Felipe de Oliveira Lamberg Henriques dos Santos

Fundamentos do Cálculo Diferencial

Florianópolis-SC

fevereiro
2014

Felipe de Oliveira Lamberg Henriques dos Santos

Fundamentos do Cálculo Diferencial

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática com Área de Concentração PROFMAT-UFSC associado ao Programa de Mestrado Profiisional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Programa de Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Celso Melchiades Doria

Florianópolis-SC

fevereiro
2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Felipe de Oliveira Lamberg Henriques dos
Fundamentos do cálculo diferencial / Felipe de Oliveira Lamberg Henriques dos Santos ; orientador, Celso Melchiades Doria - Florianópolis, SC, 2014.
91 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Cálculo diferencial. 3. Limites. 4. Números reais. 5. Números irracionais. I. Doria, Celso Melchiades . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Felipe de Oliveira Lamberg Henriques dos Santos

Fundamentos do Cálculo Diferencial

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre"em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, Área de Concentração PROFMAT-UFSC e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática(data).

Trabalho aprovado. Florianópolis-SC, 26 de fevereiro de 2014:

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Orientador

Prof. Dr. Marcio Rostirolla Adames
(UTFPR)

Prof. Dr. Luciano Bedin

Prof^a. Dr^a. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Florianópolis-SC

fevereiro
2014

Agradecimentos

Quero registrar meus agradecimentos à CAPES pelo auxílio financeiro e ao Professor Celso Melchiades Doria pelo apoio e incentivo na orientação.

Resumo

Este trabalho trata dos conceitos fundamentais dos números reais com a finalidade de desenvolver as principais técnicas do cálculo diferencial. Apresenta o conceito de limite através do estudo de sequências e faz uma breve seção sobre topologia da reta. Continuidade, derivadas e algumas de suas aplicações também são estudadas. Além disso, exibe, em apêndice, um plano de aula dirigido a alunos do ensino médio onde apresenta os números irracionais no fato de que, utilizando somente os números racionais, não conseguimos realizar todas as medições. Em particular, a medição da diagonal do quadrado tomando como unidade de medida seu lado.

Palavras-chaves: Números Irracionais. Números Reais. Limites. Cálculo Diferencial.

Abstract

This dissertation deals with the fundamental concepts of real numbers aiming to develop the fundamentals of differential calculus. It introduces the concept of limit through sequences and does a brief section about topology on the real line where the Dedekind Axiom is the most important theoretical aspect to be considered . Continuity, derivatives, and some of its applications are also studied. Furthermore, in the appendix there is a class plan aimed to high school classes, there the irrational numbers are introduced and it is shown that using only the rational numbers we can not measure all the segments. In particular, it is shown that the measure of the diagonal of a unit square is irrational.

Key-words: Irrational Numbers. Real Numbers. Limits. Differential Calculus.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

No segundo semestre de 2013, durante a disciplina *Fundamentos do Cálculo* do 2º ano do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - UFSC, constatei que quando chegamos no conteúdo Teorema do Valor Médio, um dos teoremas necessários a sua demonstração, a saber, o Teorema de Weierstrass, tem sua demonstração omitida na maioria dos livros de Cálculo por necessitar de algumas noções de topologia da reta, conteúdo dos livros de Introdução à Análise. Este foi o ponto de partida para o presente trabalho. Sem exagero de rigor e forte caráter intuitivo, o conteúdo parte dos Números Racionais e Irracionais, Números Reais passando por Sequências Numéricas, Limites, Limites de Funções e Derivadas, finalizando com a Fórmula de Taylor. Uma secão dedicada à Topologia da Reta foi imprescindível. Noções sobre conjuntos e Funções, bem como algumas aplicações de Derivadas foram omitidas. No apêndice consta um plano de aula, dirigido a alunos do ensino médio, sobre números reais tendo como ponto de partida o problema clássico de medir a diagonal do quadrado de lado 1, seguido dos conceitos de ínfimo e supremo bem como o Postulado de Dedekind dando suporte a existência dos números irracionais. Embora o conteúdo números reais faça parte do currículo do ensino médio, sua abordagem não se aprofunda e, por isso, a aula proposta foi elaborada de modo acessível a esse alunos com uma breve introdução ao Postulado de Dedekind.

1 Números Racionais e Irracionais

1.1 Números Racionais

Definição 1. *Um número racional é um número da forma* $\frac{a}{d}$*, onde* a *e* d *são inteiros e* d *não é zero.*

Com respeito a esta definição, faremos algumas observações:

- A representação $\frac{a}{d}$ não é única. Por exemplo: $1 = \frac{2}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

- A palavra *fração*, sozinha, significa apenas uma expressão algébrica com um numerador e um denominador. Por exemplo:

$$\frac{\sqrt{5}}{3}, \qquad \frac{19}{y} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2+y^2}{y^2+z^2}.$$

  são frações, mas não necessariamente números racionais.

- $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ não está na forma $\frac{a}{d}$ onde a e d são números inteiros e d não é zero mas, através de manipulações algébricas,obtemos:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4.5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}.\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}}{1} = \frac{2}{1}.$$

  Logo, $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ é um número racional.

  Já, por exemplo:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

  não há como representá-lo na forma $\frac{a}{d}$ onde a e d são números inteiros e d não é zero e, portanto, não é um número racional.

Mais adiante, demonstraremos que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

1.2 Representações Decimais

Representações Decimais Finitas

Existe uma outra representação do número racional $\frac{3}{2}$ que é diferente das formas $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{6}$ etc, a saber, a representação decimal 1,5. As representações decimais de alguns números são finitas.

Exemplo 1. $\dfrac{1}{4} = 0,25$; $\dfrac{3}{5} = 0,6$; $\dfrac{1}{50} = 0,02.$

Outros números racionais têm uma representação decimal infinita.

Exemplo 2. $\dfrac{2}{7} = 0,2857...$; $\dfrac{1}{70} = 0,0142...$; $\dfrac{4}{30} = 0,1333...$

Em geral, podemos considerar a representação decimal de um número r, de parte inteira N e parte não inteira $a_1, a_2...a_n...$, da seguinte maneira:

$$r = N, a_1a_2...a_n... \qquad \text{ou} \qquad r = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n}...$$

Examinemos mais um exemplo:

Exemplo 3. $0,575 = 0 + \dfrac{5}{10} + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{5}{10^3} = \dfrac{575}{1000} = \dfrac{23}{40}.$

O exemplo ilustra que qualquer fração decimal finita pode ser escrita sob a forma $\frac{a}{d}$, basta tomarmos como numerador o número formado pelos algarismos, sem a vírgula, e como denominador os números 10, 100,1000 etc, enfim, a potência de 10 igual ao número de casas decimais.

Se simplificarmos $\frac{575}{1000}$ à forma irredutível, obteremos $\frac{23}{40}$. Repare que o inteiro 40, bem como 1000, têm somente dois fatores primos: 2 e 5.

Se tivésssemos começado com qualquer fração decimal, ao invés de 0,575, a fração irredutível correspondente teria a mesma propriedade. Isto é, os fatores primos do denominador poderiam ser 2 ou 5, mas nenhum outro, pois o denominador é sempre fator de alguma potência de $10 = 2.5$.

Proposição 1. *Um número racional, na forma irredutível $\frac{a}{d}$, tem uma representação decimal finita se, e somente se, d não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.*

Note que d não precisa, necessariamente, ter os fatores primos 2 ou 5; pode ser que tenha um deles ou nenhum deles; d só não pode ter primos além de 2 e 5. por exemplo:

$$\frac{1}{5} = 0,2; \qquad \frac{1}{8} = 0,125; \qquad \frac{3}{1} = 3,0$$

Para mostrarmos a outra parte da proposição, vamos supor uma fração irredutível $\frac{a}{d}$ e que d tenha, no máximo, os fatores 2 e 5, e demonstrar que a fração decimal correspondente é do tipo finito.

Demonstração. Suponhamos que d seja da forma $2^m.5^n$, com m e n inteiros positivos ou nulos. Temos duas possibilidades: $n \leq m$ ou $n > m$.

1º caso($n \leq m$)

Multiplicando o numerador e o denominador da fração por 5^{m-n}, temos:

$$\frac{a}{d} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^n.5^{m-n}} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^m} = \frac{a.5^{m-n}}{10^m}.$$

Como $n \leq m$, então $m-n$ é positivo ou nulo e 5^{m-n}é inteiro e, portanto, $a.5^{m-n}$ é inteiro. Fazendo $a.5^{m-n} = c$, temos $\frac{a}{d} = \frac{c}{10^m}$.

Note que c dividido por 10^m gera uma representação decimal finita com a vírgula em seu devido lugar.

2º caso($n > m$)

Multiplicando o numerador e o denominador por 2^{n-m}, temos:

$$\frac{a}{d} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.2^{n-m}}{2^m.5^n.2^{n-m}} = \frac{a.2^{n-m}}{2^n.5^n} = \frac{a.2^{n-m}}{10^n}.$$

Como $n > m$, então $n - m$ é inteiro. Fazendo $a.2^{n-m} = t$, temos:$\frac{a}{d} = \frac{t}{10^n}$.

Como o denominador é uma potência de 10, o resultado segue.

□

Representação Decimal Infinita e Periódica

Separamos os números racionais em dois tipos: os que têm uma representação decimal finita e os que têm uma representação decimal infinita. Demonstraremos que os que têm uma representação decimal infinita possuem um grupo de algarismos que se repete indefinidamente. Por exemplo:

$$\frac{209}{700} = 0,298571428571428571 42\ldots \qquad \text{ou} \qquad 0,29\overline{857142}$$

onde a barra, acima dos algarismos 857142, significa que estes se repetem.

O divisor sendo 700, sabemos que os possíveis restos são os números 1, 2, ..., 699. (O resto zero não é considerado, pois não estamos examinando números com representação decimal finita.). Portanto, podemos estar certos de que algum resto aparecerá uma segunda vez, ainda que precisemos, talvez, efetuar muitas divisões antes que isto ocorra.

No caso geral $\frac{a}{b}$, se o inteiro a for dividido pelo inteiro b, os únicos restos possíveis serão: 1, 2, 3..., $b-2$, $b-1$ e, portanto, podemos ter certeza de que haverá repetição no desenrolar da divisão. Quando a repetição ocorrer, um novo ciclo se iniciará e o resultado será uma representação decimal infinita e periódica.

Proposição 2. *Um número é racional se, e somente se, a representação decimal é finita ou infinita e periódica.*

Demonstração. A primeira parte da proposição: se um número é racional então a representação decimal é finita ou infinita e periódica; foi discutida com os exemplos já citados

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= 1,5 \\ \frac{209}{700} &= 0,\overline{29857142} \end{aligned}$$

Já a segunda parte, a recíproca da proposição, trata de dois tipos de frações decimais: as finitas e as infinitas periódicas.

Exemplos:

$$0,575 = 0 + \frac{5}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3}.$$

Note que 0,575 é uma soma de números racionais e, portanto, um número racional.

$$4,323232... = 4 + 0,323232....$$

É possível transformarmos a parte decimal infinita que se repete em um número racional.

Seja $x = 0,323232...$:

$$\begin{aligned} x &= 0,323232... \\ 100x &= 32,323232... \\ 99x &= 32 \\ x &= \frac{32}{99} \end{aligned}$$

Logo $4,\overline{32} = 4 + x = 4 + \frac{32}{99} = \frac{428}{99}$.

Portanto, 4,323232... é um número racional.

Generalizando:

Seja x uma dízima periódica na forma:

$$x = 0, a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 ... b_t.$$

Note que $a_1 a_2 ... a_s$ não é um produto, e sim os algarismos da parte não periódica e $b_1 b_2 ... b_t$ os algarismos da parte periódica.

Se multiplicarmos x por 10^{s+t} e depois por 10^s e subtrairmos os resultados, obteremos:

$$\begin{aligned} 10^{s+t}.x &= a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 ... b_t + 0, b_1 b_2 ... b_t \\ 10^s.x &= a_1 a_2 ... a_s + 0, b_1 b_2 ... b_t \\ (10^{s+t} - 10^s).x &= a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 ... b_t - a_1 a_2 ... a_s \end{aligned}$$

de modo que

$$x = \frac{a_1 a_2 ... a_s b_1 b_2 ... b_t - a_1 a_2 ... a_s}{10^{s+t} - 10^s}.$$

Portanto, x é racional.

$\square$

Representação Decimal Infinita e não Periódica

Podemos conceber números cuja representação não é finita nem infinita periódica. Esses são os chamados *números irracionais*. É fácil produzir irracionais; basta inventarmos uma regra de formação que não permita aparecer período. Exemplos: 0,202002000...; 0,353553555...

Um outro exemplo de número irracional é o número $\sqrt{2} = 1,4142135623...$

O fato de não vermos período nas aproximações de $\sqrt{2}$, por mais que aumentássemos essas aproximações, não prova que $\sqrt{2}$ seja irracional, pois é concebível que o período tenha muito mais algarismos.

O Número Irracional $\sqrt{2}$

Suponhamos que $\sqrt{2}$ fosse um número racional, isto é, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ com a e b inteiros, e $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível, ou seja, a e b primos entre si. Note que a e b não são ambos pares, pois, assim, a fração não seria irredutível. Elevando ao quadrado a equação e simplificando-a, obtemos:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}, \qquad a^2 = 2b^2$$

O termo $2b^2$ representa um inteiro par, de modo que a^2 é um inteiro par e, portanto, a é um inteiro par, digamos $a = 2c$, onde c é inteiro. Substituindo a por $2c$, obtemos:

$$(2c)^2 = 2b^2, \qquad 4c^2 = 2b^2, \qquad 2c^2 = b^2$$

O termo $2c^2$ representa um inteiro par, de modo que b^2 é um inteiro par e, portanto, b é um inteiro par. Temos, então, a e b pares. Contradição, pois supomos a e b primos entre si. Logo não é possível escrever $\sqrt{2}$ na forma $\frac{a}{b}$, ou seja, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

2 O Corpo dos Números Reais

Trataremos do conjunto dos números reais, agora, sob a denominação de *corpo dos números reais* onde as operações de adição e de multiplicação são bem definidas (isto é, a cada par de elementos x e y de um corpo F corresponde um único elemento de F que se designa por $x + y$ ou xy) e satisfazem as propriedades que seguem.

1. Leis comutativas: $x + y = y + x$, $xy = yx$.

2. Leis associativas: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(xy)z = x(yz)$.

3. Existência de um zero: existe um elemento $0 \in F$ tal que $x+0 = x$ para todo $x \in F$.

4. Existência de inversos: dado $x \in F$, existe $-x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$, e dado $x \in F$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in F$ tal que $xx^{-1} = 1$.

5. Lei distributiva: $(x + y)z = xz + yz$.

Observação. *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ temos:*

1. $a.0 = 0$

2. $-a.b = -(a.b)$

3. $(-a).(-b) = a.b$

Demonstração. (1)

$$\begin{aligned} a.0 + a.0 &= a.(0 + 0) \\ &= a.0 \end{aligned}$$

Somando $-a.0$ em ambos os lados da equação, temos $a.0 = 0$. □

Demonstração. (2)

$$\begin{aligned} -a.b + a.b &= [-(a) + a].b \\ &= 0.b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somando$-(a.b)$ em ambos os lados, temos: $-(a).b = -(a.b)$. □

Demonstração. (3) Note que

$$(-a).(-b) + [-(a.b)] = (-a).(-b) + (-a).b = (-a).[(-b) + b] = (-a).0 = 0.$$

Somando $(a.b)$ em ambos os lados, temos:

$$(-a).(-b) = a.b.$$

□

Um corpo F é ordenado se contiver um subconjunto P, formado por elementos positivos de F, com as seguintes propriedades:

1. $x \in P$, $y \in P$ implica $x + y \in P$ e $xy \in P$,
2. dado $x \in F$, então uma, e somente uma, das três possibilidades ocorre: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$

Em um corpo ordenado F, podemos introduzir uma ordem estrita entre seus elementos, do seguinte modo:

$$x > y \text{ se } x - y \in P$$

Vejamos outras propriedades:

1. $x > y \Rightarrow -x < -y$
2. $x > y, t > 0$ real $\Rightarrow tx > ty$
3. $x > y, t < 0$ real $\Rightarrow tx < ty$
4. $x > y \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$; x e y positivos.
5. O "$\leq$"é uma *relação de ordem* em F, isto é:
   a) $x \leq x$, para todo $x \in F$ (reflexividade);
   b) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (anti-simetria);
   c) $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitividade).

Demonstração. (1)

$$x > y \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow -(x - y) < 0 \Rightarrow -x + y < 0 \Rightarrow -x < -y.$$ □

Demonstração. (2)

$$x > y \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow t(x - y) > 0 \Rightarrow tx - ty > 0 \Rightarrow tx > ty.$$ □

Demonstração. (3)

$$x > y \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow t(x-y) < 0 \Rightarrow tx - ty < 0 \Rightarrow tx < ty.$$ □

Demonstração. (4)

$$x > y \Rightarrow x.x^{-1} > y.x^{-1} \Rightarrow 1 > y.x^{-1} \Rightarrow y^{-1}.1 > y^{-1}y.x^{-1} \Rightarrow y^{-1} > x^{-1} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}.$$ □

Demonstração. (5)

$x \leq x$. Imediata.

$x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x - y \leq 0$ e $-(x-y) \leq 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

$x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x - y \leq 0$, $y - z \leq 0 \Rightarrow x - y + y - z \leq 0 \Rightarrow x \leq z$.

□

2.1 Inf e Sup

Para entendermos o conceito de ínfimo e de supremo de conjunto, precisamos das noções de cota inferior e cota superior de um conjunto.

Cota Superior

Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F. Um elemento $x \in F$ é *uma cota superior* de A se $x \geq y$, para todo $y \in A$.

Cota Inferior

Um elemento $x \in F$ é uma *cota inferior* se $x \leq y$, para todo $y \in A$. Um subconjunto A de um corpo ordenado F se diz *limitado inferiormente* se ele possui cota inferior.

Supremo de um Conjunto Limitado Superiormente

Seja F um corpo ordenado e $A \subset F$ um subconjunto limitado superiormente. O *supremo* do conjunto A, que designamos por $\sup A$, é definido como a menor das cotas superiores de A.

Ínfimo de um Conjunto Limitado Inferiormente

Seja F um corpo ordenado, e $A \subset F$, um subconjunto limitado inferiormente.

O *ínfimo* de um conjunto A, que designamos por $\inf A$, é definido como a maior das cotas inferiores.

De posse dessas definições, agora, definimos o conjunto $\mathbb{R}$ dos *números reais*, como sendo um corpo ordenado onde se verifica a propriedade a seguir.

2.2 Postulado de Dedekind

Todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo.

Proposição 3. *(1) Se um conjunto A de $\mathbb{R}$ é limitado inferiormente, então A tem* $\inf$.

Demonstração. Como A é limitado inferiormente, A tem uma cota inferior, digamos m. Tome $d = m - 1$. Considere, agora, o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} : x = a - d, a \in A\}$. Note que B é um subconjunto de $\mathbb{R}$ não-vazio e constituído apenas de elementos positivos. Logo, pelo *Postulado de Dedekind*, B tem $\inf$. Como B é o conjunto A transladado por $-d$, então A tem inf. □

Proposição 4. *(2) Se um conjunto A de $\mathbb{R}$ é limitado superiormente, então A tem sup.*

Demonstração. Utilizando a proposição (1), tome o conjunto $-A$ com a cota superior $-m$. Como A tem $\inf$, $-A$ tem $\sup = -\inf A$. □

O Número Real $\sqrt{2}$

Considere o seguinte subconjunto dos racionais

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2, x > 0\}.$$

Mostraremos que A não tem inf (em $\mathbb{Q}$).

Seja

$$B = \{x \in Q : x^2 < 2, x > 0\}.$$

Como não existe racional tal que $x^2 = 2$, segue-se que dado um racional positivo r, então $r \in A$ ou $r \in B$. Em primeiro lugar, provamos:

1. se $x \in A \Rightarrow$ existe $y \in A$ tal que $y < x$.

2. se $x \in B \Rightarrow$ existe $z \in B$ tal que $z > x$.

Para provar (1), escrevemos $x = p/q$. A ideia é procurar um inteiro n tal que $y = (np-1)/nq$ pertença a A. Isso ocorre se $(np-1)^2/n^2q^2 > 2$, isto é:

$$(*)\ (p^2 - 2q^2)n^2 - 2pn + 1 > 0.$$

Como $x \in A$, temos $p^2 - 2q^2 > 0$. Logo, (*) se verifica para n suficientemente grande. De modo análogo, provamos (2). A seguir, suponhamos que A tenha ínfimo, que designamos por x_0. Então $x_0 \leq x$ para todo $x \in A$. À vista de (1), x_0 não pode pertencer a A, pois, de outro modo, haveria $y \in A$ tal que $y < x_0$, o que seria absurdo. Logo, x_0 deve pertencer a B. À vista de (2), existe, então $z \in B$ tal $x_0 < z$. Como $z^2 < 2$, segue-se que z é cota inferior para A. Isso, porém, contradiz o fato de x_0 ser o inf de A. Portanto, A não tem inf.

Agora, olhemos o conjunto A como um subconjunto dos números reais. Em virtude do Postulado de Dedekind, A tem um ínfimo b. Sabemos que b não é racional. Eis, então, um exemplo de um número irracional; esse número é designado por $\sqrt{2}$. A justificativa está no seguinte resultado:

"A equação $x^2 = 2$ tem uma e só uma solução real positiva".

Esse é um resultado sobre a existência e unicidade de solução para uma equação. A unicidade é facilmente provada, supondo que existam duas soluções reais positivas a e b. Segue que $a^2 = 2$ e $b^2 = 2$, o que acarreta $a^2 - b^2 = 0$, ou seja, $(a-b)(a+b) = 0$. Como $a > 0$ e $b > 0$, temos $a + b > 0$, o que implica $a - b = 0$, ou seja, $a = b$.

A existência de solução real positiva para $x^2 = 2$ é obtida provando-se que $b = \inf A$ satisfaz à equação: $b^2 = 2$. Basta mostrar que $b^2 < 2$ ou $b^2 > 2$ não são verdadeiras.

Primeiro suponha que $b^2 < 2$. Como

$$\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{2b+1}{n},$$

vê-se que $\left(b + \dfrac{1}{n}\right)^2 < b^2 = 2$ para um certo n.

Isso mostra que $b + \frac{1}{n}$ é uma cota inferior do conjunto A; portanto, b não poderia ser o ínfimo de A. Por outro lado, suponha que $b^2 > 2$. É fácil de ver, como se fez acima, que se $n \in N$ for tomado adequadamente, teremos $\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$. Em virtude da densidade (veremos este conceito mais adiante) de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$: dados dois números reais quaisquer $a < b$, existe um racional r tal que $a < r < b$, ou seja, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $b - \frac{1}{n} < r < b$. Como $\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ e $r > \left(b - \frac{1}{n}\right)^2$, logo $r^2 > 2$. Portanto, $2 < r^2 < b^2$, o que contradiz o fato de b ser o ínfimo de A.

$\sqrt{2}$ obtido como o Supremo de um Conjunto Limitado Superiormente

Tomemos o conjunto B, citado acima, e mostraremos que B não tem sup em $\mathbb{Q}$.

Vamos supor que B tenha sup $= x_0$ em $\mathbb{Q}$, ou seja, $x_0 \geq x \in B$. Note que $x_0 \in B$ ou $x_0 \in A$. Por (2), $x_0 \notin B$, pois existe $y \in B$ com $y > x$ para todo $x \in B$. Contradição: $x_0 = \sup B$. Então, x_0 deve pertencer ao conjunto A.

Por(1), existe $y \in A$ tal que $y < x$ para todo $x \in A$. Logo existe $y < x_0$. Como $y^2 > 2$, y é cota superior de B. Pelo fato de $y < x_0$, x_0 não é sup. Contradição.

Conclusão: B não tem sup em $\mathbb{Q}$. Mas como B é um subconjunto de $\mathbb{R}$ não-vazio e formado por elementos positivos, B tem sup (*Postulado de Dedekind*). Não em $\mathbb{Q}$, mas em $\mathbb{R}$. Como este supremo não é racional, então ele é irracional. Mais precisamente $\sqrt{2}$.

2.3 Módulo, Desigualdades e Intervalos

Designemos por $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos elementos positivos do corpo ordenado $\mathbb{R}$. o conjunto $\mathbb{R}_+$ contém todos os racionais positivos.

O módulo ou valor absoluto de um número real a, que se designa por $|a|$, é definido do seguinte modo:

Definição 2.

$$|a| = \begin{cases} a, & se \quad a \geq 0 \\ -a, & se \quad a < 0. \end{cases}$$

Note que, em geral, temos para qualquer real a:

$$|a| = |-a|$$

Seja a um número real positivo. Observamos anteriormente que a equação $x^2 = a$ tem uma única solução positiva, isto é, existe $b \in \mathbb{R}_+$ tal que $b^2 = a$. Este valor é chamado a raiz quadrada positiva de a sendo representada por $\sqrt{a}$.

Teorema 1. *Seja c um número real. Então $|c| = \sqrt{c^2}$.*

Demonstração. Imediata, se $c \geq 0$. Se $c < 0$, então $c^2 = |c|^2$ e, portanto, $\sqrt{c^2} = \sqrt{|c|^2} = |c|$. □

Teorema 2. *Sejam a e b reais positivos, tais que $a < b$. Então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.*

Demonstração. Escrevamos $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$. Daí $x^2 = a$ e $y^2 = b$. Como $a < b$, então $x^2 < y^2$. Isto é, $y^2 - x^2 > 0$, ou $(y-x)(y+x) > 0$. Sendo x e y positivos, temos que $y + x$ é positivo. Segue-se que $y - x > 0$. Logo $x < y$. Portanto, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. □

Temos as seguintes propriedades do módulo:

1. $|ab| = |a||b|$
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$(desigualdade do triângulo)
3. $|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$

quaisquer que sejam os reais a e b.

(1) Note que $a^2 = |a|^2$, pois $|a|$ é um dos elementos a ou $-a$ e vale $a^2 = (-a)^2$. Logo $|a.b|^2 = (a.b)^2 = a^2.b^2 = |a|^2.|b|^2 = (|a|.|b|)^2$. Segue-se daí que $|a.b| = \pm|a|.|b|$. Como $|a.b|$ e $|a|.|b|$ são ambos positivos, concluímos que $|a.b| = |a|.|b|$.

(2) Observe que $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq b \leq |b|$, donde, por adição, $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$. Isto significa que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(3) Em virtude de (2), temos $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, o que dá $|a| - |b| \leq |a - b|$. Pelo mesmo motivo, temos $|b| = |a| \leq |b - a|$. Note que $|b - a| = |a - b|$. Concluímos que $|b| - |a| \leq |a - b|$. Assim, valem, simultaneamente, $|a - b| \geq |a| - |b|$ e $|a - b| \geq -(|a| - |b|)$. Portanto, $||a| - |b|| \leq |a - b|$. A outra desigualdade é imediata.

O conjunto $\mathbb{R}_+$ é chamado a *semirreta positiva*. Por analogia, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ é a semirreta negativa. Em geral, uma semirreta é um conjunto de uma das formas seguintes:

$$\begin{aligned} (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, & (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \end{aligned}$$

onde a e b são reais quaisquer. Nos dois primeiros casos, a semirreta não inclui a extremidade e, então, é chamada *semirreta aberta*. Nos dois últimos casos, ela inclui a extremidade e, então, é chamada *semirreta fechada*.

Dados dois números reais a e b, com $a < b$, um conjunto de uma das quatro formas abaixo é chamado um *intervalo*:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, & [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, & (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \end{aligned}$$

O intervalo (a, b) não inclui suas extremidades e é chamado um *intervalo aberto*. O intervalo $[a, b]$ inclui suas extremidades e é denominado *fechado*.

O *interior* de um intervalo de um dos quatro tipos acima é, por definição, o intervalo aberto (a, b). Vemos que o interior do intervalo pode ou não coincidir com o próprio intervalo.

Por uma questão de uniformidade na nomenclatura, as semirretas e a reta inteira são chamadas também intervalos ou, mais precisamente, *intervalos ilimitados.*

Definimos interior de um intervalo ilimitado de modo análogo a interior de um intervalo limitado. Por exemplo, o interior de $[a, \infty)$ é (a, ∞).

Intervalos também podem ser descritos em termos do módulo.

Exemplo 4. $(-a, a) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < a\}$
$[-b, b] = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq b\}$.

Nestes exemplos, o centro do intervalo (o ponto médio do intervalo) é a origem 0 da reta. Mostraremos agora que intervalos, não necessariamente com centro na origem, também podem ser descritos, usando-se o módulo. Por exemplo, consideremos o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 2\}.$$

Pela definição de módulo, há duas possibilidades:

- $x - 1 \geq 0$. Neste caso, $x \in A$ se, e somente se, $x - 1 < 2$. Estas duas desigualdades dão $x \geq 1$ e $x < 3$. Logo x pertence ao intervalo$[1, 3)$.
- $x - 1 < 0$. Neste caso, $x \in A$ se, e somente se, $-(x - 1) < 2$. Estas desigualdades dizem que $x < 1$ e $x > -1$. Logo x pertence ao intervalo $(-1, 1)$.

Juntando os dois casos, vemos que A é precisamente a união dos intervalos, ou seja, o intervalo$(-1, 3)$.

O *comprimento* de um intervalo com extremidades $a < b$ é, por definição, o número real positivo $b - a$. A metade do comprimento é chamada o *raio* do intervalo. Por exemplo, no intervalo $[1, 5]$, o centro é 3 e o raio é 2. Em geral, se a e r são reais quaisquer, com $r > 0$, então

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} : |x + a| < r\} &= (-a - r, -a + r) \\
\{x \in \mathbb{R} : |x + a| \leq r\} &= [-a - r, -a + r] \\
\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} &= (a - r, a + r).
\end{aligned}$$

Dados dois números reais a e b, dizemos que $|a - b|$ é a *distância* entre eles. Tal conceito tem um significado geométrico evidente, se lembrarmos a correspondência entre os números reais e os pontos da reta. O comprimento de um intervalo é, então, a distância entre suas extremidades.

Teorema 3 (Intervalos Encaixados)**.** *Dada uma sequência decrescente* $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ *de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$*, existe pelo menos um número real* c *tal que* $c \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. As inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ significam que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$. O conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é, portanto, limitado superiormente. Seja $c = \sup A$. Evidentemente, $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como cada b_n é cota superior de A, temos $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $c \in I_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. □

2.4 Sequências Numéricas e Limites

Uma *sequência numérica* é uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto dos números inteiros positivos tomando-se valores reais. Assim, a cada $n \in \mathbb{N}$ corresponde um real a_n. Observamos que os a_n's não são necessariamente diferentes. Os elementos a_n são chamados os *termos* da sequência, e a notação (a_n) é usada para designar a sequência. Quando nos referirmos ao conjunto formado pelos termos da sequência, usaremos a notação $\{a_n\}$.

Definição 3. *Dizemos que um número real c é um* ***ponto de acumulação da sequência*** *(a_n) se, para cada $\epsilon > 0$ dado, existir um número infinito de inteiros n tais que $|a_n - c| < \epsilon$.*

Exemplo 5. *A sequência 2, 2, ... tem um único ponto de acumulação: 2.*

Exemplo 6. *A sequência 1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, ... tem dois pontos de acumulação: 1 e 0.*

Exemplo 7. *A sequência 1, 2, 1, 3, 1, 4, ... tem um ponto de acumulação: 1.*

Definição 4. *Uma sequência (a_n) converge para um número real r, se, para qualquer real $\epsilon > 0$ dado, existir um número natural n_0 tal que*

$$|a_n - r| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Neste caso, denotamos $\lim(a_n) = r$.

Na verdade, ao testar a convergência de uma sequência, estamos interessados somente no que acontece para valores pequenos de ϵ. Isso porque, se $|a_n - r| < \epsilon$ se verificar para um dado $\epsilon_0 > 0$, ela necessariamente se verificará para todo $\epsilon > \epsilon_0$. O número r é chamado o *limite* da sequência, e toda sequência que converge é denominada *convergente.* Usamos as notações $a_n \to r$, e $r = \lim a_n$.

Proposição 5. *Se uma sequência for convergente, digamos para r, então o limite é único.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que r não seja único, isto é, que exista $s \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n - s| < \epsilon$ com $r \neq s$.

Tome $\epsilon = |s - r|/2$. Então, existem números naturais n_1 e n_2 tais que

$$|a_n - r| < \epsilon \text{ para } n \geq n_1, \text{ e}$$
$$|a_n - s| < \epsilon \text{ para } n \geq n_2.$$

Seja $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Como $|a_n - r| = |r - a_n|$ e pela desigualdade do triângulo: $|r - a_n + a_n - s| \leq |a_n - r| + |a_n - s|$, temos:

$$|r - s| \leq |a_n - r| + |a_n - s| < 2\epsilon,$$

Como $2\epsilon = |r - s|$, segue que $|r - s| < |r - s|$. Absurdo. Portanto o limite de uma sequência convergente é único. □

Exemplo 8. *A sequência 1, 1/2, 1/3, ..., 1/n, ... converge para 0. De fato, dado um* $\epsilon > 0$*, tomaremos um* $n_0 > 1/\epsilon$*. Então, para todo* $n > n_0$*, teremos* $n > 1/\epsilon$*, o que implica* $1/n < \epsilon$ *ou* $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

Exemplo 9. *A sequência 1, 3, 1/2, 3, 1/3, 3, 1/4, 3, ... não converge, visto que, por um lado, há termos iguais a 3, para n tão grande quanto se queira e, por outro lado, os termos* a_n *para n ímpar convergem para 0. Formalizando, seja dado* $\epsilon = 1$*; então, qualquer que fosse o real r, o intervalo*$\{x \in \mathbb{R} : |x - r| < 1\}$ *não poderia conter o número 3 e algum termo* a_n *para n ímpar.*

Quando uma sequência não converge, dizemos que ela *diverge* e ela é, então, chamada *divergente*. Uma sequência, ao divergir, pode fazê-lo de modo que os termos a_n se tornem "arbitrariamente grandes"ou ter vários pontos de acumulação. Formalmente, dado qualquer real $M > 0$, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, temos $a_n > M$. Neste caso, dizemos que a sequência (a_n) *tende para* $+\infty$. Exemplo: 1,2,3,4...

Uma sequência pode divergir sem que seus termos se tornem arbitrariamente grandes, como é o caso da sequência 1, 3, 1/2, 3, 1/4, 3, ... A divergência, neste caso, decorre do fato dos termos se acumularem a dois pontos diferentes: 3 e 0.

Seja $A = \{n_1 < n_2 < ...\}$ um subconjunto infinito de N. A restrição $s|A$ de uma sequência $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(s : \delta \to a_{n_\delta})$ a A é chamada *subsequência*. Portanto, a subsequência $s|A$ é uma sequência definida do seguinte modo: a cada $j \in \mathbb{N}$ corresponde $s(\delta) = a_{n_j}$.

Teorema 4. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $a = lim(a_n)$. Tomando $\epsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n \in (a - 1, a + 1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n, a - 1, a + 1\}$. Todos os termos a_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada. □

Teorema 5. *Se* $lim\ a_n = 0$ *e* (b_n) *é uma sequência limitada (convergente ou não) então* $lim(a_n b_n) = 0$.

Demonstração. Existe $c > 0$ tal que $|b_n| \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \to |a_n| < \epsilon/c$. Então $n > n_0 \Rightarrow |a_n b_n| = |a_n||b_n| < (\epsilon/c).c = \epsilon$, logo $lim(a_n b_n) = 0$. ☐

Teorema 6. *Se $lim\ a_n = a$ e $lim\ b_n = b$ então:*

1. $lim(a_n + b_n) = a + b$
2. $lim(a_n b_n) = ab$.

Demonstração. 1. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existem n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon/2$ e $n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n1$ e $n > n_2$, logo $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b) \geq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Portanto $\lim(a_n + b_n) = a + b$. ☐

Demonstração. 2. Temos $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$. Pelos teoremas acima, (a_n) é limitada e $\lim(b_n - b) = \lim(x_n - a) = 0$. Segue-se que $\lim(a_n b_n - ab) = \lim[a_n(b_n - b)] + \lim[(a_n - a).b] = 0$, donde $\lim(a_n b_n) = ab$. ☐

Teorema 7 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada (a_n) contém uma subsequência convergente.*

Demonstração. Definimos um conjunto B de reais do seguinte modo: "$x \in B$, se existir no máximo um número finito de índices n tais que a_n seja maior do que x". Como o conjunto $\{a_n\}$ é limitado, pois a sequência (a_n) é limitada, segue-se que existe $k > 0$ tal que $|a_n| \leq k$ para todo n. Logo, $-k$ é uma cota inferior para o conjunto B. Portanto, pelo Postulado de Dedekind, B tem ínfimo; seja m tal ínfimo. Agora vamos construir uma subsequência (a_{n_j}) de (a_n) tal que $a_{n_j} \to m$. O intervalo $(m-1, m+1)$ contém termos da sequência (a_n) para uma infinidade de valores de n, pois, de outro modo, $m - 1$ estaria em B e, portanto, m não seria o ínfimo de B; tome um desses termos de a_n, digamos a_{n_1}, então, $|a_{n_1} - m| < 1$.
O intervalo $(m - 1/2, m + 1/2)$ contém termos da sequência (a_n) para uma infinidade de valores de n, o que se prova do mesmo modo que no caso precedente; seja a_{n_2} um tal termo e tal que $n_2 > n_1$. Então: $|a_{n_2} - m| < 1/2$. Assim por diante, tomamos $a_{n_j} \in (m - 1/j, m + 1/j)$ e tal que $n_j > n_{j-1} > \ldots n_2 > n_1$. Deste modo constrói-se uma subsequência (a_{n_j}) de (a_n) tal que $a_{n_j} \to m$, quando $j \to \infty$, pois $|a_{n_j} - m| < 1/j$, o que completa a demonstração do teorema.

☐

Definição 5. *Uma sequência de números reais é denominada uma sequência de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existir n_0 tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ para todos n, $m \geq n_0$.*

Teorema 8. *Uma sequência é convergente se, e somente se, ela é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que (a_n) seja convergente e seja r seu limite. Então, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_n - r| < \epsilon/2$ para $n > n_0$. Logo, se n e m são maiores que n_0 temos, usando a desigualdade do triângulo:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - r| + |a_m - r| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Reciprocamente, suponhamos que a condição do teorema seja satisfeita e provemos que (a_n) é convergente. Devemos, então, descobrir o limite r. Pela hipótese, dado $\epsilon = 1$, existe n_0 tal que $|a_n - a_m| < 1$, para n, $m \geq n_0$. Logo, $|a_n - a_{n_0}| < 1$, para $n \geq n_0$.

Da desigualdade do triângulo: $|a_n \leq |a_{n_0}| + |a_n = a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$ para $n \geq n_0$.

Seja k' o maior dos números $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_{0-1}}|$, e seja k o maior dos dois números, k e $1 + |a_{n_0}|$. Portanto, $|a_n| \leq k$, para todo n.

Aplicando o Teorema de Bolzano-Weierstrass, segue-se que (a_n) contém uma subsequência convergente (a_{n_j}), e seja r seu limite. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n_j} - r| < \epsilon$ para $n_j \geq n_0'$.

Por outro lado, em virtude da hipótese, temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0'' \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ para n, $m \geq n_0''$. Agora, pela desigualdade do triângulo, temos

$$|a_m - r| \leq |a_m - a_n| + |a_n - r|$$

para quaisquer termos a_n e a_m de (a_n). Logo, se na última desigualdade tomarmos $m \geq \max(n_0', n_0'')$ e $n = n_j \geq \max(n_0, n_0'')$ temos

$$|a_m - r| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon,$$

o que prova a convergência de (a_n). □

Sequências Monótonas

Uma sequência (a_n) é *monótona não-decrescente* se $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$. Analogamente, (a_n) é *monótona não-crescente* se $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$.

Teorema 9. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Suponha que (a_n) seja monótona não-decrescente. Como ela é limitada superiormente, existe um supremo, em virtude do Postulado de Dedekind, o qual chamemos de m. Provaremos que (a_n) converge para m. Pela definição de supremo, dado $\epsilon > 0$, existe um elemento do conjunto $\{a_n\}$, digamos a_{n_0}, tal que $a_{n_0} > m - \epsilon$. Como a sequência é monótona não-decrescente, segue-se que $a_n > m - \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $|a_n - m| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, o que prova que a sequência (a_n) converge para m. Para (a_n) não-crescente, a demonstração é análoga.

□

2.5 Topologia da Reta

Conjuntos Abertos

Diz-se que o ponto a é *interior* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número $\epsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ está contido em X. O conjunto dos pontos interiores a X chama-se o *interior* do conjunto X e representa-se pela notação $int\ X$. Quando $a \in int\ X$ diz-se que o conjunto X é uma vizinhança do ponto a. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se *aberto* quando $A = int\ A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A.

Observação (1)**.** *Todo ponto c do intervalo aberto (a, b) é um ponto interior a (a, b). Os pontos a e b, extremos do intervalo fechado $[a, b]$ não são interiores a $[a, b]$. Note que $int[a, b] = (a, b)$. O intervalo fechado $[a, b]$ não é uma vizinhança de a nem de b. Um intervalo aberto é um conjunto aberto. O conjunto vazio é aberto.*

Observação (2)**.** *O interior do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é vazio. De fato, o intervalo aberto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ não está contido em $\mathbb{Q}$, pois existem números pertencentes a este intervalo que não pertencem a $\mathbb{Q}$, por menor que seja ϵ.*

Observação (3)**.** *O limite de uma sequência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos: tem-se $a = \lim x_n$ se, e somente, se para todo conjunto aberto A contendo a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$.*

Teorema 10. *Dados os conjuntos $A_1, A_2, \ldots a_\lambda$ abertos e todos contidos em A, a união destes conjuntos é um conjunto aberto.*

Demonstração. Se $x \in A$ então existe λ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto $x \in A$ é interior, isto é, A é aberto. □

Conjuntos Fechados

Diz-se que um ponto a é *aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é o limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$. Note que todo ponto $a \in X$ é aderente a X, basta tomar a sequência constante.

Chama-se *fecho* de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X. Tem-se $X \subset \overline{X}$. Se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$. Um conjunto X diz-se *fechado* quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X.

Observação (1). *Seja $X \subset Y$. Diz-se que x é denso em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo $b \in Y$ é aderente a X.*

Exemplo 10. *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Vejamos a *densidade* de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ da seguinte maneira:

Proposição 6. *Dados dois números reais quaisquer $a < b$, existe um racional r tal que $a < r < b$. Isto é, dado um intervalo aberto (a, b) qualquer em $\mathbb{R}$, existe um número racional em (a, b).*

Demonstração. Como $b - a > 0$, ou seja, $b - a$ é um número positivo, então existe $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ tal que $n(b - a) > 1$. Em outras palavras, podemos tomar o número $b - a$ e multiplicá-lo por um certo natural n de modo a ser maior do que o número 1. Segue que $b - a > 1/n$. Considere, agora, o conjunto $A \in \mathbb{R}$ da forma $A = \{m \in \mathbb{Z}; \frac{m}{n} \geq b\}$. Como A é formado por inteiros, conseguimos tomar seu menor elemento. Seja m_0 o menor elemento de A. Temos $b \leq \frac{m_0}{n}$. Note que $m_0 - 1 < m_0$, então $\frac{m_0-1}{n} < b$. Afirmamos que $a < \frac{m_0-1}{n} < b$. Se não fosse assim, teríamos $\frac{m_0-1}{n} \leq a < b \leq \frac{m}{n}$ que significa que o intervalo (a, b) está contido no intervalo $(\frac{m_0-1}{n}, \frac{m}{n})$ e isto implicaria em $b - a \leq \frac{m}{n} - \frac{m_0-1}{n}$, ou seja, o comprimento do intervalo (a, b) é menor ou igual ao comprimento do intervalo $(\frac{m_0-1}{n}, \frac{m}{n})$. Com isso, teríamos $b - a < \frac{1}{n}$. Contradição. Portanto existe um racional $\frac{m_0-1}{n}$ entre a e b. □

Corolário 1. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. *(O fecho de $\mathbb{Q}$ é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.)*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < b - a < 1$. Pela proposição, existe um racional r_1 tal que $a < r_1 < b$. Analogamente, existe r_2 tal que $a < r_1 < r_2 < b$. Prosseguindo com este raciocínio, teremos uma sequência de números racionais (r_n) crescente e limitada, que pelo Teorema 9 da página 34 converge. Vimos, no capítulo 1, que um número irracional é o limite de uma sequência de racionais, ou seja, temos que os irracionais são os limites destas sequências (r_n) e formam um conjunto de pontos aderentes a $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{R}$ é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, então, $\mathbb{R}$ é o fecho de $\mathbb{Q}$. □

Teorema 11. *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.*

Demonstração. Seja a aderente a X. Então $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma vizinhança qualquer V, temos $x_n \in V$ para todo N suficientemente grande (pela definição de limite), logo $V \cap X \neq \emptyset$. Reciprocamente, se toda vizinhança de a contém pontos de X podemos escolher, em cada intervalo $(a - 1/n, a + 1/n), n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X$. Então $|x_n - a| < 1/n$, logo $\lim x_n = a$ e a é aderente a X. □

Teorema 12. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração. Sejam F fechado e $a \in A$, isto é, $a \notin F$. Pelo teorema anterior, existe alguma vizinhança V que não contém pontos de F, isto é, $V \subset A$. Assim, todo ponto $a \in A$ é interior a A, ou seja, A é aberto. Reciprocamente, se o conjunto A é aberto e o ponto a é aderente a $F = \mathbb{R} - A$ então toda vizinhança de a contém pontos de F, logo a não é interior a A. Sendo A aberto, temos $a \notin A$, ou seja, $a \in F$. Assim, todo ponto a aderente a F pertence a F, logo F é fechado. □

Observação (2)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$, não-vazio. Então $a = \inf X$ e $b = \sup X$ são aderentes a X. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in X$ com $a \leq x_n < a + 1/n$, logo $a = \lim x_n$. Analogamente, vê-se que $b = \lim y_n$, $y_n \in X$. Em particular, a e b são aderentes a (a, b).*

Observação (3)**.** *Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$, isto é, nehum ponto de A é aderente a B e nehum ponto de B é aderente a A. A decomposição $X = X \cup \emptyset$ chama-se cisão trivial.*

Exemplo 11. *Dado um número irracional α, sejam $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$. A decomposição $\mathbb{Q} = A \cup B$ é uma cisão do conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais.*

Teorema 13. *Um intervalo da reta sá admite a cisão trivial.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o intervalo I admita a cisão não trivial $I = A \cup B$. Tomemos $a \in A$, $b \in B$, digamos com $a < b$, logo $[a, b] \subset I$. Seja c o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Então $c \in A$ ou $c \in B$. Se $c \in A$, poremos $a_1 = c$, $b_1 = b$. Se $c \in B$, escreveremos $a_1 = a$, $b_1 = c$. Em qualquer caso, obteremos um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, com $b_1 - a_1 = (b - a)/2$ e $a_1 \in A$, $b_1 \in B$. Por sua vez, o ponto médio de $[a_1, b_1]$ o decompõe em dois intervalos fechados justapostos de comprimento $(b - a)/4$. Um desses intervalos, que chamaremos $[a_2, b_2]$ tem $a_2 \in A$ e $b_2 \in B$. Prosseguindo analogamente, obteremos uma sequência de intervalos encaixados$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \ldots$ com $b_n - a_n = (b - a)/2^n$, $a_n \in A$ e $b_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3 na página 30, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq d \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O ponto $d \in I = A \cup B$ não pode estar em A pois $d = \lim\, b_n \in \overline{B}$, nem em B pois $d = \lim\, a_n \in \overline{A}$. Contradição. □

Ponto de Acumulação de um Conjunto

Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança de a contém algum ponto de X diferente do próprio A. Ou seja, para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Indica-se com X' o conjunto dos pontos de acumulação de X.
Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, diz-se que A é um *ponto isolado* de X. Isto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, X chama-se um conjunto *discreto*.

Teorema 14. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *a é um ponto de acumulação de X;*

2. *a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;*

3. *Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Demonstração. Supondo (1), para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos achar um ponto $x_n \in X$, $x_n \neq a$, na vizinhança $(a-1/n, a+1/n)$. Logo $\lim x_n = a$, o que prova (2). Por outro lado, supondo (2), então, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto$\{x_n; n > n_0\}$ é infinito porque do contrário existiria um termo x_{n_1} que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma sequência costante com limite $x_{n_1} \neq a$. Pela definição de limite, vê-se portanto que (2)$\Rightarrow$(3). Finalmente, a implicação (3)$\Rightarrow$ (1) é imediata. □

Conjuntos Compactos

Um subconjunto dos Reais chama-se *compacto* quando é limitado e fechado.

Por exemplo: Todo conjunto finito é compacto. Um intervalo do tipo $[a, b]$ é um conjunto compacto. Por outro lado, (a, b) é limitado mas não é fechado, logo não é compacto.

Teorema 15. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.*

Demonstração. Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, toda sequência de pontos de X é limitada, logo pelo Teorema 7 da página 33 possui uma subsequência convergente, cujo limite é um ponto de X (pois X é fechado). Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência de pontos x_n possui uma subsequência que converge para um ponto de X. Então X é limitado porque, do contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos encontrar $x_n \in X$ com $|x_n| > n$. A sequência (x_n), assim obtida, não possuiria subsequência convergente. Além disso X é fechado, pois do contrário existiria um ponto $a \notin X$ com $a = \lim x_n$ onde cada

$x_n \in X$. A sequência (x_n) não posuiria, então, subsequência alguma convergindo para um ponto de X, pois todas suas subsequências teriam limite a. Logo X é compacto. $\square$

Observação. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então, pela observação (2) sobre conjuntos fechados, $a = \inf X$ e $b = \sup X$ pertencem a X. Assim, todo conjunto compacto contém um elemento mínimo e um elemento máximo. Ou seja, se X é compacto então existem x_0, $x_1 \in X$ tais que $x_0 \leq x \leq x_1$ para todo $x \in X$.*

3 Limites de Funções

A noção de limite, vista no caso particular de sequências , será agora estendida à situação mais geral onde se tem uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definida num subconjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$.

3.1 Definição e Propriedades

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ (conjunto dos pontos de acumulação de X).

Definição 6. *Diz-se que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tenha $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.*

Informalmente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ significa que se pode tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente, de a.

A restrição $0 < |x - a|$ significa $x \neq a$. Assim, no limite $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ não é permitido à variável x assumir o valor a. Portanto, o valor $f(a)$ não tem importância alguma quando se quer determinar L. O relevante é o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a, sempre com $x \neq a$.

Na definição de limite é essencial que a seja um ponto de acumulação do conjunto X, mas é irrelevante que a pertença ou não a X, isto é, que f esteja ou não definida no ponto a. Num dos exemplos de limites, a saber, a derivada, estuda-se $\lim\limits_{x\to a} q(x)$, onde a função $q(x) = f(x) - f(a)/(x - a)$ não está definida para $x = a$.

Teorema 16. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.*

Demonstração. Suponhamos, primeiro, que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e que se tenha uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$. Por conseguinte, $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon$, logo $\lim f(x_n) = L$. Reciprocamente, suponhamos que $x_n \in X - \{a\}$ e $\lim x_n = a$ implique em $\lim f(x_n) = L$ e provemos que se tem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Com efeito, negar esta igualdade implicaria em afirmar a existência de um número $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

podemos achar $x_n \in X$ tal que $0 < |x_n - a| < 1/n$, mas $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Então teríamos $x_n \in X - \{a\}$, $\lim x_n = a$ sem que fosse $\lim f(x_n) = L$. Esta contradição completa a demonstração. $\square$

Corolário 2 (Unicidade do Limite)**.** *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $a \in X'$*. Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = M$ *então* $L = M$*.*

Com efeito, basta tomar uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, o que é assegurado pelo teorema 14 da página 38. Então teremos $L = \lim f(x_n)$ e $M = \lim f(x_n)$. Pela unicidade do limite da sequência $(f(x_n))$, vem $L = M$.

Corolário 3 (Operações com Limites)**.** *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$*,* $a \in X'$*, com* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*. Então*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] &= L + M; \\ \lim_{x\to a}[f(x).g(x)] &= L.M \end{aligned}$$

Além disso, se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a, tem-se $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = 0$.

De fato, dada qualquer sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, pelo teorema 6 da página 33, valem $\lim[f(x_n) + g(x_n)] = \lim(f(x_n)) + \lim(g(x_n)) = L + M$ e $\lim f(x_n).g(x_n) = \lim f(x_n). \lim g(x_n) = L.M$. Por fim, se existem uma vizinhança V de a e uma constante c tal que $|g(x)| \leq c$ para todo x pertencente à V então, como x_n pertence à V para todo n suficientemente grande, a sequência $g(x_n)$ é limitada; logo pelo teorema similar da seção citada, tem-se $\lim f(x_n).g(x_n) = 0$, pois $\lim f(x_n) - 0$.

Teorema 17. *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$*,* $a \in X'$*. Se existe* $\lim_{x\to a} f(x)$ *então* f *é limitada numa vizinhança de* a*, isto é, existem* $\delta > 0$ *e* $c > 0$ *tais que* $x \in X$*,* $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq c$*.*

Demonstração. Seja $L = \lim_{x\to a} f(x)$. Tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, resulta que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < |L| + 1$. Basta então tomar $c = |L| + 1$. $\square$

Este teorema generaliza o fato de que toda sequência convergente é limitada.

3.2 Limites Laterais

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o número real a é um *ponto de acumulação à direita* para X, e escreve-se $a \in X'_+$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$. A fim de que $a \in X'_+$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos $x_n > a$, pertencentes a X. Analogamente se define *ponto de acumulação à esquerda*.

Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'_+$. Diz-se que o número real L é *limite à direita* de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $L = \lim_{x \to a+} f(x)$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$.

Analogamente se define o *limite à esquerda* $L = \lim_{x \to a-} f(x)$, no caso de $f : X \to \mathbb{R}$ com $a \in X'_-$: isto significa que, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se escolher $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Note que, dado $a \in X'_+ \cap X'_-$, existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais: $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se *monótona não-decrescente* quando para $x, y \in X, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, diz-se *monótona não-crescente*. Se vale a implicação mais estrita $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ dizemos que a função f é *crescente*. Se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, dizemos que f é uma função *decrescente*.

Teorema 18. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Para todo $a \in X'_+$ e todo $b \in X'_-$ existem $L = \lim_{x \to a+} f(x)$ e $M = \lim_{x \to b-} f(x)$.*

Demonstração. Suponhamos f não-decrescente. Seja $L = inf\{f(x); x \in X, x > a\}$. Afirmamos que $\lim_{a \to a+} f(x) = L$. De fato, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, $L + \epsilon$ não é cota inferior do conjunto limitado $\{f(x); x \in x, x > a\}$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta \in X$ e $L \leq f(a + \delta) < L + \epsilon$. Como f é não-decrescente, $x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow L \leq f(x) < L + \epsilon$, o que prova a afirmação feita. De modo análogo vê-se que $M = \sup\{f(x); x \in X, x < b\}$ é o limite à esquerda $M = \lim_{x \to b-} f(x)$. $\square$

Se $a \in X$ não é necessário supor que f seja limitada. De fato, suponhamos que f seja monótona não-decrescente e $a \in X'_+$. Então $f(a)$ é uma cota inferior do conjunto $\{f(x); x \in X, x > a\}$ e o ínfimo deste conjunto é $\lim_{x \to a+} f(x)$. Analogamente, se $a \in X'_-$ então $f(a)$ é uma cota superior do conjunto $\{f(x); x \in X, x < a\}$, cujo supremo é o limite à esquerda $\lim_{x \to a-} f(x)$.

3.3 Limites no Infinito e Limites Infinitos

Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, escreve-se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, quando o número real L satisfaz à condição: $\forall \epsilon > 0 \exists A > 0; x \in X, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

De maneira análoga define-se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando o domínio de f for limitado inferiormente: para todo $\epsilon > 0$ dado, deve existir $A > 0$ tal que $x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Valem os resultados já demonstrados para o limite quando $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$, com as devidas adaptações.

Os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ são, de certo modo, limites laterais. Logo vale o resultado do teorema anterior: se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona limitada então existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ se o domínio X for ilimitado superiormente e existe $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ se o domínio de f for ilimitada inferiormente.

O limite de uma sequência é um caso particular de limite no infinito: trata-se de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, onde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função definida do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Diremos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ quando, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta, x \in X \Rightarrow f(x) > A$. Por exemplo, $\lim_{x\to a} 1/(x-a)^2 = +\infty$, pois dado $A > 0$, tomamos $\delta = 1/\sqrt{A}$. Então $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow) < (x-a)^2 < 1/A \Rightarrow 1/(x-a)^2 > A$.

De modo semelhante, definiremos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Isto significa que, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$. Por exemplo, $\lim_{x\to a} -1/(x-a)^2 = -\infty$.

4 Funções Contínuas

Definição e Propriedades

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se *contínua no ponto* $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implique em $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma *função contínua* quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Se a é um ponto isolado do conjunto X, então toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a. Em particular, se X é um conjunto discreto, como $\mathbb{Z}$ por exemplo, então toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.

Se $a \in X$ é um ponto de acumulação de X, então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ao contrário do caso de limite, na definição de função contínua o ponto a deve pertencer ao conjunto X e pode-se tomar $x = a$ pois, quando isto se dá, a condição $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ torna-se $0 < \epsilon$, o que é imediato.

Teorema 19. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.*

Demonstração. Tomemos $c = [g(a) - f(a)]/2$ e $\epsilon = g(a) - c = c - f(a)$. Então $\epsilon > 0$ e $f(a) + \epsilon = g(a) - \epsilon = c$. Pela definição de continuidade, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(a) - \epsilon < f(x) < c$ e $x \in X, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow c < g(x) < g(a) + \epsilon$. Seja δ o menor dos dois números δ_1 e δ_2. Então $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x)$, o que prova o teorema. $\square$

Corolário 4. *Dadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas, sejam $Y = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $Z = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$. Existem $A \subset \mathbb{R}$ aberto e $F \subset \mathbb{R}$ fechado tais que $Y = X \cap A$ e $Z = X \cap F$. Em particular, se X é aberto então Y é aberto e se X é fechado então Z é fechado.*

De fato, pelo teorema anterior, para cada $y \in Y$ existe um intervalo aberto I_y, de centro y, tal que $\{y\} \subset X \cap I_y \subset Y$. Daí resulta que a união de todos $\{y\}$ está contida na união de todos $(X \cap I_y)$ que, por sua vez, está contida em Y. Pondo A igual a união de todos I_y, o teorema 10 da página 10 assegura que A é um conjunto aberto. Além disso, de $Y \subset X \cap A \subset Y$ concluímos que $Y = X \cap A$. Quanto ao conjunto Z, temos

$Z = X - \{x \in X; g(x) < f(x)\}$. Pelo que acabamos de ver, existe $B \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $Z = X - (x \cap B) = X \cap (\mathbb{R} - B)$. Pelo teorema 12 da página 37: Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto. Temos que $F = \mathbb{R} - B$ é fechado, portanto $Z = X \cap F$ como se pretendia mostrar.

Teorema 20. *A fim de que a função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$.*

A demonstração á análoga à demonstração do teorema 16 dá página 41. Basta trocarmos L por $f(a)$.

Observação. *Considerando as somas e produtos de sequências e limites de sequências, temos que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções $f + g$, $f.g : X \to \mathbb{R}$.*

4.1 Funções Contínuas num Intervalo

Teorema 21 (do Valor Intermediário)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Consideremos os conjuntos $A = \{x \in [a, b]; f(x \leq d\}$ e $B = \{x \in [a, b]; f(x) \geq d\}$. Pelo corolário anterior, A e B são fechados, logo $\overline{A} \cap B = A \cap B = A \cap \overline{B}$, onde $\overline{A}$ é o fecho do conjunto A. Além disso, é claro que $[a, b] = A \cup B$. Se for $A \cap B \neq \emptyset$ então o teorema está demonstrado porque se tem $f(c) = d$ para qualquer $c \in A \cap B$. Se, entretanto, fosse $A \cap B = \emptyset$ então $[a, b] = A \cup B$ seria uma cisão não trivial (porque $a \in A$ e $b \in B$), o que é vedado pelo teorema 13 dá página 37. □

Corolário 5. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua então $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração. É imediato se f é constante. Caso contrário, sejam $\alpha = \inf f(I) = \inf\{f(x); x \in I\}$ e $\beta = \sup f(I) = \sup\{f(x); x \in I\}$. Se $f(I)$ for ilimitado, tomaremos $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = +\infty$. Para provar que $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β, tomemos d tal que $\alpha < d < \beta$. Pelas definições de inf e sup, existem $a, b \in I$ tais que $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$. Pelo Teorema do valor Intermediário existe $c \in [a, b]$, logo $c \in I$, tal que $f(c) = d$. Assim $d \in f(I)$. Isto prova que $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Como α é o inf e β é o sup de $f(I)$, nenhum número real menor do que α ou maior do que β pode estar em $f(I)$. Portanto, $F(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β.

□

4.2 Funções Contínuas em Conjuntos Compactos

Muitos problemas em Matemática e nas aplicações consistem em procurar pontos de um conjunto X nos quais uma certa função real $f : X \to \mathbb{R}$ assume seu valor máximo ou seu valor mínimo. É necessário saber sob quais condições tais pontos existem.

Teorema 22. *A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Já vimos que *um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.* Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $y_n = f(x_n)$, com $x_n \in X$. Como X é compacto, a sequência (x_n) possui uma subsequência (x_n) que converge para um ponto $a \in X$. Sendo f contínua no ponto a, de $\lim x_n = a$ concluímos que, pondo $b = f(a)$, temos $b \in f(X)$ e, além disso, $\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a) = b$, como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 23. *(de Weierstrass) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.*

A função assume seu valor máximo e mínimo, ou seja, existem os pontos de máximo e mínimo no dado intervalo.

Demonstração. Pelo teorema anterior, $f(X)$ é um conjunto compacto, logo possui um menor elemento e um maior elemento. Digamos: $f(x_0)$ e $f(x_1)$. Isto quer dizer que existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$. $\square$

5 Funções Deriváveis

5.1 Razão Incremental

Considere uma curva que seja o gráfico de uma função f. Sejam a e $f(a)$ as coordenadas do ponto P, onde desejamos traçar a tangente. Consideremos um outro ponto Q do gráfico de f, cuja abscissa representamos por $a+h$ (incremento de a); então, a ordenada de Q é $f(a+h)$. O declive da reta secante PQ é dado pelo quociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

chamado *razão incremental*.

Reta Tangente

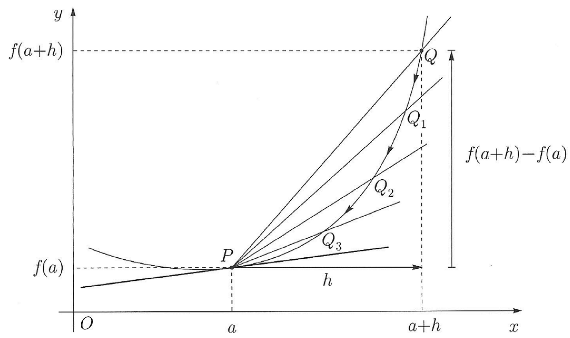


Figura 1 –

Vamos imaginar agora que, enquanto o ponto P permanece fixo, o ponto Q(móvel) se aproxima de P, passando por sucessivas posições Q_1, Q_2, Q_3... Logo, a secante PQ assumirá as posições PQ_1, PQ_2, PQ_3...(Figura 1). O que se espera é que a razão incremental, que é o declive da secante, se aproxime de um determinado valor m, à medida que o ponto Q se aproxima de P. Isso acontecendo, definimos a reta tangente à curva no ponto P como sendo aquela que passa por P e cujo declive ou coeficiente angular é m. O modo de fazer Q aproximar-se de P consiste em fazer o número h cada vez mais próximo de zero na razão incremental. Dizemos que h *está tendendo a zero* e escrevemos "$h \to 0$". Observe que h pode assumir valores positivos e negativos. É claro que, se imaginarmos h assumindo valores exclusivamente positivos, então o ponto Q estará se aproximando de P *pela direita*. Mas podemos também imaginar que h esteja assumindo exclusivamente valores negativos e, neste caso, o ponto Q estará se aproximando de P *pela esquerda*.(Figura 2)

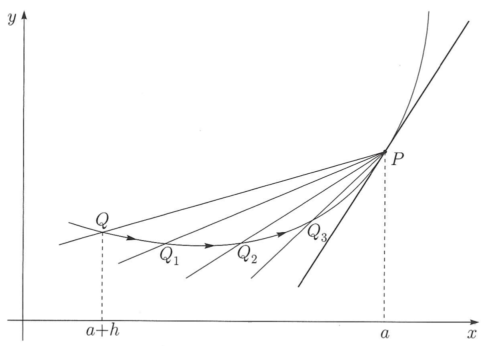


Figura 2 –

A Derivada no Ponto

Quando fazemos $h \to 0$ e razão incremental aproxima-se de um valor finito $f'(a)$, dizemos que $f'(a)$ é a derivada de f no ponto a e escrevemos:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

5.2 Limite e Continuidade

Diz-se que uma função f é contínua num ponto x_0 quando as seguintes condições estão satisfeitas:

a)f está definida em x_0;

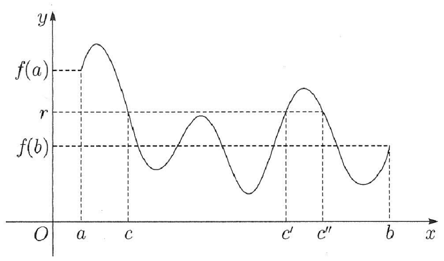
b)$f(x)$ tem limite com $x \to x_0$ e esse limite é igual a $f(x_0)$, isto é, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Dizemos que f é contínua num domínio D se ela for contínua em cada ponto desse domínio.

Continuidade e Valor Intermediário

A definição de continuidade está intimamente ligada à ideia geométrica, segundo a qual concebemos como contínua uma função cujo gráfico não apresenta quebra ou ruptura. Aliás, a maneira mais intuitiva de exprimir esse fato geométrico em linguagem analítica consiste em dizer que uma função contínua num intervalo assume todo e qualquer valor compreendido entre dois outros valores assumidos pela função. Mais especificamente, se

f for contínua num intervalo, do qual a e b são pontos quaisquer, então $f(x)$ assume qualquer valor r compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ para algum c conveniente entre a e b. Observe que pode haver um ou mais valores c nessas condições, e a Figura 3a ilustra uma situação com três valores c, c', c", tais que $f(c) = f(c') = f(c") = r$.

A propriedade que acabamos de descrever segue da continuidade e é conhecida como *Teorema do Valor Intermediário*. Sua demonstracão será tratada mais a frente.



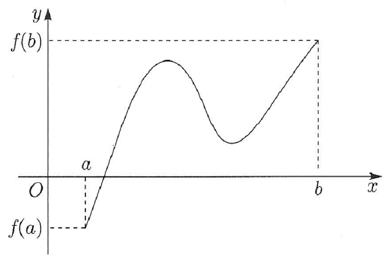


Figura 3 –

Teorema 24 (do Valor Intermediário)**.** *Seja f uma função contínua num intervalo, do qual a e b são pontos quaisquer. Então, dado qualquer número r, entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um número c entre a e b, tal que $r = f(c)$.*

Corolário 6. *Seja f uma função contínua num intervalo, do qual a e b são pontos onde a função assume valores de sinais contrários. Então existe pelo menos um ponto entre a e b onde f se anula.(Figura 3b)*

Em geral, as funções com que lidamos no Cálculo são contínuas em seus domínios. Por exemplo, a função g com a lei $g(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$, é contínua para todo $x \neq 4$. Ela só não é contínua em $x = 4$ porque não está definida nesse ponto. Mas, se é apenas por isso, por que não estender a função, definindo-a em $x = 4$ como sendo igual a 8? Isso é perfeitamente natural e é o que se costuma fazer; sempre que uma função f tiver limite L com $x \to x_0$, é natural definir f em x_0 como sendo L, isto é, $f(x_0) = L$. Assim a função f passa a ser contínua em x_0. Isso nem sempre é possível. Depende do tipo de descontinuidade. Os tipos de descontinuidade não serão abordados neste trabalho.

Em muitos casos, as funções têm limites, mas não estão definidas nos pontos para onde tende a variável x.

Exemplo 12. *Calcular a derivada da curva $f(x) = \sqrt{x}$ em $x = 2$.*

Temos de calcular o limite, com $x \to 2$, da função

$$g(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

Vemos que ela não está definida em $x = 2$, onde assume a forma indeterminada $0/0$. Com uma certa manipulação algébrica, obtemos:

$$m = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

É natural, então, definir $g(x)$ em $x = 2$, como sendo $1/2\sqrt{2} : g(2) = 1/2\sqrt{2}$.

Limites Laterais

Às vezes uma função possui limites diferentes, conforme x se aproxime de x_0 por valores maiores ou menores que x_0. Nesses casos, dizemos que x se aproxima de x_0 *pela direita* ou que x se aproxima de x_0 *pela esquerda*, o que se indica com os símbolos $x \to x_0+$ e $x \to x_0-$. Esses limites são chamados *limites laterais*; mais especificamente *limite à direita* e *limite à esquerda*. Pode acontecer que a função só tenha um ou nenhum limite lateral.

Exemplo 13. *Seja a função*

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & se \quad x > 0, \\ -1, & se \quad x < 0. \end{cases}$$

que está definida para todo x, exceto $x = 0$. Como ela é sempre igual a 1 para $x < 0$, é claro que seu limite à direita, com $x \to 0$, tem esse mesmo valor:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$$

E, de modo análogo, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Este é um exemplo de função que nunca será contínua em $x = 0$, qualquer que seja o valor que se lhe atribua nesse ponto. No entanto, se pusermos $f(0) = 1$, ela será contínua à direita em $x = 0$ (figura 4):

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1 = f(0).$

Analogamente, ela será contínua à esquerda no mesmo ponto se pusermos $f(0) = -1$(Figura 4), visto termos, então,

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1 = f(0).$

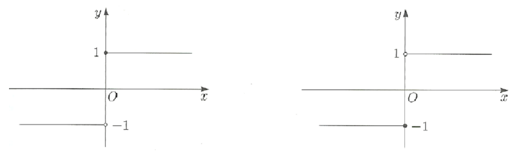


Figura 4 –

Limites Infinitos e Limites no Infinito

Considere a função cuja lei seja $f(x) = \frac{1}{x^3}$ definida para todo $x \neq 0$. Quando x se aproxima de zero pela direita, o denominador também se aproxima de zero, permanecendo sempre positivo; logo, a função cresce acima de qualquer número. Dizemos que ela tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty.$$

Ao contrário, se $x \to 0^-, x^3$ tende a zero, porém sempre por valores negativos, de forma que $\frac{1}{x^3}$, em valor absoluto, tende a infinito sempre negativa. Dizemos, então, que a função tende a $-\infty$:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

5.3 Função Derivada

Sejam f uma função e D um conjunto dos a para os quais $f'(a)$ existe. A função $f' : D \to \mathbb{R}$ dada por $a \mapsto f'(a)$, denomina-se função derivada. Substituindo a por x, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Podemos também fazer $x' = x + h$, $h = x' - x$: Então, fazer h tender a zero é equivalente a fazer x' tender a x:

$$f'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

ou ainda

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Até o momento, nada nos garante que uma dada função tenha derivada em certo ponto x ou, como se diz, seja *derivável* nesse ponto. Por exemplo, considere a função

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

ilustrada na Figura 5. Sua razão incremental no ponto $x = 0$ é dada por

$$\frac{f(x')-f(0)}{x'-0} = \frac{|x'|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x' > 0 \\ -1, & \text{se} \quad x' < 0. \end{cases}$$

Vemos, assim, que o limite desta razão incremental é 1 se $x' \to 0$ por valores estritamente positivos e -1 se $x' \to 0$ por valores estritamente negativos. O limite não existe para $x' \to 0$ por valores positivos e negativos ao mesmo tempo. Assim, a função não é derivável no ponto $x = 0$. Todavia, ela é derivável para todo $x \neq 0$.

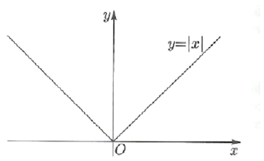


Figura 5 –

Vejamos outro exemplo (Figura 6) onde a função é contínua, mas não derivável num ponto.

Exemplo 14. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & se \quad x \leq 2\pi \\ x - (2\pi - 1), & se \quad x > 2\pi. \end{cases}$$

Temos:

f é contínua em 2π, pois:

$$\lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = \lim_{x \to 2\pi} \cos x = \cos 2\pi = 1 = f(2\pi)$$

$$\lim_{x \to 2\pi^+} f(x) = \lim_{x \to 2\pi} x - (2\pi - 1) = 2\pi - 2\pi + 1 = 1 = f(2\pi)$$

f não é derivável em 2π, pois:

Para o limite à esquerda, utilizaremos a notação de derivada: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\cos(2\pi + h) - \cos(2\pi)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0.$$

(Este último limite é um limite notável e omitiremos sua demonstração).

$$\lim_{x \to 2\pi^+} \frac{f(x) - f(2\pi)}{x - 2\pi} = \lim_{x \to 2\pi} \frac{x - 2\pi + 1 - 1}{x - 2\pi} = \lim_{x \to 2\pi} \frac{x - 2\pi}{x - 2\pi} = 1$$

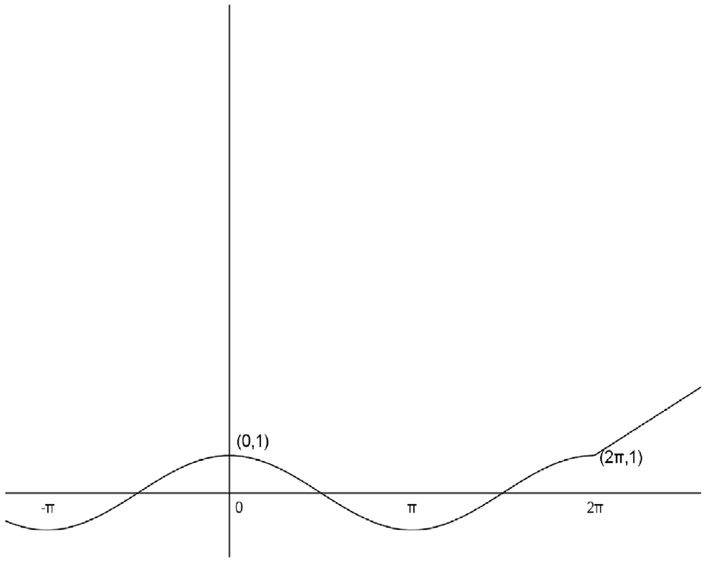


Figura 6 –

Continuidade das Funções Deriváveis

Vimos, anteriormente, que se uma função f é contínua num certo ponto x_0 então, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema 25. *Toda função derivável num ponto x_0 é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Seja f uma função derivável no ponto x_0, de sorte que a diferença η entre a razão incremental e a derivada,

$$\eta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

tenda a zero com $x \to x_0$. Daqui segue-se que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\eta$$

Quando $x \to x_0$, os dois últimos termos deste segundo membro tendem a zero; logo,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

o que completa a demonstração. Vale ressaltar que a recíproca desse teorema não é verdadeira. □

Derivada da função Constante

Dada a função $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \Longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Portanto,

$$f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0$$

Derivada da Função Potência

Dada a função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{C_{n,0}x^n + ... + C_{n,n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$C_{n,1}x^{n-1} + ... + C_{n,n}(\Delta x)^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\delta x} = C_{n,1}x^{n-1} = n.x^{n-1}$$

Logo,

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$$

Exemplo 15. $f(x) = 5 \longrightarrow f'(x) = 0$

Exemplo 16. $f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$

Derivada da Soma

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) + v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Temos:

$$\Delta = f(x+\Delta x) - f(x) = [u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$
$$[u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são funções deriváveis, os dois limites do segundo membro são finitos, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, isto é, é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Notemos que esta propriedade pode ser estendida para uma soma de n funções. Assim:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + ...u_n(x) \longrightarrow f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + ...u_n'(x)$$

Exemplo 17. $f(x) = x + 1 \longrightarrow f'(x) = 1 + 0 = 1$

Exemplo 18. $f(x) = x^2 + 3 \longrightarrow f'(x) = 2x + 0 = 2x$

Omitiremos as demonstrações da derivada do produto e da derivada do quociente.

$$f(x) = u(x).v(x) \longrightarrow f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Derivadas Sucessivas

Seja f uma função contínua em um intervalo I e seja I_1 o conjunto dos pontos de I em que f é derivável. Em I_1, já definimos a função f', chamada *função derivada primeira* de f. Seja I_2 o conjunto dos pontos de I_1 em que f' é derivável. Em I_2 podemos definir a função derivada de f' que chamaremos de *derivada segunda* de f e indicaremos por f''.

Repetindo o processo, podemos definir as derivadas terceira, quarta etc. de f.

Exemplo 19. $f(x) = 3x^2 + 5x + 6 \longrightarrow f'(x) = 6x + 5 \qquad f''(x) = 6 \qquad f'''(x) = 0$

5.4 Estudo da Variação das Funções

Máximos e Mínimos

Definição 7. *I) Seja a função $f : D \to R$ e seja $x_0 \in D$. Chamamos vizinhança de x_0 um intervalo $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, onde δ é um número real positivo.*

II) Dizemos que x_0 é um ponto de máximo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que para todo $x \in V \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado máximo local de f.

III) Dizemos que x_0 é um ponto de mínimo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que para todo $x \in V \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado mínimo local de f.

IV) Dizemos que x_0 é um ponto extremo se x_0 for um ponto de máximo local ou de mínimo local de f. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado valor extremo de f.

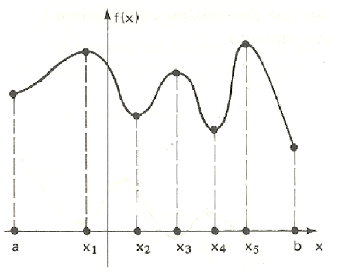


Figura 7 –

Na Figura 7, a, x_2, x_4 e b são pontos de mínimo locais de f, enquanto x_1, x_3 e x_5 são pontos de máximo locais de f.

Os pontos de máximo ou mínimo locais que não são extremos do intervalo em que a função está definida são chamados *pontos de máximo ou mínimo locais interiores*. Na Figura 6, x_2 e x_4 são pontos de mínimo locais interiores.

As noções de máximo e mínimo locais referem-se a uma vizinhança do ponto considerado. Na função representada na Figura 8, existe uma vizinhança V_1 de x_1 em que $f(x) \leq f(x_1)$ para todo x; por outro lado, existe uma vizinhança V_2 de x_2 em que $f(x) \geq f(x_2)$, para todo x. Isto leva à conclusão de que x_1 é ponto de máximo local, x_2 é ponto de mínimo local.

Definição 8. *Dizemos que $f(x_0)$ é um valor máximo absoluto de f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o maior valor que f assume. Dizemos que $f(x_0)$ é um valor mínimo absoluto de f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o menor valor que f assume.*

Voltando a Figura 6 e considerando o domínio $[a, b]$, $f(x_5)$ e $f(b)$ são, respectivamente, o máximo e o mínimo absolutos de f. Observemos que há funções que têm máximos ou mínimos locais mas não apresentam um máximo ou mínimo absoluto. Na Figura 9, vemos que a e c são pontos de máximo local, b e d são pontos de mínimo local, porém, a função não tem máximo nem mínimo absoluto.

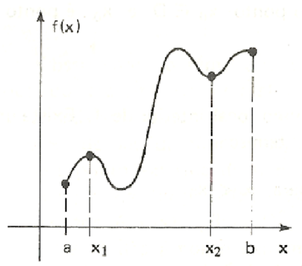


Figura 8 –

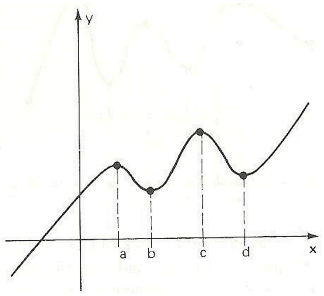


Figura 9 –

Teorema 26. [1] . *Se $f : D \to R$ é uma função derivável no ponto $x_0 \in D$ e x_0 é ponto extremo local interior de f, então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que x_0 seja ponto de mínimo local interior de f. Então, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V$, tem-se:

$$f(x_0) \leq f(x) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad \text{para} \quad x < x_0 \\ \\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{para} \quad x > x_0 \end{cases}$$

Sendo f derivável em x_0, existe e é finito o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

que coincide com os limites laterais à esquerda e à direita de x_0 que,por sua vez, são iguais pois o limite existe. Portanto:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

Se x_0 for ponto de máximo local de f, a demonstração é análoga. □

Interpretação Geométrica 1. *O teorema citado anteriormente, garante que num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x. Veja a Figura 10 onde x_0 é máximo local interior e mínimo local interior, respectivamente.*

Observemos, porém, que o recíproco do teorema é falso, isto é, existem funções f deriváveis no ponto x_0 do seu domínio com $f'(x_0) = 0$ e x_0 não é ponto extremo de f. É o caso, por exemplo da função $f(x) = (x-1)^3$ com $f'(1) = 0$ e 1 não é ponto extremo (Figura 11).
Observemos ainda que o teorema não exclui a possibilidade de x_0 ser ponto extremo sem que se tenha $f'(x_0) = 0$. Isto pode ocorrer se f não é derivável em x_0. Por exemplo, 0 é ponto de mínimo da função $f(x) = |x|$ e não existe $f'(0)$.

[1] No capítulo anterior vimos o *Teorema de Weierstrass*, onde afirma que se f é uma função contínua num intervalo fechado$[a, b]$ então f possui ao menos um ponto de máximo e ao menos um ponto de mínimo nesse intervalo.

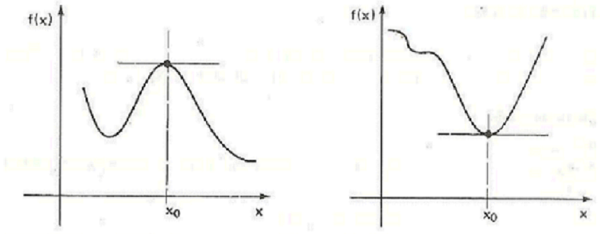


Figura 10 –

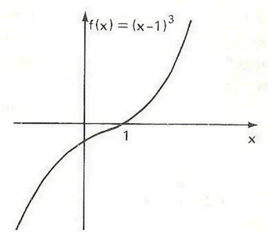


Figura 11 –

5.5 Derivada - Crescimento - Decréscimo

Teorema 27 (de Rolle)**.** *: Se f é uma função contínua em $[a,b]$ é derivável em $]a,b[$ e $f(a)=f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in\ ]a,b[$ tal que $f'(x_0)=0$.*

Demonstração. Se f é constante em $[a,b]$ então $f'(x)=0$ em $]a,b[$, isto é, para todo $x_0 \in\ ]a,b[$ temos $f'(x_0)=0$. Se f não é constante em $]a,b[$, então existe $x \in]a,b[$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Como f é contínua em $]a,b[$, f tem um mínimo e um máximo em $[a,b]$ (*Teorema de Weierstrass*). Se existe $x \in\ ]a,b[$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$, então o valor $f(a)=f(b)$ não é o máximo de f em $]a,b[$, portanto, f assume valor máximo em algum ponto $x_0 \in]a,b[$ e, sendo f, derivável em $]a,b[$ temos, pelo teorema demonstrado anteriormente, $f'(x_0)=0$. Se existe $x \in\ ]a,b[$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$, a prova é análoga. $\square$

Interpretação Geométrica 2. *O teorema de Rolle afirma que se uma função é derivável em $]a,b[$, contínua em $]a,b[$ e assume valores iguais nos extremos do intervalo, então em algum ponto de $]a,b]$ a tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.(Figura 12)*

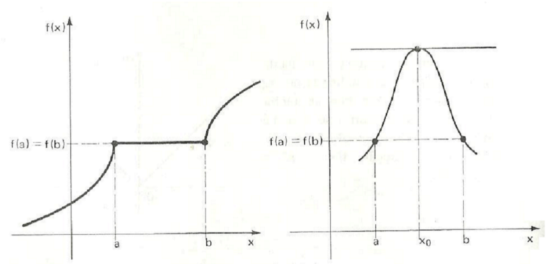


Figura 12 –

Teorema 28 (do Valor Médio)**.** *Se f é uma função contínua em $]a,b[$ e derivável em $]a,b[$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in\ ]a,b[$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.*

Demonstração. Se $f(a) = f(b)$ então $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ e, pelo teorema de Rolle, existe $x_0 \in\ ]a,b[$ tal que $f'(x_0) = 0 = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Se $f(a) \neq f(b)$, consideremos a função $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$ e observemos que:

1. g é contínua em $]a,b[$ por ser a diferença entre $f(x) - f(a)$ e $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$ que são contínuas em $]a,b[$;

2. g é derivável em $]a,b[$ e sua derivada é $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

3. nos extremos do intervalo $]a,b[$, temos:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(a-a) = 0 \\ g(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(b-a) = 0 \end{aligned}$$

portanto, $g(a) = g(b) = 0$.

Sendo assim, é válido para g o teorema de Rolle: existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $g'(x_0) = 0$, isto é,

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ou ainda,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Interpretação Geométrica 3. *Segundo o teorema do valor médio, se f é função contínua em $]a,b[$ e derivável em $]a,b[$, então existe um ponto $x_0 \in]a,b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, por terem declives iguais.(Figura 13)*

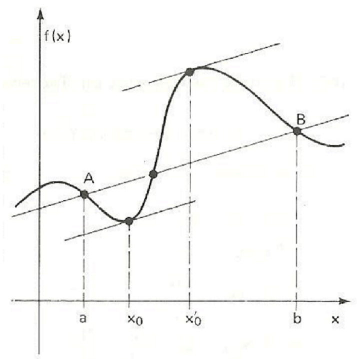


Figura 13 –

Funções Crescentes e Decrescentes

Uma das consequências do Teorema do Valor Médio é um critério que permite verificar se uma dada função f é crescente ou decrescente, conforme sua derivada seja positiva ou negativa.

Antes de dar uma demonstração analítica desse fato, vamos interpretá-lo geometricamente: se a derivada f' for positiva, como ela é o declive da reta tangente ao gráfico de f, esse gráfico deverá estar inclinado à direita e para cima, apresentando um aspecto ascendente (Figura 14a). Em consequência, $f(x)$ cresce à medida que x cresce, ou seja, f é função crescente. Ao contrário, se f' for negativa, o gráfico de f estará para a direita e para baixo, tendo aspecto decrescente (Figura 14b), de forma que $f(x)$ decresce à medida que x cresce, e a função é decrescente.

(a) (b)

Figura 14 –

Teorema 29. *Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável nos pontos internos. Então f é crescente se $f'(x) > 0$ e decrescente se $f'(x) < 0$, para todo x em (a, b).*

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 pontos arbitrários de $[a, b]$, com $x_1 < x_2$. O Teorema do Valor Médio, aplicado ao intervalo $[x_1, x_2]$, nos garante a existência de um ponto c em (x_1, x_2) tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Daqui segue-se que, se f' for positiva em (a, b), então

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ ou } f(x_1) < f(x_2)$$

e a função f será crescente. De igual modo, se f' for negativa em (a, b), concluímos que $f(x_1) > f(x_2)$; logo, f será decrescente. □

Testes das Derivadas Primeira e Segunda

Utilizaremos, agora, o teorema anterior para saber se um ponto crítico[2] é de máximo ou de mínimo local. Vamos usar frases como "$f'(x)$ é positiva à esquerda de x_0", significando com isto que existe algum intervalo$(x_0 - \delta, x_0)$, com $\delta > 0$, onde $f'(x)$ é positiva; diremos também "$f'(x)$ é positiva à direita de x_0"quando $f'(x) > 0$ para x em algum intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$, com $\delta > 0$. Frases inteiramente análogas serão usadas no caso de $f'(x)$ ser negativa.

Seja f uma função com ponto crítico x_0. Como $f'(x_0) = 0$, a tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é horizontal. Se $f'(x)$ for positiva à esquerda de x_0 e negativa à direita, então $f(x)$ estará passando de crescente (à esquerda de x_0) a decrescente (à direita de x_0), e x_0 será ponto de máximo, como ilustra a Figura 15a. Analogamente, x_0 será ponto de mínimo se $f'(x)$ for negativa à esquerda e positiva à direita de x_0 (Figura 15b).

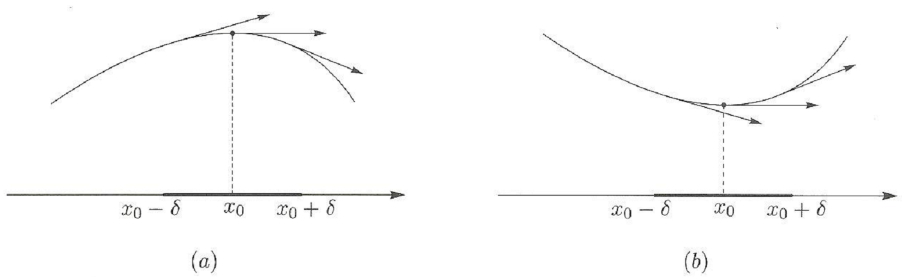


Figura 15 –

Outro modo de tirar a mesmas conclusões consiste em analisar o sinal de $f”(x)$ (derivada segunda). Se esta função for negativa em x_0 e num intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, com $\delta > 0$, então $f'(x)$ será decrescente nesse intervalo; como $f'(x) = 0$, vemos que $f'(x)$ será positiva à esquerda e negativa à direita de x_0, e este será um ponto de máximo (Figura 15a). Ao contrário, se $f”(x)$ for positiva em x_0 e num intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f'(x)$ será crescente nesse intervalo; como ela se anula em x_0, $f'(x)$ será negativa à esquerda de x_0 e positiva à direita, e x_0 será ponto de mínimo (Figura 15b).

Observação. *O teste da derivada segunda é inconclusivo quando $f''(x) = 0$. Ou seja, esse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum deles. Esse teste também falha quando $f''(x)$ não existe. Em tais casos, o teste da derivada primeira deve ser utilizado.*

Exemplo 20. $f(x) = x^2 - 2x - 1$

Analisando somente o intervalo $[0, 3]$ (Figura 16), sua derivada, dada pela expressão $f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$, se anula em $x = 1$, é negativa à esquerda e positiva à direita

[2] Um ponto x que goza da propriedade $f'(x) = 0$ é chamado de *ponto crítico*.

desse ponto. Em consequência, a reta tangente ao gráfico de f tem declive negativo à esquerda de $x = 1$ e positivo à direita; logo, pelo teste da derivada primeira, concluímos que $x = 1$ é ponto de mínimo. Podíamos também chegar a mesma conclusão com o teste da derivada segunda, notando que $f'(1) = 2 > 0$. Como $x = 1$ é o único ponto crítico, é claro que ele é também ponto de mínimo absoluto, cujo valor é $f(1) = -2$. O máximo absoluto só pode ocorrer num dos extremos. Como $f(0) = -1$ e $f(3) = 2$, vemos que esse máximo é 2 e ocorre em $x = 3$.

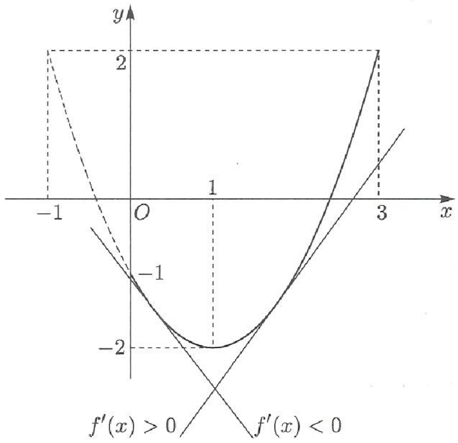


Figura 16 –

Exemplo 21. $f(x) = x^3 - 1$

No intervalo $[-1, 1]$ (Figura 17), sua derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula em $x = 0$ e é positiva para todo $x \neq 0$. Em consequência, a função é sempre crescente e $x = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo. O máximo absoluto é zero, atingido em $x = 1 : f(1) = 0$; e o mínimo absoluto -2 ocorre em $x = -1 : f(-1) = -2$.

A mesma função, considerada em toda a reta, não tem máximo nem mínimo, pois ela tende a $-\infty$ ou $+\infty$ conforme x tende a $+\infty$ ou $-\infty$, respectivamente.

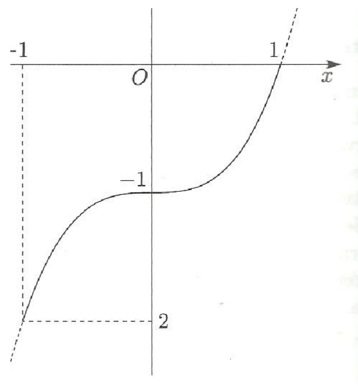


Figura 17 –

O teste da derivada segunda nem sempre é aplicável.

Exemplo 22. $f(x) = x^4\sqrt{x+1}, x \geq -1$*(Figura 18)*

$$f'(x) = \frac{x^3(8+9x)}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f"(x) = \frac{63x^4 + 112x^3 + 48x^2}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

Então, $f'(0) = 0$, donde vemos que $x = 0$ é ponto crítico; como $f"(0) = 0$, não podemos aplicar o teste da derivada segunda. Mas é fácil ver que $f'(x) > 0$ para $x > 0$ e $f'(x) < 0$ logo à esquerda de $x = 0$, precisamente para $-8/9 < x < 0$. Então, pelo teste da derivada primeira, concluímos que $x = 0$ é ponto de mínimo. Neste ponto a função se anula: $f(0) = 0$. Note que f tem outro ponto crítico em $x = -8/9$, pois $f'(-8/9) = 0$. Como

$$f'(x) > 0 \text{ para } -1 < x < -8/9$$

e

$$f'(x) < 0 \text{ para } -8/9 < x < 0,$$

o teste da derivada primeira nos diz que $x = -8/9$ é ponto de máximo. É fácil ver que

$$f\left(\frac{8}{9}\right) = \left(-\frac{8}{9}\right)^4 \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{4096}{19683} \approx 0,2.$$

Como $f(x) \to +\infty$ com $x \to +\infty$, a função f não tem máximo absoluto. Seu mínimo absoluto é o mínimo local zero, atingido em $x = 0$.

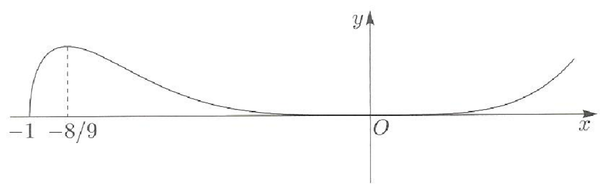


Figura 18 –

5.6 Problemas de Máximos e Mínimos

Discutiremos nesta seção dois problemas que podem ser resolvidos encontrando pontos de máximo e mínimo, respectivamente. Em geral, temos de lidar com diversas variáveis, uma das quais deve ser maximizada ou minimizada. Esta variável deve, então, ser expressa como função de uma única variável independente, o que é conseguido por eliminação das outras, graças a certas relações que aparecem no problema.

Exemplo 23. *Encontre dois números positivos x e y, cuja soma s seja dada e cujo produto p seja o maior possível.*

De $x + y = s$, tiramos $y = s - x$. Daqui e de $p = xy$, obtemos

$$p = p(x) = x(s - x) = sx - x^2.$$

A derivada desta função, $p'(x) = s - 2x$, se anula em $x = x_0 = s/2$. Usando o teste da derivada segunda, é fácil ver que $x = x_0$ é ponto de máximo de $p(x)$, pois $p''(x) = -2 < 0$ para todo x. Então, os números procurados são $x_0 = s/2$ e $y = y_0 = s - x_0 = s/2$, isto é, $x_0 = y_0 = s/2$.

Exemplo 24. *Determine as dimensões de um cilindro circular reto, de volume dado, de forma que sua área seja a menor possível.*

Seja r e h o raio da base e a altura do cilindro, respectivamente. Devemos minimizar sua área total A, que é a soma da área lateral $2\pi rh$ com as áreas das bases, $2\pi r^2$:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

O volume do cilindro é uma constante V, dada por $V = \pi r^2 h$, relação esta que utilizamos para eliminar r ou h na expressão da área. Isso nos dá

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

A derivada desta função em relação a r,

$$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right),$$

se anula quando $r = r_0 = (V/2\pi)^{1/3}$. Neste ponto, a derivada segunda $A" = 4\pi + 4V/r^3$ é positiva; logo, pelo teste da derivada segunda, r_0 é um ponto de mínimo. Como $h = V/\pi r^2$, a solução do problema é dada por

$$r_0 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

e

$$h = h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2}.$$

Podemos ainda exprimir h_0 em termos de r_0. De fato, da primeira destas duas equações, tiramos $V = 2\pi r_0^3$. Daqui e da última equação acima, obtemos $h_0 = 2r_0$. Vemos, então, que o cilindro de volume dado e área máxima tem altura igual ao seu diâmetro.

5.7 Concavidade, Inflexão e Gráficos

Definição 9. *Seja f uma função derivável num intervalo aberto I. Se o gráfico de f se situa sempre acima das retas tangentes no intervalo I, dizemos que o gráfico tem* ***concavidade para cima*** *em I. (Figura 19a) Se o gráfico de f se situa sempre abaixo das retas tangentes no intervalo I, dizemos que tem* ***concavidade para baixo*** *em I. (Figura 19b)*

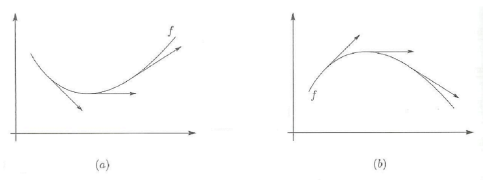


Figura 19 –

Proposição 7. *Seja f uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I.*

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para cima em I.*

2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para baixo em I.*

Demonstração. Iremos provar o item 1 da proposição. O item 2 é análogo.

Seja f uma função duas vezes derivável em um intervalo I tal que $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$. Queremos provar que o gráfico de f tem concavidade para cima, o que é o mesmo que dizer que $f(x)$ está acima da reta tangente passando pelo ponto $(a, f(a))$, para qualquer $a \in I$. Portanto, dado $a \in I$, devemos provar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a),$$

para todo $x \in I$, $x \neq a$. Vamos fazer isso usando o Teorema do Valor Médio.

Vamos primeiro lidar com o caso $x > a$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[a, x]$, temos que existe um $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a). \tag{5.1}$$

Como $f'' > 0$ em I, então $f'(x)$ é uma função crescente e, portanto, $f'(a) < f'(c)$. Multiplicando essa equação pelo fator positivo $(x - a)$, resulta:

$$\begin{aligned} f'(c) > f'(a) &\implies f'(c)(x-a) > f'(a)(x-a) \\ &\implies f(a) + f'(c)(x-a) > f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Mas pela equação 5.1, $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$, logo

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

o que mostra que a curva está acima da tangente em $(a, f(a))$ para $x > a$.

O caso $x < a$ é análogo. Existe $c \in (x, a)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ e $f'(c) < f'(a)$, já que f' é crescente. Multiplicando pelo fator negativo $(x - a)$, inverte-se o sinal da desigualdade e

$$f'(c) < f'(a) \Longrightarrow f'(c)(x-a) > f'(c)(x-a) \Longrightarrow f(x) - f(a) > f'(c)(x-a)$$

o que mostra que $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$. □

Quando a derivada segunda f" se anula num ponto x_0, sendo positiva à esquerda e negativa à direita de x_0, o gráfico muda sua concavidade nesse ponto, que é, então, chamado de *ponto de inflexão* (Figura 20a). A inflexão em x_0 pode também ocorrer quando f" se anula em x_0, é negativa à esquerda desse ponto e positiva à direita (Figura 20b).

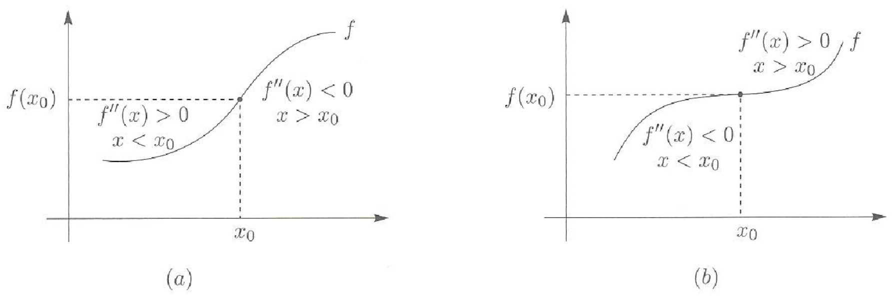


Figura 20 –

As informações obtidas sobre pontos de máximo e mínimo, intervalos onde ela é crescente ou decrescente, concavidade, pontos de inflexão e limites, são dados importantes para esboçar o gráfico da função.

Exemplo 25. $f(x) = x^4 - x^3 = x^3(x-1)$

Calculemos suas derivadas primeira e segunda:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = 4x^2(x - 3/4)$$

$$f"(x) = 12x^2 - 6x = 12x(x - 1/2)$$

Vemos que $f"(x)$ se anula nos pontos $x = 0$ e $x = 1/2$, sendo positiva para $x < 0$, negativa no intervalo $(0, 1/2)$ e positiva para $x > 1/2$. Logo, $x = 0$ e $x = 1/2$ são pontos de inflexão, sendo a concavidade para cima nos trechos $x < 0$ e $x > 1/2$, e para baixo quando $0 < x < 1/2$. Os pontos críticos são $x = 0$ e $x = 3/4$, o primeiro de inflexão e o segundo um ponto de mínimo (Fig.21). Observemos ainda que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, como consequência da expressão $f(x) = x^4(1 - 1/x)$.
Quando x cresce acima de qualquer número, o mesmo acontece com x^4, ao passo que $(1 - 1/x)$ tende a 1; logo, o produto $f(x)$ tende a $= \infty$. O mesmo acontece quando $x \to -\infty$.

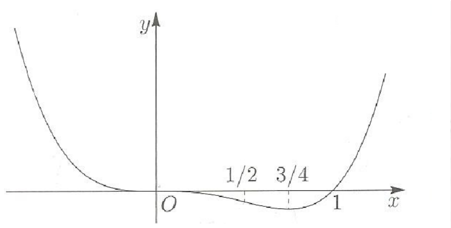


Figura 21 –

5.8 A Fórmula de Taylor

Teorema 30 (Fórmula de Taylor). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo $[a,b]$. Suponha que as derivadas sucessivas de f existam e sejam contínuas em $[a,b]$. Então, para cada $x \in [a,b], x \neq c$, existe um ponto ξ entre x e c tal que:*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + R_{n+1}, \tag{5.2}$$

onde

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}. \tag{5.3}$$

Observação. *Note que para $n = 0$, o Teorema 30 é precisamente o Teorema do Valor Médio.*

Demonstração. Consideremos o caso $x > c$ (o caso $x < c$ é análogo). O ponto x ficará fixado durante toda a demonstração. Definamos a seguinte função $F : [c,x] \to \mathbb{R}$:

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \cdots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n - \frac{1}{(n+1)!}K(x-t)^{n+1},$$

onde K é uma constante a ser escolhida posteriormente. Pelas operações com funções contínuas, segue-se que F é contínua em $[c,x]$. Por propriedades da funções deriváveis, segue-se que F é derivável em (c,x). Por outro lado, $F(x) = 0$ e se K for tomado convenientemente, isto é,

$$K = \left\{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \cdots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n\right\}\frac{(n+1)!}{(x-c)^{n+1}}, \tag{5.4}$$

então $F(c) = 0$. Assim, todas as condições para a aplicação do Teorema de Rolle estão satisfeitas. Por conseguinte, existe $\xi \in (c,x)$ tal que $F'(\xi) = 0$. Calculando a derivada de F e simplificando-a, chegamos a

$$F'(t) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n + \frac{1}{n!}K(x-t)^n. \tag{5.5}$$

Logo, de 5.5 e de $F'(\xi) = 0$, segue-se

$$K = f^{(n+1)}(\xi). \tag{5.6}$$

Finalmente, 5.4 e 5.6 nos dão as expressões 5.2 e 5.3 que queríamos demonstrar.

□

Observação. *Se escrevemos*

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - c)^n,$$

o Teorema 30 nos diz que $f(x)$ difere do polinômio $P(x)$ por R_{n+1}, isto é,

$$f(x) - P(x) = R_{n+1}. \tag{5.7}$$

Uma relação como 5.7 é de grande importância nas questões de aproximação da função f por polinômios. Por exemplo, a função exponencial $f(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem derivadas de todas as ordens e $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, nesse caso, se $c = 0$

$$P_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$$

e

$$R_{n+1} = e^{\xi} x^{n+1}/(n + 1)!.$$

Logo, pelo Teorema 30:

$$e^x - P(x) = e^{\xi} x^{n+1}/(n + 1)! \tag{5.8}$$

Se $|x| < 1$, então temos de 5.8

$$|e^x - P(x)| \leq e/(n + 1)!$$

Essa desigualdade mostra que o polinômio $P(x)$ constitui uma aproximação para e^x com um erro menor que $e/(n+1)!$. Quanto maior for n, melhor será essa aproximação, pois $e/(n + 1)!$ tende a 0.

A fórmula 5.2, no caso em que $c = 0$, é conhecida como *fórmula de Maclaurin*. Vejamos alguns desenvolvimentos de Maclaurin: (k é um número conveniente entre 0 e x; n é um número natural e r um número real.)

$$\begin{aligned} senx &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n senk}{(2n)!} x^{2n}; \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^n \cos k}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \end{aligned}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{(-x)^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+k}\right)^{n+1}$$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \binom{r}{2} + \cdots \binom{r}{n}x^n + \binom{r}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1-r}}.$$

Observe que os polinômios de Maclaurin de seno e cosseno só contêm potências ímpares e pares, respectivamente; que os dois primeiros desenvolvimentos são válidos para todo x real, enquanto que os outros dois só para $|x| < 1$; e que o último, chamado *desenvolvimento binomial*, reduz-se ao Binômio de Newton quando r é inteiro.

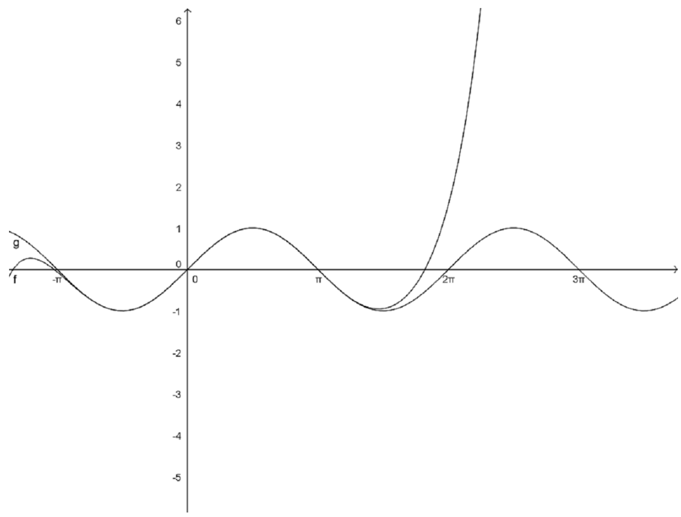


Figura 22 –

Na figura 22, temos um exemplo de uma função f seno uma expansão polinomial de Taylor de sen x até o 10º termo e uma função $g = senx$. Note que para valores de $-\pi$ até π a aproximação é bastante refinada.

5.9 Derivação de Funções Compostas

Definição 10 (Definição de Função Composta)**.** *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $\varphi : B \to \mathbb{R}$ duas funções reais tais que a imagem $f(A)$ esteja contida em B. A função $h : A \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) = \varphi(f(x))$$

*para todo $x \in A$ é chamada a **função composta** de f e φ, e se designa por $\varphi \circ f$.*

Teorema 31. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $\varphi : B \to \mathbb{R}$ duas funções reais, tais que $f(A) \subset B$. Suponha que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = m$. Suponha que φ seja contínua no ponto m. Então, a função composta $\varphi \circ f$ tem limite no ponto c e*

$$\lim_{x\to c} \varphi(f(x)) = \varphi(m).$$

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência contida em $A \setminus \{c\}$ convergindo para c. Pela hipótese sobre f, segue-se que $f(x_n) \to m$. Como φ é contínua, $\varphi(f(x_n)) \to \varphi(m)$. Como isso é verdade para toda sequência $(x_n) \subset A \setminus \{c\}$ convergindo para c, o resultado segue. □

Teorema 32 (A regra da Cadeia)**.** *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $\varphi : J \to \mathbb{R}$ duas funções reais definidas em intervalos I e J, respectivamente, tais que $f(I) \subset J$ e $f(c)$ é um ponto interior de J. Suponhamos que f seja derivável em c e φ derivável em $f(c)$. Então, a função composta $\varphi \circ f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em c e vale a fórmula:*

$$(\varphi \circ f)'(c) = \varphi'(f(c)) \cdot f'(c). \tag{5.9}$$

Demonstração em um caso particular. Consideremos o caso particular em que a função f tem a propriedade a seguir.

(*) Existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \neq f(c)$ para todo x no conjunto

$$A = \{x \in I : 0 < |x - c| < \epsilon\}.$$

Para $x \in A$, temos a seguinte identidade:

$$\frac{(\varphi \circ f)(x) - (\varphi \circ f)(c)}{x - c} = \frac{\varphi(f(x)) - \varphi(f(c))}{f(x) - f(c)} \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \tag{5.10}$$

Agora, o limite da primeira razão incremental do segundo membro de 5.10 pode ser determinado do seguinte modo: seja $(x_n) \subset A$ e tal que $x_n \to c$; pela continuidade de f, temos $f(x_n) \to f(c)$. E então, pela derivabilidade de φ, temos que

$$\frac{\varphi(f(x_n)) - \varphi(f(c))}{f(x_n) - f(c)} \to \varphi'(f(c)).$$

Como isso vale para todas as sequências (x_n) nessas condições, temos que

$$\lim_{x\to c} \frac{\varphi(f(x)) - \varphi(f(c))}{f(x) - f(c)} = \varphi'(f(c)). \tag{5.11}$$

Na identidade 5.10, usando propriedades dos limites de funções, a relação 5.11 e a derivabilidade de f, obtemos a relação 5.9. □

A demonstração anterior realmente requer a restrição feita na função f, pois, de outro modo, não poderíamos escrever a identidade 5.10. A propriedade (*) não se verifica, por exemplo, para uma função constante perto de c, isto é, se $f(x)$ é constante para todo x em intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Nesse caso, entretanto, a conclusão do teorema seria trivial, visto que $(\varphi \circ f)(x)$ seria também constante em $(c - \delta, c + \delta)$ e, portanto, a fórmula 5.9

se verificaria trivialmente, pois ambos os membros se anulariam. Acontece, porém, que a propriedade (*) também não se verifica para certas funções que não são constantes perto de c. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\frac{1}{x}, & \text{para} \quad x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{para} \quad x = 0. \end{cases}$$

A função f se anula para $x = \dfrac{1}{n\pi}$ com $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Por outro lado, ela é derivável na origem, pois o limite de

$$q(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x sen\frac{1}{x},$$

em $x = 0$ existe e é igual a 0 (observe que $|sen\dfrac{1}{x}| \leq 1$). Portanto, para completa generalidade, devemos produzir uma demonstração do Teorema 32 que seja válida mesmo para funções que não satisfaçam a propriedade (*). Provemos antes o resultado a seguir.

Lema 1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I, e seja c um ponto do interior de I. Então, f é derivável em c se, e somente se, existir um número real r e uma função $\alpha : I \to \mathbb{R}$, contínua no ponto c, tal que*

$$f(x) = f(c) + r(x - c) + \alpha(x)(x - c), x \in I \tag{5.12}$$

e

$$\lim_{x \to c} \alpha(x) = 0. \tag{5.13}$$

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que f seja derivável em c. Definamos $\alpha : I \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{cases} \alpha(x) = q(x) - f'(c), & \text{para} \quad x \neq c \\ \\ \alpha(c) = 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

De 5.14 segue-se que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \alpha(x)(x - c)$$

Da derivabilidade de f e de 5.14, temos que $\lim_{x \to c} \alpha(x) = 0$. Logo, 5.12 e 5.13 se verificam com $r = f'(c)$.

Reciprocamente, a relação 5.12 implica

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = r + \alpha(x), x \neq c. \tag{5.15}$$

De 5.15 e 5.13 segue-se que a razão incremental de f no ponto $x = c$ tem limite, que é r. Logo, f é derivável em $x = c$ e $f'(c) = r$. □

Demonstração do Teorema 32 no caso geral. Aplicando o Lema 1 à função $\varphi : J \to \mathbb{R}$ e ao ponto $f(c)$ que está no interior de J, temos:

$$\varphi(y) = \varphi(f(c)) + \varphi'(f(c))(y - f(c)) + \alpha(y)(y - f(c)), \tag{5.16}$$

onde

$$\lim_{y \to f(c)} \alpha(y) = 0$$

Agora, pelo Teorema 31, temos

$$\lim_{x \to c} \alpha(f(x)) = \alpha(f(c)) = 0 \tag{5.17}$$

Usando 5.16 com $f(x)$ em vez de y, temos:

$$\frac{\varphi(f(x)) - \varphi(f(c))}{x - c} = \varphi'(f(c))\frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \alpha(f(x))\frac{f(x) - f(c)}{x - c};$$

que, por propriedades de limites de funções, dá

$$\lim_{x \to c} \frac{\varphi(f(x)) - \varphi(f(c))}{x - c} = \varphi'(f(c))f'(c) + \lim_{x \to c} \alpha(f(x))f'(c). \tag{5.18}$$

Finalmente, o último termo do segundo membro de 5.18 se anula em virtude de 5.17. Assim, o Teorema 32 fica demonstrado no caso geral. $\square$

Exemplo 26. *Seja $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x^{m/n}$, para todo $x \in (0, +\infty)$, onde m e n são inteiros positivos; g é a composta de duas funções*

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ e } \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to x^{1/n} \qquad\qquad y \to y^m$$

As derivadas dessas funções são:

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \qquad e \qquad \varphi'(y) = my^{m-1}.$$

Logo, pelo Teorema 32, temos

$$g'(x) = m(x^{1/n})^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

Conclusão

Ao longo do trabalho alguns fatos se destacaram, como, por exemplo, o número irracional $\sqrt{2}$ ser o limite de uma sequência de números racionais ou o supremo de um conjunto limitado superiormente. Analogamente, ínfimo de um conjunto limitado inferiormente ($\mathbb{R}$ ser o fecho de $\mathbb{Q}$). Estudamos vários conceitos e somente após um amadurecimento, juntamos todos eles. O plano de aula que consta no apêndice é fruto desse amadurecimento. Só conseguimos ensinar o que sabemos. Outro fato é o Postulado de Dedekind. Com ele podemos produzir números reais. Basta tomarmos, por exemplo, ínfimos de subconjuntos não-vazios de racionais positivos. Sem os números reais, não teríamos Cálculo Diferencial. Como pensar "tão pequeno quanto desejarmos"sem a concepção deles? Derivadas? Já que a derivada é um limite. Uma das importantes aplicações das derivadas, tratadas no texto, é a possibilidade de usá-las para calcularmos os pontos de máximo e mínimo de uma função, desde que seja derivável. Saber como será o gráfico antes mesmo de esboçá-lo. A variação de uma função poder ser prevista. Créscimo, decréscimo, concavidade, inflexão, máximo e mínimo, ou seja, conhecer toda a variação com o uso de limites e derivadas. Passemos, agora, para o Teorema de Weierstrass. É curioso notar a ordem dos teoremas: Teorema 5.2 da página 73, Teorema de Rolle (1652-1719) e Teorema do Valor Médio, de Lagrange (1736-1813). Weierstrass (1815-1897) é posterior a eles mas refina o teorema 5.2 da página 73 afirmando que se uma função f for contínua num intervalo fechado $[a, b]$ então ela terá ao menos um ponto de máximo e ao menos um ponto de mínimo nesse intervalo. Estaria a Matemática, nos anos de vida de Weierstrass, numa fase um tanto quanto filosófica? Será que uma função sempre terá máximo e mínimo? Por fim, acredito que este trabalho tenha se revelado como motivador para a continuidade de uma pesquisa relacionada ao Cálculo, o que pretendo fazer em futuros estudos, agora, com o conceito de Integração.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das Funções de uma Variável**. 7.ed., -[Reimpr.].- Rio de Janeiro: LTC. 2011. 307p. v.1.

[2] NIVEN, Ivan. **Números: Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 1984.

[3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC. 1996.

[4] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 4.ed. São Paulo: Atual Editora. 1991. 253p. v.8.

[5] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA. 1999. 200p. v.1.

[6] ÁVILA, Geraldo. **Introdução à Análise Matemática**. 2.ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher LTDA. 1999. 254p.

[7] BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher LTDA. 1999. 496p.

Apêndice

PLANO DE AULA

ASSUNTO: Números Reais

CONTEÚDO: Números Irracionais

DURAÇÃO: de 40 a 50 minutos

JUSTIFICATIVA
Medir a diagonal de um quadrado é uma situação comum em nosso cotidiano. Fazemos aproximações e nem nos damos conta de que muitas vezes estamos lidando com números irracionais aproximando-os através de números racionais. A diagonal de um quadrado de lado 1 é uma situação concreta da existência de números irracionais. Que números são esses que não aparecem na régua de medir? Na verdade o que aparece são as aproximações. Estas são as motivações para a elaboração desta aula.

OBJETIVOS

- Construção de saberes matemáticos nos números reais.
- Compreender que os números irracionais aparecem em algumas situações do cotidiano.
- Abstrair conceitos matemáticos referentes ao estudo dos números reais para conhecimentos futuros.

RECURSOS DIDÁTICOS
Giz e quadro negro.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
A metodologia de ensino a ser utilizada buscará conduzir os alunos a compreender o conceito de números irracionais mediante uma situação-problema (o problema da medição da diagonal do quadrado). Durante a solução do problema, alguns conceitos abstratos serão abordados trabalhando ,assim, a capacidade de abstração do aluno. Visto que os números racionais não atendem à solução do problema proposto, este fato será mediado

pelo professor de modo a levá-los a pensar em outros números, que não os racionais, ou seja, os números irracionais. O fim da aula é marcado pela constatação de que os números reais é a união do conjuntos dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

AVALIAÇÃO

A avaliação de caráter formativo será através da observação do aluno com relação a interesse, respeito e participação. Com relação a avaliação de caráter cognitivo, os alunos serão avaliados através de atividades (provas, trabalhos, apresentações etc.) que busquem refletir, em notas ou conceitos, o modo próprio de cada aluno compreender os conteúdos trabalhados.

REFERENCIAL TEÓRICO

DANTE, Luiz Roberto.**Matemática: contexto e aplicações**. Volume único 2.ed. São Paulo: Editora Ática. 2005. 624p.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC. 1996.

NÚMEROS REAIS

É fato que os números naturais são para contar e os números reais são para medir. Desde os tempos de Pitágoras já era sabido que os números racionais não eram suficientes para medir todas as grandezas. Por exemplo:

Quanto mede a diagonal de um quadrado de lado 1?

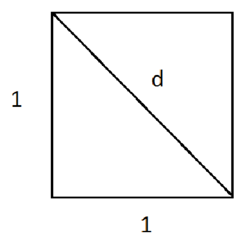


Figura 23 –

Tomando o lado do quadrado como medida, não importa em quantas partes iguais se divida o lado, a diagonal não contém um número exato de partes iguais a estas divisões.

Melhor ainda, se tomarmos o lado do quadrado como unidade de medida, não existe um número racional (números naturais e inteiros são números racionais) que meça a diagonal. Diz-se, então, que o lado e a diagonal são grandezas incomensuráveis com a unidade que se tomou, que no caso foi o lado do quadrado. Vejamos, agora, alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$ chamados de intervalos.
Seja $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$, temos:

$$\begin{array}{ll} (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, & [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, & (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \end{array}$$

Em $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, dizemos que o intervalo é fechado em a e aberto em b. De posse dos intervalos, precisamos, neste momento, da noção de *ínfimo* e *supremo*. A ideia é a seguinte:

Todo conjunto formado por números naturais contém um elemento que é menor que todos os outros. Para os números reais, isso não é verdade. Por exemplo:

Se tomarmos o intervalo aberto $(1,2)$, sempre podemos achar um número bem próximo a 1 e maior do que ele. Se tomarmos, por exemplo, 1,001 achamos 1,0001 que é menor do que 1,001 e assim sucessivamente. Note, também, que não temos um maior elemento, pois sempre podemos achar um número bem próximo a 2 que seja menor do que ele. No entanto, $(1,2)$ é um conjunto limitado entre 1 e 2. É como 1 e 2 fossem o maior e o menor elemento que no caso não são, a não ser que o conjunto fosse fechado ou em 1 ou em 2 ou em ambos.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado superiormente quando existe um número real c tal que $x \in X \Rightarrow x \leq c$, ou seja, todos os elementos de X são menores ou iguais ao número c. Neste caso, c é chamado *cota superior* de X. Repare que X não tem só uma cota superior. No exemplo anterior, 2,3,4,... são cotas superiores do conjunto $(1,2)$. De igual modo: $X \in \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \in X \Rightarrow c \leq X$. Neste caso, c é cota inferior de X.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Um número $s \in \mathbb{R}$ chama-se *supremo* de $X; s = \sup X$ quando s é a menor das cotas superiores de X.
O exemplo inicial da medição da diagonal do quadrado pode ser escrito da seguinte maneira:
Pelo Teorema de Pitágoras, a diagonal (d) ao quadrado é a soma dos quadrados dos catetos que medem 1. Em símbolos:

$$\begin{aligned} d^2 &= 1^2 + 1^2 \\ d^2 &= 1 + 1 \end{aligned}$$

$$d^2 = 2$$

Para resolvermos a equação $d^2 = 2$, devemos procurar um número positivo, pois estamos lidando com medida, que elevado ao quadrado seja 2.
Se procurarmos entre os números racionais não encontraremos soluções. Veja:

$$\begin{aligned}
(1,3)^2 &= 1,69 \\
(1,4)^2 &= 1,96 \\
(1,41)^2 &= 1,9881 \\
(1,412)^2 &= 1,990921 \\
(1,413)^2 &= 1,996569 \\
(1,414)^2 &= 1,999396 \\
(1,415)^2 &= 2,002225 \\
(1,4151)^2 &= 2,00250801 \\
(1,4141)^2 &= 1,99967881 \\
(1,4142)^2 &= 1,99996164
\end{aligned}$$

Entre os números racionais não encontraremos um que o quadrado seja 2, apenas aproximações. Note que o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ é limitado pelo 1,415, por exemplo, que é uma cota superior desse conjunto. Se prosseguirmos com o raciocínio acima, veremos que não existe uma menor cota superior nesse conjunto,um elemento que pertença ao conjunto e que todos os outros sejam menores ou iguais a ele, pois dada uma cota superior sempre podemos encontrar um número racional maior do que ela cujo quadrado ainda seja menor do que 2, como foi o caso de 1,413 e 1,414 e outros tanto quanto quisermos. Em outras palavras, esse conjunto não possui supremo. Então em Q o nosso problema não tem uma solução. Como resolver essa questão?

POSTULADO DE DEDEKIND
Todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, constituído de elementos positivos, tem ínfimo.

Na verdade, para resolver o nosso problema, vamos utilizar este Postulado escrito para supremo: Todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem supremo. Basta tomarmos os opostos desses elementos que então o ínfimo se tornará o supremo.
Voltemos ao conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Repare que ele não é vazio, é formado por elementos positvos (estamos lidando com medidas) e limitado superiormente. Logo, pelo Postulado de Dedekind, esse conjunto possui supremo, ou seja, possui a menor das cotas superiores que em $\mathbb{Q}$ não existe, como acabamos de ver, mas existe no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e seu símbolo é $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ é então a solução do problema. É a medida da diagonal do quadrado de lado 1. Vimos que entre os números racionais não foi possível encontrá-lo, encontramos apenas aproximações. De fato, $\sqrt{2}$ não é um número racional. Veja:
Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Logo podemos escrevê-lo na forma m/n com m e n inteiros. Suponha, ainda, que m e n sejam primos entre si.
Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, temos:

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

Com um certo abuso, podemos dizer que 2 pode estar na fatoração em primos tanto do número m quanto do número n, se pensarmos em $2^0 = 1$. Agora, se 2 está na fatoração de m^2 então ele aparece em quantidade par, podendo ser 2^0 elevado ao quadrado que é, ainda, uma quantidade par de 2.(zero - quantidade nula). Por outro lado, 2 estando na fatoração de n, este aparece ao quadrado, que se torna em quantidade ímpar devido ao 2 de $2n^2$. Contradição, pois a fatoração de dois números iguais, no caso m^2 e $2n^2$ deve ser a mesma. Logo, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

O número $\sqrt{2}$ não é o único número que não é racional. Existem outros. Infinitos outros ($\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, π, etc.). Este foi apenas um exemplo de que eles existem. Como ele não é racional, dizemos que ele é *irracional*. Assim sendo, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.