UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Taís Aguiar Weilandt

OS GRUPOS K_0 TOPOLÓGICO, ALGÉBRICO E EM ÁLGEBRA DE OPERADORES

Florianópolis

2014

Taís Aguiar Weilandt

OS GRUPOS K_0 TOPOLÓGICO, ALGÉBRICO E EM ÁLGEBRA DE OPERADORES

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Giuliano Boava

Florianópolis

2014

Catalogação na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:
http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html

Taís Aguiar Weilandt

OS GRUPOS K_0 TOPOLÓGICO, ALGÉBRICO E EM ÁLGEBRA DE OPERADORES

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós- Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 11 de abril 2014.

Prof. Chefe, Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Giuliano Boava
Orientador

Profa. Dra. Cristina Cerri

Prof. Dr. Eliezer Batista

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à matemática, pois ela me proporcionou momentos de felicidades e me deu a oportunidade de conhecer pessoas maravilhosas. Sem ela, eu não teria conhecido o Attie, o Nestor, o Alvarez, o Valentin, o Paulo Henrique, o Gustavo, o Paulo, o Eliezer e nem o Martin.

Com cada um deles, aprendi muito matematicamente. Porém, eu agradeço a eles não por isso, mas sim pela bondade e compreensão que tiveram em seus corações com relação a mim. Aos apoios em momentos difíceis, sou imensamente grata a vocês.

Mas a vida não se resume à academia e, de certo, sem minha família, a Giovanna e a Denise, este trabalho não teria chegado ao fim. Muito obrigada pelos sorrisos, carinhos e alertamentos.

Finalmente, obrigada ao Yann e ao Ayreon pelos momentos de inspiração, concentração e salvação.

With rare exceptions, all of your most important achievements on this planet will come from working with others – or, in a word, partnership.

Paul Farmer.

RESUMO

Neste trabalho estudamos as K-teorias algébrica, topológica e de C^*-álgebras. Mostramos que se A é uma C^*-álgebra unital, então $K_0(A)$ é o mesmo (a menos de isomorfismo) na K-teoria algébrica e na K-teoria de C^*-álgebras. Além disso, considerando X um espaço topológico compacto Hausdorff, provamos o Teorema de Serre-Swan, isto é, que existe uma equivalência categórica entre a categoria dos $C(X)$-módulos projetivos finitamente gerados e a categoria dos fibrados vetoriais sobre X.

Palavras-chave: K-teoria. Grupo K_0. C^*-álgebras. Espaços Topológicos. Anéis.

ABSTRACT

In this work we study algebraic and topological K-theory and the K-theory of C^*-algebras. We show that if A is a unital C^*-algebra then $K_0(A)$ is (up to isomorphism) the same in algebraic K-theory and in the K-Theory of C^*-Algebras. Moreover, we show the Serre-Swan theorem, which says that if X is a compact Hausdorff space then there is a categorical equivalence between the category of finitely generated projective $C(X)$-modules and the category of vector bundles over X.
Keywords: K-theory. K_0 Group. C^*-algebra. Topological Spaces. Rings.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A K-teoria surgiu no final da década de 1950 quando, Alexander Grothendieck associou grupos chamados de K_0 a certos objetos da geometria algébrica para dar sua generalização do teorema de Riemann-Roch (Borel; Serre, 1958).

Em 1959, Michael Atiyah e Friedrich Hirzebruch traduziram essas ideias para o contexto de fibrados vetoriais para definir a K-teoria topológica. A K-teoria consiste em vários grupos K_i e dá origem a uma teoria de (co)homologia.

Em 1968, Atiyah e Isadore Singer usaram K-teoria topológica em uma demonstração do seu teorema do índice que (sob certas condições) fornece uma relação entre propriedades analíticas de um operador (pseudo)diferencial em uma variedade e propriedades topológicas dos fibrados envolvidos (Atiyah; Singer, 1968). Foram aplicações deste tipo à análise que motivaram a introdução da K-teoria em C^*-álgebras na década de 1970.

Neste trabalho, estudamos alguns conceitos básicos da K-teoria de C^*-álgebra, algébrica e topológica. Para melhor absorção do conteúdo, o dividimos em três capítulos.

Dedicamos o primeiro capítulo à K-teoria de C^*-álgebras. Inicialmente, trabalhamos apenas com o caso unital. Definimos o grupo K_0 de uma C^*-álgebra unital e, para isso, estudamos a construção de Grothendieck, projeções em uma C^*-álgebra, relações de equivalência no conjunto $\mathscr{P}(A) = \{p \in A : p \text{ é uma projeção}\}$ e mostramos alguns exemplos.

Enunciamos ou referenciamos todos os resultados necessários, mas assumimos que o leitor já tenha uma noção básica de Álgebra de Operadores. Caso contrário, o livro (Murphy, 1990) será de grande valia ao leitor.

No mesmo capítulo, utilizando os conhecimentos no caso unital, apresentamos o grupo $K_0(A)$, em que A é uma C^*-álgebra qualquer. Para isso utilizamos sequência exata envolvendo a unitização de A.

Mostramos que, em ambos os casos, $K_0(A)$ é um grupo abeliano e que K_0 é um funtor entre a categoria das C^*-álgebras e a categoria dos grupos abelianos e exibimos alguns exemplos.

No segundo capítulo, introduzimos a K-teoria algébrica. Definimos o grupo $K_0(R)$, em que R é um anel unital, e mostramos que existem duas maneiras de defini-lo.

Todos os resultados necessários para desenvolvermos este tópico são provados no mesmo, mas uma noção básica de álgebra poderá ser útil.

O leitor pode se perguntar se existe alguma relação entre a K-teoria de

C^*-álgebras unitais e a K-teoria algébrica (para anéis unitais), uma vez que toda C^*-álgebra é um anel. Neste capítulo, nosso objetivo principal é mostrar que, dada uma C^*-álgebra unital A, o grupo $K_0(A)$ definido no capítulo um é isomorfo ao $K_0(A)$ construído no capítulo dois.

Por fim, no último capítulo, estudamos a K-teoria topológica (não exigimos conhecimentos prévios do leitor neste tópico também, mas indicamos (Willard, 2004) para possíveis dúvidas relacionadas a topologia). Nesta última parte, definimos o grupo $K_0(X)$, em que X é um espaço topológico compacto Hausdorff e, para isso, precisamos da definição de fibrado vetorial e, consequentemente, alguns resultados relacionado a fibrados vetoriais. O resultado principal deste capítulo é o Teorema de Serre-Swan, o qual afirma que existe uma equivalência categórica entre a categoria dos fibrados vetorias sobre X e a dos $C(X)$-módulos projetivos finitamente gerados.

Para os leitores que desejam ir além deste trabalho, indicamos os livros (Rørdam; Larsen; Laustsen, 2000), (Cuntz; Meyer; Rosenberg, 2007) e (Hatcher, 2009).

1 O GRUPO K_0 EM ÁLGEBRA DE OPERADORES

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos básicos e estudamos alguns resultados da K-teoria de C^*-álgebras. Inicialmente, concentramo-nos no caso em que A é uma C^*-álgebra unital. Nesta parte, estudamos a construção de Grothendieck e algumas propriedades de projeções que nos são úteis para definir o grupo $K_0(A)$.

Posteriormente, estudamos o caso geral em que A é uma C^*-álgebra qualquer. Para tanto, precisamos unitizar A e utilizar a sequência exata associada à unitização.

1.1 PRELIMINARES

Reservamos essa primeira seção para a K-teoria de C^*-álgebras unitais. Deste modo, estudaremos um pouco sobre projeções em uma C^*-álgebra A e a construção de Grothendieck, pois necessitamos delas para definir o grupo $K_0(A)$, neste caso.

Definição 1.1. Sejam A uma C^*-álgebra e $n \in \mathbb{N}$. Definimos $M_n(A)$ como sendo a $*$-álgebra das matrizes de ordem n cujas entradas são elementos de A, munido das operações soma, produto e multiplicação por escalar definidas como nas matrizes usuais e involução dada por

$$(a_{ij})_{ij}^* = (a_{ji}^*)_{ij},$$

para toda $(a_{ij})_{ij} \in M_n(A)$.

Como neste capítulo trabalharemos bastante com a questão que, dado $n \in \mathbb{N}$ e A uma C^*-álgebra, existe uma norma em $M_n(A)$ que a torna uma C^*-álgebra, discutiremos um pouco a ideia da demonstração deste resultado. Para tanto, precisaremos dos resultados que seguem.

Lema 1.2. *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno. Então a função*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : H^n \times H^n &\to \mathbb{C} \\ ((\xi_1, \cdots, \xi_n), (\eta_1, \cdots, \eta_n)) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle \xi_i, \eta_i \rangle_H \end{aligned}$$

é um produto interno.

Para mostrarmos o lema acima, basta utilizarmos o fato que $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ é um produto interno.

Notemos que se $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n) \in H^n$, então o lema anterior garante que $\|\xi\| := \sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}$ define uma norma em H^n. Observemos que para k em $\{1,\cdots,n\}$,

$$\|\xi_k\|_H \leq \|\xi\|.$$

Lembremos para o próximo teorema que, se H é um espaço de Hilbert, então $B(H)$ denota a álgebra dos operadores limitados $T : H \to H$.

Teorema 1.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e H um espaço de Hilbert. Então $M_n(B(H))$ e $B(H^n)$ são $*$-álgebras isomorfas.*

Demonstração. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} S : M_n(B(H)) & \to & B(H^n), \\ [T_{ij}] & \mapsto & T \end{array}$$

em que

$$\begin{array}{rcl} T : H^n & \to & H^n, \\ (\xi_1,\cdots,\xi_n) & \mapsto & \big(\sum_{k=1}^{n} T_{1k}\xi_k,\cdots \sum_{k=1}^{n} T_{nk}\xi_k\big) \end{array}$$

e mostremos que esta é um $*$-homomorfismo bijetor. Inicialmente, provemos que S está bem definida. Para tanto, seja $[T_{ij}] \in M_n(B(H))$ e consideremos $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n) \in H^n$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} \|T(\xi_1,\cdots,\xi_n)\| & = & \|(\sum_{k=1}^{n} T_{1k}\xi_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n} T_{nk}\xi_k)\| \\ & \leq & \|\sum_{k=1}^{n} T_{1k}\xi_k\|_H + \cdots + \|\sum_{k=1}^{n} T_{nk}\xi_k\|_H \\ & \leq & \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \|T_{lk}\|\|\xi_k\|_H \\ & \leq & n^2 \max_{k,l} \|T_{lk}\|\|\xi\|. \end{array}$$

Portanto, como cada $T_{kl} \in B(H)$, segue que $S([T_{ij}]) \in B(H^n)$.

Mostremos que S é um homomorfismo. Como facilmente vemos que S preserva soma, basta mostrarmos que S preserva a multiplicação. Para tanto, sejam $[T_{ij}],[R_{ij}] \in M_n(B(H))$ e $(\xi_1,\cdots,\xi_n) \in H^n$. Então

$$\begin{aligned}
S([T_{ij}][R_{ij}])(\xi_1,\cdots,\xi_n) &= S([\sum_{k=1}^{n} T_{ik}R_{kj}])(\xi_1,\cdots,\xi_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} S([T_{ik}R_{kj}])(\xi_1,\cdots,\xi_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{l=1}^{n} T_{1k}R_{kl}\xi_l,\cdots,\sum_{l=1}^{n} T_{nk}R_{kl}\xi_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (T_{1k}(\sum_{l=1}^{n} R_{kl}\xi_l),\cdots,T_{nk}(\sum_{l=1}^{n} R_{kl}\xi_l)).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
S([T_{ij}])S([R_{ij}])(\xi_1,\cdots,\xi_n) &= S([T_{ij}])(\sum_{l=1}^{n} R_{1l}\xi_l,\cdots,\sum_{l=1}^{n} R_{nl}\xi_l) \\
&= (\sum_{k=1}^{n} T_{1k}(\sum_{l=1}^{n} R_{kl}\xi_l),\cdots,\sum_{k=1}^{n} T_{nk}(\sum_{l=1}^{n} R_{kl}\xi_l)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (T_{1k}(\sum_{l=1}^{n} R_{kl}\xi_l),\cdots,T_{nk}(\sum_{l=1}^{n} R_{kl}\xi_l)).
\end{aligned}$$

Logo, como $(\xi_1,\cdots,\xi_n) \in H^n$ é arbitrário,

$$S([T_{ij}][R_{ij}]) = S([T_{ij}])S([R_{ij}])$$

e, portanto S é um homomorfismo.

Usando a linearidade do produto interno e a definição de operador adjunto, podemos mostrar que S é um $*$-homomorfismo.

Finalmente, demonstremos que S é um isomorfismo. Para vermos que S é injetor, seja $[T_{ij}] \in M_n(B(H))$ tal que $S([T_{ij}]) = 0$. Logo, para $\xi \in H$ qualquer, considerando o vetor que vale ξ na i-ésima coordenada e 0 nas demais,

$$S([T_{ij}])(0,\cdots,0,\xi,0,\cdots,0) = (T_{1i}\xi,\cdots,T_{ni}\xi) = 0.$$

Portanto, para todo $k \in \{1,\cdots,n\}$, $T_{ki} = 0$. Mas, como esta igualdade é válida para qualquer $1 \leq i \leq n$, concluímos que $[T_{ij}] = 0$ e, portanto, S é injetor.

Para provarmos que S é sobrejetor, seja $T \in B(H^n)$. Para cada i, j em

$\{1, \cdots, n\}$, definamos

$$\begin{array}{rcl} V_i : H^n & \to & H \\ (\xi_1, \cdots, \xi_n) & \mapsto & \xi_i \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} U_j : H & \to & H^n \\ \xi & \mapsto & (0, \cdots, 0, \underbrace{\xi}_{\text{pos. } j}, 0, \cdots, 0) \end{array}$$

e observemos que $V_i T U_j \in B(H)$, para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$. Com efeito, seja $\xi \in H$. Então,

$$\|U_j \xi\| = \|(0, \cdots, 0, \xi, 0, \cdots, 0)\| = \|\xi\|_H$$

e, portanto, $\|U_j\| = 1$, para todo j, ou seja, $U_j \in B(H)$.

Por outro lado, seja $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in H^n$. Desta forma, para $1 \leq i \leq n$,

$$\|V_i(\xi_1, \cdots, \xi_n)\|^2 = \|\xi_i\|_H^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\|_H^2 = \|(\xi_1, \cdots, \xi_n)\|^2.$$

Logo $\|V_i\| \leq 1$, para todo $i \in \{1, \cdots n\}$ e, consequentemente, como $T \in B(H)$ e

$$\|V_i T U_j\| \leq \|V_i\| \|T\| \|U_j\|,$$

ou seja, $V_i T U_j \in B(H)$, para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

Afirmação: $S([V_i T U_j]) = T$.

Com efeito, seja $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in H^n$, e definamos, para $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\xi^k = (0, \cdots, 0, \underbrace{\xi_k}_{\text{pos. } k}, 0, \cdots, 0)$. Denotemos $T\xi^l = (r_1^l, \cdots, r_n^l)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
S([V_i T U_j])\xi &= (\sum_{k=1}^{n} V_1 T U_k \xi_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} V_n T U_k \xi_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (V_1(r_1^k, \cdots, r_n^k), \cdots, V_n(r_1^k, \cdots, r_n^k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (r_1^k, \cdots, r_n^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} T\xi^k = T(\sum_{k=1}^{n} \xi^k) \\
&= T\xi
\end{aligned}
$$

e, portanto, como $\xi \in H^n$ é arbitrário, $S([V_i T U_j]) = T$.

Concluímos então que S é sobrejetora, logo um $*$-isomorfismo e, portanto, $M_n(B(H)) \cong B(H^n)$. $\square$

Observemos que se A e B forem C^*-álgebras e $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo, então, para $n \in \mathbb{N}$, poderemos estender φ a um $*$-homomorfismo

$$
\begin{aligned}
\varphi_n : M_n(A) &\to M_n(B). \\
(a_{ij}) &\mapsto (\varphi(a_{ij}))
\end{aligned}
$$

Quando não houver motivos dúbios, escreveremos apenas φ.

Na demonstração do teorema que segue, utilizaremos a construção *GNS*. Para mais detalhes, ver seção 3.4 de (Murphy, 1990).

Teorema 1.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma C^*-álgebra. Então existe uma norma em $M_n(A)$ tal que, com esta norma, $M_n(A)$ é uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Notemos que transportando a norma de $B(H^n)$ para $M_n(B(H))$, segundo o isomorfismo do teorema 1.3, temos que $M_n(B(H)) = B(H^n)$ como $*$-álgebras normadas. Assim, $M_n(B(H))$ é uma C^*-álgebra.

Como A é uma C^*-álgebra, pela construção *GNS*, existem um espaço de Hilbert H e um $*$-homomorfismo injetor $\varphi : A \to B(H)$. Desta forma, $\varphi_n : M_n(A) \to M_n(B(H))$ também é um $*$-homomorfismo injetor.

Portanto, por meio de identificações, $M_n(A) \subset M_n(B(H))$. Logo, basta mostramos que $M_n(A)$ é fechado, na norma, em $M_n(B(H)) = B(H^n)$. Para tanto, seja $(T_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset M_n(A)$ tal que $T_m \to T \in M_n(B(H))$.

Para $m \in \mathbb{N}$, denotemos $T_m = [T_{ij}^m]_{ij}$ e $T = [T_{ij}]$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$,

$$\|T_m - T\| = \sup_{\substack{\|\xi\|\leq 1\\ \xi\in H^n}} \|T_m\xi - T\xi\| < \varepsilon.$$

Fixemos $\xi_j \in H$ tal que $\|\xi_j\| \leq 1$ e seja $\xi = (0,\cdots,\xi_j,\cdots,0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|(T_m - T)\xi\|^2 &= \|[T^m_{ij} - T_{ij}]\xi\|^2\\
&= \|\big(\sum_{k=1}^{n}(T^m_{1k} - T_{1k})\xi_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n}(T^m_{nk} - T_{nk})\xi_k\big)\|^2\\
&= \|((T^m_{1j} - T_{1j})\xi_j,\cdots,(T^m_{nj} - T_{nj})\xi_j)\|^2\\
&= \|(T^m_{1j} - T_{1j})\xi_j\|^2_H + \cdots + \|(T^m_{nj} - T_{nj})\xi_j\|^2_H.
\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $i \in \{1,\cdots,n\}$,

$$\|(T_m - T)\xi\|^2 \geq \|(T^m_{ij} - T_{ij})\xi_j\|^2_H.$$

Como $\|T_m - T\| < \varepsilon$, segue que para $i,j \in \{1,\cdots,n\}$ fixos $T^m_{ij} \to T_{ij}$. Logo, como $\varphi(A)$ é fechado em $B(H)$, $T_{ij} \in \varphi(A)$ e, consequentemente, $[T_{ij}]_{ij} \in M_n(\varphi(A))$.

Como $\varphi_n(M_n(A)) = M_n(\varphi(A))$, segue que $T \in M_n(\varphi(A))$ e portanto $M_n(\varphi(A))$ é fechado em $M_n(B(H))$, ou seja, $M_n(\varphi(A))$ é uma C^*-álgebra, uma vez que $M_n(B(H))$ o é. Como

$$\varphi_n : M_n(A) \to M_n(\varphi(A))$$

é um $*$-isomorfismo, concluímos que $M_n(A)$ é uma C^*-álgebra. □

Notemos que esta norma independe da escolha de H, pois existe uma única norma que torna uma $*$-álgebra em uma C^*-álgebra[1].

Definição 1.5. Seja A uma C^*-álgebra. Dizemos que $p \in A$ é uma projeção se $p = p^* = p^2$. Denotamos o conjunto de todas as projeções em A por $\mathscr{P}(A)$.

Assim, para $n \in \mathbb{N}$, podemos definir

$$\mathscr{P}_n(A) = \mathscr{P}(M_n(A)) \quad \text{e} \quad \mathscr{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}_n(A).$$

Concentremo-nos agora em algumas relações de equivalências e propriedades de cada uma delas. Comecemos com a equivalência homotópica.

---

[1] ver (Murphy, 1990), página 37.

Definição 1.6. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $a, b \in X$ são homotópicos em X, denotado por $a \sim_h b$, se existe uma função contínua $v : [0,1] \to X$ tal que $v(0) = a$ e $v(1) = b$.

Mostremos que $\sim_h$ acima definida é uma relação de equivalência:

(i) Reflexiva: seja $a \in X$. Então

$$\begin{array}{rcl} v : [0,1] & \to & X \\ t & \mapsto & a \end{array}$$

é contínua e $v(0) = v(1) = a$. Portanto $a \sim_h a$.

(ii) Simétrica: sejam $a, b \in X$ tais que $a \sim_h b$. Então existe $v : [0,1] \to X$ tal que $v(0) = a$ e $v(1) = b$.

Se definirmos $u : [0,1] \to X$ por $u(t) = v(1-t)$, temos que u é contínua, pois v o é, a função

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & [0,1] \\ t & \mapsto & 1-t \end{array}$$

é contínua e composição de funções contínuas é contínua. Além disso, $u(0) = v(1) = b$ e $u(1) = v(0) = a$. Logo, $b \sim_h a$.

(iii) Transitiva: sejam $a, b, c \in X$ tais que $a \sim_h b$ e $b \sim_h c$. Então existem funções contínuas $u : [0,1] \to X$ e $v : [0,1] \to X$ tais que

$$\begin{array}{ll} u(0) = a & \qquad v(0) = b \\ u(1) = b & \qquad v(1) = c. \end{array}$$

Se considerarmos agora $w : [0,1] \to X$ dada por

$$w(t) = \begin{cases} u(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ v(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases},$$

temos que w é bem-definida, pois $u(2 \cdot \frac{1}{2}) = b = v(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$. Como as restrições $w_{|[0,\frac{1}{2}]}$ e $w_{|[\frac{1}{2},1]}$ são contínuas e $[0,1]$ é a reunião dos intervalos fechados $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$, concluímos que w é contínua. Ademais,

$$w(0) = u(0) = a \quad \text{e} \quad w(1) = v(1) = c.$$

Donde $a \sim_h c$.

Concluímos então que $\sim_h$ é uma relação de equivalência.

Observação 1.7. Quaisquer dois elementos a, b em uma C^*-álgebra A são homotópicos em A, basta considerarmos

$$\begin{array}{rcl} v:[0,1] & \to & A. \\ t & \mapsto & (1-t)a+tb \end{array}$$

Mas nem todos espaços topológios têm esta propriedade. Por exemplo, duas projeções em A não são necessariamente homotópicas em $\mathscr{P}(A)$. Por exemplo, se $A = \mathbb{C}$, $p = 0$ e $q = 1$, então p e q não são homotópicas, uma vez que $\mathscr{P}(\mathbb{C}) = \{0,1\}$ e não existe caminho caminho contínuo $v:[0,1] \to \{0,1\}$ não constante.

Definição 1.8. Seja A uma C^*-álgebra unital. Denotemos o grupo de elementos unitários em A por $\mathscr{U}(A)$ e denotamos por $\mathscr{U}_0(A)$ o conjunto de todos $u \in \mathscr{U}(A)$ tais que $u \sim_h 1$.

Observação 1.9. Como $\mathscr{U}(A)$ é um espaço topológico, temos que $\sim_h$ é uma relação de equivalência em $\mathscr{U}(A)$. Em particular, $u \sim_h v$, para quaisquer $u, v \in \mathscr{U}_0(A)$ e, portanto, $\mathscr{U}_0(A)$ é conexo por caminhos.

Notemos agora que se $u_1, v_1, u_2, v_{,2} \in \mathscr{U}(A)$ e $u_1 \sim_h v_1$ e $u_2 \sim_h v_2$, então

$$u_1 u_2 \sim_h v_1 v_2.$$

Com efeito, sabemos que existem caminhos contínuos

$$w_1 : [0,1] \to \mathscr{U}(A) \quad \text{e} \quad w_2 : [0,1] \to \mathscr{U}(A)$$

tais que

$$\begin{array}{ll} w_1(0) = u_1 & \qquad w_2(0) = u_2 \\ w_1(1) = v_1 & \qquad w_2(1) = v_2. \end{array}$$

Deste modo, $w_1 w_2 : [0,1] \to \mathscr{U}(A)$ é um caminho contínuo, pois é a composição da aplicação contínua $(w_1, w_2) : [0,1] \to \mathscr{U}(A) \times \mathscr{U}(A)$ com a multiplicação $\mathscr{U}(A) \times \mathscr{U}(A) \to \mathscr{U}(A)$ (que é contínua, pois A é uma álgebra de Banach). Além disso,

$$(w_1 w_2)(0) = w_1(0) w_2(0) = u_1 u_2 \quad \text{e} \quad (w_1 w_2)(1) = w_1(1) w_2(1) = v_1 v_2.$$

Logo $u_1 u_2 \sim_h v_1 v_2$.

A partir de agora, demonstraremos alguns resultados que nos serão interessantes no estudo do $K_0(A)$ de uma C^*-álgebra unital A.

Observação 1.10. Se A é uma C^*-álgebra unital e $u \in \mathscr{U}(A)$, temos então que $\sigma(u) \subset \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, em que $\sigma(u)$ denota o espectro de u na C^*-álgebra A. Para mais detalhes, ver (Murphy, 1990) página 36.

Lembremos que se a é um elemento normal em uma C^*-álgebra unital A e $z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ denota a inclusão, então existe um único $*$-homomorfismo unital que preserva a norma (o cálculo funcional) $\varphi : C(\sigma(A)) \to C^*(\{1,a\})$, em que $C^*(\{1,a\})$ é a C^*-álgebra gerada por 1 e a, tal que $\varphi(z) = a$. Dado $f \in C(\sigma(a))$, escrevemos $f(a) := \varphi(f)$. Ver (Murphy, 1990), página 43, para mais detalhes.

Definição 1.11. Seja A uma C^*-álgebra. Dizemos que $a \in A$ é autoadjunto se $a = a^*$. Denotamos por A_{sa} o conjunto de tais elementos.

Lema 1.12. *Seja A uma C^*-álgebra unital:*

(i) se $a \in A$ é autoadjunto, então $\exp(ia) \in \mathscr{U}_0(A)$;

(ii) se $u \in \mathscr{U}(A)$ e $\sigma_A(u) \neq \mathbb{T}$, então $u \in \mathscr{U}_0(A)$;

(iii) se $u, v \in \mathscr{U}(A)$ são tais que $\|u - v\| < 2$, então $u \sim_h v$.

Demonstração. (i) Como a função

$$\begin{array}{rccc} \exp(i\cdot): & \sigma(a) & \to & \mathbb{T} \\ & x & \mapsto & e^{ix} \end{array}$$

é contínua, pelo cálculo funcional, podemos definir, para cada $t \in [0,1]$,

$$\begin{array}{rccc} f_t : & \sigma(a) & \to & \mathbb{T} \\ & x & \mapsto & \exp(itx). \end{array}$$

Observemos que, como a é autoadjunto, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ e,

$$\begin{aligned} \exp(ia)^* \exp(ia) &= \varphi(\exp(i\cdot))^* \varphi(\exp(i\cdot)) \\ &= \varphi(\exp(i\cdot)^* \exp(i\cdot)) \\ &= \varphi(1) \\ &= 1_A, \end{aligned}$$

uma vez que φ é um $*$-homomorfismo unital e, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\exp(ix)} \exp(ix) = |\exp(ix)|^2 = 1.$$

Notemos que o caminho $t \mapsto f_t(a)$ é contínuo. Com efeito, como o $*$-homomorfismo $\varphi : C(\sigma(A)) \to C^*(\{1,a\})$ preserva a norma,

$$\begin{aligned}
\|f_t(a) - f_s(a)\| &= \|(f_t - f_s)(a)\| \\
&= \sup_{x\in\sigma(a)} |(f_t - f_s)(x)| \\
&= \sup_{x\in\sigma(a)} |\exp(itx) - \exp(isx)| \\
&= \sup_{x\in\sigma(a)} |\exp(itx)||1 - \exp(i(s-t)x)| \\
&= \sup_{x\in\sigma(a)} |1 - \exp(i(s-t)x)|
\end{aligned}$$

Como $\sigma(a)$ é compacto Hausdorff, temos que exp é uniformemente contínua e, portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de maneira que $\|f_t(a) - f_s(a)\| < \varepsilon$, sempre que $|t-s| < \delta$, ou seja, o caminho $t \mapsto f_t(a)$ é contínuo em $\mathscr{U}(A)$.

Desta forma, $f_1(a) \sim_h f_0(a)$ em $\mathscr{U}(A)$, ou seja,

$$\exp(ia) = f_1(a) \sim_h f_0(a) = 1.$$

Concluímos então que $\exp(ia) \in \mathscr{U}_0(A)$.

(ii) Se $\sigma_A(u) \neq \mathbb{T}$, então existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(i\theta) \in \mathbb{T} \setminus \sigma_A(u)$. Seja $\psi : \sigma_A(u) \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(\exp(it)) = t$, em que $t \in (\theta, \theta + 2\pi)$.

Notemos que ψ é contínua, pois é (um múltiplo e restrição de) um ramo da função logaritmo.

E, além disso, se $z = \exp(it)$, em que $t \in (\theta, \theta + 2\pi)$, temos

$$\exp(i\psi(z)) = z.$$

Pondo $a = \psi(u)$, temos pelo cálculo funcional que $a \in A_{sa}$, uma vez que $\operatorname{Im}\psi \subset \mathbb{R}$. Assim, pelo item anterior,

$$u = \exp(i\psi(u)) = \exp(ia) \in \mathscr{U}_0(A).$$

(iii) Suponhamos que $\|u - v\| < 2$. Desta forma,

$$\|v^*u - 1\| = \|v^*(u-v)\| \leq \|v^*\|\|u-v\| = \|u-v\| < 2.$$

Assim, $-2 \notin \sigma_A(v^*u-1)$, pois

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(v^*u-1)\} = r(v^*u-1) \leq \|v^*u-1\| < 2,$$

em que $r(v^*u-1)$ denota o raio espectral de v^*u-1 (ver (Murphy, 1990), seção 1.2, para a definição e a propriedade usada acima). Logo,

$$v^*u-1-(-2) = v^*u+1$$

é invertível e, assim, $-1 \notin \sigma_A(v^*u)$, Desta forma, $\sigma_A(v^*u) \neq \mathbb{T}$ e , pelo item (ii), $v^*u \in \mathscr{U}_0(A)$, ou seja, $v^*u \sim_h 1$, donde $u \sim_h v$.

□

Lema 1.13 (Whitehead)**.** *Sejam A uma C^*-álgebra unital e $u,v \in \mathscr{U}(A)$. Então*

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{ em } \mathscr{U}(M_2(A)).$$

Segue em particular que

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ em } \mathscr{U}(M_2(A)).$$

Demonstração. Notemos inicialmente que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é unitária. Além disso, $\sigma(w) = \{-1,1\} \neq \mathbb{T}$. Assim, pelo lema 1.12,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, pelos comentários sobre $\sim_h$ que seguem a observação 1.9,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que

$$\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, como $\sim_h$ é uma relação de equivalência, segue que

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

□

Proposição 1.14. *Seja A uma C^*-álgebra unital. Então*

(i) $\mathscr{U}_0(A)$ *é um subgrupo normal de* $\mathscr{U}(A)$*;*

(ii) $\mathscr{U}_0(A)$ *é aberto e fechado relativo a* $\mathscr{U}(A)$*;*

(iii) Um elemento $u \in A$ *pertence a* $\mathscr{U}_0(A)$ *se, e somente se, existem autoad-*

juntos $h_1, \cdots, h_n \in A$ tais que

$$u = \exp(ih_1) \cdots \exp(ih_n).$$

Demonstração. (i) Se $u, v \in \mathscr{U}_0(A)$, então $u \sim_h 1$ e $v \sim_h 1$. Pelos comentários que seguem a observação 1.9, obtemos $uv \sim_h 1$, isto é, $uv \in \mathscr{U}_0(A)$. Desta forma, temos que $\mathscr{U}_0(A)$ é fechado sob a multiplicação.

Seja $u \in \mathscr{U}_0(A)$ e notemos que $u^{-1} = u^*$, uma vez que $\mathscr{U}_0(A) \subset \mathscr{U}(A)$.

Seja agora $\gamma : [0,1] \to \mathscr{U}(A)$ um caminho contínuo entre 1 e u. Desta forma, temos que $\gamma^* : [0,1] \to \mathscr{U}(A)$, dada por $\gamma^*(t) = \gamma(t)^*$, é contínua, uma vez que $* : A \to A$ é contínua. Logo,

$$u^* = \gamma(1)^* \sim_h \gamma(0)^* = 1,$$

ou seja, $u^{-1} = u^* \in \mathscr{U}_0(A)$. Portanto $\mathscr{U}_0(A)$ é um subgrupo de $\mathscr{U}(A)$.

Para mostrarmos que $\mathscr{U}_0(A)$ é normal, seja $v \in \mathscr{U}(A)$ e consideremos a função $v\gamma v^* : [0,1] \to \mathscr{U}(A)$ dada por $(v\gamma v^*)(t) = v\gamma(t)v^*$. Notemos que esta função é contínua, pois é multiplicação de funções contínuas e A é uma álgebra de Banach. Além disso,

$$vuv^* = v\gamma(1)v^* \sim_h v\gamma(0)v^* = v1v^* = 1.$$

Como $u \in \mathscr{U}_0(A)$ e $v \in \mathscr{U}(A)$ são arbitrários, concluímos que $\mathscr{U}_0(A)$ é um subgrupo normal de $\mathscr{U}(A)$.

(ii) e (iii) Definamos $G := \{\exp(ih_1) \cdots \exp(ih_n) : n \in \mathbb{N},\ h_1, \cdots h_n \in A_{sa}\}$. Desta forma, como $\mathscr{U}_0(A)$ é um grupo, pelo lema 1.12, temos que

$$G \subset \mathscr{U}_0(A).$$

Notemos agora que G é um grupo, uma vez que é fechado por multiplicação e cada elemento $\exp(ih)$, em que $h \in A_{sa}$, possui inverso $\exp(i(-h))$. Mostremos agora que G é aberto em relação a $\mathscr{U}(A)$. Para tanto, consideremos $v \in G$. Seja $u \in \mathscr{U}(A)$ tal que $\|u - v\| < 2$. Desta forma, como demonstramos no item (iii) do lema 1.12, temos que $\sigma_A(uv^*) \neq \mathbb{T}$ e, portanto, existe θ tal que $\exp(i\theta) \notin \sigma_A(v^*u)$. Definamos

$$\begin{array}{rcl} \psi : \sigma(v^*u) & \to & (\theta, \theta + 2\pi) \\ \exp(it) & \mapsto & t \end{array}$$

e notemos que ψ é contínua e, para todo $z \in \sigma_A(v^*u)$, $z = \exp(i\psi(z))$.

Pelo cálculo funcional, considerando $h = \psi(v^*u)$, segue que $h \in A_{sa}$, pois $\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}$ e

$$v^*u = \exp(i\psi(v^*u)) = \exp(ih),$$

isto é, $u = v\exp(ih) \in G$. Logo, G é aberto.

Por outro lado,

$$\mathscr{U}(A) \setminus G = \bigcup_{u \in \mathscr{U}(A) \setminus G} Gu.$$

Mas, para cada $u \in \mathscr{U}(A)$, temos que a classe lateral Gu é homeomorfo a G. E, como G é aberto, segue que Gu também o é. Assim, $\mathscr{U}(A) \setminus G$ é aberto, donde G é fechado em $\mathscr{U}(A)$.

Logo, G é aberto e fechado em $\mathscr{U}_0(A)$, uma vez que $G \subset \mathscr{U}_0(A)$. Mas, como $\mathscr{U}_0(A)$ é conexo, pois é conexo por caminhos pela observação 1.9, e $G \neq \emptyset$, segue que $G = \mathscr{U}_0(A)$.

Isto mostra (ii) e (iii).

□

Para o seguinte lema, observemos que, se A e B são C^*-álgebras unitais e $\varphi : A \to B$ é um $*$-homomorfismo sobrejetor, então φ preserva a unidade.

Com efeito, suponhamos que $\varphi(1_A) = b$. Como φ é sobrejetor, existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = 1_B$ e assim,

$$1_B = \varphi(a) = \varphi(a1_A) = \varphi(a)\varphi(1_A) = 1_B b = b,$$

isto é, todo $*$-homomorfismo sobrejetor preserva unidade.

Lema 1.15. *Sejam A e B C^*-álgebras unitais e $\psi : A \to B$ um $*$-homomorfismo sobrejetor. Então*

(i) $\psi(\mathscr{U}_0(A)) = \mathscr{U}_0(B)$;

(ii) se $u \in \mathscr{U}(B)$, e se existir $v \in \mathscr{U}(A)$ tal que $u \sim_h \psi(v)$, então $u \in \psi(\mathscr{U}(A))$;

(iii) para cada $u \in \mathscr{U}(B)$, existe $v \in \mathscr{U}_0(M_2(A))$ tal que

$$\psi_2(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix},$$

em que $\psi_2 : M_2(A) \to M_2(B)$ é o $*$-homomorfismo induzido por ψ.

Demonstração. (i) Como ψ é um $*$-homomorfismo sobrejetor, ψ é unital e, portanto, $\psi(\mathscr{U}(A)) \subset \mathscr{U}(B)$.

Seja $u \in \mathscr{U}_0(A)$. Então existe $\gamma : [0,1] \to \mathscr{U}(A)$ tal que $\gamma(0) = u$ e $\gamma(1_A) = 1$. Consideremos $\psi \circ \gamma : [0,1] \to \mathscr{U}(B)$ e notemos que $\psi \circ \gamma$ é contínuo, pois é composição de funções contínuas, e além disso, como ψ é unital,

$$\psi \circ \gamma(0) = \psi(u) \quad \text{e} \quad \psi \circ \gamma(1) = \psi(1_A) = 1_B.$$

Portanto $\psi(u) \sim_h 1_B$, isto é, $\psi(\mathscr{U}_0(A)) \subset \mathscr{U}_0(B)$.

Por outro lado, seja $u \in \mathscr{U}_0(B)$. Desta forma, pela proposição 1.14, existem $n \in \mathbb{N}$ e $h_1, \cdots, h_n \in B_{sa}$ tais que

$$u = \exp(ih_1) \cdots \exp(ih_n).$$

Como ψ é sobrejetora, existem $x_1, \cdots x_n, \in A$ tais que

$$\psi(x_j) = h_j, \quad j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Consideremos $k_j = \frac{x_j + x_j^*}{2} \in A$. Então $k_j = k_j^*$ e

$$\psi(k_j) = \frac{1}{2}(\psi(x_j) + \psi(x_j)^*) = h_j.$$

Logo, pondo $v = \exp(ik_1) \cdots \exp(ik_n)$, temos

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi(\exp(ik_1) \cdots \exp(ik_n)) \\ &= \psi(\exp(ik_1)) \cdots \psi(\exp(ik_n)) \\ &= \exp(i\psi(k_1)) \cdots \exp(i\psi(k_n)) \\ &= \exp(ih_1) \cdots \exp(ih_n) \\ &= u. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade usamos que, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, k_j é normal e que $f_j := \exp(i\cdot) : C(\sigma(k_j)) \to \mathbb{C}$ é contínuo e, portanto $\psi(f_j(k_j)) = f_j(\psi(k_j))$ (ver (Rørdam; Larsen; Laustsen, 2000), página 8).

Pela proposição 1.14, temos que $v \in \mathscr{U}_0(A)$ e, portanto, $u \in \psi(\mathscr{U}_0(A))$, donde segue a igualdade.

(ii) Seja $u \in \mathscr{U}(B)$ e suponhamos que exista $v \in \mathscr{U}(A)$ tal que $u \sim_h \psi(v)$. Assim, $u\psi(v^*) \sim_h 1_B$ e portanto $u\psi(v^*) \in \mathscr{U}_0(B)$.

Desta forma, pelo item (i), existe $w \in \mathscr{U}_0(A)$ tal que $u\psi(v^*) = \psi(w)$.

Logo,
$$u = \psi(w)\psi(v) = \psi(wv) \in \psi(\mathscr{U}(A)),$$
uma vez que $w, v \in \mathscr{U}(A)$ e este é um grupo.

(iii) Pelo lema 1.13,
$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \in \mathscr{U}_0(M_2(B)).$$
Como $\psi_2 : M_2(A) \to M_2(B)$ é sobrejetora, pois ψ o é, temos pelo item (i) que existe $v \in \mathscr{U}_0(M_2(A))$ tal que
$$\psi_2(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

$\square$

Definição 1.16. Seja A uma C^*-álgebra unital. Definimos o grupo de elementos invertíveis de A por
$$GL(A) = \{a \in A; \exists\, b \in A \text{ tal que } ab = 1_A = ba\}.$$
Além disso, definimos
$$GL_0(A) = \{u \in GL(A); u \sim_h 1_A \text{ em } GL(A)\}.$$

Observação 1.17. $\mathscr{U}(A) \subset GL(A)$ é um subgrupo.

Na próxima proposição usaremos a definição do valor absoluto de um elemento em uma C^*-álgebra e, para tanto, precisaremos das seguintes noções.

Definição 1.18. Seja A uma C^*-álgebra. Um elemento $a \in A$ é positivo se a é autoadjunto e $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+$. Escrevemos $A^+ = \{a \in A : a \text{ é positivo}\}$.

Pode-se mostrar[2] que se $a \in A^+$, então existe um único $b \in A^+$ tal que $b^2 = a$. Neste caso, definimos $a^{\frac{1}{2}} := b$.

Observamos que se a é um elemento autoadjunto, então $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ e, pelo Teorema do Mapeamento Espectral (ver (Murphy, 1990), página 43), temos que $\sigma(a^2) = (\sigma(a))^2 \subset \mathbb{R}_+$. Logo, a^2 é positivo e, portanto, podemos definir $|a| = (a^2)^{\frac{1}{2}}$.

Além disso, é possível mostrar[3] também que se $a \in A$ é um elemento qualquer, então $a^*a \in A^+$. Desta forma, podemos estender nossa noção de valor absoluto da seguinte maneira.

---
[2] ver (Murphy, 1990), página 45.
[3] ver (Murphy, 1990), página 46.

Definição 1.19. Sejam A uma C^*-álgebra e $a \in A$. Definimos o valor absoluto de a por

$$|a| := (a^*a)^{\frac{1}{2}} \in A.$$

Para demonstrarmos a próxima proposição precisaremos do seguinte resultado que apenas enunciaremos e cuja demonstração está em (Rørdam; Larsen; Laustsen, 2000), página 8.

Lema 1.20. *Seja K um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ e seja $f : K \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Sejam A uma C^*-álgebra unital e Ω_K o conjunto dos elementos autoadjuntos de A cujo espectro está contido em K. Então a função induzida*

$$\begin{array}{rcl} f : \Omega_K & \to & A \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

é contínua.

Proposição 1.21. *Seja A uma C^*-álgebra unital:*

(i) *se $z \in GL(A)$, então $|z| \in GL(A)$ e $w(z) = z|z|^{-1} \in \mathscr{U}(A)$.*

(ii) *a aplicação $w : GL(A) \to \mathscr{U}(A)$ definida no item anterior é contínua, $w(u) = u$, para todo $u \in \mathscr{U}(A)$ e $w(z) \sim_h z$, para qualquer $z \in GL(A)$;*

(iii) *se $u, v \in \mathscr{U}(A)$ são tais que $u \sim_h v$ em $GL(A)$, então $u \sim_h v$ em $\mathscr{U}(A)$.*

Demonstração. (i) Seja $z \in GL(A)$. Então

$$(z^{-1})^*z^* = 1^* = 1 = z^*(z^{-1})^*,$$

ou seja, $z^* \in GL(A)$. Como $GL(A)$ é um grupo, segue que $zz^* \in GL(A)$. Notemos que $|z| = (z^*z)^{\frac{1}{2}} \in GL(A)$, já que

$$(z^*z)^{\frac{1}{2}}[(z^*z)^{\frac{1}{2}}z^{-1}(z^*)^{-1}] = 1$$

e

$$\begin{aligned} [(z^*z)^{\frac{1}{2}}z^{-1}(z^*)^{-1}](z^*z)^{\frac{1}{2}} &= [(z^*z)^{\frac{1}{2}}(z^*z)^{-1}](z^*z)^{\frac{1}{2}} \\ &= [(z^*z)^{\frac{1}{2}}(z^*z)^{\frac{-1}{2}}(z^*z)^{\frac{-1}{2}}](z^*z)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Segue que $u = z|z|^{-1} \in GL(A)$, uma vez que $GL(A)$ é grupo. Além disso, como $|z|$ é autoadjunto,

$$\begin{aligned} u^*u &= |z|^{-1}z^*z|z|^{-1} \\ &= |z|^{-1}(z^*z)^{\frac{1}{2}}(z^*z)^{\frac{1}{2}}|z|^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} uu^* &= z|z|^{-1}(|z|^{-1})^*z^* \\ &= z|z|^{-1}|z|^{-1}z^* \\ &= z(z^*z)^{\frac{-1}{2}}(z^*z)^{\frac{-1}{2}}z^* \\ &= z(z^*z)^{-1}z^* \\ &= zz^{-1}(z^*)^{-1}z^* \\ &= 1. \end{aligned}$$

e, portanto, $u \in \mathscr{U}(A)$.

(ii) Como a multiplicação em uma C^*-álgebra e a função $z \mapsto z^{-1}$ são contínuas, para mostrarmos que w é contínua, basta mostrarmos que $a \mapsto |a|$ o é. Ou seja, que as funções $a \mapsto a^*a$ e $h \mapsto h^{\frac{1}{2}}$, são funções contínuas. Mas, como a involução e multiplicação são contínuas, só nos resta mostrar que $h \mapsto h^{\frac{1}{2}}$ é contínua. Como A^+ é um espaço métrico, todo elemento possui uma vizinhança limitada, por exemplo uma bola aberta. Como estas vizinhanças formam uma cobertura aberta de A^+, basta mostrar que $h \mapsto h^{\frac{1}{2}}$ é contínua em qualquer conjunto limitado $\Omega \subset A^+$.

Seja então $\Omega \subset A^+$ limitado, logo existe $R \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \|h\| < R$, para todo $h \in \Omega$. Consideremos agora $K = [0,R]$, $\Omega_K = \{h \in A^+ : \|h\| \leq R\}$ e

$$\begin{aligned} f : K &\to \mathbb{C}. \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pelo lema 1.20, como f é contínua, a função $f : \Omega_k \to A$, dada por $f(a) = a^{\frac{1}{2}}$ é contínua. Em particular, $f_{|_\Omega} : \Omega \to A$ é contínua, já que $\Omega \subset \Omega_K$, e portanto w é contínua.

Ademais, se $u \in \mathscr{U}(A)$, então $|u| = 1$ e $w(u) = u$.

Seja agora $z \in GL(A)$ e tomemos $z_t = w(z)(t|z| + (1-t) \cdot 1_A)$. Desta forma,

$$z_0 = w(z) \quad \text{e} \quad z_1 = w(z)|z| = z.$$

Como $|z| \in A^+ \cap GL(A)$, temos que $\sigma(|z|) \subset (0,\infty)$ e, portanto, existe $\inf\sigma(|z|) \in [0,\infty)$. Como $\sigma(|z|)$ é fechado, (ver (Murphy, 1990), página 8) sabemos $\inf\sigma(|z|) > 0$. Se definirmos $\lambda := \frac{1}{2}\inf\sigma(|z|) > 0$, teremos que

$$|z| \geq \lambda \cdot 1_A.$$

Então, para cada $t \in [0,1]$, temos que

$$\begin{array}{rcl} t|z| + (1-t)\cdot 1_A & = & t|z| + 1_A - t\cdot 1_A \\ & \geq & t\lambda\cdot 1_A + 1_A - t\cdot 1_A \\ & = & (1 + t\lambda - t)\cdot 1_A \end{array}$$

Agora, se considerarmos

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \to & \mathbb{R}, \\ t & \mapsto & 1 + t\lambda - t \end{array}$$

temos que

$$f(0) = 1 \geq \lambda \quad \text{e} \quad f(1) = \lambda.$$

Desta forma, como f é afim, $f(t) \geq \lambda$, para quaisquer $t \in [0,1]$. E assim,

$$t|z| + (1-t)\cdot 1_A \geq \lambda \cdot 1_A, \quad \forall t \in [0,1],$$

donde $t|z| + (1-t)\cdot 1_A$ é inversível e, consequentemente, z_t é um caminho em $GL(A)$.

Como para todo $t \in [0,1]$ a função $t \mapsto z_t$ é contínua, segue que

$$w(z) \sim_h z \text{ em } GL(A).$$

(iii) Sejam $u, v \in \mathscr{U}(A)$ tais que $u \sim_h v$ em $GL(A)$. Notemos agora que se $t \mapsto z_t$ é um caminho contínuo de u a v em $GL(A)$, então $t \mapsto w(z_t)$ é um caminho contínuo em $\mathscr{U}(A)$ de u a v, pois é composição de funções contínuas e , para todo $z \in GL(A)$, $w(z) \in \mathscr{U}(A)$. Desta forma,

$$u = z_0 \sim_h w(z_0) \sim_h w(z_1) \sim_h z_1 = v$$

em $\mathscr{U}(A)$.

□

Observação 1.22. Para $z \in GL(A)$, a fatoração $z = w(z)|z|$ da proposição 1.21 é chamada a decomposição polar (unitária) de z.

Assim se A for uma C^*-álgebra unital, para todo elemento $z \in GL(A)$ existirá um único $u \in \mathscr{U}(A)$ tal que $z = u|z|$. (A unicidade segue do fato que $|z|$ é inversível.)

1.2 EQUIVALÊNCIA DE PROJEÇÕES

Nesta seção trataremos de algumas equivalências entre projeções. Como $\mathscr{P}(A)$ é um espaço topológico, temos neste a relação de equivalência $\sim_h$ da seção anterior. Ademais, podemos considerar as seguintes relações de equivalência em $\mathscr{P}(A)$:

(i) Murray-von Neumann: $p \sim q$ se existir $v \in A$ tal que $p = v^*v$ e $q = vv^*$.

(ii) Unitária: $p \sim_u q$ se existir $u \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$ tal que $q = upu^*$, em que $\widetilde{A} = \{a + \alpha \cdot 1_{\widetilde{A}} : a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$ é a unitização de A.

Mostremos agora que $\sim$ acima definida é uma relação de equivalência. Como facilmente vemos que $\sim$ é reflexiva e simétrica, mostraremos apenas que esta é transitiva. Para tanto, sejam $p, q, r \in \mathscr{P}(A)$ tais que $p \sim q$ e $q \sim r$. Então existem $v, w \in A$ tais que

$$p = v^*v, \quad q = vv^* = w^*w \quad \text{e} \quad r = ww^*.$$

Tomemos $z = wv$. Então,

$$z^*z = v^*w^*wv = v^*vv^*v = p^2 = p$$

e

$$zz^* = wvv^*w^* = ww^*ww^* = r^2 = r.$$

Logo $zz^* = r$ e $z^*z = p$. Concluímos então que $p \sim r$, ou seja, $\sim$ é uma relação de equivalência.

Demonstremos que $\sim_u$ é uma relação de equivalência:

(i) Reflexiva:
Seja $p \in \mathscr{P}(A)$. Basta notarmos que $1_{\widetilde{A}} \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$ e $p = 1_{\widetilde{A}} p 1_{\widetilde{A}}$.

(ii) Simétrica:
Sejam $p, q \in \mathscr{P}(A)$ tais que $p \sim_u q$. Então existe $u \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$ tal que $q = upu^*$. Desta forma temos que $u^{-1} = u^* \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$ e

$$p = u^*qu,$$

ou seja, $q \sim_u p$.

(iii) Transitiva:

Sejam $p, q, r \in \mathscr{P}(A)$ tais que $p \sim_u q$ e $q \sim_u r$. Deste modo existem $u, v \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$ tais que

$$q = upu^* \quad \text{e} \quad r = vqv^*.$$

Assim, pondo $w = vu$, temos que w é unitário e

$$wpw^* = vupu^*v^* = vqv^* = r,$$

ou seja, $p \sim_u r$. Concluímos então que $\sim_u$ é uma relação de equivalência.

Enunciaremos e demonstraremos na proposição 1.25 um resultado que relaciona as duas relações acima. Mas para tal precisaremos dos lemas que seguem.

Lema 1.23. *Sejam A uma C^*-álgebra, $p, q \in \mathscr{P}(A)$ e $v \in A$ tais que $p = v^*v$ e $q = vv^*$. Então valem as seguintes igualdades*

$$v = qv = vp = qvp.$$

Demonstração. Primeiramente mostremos que $v = qv = vp$. Para tanto, consideremos $z = v - vv^*v$. Desta forma,

$$z^*z = (v^* - v^*vv^*)(v - vv^*v) = p - p^2 - p^2 + p^3 = 0.$$

Assim, como A é um C^*-álgebra, $\|z\|^2 = \|z^*z\| = 0$. Desta forma $z = 0$ e

$$v = qv = vp.$$

Além disso,

$$qvp = (vv^*)v(v^*v) = v(v^*v)(v^*v) = vp^2 = vp.$$

$\square$

Lema 1.24. *Seja A uma C^*-álgebra unital. Então*

$$\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}f,$$

em que $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$.

Demonstração. Seja $a+\alpha\cdot 1_{\widetilde{A}}\in\widetilde{A}$. Então,

$$a+\alpha\cdot 1_{\widetilde{A}}=(a-\alpha\cdot 1_A)+\alpha\cdot f,$$

ou seja, $\widetilde{A}\subset A+\mathbb{C}f$. Como facilmente provamos a inclusão inversa, a igualdade segue.

Notemos que se $a\in A$, então $af=0=fa$. Ademais, se $a\in A\cap\mathbb{C}f$, então $a\in A$ e $a=\lambda f$, para algum $\lambda\in\mathbb{C}$ e, assim,

$$0=a(\lambda f)=(\lambda f)(\lambda f)=\lambda^2 f,$$

ou seja, $\lambda=0$, donde $a=0$. Logo $A\cap\mathbb{C}f=\{0\}$ e, portanto, $\widetilde{A}=A\oplus\mathbb{C}f$. □

Proposição 1.25. *Sejam p e q projeções em uma C^*-álgebra unital A. São equivalentes:*

(i) $p\sim_u q$;

(ii) $q=upu^*$, *para algum* $u\in\mathscr{U}(A)$;

(iii) $p\sim q$ *e* $1_A-p\sim 1_A-q$.

Demonstração. Tomemos $f=1_{\widetilde{A}}-1_A$. Então, pelo lema 1.24, $\widetilde{A}=A+\mathbb{C}f$ e $fa=af=0$, para todo $a\in A$.

$(i)\Rightarrow(ii)$: Seja $z\in\mathscr{U}(\widetilde{A})$ tal que $q=zpz^*$. Escrevamos $z=u+\alpha f$, para algum $u\in A$ e $\alpha\in\mathbb{C}$ e mostremos que $u\in\mathscr{U}(A)$. Para tanto, notemos que

$$1_{\widetilde{A}}=z^*z=(u+\alpha f)(u^*+\overline{\alpha}f)=uu^*+|\alpha|f,$$

ou seja, $uu^*=1_{\widetilde{A}}-|\alpha|f$.

Por outro lado,

$$A\ni uu^*-1_A=1_{\widetilde{A}}-|\alpha|f-1_A=f-|\alpha|f=(1-|\alpha|)f.$$

Desta forma, $|\alpha|=1$ e, consequentemente, $uu^*=1_A$.

Analogamente mostramos que $u^*u=1_A$ e, portanto, $u\in\mathscr{U}(A)$.

Além disso,

$$zpz^*=(u+\alpha f)p(u^*+\overline{\alpha}f)=up(u^*+\overline{\alpha}f)=upu^*,$$

ou seja,

$$q=zpz^*=upu^*.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Suponhamos que exista $u \in \mathscr{U}(A)$ tal que $q = upu^*$. Assim, pondo $v = up$, temos que

$$v^*v = pu^*up = p^2 = p$$

$$vv^* = upp^*u^* = upu^* = q.$$

Logo, $p \sim q$.

Agora consideremos $w = u(1_A - p)$. Desta forma,

$$w^*w = (1_A - p)u^*u(1_A - p) = (1_A - p)^2 = 1_A - p \quad \text{e}$$

$$ww^* = u(1_A - p)(1_A - p)u^* = u(1_A - p)u^* = uu^* - upu^* = 1_A - q,$$

e, portanto, $1_A - p \sim 1_A - q$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sejam $v, w \in A$ tais que

$$p = v^*v \quad \text{e} \quad q = vv^* \qquad 1_A - p = w^*w \quad \text{e} \quad 1_A - q = ww^*.$$

Consideremos $z = v + w + f \in \widetilde{A}$ e mostremos que $z \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$:

$$\begin{aligned} zz^* &= (v+w+f)(v^*+w^*+f) \\ &= vv^* + vw^* + wv^* + ww^* + f \\ &= q + vw^* + wv^* + 1_A - q + f \\ &= vw^* + wv^* + 1_{\widetilde{A}}. \end{aligned}$$

Notemos agora que, pelo lema 1.23,

$$\begin{aligned} vw^* &= (qvp)((1_A - p)w^*(1_A - q)) \\ &= (qv)0(w^*(1_A - q)) = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$vw^* = wv^* = 0,$$

e, portanto, $zz^* = 1_{\widetilde{A}}$. Analogamente mostramos que $z^*z = 1_{\widetilde{A}}$ e consequentemente, $z \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$.

Finalmente, usando novamente o lema 1.23, temos que

$$\begin{aligned} zpz^* &= (v+w+f)p(v^*+w^*+f) \\ &= vpv^*+vpw^*+wpv^*+wpw^* \\ &= vv^*+vw^*+wv^*+wv^*vw^* \\ &= vv^* \\ &= q. \end{aligned}$$

Logo, $p \sim_u q$. □

O resultado que segue será útil na demonstração da proposição 1.27, a qual nos mostra a ligação entre as relações $\sim_h$ e $\sim_u$.

Proposição 1.26. *Sejam $a,b \in A_{sa}$ em uma C^*-álgebra unital A e suponhamos que $b = zaz^{-1}$ para algum $z \in GL(A)$. Seja $z = u|z|$ a decomposição polar de z com $u \in \mathscr{U}(A)$. Então $b = uau^*$.*

Demonstração. Ver (Rørdam; Larsen; Laustsen, 2000), página 23. □

Proposição 1.27. *Sejam A uma C^*-álgebra e $p,q \in \mathscr{P}(A)$. Então $p \sim_h q$ em $\mathscr{P}(A)$ se, e somente se, existir $u \in \mathscr{U}_0(\widetilde{A})$ tal que $p = uqu^*$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $u \in \mathscr{U}_0(\widetilde{A})$ tal que $p = uqu^*$. Seja $t \mapsto u_t$ um caminho contínuo em $\mathscr{U}(\widetilde{A})$ tal que $u_0 = 1_{\widetilde{A}}$ e $u_1 = u$. Como A é ideal de $\widetilde{A}$, temos que para todo $t \in [0,1]$, $u_tqu_t^* \in \mathscr{P}(A)$. Assim $t \mapsto u_tqu_t^*$ é uma função contínua de $[0,1]$ para $\mathscr{P}(A)$ tal que

$$q = 1_{\widetilde{A}}q1_{\widetilde{A}} = u_0qu_0^* \sim_h u_1qu_1^* = uqu^* = p.$$

Logo $p \sim_h q$ em $\mathscr{P}(A)$.

Por outro lado, suponhamos que $p \sim_h q$ em $\mathscr{P}(A)$. Então existe um caminho contínuo $\gamma\colon [0,1] \to \mathscr{P}(A)$. Desta forma, como γ é uniformemente contínuo, pois $[0,1]$ é compacto, existem projeções $q = p_0, p_1, \cdots, p_n = p$ tais que, para todo $j \leq n-1$, $\|p_{j+1} - p_j\| < \frac{1}{2}$ e $p_{j+1} \sim_h p_j$.

Notemos que é suficiente mostrarmos tal resultado no caso em que $\|p-q\| < \frac{1}{2}$. Caso contrário, observamos que esse argumento mostra que para todo $j \in \{0,\cdots,n-1\}$, existe $u_j \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$ tal que $p_{j+1} = u_jp_ju_j^*$. Desta forma, se definirmos $u = u_{n-1}\cdots u_0$, teremos que $u \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$ e $p = uqu^*$.

Agora sponhamos que $\|p-q\| < \frac{1}{2}$. Seja $z = pq + (1_{\widetilde{A}} - p)(1_{\widetilde{A}} - q)$ e notemos que

$$pz = pq = zq.$$

Além disso, como p e $(1_{\widetilde{A}} - p)$ são projeções, temos que $\|p\|$ e $\|1_{\widetilde{A}} - p\|$ valem 0 ou 1. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\|z - 1_{\widetilde{A}}\| &= \|pq + 1_{\widetilde{A}} - q - p + pq - 1_{\widetilde{A}}\| \\
&= \|p(q-p) + (1-p)(p-q)\| \\
&\leq (\|p\| + \|1-p\|)\|p-q\| \\
&\leq (1+1)\|p-q\| \\
&= 2\|p-q\| \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Logo z é inversível, pois $-1 \notin \sigma(z - 1_{\widetilde{A}})$ e, portanto, $0 \notin \sigma(z)$.

Agora consideremos $c_t = (1-t)1_{\widetilde{A}} + tz$ para $t \in [0,1]$. Assim,

$$\|1_{\widetilde{A}} - c_t\| = t\|1_{\widetilde{A}} - z\| < 1$$

e, portanto, c_t é inversível para todo $t \in [0,1]$. Desta forma, $1_{\widetilde{A}} \sim_h z$ em $GL(\widetilde{A})$.

Seja $z = u|z|$ a decomposição polar unitária de z. Então, pela proposição 1.21,

$$u \sim_h z \sim_h 1_{\widetilde{A}} \qquad \text{em} \quad GL(\widetilde{A}).$$

Portanto, também pela proposição 1.21, $u \sim_h 1_{\widetilde{A}}$ em $\mathscr{U}(\widetilde{A})$, donde $u \in \mathscr{U}_0(\widetilde{A})$.

Finalmente, pela proposição 1.26, temos que $p = uqu^*$, uma vez que $pz = zq$ e z é inversível. $\square$

Proposição 1.28. *Sejam $p, q \in \mathscr{P}(A)$.*

(i) Se $p \sim_h q$, então $p \sim_u q$;

(ii) Se $p \sim_u q$, então $p \sim q$.

Demonstração. (i) Decorre imediatamente da proposição 1.27.

(ii) Este fato já foi mostrado na proposição 1.25.

$\square$

Proposição 1.29. *Sejam A uma C^*-álgebra e $p, q \in A$ projeções.*

(i) Se $p \sim q$, então $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ em $M_2(A)$.

(ii) se $p \sim_u q$, então $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *em* $M_2(A)$.

Demonstração. (i) Seja $v \in A$ tal que

$$p = v^*v, \quad q = vv^* \quad \text{e, consequentemente,} \quad v = vp = qv.$$

Consideremos agora

$$u = \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$

em que $1 = 1_{\widetilde{A}}$, e notemos que u e w são unitários.

Com efeito,

$$\begin{aligned} uu^* &= \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} vv^* + 1 - q & v - vp + v - qv \\ v^* - pv^* + v^* - v^*q & 1 - p + v^*v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w^*w &= \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q^2 + 1 - q & q - q^2 + q - q^2 \\ q - q^2 + q - q^2 & 1 - q + q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $u^*u = ww^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} u\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}u^* &= \begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} vp & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^* & 1-p \\ 1-q & v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} vpv^* & vp-vp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pois $vp = v$ e $q = vv^*$. Logo,

$$\begin{aligned} wu\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}u^*w^* &= w\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}w^* \\ &= \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para mostrarmos que $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ em $M_2(A)$, basta mostrarmos que $uw \in \widetilde{M_2(A)}$. Mas antes, notemos a diferença entre $M_2(\widetilde{A})$ e $\widetilde{M_2(A)}$. Observemos que

$$M_2(\widetilde{A}) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \widetilde{A} \}$$

e

$$\widetilde{M_2(A)} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1_{\widetilde{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\widetilde{A}} \end{pmatrix}; a,b,c,d \in A \text{ e } \lambda \in \mathbb{C} \}$$

e, portanto, $\widetilde{M_2(A)} \subset M_2(\widetilde{A})$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
wu &= \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & 1-q \\ 1-p & v^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} qv+1-p-q+pq & v^*-qv^* \\ v-qv+q-qp & 1-q+qv^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v+1-p-q+qp & v^*-qv^* \\ q-qp & 1-q+qv^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v-p-q+qp & v^*-qv^* \\ q-qp & qv^*-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{\widetilde{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\widetilde{A}} \end{pmatrix} \in \widetilde{M_2(A)}.
\end{aligned}$$

Como $uu^* = u^*u = ww^* = w^*w = \begin{pmatrix} 1_{\widetilde{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\widetilde{A}} \end{pmatrix}$, temos que wu em $\mathscr{U}(\widetilde{M_2(A)})$ e, portanto, $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Seja $u \in \mathscr{U}(\widetilde{A})$ tal que $q = upu^*$. Pelo lema 1.13, existe um caminho $t \mapsto w_t$ em $\mathscr{U}(M_2(\widetilde{A}))$ tal que

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora, para $t \in [0,1]$, o caminho $e_t = w_t \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w_t^*$. Notemos que como w_t é unitário para todo $t \in [0,1]$ e $p \in \mathscr{P}(A)$, então $e_t \in \mathscr{P}(M_2(A))$, para todo $t \in [0,1]$. Além disso,

$$e_0 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que mostra que $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

Agora, efetivamente, começaremos nosso estudo básico do $K_0(A)$ de uma C^*-álgebra unital A. Para obtermos tal objeto, definiremos sobre $\mathscr{P}_\infty(A)$ a seguinte relação de equivalência: se $p,q \in \mathscr{P}_\infty(A)$, dizemos que $p \in M_n(A)$ e $q \in M_m(A)$ são equivalentes, $p \sim_0 q$, se existe uma matriz $v \in M_{mxn}(A)$ de modo que $v^*v = p$ e $vv^* = q$.

Notemos que se p e q têm o mesmo tamanho, então $\sim_0$ é a relação de equivalência Murray-von Neumann.

A demonstração de que $\sim_0$ é uma relação de equivalência é análoga à demonstração da relação Murray-von Neumann.

A seguir demonstraremos uma proposição que nos será muito importante para definirmos o K_0 de uma C^*-álgebra unital. Mas antes definamos sobre $\mathscr{P}_\infty(A)$ a operação binária

$$p \oplus q = \operatorname{diag}(p,q) = \begin{pmatrix} p & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & q \end{pmatrix}.$$

Dados $p \in \mathscr{P}_n(A)$ e $q \in \mathscr{P}_m(A)$, notemos que

$$\begin{pmatrix} p & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & q \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} p^* & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & q \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} p & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & q \end{pmatrix}$$

e, portanto, $p \oplus q \in \mathscr{P}_{m+n}(A)$.

Proposição 1.30. *Sejam A uma C^*-álgebra e $p,q,r,p',q' \in \mathscr{P}_\infty(A)$.*

(i) *$p \sim_0 p \oplus 0_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em que 0_n é o elemento neutro da adição de $M_n(A)$;*

(ii) *Se $p \sim_0 p'$ e $q \sim_0 q'$, então $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$;*

(iii) *$p \oplus q \sim_0 q \oplus p$;*

(iv) *Se p e q são projeções em $\mathscr{P}_n(A)$ tais que $pq = 0$, então $p+q \in \mathscr{P}_n(A)$ e $p+q \sim_0 p \oplus q$;*

(v) *$(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$.*

Demonstração. (i) Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \mathscr{P}_m(A)$. Seja agora $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Desta forma, se definirmos

$$v = \begin{pmatrix} p \\ 0_{n,m} \end{pmatrix} \in M_{m+n,m}(A),$$

então $p = v^*v$ e $p \oplus 0_n = vv^*$, ou seja, $p \sim_0 p \oplus 0_n$.

(ii) Sejam v e w tais que

$$p = v^*v,\ p' = vv^*,\ q = w^*w,\ q' = ww^*.$$

Assim, se definirmos $u := \operatorname{diag}(v, w)$, temos que

$$p \oplus q = u^* u \quad \text{e} \quad p' \oplus q' = uu^*$$

e, portanto, $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$.

(iii) Consideremos p e q projeções quaisquer em $\mathscr{P}_\infty(A)$. Logo, existem n e m naturais de modo que $p \in \mathscr{P}_n(A)$ e $q \in \mathscr{P}_m(A)$. Assim, se definirmos

$$u = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & q \\ p & 0_{n,m} \end{pmatrix}$$

chegamos ao resultado desejado.

(iv) Sejam $p, q \in \mathscr{P}_n(A)$ e mostremos primeiramente que se $pq = 0$, então $p + q$ também é uma projeção em $\mathscr{P}_n(A)$.

Com efeito, como $pq = 0$, temos que $q^* p^* = 0$ e, consequentemente $qp = 0$. Assim, $(p+q)^* = p^* + q^* = p + q$ e

$$(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q.$$

Notemos que definindo

$$u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

obtemos $p + q \sim_0 p \oplus q$.

(v) Trivial.

□

Definição 1.31. Definimos

$$\mathscr{D}(A) = \mathscr{P}_\infty(A)/\sim_0 .$$

Dado $p \in \mathscr{P}_\infty(A)$, denotemos por $[p]_{\mathscr{D}}$ a classe de equivalência de p em relação a $\sim_0$. Sob $\mathscr{D}(A)$, podemos definir uma adição dada por

$$[p]_{\mathscr{D}} + [q]_{\mathscr{D}} = [p \oplus q]_{\mathscr{D}}.$$

Pela parte (ii) da proposição 1.30, esta operação está bem definida. Pelas partes (i), (iii) e (v) da mesma proposição, sabemos que $(\mathscr{D}(A), +)$ é um monoide abeliano com o elemento neutro dado por $[0_1]_{\mathscr{D}}$.

1.3 O GRUPO K_0 EM C^*-ÁLGEBRAS UNITAIS

O que faremos nessa subseção será uma associação entre semigrupos abelianos e grupos abelianos. Este processo específico é chamado de Construção de Grothendieck. Assim que compreendermos esta construção, poderemos enfim definir o K_0 de uma C^*-álgebra A.

Seja $(S,+)$ um semigrupo abeliano e definamos sobre $S \times S$ a seguinte relação de equivalência: dizemos que $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ se existir $z \in S$ de modo que

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

Mostremos que $\sim$ é uma relação de equivalência:

(i) Sejam $x_1, y_1 \in S$. Desta forma, para todo $z \in S$,

$$x_1 + y_1 + z = x_1 + y_1 + z.$$

Assim, $(x_1,y_1) \sim (x_1,y_1)$ e, portanto, $\sim$ é reflexiva.

(ii) Sejam $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in S \times S$ e suponhamos que $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$. Logo existe $z \in S$ tal que

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

Assim,

$$x_2 + y_1 + z = x_1 + y_2 + z.$$

Logo $(x_2,y_2) \sim (x_1,y_1)$ e, consequentemente, $\sim$ é simétrica.

(iii) Sejam $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in S \times S$ e suponhamos que

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \quad \text{e} \quad (x_2,y_2) \sim (x_3,y_3).$$

Então existem $z,t \in S$ tais que

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z \quad \text{e} \quad x_2 + y_3 + t = x_3 + y_2 + t.$$

Desta forma, se considerarmos $w = y_2 + z + t \in S$ e utilizarmos o fato que S é abeliano, teremos que

$$\begin{aligned} x_1+y_3+w &= x_1+y_3+(y_2+z+t) \\ &= y_3+(x_1+y_2+z)+t \\ &= y_3+(x_2+y_1+z)+t \\ &= (x_2+y_3+t)+y_1+z \\ &= (x_3+y_2+t)+y_1+z \\ &= x_3+y_1+(y_2+z+t) = x_3+y_1+w \end{aligned}$$

Deste modo, $(x_1,y_1) \sim (x_3,y_3)$, ou seja, $\sim$ é transitiva.

Definimos agora $G(S) = S \times S/\sim$ e seja $\langle x,y\rangle$ a classe de equivalência de (x,y) em $G(S)$.

Para quaisquer $\langle x_1,y_1\rangle, \langle x_2,y_2\rangle$ em $G(S)$, podemos definir a operação

$$\langle x_1,y_1\rangle + \langle x_2,y_2\rangle = \langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle.$$

Mostremos que esta operação está bem definida.

Com efeito, sejam $x_1, x_1', y_1, y_1', x_2, x_2', y_2, y_2' \in S$ tais que

$$\langle x_1,y_1\rangle = \langle x_1',y_1'\rangle \quad \text{e} \quad \langle x_2,y_2\rangle = \langle x_2',y_2'\rangle.$$

Desta forma existem $z,t \in S$ tais que

$$x_1+y_1'+t = x_1'+y_1+t \quad \text{e} \quad x_2+y_2'+z = x_2'+y_2+z.$$

Assim, como

$$(x_1+y_1'+t)+(x_2+y_2'+z) = (x_1'+y_1+t)+(x_2'+y_2+z),$$

temos que

$$(x_1+x_2)+(y_1'+y_2')+t+z = (x_1'+x_2')+(y_1+y_2)+t+z,$$

e, portanto,

$$\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle = \langle x_1'+x_2', y_1'+y_2'\rangle.$$

Desta forma

$$\langle x_1,y_1\rangle + \langle x_2,y_2\rangle = \langle x_1',y_1'\rangle + \langle x_2',y_2'\rangle$$

e, portanto, $+$ está bem definida.

Além disso, para qualquer $x \in S$, $\langle x,x\rangle = 0_{G(S)}$.

De fato, sejam $x_1, y_1 \in S$ e notemos que

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x, x \rangle = \langle x_1 + x, y_1 + x \rangle.$$

Por outro lado, para todo $z \in S$, temos que

$$x_1 + x + y_1 + z = x_1 + y_1 + x + z,$$

e, portanto, $(x_1 + x, y_1 + x) \sim (x_1, y_1)$. Desta forma, como S é abeliano, segue que

$$\langle x, x \rangle + \langle x_1 y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x, x \rangle.$$

Logo, para todo $x \in S$, $\langle x, x \rangle = 0_{G(S)}$.

Podemos notar ainda que, para quaisquer $x, y \in S$, $\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle$.

Com efeito, como S é abeliano,

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x + y, y + x \rangle = \langle x + y, x + y \rangle = 0_{G(S)},$$

e, portanto, para todo $x, y \in S$, $\langle y, x \rangle = -\langle x, y \rangle$.

Concluímos então, que $G(S)$ é um grupo.

Definição 1.32. $G(S)$ é o grupo de Grothendieck do semigrupo S.

Agora definiremos uma aplicação muito útil para, por exemplo, sabermos quais são realmente os elementos de $G(S)$.

Seja $y \in S$ e consideremos

$$\begin{aligned} \gamma_S : S &\to G(S) \\ x &\mapsto \langle x + y, y \rangle. \end{aligned}$$

γ_S é chamada a aplicação de Grothendieck.

Observemos que γ_S independe de y e é aditiva. Para tanto, sejam $y_1, y_2 \in S$. Então, para qualquer $z \in S$,

$$x + y_1 + y_2 + z = x + y_2 + y_1 + z.$$

Desta forma, $(x + y_1, y_1) \sim (x + y_2, y_2)$ e portanto, para quaisquer y_1, y_2 em S,

$$\langle x + y_1, y_1 \rangle = \langle x + y_2, y_2 \rangle.$$

Donde segue que γ_S independe de y.

Além disso, se $x, x' \in S$, então

$$\begin{aligned}
\gamma_S(x+x') &= \langle x+x'+y, y\rangle \\
&= \langle x+x'+y+y, y+y\rangle \\
&= \langle x+y, y\rangle + \langle x'+y, y\rangle \\
&= \gamma_S(x)+\gamma_S(x').
\end{aligned}$$

A proposição que segue nos fornece informações úteis sobre a Contrução de Grothendieck. Mas antes, lembremo-nos que se $(H,+)$ for um grupo abeliano e S um subconjunto não vazio de H fechado sob adição, então $(S,+)$ será um semigrupo com propriedade cancelativa, isto é, se $s,t,z \in S$ são tais que

$$s+t = s+z,$$

então $t = z$.

Ademais, $H_0 = \{x-y : x,y \in S\} \subset H$ é o subgrupo gerado por S.

Proposição 1.33.

(i) $G(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x,y \in S\}$.

(ii) *Propriedade Universal: Se H for um grupo abeliano e $\varphi : S \to H$ for uma aplicação aditiva, então existirá um único homomorfismo de grupos $\psi : G(S) \to H$ que comuta o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & H \\
G(S) \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}.$$

(iii) *Funtorialidade: Para cada aplicação $\varphi : S \to T$ entre semigrupos S e T existe precisamente um único homomorfismo entre grupos $G(\varphi) : G(S) \to G(T)$ que comuta o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_S"'] & T \arrow[d, "\gamma_T"] \\
G(S) \arrow[r, dashed, "G(\varphi)"'] & G(T)
\end{tikzcd}.$$

(iv) *Sejam $x,y \in S$. Então $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$ se, e somente se, $x+z = y+z$, para algum $z \in S$.*

(v) *A aplicação de Grothendieck $\gamma_S : S \to G(S)$ é injetora se, e somente se, S tem a propriedade cancelativa.*

(vi) *Sejam $(H,+)$ um grupo abeliano e S um subconjunto não vazio de H fechado sob a adição, então $G(S)$ será isomorfo ao subgrupo H_0 gerado por S.*

Demonstração. (i) Como $\operatorname{Im}\gamma_S \subset G(S)$, então

$$\{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x,y \in S\} \subset G(S).$$

Seja agora $\langle x,y\rangle \in G(S)$. Então

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \langle x+x+y, y+x+y\rangle \\
&= \langle x+y,y\rangle + \langle x,x+y\rangle \\
&= \langle x+y,y\rangle - \langle y+x,x\rangle \\
&= \gamma_S(x) - \gamma_S(y).
\end{aligned}$$

Logo $G(S) \subset \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x,y \in S\}$ e assim obtemos a igualdade desejada.

(ii) Definamos

$$\begin{aligned}
\psi : G(S) &\to H \\
\langle x,y\rangle &\mapsto \varphi(x) - \varphi(y)
\end{aligned}$$

e notemos que ψ está bem definida, pois se $\langle x,y\rangle = \langle x',y'\rangle$, então existe $t \in S$ tal que

$$x + y' + t = x' + y + t.$$

Desta forma, como φ é aditiva,

$$\varphi(x) + \varphi(y') + \varphi(t) = \varphi(x') + \varphi(y) + \varphi(t).$$

Como $\operatorname{Im}\varphi \subset H$ e H é um grupo, temos que $\varphi(t), \varphi(y), \varphi(y')$ possuem inversos aditivos e assim,

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x') - \varphi(y').$$

Mostremos agora que ψ é aditiva. Para tanto, sejam $\langle x,y\rangle, \langle x',y'\rangle$ em $G(S)$. Deste modo, como H é abeliano e φ é um homomorfismo, temos que

$$\begin{aligned}\psi(\langle x,y\rangle+\langle x',y'\rangle) &= \psi(\langle x+x',y+y'\rangle)\\ &= \varphi(x+x')-\varphi(y+y')\\ &= \varphi(x)+\varphi(x')-\varphi(y)-\varphi(y')\\ &= (\varphi(x)-\varphi(y))+(\varphi(x')+(\varphi(y'))\\ &= \psi(\langle x,y\rangle)+\psi(\langle x',y'\rangle).\end{aligned}$$

Portanto ψ é um homomorfismo de grupo. Mostremos agora a unicidade de ψ. Para tanto, suponhamos que exista um homomorfismo $\Phi : G(S) \to H$ tal que $\Phi \circ \gamma_s = \varphi$. Assim, pelo item (i), para $x, y \in S$, temos que

$$\begin{aligned}\Phi(\langle x,y\rangle) &= \Phi(\gamma_S(x)-\gamma_S(y))\\ &= \Phi(\gamma_S(x))-\Phi(\gamma_S(y))\\ &= \varphi(x)-\varphi(x)\\ &= \psi(\langle x,y\rangle).\end{aligned}$$

Concluímos então que ψ é único.

(iii) Definamos $\overline{\varphi} := \gamma_T \circ \varphi : S \to G(T)$. Então, pelo item anterior, existe um único homomorfismo $\psi : G(S) \to G(T)$ tal que $\psi \circ \gamma_S = \overline{\varphi} = \gamma_T \circ \varphi$. Se definirmos $G(\varphi) := \psi$, temos que o diagrama é comutativo e $G(\varphi)$ é o único homomorfismo que satisfaz tal condição.

(iv) Sejam $x, y \in S$ e suponhamos que $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$, isto é,

$$\langle x+y,y\rangle = \langle y+x,x\rangle.$$

Desta forma, $(x+y,y) \sim (y+x,x)$ e, portanto, existe $w \in S$ tal que

$$x+y+x+w = y+x+y+w$$

Assim, se definirmos $z := y+x+w \in S$, teremos que $x+z = y+z$.

Por outro lado, suponhamos que exista $z \in S$ tal que $x+z = y+z$. Deste modo, como γ_S é aditiva, então $\gamma_S(x)+\gamma_S(z) = \gamma_S(y)+\gamma_S(z)$ e, portanto, $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$, pois $G(S)$ é um grupo.

(v) Suponhamos que γ_S seja injetora e sejam $x, y, z \in S$ tais que

$$x+z = y+z.$$

Logo, pelo item anterior, $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$ e, portanto, $x = y$, ou seja, S tem a propriedade cancelativa.

Por outro lado, suponhamos que S tenha a propriedade cancelativa e sejam $x, y \in S$ tais que $\gamma_S(x) = \gamma_S(y)$. Assim, também pelo item anterior, existe $z \in S$ tal que

$$x + z \quad = \quad y + z.$$

Logo, $x = y$, e, portanto, γ_S é injetora.

(vi) Se $(H, +)$ for abeliano e $S \subset H$ for fechado por adição, então, como já notamos, $(S, +)$ será um semigrupo abeliano com a propriedade cancelativa e $H_0 = \{x - y : x, y \in S\}$.

Consideremos agora $\iota : S \to H_0$ a aplicação inclusão. Logo, pelo item (ii), existe um único homomorfismo $\varphi : G(S) \to H_0$ tal que $\varphi \circ \gamma_S = \iota$, pois ι é aditiva. Mostremos que φ é injetora. Para tanto, sejam $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in G(S)$ tais que

$$\varphi(\langle x, y \rangle) = \varphi(\langle x'y' \rangle).$$

Então, como φ é aditiva,

$$\varphi(\gamma_S(x)) - \varphi(\gamma_S(y)) = \varphi(\gamma_S(x')) - \varphi(\gamma_S(y')).$$

Logo $x - y = x' - y'$. Deste modo, para todo $z \in S$,

$$x + y' + z = x' + y + z,$$

ou seja, $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ e, portanto, φ é injetora.

Para vermos que φ é sobrejetor, seja $x \in H_0$. Então existem $z, t \in S$ tais que

$$x = z - t.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x &= z - t \\ &= \iota(z) - \iota(t) \\ &= (\varphi \circ \gamma_S)(z) - (\varphi \circ \gamma_S)(t) \\ &= \varphi(\gamma_S(z) - \gamma_S(t)) \end{aligned}$$

e, portanto, φ é sobrejetora. Concluímos então que φ é um isomorfismo e $G(S) \cong H_0$.

□

Definição 1.34. Seja A uma C^*-álgebra unital e seja $(\mathscr{D}(A),+)$ o semigrupo da Definição 1.31. Definimos $K_0(A)$ como sendo o grupo de Grothendieck de $\mathscr{D}(A)$, ou seja,

$$K_0(A) = G(\mathscr{D}(A)).$$

Definimos $[\cdot]_0 : \mathscr{P}_\infty(A) \to K_0(A)$ por

$$[p]_0 = \gamma_S([p]_{\mathscr{D}}), \quad p \in \mathscr{P}_\infty(A).$$

em que $\gamma_S : \mathscr{D}(A) \to K_0(A)$ é a aplicação de Grothendieck de $S = \mathscr{D}(A)$.

Observamos que nossa definição de $K_0(A)$ independe do fato que A é unital. Porém, mais tarde veremos porque esta construção não possui um bom comportamento se A não é unital (ver observação 1.70).

Definamos a seguinte relação de equivalência em $\mathscr{P}_\infty(A)$: se p,q em $\mathscr{P}_\infty(A)$, então $p \sim_s q$ se existir $r \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tal que

$$p \oplus r \sim_0 q \oplus r.$$

Mostremos que $\sim_s$ é uma relação de equivalência:

(i) Reflexiva: segue do fato que $\sim_0$ é uma relação de equivalência.

(ii) Simétrica: sejam $p,q \in \mathscr{P}_\infty(A)$ e suponhamos que $p \sim_s q$. Logo existe $r \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tal que

$$p \oplus r \sim_0 q \oplus r.$$

Mas, como $\sim_0$ é uma relação de equivalência,

$$q \oplus r \sim_0 p \oplus r$$

e portanto $q \sim_s p$.

(iii) Transitiva: sejam $p,q,r \in \mathscr{P}_\infty(A)$ e suponhamos que $p \sim_s q$ e $q \sim_s r$. Logo, existem $u,v \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tais que

$$p \oplus u \sim_0 q \oplus u \quad e \quad q \oplus v \sim_0 r \oplus v.$$

Desta forma, como $u \oplus v \in \mathscr{P}_\infty(A)$,

$$\begin{aligned} p \oplus (u \oplus v) &= (p \oplus u) \oplus v \sim_0 (q \oplus u) \oplus v \sim_0 (u \oplus q) \oplus v \\ &= u \oplus (q \oplus v) \sim_0 u \oplus (r \oplus v) \\ &= (u \oplus r) \oplus v \sim_0 (r \oplus u) \oplus v \\ &= r \oplus (u \oplus v), \end{aligned}$$

o que finaliza esta prova.

Chamamos $\sim_s$ de equivalência estável.

Lema 1.35. *Sejam A uma C^*-álgebra unital e $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$. Então $p \sim_s q$ se, e somente se, $p \oplus 1_n \sim_0 q \oplus 1_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, em que 1_n denota a unidade em $M_n(A)$.*

Demonstração. Com efeito, como $1_n \in \mathscr{P}_\infty(A)$, se $p \oplus 1_n \sim_0 q \oplus 1_n$, então $p \sim_s q$. Por outro lado, suponhamos que exista $r \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tal que

$$p \oplus r \sim_0 q \oplus r.$$

Desta forma, como $r(1_n - r) = 0$ e $r + (1_n - r) = 1_n$, pela proposição 1.30. temos que

$$p \oplus 1_n \sim_0 p \oplus r \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus r \oplus (1_n - r) \sim_0 q \oplus 1_n$$

e, portanto $p \sim_s q$. □

A caracterização de K_0, descrita nas duas proposições abaixo, é uma concreta e útil descrição do grupo K_0 de uma C^*-álgebra unital.

Proposição 1.36. *Seja A uma C^*-álgebra unital. Então*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)\} = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathscr{P}_n(A), n \in \mathbb{N}\}.$$

Além disso,

(i) $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$*, para quaisquer $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$;*

(ii) $[0_A]_0 = 0$*, em que 0_A é a projeção nula em A;*

(iii) Se $p, q \in \mathscr{P}_n(A)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $p \sim_h q$, então $[p]_0 = [q]_0$;

(iv) Se $p, q \in \mathscr{P}_n(A)$ são projeções mutuamente ortogonais, então

$$[p + q]_0 = [p]_0 + [q]_0;$$

(v) Para quaisquer $p,q \in \mathscr{P}_\infty(A)$, $[p]_0 = [q]_0$ se, e somente se, $p \sim_s q$.

Demonstração. Notemos que, pela proposição 1.33,

$$\begin{aligned} K_0(A) = G(\mathscr{D}(A)) &= \{\gamma([p]_\mathscr{D}) - \gamma([q]_\mathscr{D}) : [p]_\mathscr{D}, [q]_\mathscr{D} \in \mathscr{D}(A)\} \\ &= \{[p]_0 - [q]_0 : p,q \in \mathscr{P}_\infty(A)\}. \end{aligned}$$

Mostremos agora que $K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p,q \in \mathscr{P}_n(A), n \in \mathbb{N}\}$. Para tanto, seja $g \in K_0(A)$. Então existem $k,l \in \mathbb{N}$, $p \in \mathscr{P}_k(A)$ e $q \in \mathscr{P}_l(A)$ tais que

$$g = [p']_0 - [q']_0.$$

Seja $n = \max\{k,l\}$ e definamos

$$p = p' \oplus 0_{n-k} \quad \text{e} \quad q = q' \oplus 0_{n-l}.$$

Então, pela proposição 1.30, $p \sim_0 p'$ e $q \sim_0 q'$. Logo, $[p]_\mathscr{D} = [p']_\mathscr{D}$ e $[q]_\mathscr{D} = [q']_\mathscr{D}$ e, consequentemente, $[p]_0 = [p']_0$ e $[q]_0 = [q']_0$. Assim, temos que p,q pertencem a $\mathscr{P}_n(A)$ e $g = [p]_0 - [q]_0$.

Como claramente $\{[p]_0 - [q]_0 : p,q \in \mathscr{P}_n(A), n \in \mathbb{N}\} \subset K_0(A)$, obtemos a igualdade desejada.

(i) Sejam $p,q \in \mathscr{P}_\infty(A)$. Então,

$$\begin{aligned} [p \oplus q]_0 &= \gamma([p \oplus q]_\mathscr{D}) = \gamma([p]_\mathscr{D} + [q]_\mathscr{D}) \\ &= \gamma([p]_\mathscr{D}) + \gamma([q]_\mathscr{D}) \\ &= [p]_0 + [q]_0. \end{aligned}$$

(ii) Como $0_A \oplus 0_A \sim_0 0_A$, temos que

$$\begin{aligned} & [0_A \oplus 0_A]_0 = [0_A]_0 \\ \Rightarrow\ & [0_A]_0 + [0_A]_0 = [0_A]_0 \\ \Rightarrow\ & [0_A]_0 = 0. \end{aligned}$$

(iii) Se $p \sim_h q$, então $p \sim q$, pela proposição 1.28. Desta forma, temos que

$$[p]_\mathscr{D} = [q]_\mathscr{D}$$

e, portanto $\gamma([p]_\mathscr{D}) = \gamma([q]_\mathscr{D})$, ou seja,

$$[p]_0 = [q]_0.$$

(iv) Suponhamos que $pq = 0$. Então, $p+q \sim_0 p \oplus q$, ou seja,

$$[p+q]_0 = [p \oplus q]_0$$

e, portanto, $[p+q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.

(v) Sejam $p,q \in \mathscr{P}_\infty(A)$ e suponhamos que $[p]_0 = [q]_0$. Logo,

$$\gamma([p]_{\mathscr{D}}) = \gamma([q]_{\mathscr{D}})$$

e, portanto, pela proposição 1.33, existe $r \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tal que

$$[p]_{\mathscr{D}} + [r]_{\mathscr{D}} = [q]_{\mathscr{D}} + [r]_{\mathscr{D}}.$$

Desta forma, $[p \oplus r]_{\mathscr{D}} = [q \oplus r]_{\mathscr{D}}$ e assim, $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$, donde $p \sim_s q$.

Por outro lado, se $p \sim_s q$, então existe $r \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tal que $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$. Logo, $[p \oplus r]_{\mathscr{D}} = [q \oplus r]_{\mathscr{D}}$ e, portanto, $[p \oplus r]_0 = [q \oplus r]_0$, ou seja,

$$[p]_0 + [r]_0 = [q]_0 + [r]_0.$$

Como $K_0(A)$ é um grupo, temos que $[p]_0 = [q]_0$, o que finaliza esta demonstração.

$\square$

Proposição 1.37 (Propriedade Universal do K_0). *Sejam A uma C^*-álgebra unital, G um grupo abeliano e suponhamos que $\nu : \mathscr{P}_\infty(A) \to G$ satisfaça:*

(i) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$, *para quaisquer* $p,q \in \mathscr{P}_\infty(A)$*;*

(ii) $\nu(0_A) = 0$*;*

(iii) se $p,q \in \mathscr{P}_n(A)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $p \sim_h q$ em $\mathscr{P}_n(A)$, então

$$\nu(p) = \nu(q).$$

Então existe um único homomorfismo entre grupos $\alpha : K_0(A) \to G$ tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\
K_0(A) \arrow[r, dashed, "\alpha"] & G.
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $\beta : \mathscr{D}(A) \to G$ dada por $[p]_{\mathscr{D}} \mapsto \nu(p)$ e mostremos que β está bem definida. Para tanto, sejam $p', q' \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tais que $p' \sim_0 q'$. Suponhamos que $p' \in \mathscr{P}_k(A)$ e $q' \in \mathscr{P}_l(A)$ e seja $n = \max\{k, l\}$. Assim, se considerarmos $p = p' \oplus 0_{n-k}$ e $q = q' \oplus 0_{n-l}$, teremos que $p, q \in \mathscr{P}_n(A)$ e

$$p \sim_0 p' \sim_0 q' \sim_0 q,$$

ou seja, p $\sim q$. Logo, pela proposição 1.29,

$$p \oplus 0_{3n} \sim_h q \oplus 0_{3n}$$

em $\mathscr{P}_{4n}(A)$. Desta forma,

$$\nu(p) = \nu(p) + \underbrace{\nu(0) + \cdots + \nu(0)}_{3n} = \nu(p \oplus 0_{3n}) = \nu(q \oplus 0_{3n}) = \nu(q).$$

Assim, como

$$\nu(p) = \nu(p') + \underbrace{\nu(0) + \cdots + \nu(0)}_{n-k} = \nu(p')$$

e

$$\nu(q) = \nu(q') + \underbrace{\nu(0) + \cdots + \nu(0)}_{n-l},$$

temos que $\nu(p') = \nu(q')$ e, portanto β está bem definida.

Notemos agora que β é aditiva, pois se $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$, então

$$\begin{aligned}
\beta([p]_{\mathscr{D}} + [q]_{\mathscr{D}}) &= \beta([p \oplus q]_{\mathscr{D}}) \\
&= \nu(p \oplus q) \\
&= \nu(p) + \nu(q) \\
&= \beta([p]_{\mathscr{D}}) + \beta([p]_{\mathscr{D}}).
\end{aligned}$$

Logo, pelo item (ii) da proposição 1.33, existe um único homomorfismo $\alpha : K_0(A) \to G$ de forma que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(A) \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
K_0(A) \arrow[r, dashed, "\alpha"] & G.
\end{tikzcd}$$

Notemos agora que, se $p \in \mathscr{P}_\infty(A)$, então

$$\alpha([p]_0) = \alpha(\gamma([p]_{\mathscr{D}})) = \beta([p]_{\mathscr{D}}) = \nu(p)$$

e, portanto, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_0(A) \arrow[r, dashed, "\alpha"] & G, \end{tikzcd}$$

é comutativo. Só nos resta mostrar que α é o único homomorfismo que comuta este diagrama. Suponhamos então que exista $\psi : K_0(A) \to G$ tal que $\psi \circ [\cdot]_0 = \nu$.

Seja $z \in K_0(A)$. Então, pela proposição 1.36, existem $n \in \mathbb{N}$, p, q em $\mathscr{P}_n(A)$ tais que $z = [p]_0 - [q]_0$ e, assim,

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \psi([p]_0 - [q]_0) \\ &= \psi([p]_0) - \psi([q]_0) \\ &= \nu(p) - \nu(q) \\ &= \alpha([p]_0) - \alpha([q]_0) \\ &= \alpha([p]_0 - [q]_0) \\ &= \alpha(z). \end{aligned}$$

Como $z \in K_0(A)$ é arbitrário, concluímos que $\psi = \alpha$, o que finaliza esta demonstração.

□

1.4 O FUNTOR K_0 PARA C^*-ÁLGEBRAS UNITAIS

Na seção anterior, associamos a cada C^*-álgebra unital A um grupo comutativo $K_0(A)$. O leitor pode se perguntar se podemos fazer o mesmo com os $*$-homomorfismos, ou seja, se a cada homomorfismo $\varphi : A \to B$ entre C^*-álgebras unitais A e B podemos associar um homomorfismo de grupos entre $K_0(A)$ e $K_0(B)$.

Observamos que, na situação acima, se $p \in \mathscr{P}_n(A)$, então

$$\varphi(p)^2 = \varphi(p^2) = \varphi(p) \quad \text{e} \quad \varphi(p)^* = \varphi(p^*) = \varphi(p)$$

e, portanto, φ leva $\mathscr{P}_\infty(A)$ em $\mathscr{P}_\infty(B)$ (observemos que esta φ é φ_n quando aplicada em $p \in \mathscr{P}_n(A)$). Definamos

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathscr{P}_\infty(A) & \to & K_0(B) \\ p & \mapsto & [\varphi(p)]_0 \end{array}$$

e notemos que se $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$, então $\varphi(p \oplus q) = \varphi(p) \oplus \varphi(q)$. Assim,

(i) $\nu(p \oplus q) = [\varphi(p \oplus q)]_0 = [\varphi(p)]_0 + [\varphi(q)]_0 = \nu(p) + \nu(q)$;

(ii) $\nu(0_A) = [\varphi(0_A)]_0 = [0_B]_0 = 0$;

(iii) se $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$ são tais que $p, q \in \mathscr{P}_n(A)$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $p \sim_h q$, então $p \sim q$ e, portanto, existe uma matriz w, cujas entradas são elementos de A, de modo que

$$w^* w = p \quad e \quad w w^* = q.$$

Desta forma, $\varphi(w) := [\varphi(w_{ij})]_{ij}$, supondo $w = [w_{ij}]_{ij}$, é uma matriz com entradas em B,

$$\varphi(p) = \varphi(w^* w) = \varphi(w^*)\varphi(w) = (\varphi(w))^* \varphi(w)$$

e

$$\varphi(q) = \varphi(w w^*) = \varphi(w)\varphi(w^*) = \varphi(w)(\varphi(w))^*.$$

Portanto $\varphi(p) \sim \varphi(q)$, donde $[\varphi(p)]_0 = [\varphi(q)]_0$ e $\nu(p) = \nu(q)$.

Logo ν satisfaz as condições da proposição 1.37, e portanto existe um único homomorfismo $\alpha : K_0(A) \to K_0(B)$ que comuta o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_\infty(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] & \mathscr{P}_\infty(B) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"] \\ K_0(A) \arrow[r, "\alpha"'] & K_0(B). \end{tikzcd}$$

Se definirmos $K_0(\varphi) := \alpha$, teremos a associação desejada.

Definição 1.38. Uma categoria $\mathfrak{C}$ consiste de:

(i) uma coleção de objetos $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$;

(ii) para cada par de objetos A e B, um conjunto $\mathrm{Hom}(A, B)$ de morfismos de A em B, denotados por $f : A \to B$, equipados com

  (a) para cada objeto A, um morfismo $\mathrm{id}_A : A \to A$;

(b) para cada par de morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$, um morfismo $gf : A \to C$, chamado composição de f e g, tais que

  i. para qualquer morfismo $f : A \to B$, $\mathrm{id}_B f = f = f\,\mathrm{id}_A$;

  ii. para qualquer tripla de morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, a associatividade é válida: $h(gf) = h(gf)$.

Exemplo 1.39. ***C*-alg*** *: A classe de objetos* $\mathrm{Ob}($***C*-alg***$)$ *é a classe de todas as* C^**-álgebras e* $\mathrm{Hom}(A,B) = \{\varphi : A \to B : \varphi$ *é um *- homomorfismo*$\}$*, com a operação de composição usual.*

Exemplo 1.40. ***Ab*** *: Os objetos em* ***Ab*** *são grupos abelianos e os morfismos são os homomorfismos entre grupos abelianos, com a operação de composição usual.*

Definição 1.41. Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias. Um funtor covariante $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ consiste de:

(i) uma aplicação $F : \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})$;

(ii) para qualquer par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, uma aplicação

$$F : \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B));$$

tais que

(a) para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$;

(b) para qualquer par de morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ em $\mathfrak{C}$, $F(gf) = F(g)F(f)$.

Se A e B forem C^*-álgebras, denotaremos por $0_{B,A}$ o homomorfismo nulo entra A e B e a função identidade em A por id_A.

Proposição 1.42 (Funtorialidade de K_0 em C^*-álgebras unitais)**.**

(i) Se A for uma C^*-álgebra unital, então $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$;

(ii) se A, B e C são C^*-álgebras unitais e se $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ são $*$-homomorfismos, então $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$;

(iii) $K_0(\{0\}) = \{0\}$;

(iv) para todo par de C^*-álgebras A e B, $K_0(0_{B,A}) = 0_{K_0(B),K_0(A)}$.

Demonstração. (i) Seja $p \in \mathscr{P}_\infty(A)$ e notemos que

$$K_0(\mathrm{id}_A)([p]_0) = [\mathrm{id}_A(p)]_0 = [p]_0.$$

Se $z \in K_0(A)$, então existem $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tais que $z = [p]_0 - [q]_0$. Desta forma, como $K_0(\mathrm{id}_A)$ é um homomorfismo de grupos, temos que

$$\begin{aligned} K_0(\mathrm{id}_A)(z) &= K_0(\mathrm{id}_A)([p]_0 - [q]_0) \\ &= K_0(\mathrm{id}_A)([p]_0) - K_0(\mathrm{id}_A)([q]_0) \\ &= [p]_0 - [q]_0 = \mathrm{id}_{K_0(A)}([p]_0 - [q]_0) \\ &= \mathrm{id}_{K_0(A)}(z). \end{aligned}$$

Como $z \in K_0(A)$ é arbitrário, concluímos que $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$.

(ii) Seja $z = [p]_0 - [q]_0 \in K_0(A)$, em que $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} K_0(\psi \circ \varphi)(z) &= K_0(\psi \circ \varphi)([p]_0 - [q]_0) \\ &= K_0(\psi \circ \varphi)([p]_0) - K_0(\psi \circ \varphi)([q]_0) \\ &= [\psi(\varphi(p))]_0 - [\psi(\varphi(q))]_0 \\ &= K_0(\psi)[(\varphi(p))]_0 - K_0(\psi)[(\varphi(q))]_0 \\ &= (K_0(\psi) \circ K_0(\varphi))[(p]_0) - (K_0(\psi) \circ K_0(\varphi))([q]_0) \\ &= (K_0(\psi) \circ K_0(\varphi))([p]_0 - [q]_0) \\ &= (K_0(\psi) \circ K_0(\varphi))(z). \end{aligned}$$

Como $z \in K_0(A)$ é qualquer, temos que

$$K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi).$$

(iii) Seja $z \in K_0(\{0\})$. Então existem $p, q \in \mathscr{P}_\infty(\{0\})$ tais que $z = [p]_0 - [q]_0$. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $p = 0_n$ e $q = 0_m$ e portanto $[p]_0 = [q]_0 = 0$, donde $z = 0$. Deste modo, temos que $K_0(\{0\}) = \{0\}$.

(iv) Observemos que $0_{B,A} = 0_{B,0} \circ 0_{0,A} \colon A \xrightarrow{0_{0,A}} 0 \xrightarrow{0_{B,0}} B$ e que,

$$K_0(0_{0,A}) : K_0(A) \to K_0(\{0\}) \quad \text{e} \quad K_0(0_{B,0}) : K_0(\{0\}) \to K_0(B).$$

Como $K_0(\{0\}) = \{0\}$ e $K_0(0_{0,A})$ e $K_0(0_{B,0})$ são homomorfismo de grupos, temos que

$$K_0(0_{0,A}) = 0_{K_0(\{0\}),K_0(A)} \quad \text{e} \quad K_0(0_{B,0}) = 0_{K_0(B),K_0(\{0\})}.$$

Logo, por (ii),

$$\begin{aligned} K_0(0_{B,A}) &= K_0(0_{B,0}) \circ K_0(0_{0,A}) \\ &= 0_{K_0(B),K_0(\{0\})} \circ 0_{K_0(\{0\}),K_0(A))} \\ &= 0_{K_0(B)} \circ 0_{K_0(A)} = 0_{K_0(B),K_0(A)}. \end{aligned}$$

□

Logo, pelos itens (i) e (ii) da proposição anterior, temos que K_0 é um funtor entre a categoria das C^*-álgebras unitais e a categoria dos grupos abelianos.

Definição 1.43 (Equivalência Homotópica)**.** Sejam A e B C^*-álgebras. Dois $*$-homomorfismos $\varphi : A \to B$ e $\psi : A \to B$ são ditos homotópicos, $\varphi \sim_h \psi$, se existe um caminho de $*$-homomorfismos $\varphi_t : A \to B$, em que $t \in [0,1]$, tal que

$$\begin{aligned} [0,1] &\to B \\ t &\mapsto \varphi_t(a) \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua para cada $a \in A$, $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = \psi$. Dizemos que o caminho $t \mapsto \varphi_t$ é pontualmente contínuo.

Se existirem $*$-homomorfismos $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to A$ tais que

$$\varphi \circ \psi \sim_h \mathrm{id}_B \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A,$$

diremos que A e B são homotopicamente equivalentes. Neste caso, dizemos que

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$$

é uma homotopia entre A e B.

Proposição 1.44. *Sejam A e B C^*-álgebras unitais.*

(i) *Se $\varphi, \psi : A \to B$ são $*$-homomorfismos homotópicos, então*

$$K_0(\varphi) = K_0(\psi).$$

(ii) *Se A e B são homotopicamente equivalentes, então $K_0(A)$ é isomorfo ao $K_0(B)$. Mais especificamente, se*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$$

é uma homotopia, então

$$K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B) \quad e \quad K_0(\psi) : K_0(B) \to K_0(A)$$

são isomorfismos e $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$.

Demonstração. (i) Seja $\varphi_t : A \to B$ um caminho pontualmente contínuo de $*$-homomorfismos tal que $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = \psi$. Estenda φ_t para o $*$-homomorfismo $\varphi_t : M_n(A) \to M_n(B)$, $n \in \mathbb{N}$.

Para todo $[a_{ij}] \in M_n(A)$, temos que[4]

$$\max_{i,j}\{\|a_{ij}\|\} \leq \|[a_{ij}]\| \leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|.$$

Assim, com a desigualdade acima, é fácil ver que, dado $p \in \mathscr{P}_n(A)$, o caminho $[0,1] \ni t \mapsto \varphi_t(p) \in \mathscr{P}_n(A)$ é contínuo. Desta forma, para todo $p \in \mathscr{P}_\infty(A)$,

$$\varphi(p) = \varphi_0(p) \sim_h \varphi_1(p) = \psi(p).$$

Assim, temos que, para todo $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$,

$$\begin{aligned} K_0(\varphi)([p]_0 - [q]_0) &= K_0(\varphi)([p]_0) - K_0(\varphi)([q]_0) \\ &= [\varphi(p)]_0 - [\varphi(q)]_0 \\ &= [\psi(p)]_0 - [\psi(q)]_0 \\ &= K_0(\psi)([p]_0) - K_0(\psi)([q]_0) \\ &= K_0(\psi)([p]_0 - [q]_0). \end{aligned}$$

Como $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$ são quaisquer, pela caracterização do grupo de Grothendieck, concluímos que $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Suponhamos que A e B sejam homotopicamente equivalentes. Logo existem $*$-homomorfismos $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to A$ tais que $\varphi \circ \psi \sim_h \mathrm{id}_B$ e $\psi \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A$. Portanto, pelo item anterior,

$$K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(\mathrm{id}_B) \quad \text{e} \quad K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\mathrm{id}_A).$$

Desta forma, como K_0 é um funtor, segue que

$$K_0(\varphi) \circ K_0(\psi) = \mathrm{id}_{K_0(B)} \quad \text{e} \quad K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = \mathrm{id}_{K_0(A)},$$

donde $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$. Logo,

$$K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B) \quad \text{e} \quad K_0(\psi) : K_0(B) \to K_0(A)$$

são isomorfismo de grupos e $K_0(A) \cong K_0(B)$.

[4] ver (Rørdam; Larsen; Laustsen, 2000), página 9.

□

Definição 1.45. Sejam A e B duas C^*-álgebras. Dizemos que dois $*$-homomorfismos $\varphi, \psi : A \to B$ são ortogonais ou mutuamente ortogonais se, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\varphi(x)\psi(y) = 0.$$

Notação: $\varphi \perp \psi$.

Observação 1.46. Observemos que se $\varphi \perp \psi$, então $\varphi_n \perp \psi_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.47. *Se A e B forem C^*-álgebras unitais e $\varphi, \psi : A \to B$ $*$-homomorfismos ortogonais entre si, então $\varphi + \psi : A \to B$ será um $*$-homomorfismo e*

$$K_0(\varphi + \psi) = K_0(\varphi) + K_0(\psi).$$

Demonstração. Sejam $a, b \in A$. Então,

$$(\varphi + \psi)(ab) = \varphi(ab) + \psi(ab).$$

Por outro lado, como φ e ψ são mutuamente ortogonais,

$$\begin{array}{rcl} [(\varphi+\psi)(a)][(\varphi+\psi)(b)] & = & (\varphi(a)+\psi(a))(\varphi(b)+\psi(b)) \\ & = & \varphi(a)\varphi(b)+\varphi(a)\psi(b) \\ & + & \psi(a)\varphi(b)+\psi(a)\psi(b) \\ & = & \varphi(a)\varphi(b)+\psi(a)\psi(b) \\ & = & \varphi(ab)+\psi(ab). \end{array}$$

Como vemos facilmente que $\varphi + \psi$ é aditiva e

$$(\varphi + \psi)(a^*) = ((\varphi + \psi)(a))^*,$$

para todo $a \in A$, concluímos que $\varphi + \psi$ é um $*$-homomorfismo. Notemos agora que se $p \in \mathscr{P}_\infty(A)$, então $\varphi(p), \psi(p) \in \mathscr{P}_\infty(B)$. Assim, como φ e ψ são mutualmente ortogonais, teremos que $\varphi(p)\psi(p) = 0$ e, portanto, pela proposição 1.30, $\varphi(p) \oplus \psi(p) \sim_0 \varphi(p) + \psi(p)$.

Seja agora $z \in K_0(A)$. Então existem $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tais que

$$z = [p]_0 - [q]_0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
K_0(\varphi+\psi)(z) &= K_0(\varphi+\psi)([p]_0-[q]_0)\\
&= K_0(\varphi+\psi)([p]_0)-K_0(\varphi+\psi)([q]_0)\\
&= [\varphi(p)+\psi(p)]_0-[\varphi(q)+\psi(q)]_0\\
&= [\varphi(p)\oplus\psi(p)]_0-[\varphi(q)\oplus\psi(q)]_0\\
&= [\varphi(p)]_0+[\psi(p)]_0-[\varphi(q)]_0-[\psi(q)]_0\\
&= K_0(\varphi)([p]_0-[q]_0)+K_0(\psi)([p]_0-[q]_0)\\
&= (K_0(\varphi)+K_0(\psi))([p]_0-[q]_0)\\
&= (K_0(\varphi)+K_0(\psi))(z).
\end{aligned}$$

Como $z\in K_0(A)$ é arbitrário, a igualdade desejada segue. □

Com a definição e o resultado que seguem, poderemos definir o grupo K_0 de uma C^*-álgebra qualquer.

Definição 1.48. Uma sequência de C^*-álgebras e $*$-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

é chamada exata se $\mathrm{Im}(\varphi_n)=\mathrm{Nuc}(\varphi_{n+1})$, para todo n. Uma sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

é dita ser exata curta.

Ademais, se existe um homomorfismo $\theta : C\to B$ tal que $\psi\circ\theta=\mathrm{id}_C$, dizemos que a sequência possui cisão (à direita).

Para demonstrarmos o lema 1.49, precisaremos do lema 1.24.

Lema 1.49. *Para cada C^*-álgebra unital A, a sequência exata com cisão*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "\iota"] & \widetilde{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

em que $\pi(a+\alpha 1_{\widetilde{A}})=\alpha$ e $\lambda(\alpha)=\alpha 1_{\widetilde{A}}$, obtida adicionando uma unidade a A, induz a sequência exata com cisão

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, hook, "K_0(\iota)"] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, shift left, "K_0(\pi)"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[l, shift left, "K_0(\lambda)"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Demonstração. Inicialmente, definamos os $*$-homomorfismos

$$\begin{aligned} \mu : \widetilde{A} &\to A \\ a+\alpha f &\mapsto a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda' : \mathbb{C} &\to \widetilde{A} \\ \alpha &\mapsto \alpha f \end{aligned}$$

e notemos que os $*$-homomorfismos $\iota \circ \mu$ e $\lambda' \circ \pi$ são ortogonais entre si, uma vez que se $a+\alpha f, b+\beta f \in \widetilde{A}$, então

$$(\iota \circ \mu(a+\alpha f))(\lambda' \circ \pi(b+\beta f)) = a(\beta f) = 0.$$

Além disso,

$$\mathrm{id}_{\widetilde{A}} = \iota \circ \mu + \lambda' \circ \pi. \tag{1.1}$$

Mostremos agora que aquela sequência é exata.

(i) $K_0(\iota)$ é injetor.

Com efeito, notemos que $\mu \circ \iota = \mathrm{id}_A$ e, como A é unital e K_0 um funtor, segue que $K_0(\mu) \circ K_0(\iota) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$. Como $\mathrm{id}_{K_0(A)}$ é injetor, concluímos que $K_0(\iota)$ também o é.

(ii) $\mathrm{Nuc}(K_0(\pi)) = \mathrm{Im}(K_0(\iota))$.

Temos que

$$K_0(\pi) \circ K_0(\iota) = K_0(\pi \circ \iota) = K_0(0_{\mathbb{C},A}) = 0_{K_0(\mathbb{C}),K_0(A)},$$

e, assim, $\mathrm{Im}\, K_0(\iota) \subseteq \mathrm{Nuc}\, K_0(\pi)$. Por outro lado, pela equação 1.1, pelo lema 1.47 e pela funtorialidade de K_0, temos que

$$\mathrm{id}_{K_0(\widetilde{A})} = K_0(\iota) \circ K_0(\mu) + K_0(\lambda') \circ K_0(\pi).$$

Portanto, se $g \in \mathrm{Nuc}(K_0(\pi))$,

$$\mathrm{id}_{K_0(\widetilde{A})}(g) = K_0(\iota)((K_0(\mu))(g)),$$

donde, $g = K_0(\iota)((K_0(\mu))(g)) \in \mathrm{Im}(K_0(\iota))$. Logo,

$$\mathrm{Nuc}\, K_0(\pi) = \mathrm{Im}\, K_0(\iota).$$

(iii) $K_0(\pi)$ é sobrejetor e $K_0(\lambda)$ é cisão.

Notemos que como $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} = \pi \circ \lambda$ e K_0 é um funtor, então

$$\mathrm{id}_{K_0(\mathbb{C})} = K_0(\pi) \circ K_0(\lambda).$$

Assim, $K_0(\pi)$ é sobrejetor e $K_0(\lambda)$ é cisão. Portanto a sequência

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, hook, "K_0(\iota)"] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, shift left, "K_0(\pi)"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[l, shift left, "K_0(\lambda)"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

é exata com cisão.

□

Exemplo 1.50. *O grupo $K_0(M_n(\mathbb{C}))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$. Então[5], como os autovalores de p pertencem a $\{0,1\}$ e $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Nuc}(p)$, existe uma matriz M inversível tal que

$$p = M^{-1}QM,$$

em que $Q = I_k \oplus 0_{n-k}$ e $k = \dim(\mathrm{Im}(p))$. Seja τ o traço padrão em $M_n(\mathbb{C})$. Como $\tau(Q) = k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\tau(p) = \tau(M^{-1}QM) = \tau(M^{-1}MQ) = \tau(Q) \in \mathbb{N}.$$

Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathscr{P}_\infty(M_n(\mathbb{C})) & \to & \mathbb{Z} \\ p & \mapsto & \tau(p) \end{array}$$

e notemos que

(i) para quaisquer $p, q \in \mathscr{P}_\infty(M_n(\mathbb{C}))$, $\tau(p \oplus q) = \tau(p) + \tau(q)$;

(ii) $\tau(0_n) = 0$;

(iii) sejam $k \in \mathbb{N}$ e $p, q \in \mathscr{P}_k(M_n(\mathbb{C}))$ são tais que $p \sim_h q$, então $p \sim_0 q$ e, portanto, existe uma matriz v tal que

$$p = v^*v \text{ e } q = vv^*.$$

[5]Lembre que nesse caso, $\mathrm{Im}(p)$ é o autoespaço associado ao autovalor 1 e $\mathrm{Nuc}(p)$ é o autoespaço asscioado ao autovalor 0.

Desta forma,

$$\tau(p) = \tau(v^*v) = \tau(vv^*) = \tau(q)$$

e, portanto, α satisfaz as condições da proposição 1.37. Logo, existe um único homomorfismo $\alpha : K_0(M_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{Z}$ tal que $\alpha([p]_0) = \tau(p)$, para todo $p \in \mathscr{P}_\infty(M_n(\mathbb{C}))$.

Mostremos agora que α é uma bijeção. Seja $g \in K_0(M_n(\mathbb{C}))$ e suponhamos que $g = [p]_0 - [q]_0 \in \operatorname{Nuc}\alpha$. Então[6], $\dim(\operatorname{Im}(p)) = \dim(\operatorname{Im}(q))$, ou seja, $p \sim_0 q$, e assim $g = 0$. Logo α é injetor.

Por outro lado, $\operatorname{Im}(\alpha)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$ que contém 1, uma vez que $1 = \alpha([e]_0)$, em que e é uma projeção unidimensional em $M_n(\mathbb{C})$. Desta forma, $\operatorname{Im}(\alpha) = \mathbb{Z}$.

Concluímos então que $K_0(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Observação 1.51. O exemplo 1.50 acima nos diz que, em particular,

$$K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}.$$

Observação 1.52. Como $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, pelo isomorfismo do exemplo anterior, temos que, para $n \in \mathbb{N}$, $K_0(M_n(\mathbb{C})) = \langle [e]_0 \rangle$, em que e é uma projeção de dimensão um em $M_n(\mathbb{C})$.

Para o próximo exemplo, precisaremos do seguinte resultado.

Lema 1.53. *Sejam H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e $p, q \in B(H)$. Então $p \sim q$ se, e somente se,* $\dim(\operatorname{Im}(p)) = \dim(\operatorname{Im}(q))$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $p \sim q$. Então existe $v \in B(H)$ tal que

$$p = v^*v \quad \text{e} \quad q = vv^*$$

e, pelo lema 1.23,

$$v = qv = vp.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : \operatorname{Im}(p) &\to \operatorname{Im}(q) \\ p(x) &\mapsto v(x) \end{aligned}$$

e notemos que φ está bem definida pois, se $p(x_1) = p(x_2)$, então

$$v(p(x_1)) = v(p(x_2)) \Rightarrow v(x_1) = v(x_2).$$

[6]Aqui usamos o seguinte fato: se $p, q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$, então $\tau(p) = \tau(q)$ se, e somente se, $\dim(\operatorname{Im}(p)) = \dim(\operatorname{Im}(q))$, ver (Rørdam; Larsen; Laustsen, 2000), página 32.

Como facilmente mostramos que φ é linear, só nos resta mostrar que φ é um bijeção. Para tanto, consideremos

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : \mathrm{Im}(q) &\to \mathrm{Im}(p) \\ q(y) &\mapsto v^*(y). \end{aligned}$$

De maneira análoga, mostramos que $\overline{\varphi}$ é linear e está bem definida. Ademais, para todo $h \in H$,

$$\varphi(\overline{\varphi}(q(h)) = \varphi(v^*(h)) = \varphi(p(v^*(h)) = v(v^*(h)) = q(h)$$

e

$$\overline{\varphi}(\varphi(p(h))) = \overline{\varphi}(v(h)) = \overline{\varphi}(q(v(h)) = v^*(v(h)) = p(h)$$

e, portanto, $\overline{\varphi} \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(p)}$ e $\varphi \circ \overline{\varphi} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(q)}$, uma vez que $h \in H$ é arbitrário. Logo φ é um isomorfismo e, consequentemente, $\mathrm{Im}(p) \cong \mathrm{Im}(q)$.

Por outro lado, suponhamos que exista $v_0 : \mathrm{Im}(p) \to \mathrm{Im}(q)$ isomorfismo. Logo, como H é um espaço de Hilbert, existe $u_0 : \mathrm{Im}(p) \to \mathrm{Im}(q)$ isomorfismo unitário.

Notemos agora que, $H = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Nuc}(p)$, pois p é uma projeção. Definamos

$$\begin{aligned} v : H &\to H, \quad \text{em que} \quad h = h_1 + h_2 \in \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Nuc}(p). \\ h &\mapsto u_0(h_1) \end{aligned}$$

Ademais, como $u_0 \in B(H)$, temos que $v \in B(H)$.

Consideremos agora $w : H \to H$ dada por $w(h) = u_0^{-1}(h_1)$, em que $h = h_1 + h_2 \in \mathrm{Im}(q) \oplus \mathrm{Nuc}(q)$ e mostremos que $w = v^*$. Sejam $x, y \in H$. Então existem $x_1 \in \mathrm{Im}(p), y_1 \in \mathrm{Im}(q), x_2 \in \mathrm{Nuc}(p)$ e $y_2 \in \mathrm{Nuc}(q)$ tais que

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad y = y_1 + y_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle v(x), y \rangle &= \langle v(x_1 + x_2), y \rangle \\ &= \langle u_0(x_1), y \rangle \\ &= \langle x_1, u_0^{-1}(y) \rangle \\ &= \langle x_1, u_0^{-1}(y_1 + y_2) \\ &= \langle x_1, u_0^{-1}(y_1) \rangle. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle x, w(y)\rangle &= \langle x, w(y_1+y_2)\rangle \\
&= \langle x, u_0^{-1}(y_1)\rangle \\
&= \langle u_0(x), y_1\rangle \\
&= \langle u_0(x_1+x_2), y_1\rangle \\
&= \langle u_0(x_1), y_1\rangle \\
&= \langle x_1, u_0^{-1}(y_1)\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, $w = v^*$. Mostremos agora que $p = v^*v$. Seja $h \in H$. Então existem $h_1 \in \mathrm{Im}(p)$ e $h_2 \in \mathrm{Nuc}(p)$ tais que $h = h_1 + h_2$ e

$$\begin{aligned}
v^*v(h) &= v^*v(h_1+h_2) \\
&= v^*(u_0(h_1)) \\
&= u_0^{-1}u_0(h_1) \\
&= h_1 = h_1 + 0 \\
&= p(h_1+h_2) \\
&= p(h).
\end{aligned}$$

Como $h \in H$ é arbitrário, concluímos que $p = v^*v$. Analogamente, mostramos que $q = vv^*$ e, portanto, $p \sim q$. $\square$

Exemplo 1.54. *Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Então $K_0(B(H)) = \{0\}$.*

Demonstração. Lembremos do teorema 1.3 que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n(B(H)) = B(H^n).$$

Definamos

$$\begin{aligned}
\dim : \mathscr{P}_\infty(B(H)) &\rightarrow \{0, 1, \ldots, \infty\} \\
p &\mapsto \dim(\mathrm{Im}(p)),
\end{aligned}$$

em que $p \in \mathscr{P}_n(B(H)) = \mathscr{P}(B(H^n))$, e notemos que dim é sobrejetiva. Desta forma, se considerarmos

$$\begin{aligned}
d : \mathscr{D}(B(H)) &\rightarrow \{0, 1, \ldots, \infty\} \\
[p]_{\mathscr{D}} &\mapsto \dim(\mathrm{Im}(p)),
\end{aligned}$$

teremos que d será aditiva, pois $\dim(p \oplus q) = dim(p) + dim(q)$, para todo

$p,q \in B(H))$ e, além disso, pelo lema 1.53, acrescentando zeros sempre que necessário à projeção de menor tamanho, poderemos mostrar que d estará bem definida e será injetora. Como dim acima definida é sobrejetora, temos que d também o é e, consequentemente, d é um isomorfismo de semigrupos e, portanto, $K_0(B(H)) \cong G(\{0,1,\ldots,\infty\})$.

Notemos agora que $G(\{0,1,\ldots,\infty\}) = \{0\}$, pois se $n,m \in \{0,1,\ldots,\infty\}$, então $n \sim m$, já que $n+\infty = m+\infty$.

Concluímos então que $K_0(B(H)) = \{0\}$. $\square$

Definição 1.55. Um espaço compacto Hausdorff X é chamado contrativo se, para algum $x_0 \in X$, existe uma aplicação contínua $\alpha : [0,1]\times X \to X$, tal que, para todo $x \in X$,

$$\alpha(1,x) = x \quad \text{e} \quad \alpha(0,x) = x_0.$$

Exemplo 1.56. *Seja X um espaço compacto Hausdorff contrativo, então $K_0(C(X)) = \mathbb{Z}$, em que $C(X) = C(X,\mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ é contínua}\}$.*

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, notemos que $M_n(C(X)) \cong C(X,M_n(\mathbb{C}))$. Logo, se $p \in M_n(C(X))$ e $x \in X$, então podemos considerar $p(x) \in M_n(\mathbb{C})$ e, portanto $\tau(p(x)) \in \mathbb{Z}$, em que τ é o traço padrão de $M_n(\mathbb{C})$.

Notemos que a função

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \tau(p(x)) \end{array}$$

é constante e contínua, pois X é contrativo e, consequentemente, conexo e $\mathbb{Z}$ é discreto. Logo, $\tau(p(x))$ independe da escolha de $x \in X$ e, consequentemente, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathscr{P}_\infty(C(X)) & \to & \mathbb{Z} \\ p & \mapsto & \tau(p(x)). \end{array}$$

Observemos que

(i) para quaisquer $p,q \in \mathscr{P}_\infty(C(X))$ e para todo $x \in X$,

$$\varphi(p\oplus q) = \tau(p(x)\oplus q(x)) = \tau(p(x)) + \tau(q(x)) = \varphi(p) + \varphi(q);$$

(ii) $\varphi(0_n) = \tau(0_n(x)) = 0$;

(iii) sejam $m \in \mathbb{N}$ e $p,q \in \mathscr{P}_m(C(X))$ tais que $p \sim_h q$, então $p(x) \sim_h q(x)$ e, como X é contrativo, portanto conexo, concluímos que

$$\dim(\mathrm{Im}(p(x))) = \dim(\mathrm{Im}(q(x))).$$

Como p e q são projeções, temos que $p(x)$ e $q(x)$ também o são e, assim

$$\tau(p(x)) = \dim(\mathrm{Im}(p(x))) = \dim(\mathrm{Im}(q(x))) = \tau(q(x)),$$

ou seja, $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Logo φ satisfaz as condições da proposição 1.37 e, portanto, existe um único homomorfismo $\beta : K_0(C(X)) \to \mathbb{Z}$ tal que $\beta([p]_0) = \varphi(p) = \tau(p(x))$. Denotando por 1 a função constante igual a 1 em X, temos que $\tau(1(x)) = 1$ e, portanto $1 \in \mathrm{Im}(\varphi)$, ou seja, β é sobrejetora.

Observemos agora que, como X é contrativo, existem $x_0 \in X$ e uma função contínua $\alpha : [0,1] \times X \to X$ tais que, para todo $x \in X$,

$$\alpha(1,x) = x \quad \text{e} \quad \alpha(0,x) = x_0$$

e definamos, para cada $t \in [0,1]$, $\varphi_t : C(X) \to C(X)$ por

$$\varphi_t(f)(x) = f(\alpha(t,x)).$$

Desta forma, φ_t é um $*$-homomorfismo e $t \mapsto \varphi_t(f)$ é um caminho contínuo para todo $f \in C(X)$.

Com efeito, sejam $f \in C(X)$, $t_0 \in [0,1]$ e $\varepsilon > 0$. Como $f \circ \alpha$ é contínua, todo $x \in X$ possui uma vizinhança aberta U_x e existe $\delta_x > 0$, tais que

$$|f(\alpha(t,y)) - f(\alpha(t_0,x))| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $y \in U_x$ e $t \in (t_0 - \delta_x, t_0 + \delta_x) \cap [0,1]$. Nessas condições, temos que

$$\begin{aligned} |f(\alpha(t,y)) - f(\alpha(t_0,y))| &\leq |f(\alpha(t,y)) - f(\alpha(t_0,x))| \\ &+ |f(\alpha(t_0,x)) - f(\alpha(t_0,y))| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Como X é compacto e $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, temos que existem $x_1, \cdots, x_k \in X$ tais que $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$. Se definirmos $\delta := \min_{1 \leq i \leq k} \{\delta_{x_i}\} > 0$, teremos que, para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1]$,

$$\|\varphi_t(f) - \varphi_{t_0}(f)\| = \sup_{x \in X} |f(\alpha(t,x)) - f(\alpha(t_0,x))| \leq \varepsilon,$$

ou seja, $t \mapsto \varphi_t(f)$ é contínuo.

Assim, para qualquer $f \in C(X)$ e $x \in X$,

$$\varphi_0(f)(x) = f(\alpha(0,x)) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \varphi_1(f)(x) = f(\alpha(1,x)) = f(x),$$

ou seja, $\varphi_1 = \mathrm{id}_{C(X)}$ e, portanto, $\varphi_0 \sim_h \mathrm{id}_{C(X)}$.

Consideremos agora

$$\begin{array}{rcl} \phi : C(X) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x_0) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{C} & \to & C(X) \\ \lambda & \mapsto & \lambda \cdot 1 \end{array}$$

e notemos que $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ e $\psi \circ \phi = \phi_0 \sim_h \mathrm{id}_{C(X)}$. Logo

$$C(X) \xrightarrow{\phi} \mathbb{C} \xrightarrow{\psi} C(X)$$

é uma homotopia e, portanto, pela proposição 1.44, $K_0(\phi)$ e $K_0(\psi)$ são isomorfismos. Logo, como o diagrama

$$\begin{tikzcd} K_0(C(X)) \arrow[d, "K_0(\phi)"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ K_0(\mathbb{C}) \arrow[r, "\alpha"'] & \mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

em que $\alpha : K_0(\mathbb{C}) \to \mathbb{Z}$ é o homomorfismo do exemplo 1.50, é comutativo e $K_0(\phi)$ e α são isomorfismos, concluímos que β também o é, ou seja,

$$K_0(C(X)) \cong \mathbb{Z}.$$

□

Para o exemplo a seguir, mostremos o seguinte resultado.

Lema 1.57. *Sejam A uma C^*-álgebra unital e $s \in A$ uma isometria, isto é, $s^*s = 1$. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \mu : A & \to & A \\ a & \mapsto & sas^* \end{array}$$

é um endomorfismo em A e $K_0(\mu) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$.

Demonstração. Como facilmente vemos que μ é um $*$-homomorfismo, mostraremos apenas que $K_0(\mu) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$.

Notemos inicialmente que, para $n \in \mathbb{N}$, e $a = [a_{ij}] \in M_n(A)$,

$$\begin{array}{rcl} \mu(a) & = & [\mu(a_{ij})] \\ & = & [sa_{ij}s^*] \\ & = & \mathrm{diag}(s, \ldots, s)a\,\mathrm{diag}(s^*, \ldots, s^*). \end{array}$$

Desta forma, pondo $s_n = \mathrm{diag}(s, \ldots, s)$, temos que $\mu(a) = s_n a s_n^*$.

Observemos agora que, se $n \in \mathbb{N}$ e $p \in M_n(A)$ é uma projeção, então $s_n p s_n^*$ também o é. Pondo $v = s_n p$, temos que,

$$v^*v = p \quad \text{e} \quad vv^* = s_n p s_n^*.$$

e, portanto, $p \sim_0 s_n p s_n^*$, ou seja, $[p]_{\mathscr{D}} = [s_n p s_n^*]_{\mathscr{D}} = [\mu(p)]_{\mathscr{D}}$. Logo, para todo $p \in \mathscr{P}_\infty(A)$,

$$K_0(\mu)([p]_0) = [\mu(p)]_0 = \gamma([\mu(p)]_{\mathscr{D}}) = \gamma([p]_{\mathscr{D}}) = [p]_0.$$

Seja $g \in K_0(A)$. Então existem $n \in \mathbb{N}$ e $p, q \in \mathscr{P}_n(A)$ tais que $g = [p]_0 - [q]_0$ e, assim,

$$\begin{array}{rcl} K_0(\mu)(g) & = & K_0(\mu)([p]_0 - [q]_0) \\ & = & K_0(\mu)([p]_0) - K_0(\mu)([q]_0) \\ & = & [p]_0 - [q]_0 = g \\ & = & \mathrm{id}_{K_0(A)}(g). \end{array}$$

Como $g \in K_0(A)$ é arbitrário, concluímos que $K_0(\mu) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$.

□

Definição 1.58. Definimos, para $n \in \mathbb{N}$, a álgebra de Cuntz $\mathscr{O}_n = C^*(s_1, \ldots, s_n)$ como sendo a C^*-subálgebra de $B(H)$ gerada por $s_1, \ldots, s_n$, que satisfazem

$$s_i^* s_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1.$$

É possível mostrar que $\mathscr{O}_n$ possui a seguinte propriedade: se A é uma C^*-álgebra tal que existem $t_1, \ldots, t_n \in A$ de modo que

$$t_1^* t_1 = \cdots = t_n^* t_n = 1 = \sum_{i=1}^{n} t_i t_i^*,$$

então existe um único $*$-homomorfismo $\varphi : \mathscr{O}_n \to A$ tal que $\varphi(s_i) = t_i$.

Exemplo 1.59. $K_0(\mathscr{O}_2) = \{0\}$.

Demonstração. Seja $u \in \mathscr{O}_2$ unitário. Então, para todo $i \leq 2$,

$$(us_j)^*(us_j) = s_j^* u^* u s_j = s_j^* s_j = 1$$

e

$$\begin{aligned} us_1(us_1)^* + us_2(us_2)^* &= us_1 s_1^* u^* + us_2 s_2^* u^* \\ &= u(s_1 s_1^* + s_2 s_2^*)u^* \\ &= uu^* = 1. \end{aligned}$$

Logo, pela observação 1.58, existe $\varphi_u : \mathscr{O}_2 \to \mathscr{O}_2$ tal que $\varphi_u(s_j) = us_j$, para todo $j \in \{1, 2\}$

Definamos, para $1 \leq i \leq 2$,

$$\begin{aligned} \lambda_i : \mathscr{O}_2 &\to \mathscr{O}_2 \\ x &\mapsto s_i x s_i^* \end{aligned}$$

e notemos que λ_i é um $*$-homomorfismo e, além disso, para quaisquer x, y em $\mathscr{O}_2$,

$$\begin{aligned} \lambda_1(x)\lambda_2(y) &= s_1 x s_1^* s_2 y s_2^* \\ &= s_1 x 0 x s_2^* \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo λ_1 e λ_2 são mutuamente ortogonais e, consequentemente, pelo lema 1.47, $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$ é um $*$-homomorfismo e $K_0(\lambda) = K_0(\lambda_1) + K_0(\lambda_2)$.

Como s_1 e s_2 são isometrias, pela observação 1.58, concluímos que $K_0(\lambda_1) = K_0(\lambda_2) = \mathrm{id}_{K_0(\mathscr{O}_2)}$ e, consequentemente, $K_0(\lambda) = 2\,\mathrm{id}_{K_0(\mathscr{O}_2)}$.

Consideremos agora $w = \sum_{1\leq,i,j\leq 2} s_i s_j s_i^* s_j^*$ e mostremos que w é unitário. Com efeito,

$$\begin{aligned}
ww^* &= \Big(\sum_{1\leq,i,j\leq 2} s_i s_j s_i^* s_j^*\Big)\Big(\sum_{1\leq,i,j\leq 2} s_j s_i s_j^* s_i^*\Big)\\
&= (s_1s_1s_1^*s_1^* + s_1s_2s_1^*s_2^* + s_2s_1s_2^*s_1^* + s_2s_2s_2^*s_2^*)\cdot\\
&\quad \cdot(s_2s_2s_2^*s_2^* + s_1s_2s_1^*s_2^* + s_2s_1s_2^*s_1^* + s_1s_1s_1^*s_1^*)\\
&= s_1s_1s_1^*s_1^* + s_1s_2s_2^*s_1^* + s_2s_1s_1^*s_2^* + s_2s_2s_2s_2\\
&= s_1\Big(\sum_{i=1}^{2} s_is_i^*\Big)s_1^* + s_2\Big(\sum_{i=1}^{2} s_is_i^*\Big)s_2^*\\
&= s_1s_1^* + s_2s_2^*\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $w^*w = 1$ e, de fato, w é unitário. Além disso, pelo cálculo acima, notamos que $w = w^*$ e, portanto, $\sigma(w)_{\mathscr{O}_2} = \{-1,1\} \neq \mathbb{T}$, pois $w^2 - 1 = 0$. Assim, pelo lema 1.12, $w \in \mathscr{U}_0(\mathscr{O}_2)$, ou seja, $w \sim_h 1$ em $\mathscr{U}(\mathscr{O}_2)$. Portanto, existe $v : [0,1] \to \mathscr{U}(\mathscr{O}_2)$ contínuo tal que $v(0) = w$ e $v(1) = 1$.

Afirmação : $\lambda = \varphi_w$.

Com efeito, para $k \in \{1,2\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi_w(s_k) &= ws_k\\
&= \Big(\sum_{1\leq,i,j\leq 2} s_is_js_i^*s_j^*\Big)s_k\\
&= s_1s_ks_1^* + s_2s_ks_2^*\\
&= \sum_{i=1}^{2} s_is_ks_i^*\\
&= \lambda(s_k).
\end{aligned}$$

Logo $\varphi_w = \lambda$, pois s_1 e s_2 geram $\mathscr{O}_2$. □

Finalmente, definamos

$$\begin{aligned}
z : [0,1] &\to \mathrm{End}(\mathscr{O}_2)\\
t &\mapsto z_t,
\end{aligned}$$

em que $\mathrm{End}(\mathscr{O}_2)$ é o conjunto de endomorfismo em $\mathscr{O}_2$ e

$$\begin{array}{rcl} z_t : \mathscr{O}_2 & \to & \mathscr{O}_2 \\ s_i & \mapsto & v(t)s_i. \end{array}$$

Notemos que z é um caminho pontualmente contínuo, pois v é pontualmente contínuo e, além disso, para $i \in \{1,2\}$,

$$z_0(s_i) = v(0)s_i = ws_i = \varphi_w(s_i) = \lambda(s_i)$$

e

$$z_1(s_i) = v(1)s_i = s_i = \mathrm{id}_{\mathscr{O}_2}(s_i).$$

Logo $\lambda \sim_h \mathrm{id}_{\mathscr{O}_2}$ e, consequentemente,

$$\mathscr{O}_2 \xrightarrow{\lambda} \mathscr{O}_2 \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{O}_2}} \mathscr{O}_2$$

é uma homotopia e, portanto, pela proposição 1.44, $K_0(\lambda) = \mathrm{id}_{K_0(\mathscr{O}_2)}$.

Logo, para todo $g \in K_0(\mathscr{O}_2)$,

$$K_0(\lambda)(g) = 2\,\mathrm{id}_{K_0(\mathscr{O}_2)}(g) = 2g$$

e

$$K_0(\lambda)(g) = \mathrm{id}_{K_0(\mathscr{O}_2)}(g) = g,$$

ou seja, $g = 0$. Como $g \in K_0(\mathscr{O}_2)$ é arbitrário, concluímos que $K_0(\mathscr{O}_2) \subset \{0\}$ e, portanto, $K_0(\mathscr{O}_2) = \{0\}$.

1.5 O GRUPO K_0 EM C^*-ÁLGEBRAS NÃO UNITAIS

Agora que já sabemos a definição do K_0 de uma C^*-álgebra unital A, podemos ir ao passo seguinte: o K_0 de uma C^*-álgebra qualquer.

Necessitamos inicialmente do caso unital, pois no caso qualquer utilizaremos algumas propriedade do K_0 naquele caso.

Definição 1.60. Seja A uma C^*-álgebra não unital e consideremos a sequência exata com cisão

$$0 \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} \widetilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0\ ,$$

em que $\lambda(\alpha) = \alpha 1_{\widetilde{A}}$ e $\pi(a + \beta 1_{\widetilde{A}}) = \beta$. Definimos $K_0(A)$ como sendo o núcleo do homomorfismo

$$K_0(\pi): K_0(\widetilde{A}) \to K_0(\mathbb{C}).$$

Observação 1.61. Notemos que $K_0(A)$ é um grupo abeliano, uma vez que $K_0(A)$ é um subgrupo de $K_0(\widetilde{A})$ e este é abeliano.

O leitor pode se perguntar porquê definir o K_0 de uma C^*-álgebra qualquer como acima, já que o K_{00} definido na seção anterior é um funtor e $K_{00}(A)$ é um grupo abeliano, mesmo quando A não é unital. A motivação de tal definição é que, assim definido, K_0 possui algumas propriedades interessantes. Por exemplo, K_0 preserva sequências exatas com cisão.

Queremos obter agora uma função que nos lembra da aplicação de Grothendieck. Seja então $p \in \mathscr{P}_\infty(A)$. Desta forma $[p]_0 \in K_0(\widetilde{A})$ e portanto

$$K_0(\pi)([p]_0) = [\pi(p)]_0 = 0.$$

Logo, $[p]_0 \in \operatorname{Nuc} K_0(\pi) = K_0(A)$. Assim, obtemos a função

$$\begin{array}{rcl} [\cdot]_0 : \mathscr{P}_\infty(A) & \to & K_0(A). \\ p & \mapsto & [p]_0 \end{array}$$

Por outro lado, já sabemos pelo lema 1.49 que para cada C^*-álgebra unital A, a sequência

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, hook, "K_0(\iota)"] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, shift left, "K_0(\pi)"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[l, shift left, "K_0(\lambda)"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

é exata. Logo, $K_0(A)$ é isomorfo à sua imagem em $K_0(\widetilde{A})$ sob $K_0(\iota)$. Portanto, como

$$\operatorname{Nuc}(K_0(\pi)) = \operatorname{Im}(K_0(\iota)) \cong K_0(A),$$

se A é uma C^*-álgebra (unital ou não), temos que esta definição é compatível com a dada na seção 1.3 no caso unital.

1.6 O FUNTOR K_0

Analogamente ao caso de C^*-álgebras unitais, mostraremos neste tópico que K_0 é um funtor entre a categoria das C^*-álgebras e a dos grupos abelianos.

A priori, o que queremos é associar um homomorfismo de grupos a cada $*$-homomorfismo de C^*-álgebras. Sejam então A e B C^*-álgebras e um

$*$-homomorfismo $\varphi : A \to B$. Consideremos $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ a sua unitização, isto é, para quaisquer $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\widetilde{\varphi}(a+\alpha 1_{\widetilde{A}}) = \varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}}.$$

Observemos que se C é C^*-álgebra e $\psi : B \to C$ é um $*$-homomorfismo, então, para todo $a+\alpha 1_{\widetilde{A}} \in \widetilde{A}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}(a+\alpha 1_{\widetilde{A}}) &= \widetilde{\psi}(\varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}}) \\
&= \psi(\varphi(a)) + \alpha 1_{\widetilde{C}} \\
&= \widetilde{\psi \circ \varphi}(a+\alpha 1_{\widetilde{A}}).
\end{aligned}$$

Além disso, para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{id}_A}(a) &= \mathrm{id}(a) + \alpha 1_{\widetilde{A}} \\
&= a + \alpha 1_{\widetilde{A}} \\
&= \mathrm{id}_{\widetilde{A}}(a+\alpha 1_{\widetilde{A}}),
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{\ }$ é um funtor covariante na categoria das C^*-álgebras. Momentaneamente, utilizemos a notação K_{00} para K_0 definido nas seções 1.3 e 1.4.

Agora, mostremos que o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "id_{\mathbb{C}}"] \\
B \arrow[r, "\iota_B"'] & \widetilde{B} \arrow[r, "\pi_B"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

induz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, hook, "\iota_{K_0(A)}"] \arrow[d, dashed, "K_0(\varphi)"'] & K_{00}(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_{00}(\pi_A)"] \arrow[d, "K_{00}(\widetilde{\varphi})"] & K_{00}(\mathbb{C}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{K_0(\mathbb{C})}"] \\
K_0(B) \arrow[r, hook, "\iota_{K_0(B)}"'] & K_{00}(\widetilde{B}) \arrow[r, "K_{00}(\pi_B)"'] & K_{00}(\mathbb{C}),
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

em que $K_{00}(\widetilde{\varphi}), K_{00}(\pi_A)$ e $K_{00}(\pi_B)$ foram definidos no caso unital.

Definamos $K_0(\varphi) := K_{00}(\widetilde{\varphi})_{|_{K_0(A)}}$ e notemos que para todo

$[p]_0 \in K_0(A)$,

$$\begin{aligned} K_0(\pi_B)(K_0(\varphi)([p]_0)) &= K_0(\pi_B)[\widetilde{\varphi}(p)]_0 \\ &= [\pi_B(\widetilde{\varphi}(p))]_0 \\ &= [\pi_A(p)]_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}(K_0(\varphi)) \subset K_0(B)$ e, além disso, $K_0(\varphi)$ é um homomorfismo, uma vez que é restrição de $K_{00}(\widetilde{\varphi})$ e este é um morfismo de grupos. Segue do caso unital que (1.4) é comutativo.

Na definição de $K_0(\varphi)$ acima não exigimos nada sobre as C^*-álgebras A e B, e a pergunta que podemos fazer agora é: se A e B são C^*-álgebras unitais e $\varphi : A \to B$ é um $*$-homomorfismo, existe uma relação entre $K_{00}(\varphi)$ (este homomorfismo é o $K_0(\varphi)$ definido na seção 1.4) e o $K_0(\varphi)$ que acabamos de definir? Mais ainda, podemos nos perguntar se $K_{00}(\varphi)$ e $K_0(\varphi)$ são os mesmos homomorfismos, através dos isomorfismos $K_{00}(A) \cong K_0(A)$ e $K_{00}(B) \cong K_0(B)$. Para respondermos a esta questão, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} K_{00}(A) \arrow[r, "K_{00}(\varphi)"] \arrow[d, "K_{00}(\iota_A)"'] & K_{00}(B) \arrow[d, "K_{00}(\iota_B)"] \\ K_0(A) \arrow[r, "K_0(\varphi)"'] & K_0(B), \end{tikzcd}$$

em que $\iota_A : A \to \widetilde{A}$ e $\iota_B : B \to \widetilde{B}$ denotam as inclusões canônicas e $K_{00}(\iota_A)$ e $K_{00}(\iota_B)$ são as correstrições, que estão bem definidas pelos argumentos depois da observação 1.61. Se mostrarmos que o diagrama acima é comutativo, então a resposta para nossa pergunta acima é sim. Seja g em $K_{00}(A)$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e $p, q \in \mathscr{P}_n(A)$ tais que $g = [p]_0 - [q]_0$. Assim,

$$\begin{aligned} K_{00}(\iota_B) \circ K_{00}(\varphi)(g) &= K_{00}(\iota_B) \circ K_{00}(\varphi)([p]_0 - [q]_0) \\ &= K_{00}(\iota_B)([\varphi(p)]_0 - [\varphi(q)]_0) \\ &= [\varphi(p)]_0 - [\varphi(q)]_0 \\ &= [\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [\widetilde{\varphi}(q)]_0 \\ &= [\widetilde{\varphi}(\iota_A(p))]_0 - [\widetilde{\varphi}(\iota_A(q))]_0 \\ &= K_{00}(\widetilde{\varphi})([\iota_A(p)]_0 - [\iota_A(q)]_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= K_{00}(\widetilde{\varphi}) \circ K_{00}(\iota_A)([p]_0 - [q]_0)\\
&= K_{00}(\widetilde{\varphi}) \circ K_{00}(\iota_A)(g)\\
&= K_0(\varphi) \circ K_{00}(\iota_A)(g)
\end{aligned}
$$

e, portanto, como $g \in K_{00}(A)$ é arbitrário, concluímos que o diagrama acima é comutativo. Assim, temos que $K_{00}(\varphi) = K_0(\varphi)$ (a menos de isomorfismo) quando A e B são unitais.

Agora que conseguimos a nossa associação desejada, mostremos a seguir que K_0 é um funtor entre a categoria das C^*-álgebras e os grupos abelianos.

Proposição 1.62 (Funtorialidade de K_0)**.**

(i) $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$, *para toda C^*-álgebra A;*

(ii) *Se A, B e C são C^*-álgebras e se $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ são $*$-homomorfismos, então $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$;*

(iii) $K_0(\{0\}) = \{0\}$*;*

(iv) $K_0(0_{B,A}) = 0_{K_0(B),K_0(A)}$, *para todo par de C^*-álgebras A e B.*

Demonstração. (i) Seja $g \in K_0(A)$. Então, como $\widetilde{\ }$ é um funtor, temos que

$$
\begin{aligned}
K_0(\mathrm{id}_A)(g) &= K_0(\mathrm{id}_{\widetilde{A}})(g)\\
&= K_{00}(\mathrm{id}_{\widetilde{A}})(g)\\
&= \mathrm{id}_{K_{00}(\widetilde{A})}(g)\\
&= \mathrm{id}_{K_0(A)}(g),
\end{aligned}
$$

pois $\widetilde{A}$ é unital. Como $g \in K_0(A)$ é arbitrário, segue a igualdade.

(ii) Se $g \in K_0(A)$, então, utilizando o fato que $\widetilde{\ }$ é funtor, temos que

$$
\begin{aligned}
(K_0(\psi) \circ K_0(\varphi))(g) &= (K_{00}(\widetilde{\psi}) \circ K_{00}(\widetilde{\varphi}))(g)\\
&= K_{00}(\widetilde{\psi \circ \varphi})(g)\\
&= K_0(\psi \circ \varphi)(g),
\end{aligned}
$$

donde segue a igualdade, uma vez que $g \in K_0(A)$ é arbitrário.

(iii) $\{0\}$ é uma C^*-álgebra unital. Logo $K_0(\{0\}) \cong K_{00}(\{0\}) = \{0\}$.

(iv) Demonstração análoga a do item (iv) da proposição 1.42.

$\square$

Usando a proposição 1.44 podemos demonstrar a seguinte proposição, que nos será muito útil no exemplo que a segue.

Proposição 1.63 (Invariância homotópica do K_0)**.** *Sejam A e B C^*-álgebras.*

(i) Se $\varphi, \psi : A \to B$ são $*$-homomorfismos homotópicos, então

$$K_0(\varphi) = K_0(\psi);$$

(ii) Se A e B são C^*-álgebras homotopicamente equivalentes, então $K_0(A)$ é isomorfo a $K_0(B)$. Mais precisamente, se

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$$

for uma homotopia, então

$$K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B) \quad e \quad K_0(\psi) : K_0(A) \to K_0(B)$$

são isomorfismos e $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$.

Demonstração. (i) Como $\varphi, \psi : A \to B$ são $*$-homomorfismos homotópicos, temos que existe um caminho de $*$-homomorfismos $\varphi_t : A \to B$, com $t \in [0,1]$, tal que $t \mapsto \varphi_t(a)$ é contínuo para todo $a \in A$ e $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = \psi$.

Afirmação: $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$ são $*$-homomorfismos homotópicos.

Notemos inicialmente que $\widetilde{\varphi}_t : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$, uma vez que $\varphi_t : A \to B$. Além disso, como $t \mapsto \varphi_t(a)$ é contínua para todo $a \in A$, temos que $t \mapsto \widetilde{\varphi}_t(a + \alpha 1_{\widetilde{A}})$ também o é, já que

$$\widetilde{\varphi}_t(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \varphi_t(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}}.$$

Por outro lado, se $a + \alpha 1_{\widetilde{A}} \in \widetilde{A}$, então

$$\widetilde{\varphi}_0(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \varphi_0(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}} = \varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}} = \widetilde{\varphi}(a + \alpha 1_{\widetilde{A}})$$

e

$$\widetilde{\varphi}_1(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \varphi_1(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}} = \psi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}} = \widetilde{\psi}(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}).$$

e portanto $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ são $*$-homomorfismos homotópicos. Logo, como $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ são unitais, pela proposição 1.44, temos que $K_0(\widetilde{\varphi}) = K_0(\widetilde{\psi})$.

Ademais, como $K_0(\varphi) = K_0(\widetilde{\varphi}) \mid_{K_0(A)}$ e $K_0(\psi) = K_0(\widetilde{\psi}) \mid_{K_0(A)}$, concluímos que $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Como A e B são C^*-álgebras homotópicas, temos que existem $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to A$ $*$-homomorfismos tais que $\varphi \circ \psi \sim_h \mathrm{id}_B$ e $\psi \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A$.

Pelo item anterior,

$$K_0(\varphi) \circ K_0(\psi) = K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{K_0(B)}.$$

e

$$K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)},$$

isto é, $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$.

$\square$

Exemplo 1.64. *O cone, CA de uma C^*-álgebra A é definido da seguinte forma:*

$$CA = \{f \in C([0,1],A) : f(0) = 0\}.$$

Com as operações pontuais e a norma do sup*, CA é uma C^*- álgebra. Afirmamos que $K_0(CA) = \{0\}$.*

Mostremos agora que o cone CA é homotopicamente equivalente a C^*-álgebra $\{0\}$.

Com efeito, consideremos $\varphi_t : CA \to CA$ dada por

$$\varphi_t(f)(s) = f(st), \quad \text{com} \quad s,t \in [0,1].$$

Notemos que $t \mapsto \varphi_t(f)$ é contínua para toda $f \in CA$.

De fato, sejam $f \in CA$ e $\varepsilon > 0$. Como f é contínua e $[0,1]$ compacto, existe $\delta > 0$, tal que $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$, sempre que $|t - s| < \delta$. Assim, se $|t - s| < \delta$, para todo $x \in [0,1]$, temos que, $|tx - sx| < \delta$ e, portanto,

$$\|\varphi_t(f) - \varphi_s(f)\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(tx) - f(sx)| < \varepsilon,$$

ou seja, $t \mapsto \varphi_t(f)$ é contínuo para toda $f \in CA$. Além disso, $\varphi_0 = 0$ e $\varphi_1 = \mathrm{id}_{CA}$. Logo,

$$CA \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} CA$$

é uma homotopia, uma vez que $0 \circ 0 = \mathrm{id}_{\{0\}}$ e $0 \circ 0 = 0 \sim_h \mathrm{id}_{CA}$. Assim, CA e $\{0\}$ são homotopicamente equivalentes e, consequentemente, pelas proposições 1.63 e 1.62, temos que $K_0(CA) \cong K_0(\{0\}) = \{0\}$.

1.7 CARACTERIZAÇÃO DO GRUPO $K_0(A)$

Quando definimos o grupo $K_0(A)$ de uma C^*-álgebra unital, o fizemos via construção de Grothendieck e portanto, através da aplicação de Grothendieck, sabíamos qual era a imagem dos elementos deste grupo.

No tópico anterior definimos o $K_0(A)$ de uma C^*-álgebra A qualquer e neste estudaremos um pouco sobre a caracterização do $K_0(A)$, ou seja, poderemos dar uma imagem aos elementos deste.

Para tanto, consideremos a sequência exata

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "\iota"] & \widetilde{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e definamos a aplicação $s := \lambda \circ \pi : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$.

Notemos que:

(i) $\pi \circ s = \pi$;

Com efeito, como $\pi \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$,

$$\pi \circ s = \pi \circ \lambda \circ \pi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \circ \pi = \pi.$$

(ii) $x - s(x) \in A$, para todo $x = a + \alpha 1_{\widetilde{A}}$;

De fato,

$$x - s(x) = a + \alpha 1_{\widetilde{A}} - \alpha 1_{\widetilde{A}} = a \in A.$$

Seja $s_n : M_n(\widetilde{A}) \to M_n(\widetilde{A})$ o $*$-homomorfismo induzido por s. Assim, identificando $\alpha 1_{\widetilde{A}} \in \widetilde{A}$ com $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que $\mathrm{Im}(s_n) = M_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\widetilde{A})$.

Quando não houver motivos dúbios, escreveremos apenas s.

Observação 1.65. Se $x \in \widetilde{A}$ (ou $x \in M_n(\widetilde{A})$) e $x = s(x)$, inspirados pela identificação $\alpha 1_{\widetilde{A}} \mapsto \alpha$, dizemos que x é um elemento escalar.

Sejam agora A e B C^*-álgebras e $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo. Notemos que s comuta com a unitização de φ, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{A} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{A} \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ \widetilde{B} \arrow[r, "s"'] & \widetilde{B} \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Com efeito, seja $a+\alpha 1_{\widetilde{A}} \in \widetilde{A}$. Deste modo,

$$(\widetilde{\varphi}\circ s)(a+\alpha 1_{\widetilde{A}}) = \widetilde{\varphi}(\alpha 1_{\widetilde{A}}) = \alpha 1_{\widetilde{B}}$$

e

$$(s\circ\widetilde{\varphi})(a+\alpha 1_{\widetilde{A}}) = s(\varphi(a)+\alpha 1_{\widetilde{B}}) = \alpha 1_{\widetilde{B}}.$$

Agora, com a propriedade acima da aplicação s, podemos demonstrar a proposição abaixo, que nos dá uma imagem mais palpável do grupo $K_0(A)$, para A uma C^*-álgebra qualquer.

Proposição 1.66 (Caracterização do grupo K_0)**.** *Para toda C^*álgebra A, temos que*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})\}.$$

Além disso,

(i) Para quaisquer $p,q \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$ as seguintes condições são equivalentes:

(a) $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$;

(b) existem $k,l \in \mathbb{N}$ tais que $p\oplus 1_k \sim_0 q\oplus 1_l$ em $\mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$;

(c) existem projeções escalares r_1 e r_2 tais que $p\oplus r_1 \sim_0 q\oplus r_2$.

(ii) Se $p \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$ satisfaz $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p\oplus 1_m \sim s(p)\oplus 1_m$;

(iii) Se $\varphi : A \to B$ é um $*$-homomorfismo, então

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\widetilde{\varphi}(p))]_0$$

para todo $p \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})\}.$$

Para tanto, seja $p \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$. Então,

$$\begin{aligned} K_0(\pi)([p]_0 - [s(p)]_0) &= K_0(\pi)([p]_0) - K_0(\pi)([s(p)]_0) \\ &= [\pi(p)]_0 - [\pi(s(p))]_0 \\ &= [\pi(p)]_0 - [\pi(p)]_0 = 0. \end{aligned}$$

Logo $[p]_0 - [s(p)]_0 \in \operatorname{Nuc} K_0(\pi) = K_0(A)$.

Por outro lado, seja $g \in K_0(A)$. Desta forma, existem $n \in \mathbb{N}$ e projeções $e, f \in \mathscr{P}_n(\widetilde{A})$ tais que $g = [e]_0 - [f]_0$. Consideremos agora

$$p = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 1_n - f \end{bmatrix} \quad e \quad q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{bmatrix}.$$

Assim $p, q \in \mathscr{P}_{2n}(\widetilde{A})$ e, como, pela proposição 1.37(iv),

$$[1_n]_0 = [1_n - f + f]_0 = [1_n - f]_0 + [f]_0,$$

temos que

$$\begin{aligned} [p]_0 - [q]_0 &= [e \oplus (1_n - f)]_0 - [1_n]_0 \\ &= [e]_0 + [1_n - f]_0 - [1_n]_0 \\ &= [e]_0 - [f]_0 \\ &= g. \end{aligned}$$

Como $s(1 \cdot 1_{\widetilde{A}}) = 1_{\widetilde{A}}$ e $s(0) = 0$, temos que $s(q) = q$. Desta maneira, como $K_0(\pi)(g) = 0$,

$$\begin{aligned} [s(p)]_0 - [q]_0 &= [s(p)]_0 - [s(q)]_0 \\ &= K_0(s)([p]_0 - [q]_0) \\ &= K_0(\lambda \circ \pi)(g) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $[s(p)]_0 = [q]_0$ e portanto $g = [p]_0 - [s(p)]_0$, donde segue a igualdade desejada.

(i) $(a) \Rightarrow (c)$: Sejam $p, q \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$ e suponhamos que

$$[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0.$$

Assim, $[p \oplus s(q)]_0 = [q \oplus s(p)]_0$, donde, pela proposição 1.36,

$$p \oplus s(q) \sim_s q \oplus s(p).$$

Desta forma, pelo lema 1.35, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p \oplus s(q) \oplus 1_m \sim_0 q \oplus s(p) \oplus 1_m.$$

Definamos $r_1 := s(q) \oplus 1_m$ e $r_2 := s(p) \oplus 1_m$. Como $s(p), s(q)$ e 1_m são matrizes escalares, $s^2 = s$ e 1_m é uma projeção, segue que r_1 e r_2 são projeções escalares e portanto

$$p \oplus r_1 \sim_0 q \oplus r_2.$$

$(c) \Rightarrow (b)$: Suponhamos que $\dim r_1 = k$ e $\dim r_2 = l$. Desta forma, como r_1 e r_2 são escalares, $\dim 1_k = \dim r_1$, $\dim 1_l = \dim r_2$ e estas são projeções, temos que

$$r_1 \sim_0 1_k \quad e \quad r_2 \sim_0 1_l.$$

Desta forma,

$$p \oplus 1_k \sim_0 p \oplus r_1 \sim_0 q \oplus r_2 \sim_0 q \oplus 1_l.$$

Como $\sim_0$ é uma relação de equivalência, concluímos que

$$p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_l.$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Notemos inicialmente que

$$[p \oplus 1_k]_0 - [s(p \oplus 1_k)]_0 = [p]_0 + [1_k]_0 - [s(p)]_0 - [1_k]_0 = [p]_0 - [s(p)]_0.$$

Deste modo, basta mostrarmos que $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$ sempre que $p \sim_0 q$.

Suponhamos então que $p \sim_0 q$. Logo existe v tal que

$$p = v^* v \quad \text{e} \quad q = v v^*.$$

Desta forma, como s é um $*$-homomorfismo,

$$s(p) = s(v)^* s(v) \quad \text{e} \quad s(q) = s(v) s(v)^*.$$

Portanto, $s(p) \sim_0 s(q)$ e, consequentemente,

$$[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0.$$

(ii) Suponhamos que $p \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$ satisfaça $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0$. Desta forma, $[p]_0 = [s(p)]_0$ e assim, pela proposição 1.36, $p \sim_s s(p)$. Logo, pelo lema 1.35, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p \oplus 1_m \sim_0 s(p) \oplus 1_m.$$

(iii) Sejam $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo e $p \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$. Assim

$$\begin{aligned} K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) &= K_0(\widetilde{\varphi})([p]_0 - [s(p)]_0) \\ &= K_0(\widetilde{\varphi})([p]_0) - K_0(\widetilde{\varphi})([s(p)]_0) \\ &= [\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [\widetilde{\varphi}(s(p))]_0 \\ &= [\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\widetilde{\varphi})(p))]_0. \end{aligned}$$

$\square$

O lema e a proposição que seguem nos serão úteis para mostrarmos que K_0 é um funtor semiexato.

Lema 1.67. *Sejam A e B C^*-álgebras e $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo e suponhamos que $g \in \mathrm{Nuc}(K_0(\varphi))$. Então*

(i) Existem um número natural n, uma projeção $p \in \mathscr{P}_n(\widetilde{A})$ e um elemento unitário $u \in M_n(\widetilde{B})$ tais que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ e $u\widetilde{\varphi}(p)u^* = s(\widetilde{\varphi}(p))$.

(ii) Se φ é sobrejetora, então existe uma projeção $p \in \mathscr{P}_\infty(\widetilde{A})$ tal que

$$g = [p]_0 - [s(p)]_0 \quad e \quad \widetilde{\varphi}(p) = s(\widetilde{\varphi}(p)).$$

Demonstração. (i) Segue da proposição 1.66 que existem $k \in \mathbb{N}$ e p_1 em $\mathscr{P}_k(\widetilde{A})$ tais que $g = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$. Além disso, como $g \in \mathrm{Nuc}\, K_0(\varphi)$, temos que

$$0 = K_0(\varphi)(g) = [\widetilde{\varphi}(p_1)]_0 - [\widetilde{\varphi}(s(p_1))]_0 = [\widetilde{\varphi}(p_1)]_0 - [s(\widetilde{\varphi}(p_1))]_0.$$

Desta forma, pela proposição 1.66, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\widetilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \sim_0 s(\widetilde{\varphi}(p_1)) \oplus 1_m.$$

Consideremos $p_2 := p_1 \oplus 1_m$. Assim, $p_2 \in \mathscr{P}_{k+m}(\widetilde{A})$ e notemos que

(a)

$$\begin{aligned} [p_2]_0 - [s(p_2)]_0 &= [p_1]_0 + [1_m]_0 - [s(p_1)]_0 - [1_m]_0 \\ &= [p_1]_0 - [s(p_1)]_0 \\ &= g \end{aligned}$$

(b)

$$\widetilde{\varphi}(p_2) = \widetilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \sim_0 s(\widetilde{\varphi}(p_1)) \oplus 1_m = s(\widetilde{\varphi}(p_2)).$$

Seja $n := 2(k+m)$ e consideremos $p := p_2 \oplus 0_{k+m}$. Desta forma,

$$p \sim_0 p_2 \quad e \quad s(p) \sim_0 s(p_2).$$

Portanto, $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ e como $\widetilde{\varphi}(p_2) \sim_0 s(\widetilde{\varphi}(p_2))$, pela proposição 1.29, temos que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(p_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} s(\widetilde{\varphi}(p_2)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\widetilde{\varphi}(p) \sim_u s(\widetilde{\varphi}(p))$, ou seja, existe u unitário tal que

$$u\widetilde{\varphi}(p)u^* = s(\widetilde{\varphi}(p)).$$

(ii) Pelo item anterior, temos que existem $n \in \mathbb{N}, p_1 \in \mathscr{P}_n(\widetilde{A})$ e $u \in M_n(\widetilde{B})$ tais que

$$g = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0 \quad \text{e} \quad u(\widetilde{\varphi}(p_1))u^* = s(\widetilde{\varphi}(p_1)).$$

Ademais, como φ é um $*$-homomorfismo sobrejetor, pelo lema 1.15, existe $v \in \mathscr{U}_0(M_{2n}(A))$ tal que

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Considere $p := v(p_1 \oplus 0_n)v^*$. Assim,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(p) &= \widetilde{\varphi}(v) \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(p_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\varphi}(v^*) \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(p_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u\widetilde{\varphi}(p_1)u^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s(\widetilde{\varphi}(p_1)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} s(\widetilde{\varphi}(p)) &= \begin{pmatrix} s^2(\widetilde{\varphi}(p_1)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s(\widetilde{\varphi}(p_1)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \widetilde{\varphi}(p). \end{aligned}$$

Notemos agora que

$$p = v(p_1 \oplus 0_n)v^* \sim_0 vp_1v^* = (vp_1)(p_1v^*).$$

Como $v \in \mathscr{U}_0(M_{2n}(A))$, temos que $p_1 = (p_1v^*)(vp_1)$.

Logo, $p \sim_0 p_1$ e, como s é um $*$-homomorfismo, $s(p) \sim_0 s(p_1)$. Concluímos então que

$$g = [p]_0 - [s(p)]_0.$$

□

Lema 1.68. *Seja*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de C^*-álgebras e seja $n \in \mathbb{N}$. Então

(i) A aplicação $\widetilde{\varphi} : M_n(\widetilde{I}) \to M_n(\widetilde{A})$ é injetora;

(ii) Um elemento $a \in M_n(\widetilde{A})$ pertence à imagem de $\widetilde{\varphi}_n$ se, e somente se, $\widetilde{\psi}_n(a) = s_n(\widetilde{\psi}_n(a))$.

Demonstração. (i) Como φ é injetora, segue que $\widetilde{\varphi}$ também o é e, consequentemente $\widetilde{\varphi}_n$.

(ii) Seja $a \in M_n(\widetilde{A})$ e suponhamos que $\widetilde{\psi}_n(a) = s_n(\widetilde{\psi}_n(a))$. Logo $\widetilde{\psi}_n(a)$ é escalar, isto é, $\widetilde{\psi}_n(a) \in M_n(\mathbb{C})$. Suponhamos que

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha_{11} 1_{\widetilde{A}} & \cdots & a_{1n} + \alpha_{1n} 1_{\widetilde{A}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + \alpha_{n1} 1_{\widetilde{A}} & \cdots & a_{nn} + \alpha_{nn} 1_{\widetilde{A}} \end{pmatrix}.$$

Assim, para todo $1 \leq i, j \leq n$, temos que

$$\widetilde{\psi}(a_{ij} + \alpha_{ij} 1_{\widetilde{A}}) = s(\widetilde{\psi}(a_{ij} + \alpha_{ij} 1_{\widetilde{A}})).$$

Por outro lado,

$$\widetilde{\psi}(a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}})=\psi(a_{ij})+\alpha_{ij}1_{\widetilde{B}}$$

e

$$s(\widetilde{\psi}(a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}}))=s(\psi(a_{ij})+\alpha_{ij}1_{\widetilde{B}})=\alpha_{ij}1_{\widetilde{B}}.$$

Desta forma, para todo $1\leq i,j\leq n$, $\psi(a_{ij})=0$. Entretanto, como $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Nuc}(\psi)$, temos que para todo $i,j\in\{1,\cdots,n\}$ existe $b_{ij}\in I$ tal que $a_{ij}=\varphi(b_{ij})$. Segue então que

$$\widetilde{\varphi}(b_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{I}})=a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}}.$$

Logo, se $b=(b_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{I}})_{ij}\in M_n(I)$, temos que $\widetilde{\varphi}_n(b)=a$.

Por outro lado, suponhamos que $a\in\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi}_n)$. Logo existe $b\in M_n(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}_n(b)=a$. Pondo

$$a=(a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}})_{ij}\quad\text{e}\quad b=(b_{ij}+\beta_{ij}1_{\widetilde{I}})_{ij},$$

temos que, para $1\leq i,j\leq n$,

$$\varphi(b_{ij})+\beta_{ij}1_{\widetilde{A}}=\widetilde{\varphi}(b_{ij}+\beta_{ij}1_{\widetilde{I}})=a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}}.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}}) &= \widetilde{\psi}(\varphi(b_{ij})+\beta_{ij}1_{\widetilde{A}})\\ &= \psi(\varphi(b_{ij}))+\beta_{ij}1_{\widetilde{B}}\\ &= \beta_{ij}1_{\widetilde{B}}.\end{aligned}$$

Portanto $\widetilde{\psi}(a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}})$ é escalar para todo $i,j\in\{1,\cdots,n\}$, isto é,

$$s(\widetilde{\psi}(a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}}))=\widetilde{\psi}(a_{ij}+\alpha_{ij}1_{\widetilde{A}}).$$

Concluímos então que $s_n(\widetilde{\psi}_n(a))=\widetilde{\psi}_n(a)$.

□

Proposição 1.69 (Semiexatidão de K_0). *Toda sequência exata curta de C^*-álgebras*

$$0\longrightarrow I\xrightarrow{\varphi}A\xrightarrow{\psi}B\longrightarrow 0$$

induz uma sequência exata de grupos abelianos

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B).$$

Demonstração. Como já demonstramos que K_0 é um funtor que preserva aplicações nulas, temos que

$$K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(0) = 0,$$

isto é, $\mathrm{Im}(K_0(\varphi)) \subset \mathrm{Nuc}(K_0(\psi))$.

Mostremos agora a inclusão inversa. Para tanto, seja $g \in \mathrm{Nuc}\, K_0(\psi)$. Então, pelo lema 1.67, existem $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathscr{P}_n(\widetilde{A})$ tais que $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ e $\widetilde{\psi}(p) = s(\widetilde{\psi}(p))$, pois ψ é sobrejetora.

Desta forma, pelo lema 1.68, $p \in \mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$. Logo existe $q \in M_n(\widetilde{I})$ tal que $p = \widetilde{\varphi}(q)$. Notemos que

$$\widetilde{\varphi}(q^2) = p^2 = p \quad \text{e} \quad \widetilde{\varphi}(q^*) = p^* = p$$

e, como $\widetilde{\varphi}$ é injetora, segue que

$$q^2 = q^* = q,$$

ou seja, $q \in \mathscr{P}_n(\widetilde{I})$. Desta forma, pela caracterização do $K_0(I)$, segue que $[q]_0 - [s(q)]_0 \in K_0(I)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} g &= [p]_0 - [s(p)]_0 \\ &= [\widetilde{\varphi}(q)]_0 - [\widetilde{\varphi}(s(q))]_0 \\ &= K_0(\widetilde{\varphi})([q]_0 - [s(q)]_0) \\ &= K_0(\varphi)([q] - [s(q)]_0), \end{aligned}$$

isto é, $g \in \mathrm{Im}(K_0(\varphi))$, donde segue a igualdade desejada. □

Observação 1.70. Note que o funtor K_0 definido na seção 1.3 não é semi-exata se permitimos C^*-álgebras arbitrárias (isto é, não necessariamente unitais), veja (Rørdam; Larsen; Laustsen, 2000) Example 3.3.9.

Mostremos a seguir um resultado um pouco mais profundo que a proposição.

Proposição 1.71 (Exatidão com cisão de K_0)**.** *Toda sequência exata com cisão de C^*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \underset{\lambda}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

induz uma sequência exata com cisão de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \underset{K_0(\lambda)}{\overset{K_0(\psi)}{\rightleftarrows}} K_0(B) \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Notemos inicialmente que, pela proposição 1.69, $\operatorname{Im}(K_0(\varphi)) = \operatorname{Nuc} K_0(\psi)$.

Mostremos que $K_0(\varphi)$ é injetora. Para tanto, seja $g \in \operatorname{Nuc} K_0(\varphi)$. Pelo lema 1.67, existem $n \in \mathbb{N}, p \in \mathscr{P}_n(\widetilde{I}), u \in \mathscr{U}(M_n(\widetilde{A}))$ tais que

$$g = [p]_0 - [s(p)]_0 \quad \text{e} \quad u\widetilde{\varphi}(p)u^* = s(\widetilde{\varphi}(p)).$$

Definamos $v := (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)u$. Desta forma,

$$v^*v = u^*(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u)(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)u = u^*(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(uu^*)u = u^*1_{M_n(\widetilde{A})}u = 1_{M_n(\widetilde{A})}.$$

Analogamente, mostramos que $vv^* = 1_{M_n(\widetilde{A})}$. Logo $v \in \mathscr{U}(M_n(\widetilde{A}))$ e, como $\psi \circ \lambda = \mathrm{id}_B$ e u é unitário, temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}(v) &= \widetilde{\psi}((\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*))\widetilde{\psi}(u) \\ &= \widetilde{\psi}(u^*)\widetilde{\psi}(u) \\ &= \widetilde{\psi}(u^*u) \\ &= 1_{M_n(\widetilde{A})}. \end{aligned}$$

Logo $\widetilde{\psi}(v)$ é escalar e, consequentemente, $s(\widetilde{\psi}(v)) = \widetilde{\psi}(v)$. Desta forma, pelo lema 1.68, $v \in \operatorname{Im}(\widetilde{\varphi})$.

Seja $w \in M_n(\widetilde{I})$ tal que $\widetilde{\varphi}(w) = v$ e mostremos que w é unitário. Como $\widetilde{\varphi}$ é um $*$-homomorfismo e v unitário, temos que

$$\widetilde{\varphi}(ww^*) = \widetilde{\varphi}(w)\widetilde{\varphi}(w^*) = vv^* = v^*v = \widetilde{\varphi}(w^*)\widetilde{\varphi}(w) = \widetilde{\varphi}(w^*w),$$

e, portanto, $w^*w = ww^*$, pela injetividade de $\widetilde{\varphi}$. Notemos que, por definição, $\widetilde{\varphi}(1_{M_n(\widetilde{I})}) = 1_{M_n(\widetilde{A})}$. Desta forma,

$$\widetilde{\varphi}(w^*w) = v^*v = 1_{M_n(\widetilde{A})} = \widetilde{\varphi}(1_{M_n(\widetilde{I})}),$$

e, portanto, segue que $w^*w = 1_{M_n(\widetilde{I})}$, pois $\widetilde{\varphi}$ é injetora, ou seja, $w \in \mathscr{U}(M_n(\widetilde{I}))$.

Como $\widetilde{\varphi}(w) = v$, temos que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(wpw^*) &= \widetilde{\varphi}(w)\widetilde{\varphi}(p)\widetilde{\varphi}(w)^* \\
&= v\widetilde{\varphi}(p)v^* \\
&= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)u(\widetilde{\varphi}(p))u^*(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u) \\
&= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^*)s(\widetilde{\varphi}(p))(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u) \\
&= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(u^* s(\widetilde{\varphi}(p))u) \\
&= (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(\widetilde{\varphi}(p)).
\end{aligned}
$$

Agora notemos que se $p = a + \alpha 1_{M_n(\widetilde{I})}$, então

$$
(\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(\widetilde{\varphi}(p)) = (\widetilde{\lambda} \circ \widetilde{\psi})(\varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}}) = \widetilde{\lambda}(\alpha 1_{\widetilde{B}}) = \alpha 1_{\widetilde{A}}
$$

e

$$
s(\widetilde{\varphi}(p)) = s(\varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \alpha 1_{\widetilde{A}}
$$

e, portanto, $\widetilde{\varphi}(wpw^*) = s(\widetilde{\varphi}(p)) = \widetilde{\varphi}(s(p))$.

Como $\widetilde{\varphi}$ é injetora, segue que $wpw^* = s(p)$, ou seja, $p \sim_u s(p)$ e, portanto, $p \sim_0 s(p)$. Concluímos então que $[p]_0 = [s(p)]_0$, donde $g = 0$ e $K_0(\varphi)$ é injetora.

Finalmente, basta mostrarmos que $K_0(\psi)$ é sobrejetora. Para tanto, notemos que $\psi \circ \lambda = \mathrm{id}_B$ e, portanto, $K_0(\psi) \circ K_0(\lambda) = \mathrm{id}_{K_0(B)}$.

□

Exemplo 1.72. *Seja A uma C^*-álgebra e $n \in \mathbb{N}$. Então $K_0(A) \cong K_0(M_n(A))$.*

Demonstração. Mostremos que o $*$-homomorfismo

$$
\begin{aligned}
\lambda_{n,A} : A &\longleftrightarrow M_n(A) \\
a &\mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

induz um isomorfismo $K_0(\lambda_{n,A}) : K_0(A) \to K_0(M_n(A))$.

Notemos inicialmente que precisamos mostrar tal isomorfismo apenas quando A é uma C^*-álgebra unital. Para vermos isto, seja A uma C^*-álgebra não unital. Então o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\lambda_{n,A}"] & \widetilde{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "\lambda_{n,\widetilde{A}}"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,\mathbb{C}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_n(A) \arrow[r, "\iota_n"'] & M_n(\widetilde{A}) \arrow[r, shift left, "\pi_n"] & M_n(\mathbb{C}) \arrow[l, shift left, "\lambda_n"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo e cada linha é exata e com cisão. Desta forma, pela proposição 1.71, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,A})"] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi)"] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\widetilde{A}})"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(M_n(A)) \arrow[r] & K_0(M_n(\widetilde{A})) \arrow[r, "K_0(\pi_n)"'] & K_0(M_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo com linhas exatas com cisões, uma vez que K_0 é um funtor. Desta forma, se mostrarmos que $K_0(\lambda_{n,\widetilde{A}})$ e $K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})$ são isomorfismos então, $K_0(\lambda_{n,A})$ também o é.

Com efeito, como $K_0(\lambda_n,\widetilde{A})$ é um epimorfismo e $\iota_{K_0(A)}$ e $K_0(\lambda_n,\mathbb{C})$ são monomorfismos, então $K_0(\lambda_n,A)$ é um epimorfismo (ver, (Bland, 2011), página 88, notando que todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo). Só nos resta mostrar então que $K_0(\lambda_n,A)$ é um monomorfismo. Para tanto, sejam g,h em $K_0(A)$ tais que $K_0(\lambda_n,A)(g) = K_0(\lambda_n,A)(h)$. Então,

$$\iota_{K_0(M_n(A))}(K_0(\lambda_n,A)(g)) = \iota_{K_0(M_n(A))}(K_0(\lambda_n,A)(h))$$

e, portanto,

$$K_0(\lambda_n,\widetilde{A})(\iota_{K_0(A)}(g)) = K_0(\lambda_n,\widetilde{A})(\iota_{K_0(A)}(h)).$$

Como $K_0(\lambda_n,\widetilde{A})$ e $\iota_{K_0(A)}$ são monomorfismos, concluímos que $g = h$ e, portanto $K_0(\lambda_n,A)$ é um monomorfismo, ou seja, $K_0(\lambda_n,A)$ é um isomorfismo.

Mostremos que se A for uma C^*-álgebra unital, então

$$K_0(\lambda_n,A) : K_0(A) \to K_0(M_n(A))$$

é um isomorfismo. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos $\gamma_{n,k} : M_k(M_n(A)) \to M_{nk}(A)$ o $*$-isomorfismo que vê cada matriz em $M_k(M_n(A))$ como uma única matriz em $M_{kn}(A)$. Definamos agora

$$\begin{array}{rcl}\gamma_n : \mathscr{P}_\infty(M_n(A)) & \to & K_0(A) \\ p & \mapsto & [\gamma_{n,k}(p)]_0\end{array} \quad , \qquad \text{para } p \in \mathscr{P}_k(M_n(A)).$$

Notemos agora que

(i) Se $p, q \in \mathscr{P}_\infty(M_n(A))$, então existem $k, m \in \mathbb{N}$ tais que $p \in \mathscr{P}_k(M_n(A))$ e $q \in \mathscr{P}_m(M_n(A))$. Assim, $p \oplus q \in \mathscr{P}_{k+m}(M_n(A))$ e

$$\begin{aligned}\gamma_n(p \oplus q) &= [\gamma_{n,k+m}(p \oplus q)]_0 \\ &= [\gamma_{n,k}(p) \oplus \gamma_{n,m}(q)]_0 \\ &= [\gamma_{n,k}(p)]_0 + [\gamma_{n,m}(q)]_0 \\ &= \gamma_n(p) + \gamma_n(q).\end{aligned}$$

(ii) Se 0_A é a projeção nula de A, então $\gamma_n(0_A) = 0$, uma vez que $\gamma_{n,k}$ é um *-isomorfismo.

(iii) Se $p, q \in \mathscr{P}_k(M_n(A))$ são tais que $p \sim_h q$, então, $\gamma_{n,k}(p) \sim_h \gamma_{n.k}(q)$, uma vez que $\gamma_{n,k}$ é um $*$-homomorfismo, e portanto contínuo. Logo, $\gamma_{n,k}(p) \sim \gamma_{n.k}(q)$ e, portanto, $[\gamma_{n,k}(p)]_0 = [\gamma_{n,k}(q)]_0$, ou seja, $\gamma_n(p) = \gamma_n(q)$.

Desta forma, pela proposição 1.37, existe um homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(M_n(A)) \to K_0(A)$ tal que $\alpha([p]_0) = [\gamma_{n,k}(p)]_0$, para $p \in \mathscr{P}_k(M_n(A))$.

Mostremos agora que $K_0(\lambda_{n,A})^{-1} = \alpha$. Para tanto, basta provarmos que

$$\begin{array}{rcll}(\lambda_{n,A})_{kn}(\gamma_{n,k}(p)) & \sim_0 & p & \text{em } \mathscr{P}_\infty(M_n(A)), p \in \mathscr{P}_k(M_n(A)), \\ \gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p)) & \sim_0 & p & \text{em } \mathscr{P}_\infty(A), p \in \mathscr{P}_k(A),\end{array}$$

em que $(\lambda_{n,A})_m : M_m(A) \to M_m(M_n(A))$ é o $*$-homomorfismo induzido por $\lambda_{n,A}$.

Notemos agora que, por meios de permutações[7], temos que

$$(\lambda_{n,A})_{kn}(\gamma_{n,k}(p)) \sim_u p \oplus 0 \sim_0 p.$$

Analogamente mostramos que $\gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p) \sim_0 p$. Logo

$$\alpha \circ K_0(\lambda_{n,k}) = \mathrm{id}_{K_0(A)} \quad \text{e} \quad K_0(\lambda_{n,k}) \circ \alpha = \mathrm{id}_{K_0(M_n(A))}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, concluímos então que $K_0(A) \cong K_0(M_n(A))$. $\square$

[7]Lembremos que toda permutação é um elemento unitário.

Com a proposição que segue podemos encontrar o grupo K_0 de algumas C^*álgebras.

Proposição 1.73 (Somas diretas)**.** *Para cada par de C^*-álgebras A e B, temos que*

$$K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B).$$

Mais precisamente, se $\iota_A : A \to A \oplus B$ e $\iota_B : B \to A \oplus B$ são as inclusões canônicas, então a aplicação

$$\begin{aligned} K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B) : \quad K_0(A) \oplus K_0(B) &\longrightarrow K_0(A \oplus B) \\ (g,h) &\longmapsto K_0(\iota_A)(g) + K_0(\iota_B)(h) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{K_0(A)}"'] & K_0(A) \oplus K_0(B) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "K_0(\iota_A)\oplus K_0(\iota_B)"'] & K_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{K_0(B)}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\iota_A)"'] & K_0(A \oplus B) \arrow[r, shift left, "K_0(\pi_B)"] & K_0(B) \arrow[l, shift left, "K_0(\iota_B)"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

em que $\alpha(g) = (g,0)$, $\beta(g,h) = h$, $\pi_B(a,b) = b$ e $\iota_B(b) = (0,b)$.

Mostremos que as linhas são, de fato, sequências exatas.

Primeiramente, concentremo-nos na sequência

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{\alpha} K_0(A) \oplus K_0(B) \xrightarrow{\beta} K_0(B) \longrightarrow 0.$$

(i) α é injetora:

Seja $g \in \mathrm{Nuc}(\alpha)$. Desta forma,

$$\alpha(g) = (0,0) \Leftrightarrow (g,0) = (0,0) \Leftrightarrow g = 0.$$

(ii) β é sobrejetora:

Seja $h \in K_0(B)$. Então, $(0,h) \in K_0(A) \oplus K_0(B)$, temos que $\beta(0,h) = h$.

(iii) $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Nuc}\,\beta$.

Seja $g \in K_0(A)$. Assim,

$$\beta \circ \alpha(g) = \beta(g,0) = 0$$

e, portanto, $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \mathrm{Nuc}\,\beta$. Por outro lado, seja $(g,h) \in \mathrm{Nuc}\,\beta$. Desta forma,

$$\beta(g,h) = 0 \Rightarrow h = 0.$$

Assim, $(g,h) = (g,0)$. Como $\alpha(g) = (g,0)$, segue que $(g,h) \in \mathrm{Im}(\alpha)$.

Mostremos agora que a sequência

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(\iota_A)} K_0(A \oplus B) \underset{K_0(\iota_B)}{\overset{K_0(\pi_B)}{\rightleftarrows}} K_0(B) \longrightarrow 0$$

é exata com cisão. Para tanto, mostremos que ι_B é uma cisão para a sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \underset{\iota_B}{\overset{\pi_B}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0\ .$$

1. π_B é sobrejetora e ι_B é cisão.

   Se $b \in B$, então
   $$(\pi_B \circ \iota_B)(b) = \pi_B(0,b) = b.$$
   Logo $\pi_B \circ \iota_B = \mathrm{id}_B$ e, consequentemente, π_B é sobrejetora e ι_B é cisão.

2. ι_A é injetora.

   Seja $a \in \mathrm{Nuc}\,\iota_A$. Assim,
   $$\iota_A(a) = (0,0) \Leftrightarrow (a,0) = (0,0) \Leftrightarrow a = 0.$$

3. $\mathrm{Im}(\iota_A) = \mathrm{Nuc}\,\pi_B$.

   Seja $a \in A$. Então $(\pi_B \circ \iota_A)(a) = \pi_B(a,0) = 0$ e, por conseguinte, $\mathrm{Im}(\iota_A) \subset \mathrm{Nuc}\,\pi_B$.

   Por outro lado, seja $(a,b) \in \mathrm{Nuc}\,\pi_B$. Desta forma, $0 = \pi_B(a,b) = b$. Donde $(a,b) = (a,0) = \iota_A(a)$ e $\mathrm{Im}(\iota_A) = \mathrm{Nuc}\,\pi_B$.

Logo, pela proposição 1.71,

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(\iota_A)} K_0(A \oplus B) \underset{K_0(\iota_B)}{\overset{K_0(\pi_B)}{\rightleftarrows}} K_0(B) \longrightarrow 0$$

é uma sequência com cisão.

Mostremos agora que o diagrama é comutativo:

1. Seja $(g,h) \in K_0(A) \oplus K_0(B)$. Assim,

$$\begin{aligned}(K_0(\pi_B) \circ (K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)))(g,h) &= K_0(\pi_B)(K_0(\iota_A)(g) + K_0(\iota_B)(h)) \\ &= (K_0(\pi_B \circ \iota_A))(g) + (K_0(\pi_B \circ \iota_B))(h) \\ &= 0 + (K_0(\pi_B \circ \iota_B))(h) \\ &= K_0(\mathrm{id}_B)(h) = \mathrm{id}_{K_0(B)}(h) \\ &= h = \beta(g,h).\end{aligned}$$

   Como $(g,h) \in K_0(A) \oplus K_0(B)$ é arbitrário, temos que

$$K_0(\pi_B) \circ (K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)) = \beta.$$

2. Seja $g \in K_0(A)$. Desta forma,

$$\begin{aligned}((K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)) \circ \alpha)(g) &= (K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B))(g,0) \\ &= K_0(\iota_A)(g) + K_0(\iota_B)(0) \\ &= K_0(\iota_A)(g).\end{aligned}$$

   Portanto, $(K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)) \circ \alpha = K_0(\iota_A)$, uma vez que $g \in K_0(A)$ é arbitrário.

Logo o diagrama é, de fato, comutativo. Finalmente, mostremos que $K_0(\iota) \oplus K_0(\iota_B)$ é um isomorfismo:

1. $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)$ é injetora:
   Seja $(g,h) \in \mathrm{Nuc}(K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B))$. Logo

$$h = \beta(g,h) = (K_0(\pi_B) \circ (K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B))(g,h)) = 0$$

   e, portanto,

$$0 = K_0(\iota_A)(g) + K_0(\iota_B)(h) = K_0(\iota_A)(g),$$

   ou seja, $K_0(\iota_A)(g) = 0$. Como $K_0(\iota_A)$ é injetora, concluímos que $g = 0$. Logo $(g,h) = (0,0)$ e, consequentemente, $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)$ é injetora.

2. $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)$ é sobrejetora.
   Seja $f \in K_0(A \oplus B)$. Então, $K_0(\pi_B)(f) \in K_0(B)$. Como β é sobrejetora, temos que existe $(g,h) \in K_0(A) \oplus K_0(B)$ tal que $\beta(g,h) = K_0(\pi_B)(f)$. Assim,

$$(K_0(\pi_B) \circ (K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)))(g,h) = K_0(\pi_B)(f).$$

Logo, $(K_0(\iota_A)\oplus K_0(\iota_B))(g,h)-f\in \operatorname{Nuc} K_0(\pi_B)$. Deste modo, já que $\operatorname{Nuc} K_0(\pi_B)=\operatorname{Im}(K_0(\iota_A))$, existe $a\in K_0(A)$ tal que

$$K_0(\iota_A)(a)=(K_0(\iota_A)\oplus K_0(\iota_B))(g,h)-f.$$

Como $K_0(\iota_A)=(K_0(\iota_A)\oplus K_0(\iota_B))\circ\alpha$, segue que

$$(K_0(\iota_A)\oplus K_0(\iota_B))((g,h)-\alpha(a))=f.$$

Logo $f\in \operatorname{Im}(K_0(\iota_A)\oplus K_0(\iota_B))$ e $K_0(\iota_A)\oplus K_0(\iota_B)$ é sobrejetor. Assim, $K_0(\iota_A)\oplus K_0(\iota_B)$ é um isomorfismo.

□

Exemplo 1.74. *Se A é uma C^*-álgebra de dimensão finita, então, para algum $k\in\mathbb{N}$, $K_0(A)=\bigoplus_{i=1}^{k}\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Como A é de dimensão finita, existem[8] $n_1,\cdots,n_k\in\mathbb{N}$ tais que $A\cong M_{n_1}(\mathbb{C})\oplus\cdots\oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$. Desta forma, pelo exemplo 1.50 e pela proposição 1.73, temos que $K_0(A)=\mathbb{Z}^k$. □

Exemplo 1.75. *$C([a,b]\cup[c,d])=\mathbb{Z}^2$, em que $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ e $[a,b],[c,d]$ são disjuntos.*

Demonstração. Notemos que $C([a,b])\oplus C([c,d])\cong C([a,b]\cup[c,d])$ via

$$\begin{array}{rcl}\beta: C([a,b])\oplus C([c,d]) & \to & C([a,b]\cup[c,d])\\ (f,g) & \mapsto & h_{f,g},\end{array}$$

em que, para $x\in[a,b]\cup[c,d]$,

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x\in[a,b]\\ g(x), & \text{se} \quad x\in[c,d]\end{cases}.$$

Como $[a,b]$ e $[c,d]$ são espaços topológicos contrativo, pelo exemplo 1.56, temos que $K_0(C([a,b]))\cong K_0(C([c,d]))\cong\mathbb{Z}$ e, portanto, pela proposição 1.73,

$$K_0(C([a,b]\cup[c,d]))\cong K_0(C([a,b])\oplus C([c,d]))\cong\mathbb{Z}^2.$$

□

[8] ver (Murphy, 1990), página 194.

2 O GRUPO K_0 ALGÉBRICO

Neste capítulo estudaremos a K-teoria algébrica. Nosso primeiro objetivo é definir o grupo $K_0(R)$, em que R é um anel, e o faremos a partir das classes de isomorfismo dos R-módulos projetivos finitamente gerados, e, portanto, precisaremos da Teoria de Módulos. Reservamos a primeira parte deste capítulo para tal Teoria.

Em seguida, mostraremos que também podemos definir $K_0(R)$ via idempotentes e, finalmente, mostraremos a equivalência entre a K-teoria de C^*-álgebras unitais e a K-teoria algébrica.

Neste capítulo, R será sempre um anel unital.

Definição 2.1. Um R-módulo à esquerda é um conjunto não vazio munido de duas operações

$$\begin{array}{rcl} + : M \times M & \to & M \\ (m,n) & \mapsto & m+n \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rl} \cdot : R \times M & \to M \\ (a,m) & \mapsto am \end{array}$$

tais que

(i) $(M,+)$ é um grupo abeliano.

(ii) Para quaisquer $a,b \in R$ e para todo $m \in M$,

$$(a+b)m = am + bm$$

$$a(bm) = (ab)m$$

$$1_R m = m.$$

(iii) Para quaisquer $m,n \in M$ e para todo $a \in R$,

$$a(m+n) = am + an.$$

Exemplo 2.2. *Seja R um anel. Então R^n é um R-módulo munido das opera-*

ções

$$\begin{array}{rcl} +: R^n \times R^n & \to & R^n \\ ((a_1,\cdots,a_n),(r_1,\cdots,r_n)) & \mapsto & (a_1+r_1,\cdots,a_n+r_n) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \cdot: R \times R^n & \to & R^n \\ (a,(r_1,\cdots,r_n)) & \mapsto & (ar_1,\cdots,ar_n). \end{array}$$

Em particular, R é um R-módulo.

Definição 2.3. Um R-submódulo à esquerda de um R-módulo à esquerda M é um subconjunto $\emptyset \neq N \subset M$ tal que as restrições da soma e da multiplicação de M a N o tornam um R-módulo à esquerda.

Definição 2.4. Sejam M e N R-módulos à esquerda. Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ é um homomorfismo de R-módulos se f é aditiva e, para todo $m \in M$ e $a \in R$,

$$f(am) = af(m).$$

Ademais, se f é sobrejetora, dizemos que f é um epimorfismo. Se f é injetora, f é chamada de monomorfismo. Se f é bijetora, então f é um isomorfismo e, neste caso, escrevemos $M \cong N$.

Notação : $\mathrm{Hom}(M,N) = \{f : M \to N : f$ é um homomorfismo de R-módulos$\}$. Observemos que $\mathrm{Hom}(M,N)$ é um grupo abeliano com a operação de soma usual.

Definição 2.5. Sejam M,N R-módulos e $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$. Definimos

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$$

e

$$\mathrm{Im}(f) = \{n \in N : \exists m \in M \text{ tal que } n = f(m)\}.$$

Observação 2.6. $\mathrm{Nuc}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ acima definidos são submódulos de M e N, respectivamente.

Às vezes poderemos omitir, mas todo R-módulo neste trabalho será um R-módulo à esquerda.

Definição 2.7. Uma soma direta (ou coproduto direto) de uma família $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-módulos é um par $(M,\{i_i\}_{i\in I})$, em que M é um R-módulo e, para todo $i \in I$, $i_i \in \mathrm{Hom}(M_i,M)$, tal que para qualquer $(N,\{f_i \in \mathrm{Hom}(M_i,N)\}_{i\in I})$ existe um único $\overline{f} \in \operatorname{Hom}(M,N)$ de forma que, para todo $i \in I$, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} & N \\ M_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "i_i"'] & M \arrow[u, dashed, "\overline{f}"'] \end{tikzcd} .$$

Neste caso, é possível mostrar que, a menos de isomorfismo,

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i : \{i \in I : m_i \neq 0\} \text{ é finito}\right\}.$$

Podemos dizer que existem dois tipos de somas diretas na teoria de módulos: a soma direta externa, que foi definida acima, e a soma direta interna. Dizemos que uma soma direta é interna se satisfaz uma das condições do seguinte teorema

Teorema 2.8. *Sejam M um R-módulo e $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de submódulos tais que $M = \sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{i\in I} m_i : m_i \in M_i \text{ e } \{i \in I : m_i \neq 0\} \text{ é finito}\right\}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $0 \in M$ *é escrito de maneira única como* $\sum_{i\in I} m_i$*;*

(ii) *todo* $m \in M$ *é escrito de maneira única como* $\sum_{i\in I} m_i$*;*

(iii) *para todo* $i \in I$, $M_i \cap (\sum_{j\neq i} M_j) = 0$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $x \in M$ e suponha que x seja escrito como

$$x = \sum_{i\in I} m_i = \sum_{i\in I} n_i.$$

Desta forma,

$$\sum_{i\in I} (m_i - n_i) = 0 = \sum_{i\in I} 0.$$

Logo, por hipótese, $m_i = n_i$, para todo $i \in I$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Seja $i \in I$ e tome $x \in M_i \cap (\sum_{j\neq i} M_j)$. Então existem $m_j \in M_j$, para $j \neq i$, tais que

$$x = x + \sum_{j\neq i} 0 = 0 + \sum_{j\neq i} m_j.$$

Como x é escrito de forma única, então $x = 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Suponha que $0 = \sum\limits_{i \in I} m_i$. Seja $i \in I$. Então

$$m_i + \sum_{j \neq i} m_j = 0 \in \sum_{j \neq i} M_j.$$

Então $m_i \in \sum\limits_{j \neq i} M_j$ e $m_i \in M_i$, donde $m_i = 0$.

Desde que $i \in I$ é arbitrário, concluímos que $m_i = 0$ para todo i e, consequentemente, 0 só pode ser escrito como

$$0 = \sum_{i \in I} 0.$$

□

Observação 2.9. Neste caso, $M \cong \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$.

Neste estudo não trabalharemos com a teoria de módulos em sua abrangência. Estudaremos apenas com módulos projetivos e finitamente gerados. Os próximos resultados nos auxiliarão a demonstrar o teorema 2.17, que nos dá informações interessantes sobre os módulos projetivos.

Definição 2.10. Um R-módulo livre gerado pelo conjunto X é um par (F, φ), em que F é um R-módulo e $\varphi : X \to F$ é um função tal que para qualquer função $f : X \to M$, em que M é R-módulo, existe um único homomorfismo $\overline{f} \in \operatorname{Hom}(F, M)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Dados um conjunto qualquer X e um anel com unidade R, sejam $\mathscr{F}(X) = \bigoplus\limits_{x \in X} R$ e

$$\begin{array}{rcl} \varphi : X & \to & \mathscr{F}(X) \\ x & \mapsto & \delta_x, \end{array}$$

em que $\delta_x \in \mathscr{F}(X)$ vale 1 na posição x e 0 nas demais.

Observemos que todo elemento $m \in \mathscr{F}(X)$ se escreve como combinação linear dos δ_x, $x \in X$. Com efeito, se $m = (a_x)_{x\in X}$, então

$$m = \sum_{x\in X} a_x \delta_x$$

e facilmente mostra-se que essa representação é única.

Proposição 2.11. *$(\mathscr{F}(X), \varphi)$ é um R-módulo livre.*

Demonstração. Seja M um R-módulo e $f : X \to M$ uma função. Definamos

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : \mathscr{F}(X) & \to & M \\ \sum\limits_{x\in X} a_x\delta_x & \mapsto & \sum\limits_{x\in X} a_x f(x). \end{array}$$

Notemos que $\overline{f}$ está bem definida, é um homomorfismo, e, para todo $x \in X$,

$$\overline{f} \circ \varphi(x) = \overline{f}(\delta_x) = f(x).$$

Como $x \in X$ é arbitrário, então $\overline{f} \circ \varphi = f$.

Para provarmos a unicidade de $\overline{f}$, suponhamos que exista um morfismo $g : \mathscr{F}(X) \to M$ tal que $g \circ \varphi = f$. Assim, para todo $\sum\limits_{x\in X} a_x\delta_x \in \mathscr{F}(X)$,

$$\begin{array}{rcl} g(\sum\limits_{x\in X} a_x\delta_x) & = & \sum\limits_{x\in X} a_x g(\delta_x) \\ & = & \sum\limits_{x\in X} a_x g(\varphi(x)) \\ & = & \sum\limits_{x\in X} a_x f(x) \\ & = & \overline{f}(\sum\limits_{x\in X} a_x\delta_x). \end{array}$$

Logo $g = \overline{f}$ e a unicidade é válida. Concluímos, então que $(\mathscr{F}(X), \varphi)$ é um R-módulo livre. $\square$

Para o seguinte teorema, lembremos a definição de um módulo quociente: Se M é um R-módulo e P é um submódulo de M, então o espaço quociente M/P, munido das operações

$$\begin{array}{rcl} + : M/P \times M/P & \to & M/P \\ (m+P, m'+P) & \mapsto & m+m'+P \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M/P &\to M/P \\ (r, m+P) &\mapsto rm+P \end{aligned}$$

é um R-módulo.

Teorema 2.12 (Primeiro Teorema do Isomorfismo)**.** *Sejam M, N R-módulos e $\varphi \in \mathrm{Hom}(M,N)$. Então $M/\mathrm{Nuc}(\varphi)$ é isomorfo a $\mathrm{Im}(M)$.*

Demonstração. Definamos

$$\begin{aligned} \psi : M/\mathrm{Nuc}(\varphi) &\to \mathrm{Im}(\varphi) \\ m+\mathrm{Nuc}(\varphi) &\mapsto \varphi(m) \end{aligned}$$

e notemos que ψ está bem definida, pois se $m+\mathrm{Nuc}(\varphi)$ e $m'+\mathrm{Nuc}(\varphi)$ em $M/\mathrm{Nuc}(\varphi)$ são tais que $m+\mathrm{Nuc}(\varphi) = m'+\mathrm{Nuc}(\varphi)$, então $m-m' \in \mathrm{Nuc}(\varphi)$ e, consequentemente,

$$\varphi(m) = \varphi(m').$$

Claramente ψ é um morfismo, pois φ o é. Como facilmente vemos que ψ é sobrejetor, basta mostrarmos que é injetor. Sejam $m+\mathrm{Nuc}(\varphi)$ e $m'+\mathrm{Nuc}(\varphi)$ em $M/\mathrm{Nuc}(\varphi)$ tais que

$$\psi(m+\mathrm{Nuc}(\varphi)) = \psi(m'+\mathrm{Nuc}(\varphi)).$$

Então

$$\varphi(m) = \varphi(m') \Rightarrow \varphi(m-m') = 0 \Rightarrow m-m' \in \mathrm{Nuc}(\varphi),$$

ou seja, $m+\mathrm{Nuc}(\varphi) = m'+\mathrm{Nuc}(\varphi)$. Logo ψ é um isomorfismo e, consequentemente, $M/\mathrm{Nuc}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$. □

Teorema 2.13. *Todo R-módulo é (isomorfo a) um quociente de um módulo livre.*

Demonstração. Seja M um R-módulo e consideremos o R-módulo livre $(\mathscr{F}(M), \varphi)$ da proposição 2.11.

Notemos agora que como $\mathrm{id}_M : M \to M$ é uma função, pela propriedade universal de $\mathscr{F}(M)$, existe $\pi : \mathscr{F}(M) \to M$ morfismo de forma que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F}(M) \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, como id_M é sobrejetor, temos que π é um epimorfismo e, consequentemente,

$$M \cong \mathscr{F}(M)/\mathrm{Nuc}(\pi).$$

$\square$

Definição 2.14. Dizemos que uma sequência de R-módulos $M_1, \cdots, M_n$ e morfismos $\{f_k : M_k \to M_{k+1}\}_{k\in\{1,\cdots,n-1\}}$ é exata se $\mathrm{Nuc}(f_{k+1}) = \mathrm{Im}(f_k)$, para todo $k \in \{1, \cdots, n-2\}$. Uma sequência exata curta é uma sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0,$$

em que 0 denota o R-módulo trivial de um elemento e $0 \to M$ e $P \to 0$ denotam a inclusão e a projeção canônicas, respectivamente.

Proposição 2.15. *Considere a sequência exata*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0 .$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) existe $h \in \mathrm{Hom}(N,M)$ tal que $h \circ f = \mathrm{id}_M$;

(ii) existe $k \in \mathrm{Hom}(P,N)$ tal que $g \circ k = \mathrm{id}_P$;

(iii) $N \cong M \oplus P$.

Demonstração. $(iii) \Rightarrow (i)$: observemos que como f é injetora, então M e $\mathrm{Im}(f)$ são isomorfos. Desta forma, temos que $N \cong \mathrm{Im}(f) \oplus P$.

Definamos $h : N \to M$ da seguinte maneira: dado $n \in N$, podemos escrever $n = m + p$, em que $m \in \mathrm{Im}(f)$ e $p \in P$. Como f é injetora, existe um único $x \in M$ tal que $m = f(x)$. Definamos $h(n) = x$ e notemos que h está bem definida, pois a soma é direta e f é injetora. Facilmente verificamos que h é um homomorfismo e, além disso, para todo $m \in M$, podemos escrever

$$f(m) = f(m) + 0,$$

donde

$$h(f(m)) = m.$$

Portanto $h \circ f = \mathrm{id}_M$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: mostremos inicialmente que $N = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Nuc}(h)$. Para tanto, seja $n \in N$ e consideremos $y = (f \circ h)(n)$. Seja $z = n - y$. Então

$n = z + y$, em que $y \in \text{Im}(f)$ e

$$h(z) = h(n) - h(f(h(n))) = h(n) - h(n) = 0,$$

ou seja, $z \in \text{Nuc}(h)$. Para mostrarmos que a soma é direta, consideremos $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Nuc}(h)$. Então $h(x) = 0$ e existe $m \in M$ tal que $x = f(m)$. Desta forma,

$$0 = h(x) = h(f(m)) = m.$$

Logo, $x = 0$ e, portanto, $N = \text{Im}(f) \oplus \text{Nuc}(h)$. Como $M \cong \text{Im}(f)$, basta mostrarmos que $P \cong \text{Nuc}(h)$.

Como g é sobrejetor, para todo $p \in P$ existe $n = n' + y \in N$ tal que $g(n) = p$, em que $n' \in \text{Im}(f)$ e $y \in \text{Nuc}(h)$. Assim,

$$p = g(n') + g(y) = g(y).$$

Logo, para todo $p \in P$ existe $y \in \text{Nuc}(h)$ tal que $g(y) = p$, ou seja, $P \subset g(\text{Nuc}(h)))$. Como claramente $g(\text{Nuc}(h)) \subset P$, a igualdade segue.

Por outro lado, se $y \in \text{Nuc}(h)$ e $g(y) = 0$, então $y \in \text{Im}(f)$ e, consequentemente, $y = 0$, uma vez que $\text{Im}(f) \cap \text{Nuc}(h) = \{0\}$. Desta maneira, $g_{|_{\text{Nuc}(h)}} : \text{Nuc}(h) \to P$ é um isomorfismo e, portanto, $N \cong M \oplus P$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: como f é injetora e a sequência é exata, segue que $N \cong \text{Nuc}(g) \oplus P$.

Definamos $k : P \to N$ da seguinte maneira: dado $p \in P$ existe $n \in N$ tal que $g(n) = p$, uma vez que g é sobrejetora. Sejam $x \in \text{Nuc}(g)$ e $y \in P$ tais que $n = x + y$. Assim,

$$p = g(n) = g(x) + g(y) = g(y).$$

Definamos $k(p) = y$ e notemos que k está bem definida. Sejam $n, n' \in N$ tais que

$$g(n) = p = g(n'),$$

e suponhamos que $n = x + y$ e $n' = x' + y'$, em que $x, x' \in \text{Nuc}(g)$ e $y, y' \in P$. Assim,

$$g(y) = g(n) = g(n') = g(y')$$

e, portanto $y - y' \in \text{Nuc}(g) \cap P$. Como a soma é direta, temos que $y - y' = 0$ e, consequentemente, $y = y'$.

Para mostrarmos que k é morfismo, sejam $a \in R$ e $p, p' \in P$. Então existem $n = x + y$ e $n' = x' + y'$ elementos de N tais que $p = g(n) = g(y)$ e $p' = g(n') = g(y')$. Assim, $k(p) = y$, $k(p') = y'$ e

$$ap + p' = ag(y) + g(y') = g(ay + y'),$$

pois g é morfismo e, portanto

$$k(ap+p') = ay+y' = ak(p)+k(p').$$

Logo k é um homomorfismo entre R-módulos e, além disso, para todo $p \in P$, com $p = g(n)$ e $n = x+y$,

$$(g \circ k)(p) = g(y) = g(n) = p,$$

ou seja, $g \circ k = \mathrm{id}_P$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: mostremos que $N \cong \mathrm{Nuc}(g) \oplus \mathrm{Im}(k)$. Para tanto, notemos que para todo $n \in N$,

$$n = (n - (k \circ g(n))) + (k \circ g)(n),$$

em que $n - (k \circ g(n)) \in \mathrm{Nuc}(g)$ e $(k \circ g)(n) \in \mathrm{Im}(k)$. Para vermos que a soma é direta, seja $n \in \mathrm{Nuc}(g) \cap \mathrm{Im}(k)$. Então $g(n) = 0$ e existe $p \in P$ tal que $n = k(p)$. Desta forma,

$$p = g(k(p)) = g(n) = 0$$

e, portanto, $n = 0$. Logo $N \cong \mathrm{Nuc}(g) \oplus \mathrm{Im}(h)$.

Pela exatidão, temos que $\mathrm{Nuc}(g) = \mathrm{Im}(f) \cong M$. Por outro lado, como $g \circ k = \mathrm{id}_P$, temos que k é injetora e, consequentemente, $\mathrm{Im}(k) \cong P$. Logo, $N \cong M \oplus P$.

$\square$

Uma sequência que satisfaz um (e, portanto, todos) item da proposição anterior é denominada uma sequência com cisão.

Definição 2.16. Um R-módulo à esquerda M é chamado projetivo se todo homomorfismo sobrejetor $p : N \to M$ possui inversa à direita, isto é, existe um homomorfismo $s : M \to N$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_M$.

Como nos assegura o seguinte teorema, isto é equivalente a dizermos que M é um somando direto de um R-módulo livre.

Teorema 2.17. *Seja P um R-módulo. São equivalentes:*

(i) P é projetivo.

(ii) Se $\varphi \in \mathrm{Hom}(P,N)$ e $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ é um epimorfismo, então existe

$\theta \in \mathrm{Hom}(R,M)$ *tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\theta"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\
M \arrow[r, two heads, "f"'] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(iii) Se

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é exata, então

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,L) \xrightarrow{f\circ\_} \mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{g\circ\_} \mathrm{Hom}(P,N) \longrightarrow 0$$

é sequência exata de grupos abelianos.

(iv) Toda sequência exata

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

possui cisão.

(v) Se $g \in \mathrm{Hom}(M,P)$ é epimorfismo, então existe um R-módulo Q tal que $M \cong P \oplus Q$.

(vi) P é somando direto de um módulo livre.

Demonstração. Facilmente mostramos que $(i) \Leftrightarrow (iv)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$:

1. Como f é injetora, então claramente $f\circ\_$ também o é.

2. $g\circ\_$ é sobrejetor: seja $\varphi \in \mathrm{Hom}(P,N)$. Então, por (i), existe morfismo $\theta : P \to M$ tal que $\varphi = g\circ\theta$.

3. $\mathrm{Im}(f\circ\_) = \mathrm{Nuc}(g\circ\_)$: como $g\circ f = 0$, então $\mathrm{Im}(f\circ\_) \subset \mathrm{Nuc}(g\circ\_)$.

   Para mostrarmos a inclusão inversa, seja $\psi \in \mathrm{Nuc}(g\circ\_)$. Logo $g\circ\psi = 0$ e, para todo $p \in P$, temos que $\psi(p) \in \mathrm{Nuc}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Portanto existe um único $l_p \in L$ tal que $\psi(p) = f(l_p)$, pois f é injetora. Desta forma,

$$\begin{array}{rcl}\varphi : P & \to & L \\ p & \mapsto & l_p, \quad (\text{com } f(l_p) = \psi(p))\end{array}$$

está bem definida e $\psi = f \circ \varphi$. Além disso, é fácil ver que ψ é um homomorfismo.

Logo, $\mathrm{Nuc}(g \circ \_) \subset \mathrm{Im}(f \circ \_)$ e a igualdade é válida.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Seja

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

uma sequência exata. Então

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,L) \xrightarrow{f\circ\_} \mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{g\circ\_} \mathrm{Hom}(P,P) \longrightarrow 0$$

também o é. Desta forma, como $\mathrm{id}_P \in \mathrm{Hom}(P,P)$, existe $\theta \in \mathrm{Hom}(P,M)$ tal que $\mathrm{id}_P = g \circ \theta$. Logo a primeira sequência acima possui cisão.

$(iv) \Rightarrow (v)$: seja $g : M \to P$ um epimorfismo. Desta forma

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nuc}(g) \overset{f}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

é exata e, por hipótese, possui cisão. Logo, pela proposição 2.15, M é isomorfos a $P \oplus \mathrm{Nuc}(g)$.

$(v) \Rightarrow (vi)$: pelo teorema 2.13 existem um R-módulo livre F e um epimorfimo $\pi : F \to P$. Logo, por hipótese, existe um R-módulo Q tal que $F \cong P \oplus Q$.

$(vi) \Rightarrow (ii)$: Sejam (F,Φ) um R-módulo livre e Q um R-módulo tais que $F \cong P \oplus Q$ e sejam $\varphi \in \mathrm{Hom}(P,N)$ e $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ um epimorfismo. Suponhamos que F seja gerado pelo conjunto X. Desta forma, para todo $x \in X$, $(\varphi \circ \pi_P)(\Phi(x)) \in N$, em que $\pi_P : P \oplus Q \to P$ é a projeção canônica. Portanto, como f é sobrejetora, existe $m_x \in M$ tal que

$$f(m_x) = (\varphi \circ \pi_P)(\Phi(x)).$$

Note que, pelo Axioma da Escolha, podemos escolher um único $m_x \in M$ para cada x e, portanto, podemos definir uma função

$$\begin{aligned} \Psi : X &\to M \\ x &\mapsto m. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de R-módulo livre, existe um único homomorfismo $\psi : F \to M$ tal que $\Psi = \psi \circ \Phi$.

Também pela propriedade universal de R-módulo livre, existe um único homomorfismo $\overline{\psi}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[d, dashed, "\overline{\psi}"] \\
X \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "f\circ\Psi"'] & N
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim,

$$f\circ\Psi=\varphi\circ\pi_P\circ\Phi, \quad f\circ\Psi=\overline{\psi}\circ\Phi \quad \text{e} \quad f\circ\Psi=f\circ\psi\circ\Phi$$

e, portanto, pela unicidade de $\overline{\psi}$, temos que $\varphi\circ\pi_P=f\circ\psi$, ou seja, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
& F\cong P\oplus Q \arrow[ddl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, shift left, "\pi_P"] & \\
& P \arrow[u, shift left, "i_P"] \arrow[d, "\varphi"] & \\
M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

em que i_P é a inclusão canônica. Se definirmos $\theta:=\psi\circ i_P\in\operatorname{Hom}(P,M)$, então

$$f\circ\theta=f\circ\psi\circ i_P=\varphi\circ\pi_P\circ i_P=\varphi\circ\mathrm{id}_P=\varphi.$$

□

Começamos nosso capítulo definindo um R-módulo e, posteriormente, reduzimos este nosso objeto de estudo para os R-módulos projetivos. Na definição que segue, faremos mais uma e última restrição neste nosso objeto.

Definição 2.18. Um R-módulo à esquerda é chamado finitamente gerado se existem $n\in\mathbb{N}$ e $x_1,\cdots,x_n\in M$ tais que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} R^n & \to & M \\ (a_1,\cdots,a_n) & \mapsto & a_1x_1+\cdots a_nx_n \end{array}$$

é sobrejetora.

Observação 2.19. Observemos que

(i) para todo R-módulo M, $M\cong M$, pois $\mathrm{id}_M: M\to M$ é um isomorfismo;

(ii) se M e N são R-módulos tais que $M \cong N$, então existe $\varphi : M \to N$ isomorfismo. Logo $\varphi^{-1} : N \to M$ é um isomorfismo e, consequentemente, $N \cong M$;

(iii) se M, N e P são R-módulos tais que $M \cong N$ e $N \cong P$, então existem $\varphi : M \to N$ e $\psi : N \to P$ isomorfismos. Assim, $\psi \circ \varphi : M \to P$ é um isomorfismo e, portanto, $M \cong P$.

Logo, $\cong$ é uma relação de equivalência.

Notemos que se P é um R-módulo projetivo e Q é um R-módulo tal que $P \cong Q$, então Q também é projetivo. Da mesma maneira, se P é finitamente gerado e $Q \cong P$, então Q é finitamente gerado.

Definição 2.20. Seja $\mathfrak{Proj}(R)$ o conjunto[1] das classes de isomorfismos de R-módulos projetivos finitamente gerados.

Lema 2.21. *Se definirmos*

$$\begin{array}{rcl} + : \mathfrak{Proj}(R) \times \mathfrak{Proj}(R) & \to & \mathfrak{Proj}(R) \\ ([M],[N]) & \mapsto & [M \oplus N], \end{array}$$

então $(\mathfrak{Proj}(R), +)$ *será um monoide abeliano, isto é, um semigrupo abeliano com unidade.*

Demonstração. Notemos inicialmente que $+$ está bem definida, pois se $M \cong M'$ e $N \cong N'$, temos que $M \oplus N \cong M' \oplus N'$, donde

$$[M] + [N] = [M \oplus N] = [M' \oplus N'] = [M'] + [N'].$$

Além disso, para quaisquer M, N e P R-módulos temos que

(i) $(M \oplus N) \oplus P \cong M \oplus (N \oplus P)$;

(ii) $M \oplus \{0\} \cong M$;

(iii) $M \oplus N \cong N \oplus M$.

Desta forma, por (i), temos que $+$ é associativa e assim, por (ii) e (iii), segue que $(\mathfrak{Proj}(R), +)$ é um semigrupo abeliano com elemento neutro $[\{0\}]$. Portanto $(\mathfrak{Proj}(R), +)$ é um monoide abeliano. $\square$

Definição 2.22. Seja R um anel com unidade. Definimos

$$K_0(R) := G(\mathfrak{Proj}(R)),$$

[1] A proposição 2.33 nos dirá que $\mathfrak{Proj}(R)$ será, de fato, um conjunto.

em que $G(\mathfrak{Proj}(R))$ é o grupo de Grothendieck de $\mathfrak{Proj}(R)$, definido no capítulo 1.

Para o exemplo 2.24, precisaremos do seguinte resultado, cuja demonstração está em (Bland, 2011), página 132 e (Dummit; Foote, 2004), página 462. Lembremos que, dado um elemento x de um R-módulo M, o anulador de x é definido por $Ann(x) = \{a \in R : ax = 0\}$.

Teorema 2.23. *Sejam R um domínio de ideais principais e M um R-módulo finitamente gerado.*

(i) Então M tem a decomposição

$$M = R^s \oplus x_1R \oplus \cdots \oplus x_kR,$$

em que

$$Ann(x_1) \supseteq Ann(x_2) \supseteq \cdots \supseteq Ann(x_k) \neq \emptyset.$$

Os inteiros s e k são únicos e, para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$, x_iR é único a menos de isomorfismo. Além disso, existem $a_1, \cdots, a_k \in R$ tais que

$$M \cong R^s \oplus R/\langle a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle a_k \rangle,$$

e

$$a_1|a_2,\ a_2|a_3,\ \cdots,\ a_{n-1}|a_n.$$

(ii) O conjunto

$$T(M) := \{x \in M : ax = 0 \ \textit{ para algum } \ a \in R \setminus \{0\}\}$$

é igual a $\{0\}$ se, e somente se, M é um R-módulo livre.

(iii) Na decomposição em (i),

$$T(M) \cong R/\langle a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle a_n \rangle.$$

Exemplo 2.24. *Se R é um domínio de ideais principais, então $K_0(R) = \mathbb{Z}$. Em particular, $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja M um R-módulo projetivo finitamente gerado. Então pelo teorema 2.23, existem únicos $s \in \mathbb{Z}_+$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$M \cong R^s \oplus R/\langle a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle a_k \rangle.$$

Como M é projetivo, então M é somando direto de um R-módulo livre L e, pelo teorema 2.23, item (ii), temos que $T(L) = \{0\}$ e, portanto,

$T(M) = T(L) \cap M = \{0\}$. Logo, pelos itens (i) e (iii) do teorema 2.23,

$$R/\langle a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle a_n \rangle = 0,$$

ou seja, $M \cong R^s$ e, portanto, $\mathfrak{Proj}(R) = \{[R^n] : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Definamos

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathfrak{Proj}(R) & \to & \mathbb{Z}_+ \\ [R^n] & \mapsto & n \end{array}$$

e notemos que φ está bem definida, pois se $[R^n], [R^m] \in \mathfrak{Proj}(R)$ são tais que $[R^m] = [R^n]$, então $R^m \cong R^n$ e, portanto, pela unicidade do teorema 2.23, $n = m$.

Sejam $[R^n], [R^m] \in \mathfrak{Proj}(R)$. Então,

$$\begin{array}{rcl} \varphi([R^n] + [R^m]) & = & \varphi[R^n \oplus R^m] \\ & = & \varphi[R^n \times R^m] \\ & = & \varphi[R^{n+m}] \\ & = & n + m \\ & = & \varphi([R^n]) + \varphi([R^m]), \end{array}$$

ou seja, φ é um homomorfismo. Facilmente vemos que φ é bijetora e, portanto, $\mathfrak{Proj}(R) \cong \mathbb{Z}_+$. Como $G(\mathbb{Z}_+) \cong \mathbb{Z}$, concluímos que

$$K_0(R) = G(\mathfrak{Proj}(R)) \cong \mathbb{Z}.$$

□

Agora que definimos o grupo K_0 de um anel unital R, demonstraremos alguns resultados que nos auxiliarão no nosso objetivo principal desse capítulo, que é mostrar a equivalência entre a K-teoria de C^*-álgebras unitais e a K-teoria algébrica. Isto é, mostrar que se A é uma C^*-álgebra, então $K_0(A)$ é isomorfo a $K_0(A)$, A anel unital.

Definição 2.25. Seja R um anel. Definimos $M_n(R)$ como sendo o anel de matrizes de ordem n cujas entradas são elementos de R.

Para $m \leq n$, podemos ver $M_m(R)$ como um subanel de $M_n(R)$ via

$$\begin{array}{rcl} M_m(R) & \to & M_n(R) \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Seja $M_\infty(R) := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n(R)$, com a identificação anterior.

Observação 2.26. Notemos que $M_\infty(R)$ é um anel. Se $a,b \in M_\infty(R)$, então existem $n,m \in \mathbb{N}$ tais que $a \in M_n(R)$ e $b \in M_m(R)$. Seja $k = \max\{n,m\}$. Logo, pela identificação acima, $a,b \in M_k(R)$ e, portanto, podemos calcular $a+b$ e ab em $M_k(R)$.

Observemos que se $f \in M_\infty(R)$, então podemos transformar f em uma matriz infinita, apenas acrescentando (infinitos) zeros.

Lema 2.27. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} h : M_n(R) & \to & \mathrm{Hom}_R(R^n, R^n) \\ A & \mapsto & T_A. \end{array}$$

é um isomorfismo de anéis em que $T_A(x) = x \cdot A^T$, para todo $x \in R^n$.

Demonstração. Mostremos inicialmente que h é isomorfismo de R-módulos:

(i) h é injetora.

Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(R)$ tais que $T_A = T_B$. Desta forma, temos que para todo $i \in \{1,\cdots,n\}$

$$T_A(e_i) = T_B(e_i),$$

em que $e_i \in R^n$ é o elemento cuja i-ésima coordenada é 1_R e as demais, 0_R. Assim,

$$\begin{pmatrix} a_{1i} & \dots & a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1i} & \dots & b_{ni} \end{pmatrix},$$

ou seja, para quaisquer $i,j \in \{1,\cdots,n\}$, $a_{ij} = b_{ij}$. Logo, $A = B$ e h é injetora.

(ii) h é sobrejetora.

Seja $T : R^n \to R^n$ homomorfismo entre R-módulos e consideremos

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix}^T.$$

Assim, se $A = [a_{ij}]$, então

$$T(e_i) = (a_{1i},\cdots,a_{ni}).$$

Deste modo, se $(r_1,\cdots,r_n)\in R^n$, então

$$\begin{aligned}
\left(r_1\cdots r_n\right)A^T &= \left(r_1\cdots r_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} r_i a_{1i} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} r_i a_{ni}\right)\\
&= r_1\left(a_{11}\cdots a_{n1}\right)+\cdots+r_n\left(a_{1n}\cdots a_{nn}\right)\\
&= r_1T(e_1)+\cdots+r_nT(e_n)\\
&= T(r_1,\cdots,r_n),
\end{aligned}$$

isto é, $T=h(A)$.

(iii) h é um homomorfismo de anéis.

Sejam $A,B\in M_n(R)$ e $r=(r_1,\cdots,r_n)\in R^n$. Desta forma,

(a)

$$\begin{aligned}
h(A+B)(r) &= r\cdot(A+B)^T\\
&= r\cdot A^T+r\cdot B^T\\
&= h(A)(r)+h(B)(r).
\end{aligned}$$

Como $r\in R^n$ é arbitrário, temos que $h(A+B)=h(A)+h(B)$.

(b)

$$\begin{aligned}
h(AB)(r) &= r\cdot(AB)^T\\
&= r\cdot(B^TA^T)\\
&= h(A)(r\cdot B^T)\\
&= h(A)\circ h(B)(r).
\end{aligned}$$

Novamente, como $r\in R^n$ é qualquer, concluímos que

$$h(AB)=h(A)\circ h(B),$$

o que finaliza esta demonstração.

$\square$

Em um anel R, existem elementos que nos lembram das projeções de uma C^*-álgebra A, de uma certa forma. Estes elementos são chamados de idempotentes.

Definição 2.28. Seja R um anel. Um elemento $e \in R$ é chamado de idempotente se $e^2 = e$.

Notação : $\mathrm{Idem}(R) = \{e \in R : e^2 = e\}$.

Surge então a seguinte pergunta: na K-teoria de C^*-álgebras unitais, usamos as projeções para definir o grupo K_0. Não seria possível também usarmos os idempotentes em vez de R-módulos projetivos finitamente gerados na K-teoria algébrica?

A resposta é sim! A partir de agora trabalharemos para mostrar que podemos definir o K_0 de um anel unital R via R-módulos projetivos finitamente gerados como também via idempotentes. Comecemos com a seguinte relação de equivalência.

Definição 2.29. Dizemos que $e_1, e_2 \in \mathrm{Idem}(R)$ são equivalentes, $e_1 \approx_0 e_2$, se existem $v, w \in R$ tais que $e_1 = vw$ e $e_2 = wv$.

Notemos que $\approx_0$ é uma relação de equivalência. Com efeito,

(i) Reflexiva:

Seja $e \in \mathrm{Idem}(R)$. Desta forma, $e = ee = e$, donde $e \approx_o e$.

(ii) Simétrica:

Sejam $e_1, e_2 \in \mathrm{Idem}(R)$ tais que $e_1 \approx_0 e_2$. Desta forma, existem v', w' em R tais que
$$e_1 = v'w' \quad \text{e} \quad e_2 = w'v'.$$
Logo, se considerarmos $v = w'$ e $w = v'$, teremos que
$$e_2 = vw \quad \text{e} \quad e_1 = wv,$$
e, portanto, $e_2 \approx_0 e_1$.

(iii) Transitiva:

Sejam $e_1, e_2, e_3 \in R$ tais que $e_1 \approx_0 e_2$ e $e_2 \approx_0 e_3$. Assim existem v, w, u, t em R tais que
$$e_1 = vw \quad e_2 = wv = ut \quad \text{e} \quad e_3 = tu.$$
Assim, se considerarmos $z = vu$ e $x = tw$, teremos que
$$zx = vutw = ve_2w = vwvw = e_1^2 = e_1$$

e
$$xz = twvu = te_2u = tutu = e_3^2 = e_3,$$
ou seja, $e_1 \approx_0 e_3$.

Definição 2.30. Definamos $V(R) := \mathrm{Idem}(M_\infty(R))/\approx_0$ e, para e em $\mathrm{Idem}(M_\infty(R))$, denotemos por $[e]_V$ a classe de equivalência de e em $V(R)$.

Definamos em $\mathrm{Idem}(M_\infty(R))$ a seguinte operação binária: para e, f em $\mathrm{Idem}(M_\infty(R))$
$$e \oplus f = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$
Nosso próximo passo é mostrar que $(V(R), +)$ é um semigrupo abeliano, em que $[e]_V + [f]_V = [e \oplus f]_V$. Para tanto, precisaremos do seguinte resultado.

Proposição 2.31.

(i) Sejam $e, f \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$ e suponhamos que $e \approx_0 f$. Então existem c e d tais que
$$e = cd, \quad f = dc, \quad cdc = c \quad \text{e} \quad dcd = d.$$

(ii) Para cada $e \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $e \oplus 0_n \approx_0 e$, em que 0_n é o elemento neutro de $M_n(R)$.

Demonstração. (i) Como $e \approx_0 f$, temos que existem a e b tais que
$$e = ab \quad \text{e} \quad f = ba.$$
Definamos $c = aba$ e $d = bab$. Desta forma,

(a) $cd = ababab = e^3 = e$,
(b) $dc = bababa = f^3 = f$,
(c) $cdc = ababababa = af^4 = af = aba = c$,
(d) $dcd = babababab = be^4 = be = bab = d$.

(ii) Sejam $e \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $e \in \mathrm{Idem}(M_m(R))$. Definamos
$$v = \begin{pmatrix} e & 0_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} e \\ 0_{n,m} \end{pmatrix}.$$
Assim, $e = vw$ e $e \oplus 0_n = wv$, ou seja, $e \approx_0 e \oplus 0_n$.

□

Mostremos agora que a operação binária

$$[e]_V + [f]_V = [e \oplus f]_V, \quad \text{para} \quad e, f \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R)),$$

está bem definida. Para tanto, sejam $e, e', f, f' \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$ tais que

$$e \approx_0 e' \quad \text{e} \quad f \approx_0 f'.$$

Desta forma, existem $a, b, c, d \in M_\infty(R)$ tais que

$$e = ab, \quad e' = ba, \quad f = cd \quad \text{e} \quad f' = dc.$$

Sejam $v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Assim,

$$vw = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & cd \end{pmatrix} = e \oplus f$$

e

$$wv = \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & dc \end{pmatrix} = e' \oplus f'$$

e, portanto, $e \oplus f \approx_0 e' \oplus f'$, isto é, $[e \oplus f]_V = [e' \oplus f']_V$. Concluímos então que $+$ está bem definida.

Proposição 2.32. *$(V(R), +)$ é um monoide abeliano.*

Demonstração. Pela proposição 2.31, $[0_n]_V$, para $n \in \mathbb{N}$, é o elemento neutro de $(V(R), +)$.

Sejam agora $e, f \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$ e definamos

$$v = \begin{pmatrix} 0 & e \\ f & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} 0 & f \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $vw = e \oplus f$ e $wv = f \oplus e$ e, desta forma,

$$[e]_V + [f]_V = [f]_V + [e]_V.$$

Portanto, $(V(R), +)$ é comutativo e possui elemento neutro. Além disso, como para quaisquer $e, f, g \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$

$$([e]_V + [f]_V) + [g]_V = [e]_V + ([f]_V + [g]_V),$$

concluímos que $(V(R), +)$ é um monoide abeliano. □

Os seguintes resultados nos ajudarão a demonstrar que $(V(R),+)$ e $(\mathfrak{Proj}(R),+)$ são semigrupos isomorfos.

Na proposição seguinte, R^∞ é a soma direta de enumeravéis cópias de R.

Proposição 2.33. *Todo R-módulo projetivo finitamente gerado é da forma $R^\infty \cdot e$, para algum $e \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$. Reciprocamente, tais módulos são finitamente gerados e projetivos.*

Demonstração. Seja M um R-módulo projetivo finitamente gerado. Desta forma, existem $n \in \mathbb{N}$ e um epimorfismo $\pi : R^n \to M$. Como M é projetivo, existe $i : M \to R^n$ tal que $\pi \circ i = \mathrm{id}_M$. Assim, i é injetora, pois possui inversa à esquerda.

Por outro lado, notemos que $i \circ \pi : R^n \to R^n$ é um homomorfismo idempotente, uma vez que

$$(i \circ \pi) \circ (i \circ \pi) = i \circ \pi \circ i \circ \pi = i \circ \mathrm{id}_M \circ \pi = i \circ \pi.$$

Desta forma, pelo lema 2.27, existe $f \in M_n(R)$ tal que, para $x \in R^n$,

$$(i \circ \pi)(x) = x \cdot f^T.$$

Como $i \circ \pi$ é idempotente, temos que $f^T \in \mathrm{Idem}(M_n(R))$, uma vez que $M_n(R) \cong \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$. Logo,

$$M \cong i(M) = i(\pi(R^n)) = \mathrm{Im}(i \circ \pi) = R^n \cdot f^T.$$

Mostremos que $R^n f^T \cong R^\infty f^T$, lembrando que $f^T \in M_\infty(R)$ e, portanto, pode ser vista como uma matriz infinita. Para tanto, consideremos

$$\begin{array}{rcl} g : R^n \cdot f^T & \to & R^\infty \cdot f^T \\ (r_1 \cdots r_n) \cdot f^T & \mapsto & ((r_1 \cdots r_n) \cdot f^T, 0, 0, \cdots) \end{array}$$

e mostremos que g é um isomorfismo entre R-módulos.

(i) g é um homomorfismo.

Sejam $(r_1 \cdots r_n), (a_1 \cdots a_n) \in R^n$ e $r \in R$. Então

$$\begin{array}{rcl} g(((r_1 \cdots r_n) \cdot f^T) + r((a_1 \cdots a_n) \cdot f^T)) & = & g(((r_1 + ra_1 \cdots r_n + ra_n) \cdot f^T) \\ & = & ((r_1 \cdots r_n) \cdot f^T, 0, 0, \cdots) \\ & + & r((a_1 \cdots a_n) \cdot f^T, 0, 0, \cdots) \\ & = & g((r_1 \cdots r_n) \cdot f^T) \\ & + & rg((a_1 \cdots a_n) \cdot f^T). \end{array}$$

(ii) g é injetor.

Seja $(a_1 \cdots a_n) \cdot f^T \in \operatorname{Nuc} g$. Desta forma, $g((a_1 \cdots a_n) \cdot f^T) = 0$ e, portanto,

$$((a_1 \cdots a_n) \cdot f^T, 0, 0, \cdots) = 0,$$

ou seja, $(a_1 \cdots a_n) \cdot f^T = 0$. Logo, g é injetor.

(iii) Notemos que g é sobrejetor, uma vez que

$$R^\infty \cdot f^T = \{((r_1 \cdots r_n) \cdot f^T, 0, 0, \cdots) : (r_1 \cdots r_n) \in R^n\}.$$

Assim, temos que $R^n \cdot f^T \cong R^\infty \cdot f^T$ e, consequentemente, $M \cong R^\infty \cdot f^T$. Pondo $e = f^T$, chegamos ao resultado desejado.

Por outro lado, mostremos que se $e \in \operatorname{Idem}(M_\infty(R))$, então $R^\infty \cdot e$ é um R-módulo projetivo finitamente gerado.

Como $e \in \operatorname{Idem}(M_\infty(R))$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $e \in M_m(R)$ e, assim,

$$R^\infty \cdot e \cong R^m \cdot e.$$

Notemos que $\{e_1 \cdot e, \cdots, e_m \cdot e\}$ gera $R^m \cdot e$, em que, para $i \in \{1, \cdots, m\}$, e_i é o elemento em R^m que vale 1 na i-ésima posição e 0 nas demais. Com efeito, seja $(r_1 \cdots r_m) \cdot e \in R^m \cdot e$. Assim,

$$\begin{aligned} (r_1 \cdots r_m) \cdot e &= (r_1 e_1 + \cdots + r_m e_m) \cdot e \\ &= r_1(e_1 \cdot e) + \cdots + r_m(e_m \cdot e), \end{aligned}$$

e, portanto $R^m \cdot e$ é finitamente gerado. Agora, como R^m é um R-módulo livre e

$$R^m \cong (R^m \cdot e) \oplus (R^m \cdot (1-e)),$$

via

$$x \mapsto x \cdot e + x \cdot (1-e),$$

temos que $R^m \cdot e$ é projetivo, uma vez que é somando direto de um módulo livre.

Concluímos então que $R^\infty \cdot e$ é um R-módulo projetivo finitamente gerado. $\square$

A proposição acima nos diz que

$$\mathfrak{Proj}(R) = \{[R^\infty \cdot e] : e \in \operatorname{Idem}(M_\infty(R))\}$$

e, portanto, podemos dizer que $\mathfrak{Proj}(R)$ está indexado por $\operatorname{Idem}(M_\infty(R))$. Como este é um conjunto, segue que $\mathfrak{Proj}(R)$ também o é.

Proposição 2.34. *Sejam* $e_1, e_2 \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$. *Então existe um isomorfismo entre R-módulos* $R^\infty \cdot e_1 \cong R^\infty \cdot e_2$ *se, e somente se,* $e_1 \approx_0 e_2$.

Demonstração. Sejam $e_1, e_2 \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$. Desta forma, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $e_1 \in \mathrm{Idem}(M_m(R))$ e $e_2 \in \mathrm{Idem}(M_n(R))$.

Suponhamos que $R^\infty \cdot e_1 \cong R^\infty \cdot e_2$ e seja $\varphi : R^m \cdot e_1 \to R^n \cdot e_2$ um isomorfismo. Notemos que

$$R^m \cong (R^m \cdot e_1) \oplus (R^m \cdot (1 - e_1))$$

e

$$R^n \cong (R^n \cdot e_2) \oplus (R^n \cdot (1 - e_2))$$

e definamos

$$\begin{array}{rcl} f : R^m & \to & R^n \\ (r_1, \cdots, r_m) & \mapsto & \varphi((r_1, \cdots, r_m) \cdot e_1). \end{array}$$

Como φ é um homomorfismo, então f também o é. Se $k = \text{máx}\{n, m\}$, podemos considerar $f : R^k \to R^k$, adicionando zeros sempre que necessário.

Analogamente, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : R^n & \to & R^m \\ (r_1, \cdots, r_n) & \mapsto & \varphi^{-1}((r_1, \cdots, r_n) \cdot e_2). \end{array}$$

Da mesma maneira, temos que $\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_R(R^k, R^k)$. Desta forma, pelo lema 2.27 existem $v, w \in M_k(R)$ tais que, para $x \in R^m$ e $y \in R^n$,

$$f(x) = x \cdot v^T \quad \text{e} \quad \widetilde{f}(y) = y \cdot w^T.$$

Afirmamos que $e_1 = v^T w^T$ e $e_2 = w^T v^T$. Com efeito, seja $x \in R^m$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} x \cdot (v^T w^T) & = & \widetilde{f}(f(x)) \\ & = & \widetilde{f}(\varphi(xe_1)) \\ & = & \varphi^{-1}[\varphi(xe_1)e_2] \\ & = & \varphi^{-1}(\varphi(xe_1)) \\ & = & xe_1, \end{array}$$

uma vez que $\varphi(xe_1) \in R^n \cdot e_2$. Assim, como $x \in R^m$ é arbitrário, concluímos que $e_1 = v^T w^T$.

Analogamente, mostramos que $e_2 = w^T v^T$ e, portanto, $e_1 \approx_0 e_2$.

Por outro lado, suponhamos que $e_1 \approx_0 e_2$. Então existem $v \in M_{m,n}(R)$ e $w \in M_{n,m}(R)$ tais que

$$e_1 = vw \quad \text{e} \quad e_2 = wv.$$

Definamos

$$\begin{array}{rcl} h : R^m \cdot e_1 & \to & R^n \cdot e_2 \\ x & \mapsto & x \cdot v \end{array}$$

e notemos que se $(r_1, \cdots, r_m) \cdot e_1 \in R^m \cdot e_1$, então

$$\begin{array}{rcl} h((r_1 \cdots r_m) \cdot e_1) & = & (r_1 \cdots r_m) \cdot e_1 \cdot v \\ & = & (r_1 \cdots r_m) \cdot vw \cdot v \\ & = & (r_1 \cdots r_m) \cdot v \cdot e_2 \end{array}$$

e, portanto, h está bem definida. Facilmente vemos que h é homomorfismo.

Analogamente, temos que

$$\begin{array}{rcl} g : R^n \cdot e_2 & \to & R^m \cdot e_1 \\ y & \mapsto & y \cdot w \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo de R-módulos. Além disso,

$$g((r_1 \cdots r_n) \cdot e_2) = (r_1 \cdots r_n) \cdot w \cdot e_1.$$

Mostremos que $g = h^{-1}$. Para tanto, seja $(r_1 \cdots r_n) \cdot e_2 \in R^n \cdot e_2$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} (h \circ g)((r_1 \cdots r_n) \cdot e_2) & = & h((r_1 \cdots r_n) \cdot w \cdot e_1) \\ & = & (r_1 \cdots r_n) \cdot w \cdot v \cdot e_2 \\ & = & (r_1 \cdots r_n) \cdot e_2 \cdot e_2 \\ & = & (r_1 \cdots r_n) \cdot e_2, \end{array}$$

ou seja, $h \circ g = \mathrm{id}_{R^n \cdot e_2}$. Analogamente, mostramos que $g \circ h = \mathrm{id}_{R^m \cdot e_1}$. Desta forma, temos que $R^m \cdot e_1 \cong R^n \cdot e_2$ e, consequentemente,

$$R^\infty \cdot e_1 \cong R^\infty \cdot e_2.$$

□

Corolário 2.35. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} H : V(R) & \to & \mathfrak{Proj}(R) \\ [e] & \mapsto & [R^\infty \cdot e] \end{array}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Notemos inicialmente que a proposição 2.34 nos garante que H está bem definida e, além disso, que H é injetora. Ademais, a proposição 2.33 nos assegura a sobrejetividade de H.

Se $e_1 \in \mathrm{Idem}(M_m(R))$ e $e_2 \in \mathrm{Idem}(M_n(R))$, então

$$R^m \cdot e_1 \oplus R^n \cdot e_2 \cong R^{m+n} \cdot (e_1 \oplus e_2)$$

via

$$\begin{array}{rcl} R^m \cdot e_1 \oplus R^n \cdot e_2 & \to & R^{m+n} \cdot (e_1 \oplus e_2) \\ ((r_1, \cdots, r_m) \cdot e_1), (a_1, \cdots, a_n) \cdot e_2) & \mapsto & (r_1, \cdots, r_m, a_1 \cdots, a_n) \cdot (e_1 \oplus e_2) \end{array}$$

Com isso, concluímos que H é um isomorfismo de semigrupos. □

Pelo corolário acima,

$$G(\mathfrak{Proj}(R)) \cong G(V(R)),$$

isto é, podemos definir o grupo K_0 de um anel R via idempotentes ou via R-módulos projetivos finitamente gerados.

Até aqui estudamos o grupo K_0 de uma C^*-álgebra unital, de uma C^*-álgebra qualquer e de um anel unital R. No caso de C^*-álgebra unital, o fizemos via projeções. Já no caso algébrico, acabamos de ver que podemos fazê-lo via idempotentes.

Surge então a seguinte questão: toda C^*-álgebra é um anel. Será que os grupos K_0 de cada caso são isomorfos?

A resposta desta pergunta está na proposição 2.38 e para demonstrá-la precisaremos da proposição 2.37. Mas antes, notemos que se A é uma C^*-álgebra e $p \in \mathscr{P}(A)$, então podemos considerar a sub-C^*-álgebra

$$pAp = \{pap : a \in A\}.$$

Para mais informações sobre esta C^*-álgebra, ver (Murphy, 1990), seção 3.2.

Observação 2.36. Lembremos que se A é uma C^*-álgebra e $p \in \mathscr{P}(A)$, então p é idempotente. Além isso, se $e \in A$ é idempotente, então e^* também o é, pois

$$e^*e^* = (ee)^* = e^*.$$

Proposição 2.37. *Seja A uma C^*-álgebra.*

(i) Para todo $e \in A$ idempotente, existe uma projeção $p \in A$ tal que $e \approx_0 p$.

(ii) Sejam $p, q \in A$ projeções. Então $p \sim q$ se, e somente se, $p \approx_0 q$.

Demonstração. (i) Seja $e \in A$ idempotente e consideremos

$$h = 1_{\widetilde{A}} + (e - e^*)(e^* - e).$$

Como $(e - e^*)(e^* - e)$ é positivo (pois é da forma x^*x), temos que

$$\sigma((e - e^*)(e^* - e)) \subset [0, \infty)$$

e, portanto, pelo teorema do mapeamento espectral[2], $\sigma(h) \subset [1, \infty)$. Logo, h é inversível em $\widetilde{A}$.

Notemos agora que

$$\begin{aligned} eh &= e(1_{\widetilde{A}} + (e - e^*)(e^* - e)) \\ &= e + (e - ee^*)(e^* - e) \\ &= e + ee^* - ee - ee^*e^* + ee^*e \\ &= ee^*e \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} he &= (1_{\widetilde{A}} + (e - e^*)(e^* - e))e \\ &= e + (e - e^*)(e^*e - e) \\ &= e + ee^*e - e - e^*e + e^*e \\ &= ee^*e. \end{aligned}$$

Além disso, como h é soma de elementos autoadjuntos, temos que h é autoadjunto e, portanto,

$$e^*h = (he)^* = e^*ee^* \quad \text{e} \quad he^* = e^*ee^*.$$

Assim,

$$eh = ee^*e = he \quad \text{e} \quad e^*h = e^*ee^* = he^*$$

[2] ver (Murphy, 1990), página 42.

e, portanto, h comuta com e e e^*. Logo, h^{-1} também comuta com estes elementos. Com efeito,

$$e = h^{-1}he = h^{-1}eh \Rightarrow eh^{-1} = h^{-1}e.$$

Analogamente, mostramos que $h^{-1}e^* = e^*h^{-1}$. Definamos agora

$$p := ee^*h^{-1}$$

e mostremos que p é uma projeção em A. Notemos inicialmente que $p \in A$, pois A é um ideal de $\widetilde{A}$ e $e \in A$. Ademais,

$$\begin{aligned} p^2 &= (ee^*h^{-1})(ee^*h^{-1}) \\ &= ee^*eh^{-1}e^*h^{-1} \\ &= ehh^{-1}e^*h^{-1} \\ &= ee^*h^{-1} \\ &= p \end{aligned}$$

e

$$p^* = (ee^*h^{-1})^* = h^{-1}ee^* = ee^*h^{-1} = p.$$

Na demonstração acima, usamos que h^{-1} é autoadjunto, pois h o é. Com isso, p é uma projeção em A. Por fim, notemos que

$$ep = eee^*h^{-1} = ee^*h^{-1} = p$$

e

$$pe = ee^*h^{-1}e = ee^*eh^{-1} = ehh^{-1} = e,$$

ou seja, $e \approx_0 p$.

(ii) Sejam $p, q \in \mathscr{P}(A)$ e suponhamos que $p \sim q$. Logo, existe $v \in A$ tal que

$$p = v^*v \quad \text{e} \quad q = vv^*$$

e, portanto $p \approx_0 q$.

Por outro lado, suponhamos que $p \approx_0 q$ e p, portanto q, é não nula. Caso contrário, o resultado é imediato. Logo, pela proposição 2.31, existem $a, b \in A$ não nulos tais que

$$p = ab, \quad q = ba, \quad aba = a \quad \text{e} \quad b = bab.$$

Desta forma,

$$b^*b = b^*a^*b^*bab = p^*b^*bp = pb^*bp \in pAp.$$

Seja agora H espaço de Hilbert tal que $A \hookrightarrow B(H)$ e mostremos que para todo $x \in H$,

$$\langle (\|a\|^2 b^*b - p)x, x\rangle \geq 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\langle (\|a\|^2 b^*b - p)x, x\rangle &= \langle \|a\|^2 (b^*b)x - (p^*p)x, x\rangle \\
&= \|a\|^2 \langle bx, bx\rangle - \langle px, px\rangle \\
&= \|a\|^2 \|bx\|^2 - \|px\|^2.
\end{aligned}$$

Como $p = ab$ e A é uma C^*-álgebra, então

$$\|px\| = \|abx\| \leq \|a\|\|bx\|.$$

Assim,

$$\|px\|^2 \leq \|a\|^2\|bx\|^2 \Leftrightarrow \|a\|^2\|bx\|^2 - \|px\|^2 \geq 0.$$

Logo, $\langle (\|a\|^2 b^*b - p)x, x\rangle \geq 0$ e portanto $p \leq \|a\|^2 b^*b$.

Desta forma, como $p = 1_{pAp}$ e $p \neq 0$, temos que $\sigma_{pAp}(\|a\|^2 b^*b) \subset [1, \infty)$ e, consequentemente, $\sigma_{pAp}(b^*b) \subset (0, \infty)$.

Assim, b^*b é inversível em pAp e, portanto, $(b^*b)^{\frac{1}{2}}$ também o é. Seja c o inverso de $(b^*b)^{\frac{1}{2}}$ em pAp. Como $(b^*b)^{\frac{1}{2}}$ é autoadjunto, então

$$c^* = c^*p = c^*(b^*b)^{\frac{1}{2}}c = ((b^*b)^{\frac{1}{2}}c)^*c = p^*c = pc = c$$

e, portanto, c é autoadjunto. Definamos $v := bc$. Desta forma,

$$v^*v = c^*b^*bc = c^*(b^*b)^{\frac{1}{2}}(b^*b)^{\frac{1}{2}}c = pp = p$$

e, como $qv = qbc = babc = bc = v$,

$$\begin{aligned} vv^* &= (qv)(qv)^* \\ &= qbcc^*b^*q \\ &= bpcc^*b^*ba \\ &= bpcc^*(b^*b)^{\frac{1}{2}}(b^*b)^{\frac{1}{2}}a \\ &= bpcp(b^*b)^{\frac{1}{2}}a \\ &= bpc(b^*b)^{\frac{1}{2}}a \\ &= bpa = qba \\ &= q. \end{aligned}$$

Logo $p \sim q$, o que finaliza esta prova.

□

Proposição 2.38. *Se A é uma C^*-álgebra unital, então a aplicação*

$$\begin{aligned} H : \mathscr{D}(A) &\rightarrow V(A) \\ [p]_{\mathscr{D}} &\mapsto [p]_V, \end{aligned}$$

em que $\mathscr{D}(A) = \mathscr{P}_\infty(A)/\sim_0$ e $V(A) = \mathrm{Idem}(M_\infty(A))/\approx_0$, é um isomorfismo de semigrupos.

Demonstração. Mostremos inicialmente que H está bem definida. Para tanto, sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q \in \mathscr{P}_\infty(A)$ tais que $[p]_{\mathscr{D}} = [q]_{\mathscr{D}}$. Podemos supor que p e q possuem o mesmo tamanho, pois se $p \in \mathscr{P}_n(A)$ e $q \in \mathscr{P}_m(A)$, em que $n, m \in \mathbb{N}$, então, pondo $k = \max\{n, m\}$,

$$p \oplus 0_{k-n} \sim_0 p \sim_0 q \sim_0 q \oplus 0_{k-m}$$

e, portanto, $p \oplus 0_{k-n} \sim q \oplus 0_{k-m}$, uma vez que possuem o mesmo tamanho e $[p]_{\mathscr{D}} = [p \oplus 0_{k-n}]_{\mathscr{D}} = [q \oplus 0_{k-m}]_{\mathscr{D}} = [q]$.

Assim, $p \sim q$ e, pela proposição 2.37, $p \approx_0 q$, isto é $[p]_V = [q]_V$.

Por outro lado, se $p, q \in \mathscr{P}_n(A)$ são tais que $[p]_V = [q]_V$, temos que $p \approx_0 q$ e, consequentemente, pela proposição 2.37, $p \sim q$, isto é, H é injetora.

Para vermos que H é sobrejetora, seja $e \in \mathrm{Idem}(M_\infty(R))$. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $e \in \mathrm{Idem}(M_n(R))$ e, pela proposição 2.37, existe $p \in \mathscr{P}_n(A)$ tal que $e \approx_0 p$ e assim $[e]_V = [p]_V$. Logo $H([p]_{\mathscr{D}}) = [e]_V$.

Finalmente, mostremos que H é aditiva. Para tanto, consideremos

$p, q \in \mathscr{P}_n(A)$. Então,

$$\begin{aligned} H([p]_{\mathscr{D}} + [q]_{\mathscr{D}}) &= H([p \oplus q]_{\mathscr{D}}) \\ &= [p \oplus q]_V \\ &= [p]_V + [q]_V \\ &= H([p]_{\mathscr{D}}) + H([q]_{\mathscr{D}}) \end{aligned}$$

e, portanto, H é um isomorfismo. □

A proposição acima nos assegura que se A é uma C^*-álgebra unital, então $\mathscr{D}(A) \cong V(A)$. Logo $G(\mathscr{D}(A) \cong G(V(A))$ e, portanto, temos a resposta da nossa pergunta: sim, o grupo K_0 de uma C^*-álgebra unital A é o mesmo grupo K_0 quando A é vista como um anel unital.

Corolário 2.39. *Seja A uma C^*-álgebra qualquer, então podemos definir $K_0(A)$ via idempotentes.*

Demonstração. Decorre imediatamente da proposição 2.37. □

3 O GRUPO K_0 TOPOLÓGICO

Nosso maior objetivo neste capítulo é demonstrar o Teorema de Serre-Swan, que nos assegura que a categoria $\mathfrak{F}$ dos fibrados vetoriais sobre um espaço topológico compacto Hausdorff X e a categoria $\mathfrak{M}$ dos $C(X)$-módulos projetivos finitamente gerados são equivalentes.

Também introduziremos o K_0 de um espaço topológico X, para isso definiremos e estudaremos algumas propriedades de fibrados vetoriais. Em seguida, trabalharemos para provar a equivalência categórica desejada, isto é, o Teorema de Serre-Swan.

Definição 3.1. Sejam E e X espaços topológicos e $\pi : E \to X$ uma função contínua sobrejetiva, tal que $\pi^{-1}(\{x\})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita. Dizemos que (E,π,X) é trivial sobre um aberto $U \subset X$ se existem $n \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ (com a topologia produto em $U \times \mathbb{C}^n$) de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi'"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

é comutativo, em que $\pi'(x,v) = x$, e tal que para todo $x \in U$ a restrição h_x de h a $\pi^{-1}(\{x\})$ é um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\pi^{-1}(\{x\}) \to \{x\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n.$$

Definição 3.2. Nas mesmas condições da definição anterior, se a tripla (E,π,X) é localmente trivial, ou seja, se cada $x \in X$ possui uma vizinhança aberta U tal que (E,π,X) é trivial sobre ela, dizemos que esta tripla é um fibrado vetorial sobre X.

Observação 3.3. Se (E,π,X) é trivial sobre o aberto U, então também é trivial sobre qualquer aberto $V \subset U$.

De fato, basta notarmos que $h_{|_V}$ é um homeomorfismo, pois é restrição de um homeomorfismo,

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(V) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi'"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

é comutativo e, para todo $x \in V$, h_x é um isomorfismo.

Com as definições acima, podemos também mostrar facilmente que, se X é um espaço topológico e (E,π,X) um fibrado vetorial sobre X, então, para todo $U \subset X$ aberto, $E_{|_U} := \pi^{-1}(U)$ é um fibrado vetorial sobre U.

Definição 3.4. Chamamos o espaço vetorial $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ de fibra associada a x.

Exemplo 3.5. *Sejam X um espaço topológico e $n \in \mathbb{N}$. Então $(X \times \mathbb{C}^n, \pi, X)$ é um fibrado vetorial, em que $X \times \mathbb{C}^n$ está munido da topologia produto e $\pi(x,v) = x$.*

Com efeito, como π é claramente contínua e sobrejetora e $\pi^{-1}(\{x\})$ é um espaço vetorial de dimensão finita para todo $x \in X$, basta provarmos que (E,π,X) é localmente trivial. Para qualquer $x \in X$, basta escolher $U = X$ e observar que $\pi^{-1}(X) = X \times \mathbb{C}^n$. Assim, $h = \mathrm{id}_{X \times \mathbb{C}^n}$ é um homeomorfismo que torna o diagrama da definição 3.1 comutativo.

Para mais exemplos, ver (Hatcher, 2009), página 6.

A proposição a seguir nos dá uma maneira de operar dois fibrados vetoriais que nos será útil posteriormente para definirmos o grupo K_0 de um espaço topológico.

Proposição 3.6. *Sejam X um espaço topológico e (E,π_E,X) e (F,π_F,X) fibrados vetoriais sobre X. Então $(E \oplus F, \nu, X)$ é um fibrado vetorial sobre X, em que*

$$E \oplus F = \{(v,w) \in E \times F : \pi_E(v) = \pi_F(w)\},$$

$\nu(v,w) = \pi_E(v) = \pi_F(w)$ e $E \oplus F$ está munido da topologia induzida de $E \times F$ com a topologia produto.

Demonstração. Notemos inicialmente que, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
(E \oplus F)_x &= \nu^{-1}(\{x\}) \\
&= \{(v,w) \in E \times F : \pi_E(v) = \pi_F(w) = x\} \\
&= \{v \in E : \pi_E(v) = x\} \times \{w \in F : \pi_F(w) = x\} \\
&= \pi_E^{-1}(\{x\}) \times \pi_F^{-1}(\{x\}) \\
&= E_x \times F_x.
\end{aligned}$$

Além disso, como π_E e π_F são contínuas e sobrejetoras, temos que ν também é contínua e sobrejetora.

Ademais, como para cada $x \in X$, E_x e F_x são espaços vetoriais de dimensão finita, temos que $E_x \times F_x$ também o é.

Só nos resta mostrar agora que $E \oplus F$ é localmente trivial. Para tanto, seja $x \in X$. Como E e F são fibrados vetorias, pela observação 3.3, existem

$U \subset X$ aberto contendo x, n_E, n_F números naturais e $h_E : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^{n_E}$ e $h_F : \pi_F^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^{n_F}$ homeomorfismos tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} \pi_E^{-1}(U) \arrow[rr, "h_E"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & U \times \mathbb{C}^{n_E} \arrow[dl, "\pi'_E"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_F^{-1}(U) \arrow[rr, "h_F"] \arrow[dr, "\pi_F"'] & & U \times \mathbb{C}^{n_F} \arrow[dl, "\pi'_F"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

são comutativos, em que $\pi'_E(x,v) = x$ e $\pi'_F(x,w) = x$.

Consideremos agora

$$\begin{array}{rcl} g : U \times (\mathbb{C}^{n_E} \times \mathbb{C}^{n_F}) & \to & \nu^{-1}(U) \\ (x,(v,w)) & \mapsto & (h_E^{-1}(x,v), h_F^{-1}(x,w)) \end{array}$$

e mostremos que o contra domínio de g é um subconjunto de $\nu^{-1}(U)$, ou seja, que g está bem definida.

Claramente para $(x,(v,w)) \in U \times (\mathbb{C}^{n_E} \times \mathbb{C}^{n_F})$, $g((x,(v,w))) \in E \times F$ e, além disso,

$$\pi_E(h_E^{-1}(x,v)) = \pi'_E(x,v) = x = \pi'_F(x,w) = \pi_F(h_E^{-1}(x,w)).$$

Concluímos então que $\mathrm{Im}(g) \subset \nu^{-1}(U)$.

Mostremos agora que g é uma bijeção. Para tanto, consideremos $(x_1,(v_1,w_1)),(x_2,(v_2,w_2)) \in U \times \mathbb{C}^{n_E} \times \mathbb{C}^{n_F}$ tais que

$$g(x_1,(v_1,w_1)) = g(x_2,(v_2,w_2))).$$

Desta forma,

$$(h_E^{-1}(x_1,v_1), h_F^{-1}(x_1,w_1)) = (h_E^{-1}(x_2,v_2), h_F^{-1}(x_2,w_2)).$$

Logo, como h_E^{-1} e h_F^{-1} são injetoras, $(x_1,(v_1,w_1)) = (x_2,(v_2,w_2))$ e, portanto, g é injetora.

Para vermos que g é sobrejetora, seja $(z,t) \in \nu^{-1}(U)$. Então, para algum $x \in U$, $\pi_E(z) = x = \pi_F(t)$.

Portanto, $z \in \pi_E^{-1}(U)$ e $t \in \pi_F^{-1}(U)$. Como h_E^{-1} e h_F^{-1} são sobrejetoras, existem $v \in \mathbb{C}^{n_E}$ e $w \in \mathbb{C}^{n_F}$ tais que

$$h_E^{-1}(x,v) = z \quad \text{e} \quad h_F^{-1}(x,w) = t.$$

Desta forma, $g((x,(v,w)) = (z,t)$ e, portanto, g é sobrejetora.

Defina $h := g^{-1}$. Assim, como g é um homeomorfismo, pois h_E e h_F o são, seque gue h é homeomorfismo. Finalmente, só nos resta mostrar que, para todo $x \in X$, h_x é um isomorfismo. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} h_x : \nu^{-1}(\{x\}) & \to & \{x\} \times \mathbb{C}^{n_E} \times \mathbb{C}^{n_F} \\ (z,t) & \mapsto & (x,u,v), \end{array}$$

em que $u = \pi_2 \circ (h_E)_x(z)$, $v = \pi_2' \circ (h_F)_x(t)$, $\pi_2 : \{x\} \times \mathbb{C}^{n_E} \to \mathbb{C}^{n_E}$ e $\pi_2' : \{x\} \times \mathbb{C}^{n_F} \to \mathbb{C}^{n_F}$ são as projeções canônicas. Como $E_x \cong \mathbb{C}^{n_E}$ e $F_x \cong \mathbb{C}^{n_F}$, concluímos que h_x é um isomorfismo e, portanto, $(E \oplus F, \nu, X)$ é um fibrado vetorial sobre X.

$\square$

Trabalharemos agora para definir o grupo K_0 de um espaço topológico X e as seguintes definições nos ajudarão a fazê-lo.

Definição 3.7. Sejam (E, π_E, X) e (F, π_F, X) dois fibrados vetoriais sobre X. Dizemos que uma função contínua $\varphi : E \to F$ é um homomorfismo de fibrados vetoriais se o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

é comutativo e $\varphi_x := \varphi_{|_{E_x}} : E_x \to F_x$ é linear.

Definição 3.8. Dois fibrados vetoriais (E, π_E, X) e (F, π_F, X) sobre X são isomorfos, $E \cong F$, se existe um homeomorfismo $\varphi : E \to F$ de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

é comutativo e φ_x é linear.

Observação 3.9. Observemos que nesse caso φ_x é um isomorfismo. Com efeito, pela definição 3.7, φ_x é linear e, como φ é um homeomorfismo, temos que φ_x é injetora. Para vermos que φ_x é sobrejetora, seja $y \in F_x$. Como φ é sobrejetora, existe $e \in E$ tal que $\varphi(e) = y$. Se mostrarmos que $e \in E_x$, chegaremos ao resultado desejado. Provemos então tal fato.

Como φ é um homomorfismo de fibrados vetoriais, temos que

$$\begin{aligned} & \pi_F(\varphi(e)) = \pi_E(e) \\ \Leftrightarrow \quad & \pi_F(y) = \pi_E(e) \\ \Leftrightarrow \quad & x = \pi_E(e). \end{aligned}$$

Logo $e \in E_x$ e, consequentemente, φ_x é um isomorfismo.

Observação 3.10. É fácil ver que a relação $\cong$ dada por isomorfismos é uma relação de equivalência.

Definição 3.11. Seja X um espaço topológico. Definimos $\mathrm{Vect}(X)$ como a coleção das classes de isomorfismo de fibrados vetoriais sobre X e denotamos $\langle E \rangle$ a classe de equivalência de E em $\mathrm{Vect}(X)$.

Definamos sobre $\mathrm{Vect}(X)$ a operação binária

$$\langle E \rangle + \langle F \rangle = \langle E \oplus F \rangle$$

e mostremos que esta está bem definida. Sejam E, E', F e F' fibrados vetoriais sobre X tais que $E \cong E'$ e $F \cong F'$. Então existem $\varphi : E \to E'$ e $\psi : F \to F'$ isomorfismos de fibrados vetoriais. Consideremos

$$\begin{aligned} \theta : E \oplus F \quad & \to \quad E' \oplus F' \\ (v, w) \quad & \mapsto \quad (\varphi(v), \psi(w)) \end{aligned}$$

e mostremos que θ é um isomorfismo de fibrados. Como φ e ψ são homeomorfismos e φ_x e ψ_x são lineares, basta provarmos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \oplus F \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\nu"'] & & E' \oplus F' \arrow[dl, "\nu'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

é comutativo, em que $\nu(u, v) = \pi_E(u) = \pi_F(v)$ e $\nu'(u', v') = \pi_{E'}(u') = \pi_{F'}(v')$. Para tanto, seja $(v, w) \in E \oplus F$. Desta forma,

$$\nu'(\theta((v,w)) = \nu'(\varphi(v), \psi(w)) = \pi'_E(\varphi(v)) = \pi_E(v) = \nu(u, v)$$

e, portanto, o diagrama acima é comutativo. Assim, $E \oplus F \cong E' \oplus F'$, ou seja, $+$ é uma operação bem definida.

Proposição 3.12. *Seja X um espaço topológico. Então $(\mathrm{Vect}(X), +)$ é um semigrupo abeliano.*

Demonstração. Como já mostramos acima, $+$ é uma operação bem definida. Resta provarmos então que $(\text{Vect}(X),+)$ é abeliano, pois claramente $+$ é associativa. Sejam então E e F fibrados vetorias sobre X e consideremos

$$\begin{array}{rcl} \eta : E\oplus F & \to & F\oplus E. \\ (v,w) & \mapsto & (w,v) \end{array}$$

Claramente η é um homeomorfismo e, além disso, facilmente podemos ver que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E\oplus F \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "v"'] & & F\oplus E \arrow[dl, "v'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

é comutativo, em que $v'((w,v)) = \pi_E(w) = \pi_F(v)$.

Logo $\langle E\oplus F\rangle = \langle F\oplus E\rangle$ e portanto $(\text{Vect}(X),+)$ é um semigrupo abeliano. $\square$

Definição 3.13. Seja X um espaço topológico. Definimos $K_0(X) = G(\text{Vect}(X))$, em que $G(\text{Vect}(X))$ é o grupo de Grothendieck do semigrupo $\text{Vect}(X)$.

A partir de agora, direcionaremos nosso estudo para provar que a categoria $\mathfrak{F}$ dos fibrados vetoriais sobre X e a categoria $\mathfrak{M}$ dos $C(X)$-módulos projetivos finitamente gerados são categorias equivalentes, isto é, exibiremos um dado funtor e demonstraremos que este é uma equivalência categórica. Desta forma, precisamos da seguinte definição.

Definição 3.14. Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ duas categorias. Dizemos que um funtor covariante $F:\mathfrak{C}\to\mathfrak{D}$ é uma equivalência categórica se

(i) para cada par $A,B\in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ a aplicação

$$F : \text{Hom}(A,B) \to \text{Hom}(F(A),F(B))$$

é uma bijeção,

(ii) para cada $D\in\text{Ob}(\mathfrak{D})$ existe $C\in\text{Ob}(\mathfrak{C})$ tal que $F(C)\cong D$, ou seja, existem morfismos $f:F(C)\to D$ e $g:D\to F(C)$ tais que $fg=\text{id}_D$ e $gf=\text{id}_{F(C)}$.

Nosso primeiro passo rumo à demonstração do teorema de Serre-Swan é associar a cada fibrado vetorial sobre X um $C(X)$-módulo e a cada homomorfismo φ de fibrados vetoriais um morfismo de $C(X)$-módulo.

Façamos isto na definição e lemas que seguem.

Definição 3.15. Dado um fibrado vetorial (E,π,X), dizemos que uma função contínua $s : X \to E$ é um seção se $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$, ou seja, $s(x) \in E_x$ para todo $x \in X$. Denotaremos o conjunto de tais seções por $\Gamma(E)$.

Observação 3.16. Notemos que $\Gamma(E) \neq \emptyset$, para todo (E,π,X) fibrado vetorial, uma vez que

$$\begin{array}{rcl} s : X & \to & E \\ x & \mapsto & 0_{E_x} \end{array}$$

é uma seção. Claramente, $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$ e, assim, resta verificar que s é contínua. Com efeito, seja $x \in X$. Logo, existem U aberto de X contendo x, $n \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ que satisfazem as condições da definição 3.1. Assim, para todo $y \in U$,

$$h \circ s(y) = h(0_{E_y}) = (y,0),$$

uma vez que $h_{|E_y}$ é um isomorfismo, ou seja,

$$s(y) = h^{-1}(y,0).$$

Como h^{-1} é contínua, temos que s é contínua em x. Como $x \in X$ é arbitrário, segue que s é contínua.

Lema 3.17. *Seja X um espaço topológico e (E,π,X) um fibrado vetorial sobre X. Então $\Gamma(E)$ é um $C(X)$-módulo sob as operações*

$$\begin{array}{rcl} + : \Gamma(E) \times \Gamma(E) & \to & \Gamma(E) \\ (s_1,s_2) & \mapsto & s_1 + s_2 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \cdot : C(X) \times \Gamma(E) & \to & \Gamma(E), \\ (f,s) & \mapsto & fs \end{array}$$

em que, para $f \in C(X)$, $s_1,s_2 \in \Gamma(E)$ e $x \in X$,

$$(fs_1)(x) = f(x)s_1(x) \quad e \quad (s_1+s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x).$$

Demonstração. Mostremos primeiramente que estas operações estão bem definidas. Para tanto, sejam $s,s' \in \Gamma(E)$ e $x \in X$. Então, $s(x),s'(x) \in E_x$ e, como este é um espaço vetorial, temos que

$$(s+s')(x) = s(x)+s'(x) \in E_x.$$

Como $x \in X$ é arbitrário, concluímos que $\pi \circ (s+s') = \mathrm{id}_X$. Para mostrarmos que $s+s'$ é contínua, sejam $V \subset E$ aberto e $x \in (s+s')^{-1}(V)$. Como E é um fibrado vetorial, existem $U_x \subset X$ aberto contendo x, $n \in \mathbb{N}$ e um homemorfismo $h : \pi^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{C}^n$ que satisfazem as condições da definição 3.1.

Notemos que $s(x)+s'(x) \in V \cap \pi^{-1}(U_x)$. Como V e $\pi^{-1}(U_x)$ são abertos, temos que $V \cap \pi^{-1}(U_x)$ também o é e $h_{|_{V\cap\pi^{-1}(U_x)}}$ é um homeomorfismo.

Se definirmos $h_2 := \pi_2 \circ h$, em que $\pi_2 : U_x \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é a projeção canônica sobre $\mathbb{C}^n$, temos que, para todo $y \in U_x$,

$$h^{-1}(y, h_2(s(y))+h_2(s'(y))) = (s+s')(y) \in V.$$

E, portanto, $(y, h_2(s(y))+h_2(s'(y))) \in h(V)$, o que equivale a dizermos que $y \in (h_2 \circ s + h_2 \circ s')^{-1}(h_2(V \cap \pi^{-1}(U_x)))$. Como h é um homeomorfismo, π_2 é aberta (ver (Willard, 2004), página 54) e $h_2 \circ s + h_2 \circ s' : X \to \mathbb{C}^n$ é contínua, temos que

$$(s+s')^{-1}(V \cap \pi^{-1}(U_x)) = (h_2 \circ s + h_2 \circ s')^{-1}(h_2(V \cap \pi^{-1}(U_x)))$$

é uma vizinhança aberta de x contida em $(s+s')^{-1}(V)$, ou seja, $(s+s')^{-1}(V)$ é aberto e, portanto, $s+s'$ é contínua.

Como a multiplicação escalar em $\mathbb{C}^n$ também é contínua, um argumento análogo mostra que se $f \in C(X)$ e $s \in \Gamma(E)$, então $fs \in \Gamma(E)$.

Claramente $(\Gamma(E), +)$ é um grupo abeliano.

Ademais,

(i) Para quaisquer $f, g \in C(X)$, $s \in \Gamma(E)$ e $x \in X$,

$$((f+g)s)(x) = (f+g)(x)s(x) = f(x)s(x)+g(x)s(x),$$

como x é arbitrário, $(f+g)s = fs+gs$. Além disso,

$$((fg)s)(x) = f(x)g(x)s(x) = (f(gs))(x),$$

e assim, $(fg)s = f(gs)$.

Denotando 1 pela função constante igual a 1, temos que, para todo x em X,

$$(1 \cdot s)(x) = 1(x)s(x) = s(x).$$

como x é arbitrário, concluímos que $1 \cdot s = s$.

(ii) Para quaisquer $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ e $f \in C(X)$,

$$(f(s_1 + s_2))(x) = f(x)s_1(x) + f(x)s_2(x) = (fs_1 + fs_2)(x)$$

e, portanto, $f(s_1 + s_2) = fs_1 + fs_2$.

Logo $\Gamma(E)$ satisfaz as condições da definição 2.1 e, portanto, $\Gamma(E)$ é um $C(X)$-módulo.

$\square$

Lema 3.18. *Sejam X um espaço topológico, E e F fibrados vetoriais sobre X e $\varphi : E \to F$ um homomorfismo de fibrados vetoriais. Então*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(\varphi) : \Gamma(E) & \to & \Gamma(F) \\ s & \mapsto & \varphi \circ s \end{array}$$

é um homomorfismo de $C(X)$-módulos.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\Gamma(\varphi)$ está bem definida. Com efeito, se $x \in X$, então $s(x) \in E_x$ e, consequentemente, $\varphi(s(x)) \in F_x$, pois φ é um homomorfismo. Além disso, $\varphi \circ s$ é contínua pois φ e s o são.

Mostremos que $\Gamma(\varphi)$ é um homomorfismo entre $C(X)$- módulos. Sejam $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$. Então, para $x \in X$

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(\varphi)(s_1 + s_2)(x) & = & \varphi(s_1(x) + s_2(x)) \\ & = & \varphi(s_1(x)) + \varphi(s_2(x)) \\ & = & (\Gamma(\varphi)(s_1) + \Gamma(\varphi)(s_2))(x). \end{array}$$

Como x é arbitrário, segue que $\Gamma(\varphi)$ é aditiva. Ademais, se $s \in \Gamma(E)$, $f \in C(X)$ e $x \in X$, então

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(\varphi)(fs)(x) & = & (\varphi \circ (fs))(x) \\ & = & \varphi((f(x)s(x))) \\ & = & f(x)\varphi(s(x)) \\ & = & (f(\varphi \circ s))(x) \\ & = & f\Gamma(\varphi)(s)(x), \end{array}$$

pois φ_x é linear. Como $x \in X$ é arbitrário, segue que

$$\Gamma(\varphi)(fs) = f\Gamma(\varphi)(s)$$

e, consequentemente, $\Gamma(\varphi)$ é um homomorfismo. $\square$

Proposição 3.19. *Seja X um espaço topológico. Então Γ é um funtor covariante entre a categoria dos fibrados vetoriais sobre X e a categoria dos $C(X)$-módulos.*

Demonstração. Com efeito, para cada $E \in \mathfrak{F}$ fibrado vetorial, temos pelo lema 3.17 que $\Gamma(E) \in \mathfrak{M}$.

Além disso, para cada par (E,F) de fibrados vetoriais e para qualquer $f : E \to F$, pelo lema 3.18, existe $\Gamma(f) : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ homomorfismo de $C(X)$- módulo.

Ademais, claramente Γ preserva a identidade e, se E,F e G são fibrados vetoriais $f : E \to F$ e $g : F \to G$ são homomorfismos, temos que, para $s \in \Gamma(E)$,

$$\Gamma(g \circ f)(s) = (g \circ f) \circ s = g \circ \Gamma(f)(s) = (\Gamma(g) \circ \Gamma(f))(s).$$

Como s é arbitrário, segue que $\Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f)$ e portanto, Γ é um funtor covariante. $\square$

Corolário 3.20. *Seja X um espaço topológico. Sejam (E,π_E,X) e (F,π_F,X) fibrados vetoriais sobre X tais que $E \cong F$. Então $\Gamma(E) \cong \Gamma(F)$.*

Demonstração. Segue da proposição 3.19. $\square$

Trabalharemos agora para mostrar que, dado um espaço topológico compacto Hausdorff X, para todo $C(X)$-módulo finitamente gerado M existe um fibrado vetorial E sobre X tal que $M \cong \Gamma(E)$. Para tal, precisamos nos assegurar que este isomorfismo é coerente, ou seja, que $\Gamma(E)$ é um $C(X)$-módulo projetivo finitamente gerado.

Definição 3.21. Seja X um espaço topológico e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Definimos o suporte de f por

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Denotamos o conjunto das funções contínuas de suporte compacto por $C_c(X)$.

Definição 3.22. Seja X um espaço topológico e E um fibrado vetorial sobre X. Definimos o suporte de uma seção $s \in \Gamma(E)$ por

$$\text{supp}(s) = \overline{\{x \in X : s(x) \neq 0_{E_x}\}}.$$

Denotamos o conjunto das seções de suporte compacto por $\Gamma_c(E)$.

Observemos que se X é um espaço topológico e (E,π,X) um fibrado vetorial sobre X, então, com as operações herdadas de $C(X)$ e $\Gamma(E)$, temos que $C_c(X)$ e $\Gamma_c(X)$ acima definidos são $C(X)$-módulos.

Teorema 3.23. *Sejam X um espaço compacto Hausdorff e (E,π_E,X) um fibrado vetorial sobre X. Então $\Gamma(E)$ é um $C(X)$-módulo projetivo finitamente gerado.*

Demonstração. Como (E,π_E,X) é um fibrado vetorial, então para cada x em X, existem $U_x \subset X$ aberto contendo x, $n_x \in \mathbb{N}$ e $h_x : \pi_E^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{C}^{n_x}$ tais que o diagrama da definição 3.1 é comutativo.

Logo $\{U_x : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X e, como X é compacto, existem $x_1, \cdots x_k \in X$ tais que

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} U_j,$$

em que $U_j = U_{x_j}$, para $j \in \{1, \cdots k\}$.

Para $j \in \{1, \cdots, k\}$, seja π_0 definida por

$$\begin{array}{rcl} \pi_0 : U_j \times \mathbb{C}^{n_j} & \to & U_j \\ (u, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n_j}) & \mapsto & u \end{array}$$

e, para $m \in \{1, \cdots, n_j\}$, seja $\pi_m : U_j \times \mathbb{C}^{n_j} \to \mathbb{C}^{n_j}$ dada por

$$\pi_m(u, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n_j}) = \alpha_m.$$

Definamos então, para $j \in \{1, \cdots, k\}$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi_j : \Gamma_c(E|_{U_j}) & \to & C_c(U_j)^{n_j} \\ s & \mapsto & (f_1, \cdots, f_{n_j}) \end{array}$$

em que $E|_{U_j} = \pi_E^{-1}(U_j)$ e para $1 \leq m \leq n_j$,

$$f_m = \pi_m \circ h_j \circ s, \text{ em que } h_j = h_{x_j},$$

e mostremos que ψ_j é um isomorfismo entre $C(X)$-módulos.

Notemos que, para $j \in \{1, \cdots, n\}$, a função f_m é contínua e $\operatorname{supp}(f_m) \subset \operatorname{supp}(s)$ é compacto e, portanto, $f_m \in C_c(U_j)$. Logo, ψ_j está bem definida.

Mostremos agora que ψ_j é um isomorfismo:

(i) ψ_j é injetora.

Sejam $s \neq s'$ em $\Gamma_c(E|_{U_j})$. Logo existe $x \in X$ tal que $s(x) \neq s'(x)$.

Portanto, como h_j é injetora, $h_j(s(x)) \neq h_j(s'(x))$. Desta forma, existe $1 \leq m \leq n_j$ tal que $f_m(x) \neq f'_m(x)$, ou seja, $\psi_j(s) \neq \psi_j(s')$.

(ii) ψ_j é sobrejetora.

Seja $(f_1, \cdots, f_{n_j}) \in C_c(U_j)^{n_j}$ e definamos

$$\begin{array}{rcl} g : U_j & \to & U_j \times \mathbb{C}^{n_j} \\ x & \mapsto & (x, f_1(x), \cdots, f_{n_j}(x)). \end{array}$$

Consideremos $s = h_j^{-1} \circ g$ e notemos que $g \in \Gamma_c(U_j \times \mathbb{C}^{n_j})$, pois $\operatorname{supp}(g) = \bigcup_{m=1}^{n_j} \operatorname{supp}(f_m)$, que é compacto. Além disso, se $x \in U_j$, então

$$(\pi_E \circ s)(x) = \pi_E(h_j^{-1}(g(x))) = \pi_E(h_j^{-1}(x, f_1(x), \cdots, f_{n_j}(x))).$$

Mas, como $h_j^{-1}(x, f_1(x), \cdots f_{n_j}(x)) \in \pi_E^{-1}(\{x\})$, temos que

$$(\pi_E \circ s)(x) = x,$$

donde $s \in \Gamma_c(E|_{U_j})$. Ademais, para $m \in \{1, \cdots, n_j\}$,

$$f_m = \pi_m \circ g = \pi_m \circ h_j \circ h_j^{-1} \circ g = \pi_m \circ h_j \circ s$$

e, portanto, $\psi_j(s) = (f_1, \cdots, f_{n_j})$.

(iii) ψ_j é um homomorfismo entre $C(X)$-módulos

Sejam $s_1, s_2 \in \Gamma_c(E|_{U_j})$. Então, como cada π_m é linear em cada fibra e $h_{j|_{E_x}}$ é um isomorfismo,

$$\begin{array}{rcl} \psi_j(s_1 + s_2) & = & (\pi_1 \circ h_j \circ (s_1 + s_2), \cdots, \pi_{n_j} \circ h_j \circ (s_1 + s_2)) \\ & = & (\pi_1 \circ h_j \circ s_1, \cdots \pi_{n_j} \circ h_j \circ s_1) + (\pi_1 \circ h_j \circ s_2, \cdots, \pi_{n_j} \circ h_j \circ s_2) \\ & = & \psi_j(s_1) + \psi_j(s_2). \end{array}$$

Além disso, se $s \in \Gamma_c(E|_{U_j})$ e $f \in C(X)$, então, para $x \in U_j$,

$$(\psi_j(fs))(x) = (\pi_1(h_j(f(x)s(x))), \cdots, \pi_{nj}(h_j(f(s)s(x)))).$$

Mas, como $h_{j|_{E_x}}$ é um isomorfismo e $s(x) \in E_x$, temos que

$$h_j(f(x)s(x)) = f(x)h_j(s(x))$$

e portanto, para todo todo $m \in \{1, \cdots, n_j\}$,

$$\pi_m(h_j(f(x)s(x))) = \pi_m(f(x)h_j(s(x)) = f(x)(\pi_m(h_j(s(x)))),$$

ou seja, $(\psi_j(fs))(x) = (f(\psi_j(s))(x)$. Como $x \in U_j$ é arbitrário, temos que ψ_j é um homomorfismo de $C(X)$-módulos. Desta forma, temos que

$$\Gamma_c(E|_{U_j}) \cong C_c(U_j)^{n_j}.$$

Notemos agora que para $s \in \Gamma_c(E|_{U_j})$ e $f \in C_c(U_j)^{n_j}$, podemos estender s e f continuamente para X, de modo que assumam 0 fora de U_j. (A extensão de f é contínua, pois $X = U_j \cup (X \setminus \operatorname{supp} f)$ e a restrição para cada um destes dois subconjuntos abertos é contínua. Analogamente para s.) Assim, temos que $\Gamma_c(E|_{U_j}) \subset \Gamma_c(E)$ e $C_c(U_j)^{n_j} \subset C_c(X)^{n_j}$, uma vez que $E|_{U_j}$ é aberto de E e U_j aberto de X.

Afirmação: Existem funções contínuas $\varphi_j : U_j \to [0,1]$ de modo que $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$ e

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j^2(x) = 1,$$

para todo $x \in X$.

Primeiramente mostremos que podemos refinar a cobertura aberta $\{U_i\}_{i=1}^k$ para uma cobertura aberta $\{V_1 \cdots, V_n\}$ de X tal que $\overline{V_i} \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$. Para isto, usaremos indução. Seja

$$A = X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_k).$$

Notemos que A é fechado e, como $X = \bigcup_{j=1}^{k} U_j$, temos que $A \subset U_1$.

Logo, como X é compacto Hausdorff, X é normal[1] e, portanto regular. Desta forma, se $x \in A$, existe vizinhança $V_x \ni x$ de modo que $\overline{V_x} \subset U_1$.

Mas, como $A \subset X$ é fechado e X é compacto Hausdorff, A é compacto e, portanto, existem $x_1, \cdots, x_n \in A$ tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} V_{x_i}.$$

[1] ver (Willard, 2004), página 121.

Além disso,

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}} \subset U_1.$$

Seja $V_1 := \bigcup\limits_{i=1}^{n} \text{int}(V_{x_i})$. Desta forma, existe aberto $V_1 \supset A$ de modo que $\overline{V_1} \subset U_1$. E assim, $\{V_1, U_2, \cdots, U_k\}$ cobre X.

Suponhamos agora que existam abertos $\{V_1, \cdots V_{m-1}\}$ tais que a coleção $\{V_1, \cdots, V_{m-1}, U_m, U_{m+1}, \cdots, U_k\}$ cobre X e seja

$$B = X \setminus [(V_1 \cup \cdots \cup V_{m-1}) \cup (U_{m+1} \cup \cdots \cup U_k)].$$

Logo $B \subset X$ é fechado e $B \subset U_m$. Assim, existe V_m aberto de modo que $B \subset V_m$ e $\overline{V_m} \subset U_m$ e, portanto, $\{V_1, \cdots, V_{m-1}, V_m, U_{m+1}, \cdots, U_k\}$ cobre X.

Seguindo por indução, temos que existem $V_1, \cdots, V_k$ abertos de modo que $\overline{V_j} \subset U_j$, $j \in \{1, \cdots, k\}$ e

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} V_j.$$

Assim, dada um cobertura aberta $\{U_1, \cdots, U_k\}$ de X, existe uma cobertura aberta $\{V_1, \cdots, V_k\}$ de X tal que $\overline{V_j} \subset U_j$.

De maneira análoga, temos que existe uma cobertura $\{W_1, \cdots, W_k\}$ aberta de X de modo que $\overline{W_j} \subset V_j$.

Agora, como X é normal, pelo Lema de Urysohn[2], para cada $1 \leq j \leq k$, temos que existe uma função contínua

$$\phi_j : X \quad \rightarrow \quad [0,1]$$

tal que $\phi_j(\overline{W_j}) = \{1\}$ e $\phi_j(X \setminus V_j) = \{0\}$. Logo $\phi_j^{-1}((0,1]) \subset V_j$ e assim,

$$\text{supp}(\phi_j) \subset \overline{V_j} \subset U_j.$$

Deste modo, como $\bigcup\limits_{j=1}^{k} W_j = X$, temos que

$$\phi(x) := \sum_{j=1}^{k} \phi_j(x) > 0, \quad \forall x \in X.$$

Logo, podemos definir, para $1 \leq j \leq k$,

[2] ver (Willard, 2004), página 102.

$$\varphi_j(x) = \sqrt{\frac{\phi_j(x)}{\phi(x)}}.$$

Assim,

(i) Para $x \in X$,

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\phi_j(x)}{\phi(x)} = \frac{\phi(x)}{\phi(x)} = 1.$$

(ii) Seja $1 \leq j \leq k$. Então,

$$\varphi_j(x) \neq 0 \Leftrightarrow \phi_j(x) \neq 0$$

e, portanto, $\operatorname{supp} \varphi_j = \operatorname{supp} \phi_j \subset U_j$.

Agora que nossa afirmação foi demonstrada, podemos definir os seguintes homomorfismos de $C(X)$-módulos:

(i)

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma(E) &\to \bigoplus_{j=1}^{k} C(X)^{n_j} \\ s &\mapsto \bigoplus_{j=1}^{k} \psi_j(\varphi_j \cdot s) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \bigoplus_{j=1}^{k} C(X)^{n_j} &\to \Gamma(E). \\ \bigoplus_{j=1}^{k} f_j &\mapsto \sum_{j=1}^{k} \psi_j^{-1}(\varphi_j \cdot f_j) \end{aligned}$$

Notemos que como X é compacto, temos que $\varphi_j \in C_c(U_j)$ e, portanto segue que $\varphi_j \cdot s \in \Gamma_c(E|_{U_j})$, para toda $s \in \Gamma(E)$, ou seja, φ está bem definida.

Analogamente temos que $\varphi_j \cdot f_j \in C_c(U_j)$, e, portanto, $\widetilde{\varphi}$ também está bem definida.

Finalmente, se $s \in \Gamma(E)$, então

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}\circ\varphi)(s) &= \widetilde{\varphi}(\bigoplus_{j=1}^{k}\psi_j(\varphi_j\cdot s))\\ &= \sum_{j=1}^{k}\psi_j^{-1}(\varphi_j\cdot\psi_j(\varphi_j\cdot s))\\ &= \sum_{j=1}^{k}\psi_j^{-1}(\psi_j(\varphi_j^2\cdot s))\\ &= \sum_{j=1}^{k}\varphi_j^2\cdot s = s,\end{aligned}$$

pois ψ_j é linear. Portanto $\widetilde{\varphi}\circ\varphi = \mathrm{id}_{\Gamma(E)}$. Definamos agora $n := \sum_{j=1}^{k} n_j$. Desta forma, como $\bigoplus_{j=1}^{k} C(X)^{n_j} \cong C(X)^n$, temos que a sequência

$$0 \longrightarrow \Gamma(E) \underset{\widetilde{\varphi}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} C(X)^n \xrightarrow{p} C(X)^n/\varphi(\Gamma(E)) \longrightarrow 0$$

é exata com cisão e portanto, pela proposição 2.15, temos que $C(X)^n$ é isomorfo a $\Gamma(E)\oplus C(X)^n/\varphi(\Gamma(E))$.

Logo $\Gamma(E)$ é somando direto de um $C(X)$-módulo livre e, portanto projetivo. Como $C(X)^n$ é finitamente gerado, concluímos que $\Gamma(E)$ é um $C(X)$-módulo projetivo finitamente gerado.

□

Proposição 3.24. *Sejam X um espaço topológico compacto Hausdorff e M um $C(X)$-módulo projetivo finitamente gerado. Então existe (E,π,X) fibrado vetorial sobre X tal que M é isomorfo a $\Gamma(E)$.*

Demonstração. Pela proposição 2.33, existem $m\in\mathbb{N}$ e $e\in \mathrm{Idem}(M_m(C(X))$ tais que $M\cong C(X)^m\cdot e$. Como existe $g: M_m(C(X))\to C(X,M_m(\mathbb{C}))$ isomorfismo, podemos considerar $e\in C(X,M_m(\mathbb{C}))$.

Para cada $x\in X$, usando o isomorfismo g acima, consideremos $V_x = \mathrm{Im}(e(x))\subset\mathbb{C}^m$. Desta forma, temos que $\bigsqcup_{x\in X}\{x\}\times V_x$ é um espaço topológico sob a topologia induzida de $X\times\mathbb{C}^m$.

Afirmação: $\Big(\bigsqcup_{x\in X}\{x\}\times V_x,\pi,X\Big)$ é um fibrado vetorial sobre X, em que $\pi : \bigsqcup_{x\in X} \{x\} \times V_x \to X$ é dada por $\pi(x,v) = x$.

Notemos primeiramente que, para $x \in X$, $\pi^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times V_x \cong V_x$ é um espaço vetorial de dimensão finita.

Basta mostrarmos então que vale a trivialidade local, uma vez que π é claramente contínua e sobrejetora. Seja então $x_0 \in X$ e mostremos que existe $U \subset X$ aberto tal que $\dim \operatorname{Im} e(x) = \dim \operatorname{Im} e(x_0)$ para todo $x \in U$.

Consideremos $U = \{x \in X : \|e(x_0) - e(x)\| < 1\}$. Desta forma, para $x \in U$, temos que $A_x = I + e(x) - e(x_0)$ é inversível. Além disso, para $v \in \mathbb{C}^m$,

$$A_x(e(x_0))(v) = e(x_0)(v) + e(x)(e(x_0)(v)) - e(x_0)(v) = e(x)(e(x_0)(v)).$$

Logo $A_x(\operatorname{Im}(e(x_0))) \subset \operatorname{Im}(e(x))$. Assim, como A_x é um isomorfismo, temos que $\dim(\operatorname{Im}(e(x_0))) \leq \dim(\operatorname{Im}(e(x)))$.

Por outro lado, temos que $B_x = I + e(x_0) - e(x)$ também é inversível e, para $w \in \mathbb{C}^m$,

$$B_x(e(x))(w) = e(x_0)(e(x)(w)),$$

isto é, $B_x(\operatorname{Im}(e(x))) \subset \operatorname{Im}(e(x_0))$ e, portanto,

$$\dim(\operatorname{Im}(e(x))) \leq \dim(\operatorname{Im}(e(x_0))),$$

donde segue a igualdade.

Desta forma, para todo $x \in U$, temos que $B_x : V_x \to V_{x_0}$ é um isomorfismo. Para mostrarmos que $\bigsqcup_{x\in X} \{x\} \times V_x$ é um fibrado vetorial, como $\dim(\operatorname{Im}(e(x_0)) = n$, basta acharmos um homeomorfismo

$$h : \pi^{-1}(U) \to U \times \operatorname{Im}(e(x_0))$$

tal que, se $\pi' : U \times \operatorname{Im}(e(x_0)) \to U$ denota a projeção canônica, temos que $\pi' \circ h = \pi$. Para tanto, consideremos

$$\begin{array}{rcl} h : \pi^{-1}(U) & \to & U \times \operatorname{Im}(e(x_0)). \\ (x, e(x)v) & \mapsto & (x, B_x(e(x)(v))) \end{array}$$

Como h é contínua,

$$\begin{array}{rcl} g : U \times \operatorname{Im}(e(x_0)) & \to & \pi^{-1}(U) \\ (x, e(x_0)(w)) & \mapsto & (x, B_x^{-1}(e(x_0)(w))) \end{array}$$

é contínua e $g = h^{-1}$, temos que h é um homeomorfismo desejado.

Mostremos agora que $M \cong \Gamma(\bigsqcup_{x\in X}\{x\}\times V_x)$. Para tanto, consideremos

$$\begin{array}{rcl}\psi : C(X)^m\cdot e & \to & \Gamma(\bigsqcup_{x\in X}\{x\}\times V_x) \\ (f_1,\cdots,f_m)\cdot e & \mapsto & \psi((f_1,\cdots,f_m)\cdot e)\end{array}$$

em que

$$\begin{array}{rcl}\psi((f_1,\cdots,f_m)\cdot e) : X & \to & \bigsqcup_{x\in X}\{x\}\times V_x \\ x & \mapsto & (x,(f_1(x),\cdots,f_m(x))\cdot e(x))\end{array}$$

Claramente ψ está bem definida. Mostremos que ψ é sobrejetor. Para tanto, seja $s\in\Gamma(\bigsqcup_{x\in X}\{x\}\times V_x)$. Então, para todo $y\in X$,

$$s(y) = (y,\alpha(y)\cdot e(y)),$$

em que $\alpha : X\to M_{1\times m}(\mathbb{C})$. Como s é contínua, segue que $\alpha\cdot e\in C(X)^m$. Basta notarmos agora que $\psi((\alpha\cdot e)\cdot e) = s$. Com efeito, para todo $y\in X$,

$$\begin{array}{rcl}\psi((\alpha\cdot e)\cdot e)(y) & = & (y,(\alpha(y)\cdot e(y))\cdot e(y)) \\ & = & (y,\alpha(y)\cdot e(y)) \\ & = & s(y).\end{array}$$

Como $y\in X$ é arbitrário, concluímos que $\psi((\alpha\cdot e)\cdot e) = s$ e, portanto, ψ é sobrejetor.

Para vermos que ψ é injetor, sejam $(f_1,\cdots,f_m)\cdot e$ e $(g_1,\cdots,g_m)\cdot e$ em $C(X)^m\cdot e$ tais que

$$\psi((f_1,\cdots,f_m)\cdot e) = \psi((g_1,\cdots,g_m)\cdot e).$$

Desta forma, para todo $x\in X$,

$$(x,(f_1(x),\cdots,f_m(x))\cdot e(x)) = (x,(g_1(x),\cdots,g_m(x))\cdot e(x)).$$

Logo, como $x\in X$ é arbritário, concluímos que

$$(f_1,\cdots,f_m)\cdot e = (g_1,\cdots,g_m)\cdot e$$

e, portanto, ψ é injetor. Logo ψ é um isomorfismo e, consequentemente,

$M \cong \Gamma(\bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times V_x)$, uma vez que $M \cong C(X)^m \cdot e$. $\square$

Queremos mostrar agora que a aplicação

$$\Gamma : \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(A),\Gamma(B)) \tag{3.1}$$

dada por $\Gamma(\varphi)(s) = \varphi \circ s$, para todo $s \in \Gamma(A)$, é uma bijeção, para todo par $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{F})$.

Para tanto, precisaremos da seguinte definição e dos seguintes resultados.

Definição 3.25. Seja X um espaço topológico compacto Hausdorff, (E,π,X) um fibrado vetorial sobre X e $x \in X$. Uma base local em x é um conjunto

$$\{s_1,\cdots,s_n\} \subset \Gamma(E),$$

para o qual existe $V \subset X$ vizinhança de x tal que, para todo $y \in V$, $\{s_1(y),\cdots,s_n(y)\}$ é uma base para E_y.

Proposição 3.26. *Sejam X um espaço topológico e (E,π,X) fibrado vetorial sobre X. Para todo $x \in X$ existe U vizinhança de x tal que o fibrado $E_{|_U}$ possui uma base local em x.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Então, pela definição 3.2, existem $U \subset X$ aberto contendo x, $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ homeomorfismo tal que $\varphi_y : \pi^{-1}(\{y\}) \to \{y\} \times \mathbb{C}^n$ é um isomorfismo linear, para todo $y \in U$.

Seja $\beta = \{v_1,\cdots,v_n\}$ base de $\mathbb{C}^n$ e definamos para $i \in \{1,\cdots,n\}$,

$$\begin{array}{rcl} s_i : U & \to & E \\ y & \mapsto & \varphi_y^{-1}(v_i) = \varphi^{-1}(y,v_i). \end{array}$$

Como φ^{-1} é contínua, temos que, s_i também o é, para todo $1 \leq i \leq n$. Além disso, se $y \in U$,

$$(\pi \circ s_i)(y) = \pi(\varphi^{-1}(y,v_i)) = y.$$

Logo $s_i \in \Gamma(E|_U)$, para todo $i \in \{1,\cdots,n\}$. Desta forma, basta mostrarmos que $\{s_1(y),\cdots,s_n(y)\}$ é base de E_y, para todo $y \in U$.

(i) $\{s_1(y),\cdots,s_n(y)\}$ gera E_y.

Seja $z \in E_y$. Desta forma, como φ^{-1} é sobrejetora, existe $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $z = \varphi^{-1}(y,v)$.

Por outro lado, como $v \in \mathbb{C}^n$, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Desto modo, como φ_y^{-1} é linear,

$$\begin{aligned} z = \varphi_y^{-1}(v) &= \varphi_y^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_y^{-1}(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(y). \end{aligned}$$

(ii) $\{s_1(y), \cdots, s_n(y)\}$ é linearmente independente.

Sejam $\beta_1 \cdots, \beta_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i(y).$$

Como φ_y^{-1} é injetora e linear,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i(y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_y^{-1}(v_i) \\ &= \varphi_y^{-1}\big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\big) \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0. \end{aligned}$$

Desta forma, como $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é base de $\mathbb{C}^n$, segue que $\beta_i = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Concluímos então que $\{s_1, \cdots, s_n\} \subset \Gamma(E_{|U})$ é base local em x.

$\square$

Proposição 3.27. *Sejam X um espaço topológico compacto Hausdorff, (E,π,X) um fibrado vetorial sobre X, $x \in X$, $U \subset X$ uma vizinhança de x e $s \in \Gamma(E|_U)$. Então existe $s' \in \Gamma(E)$ tal que s e s' coincidem em alguma vizinhança de x.*

Demonstração. Notemos inicialmente que, como X é compacto Hausdorff, então X é normal e, portanto, regular. Logo existe $V \ni x$ vizinhança aberta tal que
$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

Analogamente, existe $W \ni x$ aberto de modo que
$$x \in W \subset \overline{W} \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Como $\overline{W}$ e $X \setminus V$ são fechados disjuntos e X é normal, pelo Lema de Urysohn, existe $f : X \to [0,1]$ contínua de modo que $f(\overline{W}) = \{1\}$ e $f(X \setminus V) = \{0\}$.

Definamos então $s' : X \to E$ dada por
$$s'(x) = \begin{cases} f(x)s(x), \text{ se } x \in U \\ 0_{E_x}, \text{ se } x \notin U. \end{cases}$$

Observamos que s' é contínua, pois $s'_{|\overline{V}} = (fs)_{|\overline{V}}$ e $s'_{|X\setminus V} = 0$ são contínuas e X é a reunião dos conjuntos fechados $\overline{V}$ e $X \setminus V$.

Finalmente, mostremos que s' é uma seção.

(i) Se $y \in U$, então
$$s'(y) = f(y)s(y) \in E_y,$$
pois $s(y) \in E_y$ e este é um espaço vetorial.

(ii) Se $y \notin U$, então claramente
$$s'(y) = 0_{E_y} \in E_y.$$

Desta forma, temos que $\pi \circ s' = \mathrm{id}_X$, o que finaliza esta prova. □

Corolário 3.28. *Sejam X espaço topológico compacto Hausdorff, (E,π,X) fibrado vetorial sobre X e $x \in X$. Então existem seções $s_1, \cdots, s_n \in \Gamma(E)$ as quais formam uma base local em x.*

Demonstração. Pela proposição 3.26, sabemos que existem $U \ni x$ aberto e $\{s_1, \cdots, s_n\} \subset \Gamma(E|_U)$ uma base local em x. Assim, pela proposição 3.27, existem $\{s'_1, \cdots, s'_n\} \subset \Gamma(E)$ tais que $s'_i|_{V_i} = s_i|_{V_i}$, para alguma vizinhança V_i de x e $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Desta forma, temos que $\{s'_1, \cdots, s'_n\} \subset \Gamma(E)$ é uma base local em x.

Com efeito, pela definição de base local em x, existe uma vizinhança $W \subset U$ de x tal que para todo $y \in W$, $\{s_1(y), \cdots, s_n(y)\}$ é base de E_y.

Desta forma, temos que $V = W \cap V_1 \cap \cdots \cap V_n$ é uma vizinhança de x e, como $s'_i|_{V_i} = s_i|_{V_i}$, temos que $s'_i|_V = s_i|_V$.

Assim, para todo $y \in V$, temos que

$$\{s'_1(y), \cdots, s'_n(y)\} = \{s_1(y), \cdots, s_n(y)\}$$

é base de E_y. □

Corolário 3.29. *Sejam X um espaço topológico, (E, π, X) fibrado vetorial sobre X, $x \in X$ e $z \in E_x$. Então existe $s \in \Gamma(E)$ tal que $s(x) = z$.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Então pelo corolário 3.28, existem seções $s_1, \cdots, s_n$ em $\Gamma(E)$ tais que $\{s_1(x), \cdots, s_n(x)\}$ é uma base para E_x. Desta forma, como $z \in E_x$, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(x).$$

Consideremos agora, para $i \in \{1, \cdots, n\}$, $f_i : X \to \mathbb{C}$ contínua tal que $f_i(x) = \alpha_i$, por exemplo $f_i(y) = \alpha_i$, para todo $y \in X$. Assim, como $\Gamma(E)$ é um $C(X)$-módulos, temos que

$$s = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i \in \Gamma(E)$$

e

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x) s_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i(x) \\ &= z. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.30. *Sejam $f, g : E \to F$ homomorfismos de fibrados vetoriais tais que $\Gamma(f) = \Gamma(g)$. Então $f = g$.*

Demonstração. Seja $z \in E$. Então existe x tal que $z \in E_x$. Desta forma, pelo corolário 3.29, existe $s \in \Gamma(E)$ tal que $s(x) = z$. Assim,

$$\begin{aligned} f(z) &= (f \circ s)(x) \\ &= \Gamma(f)(s)(x) \\ &= \Gamma(g)(s)(x) \\ &= (g \circ s)(x) \\ &= g(z). \end{aligned}$$

Como $z \in E$ é arbitrário, concluímos que $f = g$. □

Logo a aplicação 3.1 é injetora. Para finalmente mostrarmos o Teorema de Serre-Swan, isto é, que esta aplicação é também sobrejetora, precisaremos de mais alguns resultados e mais uma definição.

Lema 3.31. *Sejam X espaço topológico compacto Hausdorff, (E,π,X) fibrado vetorial sobre X e $x \in X$. Defina $I_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ e*

$$\Gamma_x(E) = \{\sum_{i=1}^{n} f_i s_i \in \Gamma(E) : f_i \in I_x, s_i \in \Gamma(E), n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Então, dada $s \in \Gamma(E)$, $s(x) = 0$ se, e somente se, $s \in \Gamma_x(E)$.

Demonstração. Suponhamos que $s \in \Gamma_x(E)$. Então existem $n \in \mathbb{N}$ não nulo, $f_1, \cdots, f_n \in I_x$ e $s_1, \cdots, s_n \in \Gamma(E)$ tais que

$$s = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i.$$

Desta forma,

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) s_i(x) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot s_i.(x) = 0.$$

Por outro lado, seja $s \in \Gamma(E)$, suponhamos que $s(x) = 0$ e seja $\{s_1, \cdots, s_n\} \subset \Gamma(E)$ base local em x. Portanto, existe V vizinhança aberta de x tal que, para todo $y \in V$, $\{s_1(y), \cdots, s_n(y)\}$ é base de E_y.

Definamos $f_1, \cdots, f_n : V \to \mathbb{C}$ por

$$s(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) s_i(y).$$

Observe que se definirmos $\psi : V \times \mathbb{C}^n \to \pi^{-1}(V)$, por

$$\psi(y,(w_1,\cdots,w_n)) = \sum_{i=1}^{n} w_i s_i(y),$$

então ψ é contínua e a restrição de ψ a cada $\{y\} \times \mathbb{C}^n$ é um isomorfismo a E_y e, portanto, ψ é um homeomorfismo (ver (Hatcher, 2009) Lemma 1.1.). Logo, $f_i = \pi_i \circ \psi^{-1} \circ s$ é contínua, para todo $i \in \{1,\cdots,n\}$, em que $\pi_i : V \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ é dada por $\pi_i(y,(w_1,\cdots,w_n)) = w_i$.

Como X é compacto Hausdorff, X é normal e, portanto, regular. Logo, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\overline{U} \subset V$ (ver (Willard, 2004), página 92.).

Como X é normal, podemos usar o Lema de Tietze (ver (Willard, 2004), página 103) para estender cada $f_i|_{\overline{U}}$ a uma função F_i em $C(X)$.

Logo s coincide com $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i s_i$ em U. Como $\{s_1(x),\cdots,s_n(x)\} \subset E_x$ é base, temos que

$$0 = s(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)s_i(x) \Rightarrow F_i(x) = 0, \forall i \in \{1,\cdots,n\}.$$

Portanto $F_i \in I_x$, para todo $i \in \{1,\cdots,n\}$.

Notemos agora que, como X é compacto Hausdorff, X é normal e $\{x\}$ é fechado. Assim, como $X \setminus U$ e $\{x\}$ são fechados disjuntos, pelo Lema de Urysohn existe $g : X \to [0,1]$ contínua tal que $g(X \setminus U) = \{1\}$ e $g(\{x\}) = \{0\}$.

Desta forma, se definirmos

$$s' = s - \sum_{i=1}^{n} F_i s_i,$$

teremos que

(i) $s'(x) = 0$,

(ii) $s' = gs'$.

Com efeito,

(i) se $y \in U$, então $s'(y) = 0$, pois s coincide com $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i s_i$ em U e, assim

$$0 = s'(y) = g(y)s'(y).$$

(ii) se $y \notin U$, então $g(y) = 1$ e

$$s'(y) = 1 \cdot s'(y) = g(y)s'(y).$$

Desta forma, temos que

$$s = s' + \sum_{i=1}^{n} F_i s_i = gs' + \sum_{i=1}^{n} F_i s_i.$$

Logo $s \in \Gamma_x(E)$, o que finaliza esta prova. $\square$

Sejam M um R-módulo, N um S-módulo e $g : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Então g induz sobre N a seguine estrutura R-módulo: para todo $r \in R$ e $n \in N$,

$$r \cdot n = g(r)n.$$

Desta forma, se $f : M \to N$ é aditiva e, para qualquer $r \in R$, $f(rx) = g(r)f(x)$, então f é um homomorfismo de R-módulos.

Proposição 3.32. *Sejam X espaço topológico, (E,π,X) fibrado vetorial sobre X, $x \in X$ e g_x o homomorfismo de anéis dado por*

$$\begin{array}{rcl} g_x : C(X) & \to & \mathbb{C}. \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Considerando E_x um $C(X)$-módulo via g_x, então o homomorfismo de $C(X)$-módulos

$$\begin{array}{rcl} \psi : \Gamma(E) & \to & E_x \\ s & \mapsto & s(x) \end{array}$$

induz um isomorfismo de $C(X)$-módulos

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\psi} : \Gamma(E)/\Gamma_x(E) & \to & E_x. \\ [s] & \mapsto & s(x) \end{array}$$

Demonstração. Mostremos inicialmente que $\widetilde{\psi}$ está bem definida. Para tanto, sejam $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ tais que $s_1 + \Gamma_x(E) = s_2 + \Gamma_x(E)$. Desta forma, temos que $s_1 - s_2 \in \Gamma_x(E)$, ou seja,

$$(s_1 - s_2)(x) = 0 \Leftrightarrow s_1(x) = s_2(x) \Leftrightarrow \widetilde{\psi}([s_1]) = \widetilde{\psi}([s_2]).$$

E assim, $\widetilde{\psi}$ está bem definida.

Agora, pelo corolário 3.29, temos que $\widetilde{\psi}$ é sobrejetora. Mostremos que $\widetilde{\psi}$ é injetora. Para tanto, sejam $[s_1],[s_2] \in \Gamma(E)/\Gamma_x(E)$ e suponhamos que $\widetilde{\psi}([s_1]) = \widetilde{\psi}([s_2])$. Assim, pela proposição 3.31,

$$s_1(x) = s_2(x) \Leftrightarrow (s_1 - s_2)(x) = 0 \Leftrightarrow s_1 - s_2 \in \Gamma_x(E),$$

isto é, $[s_1] = [s_2]$. Logo $\widetilde{\psi}$ é injetora e, consequentemente, bijetora.

Notemos agora que se $f \in C(X)$ e $s \in \Gamma(E)$, então

$$\widetilde{\psi}(fs) = f(x)s(x) = g_x(f)\widetilde{\psi}(s).$$

Desta forma, como claramente $\widetilde{\psi}$ é aditiva, concluímos que $\widetilde{\psi}$ é um isomorfismo. $\square$

Lema 3.33. *Sejam X espaço topológico compacto Hausdorff, E e F fibrados vetoriais sobre X e* $\varphi : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ *um* $C(X)$*-módulo homomorfismo. Então, para todo* $x \in X$*, existe um* $C(X)$*-módulo homomorfismo* $\widetilde{\varphi} : \Gamma(E)/\Gamma_x(E) \to \Gamma(F)/\Gamma_x(F)$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(E) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_E"'] & \Gamma(F) \arrow[d, "p_F"] \\
\Gamma(E)/\Gamma_x(E) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & \Gamma(F)/\Gamma_x(F)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $\widetilde{\varphi}([s]) = [\varphi(s)]$.

Demonstração. Definamos

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : \Gamma(E)/\Gamma_x(E) & \to & \Gamma(F)/\Gamma_x(F) \\ [s] & \mapsto & [\varphi(s)] \end{array}$$

e notemos que $\widetilde{\varphi}$ está bem definida, pois se $[s],[s'] \in \Gamma(E)/\Gamma_x(E)$ são tais que $[s] = [s']$, então $s - s' \in \Gamma_x(E)$. Assim, existem $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \cdots, f_n \in I_x$ e $s_1, \cdots, s_n \in \Gamma(E)$, tais que

$$s - s' = \sum_{i=1}^{n} f_i s_i.$$

Desta forma, como φ é um homomorfismo, segue que

$$\varphi(s)-\varphi(s')=\varphi(s-s')=\varphi(\sum_{i=1}^{n} f_i s_i)=\sum_{i=1}^{n} f_i\varphi(s_i)\in\Gamma_x(F),$$

isto é, $[\varphi(s)]=[\varphi(s')]$.

Mostremos agora que $\widetilde{\varphi}$ é um $C(X)$-módulo homomorfismo. Para tanto, sejam $[s],[s']$ em $\Gamma(E)/\Gamma_x(E)$ e f em $C(X)$. Então,

$$\begin{aligned}
\varphi([s]+f[s']) &= \varphi([s+fs']) \\
&= [\varphi(s+fs')] \\
&= [\varphi(s)+f(\varphi(s'))] \\
&= [\varphi(s)]+f[\varphi(s')] \\
&= \widetilde{\varphi}([s])+f(\widetilde{\varphi}([s'])),
\end{aligned}$$

o que finaliza esta demonstração. □

Teorema 3.34. *Sejam X um espaço topológico compacto Hausdorff, E e F fibrados vetoriais sobre X e $\varphi:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ um homomorfismo de $C(X)$-módulo. Então existe um único homomorfismo de fibrados $f:E\to F$ tal que $\Gamma(f)=\varphi$.*

Demonstração. Seja $x\in X$. Definamos $f_x:E_x\to F_x$ por $f_x:=\widetilde{\psi_F}\circ\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\psi}_E^{-1}$, em que $\widetilde{\psi_F}$ e $\widetilde{\psi_E}^{-1}$ são como na proposição 3.32 e $\widetilde{\varphi}$ como no lema 3.33.

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
f_x\circ\widetilde{\psi_E}\circ p_E &= \widetilde{\psi_F}\circ\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\psi_E}^{-1}\circ\widetilde{\psi_E}\circ p_E \\
&= \widetilde{\psi_F}\circ p_F\circ\varphi \\
&= \psi_F\circ\varphi
\end{aligned}$$

e portanto o diagrama a seguir é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(E) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\widetilde{\psi_E}\circ p_E"'] & \Gamma(F) \arrow[d, "\widetilde{\psi_F}\circ p_F."] \\
E_x \arrow[r, "f_x"'] & F_x
\end{tikzcd}$$

Agora definamos $f:E\to F$ por $f|_{E_x}:=f_x$. Notemos que f_x é linear pois $\widetilde{\psi_F},\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi_E}^{-1}$ o são.

Consideremos agora $s \in \Gamma(E)$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\Gamma(f)(s)(x) &= (f \circ s)(x) \\
&= f_x(s(x)) = (f_x \circ \psi_E)(s) \\
&= f_x(\widetilde{\psi}_E([s])) = (f_x \circ \widetilde{\psi}_E \circ p_E)(s) \\
&= (\psi_F \circ \varphi(s)) = \psi_F(\varphi(s)) \\
&= \varphi(s)(x).
\end{aligned}$$

Assim, como s e x são arbitrários, segue que $\Gamma(f) = \varphi$.

Agora, basta provarmos a continuidade e unicidade de f. Mostremos primeiramente que f é contínua. Para tanto, seja $x \in X$. Pela definição 3.2, existem $U \subset X$ vizinhança de x e $m, n \in \mathbb{C}$ tais que

$$h_E : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^m \quad \text{e} \quad h_F : \pi_F^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$$

são homeomorfismos que comutam o diagrama da definição 3.1.

Definamos, para $i \in \{1, \cdots, m\}$,

$$\begin{aligned}
s_i : U &\to E \\
y &\mapsto h_E^{-1}(y, e_i),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
s'_j : U &\to F \\
x &\mapsto h_F^{-1}(x, e_j)
\end{aligned}$$

em que $\{e_1, \cdots, e_m\}$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ são as bases canônicas de $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{C}^n$, respectivamente. Desta forma[3], $\{s_1, \cdots, s_m\} \subset \Gamma(E_{|_U})$ e $\{s'_1, \cdots, s'_n\} \subset \Gamma(F_{|_U})$ são bases locais em x.

Pela proposição 3.27, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, \cdots, m\}$ podemos estender s_i e s'_j de modo que $s_i \in \Gamma(E)$ e $s'_j \in \Gamma(F)$.

Definamos agora, para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, $\beta_i^j : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(s_i)(y) = \sum_{j=1}^{n} \beta_i^j(y) s'_j(y).$$

Assim, para todo $z \in U$,

[3]ver demonstração da proposição 3.26.

$$(h_F \circ \varphi(s_i))(z) = (z, \sum_{j=1}^{n} \beta_i^j(z)e_j).$$

como cada $\varphi(s_i)$ é contínua, concluímos que cada β_i^j também o é.

Finalmente, obtemos que, para todo $(y,v) \in U \times \mathbb{C}^m$, supondo que $v = \sum_{i=1}^{m} v_i e_i$,

$$\begin{aligned}
((h_F) \circ f \circ (h_E)^{-1})(y,v) &= (h_F \circ f)(\sum_{i=1}^{m} v_i s_i(y)) \\
&= h_F(\sum_{i=1}^{m} v_i \varphi(s_i)(y)) \\
&= h_F(\sum_{i=1}^{m} v_i(\sum_{j=1}^{n} \beta_i^j(y)s'_j(y))) \\
&= (y, \sum_{i=1}^{m} v_i(\sum_{j=1}^{n} \beta_i^j(y)e_j))
\end{aligned}$$

e, portanto, $h_F \circ f \circ h_E^{-1} : U \times \mathbb{C}^m \to U \times \mathbb{C}^n$ é contínua. Como $x \in X$ é arbitrário e h_E e h_F são homeomorfismos, concluímos que f é contínua.

Para mostrarmos a unicidade de f, consideremos $g : E \to F$ homomorfismo de fibrados vetorias tais que $\Gamma(f) = \Gamma(g)$. Desta forma, pela proposição 3.30, temos que $f = g$.

Logo, para todo $\varphi : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ homomorfismo, existe um único homomorfismo $f : E \to F$ tal que $\Gamma(f) = \varphi$. □

Teorema 3.35 (Serre-Swan)**.** *O funtor Γ induz uma equivalência da categoria $\mathfrak{F}$ dos fibrados vetoriais sobre X, X compacto Hausdorff, e a categoria $\mathfrak{M}$ dos $C(X)$-módulos projetivos finitamente gerados.*

Demonstração. Pela proposição 3.19, Γ é um funtor. Desta forma, basta mostrarmos que Γ induz uma equivalência categórica. Com efeito,

1. Sejam E e F fibrados vetoriais. Então, pelo teorema 3.34, temos que

   $$\Gamma : \mathrm{Mor}(E,F) \to \mathrm{Mor}(\Gamma(E), \Gamma(F))$$

   é um bijeção.

2. Pelo teorema 3.24, temos que para qualquer $C(X)$-módulo projetivo finitamente gerado P, existe um fibrado vetorial E tal que $\Gamma(E) \cong P$.

$\square$

Notemos que se X é um espaço Hausdorff compacto, então $C(X)$ é uma C^*-álgebra, e portanto um anel, unital. Desta forma, pela proposição 2.38,

$$K_0(\underbrace{C(X)}_{\text{anel}}) \cong K_0(\underbrace{C(X)}_{C^*-\text{álg.}}).$$

Logo, pelo teorema 3.35,

$$K_0(X) \cong K_0(C(X)) \cong K_0(C(X)).$$

Exemplo 3.36. *Se X é um espaço topológico compacto Hausdorff contrativo, então $K_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Como X é compacto Hausdorff, pelo teorema 3.35, temos que $K_0(X) \cong K_0(C(X))$.

Notemos agora que, como X é compacto, então $C(X)$ é unital e portanto, pela proposição 2.38, $K_0(C(X))$ é o mesmo (a menos de isomorfismo) na K-teoria algébrica e na K-teoria de C^*-álgebras. Desta forma, como X é contrativo, pelo exemplo 1.56, segue que $K_0(X) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atiyah, M. F.; Singer, I. M. The index of elliptic operators. I. *Ann. Math. (2)*, Princeton University, Mathematics Department, Princeton, NJ; Mathematical Sciences Publishers, Berkeley, CA, v. 87, p. 484–530, 1968. ISSN 0003-486X; 1939-8980/e.

Bland, P. E. *Rings and their modules.* [S.l.]: Berlin: Walter de Gruyter, 2011. xiii + 452 p. ISBN 978-3-11-025022-0/pbk; 978-3-11-025023-7/ebook.

Borel, A.; Serre, J.-P. Le théorème de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. France*, v. 86, p. 97–136, 1958. ISSN 0037-9484.

Conti, R.; Szymanski, W. Automorphisms of the Cuntz algebras. ago. 2011. ArXiv:1108.0860.

Cuntz, J.; Meyer, R.; Rosenberg, J. M. *Topological and bivariant K-theory.* [S.l.]: Basel: Birkhäuser, 2007. xi + 262 p. ISBN 978-3-7643-8398-5/pbk.

Dummit, D. S.; Foote, R. M. *Abstract algebra.* 3rd. ed. [S.l.]: Chichester: Wiley, 2004. xii + 932 p. ISBN 0-471-45234-3/hbk.

Hatcher, A. *Vector Bundles and K-theory*. 2009. Acessado em 17-12-2013. Disponível em: <http://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VBpage.html>.

Kim, S. O. Homotopy of projections in C^*-algebras. *Commun. Korean Math. Soc.*, Korean Mathematical Society, Seoul, v. 12, n. 1, p. 75–78, 1997. ISSN 1225-1763.

Murphy, G. J. *C^*-algebras and operator theory.* [S.l.]: Boston, MA etc.: Academic Press, Inc., 1990. x + 286 p. ISBN 0-12-511360-9.

Rørdam, M.; Larsen, F.; Laustsen, N. *An introduction to K-theory for C^*-algebras.* [S.l.]: Cambridge: Cambridge University Press, 2000. xii + 242 p. ISBN 0-521-78334-8/hbk; 0-521-78944-3/pbk.

Willard, S. *General topology.* Reprint of the 1970 original. [S.l.]: Mineola, NY: Dover Publications, 2004. xii + 369 p. ISBN 0-486-43479-6/pbk.