diversidade nesses particulares: se ela existe na água, deve igualmente existir nos elementos que constituem a água, a saber, hidrogênio e oxigênio. Agora, é difícil conceber como os agregados de partículas dissimilares poderiam ser uniformemente os mesmos. Se alguma das partículas da água fosse mais pesada do que as outras, se uma parcela do líquido em qualquer ocasião fosse constituído principalmente dessas partículas pesadas, deveria supostamente afetar a gravidade especí-

fazendo é simplesmente 'esconder' a individualidade dos objetos considerados, que continuam ainda a ser indivíduos do modo que já discutimos repetidamente neste trabalho, já que o esquema de da Costa é desenvolvido em ZFC. Sobre tal crítica, veja também (DA COSTA, *et. al.*, 2012).

> fica da massa, uma circunstância não conhecida. Observações similares podem ser feitas com outras substâncias. Portanto devemos concluir que as partículas últimas de todos os corpos homogêneos são perfeitamente similares em peso, forma, etc. Em outras palavras, qualquer partícula da água é similar a qualquer outra partícula da água, qualquer partícula de hidrogênio é similar a qualquer outra partícula de hidrogênio, etc. (DALTON, 1808, p. 142/3)

Vejamos um caso específico, o de uma molécula de água. Sabemos da química usual que uma de tais moléculas é formada por dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, conforme o esquema bastante tosco da Figura 1:

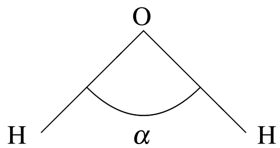

Figura 1 – Representação esquemática da estrutura de uma molécula de água, indicando-se os elementos que a compõem. O ângulo entre os átomos de hidrogênio é de α = 104,95^o, e a distância entre o átomo de oxigênio e cada um dos átomos de hidrogênio é de 0,9504 Å. Não há diferenças intrínsecas entre duas moléculas de água: elas são indiscerníveis, e o mesmo se dá com seus elementos constituintes de mesma espécie.

O que temos na figura é um esquema da *fórmula estrutural* da molécula envolvendo ângulos e distâncias e, como discutimos nesta tese, não importa qual átomo de hidrogênio ou de oxigênio em particular está na molécula: a única coisa que vem ao caso é que sejam átomos desses dois tipos.[18] Se pensarmos do ponto de vista dos fundamentos da química e acatarmos a visão acima expressa de que quando o cientista trabalha utiliza ferramentas matemáticas que se reduzem a conceitos conjuntistas, pode-se esperar (malgrada a dificuldade) que haja também alguma forma de redução conjuntista

[18] Com efeito, exemplifiquemos novamente esse ponto agora utilizando como pedra de toque uma reação química como a seguinte:

$$\mathrm{NO} + \mathrm{O_3} \to \mathrm{NO_2} + \mathrm{O_2},$$

onde uma molécula de óxido nítrico (NO) reage com uma molécula de ozônio (O_3) para produzir uma molécula de dióxido de nitrogênio (NO_2) e uma molécula de oxigênio (O_2). Obviamente, não importa *qual particular* átomo de oxigênio (e há três deles) é capturado pela molécula de ôxido nítrico para formar o dioido de nitrogênio.

das entidades mais básicas com as quais a química (e não apenas a física) trata. Todavia, as teorias científicas, como enfatizamos, envolvem muitos conceitos que não são em geral descritos explicitamente, e da mesma forma admitem regras e definições que não são formuladas tão claramente como nas disciplinas matemáticas. Como discutimos, o problema é que os axiomas das teorias usuais de conjuntos são inadequados para representar tais coleções de objetos químicos indistinguíveis, sendo que uma abordagem quase-conjuntista, atrelada a uma estrutura que não pode ser tornada rígida, agora se justifica fortemente.[19]

Neste sentido, a ideia é que possamos formar qsets que representem elétrons, nêutrons e prótons e, em sequência — pelo menos do ponto de vista conjuntista — uniões de tais elementos, 'modelando' assim átomos e moléculas de todas as variedades. Mas temos agora um primeiro ponto a enfatizar: *um átomo não é somente um agregado ou um somatório de partículas atômicas elementares*, de modo que a simples união de subpartículas feita formalmente de um modo aleatório, por si só não constitui um modelo adequado de um átomo real. Se quisermos 'construir' um átomo de hidrogênio, por exemplo, necessitamos que um próton e um nêutron estejam no *núcleo* deste átomo e um elétron esteja orbitando *ao redor* deste núcleo (ou seja, na chamada "nuvem eletrônica"). Da mesma forma, uma molécula de água não é somente a coleção de dois átomos de hidrogênio e mais um de oxigênio. Em todos esses casos necessitamos de algo mais: a *estrutura, a forma, o 'formato'* do átomo ou da molécula que é, como se sabe, dependente dos átomos que compõe cada molécula particular ou das partículas que compõe cada átomo particular. No caso da água, por exemplo, como vimos acima é imprescindível que os dois átomos de hidrogênio façam, um em relação ao outro, um ângulo de $104{,}45^o$ frente ao centro do átomo de oxigênio. Para se ter uma molécula de água é preciso que esta característica (entre outras) seja preservada. Outros tipos de moléculas irão necessitar de outras configurações particulares. Na geometria molecular temos várias classificações de 'formato geométrico' para a molécula (somente para citar algumas: linear, angular, triagonal plana, tetraédrica

[19] Interessante notar que o químico, neste sentido, em geral se utiliza do mesmo *modus operandi* do físico, isto é, também assume o nosso conhecido Postulado da Indistinguibilidade em suas teorias (é o caso de (BALL, 2003, p.378ss.; KUHN e WALDECK, 2009, p. 103ss.; TURRELL, 2002, p. 262ss.; e MCQUARRIE, 1997, p. 286ss., por exemplo). Todavia, muitas vezes o químico até mesmo nem toca nesse assunto, tomando a indistinguibilidade como algo não problemático (é o caso em (COX, 2004) e em (MURPHY, 2008)), ou então fala sobre a 'construção' dos elementos somente de um ponto de vista histórico (caso de (KLEIN e LEFÈVFRE, 2007)). Inclusive, outras vezes parece que o químico não tem nem mesmo consciência da problemática relativa à indistinguibilidade dos elementos microscópicos frente à matemática clássica que utiliza, tomando — quando é forçado a pensar no assunto — conjuntos (e conceitos relacionados) para fundamentar suas teorias em um 'modo natural': é o caso em (RESTREPO, *et. al.*, 2006A e 2006B), por exemplo.

e piramidal) dependentes dos 'tipos' e do número de átomos envolvidos. Com isto, a teoria da repulsão eletrônica dos pares e a teoria das ligações químicas (entre outras coisas, como dito) podemos 'construir' uma miríade de formas geométricas de moléculas e compostos químicos. Sendo assim, iremos mostrar abaixo como podemos manipular em uma estrutura matemática *quase-conjuntista* certas partículas elementares (m-átomos) de modo a construir *de uma forma bastante esquemática* átomos e moléculas que representem os objetos tratados pela química, evitando assim os problemas *lógicos* que advém da indistinguibilidade dos mesmos. No entanto, no sentido aqui discutido, iremos assumir um tipo de 'estrutura geral' que deverá ser completada — de um modo que ficará claro na sequência — em cada caso de acordo com a molécula que estamos construindo (como veremos, completada assim com o tipo de geometria molecular, com o tipo de ligação química etc.).[20] Por fim, vale citar que a mereologia dos compostos químicos, a qual exatamente estuda como a 'união' das partículas elementares (prótons, elétrons e nêutrons) podem ser 'somadas' para se fazer um átomo ou uma molécula, por exemplo, é uma das áreas mais em voga hoje em dia e na qual existe bem pouco consenso sobre como tais somas devem ser estabelecidas.[21]

Para mostrar como podemos 'construir' (pelo menos do ponto de vista conjuntista, repetimos) átomos e moléculas indicerníveis, temos que primeiramente estabelecer algumas definições e ampliar a teoria $\mathfrak{Q}$ de modo a incluir alguns predicados adicionais para o nosso estudo de caso. Desta forma, seja ε, π e η três predicados unários. Intuitivamente falando, para cada m-átomo x da nossa teoria $\mathfrak{Q}$, $\varepsilon(x)$, $\pi(x)$ e $\eta(x)$ irão significar que "x é um életron", "x é um próton" e que "x é um nêutron", respectivamente. A partir disso, postulamos o que segue para reger o comportamento de tais predicados:

1. $\forall x(\varepsilon(x) \vee \pi(x) \vee \eta(x)) \to m(x)$
2. $\forall x \varepsilon(x) \to \neg\pi(x) \wedge \neg\eta(x)$
3. $\forall x \pi(x) \to \neg\varepsilon(x) \wedge \neg\eta(x)$
4. $\forall x \eta(x) \to \neg\varepsilon(x) \wedge \neg\pi(x)$
5. $\forall x \forall y(\varepsilon(x) \wedge \varepsilon(y) \to x \equiv y)$
6. $\forall x \forall y(\pi(x) \wedge \pi(y) \to x \equiv y)$
7. $\forall x \forall y(\eta(x) \wedge \eta(y) \to x \equiv y)$

Ressalta-se acima o uso do símbolo de $\equiv$ (indistinguibilidade), em de-

[20] Isso se aceitarmos, como dito, que uma ciência em particular pode ser reduzida à matemática de alguma forma, haja vista que um conjunto é um objeto abstrato, enquanto que um átomo não é.

[21] Por mereologia entende-se a lógica do todo e de suas partes, e foi iniciada no século XX por S. Lesniewicz (veja-se LUSCHEI, 1962; SIMONS, 1987; e VARZI, 2012).

trimento ao de igualdade, devido aos motivos já expostos.[22]

Definição 1: Seja D um qset, tal que $qc(D) =_E n$, com $n \in \omega$ (sendo ω o conjunto dos números naturais). Todos os elementos de D satisfazem um dos predicados acima, ou seja, D é um qset de m-átomos de três tipos, os quais chamaremos por abreviação de e^-, p e n, respectivamente.

Consideremos agora uma coleção $\mathfrak{C}$ de subconjuntos de D que podem ser obtidos pelo axioma da separação da teoria $\mathfrak{Q}$.

Definição 2: Um elemento x dessa coleção (ou seja, um subconjunto de D) será: **(a)** do tipo D_1, se $qc(x) = 3$, e os elementos de x são um e^-, um p e um n; **(b)** do tipo D_2, se $qc(x) = 6$, e seus elementos forem dois e^-, dois p e dois n; e assim por diante.

Podemos supor que o quase-cardinal de D é tão grande quanto necessário e, assim, podemos formar n conjuntos do tipo D_1, n do tipo D_2 etc., bem como subconjuntos de D com mais elementos.

Definição 3: Chamaremos os qsets do tipo D_1 de "pré-átomos de Hidrogênio" (nomeados por H); os de tipo D_2 de "pré-átomos de Hélio" (nomeados por He); e assim por diante.

Vale aqui chamar a atenção para alguns fatos. O primeiro é que os elementos da tabela periódica, como se sabe, não respeitam uma progressão aritmética (no sentido de que não temos tais elementos seguindo sempre uma sequência do tipo "elemento 1 = um elétron, um próton, um nêutron"; "elemento 2 = dois elétrons, dois prótons, dois nêutrons"; "elemento 3 = três elétrons, três prótons, três nêutrons"; ...), mas sim temos elementos com número de partículas atômicas diferentes (por exemplo, a prata possui 47 prótons, 47 elétrons e ***60*** nêutrons). Deste modo, a quase-cardinalidade dos subconjuntos D_n acima tem que ser dadas por definição 'uma a uma', já que só assim conseguimos realmente expressar o que acontece na realidade.[23] Logo, o "assim por diante" da definição **3** acima não deve ser entendido como um simples acréscimo de um m-átomo de cada tipo em cada uma das classes

[22]Entretanto, observe-se que como estamos tratando com m-átomos de $\mathfrak{Q}$, realmente não poderíamos usar a igualdade.

[23]Por exemplo, os elementos x de D de tipo D_{47} (que irão exatamente representar os pré-átomos de prata) terão $qc(x) = 154$, e seus elementos são 47 p, 47 e^- e 60 n. Se a definição seguisse uma progressão aritmética, obteríamos algo como 'surplus elements', ou seja, elementos que estão definidos no nosso formalismo, mas que não existem na tabela periódica.

subsequente à D_2. Não obstante, como nosso domínio D tem um número tão grande quanto o necessário de partículas atômicas, podemos construir novos (mais massivos) elementos se forem descobertos: em nossa formalização, basta definir 'tipos mais massivos' de conjuntos D_i, sendo que o número de elementos (e^-), (n) e (p) em cada um dos 'últimos' D_i é sempre o número de elétrons, prótons e nêutrons do elemento mais 'massivo' da tabela periódica (até agora, o Ununóctio: $_{118}$Uuo). Lembramos, entretanto, que o rótulo subscrito "1", "2" etc. nos pré-átomos D_i não devem ser entendidos como dando algum tipo de 'identidade' para estes átomos: desde que eles são construídos com m-átomos da nossa teoria $\mathfrak{Q}$, eles são indicerníveis por hipótese.

Vale ainda citar que Muller (MULLER, 2008), por exemplo, também apresenta uma estrutura quântica para descrever o sistema físico composto de um átomo de Hélio (He) em um campo magnético uniforme $(B_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \langle x,y,z \rangle \longmapsto \langle 0,0,B_0 \rangle)$: $He = \left\langle L^2(\mathbb{R}^3), H(B_0), \psi, Pr_t \right\rangle$, onde $L^2(\mathbb{R}^3)$ é o conjunto básico, isto é, o espaço de Hilbert de funções complexas quadráticas de três variáveis (funções de onda complexas); $H(B_0) : D \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ é o Hamiltoniano (o operador que representa a magnitude física da energia); ψ é a solução da equação de Schrödinger, de modo que ψ é uma função de $\mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$, $t \rightarrow \psi(t)$ e é contínua se nenhuma medida é feita; e, por fim, a função $Pr_t : \Delta \mapsto Pr_t(\Delta)$ é a medida da probabilidade (regra de Born), tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, existe uma probabilidade de se encontrar um valor $\Delta \subset \mathbb{R}$ para a energia do átomo de Hélio quando medido em um estado $\psi(t)$. Todavia, diz Muller, normalmente os átomos de Hélio são caracterizados pelas suas partes constitutivas (um núcleo, consistindo de dois elétrons, dois nêutrons e dois prótons), bem como sua massa, carga e spin, e segundo o autor esta 'concepção corpuscular' *pode ser extraída do hamiltoniano da estrutura*. Deste modo, poderíamos representar um átomo de Hélio tanto pela forma que estamos acima definindo, bem como pelo modo que Muller o fez. Como nos interessa aqui apenas a discussão relacionada à identidade dos compostos, podemos optar pelo modo mais simples, tendo em mente que poderíamos também ter uma representação atômica de tais objetos que usasse o Hamiltoniano e a função ψ.[24] Um último ponto se refere ao fato de que como ainda não definimos o componente estrutural do átomo, convencionamos chamar tais átomos de "pré-átomos". Este ponto ficará mais claro na sequência.

A partir de tais postulados, podemos definir uma estrutura para os

[24] Neste artigo, Muller faz ainda algumas considerações bastante interessantes sobre o papel das estruturas na ciência e a relação entre as estruturas conjuntistas e a realidade física. Para o autor, é necessário que se construa um predicado do tipo 'intermediário' dizendo que esta (ou outra qualquer) estrutura conjuntista da mecânica ondulatória *representa* ou *descreve* um átomo de Hélio em um campo magnético, por exemplo. Não vamos aqui apresentar a construção de tal "predicado intermediário" de Muller, o qual pode ser visto no artigo citado.

compostos químicos como uma n-upla da forma

$$\mathfrak{M} = \langle D, \mathfrak{C}, Q, E, M \rangle,$$

onde:

1. D é um quase-conjunto, e $\mathfrak{C}$ é uma coleção de subconjuntos de D do modo acima definido;

2. E é uma relação de indistinguibilidade ($\equiv$) sobre o conjunto D definida a partir dos axiomas **(Q1), (Q2)** e **(Q3)**, de modo que se $(D_x \wedge D_y \wedge D_z) \in D$, então:

($\equiv_1$) $\forall D_x(D_x \equiv D_x)$;
($\equiv_2$) $\forall D_x \forall D_y(D_x \equiv D_y \rightarrow D_y \equiv D_x)$
($\equiv_3$) $\forall D_x \forall D_y \forall D_z(D_x \equiv D_y \wedge D_y \equiv D_x \rightarrow D_x \equiv D_z)$.

Como já vimos, com isto particionamos o domínio em classes indistinguíveis (no mesmo sentido — *mas não igual* — das classes de equivalência na matemática clássica). À classe de subconjuntos indistinguíveis 'tipo' D_1, (denotação: $[D_1]$), chamamos de *classe dos pré-átomos de hidrogênio*. À classe de subconjuntos indistinguíveis 'tipo' D_2, ($[D_2]$), chamamos de *classe dos pré-átomos de Hélio*, e assim por diante.

Como todas essas classes $[D_n]$ pertencem ao nosso domínio D, podemos definir uniões de elementos D_n de cada classe $[D_n]$ para formar o conjunto M de "pré-moléculas" da nossa estrutura $\mathfrak{M}$. Então, por exemplo, podemos definir (conjuntistamente) uma pré-molécula de água como sendo $H_2O = H \cup O \cup H = D_{11} \cup D_{81} \cup D_{12}$, tal que $(D_{11} \wedge D_{12}) \in [D_1]$ (ou à classe do pré-átomo de hidrogênio), e $D_{81} \in [D_8]$ (ou à classe do pré-átomo de oxigênio).[25] Como dissemos, a forma como se deve 'somar' tais elementos para se construir uma molécula de água é algo que uma adequada *mereologia química* deve responder.

Como também discutimos anteriormente, para construir uma molécula de água precisamos, *primeiramente*, somente de dois átomos de hidrogênio e somente de um átomo de oxigênio. Como todos os nossos D_1 em cada $[D_1]$ são indiscerníveis, não importa qual particular átomo de hidrogênio tomemos ou qual particular átomo de oxigênio tomemos para formar essa molécula. Da mesma forma, se trocarmos um pré-átomo de hidrogênio por outro pré-átomo de hidrogênio na classe $[D_1]$, nada muda na pré-molécula, tal como reza o teorema da inobservabilidade de permutações de $\mathfrak{Q}$ que vimos na seção 4.2.5 desta tese. Neste sentido, consoante à química, toda pré-molécula de água é indiscernível de qualquer outra pré-molécula de água, e assim por diante, já

[25] Novamente alertamos que estes números não devem ser entendidos como dando algum tipo de identidade para os átomos ou às classes.

que foram construídas com elementos indistinguíveis *ab initio*. Deste modo, vamos ao encontro tanto do pensamento de Penrose citado no capítulo 4 desta tese, como o de Dalton citado acima. Se quisermos construir outros tipos de pré-moléculas ou outras coleções de pré-moléculas, procedemos da mesma forma desde o início: como todas essas pré-moléculas foram construídas com partículas indistinguíveis, todas são indiscerníveis. Com isso podemos considerar e perfazer quase-conjuntos formados de pré-moléculas de água, de gás hélio, de cloreto de sódio etc.

Ainda que relevante, não poderemos discutir aqui tópicos como quantos átomos de hidrogênio são necessários para se perfazer uma molécula de água, ou quais e quantas moléculas são necessárias para se constituir um certo polímero, ou como estes átomos e moléculas necessitam estar configurados geometricamente para se constituir *estas* moléculas ou compostos, ou quais tipos de ligações químicas são necessárias para que tal composto tome forma, por exemplo, pois tais assuntos não concernem ao *problema lógico* aqui discutido. Como sugerido anteriormente, isso tudo estaria encerrado na parte E da nossa estrutura, a qual designa justamente a coleção de 'componentes estruturais' dos elementos (por exemplo, o componente geométrico, o componente 'tipo de ligação' (metálica, covalente, iônica etc.), e assim por diante). Em cada caso, pode-se definir uma função f com domínio E (o qset de componentes estruturais) no qset das pré-moléculas M, de modo que para cada 'tipo' de pré-molécula exista um componente estrutural também de cada tipo ligado a ela. No mesmo sentido, podemos definir uma f' de $E \mapsto D$ que 'liga' cada m-átomo (p) e (n) de D ao predicado "núcleo" em E, e o m-átomo (e^-) ao predicado "nuvem eletrônica" em E, por exemplo. A partir da definição de tais q-funções, podemos passar a chamar os subconjuntos D_n de "átomos" propriamente, e as pré-moléculas de "moléculas" propriamente, finalizando assim (do ponto de vista lógico e conjuntista, repetimos) nossa estrutura química.

É fácil provar que a estrutura acima não é rígida e nem rigidificável. Como o domínio da mesma é um quase-conjunto composto apenas de m-átomos, tal como mostramos no capítulo 5 não é possível definirmos sobre esta estrutura um automorfismo via identidade, ou mesmo estabelecer uma ordem sobre o quase-conjunto D a partir do axioma da escolha de $\mathfrak{Q}$. Isto nos garante que tais átomos e sub-partículas não poderão ser dotados de identidade de forma alguma. Este exemplo então mostra que é coerente pensar que certas estruturas adequadas para representar algumas áreas do conhecimento humano — em especial, aquelas que tratam com micro-objetos — devam ser fundamentas em uma teoria de conjuntos como $\mathfrak{Q}$, e não em teorias clássicas como ZFC. Dito de outra forma, o caso acima mostra que em certas áreas da ciência o alicerçamento formal na teoria $\mathfrak{Q}$ se justifica completamente, o que assim fortalece (agora também por outros motivos) toda a discussão encontrada no capítulo dois e três desta tese. Abaixo falaremos mais sobre isso.

De toda forma, tal estrutura não-rígida pode ser expandida a uma estrutura quase-rígida tal como reza o teorema 5 que provamos no capítulo anterior. Para tanto, basta fazer uso dos resultados que encontramos, isto é, acrescentar à estrutura $\mathfrak{M} = \langle D, \mathfrak{C}, Q, E, M \rangle$ uma relação S definida como $xSy \leftrightarrow (xRy \wedge y \equiv x)$ para cada relação existente, obtendo assim a estrutura expandida $\mathfrak{M}' = \langle D, \mathfrak{C}, Q, E, M, S \rangle$, que tal como mostramos anteriormente é quase-rígida.

8.4 SISTEMA E OBJETO QUÂNTICO

Em nossas estruturas acima dadas como exemplo, vimos que nos dois últimos casos assumimos um domínio de partículas, enquanto que no primeiro exemplo o 'domínio' era composto apenas pela noção de "sistemas físicos", sem fazer menção a nenhum tipo de partícula ou objeto quântico. Sendo assim, vale discutir com que tipo de 'realidade' a mecânica quântica trabalha e tentar estabelecer, afinal de contas, qual é o domínio das nossas estruturas quânticas. Além disso, antes de passarmos à discussão mais efetiva da noção de quase-rigidificação relacionada a tais estruturas e no que isso pode implicar, é interessante fazermos algumas observações de caráter geral sobre o *modus operandi* da mecânica quântica, o que por si só já trará certas implicações filosóficas interessantes.

A questão sobre qual é o "objeto quântico" (no sentido adjetival) ou sobre o que a MQ trata, é complexa, e desde o início várias 'soluções' foram propostas a tal tema, cada uma mais afeita a cada interpretação particular desta teoria ou até mesmo variando de acordo com a visão filosófica de cada cientista. Somado a isso, o próprio objeto quântico se 'altera' de acordo com o 'tipo' de teoria quântica que estamos trabalhando: na mecânica quântica dita ortodoxa (*i. e.*, não relativística), por exemplo, os objetos quânticos são entendidos como sendo partículas e ondas, mas na chamada Teoria Quântica de Campos (ou mecânica quântica relativística), o que temos são campos. Escusado dizer que cada uma dessas 'visões' de objeto quântico carrega consigo suas próprias dificuldades: na MQ ortodoxa, apesar de 'aceitarmos' as partículas, não conseguimos com esta teoria tratar de colisão de partículas![26] A mesma observação pode ser feita para a questão do que é "sistema quântico". Com efeito, para alguns autores, parece até mesmo não importar, enfim, o que

[26]Tal característica da MQ ortodoxa foi apresentada pelo prof. Newton da Costa em vários seminários dados no programa de pós-graduação em filosofia da UFSC.

é tal 'coisa': como diz Peres (PERES, 1993, p. 24), um "sistema quântico" é apenas uma "abstração útil" que frequentemente aparece na literatura, *mas que não existe realmente na natureza*. Em geral, diz ele, tal sistema é definido por uma classe de equivalência de preparações, isto é, uma coleção (também chamado de *enssemble*) de experimentos preparados do mesmo modo ou de objetos físicos idênticos, sejam tais objetos o que forem. "Preparações" e "testes" são as únicas (pelo menos segundo Peres) noções primitivas da teoria quântica, e o seu significado é de um conjunto de instruções a ser seguido pelo experimentador.[27] A partir de tais conceitos primitivos, erige-se a teoria quântica sem a necessidade de explicar qual é, enfim, seu objeto do ponto de vista ontológico.[28] Tal situação é no mínimo curiosa, já que pode-se dizer assim que o que temos aqui é um tipo de *'falta de significação semântica'* da noção de objeto em MQ! Não obstante, pode-se afirmar seguramente que tal ausência semântica apareceria nas nossas estruturas fossem elas baseadas em teorias de conjuntos usuais, como a de ZFC, ou em teorias de conjuntos alternativas, pois é como visto *um problema significação dos próprios termos da teoria física*, e não da matemática subjacente. Com efeito, um modelo matemático só consegue expressar o que o seu modelo pretendido está expressando. Além disso, sejam tais sistemas físicos compostos de partículas, campos, ondas (ou seja lá o que for), parece que todos vão carecer da noção de identidade, já que, como enfatizamos, tal conceito é independente de formulações particulares da noção de "objeto" nesta disciplina científica.

Outrossim, como dissemos acima, esta falta de clareza na definição do que seja "sistema físico" ou "objeto quântico" parece exatamente demonstrar que as teorias físicas são construídas com o objetivo de dar conta de alguma parcela da realidade, mas que as mesmas envolvem, por assim dizer, muitos conceitos que não são definidos tão claramente como acontece nas disciplinas matemáticas (e, por isso, uma axiomatização de tais teorias se mostra importante). Com efeito, como disse Peres, pode-se definir o sistema físico como uma "abstração da realidade" que se faz ao selecionar da mesma alguns observáveis relevantes. O sistema físico é composto, então, por um conjunto de observáveis *A, B, C...* que são eleitos de forma algo arbi-

[27] Há, inclusive, tentativas de erigir a MQ como que 'englobando' na própria teoria um conjunto de linguagens experimentais (veja, por exemplo, (BITBOL, 1996; BITBOL, 2001; DESTOUCHES, 1960; DESTOUCHES, 1948; e HEELAN, 1970)). Além das citadas no texto, a teoria quântica admite também outras abordagens, tais como via integrais de caminho de Feynmann; a chamada abordagem algébrica; a "convexa"; a operacional; a que utiliza reticulados, dentre outras. Styer e colaboradores (STYER, 2002) mencionam nove formulações da mecânica quântica.

[28] Não obstante, também pode ser defendido que a noção de sistema físico existe sim na natureza, mas na matemática o substituímos por uma representação abstrata, de modo que — como apontamos — permanece a questão de como se dão as relações entre essas duas 'partes' (esta é a posição do prof. Décio Krause, o qual tive contato em conversa particular com o mesmo).

trária. Para cada um deles, define-se um conjunto de propriedades (estados): $A = a_1, A = a_2, A = a_n, B = b_1, B = b_2, B = b_n, ...$, que representam os possíveis resultados da observação experimental dos mesmos.[29] Mas como selecionamos quais são os observáveis e as propriedades relevantes? A resposta é *pragmática*: o físico sabe, pela sua experiência, quais são as quantidades importantes dependendo do problema que está enfrentando. Tal característica pragmática acaba por se transferir, naturalmente, à 'montagem da teoria', e nos leva a não termos realmente um critério único para definir a noção de "sistema físico": é, assim, basicamente o que pela sua experiência o físico chama de "sistema físico", e ele 'sabe' quando aplica este ou aquele sistema particular para cada tipo de caso.[30] Inclusive, talvez seja assim que se ligue o formalismo da mecânica quântica ao real: através de uma questão pragmática, e é inútil buscar significado para essas noções (talvez seja também por isso que a MQ funcione tão bem apesar do seu caráter paradoxal e contraintuitivo). Dado tal 'pragmaticismo', talvez pudéssemos até mesmo afirmar que *tais teorias não têm nem mesmo modelos bem definidos* (no sentido de domínio de aplicação), o que é algo interessante para ser explorado futuramente. A teoria física deste modo encarada não retrataria o real (pois nem ela mesmo sabe bem do que está tratando), mas seria na verdade apenas um mecanismo, um algoritmo, um 'kit' para tratar o real.[31]

Já percebemos assim que a noção de 'sistema físico' é algo praticamente impossível de descrever: é algo 'fuzzy'. Para fortalecermos tal posição, é interessante fazermos aqui um contraponto. Na mecânica clássica, também temos a noção de estado de um sistema físico, e *todas* as propriedades mensuráveis do sistema são descritas pelo estado do sistema. Se for conhecido em um dado momento a localização e o *momentum* da partícula, é conhecido tudo sobre a partícula e sobre o sistema tanto no presente momento, bem como no passado (em t_0), ou no futuro (para um t arbitrário). Na MQ, como vimos, além da própria noção de "estado" e de "sistema físico" não serem bem definidas, em alguns casos *devemos escolher quais são as propriedades e os observáveis que devemos considerar.* Por exemplo, é sabido que na MQ não podemos medir o spin de uma partícula em dois eixos diferentes ao mesmo tempo: se temos um elétron e desejamos medir seu spin, devemos *escolher* (*i. e.,* montar o aparato experimental para medir) apenas um dos eixos de spin (ou *up* ou *down*), tendo assim 50% de chance de '*acertar*' a medição e encontrar o elétron com o valor de spin que 'escolhemos'

[29] Do ponto de vista formal, um sistema físico em MQ pode ser desta forma definido como sendo basicamente uma tripla ordenada $\mathfrak{S} = \langle E, O, P \rangle$, onde E é uma coleção de estados; O uma coleção de observáveis; e P uma função no conjunto $[0, 1]$, chamada de função de probabilidade.

[30] Com efeito, a equação de Schrödinger deve ser montada de acordo com o 'problema físico' que está se enfrentando: neste sentido, veja os exemplos dados em (MCMAHON, 2006, Cap. 2).

[31] Tal visão foi apresentada pelo prof. Newton da Costa em conversa particular com o mesmo.

(isto porque, como dito, não se pode montar o aparato para medir nos dois eixos ao mesmo tempo).[32] Além disso, enquanto que na física clássica o estado de um sistema é o conjunto de todos os valores das grandezas em um dado instante, na MQ — devido ao princípio da incerteza de Heisenberg — o estado de um sistema é o conjunto *maximal* de valores possíveis das grandezas: é o conjunto máximo de informações em um dado sistema, e não de todas, devido exatamente à incerteza inerente à natureza quântica.[33]

Além disso, a coisa fica ainda pior se partirmos para as chamadas *interpretações* da MQ. Segundo a interpretação de Copenhague, por exemplo, não existe nem mesmo a noção de sistema *quântico*, mas sim apenas de certos sistemas *macroscópicos* sobre os quais faço medidas (por exemplo, o caso da experiência da dupla fenda). Na interpretação de David Bohm — por sua vez — os objetos quânticos são sim objetos num sentido (que poderíamos dizer) usual e 'armamos' a equação de Schrödinger adaptada à situação, embora assumindo agora coisas a mais, tal como um "potencial quântico" (veja mais abaixo). A interpretação de Adler é parecida com a de Bohm: as partículas elementares são como o polem do movimento Browniano, e por trás desse movimento existe algo determinista e clássico, com a probabilidade se tornando assim algo totalmente estatístico (frequencial) e objetivo. Heisenberg, apesar de também ser da escola de Copenhague, discorda de Bohr em alguns detalhes: segundo tal autor, nas experiências com eventos atômicos não tratamos com coisas ou fatos, mas fenômenos; os átomos não são reais, mas formam um mundo de *possibilidades* e de *potencialidades*. Para Born, que criou exatamente a chamada "regra de Born" que vimos acima, a probabilidade não significa que existe um elétron em uma dada região, mas significa sim a possibilidade de que se eu 'medir sua posição', tudo se passe como se ele estivesse realmente ali! Para Pauli, por fim, as questões sobre a existência da MQ são como as questões da Idade Média sobre o sexo dos anjos, e

---

[32]Neste sentido, veja (PERES, 1993, p. 14ss.). Para alguns autores, inclusive, esta característica da MQ é exatamente a que reinvindicaria a utilização de uma lógica destoante da clássica nesta disciplina. Isto porque o fato de não podermos medir o spin de uma mesma partícula em dois eixos diferentes ao mesmo tempo 'fere' a chamada "Lei Distributiva" da lógica clássica: $a \wedge (b \vee c) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Assim, se por exemplo medirmos o spin do elétron numa direção, z, e encontrarmos *up* (+), podemos imaginar que numa direção diferente, z', ele teria ou *up* (+) ou *down* (-). Aplicando a lei distributiva da lógica clássica, deveríamos ter que $z(+) \wedge (z'(+) \vee z'(-)) \leftrightarrow (z(+) \wedge z'(+)) \vee (z(+) \wedge z'(-))$. Todavia, a primeira parte do resultado da distributividade $[z(+) \wedge z'(+)]$ não é permitida (não teria contraparte real) na mecânica quântica. O uso de lógicas não clássicas no contexto quânticos se iniciou a partir de uma proposta de Birkhoff e von Neumann (BIRKHOFF, 1936), e foi levado adiante, ao menos parcialmente, por Reichenbach (REICHENBACH, 1944) e Paulette Février (PAULETTE, 1951). O livro de Jammer (JAMMER, 1974, cap. 8) apresenta uma boa discussão sobre o assunto.

[33]Uma comparação entre os postulados da MC e da MQ pode ser encontrada em (SHANKAR, 1994, p. 115ss.).

logo não valem a pena ser discutidas.[34] Logo se vê que nessa discussão estão embrenhados temas tanto de origem física, ontológica e metafísica. Não obstante, senão sobre partículas ou algum evento físico existente, sobre o que os físicos falam afinal? Novamente, se estivermos no 'caso clássico', isso é fácil de responder: como vimos, assumimos a existência de partículas (ou pontos materiais geométricos, por assim dizer) e a partir daí erigimos (ou, como no caso aqui em voga, estruturamos) nossa mecânica. Mas no caso da MQ, novamente, por onde começamos? Por partículas (elas existem?) ou apenas por sistemas físicos?[35]

Tudo isso se reflete na própria axiomatização desta teoria. Existem diversas axiomatizações possíveis para a MQ que levam em conta diferentes lógicas e matemáticas (por exemplo, existem axiomatizações usuais com lógica clássica, com lógica não-reflexiva, com lógicas que derroguem a lei distributiva da lógica clássica tal como mostramos acima etc.),[36] a ponto de Newton da Costa afirmar, inclusive, que "cada axiomática é um tipo de comprometimento da pessoa com uma visão da MQ em particular".[37] Não obstante, mesmo com lógicas alternativas, em algumas construções da MQ feitas em tais arcabouços ainda se continua a carecer a noção de partícula (é o caso, por exemplo, de (MCMAHON, 2006, Cap. 1)): continuamos a ter apenas a noção de "sistema físico" e, como dito, um silêncio se bate sobre a ontologia dos objetos de tal sistema. Contudo, no caso de defendermos a visão de que a MQ realmente trabalha com partículas, o que seria enfim um corpúsculo (elementar)? Já vimos que a teoria quântica nada diz sobre isso e que, a partir dela, não existe maneira intuitiva de se interpretar a noção de partícula. Todavia a equação de Schrödinger (ao menos informalmente) se refere a partículas, e no discurso usual do físico há menção diária a partículas: Penrose, por exemplo, em um capítulo de um de seus livros fala extensamente em "partículas quânticas" (PENROSE, 2005, cap. 21). Dado tal existência da noção de partícula no discurso usual do físico, e a inexistência da mesma na teoria (ou em algumas interpretações dela), será que estaríamos aqui enfrentando um caso de '*meta-contradição*'?

No sentido da discussão aqui arrolada, Toraldo di Francia, em um texto muito elucidativo (TORALDO DI FRANCIA, 1981, p. 220ss.), diz que os

[34] Todas essas posições foram dadas pelo prof. Newton da Costa em aulas. Neste sentido, veja também (PENROSE, 2005, cap. 21 e 29).

[35] De qualquer modo, é interessante citar a postura de Auyang, para quem "as teorias físicas são sobre coisas" (AUYANG, 1995, p. 152) e que, apesar de que nas teorias quânticas de campos os campos constituem a entidade ontológica básica, "esta é uma *coisa* e não [apenas] uma região espacial" (p. 150, grifo meu).

[36] Em (PENROSE, 2005, p. 785ss.), Penrose analisa algumas dessas axiomatizações e interpretações da MQ.

[37] Frase proferida em seminário dado em 27/09/2010 no programa de pós-graduação em filosofia da UFSC.

objetos da física são as coisas que respeitam as leis da física. Esta também é a posição de Russell (RUSSELL, 1926, p. 115), e tal como vimos na seção 2.3 desta tese é o que Toraldo di Francia chama de *objetos nomológicos* (TORALDO DI FRANCIA, 1981, p. 222). Sendo assim, no intuito de responder a questão acima sobre o que seriam as partículas quânticas (isso se aceitarmos que elas existem), poderíamos dizer que pode-se assumir uma ontologia do objeto quântico de acordo com a interpretação que se adote: só para citar um exemplo, para Heisenberg, os elétrons deveriam ser representados por quantidades mensuráveis, todavia não sendo entendidos como partículas, mas sim como frequências de radiação! (*cf.* (RUSSELL, 1978, p. 54)). Entretanto, diz Toraldo di Francia (TORALDO DI FRANCIA, 1981, p. 222), "para enunciar as leis do eletromagnetismo, devemos considerar as cargas elétricas ou dipólos magnéticos. Mas nenhuma lei diz como estes corpos são necessariamente feitos, que massas, que cargas, que momentos dipolares eles tem"; uma posição que novamente pode muito bem ser adaptada ao contexto da física quântica e, assim, agora destronar a ideia de que podemos entender os objetos quânticos de acordo com a teoria que se adote. Não obstante, é interessante notar que logo após tal passagem (p. 271), Toraldo di Francia toma como exemplo "o caso no qual o sistema [quântico] é uma *partícula* com o vetor de estado $|\psi\rangle$" e fala do "observável 'posição da *partícula* no eixo x' " (grifos meu). Claro se vê que até mesmo no texto de Toraldo di Francia a noção de partícula permeia toda a discussão e, ao menos intuitivamente, o físico realmente lança mão dela (apesar de não saber ao certo o que é, afinal de contas, essa partícula!). Contudo, ainda alerta ele, também não podemos afirmar que estamos trabalhando com partículas na acepção clássica da palavra, mas ao mesmo tempo também não podemos afirmar que estamos trabalhando com ondas, por exemplo, devido à dualidade onda-partícula:

> Estamos lidando com ondas ou não? De acordo com as considerações já feitas, não estamos lidando com ondas, mas entidades às quais a distribuição de probabilidade obedece uma equação análoga àquela das ondas. [...] Então elas são corpúsculos? Certamente não, se por corpúsculo queremos dizer um agregado de um enorme número de pequenas entidades, tais como àquelas que constituem corpos macroscópicos. Além disso, tal conceito seria *contraditório*! Sim, pense, se por um corpúsculo querermos dizer uma entidade que obedece a mecânica quântica. Isto, por sua vez, é *tautológico*. Mas poderia ser de outra forma? (TORALDO DI FRANCIA, 1981, p. 277, grifo do autor).

Logo se vê que tal assunto é bastante delicado e que talvez os autores não queiram, enfim, tocar nessas polêmicas devido à dificuldade de serem solucionadas. Interessante então citar, por fim, a posição de d'Espagnat (d'ESPAGNAT, 1999), para quem *"somente por definição podemos afirmar que o sistema quântico tem tais propriedades* [ou onda ou partícula]" (grifo meu). Ficaremos aqui com esta posição e, quando formos chamados a indicar o que são nossos objetos quânticos, o faremos também por definição.

8.5 ESTRUTURAS QUÂNTICAS QUASE-RÍGIDAS

Agora podemos investigar as implicações dos temas discutidos neste trabalho para a formulação da mecânica-quântica não relativística.

Como a teoria dos quase-conjuntos, e em especial a questão das estruturas quase-conjuntistas não-rígidas, podem ser aplicadas no estudo de alguns aspectos da MQ? Vamos considerar a segunda estrutura acima, a qual erigimos para representar a mecânica quântica não relativística, ou mesmo a estrutura construída para captar aspectos relevantes da química. Como vimos, o primeiro elemento dessas estruturas, a saber, o que representa (mesmo que seja nas palavras de d'Espagnat, por definição) uma coleção de partículas, pode ser pensado como sendo um conjunto (o domínio da estrutura), embora deva-se levar em conta a dificuldade já mencionada com relação à representação formal de certas parcelas da realidade. A partir da nossa discussão apresentada em capítulos prévios, vimos que podemos defender a ideia de que os membros de tais conjuntos (ou seja, as partículas) carecem da noção de identidade, e que é assim problemático fundamentá-los em um teoria de conjuntos usual como ZFC. Desta forma, vamos assumir que os conjuntos $\mathscr{C}$ e D dos exemplos mostrados sejam quase-conjuntos representando partículas indistinguíveis (m-átomos) do mesmo tipo ou de tipo diverso (tal como o já fizemos para o exemplo da química), e assim que tais estruturas sejam então quase-estruturas. Estes qsets têm um quase-cardinal: para as aplicações em física, finito. Neste caso, mesmo sem sermos hábeis em discernir os elementos de $\mathscr{C}$, por exemplo, podemos associar a cada um deles um espaço de Hilbert $\mathscr{H}_i$,[38] e o resto do esquema pode ser construído da mesma forma. Tal como vimos, a diferença aqui é que enquanto numa estrutura clássica os objetos são indivíduos na acepção plena da palavra, na estrutura quase-conjuntista não temos esse comprometimento com a individualidade dos mesmos.

O que importa salientar com isso é que se aceitarmos esta representação, uma quase-estrutura para a MQ que tenha por alicerce a teoria dos quase-conjuntos — além de não se comprometer com a identidade de seus

[38]Obviamente, se as partículas são indistinguíveis, tomamos o mesmo espaço de Hilbert associado a elas, e descrevemos seus estados através do produto tensorial deste espaço consigo mesmo tal como vimos na seção 3.3.2 desta tese.

componentes — não é possível de ser rigidificada, como mostramos. Isso nos dá segurança para defender a posição de que algumas áreas do conhecimento podem (e devem!) ser alicerçadas em teorias (no nosso caso, conjuntistas) que sejam alternativas, e que não se comprometam com certas posições que — pelo menos do ponto de vista filosófico — podem ser problemáticas. Em suma, esta não rigidificação mostra que podemos realmente afugentar o 'fantasma da identidade' para as teorias fundamentadas em $\mathfrak{Q}$, e que os m-átomos podem ser realmente tomados como não-indivíduos legítimos, coadunando-se assim com uma interpretação da MQ — e assim da química, dado que de certa forma a química pode ser reduzida à MQ — bastante plausível. Com isso demonstrado, a assunção de tal teoria quase-conjuntistas para fundamentar estruturas para a ciência (em especial, as que têm características de não-individualidade para seus objetos, como argumentamos) parece se tornar determinante, haja vista que as estruturas baseadas nas teorias clássicas parecem conflitar com toda essa abordagem não-individualista dos objetos da microfísica. Como comentado acima, a abordagem da ciência via estruturas por si só já traz um ganho conceitual enorme por permitir, entre outras coisas, sublevar questões que estavam veladas, e com isso trazer clareza filosófica oferecendo à vista mesmo assuntos de natureza metaestrutural. Deste modo, da discussão realizada neste capítulo, se vê a importância de que tais estruturas não sejam fundamentas em teorias de conjuntos usuais. O que defendemos, assim, é que os resultados que alcançamos, a saber, a demonstração da impossibilidade de rigidificação de estruturas quase-conjuntistas, aplicada em um exemplo bastante interessante para o caso da química em particular, parecem fortalecer a posição de que algumas teorias científicas devem realmente ser embasadas na teoria de quase-conjuntos. Este resultado justifica todo nosso esforço até aqui. Abaixo continuaremos a falar mais sobre tal contenda e no que isso pode nos levar.

Outro ponto importante é o fato de que mesmo sendo a quase-rigidificação sempre alcançável, continuamos não nos comprometendo com a identidade dos objetos, ou melhor dizendo, a quase-rigidificação não nos leva à identidade dos objetos do domínio. Com efeito, como vimos, podemos sempre estender nossa quase-estrutura com a inclusão de 'quase-relações de indiscernibilidade', mas mesmo assim, em tais quase-relações, qualquer objeto indistinguível de um x, por exemplo, pode 'fazer o trabalho'. Desta forma, na nossa q-rigidificação, mesmo 'visto de fora' (isto é, na estrutura expandida q-rígida) todos os objetos do domínio da nossa q-estrutura continuam a ser não-indivíduos, destoando assim do caso clássico onde eles 'se tornam' indivíduos (do modo descrito anteriormente). Com efeito, na nossa q-estrutura q-rigidificada, em um q-automorfismo a função q-identidade ligará um indiscernível a um indiscernível do mesmo tipo, mas não necessariamente a 'um deles em particular', já que para tanto se faz necessário a noção de identidade em sua plenitude. Neste sentido, também não estamos incluindo na nossa quase-rigidificação uma possível noção de identidade 'disfarçada'. Assim, apesar de conseguirmos construir tal intento quase-rigidificador, a noção de identidade não tomou realmente forma em tal construto: isso quer dizer que mesmo com a noção de quase-rigidificação, não estamos maculando os preceitos básicos da teoria de quase-conjuntos.

Por fim, uma última crítica que poderia ser feita ao nosso estudo é que quando estendemos a nossa estrutura incluindo na mesma novas relações, na verdade estamos criando uma *outra* estrutura. Com efeito, do ponto de vista formal, este realmente é o caso: a inclusão de uma nova relação que seja, já faz da estrutura original uma estrutura diferente do ponto de vista matemático. Neste caso, formalmente, se torna um tanto incongruente falar que na teoria de conjuntos clássica, sempre que estendemos uma certa estrutura não-rígida a uma rígida, esta estrutura ainda é a *mesma* estrutura original. Não obstante, esta crítica pode ser respondida dizendo que do ponto de vista *filosófico* (e *prático*), de certo modo continuamos sim com a 'mesma' estrutura original: ainda estamos com o mesmo domínio, e podemos dizer que apenas refinamos as relações existentes sobre o mesmo encontrando características estruturais que — pelo menos no caso de estruturas baseadas em ZFC — estavam apenas 'veladas'. Podemos assim dizer que do ponto de vista filosófico a 'mesma' estrutura original está agora apenas mais aprimorada, a ponto de revelar coisas (relações) que estavam ocultas. Deste modo, desse ponto de vista 'informal', continuaria haver sentido em dizer que o que temos é sim a 'mesma estrutura', apenas agora expandida a uma estrutura rígida, e continua assim ser válido toda nossa crítica e a necessidade da abordagem quase-conjuntista a partir dela.

O que se tem (e o que se objetivou durante toda essa discussão) foi tentar tratar de um modo mais natural a falta de identidade para as partículas quânticas, e estudar o 'alcance' de tal falta identidade em suas mais variadas frentes formais. Além disso, outro ponto interessante seria a possibilidade de, consoante com a abordagem semântica, erigirmos um tipo de *predicado teórico quase-conjuntista*, tomando por alicerce da estrutura agora a teoria de quase-conjuntos. Seria assim produtivo estudarmos as consequências de tal predicado para tal abordagem, já que o mesmo teria como modelo pretendido a MQ (ou representaria a contraparte matemática da MQ), com o domínio da estrutura composto por *m*-átomos indistinguíveis que respeitariam os axiomas para a MQ dados anteriormente. Além disso, como vimos, apesar da abordagem semântica dar ênfase ao caráter estrutural em detrimento à sintaxe, podemos indagar a qualquer momento qual base matemática devemos utilizar em tal construção, por qual teoria de conjuntos começar e por qual lógica: no caso, aqui, defenderíamos que devemos começar por uma teoria de quase-conjuntos que tem por base uma lógica não-reflexiva. Tal questionamento é importante, e vários argumentos foram dados mostrando que os 'problemas de identificação' que pontuamos neste trabalho acabariam por fatalmente se transferir ao predicado de Suppes, dado que este último também é erigido em uma teoria de conjuntos. Tais interrogações relativas a um predicado de Suppes quase-conjuntista, bem como sua diferença e alcance perante à construção clássica, embora não sendo exploradas completamente aqui, se mostram bastante frutíferas para o filósofo da ciência abjetá-las, tornando-se assim mais um dos assuntos passíveis de pesquisa futura.

8.6 EM BUSCA DE UM 'PLURALISMO ESTRUTURAL' E DE UMA METAFÍSICA SEM IDENTIDADE

O sucesso do método axiomático levou Hilbert, em sua lista dos 23 problemas da matemática, a propor o sexto como a axiomatização das teorias da física. Neste sentido vários trabalhos foram feitos, como os de Hertz, Boltzmann e Volkmann sobre os fundamentos da mecânica, e posteriormente outros como os de Truesdell, Noll e Suppes, só para citar alguns mais conhecidos (KRAUSE, 2002). Como dissemos rapidamente acima, a abordagem via métodos formais tem o intuito de enfatizar a discussão filosófica e formal de certas teorias bem desenvolvidas da ciência, que são, em geral, dada via uma formulação matemática. Neste caso, enfatizamos, tem papel de destaque as teorias da física e da química.[39] Além disso, podemos dizer que tal abordagem pode nos fazer entender de um modo mais completo o próprio método científico de modo a assim conseguirmos, se for o caso, até mesmo criticá-lo de uma forma mais sensata. Isto de certa forma foi o que transpareceu no nosso estudo de caso, haja vista que uma das características da abordagem estrutural (a saber, a rigidificação das estruturas e, assim, uma 'identidade' para seus elementos) acabou emergindo exatamente da análise feita através de uma abordagem formalista. Desta forma, se pensarmos que há varias teorias conjuntistas (algumas até mesmo não equivalentes entre si), já teríamos motivos suficientes para justificar que uma análise da fundamentação matemática da ciência tem uma justificativa filosófica considerável. Com efeito, o modo de formalização de uma teoria é repleta de consequências científicas e filosóficas, e revela até mesmo os limites do nosso formalismo e das nossas teorias. Como diz Sklar,

[39] Embora tal abordagem possa ser também ser aplicada em outras área do conhecimento, como a biologia, por exemplo (neste sentido, veja (KRAUSE, 2002, seção 2.4).), ou mesmo à teoria do aprendizado (*cf.* (SUPPES, 2002, p. 33)).

> nossa caracterização de termos como primitivos ou definidos, e nossa caracterização de consequências como "de definição" ou "de postulação", são decisões que implicitamente revelam nossa crença sobre os limites da testabilidade observacional de teorias e sobre a habilidade dessas teorias em ultrapassar esses limites em seu conteúdo; nossas ideias sobre o significado de termos teóricos, como eles são fixados, e como eles mudam, e nossa visão sobre o lugar da teoria formalizada tanto no contexto histórico das teorias que a precedem, bem como no que está envolvido e é assumido na ciência futura que antecipamos, o que irá talvez envolver a pressão sobre novas observações e novas teorizações. Dado que isso se articula com a formalização que escolhemos, devemos sem surpresa concluir que esta escolha não é algo trivial, mas requer a utilização total de nossa melhor metodologia científica e filosófica disponível. Se formalizar é mais que meramente 'logicizar', isto é, teorizar, então necessita, para ser mais adequada, de todos os recursos necessários para uma teorização em geral.[40]

O fato da lógica, e aqui em especial a teoria de conjuntos, providenciar ferramentas para um debate frutífero de temas na própria filosofia dita 'pura' é facilmente evidenciado pelo fato de que, como diz Suppes, não há nenhum modo de desenhar uma distinção entre uma peça de matemática pura e uma peça de ciência teórica (SUPPES, 2002, p. 33). Em particular, na filosofia da ciência, muitos problemas centrais (como o da identidade) só podem ser discutidos em todos os detalhes a partir da análise da teoria de conjuntos que uma ciência está assentada, haja vista que — como vimos — podemos identificar os métodos formais com métodos conjuntistas. Neste sentido, qual a melhor formalização para certas teorias científicas também deve ser analisada: dado que esta formalização se compromete com certos pressupostos formais desde seu nascimento, isto leva a uma discussão sobre a própria natureza da teoria científica em apreço. Obviamente, as teorias não são apenas um cálculo lógico, como Suppes mesmo enfatizou (*ibid.*, p. 27), mas acreditamos que a nossa abordagem — entre outras coisas — vem ajudar exatamente na *discussão de qual a estrutura conjuntista que melhor represente uma teoria científica*.

Neste sentido vimos que algumas teorias científicas parecem ser melhor sustentadas matematicamente (e estruturalmente) na teoria quase-conjuntos,

[40] Sklar, L., Facts, conventions and assumptions in the theory of space-time. In: J. Earman, C. Glymour and J. Stachel (eds.), *Foundations of space-time theories*. Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 206-274, 1977 (citado em (DA COSTA e FRENCH, 2003, p. 23)).

no nosso caso especial naquelas em que tomamos apenas *m*-átomos como objetos primordiais, o que como dissemos justifica efetivamente o uso de uma abordagem não clássica. Aqui exemplificamos isso tanto com a MQ e com a química em particular, mas nada impede que outras áreas do conhecimento científico também 'necessitem' de estruturas construídas na teoria $\mathfrak{Q}$. Entretanto, também pensamos que outras áreas do conhecimento (como a física clássica) não precisam efetivamente ser embasadas em estruturas e arcabouços lógicos diferentes do clássico, ferramentas estas que funcionam plenamente bem para tais áreas.[41] Sendo assim, imaginamos que o ideal seria um tipo de *'abordagem estrutural pluralista'*, onde de acordo com o caso se faz uso de ferramentas teórico-conjuntistas mais condizentes com a situação. Para a MQ, uma estrutura quase-conjuntista que não pode ser rigidificada, para a mecânica clássica, uma estrutura baseada em ZFC. Nosso entendimento formal de uma ciência por inteiro se mostraria assim como uma 'colcha de retalhos', e não se pode dizer que os retalhos sejam incompatíveis entre si já que cada um cobre uma sub-área particular dessa ciência. Essa visão de que precisamos lançar mão de várias 'frentes teóricas' para entender um corpo de conhecimento obviamente não é nova (na filosofia, a fenomenologia nos mostra isso muito bem). Porque no caso da física, para um entendimento completo desta ciência, deveria ser diferente?

Não teríamos assim apenas uma estrutura, mas várias, cada uma mais afeita às particularidades de cada área de uma ciência em particular. Investigando cada uma dessas estruturas, obtemos assim justificativas para assumir uma ou outra construção a partir dos fatos *empíricos* que nos deparamos.[42] Eregi-se assim um tipo de 'ecletismo formal' na abordagem da ciência através das estruturas, e na sua filosofia. Com efeito, como se sabe, o ecletismo é uma diretriz teórica originada ainda na antiguidade grega, a qual se caracte-

[41]E mesmo no caso quântico, em alguns momentos, as teorias clássicas funcionam muito bem: considere um sistema consistindo de um único átomo de hidrogênio. Neste caso onde não existem outros elétrons, não existe a necessidade de reconhecê-lo como um não-indivíduo. Em geral, podemos imaginar alguns momentos nos quais as partículas quânticas podem ser reconhecidas como indivíduos, mas alguns outros em que não se pode afirmar isso (em especial, como enfatizamos, nos casos de sistemas emarranhados). Neste sentido, poderíamos então afirmar que existem momentos que poderíamos adotar um formalismo clássico mesmo para as partículas quânticas. O problema é que a qualquer momento elas podem perder sua individualidade e aí a visão clássica não é mais passível de uso, de modo que as duas abordagens (clássicas e quase-conjuntistas) parecem aqui demonstrar aspectos complementares. Não obstante, mesmo no caso acima do único elétron em um átomo de hidrogênio, pode-se dizer que tal partícula nunca será um indivíduo *tout court*, haja vista que *ser* um indivíduo não é a mesma coisa que *estar* individualizado (ser um indivíduo, como vimos, necessita de coisas a mais, como por exemplo a possibilidade de poder *sempre* seguí-lo). Essa individualidade para os objetos quânticos, quando existe, pode-se dizer que é assim *transitória*, tanto física como metafisicamente.

[42]De certo modo, esta abordagem vai ao encontro de um perspectivismo na filosofia da ciência: veja (KRAUSE e ARENHART, 2013; e RORLICH, 1999).

riza exatamente pela justaposição de teses e argumentos oriundos de doutrinas filosóficas diversas, formando assim uma visão de mundo pluralista e multifacetada (ABBAGNO, 2007, p. 298) No nosso caso, como nosso objetivo — usando métodos formais — é entender em particular a física de um modo pleno, poderíamos ter assim uma somatório de formalismos (estruturas) diversos para compor um quadro (uma ciência) único. Talvez seja tempo dos filósofos buscarem a escolha do que parece melhor entre várias doutrinas para então compor um campo de conhecimento por inteiro, do que ficar atrelado a concepções teóricas únicas e restritas, as quais, como vimos no decorrer desta tese, só funcionam a partir de malabarismos *ad-hoc*. Não entendo porque não devemos assumir várias teorias para explicar a realidade (e uma ciência), tendo assim que ficar unicamente restrito a alguma visão formal que, por fim, não representa por completo o que realmente se manifesta. O próprio Suppes (SUPPES, 2002, p. 35), de certo modo, também pensa assim quando afirma que: "Esses esboços são para mostrar que uma atitude pluralística em relação ao conceito de estrutura pode ser defendida".[43] Não obstante, veja que não estamos aqui querendo erigir uma forma de 'relativismo formal', doutrina esta que poderia ser entendida como a visão de que adotamos um formalismo de acordo com o ponto de vista pessoal, por assim dizer. Com efeito, o relativismo pode ser criticado sob o argumento de o mesmo coloca todos os tipos de análise, absurdas ou não, em igualdade de veracidade: tudo é relativo a cada visão particular, ao 'gosto pessoal' de cada um. O que queremos é exatamente o oposto disso: defendemos a posição de que devemos buscar o que é mais sensato e que mais se coaduna com cada situação, mas algumas ferramentas continuam exatamente a não serem válidas (ou serem absurdas) para certas situações. O relativismo, neste sentido, pregaria que dado que todos os nossos arcabouços formais estão em pé de igualdade, poderíamos escolher qualquer um deles em qualquer situação, e não é isso que queremos.

A partir disso novas fontes de estudo se abrem. Como tais estruturas (clássicas e alternativas) estão interrelacionadas? Para utilizarmos uma metáfora, como a "colcha de retalhos" está costurada? Vimos neste texto principalmente os limites da abordagem clássica, mas quais são os limites mesmo da abordagem quase-conjuntista? Será que esta teoria poderia abarcar o todo o necessário para se entender uma sub-área de uma certa ciência do ponto de vista formal, ou mesmo aqui também existiriam limites nos quais

[43]Embora, antes disso, afirme: "De um ponto de vista formal, a essência desta abordagem consiste em adicionar axiomas da teoria de conjuntos ao framework da lógica elementar, e então axiomatizar teorias científicas com este framework teórico-conjuntista. Do ponto de vista dos tópicos restantes neste livro, para um fundamento axiomático, não é importante qual particular variante da teoria de conjuntos tomemos.". Esta última passagem parece refletir o entendimento de que para Suppes só haveria (e só seria necessária) as teorias de conjuntos usuais, pensamento que, como estamos tentando enfatizar, não é endossado por nós.

se abririam espaços para outros formalismos inovadores? Quais conceitos valem em uma teoria e não valem nas outras? Tomando o que é melhor em cada formalismo para construir (aí sim) uma ciência única, só temos a ganhar e não vejo o que temos a perder. Com isso a discussão da estrutura das teorias científicas pelos filósofos da ciência talvez então passe a se dar de um modo pleno e universal, a qual no momento apresenta muitas vezes um distanciamento na ligação entre a ciência, a filosofia da mesma, e por que não dizer com a realidade que elas tentam representar, ao 'obrigar o mundo' a se dobrar apenas a *um* certo formalismo. Se assumirmos tal posição, entre outras coisas, obtemos de pronto a conclusão de que o estudo da ontologia associada a cada estrutura particular pode ser mantido exatamente porque tal ontologia é válida somente *em cada* estrutura apropriada; cada uma cobrindo uma escala diferente de uma certa ciência.[44]

Esta colocação se enfatiza pelo fato de que, obviamente, as teorias de conjuntos usuais que temos foram forjadas pressupondo uma certa concepção *clássica* de realidade, uma metafísica individualizadora poderíamos dizer, e esta concepção acaba por se 'espalhar' por toda cadeia teórica formal. Agora, na presença de objetos que podem ser entendidos como não-indivíduos de acordo com certas opiniões bastante plausíveis, é tempo de tentarmos então buscar uma metafísica da não-individualidade, e a teoria de quase-conjuntos, em sua frente formal, oferece exatamente a possibilidade de trazer a metafísica para uma posição mais próxima e mais harmonizada com a epistemologia, tal como vimos nesta tese. Com efeito, para o caso clássico, podemos usualmente assumir um indivíduo como algo que — metafisicamente falando — sendo parte de um todo, uma vez substituído (mesmo por um de espécie similar), resulta que o "todo" se torna distinto do original não permutado. Isso quer dizer que um tipo de "princípio de invariância por permutação" não deve valer aqui, tal que distintos indivíduos (no sentido de que não são apenas um) não devem obedecer o princípio da substitutividade. Para adotarmos alguma forma de definição, do ponto de vista metafísico um indivíduo pode ser entendido como algo que tem as seguintes características (SCHINAIDER e KRAUSE, 2014D): (i) *sempre* apresenta (pelo menos em princípio) distinções relativamente a outros indivíduos, mesmo que sejam de espécie similar[45] (isto, como visto, está implícito na hipótese do PII); (ii) um indivíduo possui *identidade*, no sentido de que obedece uma teoria da identidade que incorpora o PII de alguma forma (aqui, tal como defendemos no capítulo 2, pode ser dito

[44]Obviamente que, nesse caso, uma discussão sobre o realismo das entidades cobertas por cada 'tipo' de estrutura ainda permanece aberta, tornando até mais clara a relação entre tal pluralismo e a realidade física (suposta existente). Não obstante, mesmo assim cada abordagem poderá assumir apenas aquilo de que necessita para 'mobiliar o mundo'.

[45]"Similar" aqui é entendido de um ponto de vista intuitivo, ou seja, algo como "semelhante", haja vista que estamos falando de objetos usuais para os quais vale a noção usual de identidade.

que um indivíduo respeita a teoria da identidade presente na lógica clássica); e (iii) dado um sistema formado por indivíduos, a permutação de um deles por outro, ainda que similar mas que não esteja presente no sistema, faz do sistema permutado algo *distinto* do sistema original (ainda que medidas sobre este último sistema coincidam com medidas realizadas sobre o primeiro, antes da permutação). Para exemplificar com um caso 'macroscópico', podemos considerar que a atual rainha da Inglaterra é um indivíduo de acordo com a definição acima. Com efeito, ela pode ser considerada como a principal pessoa da realeza britânica, de modo a assim apresentar distinções para com qualquer outra pessoa por mais parecida que esta possa ser (há fotografias que sugerem haver pessoas muito parecidas com a rainha). Sendo assim, podemos também dizer que ela realmente tem uma identidade (nenhuma sósia tem a propriedade de ser a rainha da Inglaterra) e que, finalmente, se ela for substituída por outra pessoa (digamos, em uma solenidade), também por mais parecida com a rainha que essa possa ser, a composição das pessoas em tal solenidade difere daquela que teria todas as mesmas pessoas, mas que tivesse a rainha verdadeira em seu devido lugar. Como vimos, isso não ocorre com átomos, moléculas e com outros componentes físicos elementares, de modo que um *não-indivíduo* poderia ser definido metafisicamente como sendo exatamente o oposto: (i') não apresenta distinções (nem mesmo em princípio) relativamente a outros objetos indistinguíveis; (ii') não apresenta identidade (no sentido de que não respeita as leis da identidade da lógica clássica, em especial o PII); e (iii') na permutação por outro indistinguível, não há modo algum de dizer que o sistema alterado é distinto do original. Penso que do ponto de vista metafísico, tal definição de não-indivíduo capte exatamente o que acontece com as partículas quânticas, de modo que mesmo que houvesse uma crítica dizendo que é impossível imaginar algum objeto que (metafisicamente) tenha tais propriedades, poderíamos de pronto responder — como estamos tentando mostrar — que temos os objetos quânticos que são exatamente desta forma. Sendo assim, já temos aqui (para início de conversa) pelo menos uma indicação do 'tipo' de metafísica que teremos que buscar. Entremeado ao texto que decorre, ainda exploraremos mais este assunto.

Outrossim, vale agora perguntar se a relação correta (pelo menos para tais objetos quânticos) deva realmente ser a indiscernibilidade, preterindo a identidade. Desta forma, é interessante questionar em que sentido podemos realmente dispensar a identidade para estas entidades, ou se, pelo contrário, a identidade é na realidade algo que está sempre presente e que de modo algum pode ser abandonada. Qual sentido filosófico — e 'lídimo' — em se avocar (no nosso caso) uma recusa da reflexividade? Embora os exemplos dados na discussão feita no capítulo 1 mostram que devemos estar conscientes que não existe somente um conceito de identidade, a lógica e a matemática clássica

— tal como vimos — assume apenas um tipo, de certo modo o mais intuitivo, que diz que objetos que partilham de todas suas características são o mesmo objeto. Todavia, como os objetos quânticos (devido as características expostas) são usualmente reconhecidos como estranhos metafisicamente, não é surpresa que eles também não devam ser reconhecidos como objetos no sentido mais comum da palavra no debate filosófico (ARENHART, a aparecer). E se eles não deveriam (ou não poderiam?) ser reconhecidos como objetos no sentido usual do termo, por que deveríamos também acreditar que eles deveriam continuar a respeitar todas as 'regras' para os objetos comuns? Em especial, no nosso caso, se os objetos quânticos perdem as bem definidas condições de identidade e individualidade, e se mesmo o senso metafísico (usual) de objeto também não pode mais ser aplicado, eles talvez devessem 'dispensar', por assim dizer, a noção da identidade em favor do conceito de indiscernibilidade, de modo que pelo menos aqui temos um quadro que mostra que o conceito da identidade não é tão essencial assim. Deste modo, como defendemos, talvez seja momento de se buscar conceitos mais afeitos à realidade quântica, e aqui, em detrimento à identidade, parece que realmente devemos assumir apenas um tipo de indistinguibilidade.

Vamos elaborar um pouco mais este ponto. Existem vários ingredientes presentes na definição sintática usual de objetos. O primeiro, tal como vimos no capítulo 2, concerne o uso essencial do aparato conceitual da lógica clássica de primeira ordem. Objetos são primariamente entendidos como aqueles itens sobre os quais podemos quantificar existencialmente no domínio de quantificação (de preferência) da lógica clássica de primeira ordem. Da mesma forma, sintaticamente, existe também a ideia de que objetos devem possuir condições e critérios de identidade bem estabelecidos. Como já discutimos, itens sem identidade não são na verdade permitidos porque é suposto que a lógica clássica de primeira ordem 'obriga' que tudo o que ela manipula deva ter uma identidade bem definida. De acordo com essa visão, aceitar itens sem identidade deve levar a uma troca de lógica, e isto é algo que nem todo mundo aceita. Não obstante, já se pode defender a visão oposta, ou seja, de que uma troca de lógica poderia prover avanços importantes mesmo na lógica clássica, mostrando a limitação e a metalógica de tal disciplina. Um dos grandes obstáculos a esta mudança, no entanto, advém por exemplo da posição de Quine, que basicamente defendeu em seus trabalhos que necessariamente temos sempre que utilizar a lógica clássica de primeira ordem nas nossas teorias. Dado que como falamos acima a aplicabilidade da lógica de primeira ordem pressupõe condições de identidade, então em face de itens os quais aparentemente não têm condições de identidade devemos 'lutar' para mostrar que tais condições na verdade existem. Isso, como discutimos aqui várias vezes, é no mínimo 'forçar a barra', e se pergunta se temos necessariamente que ficar amarrados a concepções Quineanas do que é válido ou não. Com efeito, obrigar que os nossos objetos de estudo tenham sempre condições de identidade bem determinadas está longe de determinar a *natureza* das entidades em questão. Isso é um claro sinal de que estamos fazendo a lógica jogar um papel reservado à metafísica e invertendo a ordem das coisas (ARENHART, a aparecer). Se algumas entidades são objetos usuais ou não, são indivíduos ou não, se devem (ou não) realmente estar atrelados a concepções de identidade presentes na lógica clássica, é uma resposta que deve ser buscada com uma investigação conjunta entre ciência e metafísica, e não a partir da lógica clássica em si. Com efeito, até mesmo sem saber a resposta definitiva a estas questões, podemos sempre chegar mais perto de soluções mais precisas se desenvolvermos nossos esquemas conceituais em conjunção com uma teoria científica (ARENHART, a aparecer), e neste sentido uma metafísica de não-indivíduos (se atrelada a uma visão da MQ também não-individualizadora), juntamente com uma ‘dispensa’ da identidade no nível da lógica subjacente, pode e deve ser buscada, dado os resultados experimentais que parecem apontar neste sentido.[46] Isto pode promover vários avanços até mesmo no descarte de algumas teorias metafísicas incompatíveis com os objetos em questão (como acontece em algumas versões da teoria dos feixes de propriedades). Com efeito, soma-se a isso agora a posição do próprio Quine de que dado que não sabemos exatamente os objetos existentes, devemos adequar nossa ontologia às distinções feitas pelo vocabulário de uma dada teoria e permitir como objetos somente àquelas entidades que são requeridas pelas distinções feitas pelo vocabulário desta teoria. Mas, na verdade, nesta suposição está envolvido algo além e não tanto simplório, haja vista que se Quine permite o aceite como entidades aquelas advindas da teoria, nada impede de então aceitarmos entidades sem identidade, mas com indiscernibilidade, desde que as ‘manipulemos’ com uma lógica condizente. Com efeito, efetivamente este é realmente o quadro que temos: a partir da assunção de uma lógica não-reflexiva e assim de objetos que se mostram sem identidade na própria teoria fundamental, temos um quadro claro onde se apresentam objetos sem identidade a partir das distinções feitas pelo próprio “vocabulário da teoria” (tal como Quine enfatizada), de modo que assim temos também uma ‘legitimidade’ em afirmar que a identidade pode ser sim prescindida pelo menos para os objetos quânticos. Isto novamente reforça nossa posição acima de um pluralismo estrutural, haja vista que esta rejeição não pode ser buscada em estruturas clássicas que podem ser rigidificadas. Abaixo, na conclusão,

[46] Obviamente, uma individualidade transcendental permanece ainda possível, mas então o problema concernindo a escolha de um princípio de individuação se torna eminentemente metafísico e não necessita ser estudado associado somente com partículas quânticas. O grande problema, como repetidas vezes mencionamos, é que a MQ não pode nos ajudar a ter nenhum critério final para a escolha de uma ou outra dessas opções.

exploraremos mais essa questão da 'superação' da identidade apresentando outros argumentos que permitem admitir que a identidade não é tão essencial assim.[47]

Por fim, um outro problema que pontuamos no final do capítulo 3 é que parece que a teoria quântica não nos ajuda na decisão do problema de uma ontologia de não-indivíduos indiscerníveis, ou uma ontologia de indivíduos indiscerníveis. Desde que não podemos ler da MQ a sua ontologia (haja vista que a metafísica básica passível de escolha parece estar além do acesso empírico (CAO, 2003)), como garantir uma metafísica científica que permita entender os objetos quânticos? Neste caso, alguns defendem que devemos deixar de lado a tentativa de determinar a natureza metafísica dos objetos e aderir a um realismo (ôntico) sobre a *estrutura*, a qual seria a única esperança para nos manter em contato com a ciência e evitar o embaraçamento criado pela indeterminação mencionada.[48] Todavia, para mim, essa mudança de 'objeto de estudo' é desvirtuar a questão: somente porque não conseguimos definir (ou defender) uma metafísica de objetos sem identidade, devemos passar a apelar para uma metafísica de *estruturas*? Isso quer dizer que quando não conseguimos resolver um certo problema filosófico, teremos que deixá-lo e criar um outro mais 'palatável'? Parece-me, neste caso, que uma busca por um pluralismo estrutural (tal como defendi acima) é muito mais sensato e econômico.[49] Outrossim, é fácil ver que as questões que são

[47]Vale lembrar, entretanto, que podemos também derivar uma posição individualizadora dos objetos quânticos a partir da interpretação (e da própria MQ) de Bohn, a qual fornece trajetórias determinadas para todas as partículas elementares dotando-as com uma identidade 'em princípio' (principalmente devido ao potencial quântico de cada uma). Todavia, assumindo esse caminho Bohniano, acabamos por necessitar de um grande número de aparatos metafísicos extras, como o já citado potencial quântico, de ergocidades quânticas e de não-localizações relativísticas no nível de variáveis ocultas, de modo que se discute até que ponto uma teoria deste tipo se tornaria diferente de uma abordagem *a la* haeccetis, ou mesmo que acabaria por poluir ainda mais o nosso 'universo metafísico' admitindo coisas *ad hoc* para as quais não há nenhuma explicação física plausível além do argumento *ex post facto* de que tais coisas são necessárias para obter as predições corretas (*cf.* (HOWARD, 2011)). Obviamente, se estivermos livres para pagar tal preço, nem lógica e nem a evidência empírica pode excluir de tomarmos essa rota. Todavia, vale pensar se todas essas coisas que temos que assumir (todo esse preço a pagar) não nos está exatamente indicando que este não seria o caminho, e que uma visão metafísica mais *econômica* (embora mais radical) deveria ser buscada, uma na qual não seja necessário tantos pressupostos extrínsecos com a única 'desvantagem' (se é que isso é uma desvantagem) de recusarmos a identidade dos (e apenas para os) micro-objetos.

[48]Apenas para citar alguns trabalhos neste sentido, além do trabalho de Cao citado (CAO, 2003), veja por exemplo (FRENCH e LADYMAN, 2003; LADYMAN, 1998; VOTSIS, 2003; e WORRALL, 1989).

[49]Como falei, o fato de não termos que adotar várias hipóteses adicionais ao nosso formalismo parece nos mostrar que assumir uma posição não individualista para os objetos quânticos tem, no mínimo, uma boa parcela de bom senso. Com efeito, a quebra da subdeterminação em favor de não-indivíduos pode ser defendida também por outros meios além da economia: através das virtudes teóricas mais explicativas, por assim dizer, por satisfazer certos requisitos estéticos

colocados à metafísica da não-individualidade podem ser facilmente transferidas para o realismo de estruturas, e desta forma não se consegue perceber tão claramente em que sentido uma mudança de enfoque (de objetos, para estruturas) realmente nos ajudaria a entender a natureza metafísica de tais estruturas em si. Da mesma forma, outras críticas podem ser feitas. Aparte ao fato de que se adotar estruturas sem relata não é concebível usando a lógica clássica, que devemos manter em mente que estruturas são construtos matemáticos construídos com a teoria de conjuntos e desta forma são estruturas "teórico conjuntistas" que não nascem como estruturas desde o início, mas sim que são construídas a partir das operações básicas sobre conjuntos (em termos teórico-conjuntistas extensionais, nenhuma relação como conjunto de n-uplas ordenadas pode ser construída sem elementos relacionados), que até onde se sabe nenhuma alternativa formal inovadora sobre isso é dada pelos partidários do realismo estrutural e que nem mesmo uma discussão satisfatória neste sentido é desenvolvida, podemos de pronto perguntar também qual é a natureza metafísica das *relações* em si. São elas indivíduos ou não-indivíduos? Se de acordo com o realista estrutural elas forem indivíduos, então a subdeterminação é quebrada, e temos uma metafísica de indivíduos. Se por outro lado as relações forem não-indivíduos, então mais uma vez a subdeterminação é quebrada, e temos uma metafísica de não-indivíduos. Em ambos os casos quebramos a subdeterminação, uma situação que exatamente não satisfaz os partidários do realismo estrutural (ontológico) que justamente repousam neste 'problema' para manter sua posição (*cf.* (ARENHART, a aparecer)).

De toda forma, mesmo num tal realismo estrutural, o manuseio de não-indivíduos tem que ser feito em estruturas baseadas na teoria $\mathfrak{Q}$, as quais têm as virtudes que mostramos. Neste sentido, se realmente concebermos uma metafísica alicerçada em não-indivíduos, podemos admitir a existência de "estruturas" em si que estritamente falando também não têm individualidade, tal como a estrutura para o exemplo da química acima discutido. Este é um ponto interessante: substituir um átomo H por outro H, por exemplo, no caso da físico-química preserva a estrutura. Então, na química, como enfatizamos acima, o tipo de átomo envolvido em uma certa estrutura tem que ser independente do particular elemento (*indivíduo*) envolvido. Tal estrutura poderia englobar assim uma infinidade de realizações indiscerníveis, ou instâncias, haja vista que qualquer indiscernível pode ocupar o lugar de um outro indiscernível na estrutura.[50] Desta forma, podemos pensar em uma construção na

desejáveis e, como sempre, por poder exatamente manipular tais não-indivíduos em um quadro formal correspondente. Obviamente, algumas dessas justificativas são 'extra teóricas' e há muitas dúvidas de que um programa neste sentido possa ser desenvolvido (embora seja uma linha bastante plausível, tal como estamos tentando mostrar).

[50]O que se quer dizer com isso é que no caso das 'estruturas clássicas', a troca de um elemento

qual se pelo menos não eliminamos por completo os objetos particulares, podemos eliminar a identidade dos mesmos e assim preservar o 'esqueleto' das relações da estrutura (KRAUSE, 2005). Neste sentido, mesmo se formos na direção da ideia de que "tudo que existe são estruturas" (tal como os proponentes do realismo estrutural ôntico o fazem), se um dia as questões acima forem sanadas, então talvez a ontologia básica possa ser pensada em termos de 'estruturas não-individualistas' ou de 'estruturas não-reflexivas', as quais não podem ser rigidificadas e são assim as mais indicadas para a realidade da microfísica.

da estrutura por outro só 'conserva a estrutura' se este for o mesmo objeto no sentido de identidade. Nas quase-estruturas, pelo contrário, a troca de um indiscernível por outro indiscernível mantém a estrutura, e assim temos uma "infinidade de realizações possíveis", como diz o texto.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Basicamente toda a discussão aqui construída vai ao encontro da visão de que existe um 'dilema formal' no qual a lógica clássica em sentido amplo (isto é, tomando a matemática e a teoria de conjuntos nela erigida) parece por um lado garantir a individualidade de todas as entidades com as quais ela trata (e isso se mostra nas próprias estruturas rigidificáveis), e a mecânica quântica, por outro lado, podendo ser interpretada como apontado para a não-individualidade dos seus objetos. Como vimos, no trato formal das entidades quânticas e químicas, podemos assumir outros alicerces — em especial a teoria $\mathfrak{Q}$ — com toda uma linguagem e uma constituição que acreditamos ser mais adequada para expressar tal não-individualidade. Nesta opção, estaríamos assumindo de antemão aquilo que a teoria física em apreço, segundo a nossa interpretação, parece demandar. A existência de estruturas quase-conjuntistas que não podem ser rigidificadas, e que mesmo quando quase-rigidificadas ainda assim asseguram a não-individualidade dos seus elementos, só vem a somar a esta visão ontológica da não-individualidade dos objetos microscópicos e, como dissemos, fortalecer a importância e o uso das estruturas quase-conjuntistas.

Uma última observação a ser feita é que mesmo a linguagem da teoria de conjuntos clássica, como ZFC, é ainda assim poderosa o suficiente para nela simularmos certa forma de não-reflexividade e, com isso, (na nossa acepção pelo menos) uma forma de não-individualidade.[1] Nesse caso especial, não seria necessário mudarmos de lógica, já que podemos, como dito anteriormente, 'maquiar' em ZFC a falta de identidade para certos objetos. Entretanto, a sempre possível rigidificação das estruturas nela baseadas mostra o fato de que, do ponto de vista filosófico, pode-se perceber que essas teorias não foram realmente erigidas pensando em alicerçar qualquer tipo de não-individualidade. De certo modo esse fenômeno pode ser também uma simples consequência do fato de que a lógica subjacente a tais construções permanece sendo a lógica clássica, a qual é globalmente uma lógica que trata de objetos individualizáveis.

Vale ressaltar também o fato de que pode não haver apenas uma forma de fundamentação não-reflexiva para a mecânica quântica. Como exploramos no capítulo 3 e neste último, a não-individualidade (conforme estamos entendendo aqui) é principalmente uma tese metafísica acerca da natureza das entidades quânticas, mas que pode também não ser assumida. Não obstante, se assumirmos tal não-individualidade, o fato é que podem existir diversas outras formas de representar formalmente esse tipo de assunção, o que exata-

[1] Como foi feito em (DA COSTA, *et. al.*, 2012).

mente reflete a vagueza que tradicionalmente acomete certos termos cruciais para esse tipo de debate filosófico. De certa forma, o que assumimos neste trabalho é que uma lógica não-reflexiva é caracterizada por ser um sistema que viola alguma forma do princípio da identidade, mas outras formas de lógicas não-reflexivas poderiam ser erigidas, cada uma delas podendo ser utilizadas para diferentes propósitos.[2] Não obstante, o que importa mencionar novamente é que tudo isso fortemente evidencia o fato de que a noção de identidade não parece ser uma noção *necessariamente* indispensável, tal como se tem normalmente em mente e tal como é defendido por alguns filósofos clássicos.[3]

Neste sentido, é interessante discutir a posição de Smith (SMITH, 2008), que diz que não conseguimos de nenhum modo 'fugir' da identidade. Segundo ele, devido ao papel especial que identidade joga no aparato que usamos para fazer sentido de qualquer fenômeno, um tipo de 'identidade vaga', por exemplo, "se torna um caminho sem futuro": se conseguirmos uma compreensão sensata da ideia da possibilidade de uma dada relação ser vaga, então esta relação não pode ser a identidade.[4] Todavia, vale se perguntar se tal relação então não poderia ser a indiscernibilidade (ao invés de tal tipo de identidade vaga), e parece que aqui podemos obter uma resposta positiva. Isto porque, segundo o próprio Smith, uma condição necessária para fazer com que um fenômeno tenha sentido, é que o mesmo possa ser modelado usando ferramentas teórico conjuntistas, de forma que assim mostramos que o fenômeno é irrepreensível de um ponto de vista puramente lógico. O autor então argumenta que não se pode modelar a identidade vaga de um ponto de vista teórico-conjuntista, mas como vimos nesta tese, *podemos sim modelar a indistinguibilidade* via teoria de conjuntos (mesmo que esta teoria não seja a padrão), obtendo novos tipos de modelos e indo assim ao encontro do solicitado pelo próprio Smith. Se uma das exigências que necessitamos cumprir para fazer sentido um certo fenômeno é modelá-lo em termos teórico conjuntistas, então neste sentido podemos entender completamente o que é o fenômeno da indiscernibilidade! Isto tudo mostra que a identidade, como comentamos acima, realmente parece não ser um conceito necessário *ab ovo*, e que pode ser assim postergado em em alguns quadros teóricos bem justificados tal como o nosso. Neste artigo, Smith critica esta proposta afirmando que qualquer tentativa de se erigir um conceito que 'viole' a identidade, por assim

[2] Por exemplo, uma que 'fuzzifica' a identidade. Na seção 4.1 desta tese listamos seis modos diferentes de se 'obter' uma lógica não-reflexiva.

[3] Em especial, Aristóteles defendia essa tese, como é sabido.

[4] Usamos aqui a noção de uma "identidade vaga" por que é o conceito que Smith usa em seu texto. Suas críticas podem ser facilmente transpostas para a nossa questão da indiscernibilidade, de modo que a argumentação que construímos aqui pode servir como resposta à posição de Smith.

dizer, está fadado ao fracasso, haja vista que em qualquer relação construída em termos teórico-conjuntistas, a "identidade já estará de antemão presente no pano de fundo do nosso modelo" e com um significado perfeitamente preciso:

> Se apresentarmos um modelo teórico-conjuntista para alguma relação vaga obedecendo princípios análogos àqueles governando a identidade, esta relação modelada não irá ser a identidade, porque como notado acima, identidade já está lá [no modelo], construída no pano de fundo de todo modelo teórico-conjuntista, e é [um conceito] preciso (a relação de identidade vale entre cada objeto e si mesmo, e entre entre nenhum objeto e qualquer outro que não si mesmo) (*ibid.*).

Não obstante, tal crítica pode ser respondida dizendo que parece que nesse caso o autor está confundindo o conceito de identidade na *linguagem*, com a noção de identidade presente na *metalinguagem*: obviamente, já temos uma noção intuitiva de identidade na metalinguagem, mas isso não quer dizer que ela já esteja *formalizada na linguagem* onde estaremos definindo a noção de identidade.[5] Na passagem acima, pode-se ver que o autor tem em mente a visão de que quando temos um conjunto de objetos, automaticamente temos todos os fatos sobre a identidade e não identidade de seus elementos, mas como tentamos mostrar no capítulo 2 desta tese, esta noção de identidade depende exatamente de uma certa lógica e, de acordo com a lógica, *ela pode mudar*. Para que esse comprometimento com a identidade aconteça na linguagem, temos exatamente que formalizá-la, e, assim, deixar explícito qual 'opção lógica' estamos assumindo, de modo que os diferentes modos possíveis de identidade na lógica podem nos comprometer como diferentes entendimentos do que é este conceito. Esta variação conceitual pode muito bem também ser entendida como apontado para a constatação de que a noção de identidade não é algo necessário *in limine* e que, como estamos tentando defender, pode ser prescindida (como dissemos, em quadros teóricos bem justificados em que outros conceitos parecem responder (e formalizar) melhor ao que se tem).

Por fim, um argumento semelhante poderia ser usado contra a posição de Dorato e Morganti (DORATO e MORGANTI, 2013), para os quais haveria um tipo de "identidade primitiva" sobre os objetos e que "está disponível e permite um grande ganho metodológico em termos de simplicidade, clareza e conservadorismo com respeito a esquemas e crenças metafísicas". O fato

[5]É o mesmo exemplo para o caso de quando vamos definir os números naturais. Obviamente, neste caso, já temos uma noção intuitiva e informal do que seja número natural, mas essa noção intuitiva não está presente na formalização, e sim somente na metateoria (ou na metalinguagem).

de termos um quadro teórico-formal em que a identidade não está presente de modo algum (i.e., inclusive a partir das estruturas não-ridificáveis de $\mathfrak{Q}$), mostra que esta ideia de "identidade primitiva" — pelo menos do ponto de vista formal — é um tanto ab-rogada, por assim dizer. Com efeito, soma-se a esta a tese o fato de que, para os autores, o motivo do "primitivismo ser preferido [e possível] no caso quântico" advém principalmente da possibilidade das partículas quânticas poderem ser contadas:

> Como conseqüência disto, conclui-se que o primitivismo deve ser preferido ao reducionismo Leibniz pelo menos no caso quântico não-relativista. Fundamentalmente, a base crucial para esta afirmação é oferecido pela própria física. Consiste na simples e incontroversa [...] CONTABILIDADE [COUNTABILITY] (sic). [...A ideia é a de] *considerar CONTABILIDADE não apenas como um fato meramente formal sobre rótulos de partículas, mas como algo metafisicamente e fisicamente significativo por si mesmo*, sem ter que procurar elementos adicionais com base nos quais as entidades contáveis poderiam ser consideradas como discerníveis. Em outras palavras, pode-se afirmar que a "presença de" n partículas no nível formal tem uma contrapartida ontológica direta, de modo que se pode concluir que estas partículas são n indivíduos. [...] Em suma, a moral do nosso estudo de caso é o seguinte. Partículas quânticas podem e devem ser considerada como primitivamente individualizadas simplesmente porque são contáveis no nível do formalismo. (grifo do autor).

Todavia, pode ser visto que para que a ideia de Dorato/Morganti funcione, é necessário que seja possível contar as partículas quânticas de um modo clássico, ação que como mostramos não é exequível para tais objetos: haja vista a falta de identidade, qualquer partícula indiscernível pode estar numa posição n de uma sequência de contagem, de modo que assim se torna um tanto estranho atribuirmos uma 'identidade' a uma partícula apenas por ela estar numa certa posição em tal sequência. Com isso, tal 'identidade' de Dorato/Morganti parece um tanto efêmera para ser sustentada. É por isso que na nossa acepção, para as partículas quânticas, o que podemos ter é apenas uma noção de quase-cardinalidade, a qual — como vimos — não é propiciada a partir de uma ordenação no conjunto a ser contado.

Outrossim, se adotarmos a posição de que a identidade pode ser em alguns casos realmente preterida e que devemos então adotar em tais casos uma noção de indistinguibilidade, vemos que podemos ir com mais naturalidade ao encontro de uma metafísica mais geral, isto é, englobando mesmo os casos de não-individualidade. Isto porque, entre as definições de "metafísica", está exatamente a da "área do conhecimento humano que estuda a realidade primeira capaz de fornecer um fundamento a todas as ciências particulares, suas determinações necessárias e princípios universais" (HOUAISS, 2001). Será então que a noção mais básica, a determinação necessária e o princípio universal, tal como reza a definição, não deveria ser a noção de indistinguibilidade ao invés da identidade? Dado que a primeira pode se reduzir à segunda para objetos macroscópicos (fato que é captado pelo formalismo de $\mathfrak{Q}$), *mas não vice-versa*, pode ser que a resposta seja realmente positiva e que noção de identidade, como dissemos, não seja uma noção tão fundamental. Neste sentido, parece que Wittgenstein (tal como citamos no capítulo 3) estava realmente certo em afirmar que a identidade é uma noção dispensável por não trazer nenhuma informação nova sobre o objeto, embora seja bem provável que ele não teria a mesma posição com relação à indistinguibilidade; noção esta que realmente oferece um vasto ganho conceitual e filosófico. Até o presente momento tínhamos em mente a visão de que todas as coisas cairiam sobre o conceito de "identidade", todavia agora temos exemplos de objetos que parecem não cair (ou que pelo menos que é um tanto problemático afirmarmos que os mesmos caem) sob este conceito. Neste sentido, como discutimos, uma reconstrução metafísica em que se assume a noção de indistinguibilidade parece que realmente se faz necessária, e o mais importante é que temos agora a clara percepção de que a identidade não é um conceito que vale indiscutivelmente e que realmente — como disse Russell — é uma relíquia que pode ser expurgada sem por isso cairmos num relativismo, tal como enfatizamos.

Poderíamos ainda admitir uma última crítica que diga que não é fácil perceber como o *formalismo* da teoria de quase-conjuntos poderia nos ajudar a melhor entender as velhas e confusas questões *filosóficas* sobre a individualidade. Não obstante, poderíamos neste sentido afirmar que o próprio desenvolvimento da teoria newtoniana com a criação do cálculo diferencial e integral, entre outras coisas, também não nos ajudou a responder se o conceito de "força", afinal de contas, é antropomórfico ou natural. No entanto, mesmo assim a física newtoniana nos ajudou a entender melhor o mundo que vivemos e lançou luzes sob visões da natureza até antes nunca pensadas. Talvez a teoria de quase-conjuntos também possa ser, no fim, uma teoria que possa servir para senão resolvê-los, para pelo menos nos ajudar a entender melhor os problemas físicos e metafísicos da MQ, promovendo assim exatamente avanços nas abordagens filosóficas das problemáticas envolvidas. E é neste sentido que fazendo uso da argumentação já dada acima, podemos dizer que a formalização de uma ciência (entre outras coisas) exatamente nos sugere também novas rotas para investigações filosóficas de compreensão da realidade, tal como vimos nesta tese.

Obviamente argumentar contra a indispensabilidade de determinadas ferramentas conceituais é um aspecto crucial de qualquer empreendimento que busque violar alguma lei da lógica clássica. É claro que no nosso caso em apreço, em que violamos um princípio tão fundamental como o da identidade (o qual parece guardar uma íntima relação com qualquer esquema conceitual que busque dar conta da realidade), poderia ser dito que a própria intengibilidade do projeto passa a ser questionada. No entanto, como mostramos, a real possibilidade de se ter um *framework* conceitual que possa alicerçar a MQ de um modo não-reflexivo parece afastar qualquer crítica que possa ser feita nesse sentido. Além disso, o que nos interessa ao apresentarmos tais formulações — e o que de fato pode se mostrar como um núcleo mínimo de exigências para fundamentos distintos do usual para as teorias da ciência em geral — é simplesmente que esta formulação alternativa seja empiricamente equivalente às formulações tradicionais da teoria (em lógica, diríamos que dela se possa deduzir a mesma classe de teoremas), e que esta não seja trivial. Desta forma, se mesmo uma formulação não-reflexiva satisfazer tais requisitos, podemos assegurar que por direito uma versão não-reflexiva da MQ também estaria em pé de igualdade com a formulação clássica. De todo modo, como discutimos repetidamente, a versão da teoria que aqui apresentamos no mínimo se mostra mais moderada do ponto de vista formal (no sentido de que não precisamos assumir hipóteses externas à teoria, embora em detrimento à noção de identidade), o que vai ao encontro da máxima de Occam que afirma que entre duas hipóteses ou teorias que levem ao mesmo resultado, devemos escolher a mais econômica.

Ressaltamos por fim que as construções erigidas neste trabalho por si só já se justificam pelo próprio interesse filosófico que despertam, os quais que se revelam muito mais perenes do que apenas a mera curiosidade matemática. Com efeito, toda essa discussão fornece um quadro conceitual em que se tocam os mais variados temas filosóficos, desde clássicos até os mais contemporâneos, mostrando-se assim um trabalho autocontido de filosofia genuína que serve de referência a estudos posteriores. Obviamente, muitos temas e discussões principiadas aqui, devido preponderantemente por uma questão de espaço, não se esgotam nestas páginas, sendo que ainda gerarão vários artigos (alguns, inclusive, em vias de análise em diversas revistas). Se esta tese contribuir com elementos conceituais e teóricos para ajudar nas discussões no âmbito da filosofia da ciência e da física de pelo menos algum dos problemas tratados, este trabalho já terá atingido seu propósito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, N., *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ABE, J. M., A noção de estrutura em matemática e física. *Estudos Avançados*, n. 6, vol. 3, 1989. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-40141989000200007&script=sci_arttext. Acessado em: 24/01/2013.

AMICO, L., FAZIO, R., OSTERLOH, A. e VEDRAL, V., Entanglement in many-body systems. *Review of Modern Physics*, Vol. 80, 2008.

ARENHART, J. R. B., A discussion on finite quasi-cardinals in quasi-set theory. *Foundations of Physics*, v. 41, pp. 1338-1354, 2011.

ARENHART, J. R. B., Quantum objecthood (*a aparecer*).

ARENHART, J. R. B. e KRAUSE, D., Identidade, individualidade e quase-conjuntos. *Revista Eletrônica Informação e Cognição*, vol. 6, n. 2, pp. 25-39, 2007.

ARENHART, J. R. B. e KRAUSE, D., Classical logic or non-reflexive logic? A case of semantic underdetermination. *Revista Portuguesa de Filosofia*, 68 (1-2), pp. 73-86, 2012.

ARENHART, J. R. B. e KRAUSE, D., Indistinguibilidade, não-reflexividade, ontologia e física quântica. *Scientiae Studia*, vol. 10, n. 1, pp. 41-69, 2012.

AULETE, C., *Minidicionário contemporâneo da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Lexidon, 2009.

AUYANG, S., *How is quantum fiel theory possible?* New York: Oxford University Press, 1995.

BARNETT, R., Does quantum mechanics disprove the principle of the identity of indiscernibles? *Philosophy of Science*, 45, pp. 466-470, 1978.

BALL, D. W., *Physical chemistry*. Pacific Goove: Brooks/Cole, 2003

BELL, J. S., On the Einstein Podolski Rosen paradox. *Physics* 1, n. 3, pp. 195-200, 1964.

BELL, J. S., *Speakable and unspeakble in quantum mechanics*. New York: Cambrigde University Press, 1987.

BIRKOOF, G. e VON NEUMANN, J., The logic of quantum mechanics. *The Annals of Mathematics* (second series), vol. 37, n. 4, pp. 823-843, 1936.

BITBOL, M., *Mécanique quantique: une introduction philosophique*. Paris: Flammarion, 1996.

BITBOL, M., Jean-Louis Destouches: théories de la prévision et individualité. *Philosophia Scientiae*, vol. 5, pp. 1-30, 2001.

BLACK, M., The identity of Indiscernibles. *Mind*, 61, pp. 153-164, 1952.

BUENO, O., Quasi-truth in quasi-set theory. *Synthese*, 125, n. 1-2, pp. 33-53, 2000.

BUNGE, M., *Treatise on basic philosophy (V. 3 - ontology 1): the furniture of the world*. Dordrecht: Reidel, 1977.

CAO, T. Y., Can we dissolve physical entities into mathematical structures? *Synthese*, 136, PP. 57-71, 2003.

CARNAP, R., *Introduction to symbolic logic and its applications*. Dover Publications, 1958.

CASULLO, A., The contingent identity of particulars and universals. *Mind*, 123, pp. 527-554, 1984.

CHURCH, A., *Introduction to mathematical logic*. Princeton: Princeton University Press, 1956.

COELHO, A. M. N., *Indistinguibilidade: uma abordagem por meio de estruturas* (tese de doutorado). São Paulo: USP, 2005.

CORBISIER, R., *Introdução à filosofia: tomo II, parte primeira: filosofia grega*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1984.

COX, P. A., *Instant notes [in] inorganic chemistry* (2a. ed.). London: Bios Scientific Publishers, 2004.

CROSS, R., Medieval theories of haecceity. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2010 Edition)*. Disponível em : http://plato.stanford.edu/archives/fal2010/entries/medieval-haecceity/. Acessado em 29/12/2012.

CURRY, H. B., *Foundations of mathematical logic*. Dover: New York, 1977.

da COSTA, N. C. A., *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo: Hucitec/EdUSP, 1980.

da COSTA, N. C. A., Pragmatic probability. *Erkenntnis*, vol. 25, pp. 141-162, 1986.

da COSTA, N. C. A. e BUENO, O., Non-reflexive logics. *Revista Brasileira de Filosofia*, vol. 232, pp. 181-196, 2009.

da COSTA, N. C. A. e BUENO, O., Remarks on abstract galois theory. *Manuscrito*, vol. 34, pp. 151-183, 2011.

da COSTA, N. C. A. e BUENO, O., Paraconsistência e racionalidade. (a aparecer).

da COSTA, N. C. A. e BUENO, O., Quase-verdade e ciência. (a aparecer).

da COSTA, N. C. A. e FRENCH, S., Pragmatic Truth and the Logic of Induction, *British Journal for Philosophy of Science* 40, pp. 333-356, 1989.

da COSTA, N. C. A. e FRENCH, S., The model-theoretic approach in the philosophy of science, *Philosophy of Science* 57, pp. 248-65, 1990.

da COSTA, N. C. A. e FRENCH, S., *Science and partial truth: a unitary approach to models and scientific reasoning*. New York: Oxford University Press, 2003.

da COSTA, N. C. A. e KRAUSE, D., Schrödinger logics. *Studia Logica*, vol. 53-4, pp. 533-550, 1994.

da COSTA, N. C. A. e KRAUSE, D., An intensional Schrödinger logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 38-2, p. 179-94, 1997.

da COSTA, N. C. A., KRAUSE, D., ARENHART, J. R. B. e SCHINAIDER, J., Sobre uma fundamentação não reflexiva da mecânica quântica. *Scientiae Studia*, vol. 10, n. 1, pp. 71-104, 2012.

da COSTA, N. C. A. e RODRIGUES, A. A. M., Definibility and invariance. *Studia Logica*, vol. 86, pp. 1-30, 2007.

DALLA CHIARA, M. L. e TORALDO DI FRANCIA, G., Formal analysis of physical theories. In: Toraldo di Francia, G. (ed.), *Problems in the Foundations of Physics*, North-Holland: 1979, pp. 134-201.

DALLA CHIARA, M. L. e TORALDO DI FRANCIA, G., Individuals, kinds and names in physics. *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, and Physics (Boston Studies in the Philosophy and History of Science)*, vol. 140, parte II, pp. 261-283, 1993.

DALTON, J., *A new system of chemical philosophy*. London: printed by S. Russell, 1808.

de RONDE, C., DOMENCH, G., HOLIK, F. e FREYTES, H., Entities, identity and the formal structure of quantum mechanics. Disponível on-line: http://arxiv.org/abs/1203.3007v1. Acessado em 10/10/2012.

DESTOUCHES, J.-L., Queques aspects théoriques de la notion de complémentarité. *Dialectica*, vol. 2, n. 3-4, pp. 351-382, 1948.

DESTOUCHES, J.-L., *La mécanique ondulatoire*. PUF: Paris, 1960.

DESTOUCHES-FÉVRIER, P., *La structure des théories physiques*. PUF: Paris, 1951.

DEUTSCH, H., Relative identity. *The Stanford Enciclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition)*. Disponível em http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/identity-relative/. Acessado em 14/02/2012.

Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa (versão 1.0). Instituto Antonio Houaiss, 2001.

DOWLING, M., DOHERTY, A. e WISEMAN, H., Entanglement of indistinguishable particles in condensed-matter physics. *Physical Review A* 73, 052323, 2006.

DOMENECH, G., HOLIK, F. e KRAUSE, D., Q-spaces and the foundations of quantum mechanics. *Foundations of Physics*, vol. 38, pp. 969-994, 2008.

DOMENECH, G. e HOLIK, F., A discussion on particle number and quantum indistinguishability. *Foundations of Physics*, v. 37, n. 6, p. 855-878, 2007.

DORATO, M. e MORGANTI, M., Grades of individuality: a pluralistic view of identity in quantum mechanics and in the sciences. *Philosophical Studies*, vol. 163, n. 3, p. 591-610, 2013.

DUTRA, L. H., Os modelos e a pragmática da investigação. *Scientiae Studia*, vol. 3, n. 2, pp. 205-232, 2005.

d'ESPAGNAT, *Conceptual foundations of quantum mechanics* (2a. ed.). Massachusetts: Perseu Books, 1999.

FORREST, P., The identity of indicernibles. *The Stanford Enciclopedia of Philosophy (Spring 2011 Edition)*. Disponível em http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/identity-indiscernible/. Acessado em 15/03/2012.

FRAENKEL, A., BAR-HILLEL, Y. e LEVY, A., *Foundations of set theory* (sec. ed. rev.). Amsterdam: North-Holland, 1973.

FRENCH, S. e KRAUSE, D., *Identity in physics: a historical, philosophical and formal analysis*. New York: Oxford University Press, 2006.

FRENCH, S. e LADYMAN, J., Remodelling structural realism: quantum physics and the metaphysics of structure. *Synthese*, vol. 136, pp. 31-56, 2003

GALLOIS, A., Identity over time. *The Stanford Enciclopedia of Philosophy (Springer 2011 Edition)*. Disponível em http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/identity-time/. Acessado em 25/05/2012.

GELOWATE, G., KRAUSE, D. e COELHO, A. M. N., Observações sobre a neutralidade ontológica da matemática. *Episteme*, vol. 17, pp. 145-157, 2003.

GRANDY, R. E., Sortals. *The Stanford Enciclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition)*. Disponível em http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/sortals/. Acessado em 25/06/2012.

HEELAN, P. A., Complementarity, context dependence and quantum logic. *Foundations of Physics*, vol. 1, no. 2, pp. 95-110, 1970.

HENKIN, L., Completude. In: Morgenbesser, S. (org.), *Filosofia da Ciência*. São Paulo: Ed. Cultrix, 1975.

HIRSCH, E., *The concept of identity*. New York: Oxford University Press, 1982.

HODGES, W., Elementary predicate logic. In: *Handbook of philosophical logic - Vol. 1: elements of classical logic*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983.

HODGES, W,. *A Shorter model theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

HOWARD, D., The physics and metaphysics of identity and individuality. In: Book Symposium: Steven French and Décio Krause; Identity in physics: a historical, philosophical and formal analysis. *Metascience*, no. 20, pp. 225-251, 2011.

HOY, R. C., Inquiry, intrinsic properties and the identity of indiscernibles. *Synthese*, vol. 61, pp. 275-97, 1984.

HUME, D., *Tratado da natureza humana*. São Paulo: Unesp/Imprensa Oficial do Estado, 2000 (1739).

JAMMER, M,. *The conceptual development of quantum mechanics.* New York: McGraw-Hill, 1966.

JAMMER, M., *The philosophy of quantum mechanics.* New York: John Wiley and Sons, 1974.

JAMMER, M., *Conceito de espaço: a história das teorias do espaço na física.* São Paulo: Livraria da Física Editora, 2010 (1953).

JAPIASSU, H. e MARCONDES, D., *Dicionário básico de filosofia* (5a. ed.). Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2008.

JAUCH, J.M., *Foundations of quantum mechanics*. Rending: Addison Wesley, 1968.

JECH, T., *Set theory*. Heildeberg: Springer, 1997.

KLEIN, U., Lefèvre, W., *Materials in eighteenth-century science: a historical ontology*. Cambridge: The MIT Press, 2007.

KOPERSKI, J., *Models*. Disponível em http://www.iep.utm.edu/models. Acessado em 02/04/2013.

KRAUSE, D., *Não-reflexividade, indistinguibilidade e agregados de Weyl* (tese de doutorado). São Paulo: USP, 1990.

KRAUSE, D., On a quasi-set theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 33, pp. 402-411, 1992.

KRAUSE, D., Axioms for collections of indistinguishable objects. *Logique et Analyse*, vol. 153-154, pp. 69-93, 1996.

KRAUSE, D., *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência.* São Paulo: E.P.U., 2002.

KRAUSE, D., The mathematics of non-individuality. *Coleção Documentos, Série Lógica e Teoria da Ciência: Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo*, n. 46, 2003A.

KRAUSE, D., Why quasi-sets? *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, vol. 20 (1/2), pp. 73-92, 2003B.

KRAUSE, D., Structures and Structural Realism. *Logic Journal of IGPL*, vol. 13 (1), p. 113-126, 2005.

KRAUSE, D., Nota sobre o comprometimento ontológico com não-indivíduos. *Filosofia e História da Ciência no Cone Sul (Seleção de Trabalhos do 5o. Encontro)*, pp. 125-131, 2008.

KRAUSE, D., *Identidade e indiscernibilidade*. (A aparecer).

KRAUSE, D., *Languages, structures and models of scientific theories*. (No prelo).

KRAUSE, D. e ARENHART, J. R. B., A discussion on quantum non-individuality. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 22, n. 1-2, pp. 105-124, 2012.

KRAUSE, D. e ARENHART, J. R. B., Perspectivismo na filosofia da ciência: um estudo de caso na física quântica. *Scientiae Studia*, vol. 11, n. 1, pp. 159-183, 2013.

KRAUSE, D., ARENHART, J. R. B. e MORAES, F., Axiomatization and models of scientific theories. *Foundations of Science*, vol. 16, issue 4, pp. 363-382, 2011.

KRAUSE, D. e COELHO, A. M. N., Identity, indiscernibility, and philosophical claims. *Axiomathes*, vol. 15(2), pp. 191-210, 2005.

KUHN, H., FORSTERLING, H.-D. e WALDECK, D. H., *Principles of physical chemistry*. New York: John Wiley & Sons, 2009

LADYMAN, J., What is structural realism? *Studies in History and Philosophy of Science* 29, pp. 409-424, 1998.

LEIBNIZ, G., *Discurso sobre a metafísica*. São Paulo: Ed. Abril (Col. Os Pensadores), 1980.

LEIBNIZ, G., *Monadologia*. São Paulo: Ed. Abril (Col. Os Pensadores), 1989.

LOCKE, J., *Ensaio acerca do entendimento humano*. São Paulo: Nova Cultural (Col. Os Pensadores), 1999.

LOWE, E. J., Primitive substances. *Philosophy and phenomenological research*, vol. 54, pp. 531-552, 1994.

LOWE, E. J., *The Possibility of metaphysics: substance, identity, and time.* Oxford University Press, 1998.

LUSCHEI, E. C., *The logical systems of Lesniewski*. Amsterdam: North-Holland, 1962.

MACKEY G. W., *The mathematical foundations of quantum mechanics*. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1963.

McMAHON, D., *Quantum mechanics desmistified*. New York: McGraw-Hill, 2006.

McQUARRIE, D. A. e SIMON, J. D., *Physical chemistry: a molecular approach*. Sausalito: University Sience Books, 1997.

MENDELSON, E., *Introduction to mathematical logic* (2th. ed.). New York: D. van Nostrand Company, 1979.

MENDELSON, E., *Introduction to mathematical logic* (4th. ed.). London: Chapman and Hall, 1997.

MENDONÇA, J. F., Das dificuldades da distinção entre propriedades intrínsecas e propriedades extrínsecas. *Revista Estudos Filosóficos* (Versão Eletrônica), nº 2, pp. 101-114, 2009.

MIKENBERG, I., da COSTA, N. C. A. e CHUAQUI, R., Pragmatic truth and approximation to truth. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 51, p. 201-221, 1986.

MULLER, F. A., The Characterisation of Structure: Definition versus Axiomatisation. (To appear in the) *Proceedings of an ESF Conference*, Vienna, 2008.

MURPHY, B., MURPHY, C. e HATHAWAY, B. J., *Basic principles of inorganic chemistry: making the connections*. London: The Royal Society of Chemistry, 2008.

NOONAN, H., Identity. *The Stanford Enciclopedia of Philosophy (Winter 2011 Edition)*. Disponível em http://plato.stanford.edu/archives/win2011/entries/identity/. Acessado em 16/02/2012.

PAIS, A., *Subtle is the Lord*. Oxford: Oxford University Press, 1982

PENROSE, R., *The emperor's new mind*. Oxford: Oxford University Press, 1989.

PENROSE, R., *The road to reality: a complete guide to the laws of the universe*. New York: Alfred A. Knopf, 2005.

PERES, A., *Quantum theory: concepts and methods.* New York: Kluwer Academic Publishers, 1993.

PESSOA Jr., O., *Conceitos de física quântica*. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2003.

PESSOA Jr., O., *Conceitos de física quântica* (vol. 2). São Paulo: Livraria da Física Editora, 2006.

PLASTINO, A. R., MANZANO, D. e DEHESA, J., Separability criteria and entanglement measures for pure states of *n* identical fermions. *Europhysics Letters*, vol. 86, n. 2, 2009.

POST, H., Individuality and physics. *The Listener*, pp. 534-7, 1963. (Reprinted in *Vedanta for East and West* 132, pp. 14-22, 1973)

POTTER, M., *Set theory and its philosophy: a critical introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2004.

PUTNAM, H. Is logic empirical? *Boston studies in the philosophy of science*, vol. 5 (eds. Robert S. Cohen and Marx W. Wartofsky). Dordrecht: D. Reidel, 1968, pp. 216-241.

QUINE, W. V., Sobre o que há. São Paulo: Abril Cultural (Col. os Pensadores), 1980.

QUINE, W. V., Ontological relativity. *Journal of Philosophy*, vol. 65 (7), pp. 185-212, 1968.

QUINE, W. V., Whither physical objects? In: Cohen, R. S, Feyrabend, P. K. e Wartofsky, M. W. (eds.), *Essays in memory of Imre Lakatos*. Dordrecht: D. Reidel, 1976.

QUINE, W. V., *On the individuation of attributes*. Printed in: Quine, Theories and Things. Cambridge: Harvard University Press, 1981, pp. 100-112.

QUINE, W. V., *Philosophy of logic*. Cambridge: Harvard University Press, 1986.

QUINTON, A. *The nature of things*. London: Routledge and Kegan Paul, 1973.

REDHEAD, M. e TELLER, P., Particles, particle labels, and quanta: the toll of unacknowledged metaphysics. *Foundations of Physics*, vol. 21, pp. 43-62, 1991.

REDHEAD, M., A philosopher looks at quantum field theory. In Brown, H. R. and Harré, R. (eds.), *Philosophical Foundations of Quantum Field Theory*, Oxford: Clarendon Press, pp. 9-23, 1988.

REDHEAD, M. e TELLER, P., Particle labels and the theory of indistinguishable particles in quantum mechanics. *British Journal of Philosophy of Science*, vol. 43 (201-218), pp. 14-22, 1992.

REICHENBACH, H., *Philosophic foundations of quantum mechanics*. Berkeley: University of California Press, 1944.

REICHENBACH, H., *The direction of time*. Berkeley: University of California Press, 1956.

RESTREPO, G., LLANOS, E. J. e MESA, H., Topological space of the chemical elements and its properties. *Journal of Mathematical Chemistry* 39, 401-416, 2006A.

RESTREPO, G., MESA, H., LLANOS, E. J. e VILLAVECES, J. L., The mathematics of the periodic table. In: King, B. e Rouvray, D. (eds.), *The mathematics of the periodic table*. New York: Nova Science Publishers, Inc, 2006B.

RODRIGUEZ-PEREYRA, G., The bundle theory is compatible with distinct but indiscernible particulars. *Analysis*, 64(1), pp. 72-81, 2004.

ROHRLICH, F., On the ontology of QFT. In: Cao, T. Y., (ed.), *Conceptual foundations of quantum field theory*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 357-367, 1999.

RUSSELL, B., *Our knowledge of the external world*. London: Allen & Unwin, 1926.

RUSSELL, B., *Análise da matéria*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

SCHILLER, C., *Motion mountain: the adventure of physics*. Disponível em http://www.motionmountain.eu. Acessado em 10/10/2012.

SCHINAIDER, J., REVIEW: Bitbol, M., Mécanique quantique: une introduction philosophic (Paris, Flammarion, 1996). *Principia*, vol. 16(1), pp. 185-208, 2012.

SCHINAIDER, J., Uma estrutura quase-conjuntista para a mecânica quântica não-relativista. *Principia* 17(1): 103-135, 2013.

SCHINAIDER, J., Identidade e individuação nas teorias formais clássicas (a aparecer), 2014B.

SCHINAIDER, J., A Identidade relativa de Peter Geach: respostas a (algumas) críticas (a aparecer), 2014C.

SCHINAIDER, J. e KRAUSE, D., Indiscernibilidade e identidade em química: aspectos filosóficos e formais (a aparecer), 2014D.

SCHRÖDINGER, E., Discussion of probability relations between separated systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31, pp. 555-563, 1935.

SCHRÖDINGER, E., *Ciência e humanismo*. Lisboa: Edições 70, 1952.

SCHRÖDINGER, E. *The interpretation of quantum mechanics: Dublin seminar (1949-1955) and other unpublished essays*, Woodbridge: Ox Bow Press, 1995.

SHANKAR, R., *Principles of quantum mechanics* (2 ed.). New York: Plenum Press, 1994.

SHAPIRO, S., Classical logic. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2009 Edition)*. Disponível em http://plato.stanford.edu/archives/win2009/entries/logic-classical/. Acessado em 25/04/2012.

SILVESTRINI, L. H. da C., *Uma nova abordagem para a noção de quase-verdade* (tese de doutorado). Campinas: UNICAMP, 2011.

SIMONS, P., *Parts: a study in ontology*. Oxford: Clarendon Press, 1987

SIMONS, P., Identity of indicernibles. *Routledge Encyclopedia of Philosophy* (versão 1.0), pp. 3844-3846, 1998.

SMITH, N. J. J., Why sense cannot be made of vague identity. *Noûs*, no. 42:1, pp. 1-16. 2008.

STYER, D. S., *et. al.*, Nine formulations of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, vol. 70-3, pp. 288-297, 2002.

SUPPE, F. (ed.), *The structure of scientific theories* (2a. ed.). Illinois: Un. Illinois Press, 1977.

SUPPES, P., *Introduction to logic*. New York: van Nostrand Reinhold Company, 1957.

SUPPES, P., A comparison of the meaning and uses of models in mathematics and the empirical sciences. *Synthese*, vol. 12, n. 2-3, pp. 287-301, 1960.

SUPPES, P., O que é uma teoria científica? In: Morgenbesser, S. (org.): *Filosofia da ciência*. São Paulo: Ed. Cultrix, pp. 109-123, 1975.

SUPPES, P., Representation and invariance of scientific structures. *Stanford: Center for the Study of Language and Information*, 2002.

SWOYER, C. e ORILIA, F., Properties. *The Stanford Enciclopedia of Philosophy (Winter 2011 Edition)*. Disponível em http://plato.stanford.edu/archives /win2011/entries/properties/. Acessado em 05/03/20012.

TARSKI, A., *Logic, semantics, metamathematics*. Indianapolis: Hackett, 1983.

TELLER, P., Quantum physics, the identity of indiscernibles and some unanswered questions. *Philosophy of Science*, vol. 50, pp. 309-319, 1983.

TELLER, P., *An interpretative introduction to quantum field theory*. Princeton: Princeton University Press, 1995.

TELLER, P., Quantum mechanics and haecceities. In: Castellani, E. (ed.), *Interpreting bodies: classical and quantum objects in modern physics*. Princeton: Princeton Un. Press, 1998.

TORALDO DI FRANCIA, G., *The investigation of physical world*. New York: Cambridge University Press, 1981.

TRUESDELL, C., Method and taste in natural philosophy. In: *Six lectures on modern natural philosophy*, cap. VI. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

TURRELL, G., *Mathematics for chemistry and physics*. London: Academic Press, 2002.

UFFINK, J. E. e HILGEWOORD, J., Interference and indistinguishability in quantum mechanics. *Physica B*, pp. 309-313, 1988.

van FRAASSEN, B., *The scientific image*. Oxford: Clarendon Press, 1980.

van FRAASSEN, B., *Quantum mechanics: an empiricist View*, Oxford: Clarendon Press, 1991.

VARZI, A., "Mereology". *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2012 Edition)*. Disponível online: http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/mereology. Acessado em 30/05/2013.

VOTSIS, I., Is structure not enough? *Philosophy of Science*, v. 70(5), p. 879-890, 2003.

WICK, D., *The infamous boundary*. New York: Copernicus, 1996.

WILLIAMSON, T., Identity. *Routledge Encyclopedia of Philosophy* (versão 1.0), pp. 3841-3843, 1998.

WITTGENSTEIN, L., *Tractatus logico-philosophicus.* São Paulo: Editora da USP, 1968.

WORRALL, J., Structural realism: the best of both worlds? *Dialectica*, v. 43, p. 99-124, 1989.

ZERMELO, E., Investigations in the foundations of set theory, I. In: van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Godel*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967, pp. 199-215.