

Guilherme do Livramento Demos

**Modelos Estatísticos Alternativos para os *Mini
Flash Crashes***

Florianópolis
Fevereiro 2014

Guilherme do Livramento Demos

Modelos Estatísticos Alternativos para os *Mini Flash Crashes*

Dissertação de mestrado em conformidade com as normas ABNT apresentado à comissão avaliadora como requisito parcial para a obtenção de título de mestre em economia

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Economia e Relações Internacionais
Programa de Pós-Graduação em Economia

Orientador: Eraldo Sérgio Barbosa da Silva

Florianópolis
Fevereiro 2014

Guilherme do Livramento Demos

Modelos Estatísticos Alternativos para os *Mini Flash Crashes*/ Guilherme do
Livramento Demos. – Florianópolis, Fevereiro 2014-

95 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Eraldo Sérgio Barbosa da Silva

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Departamento de Economia e Relações Internacionais

Programa de Pós-Graduação em Economia, Fevereiro 2014.

1. *Flash Crashes* 2. Determinismo 3. Eventos financeiros extremos

CDU 02:141:005.7

Guilherme do Livramento Demos

Modelos Estatísticos Alternativos para os *Mini Flash Crashes*

Essa dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Economia”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 13 de Fevereiro de 2014:

Prof. Roberto Meurer, Dr.
Coordenador do Curso

Banca examinadora:

**Orientador - Eraldo Sérgio Barbosa da
Silva, Dr.**
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Raul Yukihiro Matsushita, Dr.
Universidade de Brasília

**Prof. Newton Carneiro Affonso da
Costa Junior, Dr.**
Universidade Federal de Santa Catarina

Professor Dr. Guilherme Valle Moura
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedicado à memória de meu irmão
GABRIEL
Para sempre amado, para sempre celebrado

Agradecimentos

Obrigado Senhor. Por ele e para ele toda a glória.

Pai, Mãe e Ga, muito obrigado. Meu amor por vocês ultrapassa todo entendimento.

Agradeço ao contribuinte e especialmente ao CNPQ pela crença no potencial do desenvolvimento científico. Meu muito obrigado a toda equipe do PPGE da UFSC, em especial a Evelise Elpo, Roberto Meurer, Guilherme Moura, Newton da Costa e a todos meus colegas de batalha ao longo desses 2 anos, em especial meu amigo Thomas Henrique.

Obrigado principalmente a meu orientador Sérgio da Silva, por ter conseguido direcionar e limitar uma pulsante vontade pelo saber. Agradeço por ter me mostrado como dar mais valor aos objetivos e resultados do que aos obstáculos enfrentados ao longo da trajetória; por não sugerir a complexidade nem tampouco a simplicidade. Sem suas idéias, estímulo e exemplo este trabalho não estaria aqui. Agradeço também à paciência e ao brilhantismo do professor Raul Matsushita, cuja disponibilidade e ajuda também foram de suma importância.

Obrigado a meus amigos e familiares por serem essa base sólida para onde pude sempre recorrer quando precisei. Quero agradecer também a uma garota especial, Ana Carolina; pelo imenso carinho, por sempre clarear meus dias e por servir de guia para meus passos.

E por fim, agradeço a todos os momentos difíceis, responsáveis por nos tornar alguma coisa.

*“We came for salvation, we came for family,
we came for all that’s good that’s how we walk away.
We came to break the bad, we came to cheer the sad,
we came to leave behind the world, a better way”
(The Avett Brothers - Salvation song)*

Resumo

São considerados dados contendo *mini flash crashes*, ocorridos nas ações da Abott laboratories, Apple Co., Cisco Systems, City Group, Core Molding Technologies, Enstar, Jazz Pharmaceuticals, Micron, Progress Energy, Pfizer, Pall Corp., Rlj Equity, Thermo Fischer Co., Washington Post Co. e no índice DJIA em 6 de maio de 2010, que exibem eventos extremos e os comparo com séries simuladas via Monte Carlo de modelos estocásticos e determinísticos. Como representantes da aleatoriedade são considerados o *random walk*, skewed-t GARCH e threshold GARCH. Já os modelos determinísticos usados são o mapa de Hénon, a recursão de Feigenbaum (ambos modelos caóticos canônicos) e log-periodicidade. Primeiro, foram realizados testes de normalidade, histogramas, Q-Q *plots*, *delay plots*, *fit's* com as distribuição de Lévy-estável e *power law*, teste para dinâmica caótica, estatísticas R/S e DFA analisando a auto-correlação serial, medida de entropia de Shannon e ajuste log-periódico, no intuito de distinguir qual classe de modelos melhor se ajusta aos dados reais. Então, a hipótese de Gaussianidade é rejeitada (1% de significância), assim como a hipótese de comportamento aleatório dos dados reais, com nível de significância de 5%. Apesar da evidência de determinismo na série dos *flash crashes*, não podemos aceitar com certeza que as séries são caóticas ou que apresentam um comportamento log-periódico. Leis de potência são observadas nos dados e ajustes conforme uma distribuição de Lévy-estável são plausíveis. Memória longa é detectada usando as estatísticas R/S e DFA. Por fim, a entropia de Shannon sugere que os dados contendo *mini flash crashes* se encontram em um meio termo entre completo determinismo e pura aleatoriedade.

Palavras-chaves: *Flash Crashes*; Modelos alternativos; *Moving-block bootstrap*.
Classificação JEL: G01; C15; C46; C88.

Abstract

I consider data from the “*mini flash crashes*”, which exhibit extreme events and compare them with Monte Carlo simulated series from both stochastic and deterministic models. A random walk, skewed-t GARCH and threshold GARCH represent the stochastic series. The deterministic models considered are the Hénon map, the Feigenbaum recursion (which are considered canonical chaotic models) and a log-periodic fit. First, I run normality tests, histograms, Q-Q plots, delay plots, fits with both Lévy stable and power law distributions, chaotic dynamics tests, detrended fluctuation analysis (DFA), R/S statistic, Shannon entropy measures and log-periodic fits, all aiming on identifying which family of models better fits the actual data. Then, Gaussianity is rejected (1% confidence level) and stochastic behavior is dismissed at 5 percent confidence level for the real data. Despite the evidence for some determinism and non-linearity in data, we cannot accept for sure that the data is chaotic nor that it exhibits log-periodic traces. Lévy fits are also reasonable for the data analyzed, and long memory is detected using the R/S and DFA statistics. Finally, Shannon entropy measure suggests the mini flash crash data lies half way between determinism and randomness.

Key-words: Determinism; intraday data; flash crash.

Classificação JEL: G01; C15; C46; C88.

Lista de ilustrações

Figura 1 – O <i>flash crash</i> no índice Dow Jones Industrial Average (DJIA) ocorrido em 6 de maio de 2010.	21
Figura 2 – <i>Mini flash crash</i> ocorrido em 27 de abril de 2011 com as ações da Jazz Pharmaceuticals.	22
Figura 3 – <i>Mini Flash Crashes</i> em preços correntes US\$ (acima) e retornos (abaixo)	32
Figura 4 – 100 realizações de um <i>random walk</i> (esquerda) e o retorno de uma das 100 realizações (direita).	39
Figura 5 – Série de tempo gerada pelo GARCH(1,1) com $\epsilon_t \sim \text{skewed-}t(0,1)$	41
Figura 6 – Série de tempo gerada pelo <i>threshold</i> -GARCH (1,1).	41
Figura 7 – Série de tempo gerada pelo mapa de Hénon	46
Figura 8 – Série de tempo gerada pela recursão de Feigenbaum	46
Figura 9 – Retratos de fase (x_t vs x_{t-1}) das ações contendo <i>flash crashes</i>	63
Figura 10 – Retratos de fase (x_t vs x_{t-1}) das séries de tempo simuladas	64
Figura 11 – Histogramas dos retornos de ativos contendo <i>flash crashes</i>	65
Figura 12 – Histograma de séries de tempo aleatórias e determinísticas simuladas	67
Figura 13 – Q-Q <i>plot</i> dos retornos das ações sujeitas aos <i>flash crashes</i>	69
Figura 14 – Q-Q <i>plot</i> dos retornos das séries de tempo simuladas.	70
Figura 15 – Ajustes dos dados contendo <i>flash crashes</i> frente às distribuições Gaussiana e de Levy estável.	71
Figura 16 – Ajustes dos dados simulados frente às distribuições Gaussiana e de Levy estável.	72
Figura 17 – <i>Power laws</i>	73
Figura 18 – <i>Power laws</i> (dados simulados)	74
Figura 19 – Estimacão do expoente máximo de Lyapunov (λ^{max}) via algoritmo proposto por Rosenstein, Collins e Luca (1998) para séries estocásticas e caóticas (acima) e <i>flash crashes</i> (abaixo).	76
Figura 20 – Ajustes log-periódicos (linha vermelha), para os retornos das aes contendo <i>flash crashes</i>	84

Lista de tabelas

Tabela 1 – Estatísticas Descritivas dos retornos dos ativos contendo o <i>flash crash</i> e os <i>mini flash crashes</i>	61
Tabela 2 – Estatísticas descritivas dos retornos dos ativos contendo o <i>Flash crash</i> e os <i>Mini Flash Crashes</i> . (continuação)	62
Tabela 3 – Teste de normalidade para a pdf empírica dos retornos das ações contendo os <i>flash crashes</i> e das séries de tempo simuladas.	68
Tabela 4 – Estatísticas da Lévy estável	70
Tabela 5 – Teste para a estabilidade do maior expoente de Lyapunov.	78
Tabela 6 – Entropia de Shannon, expoente de Hurst e <i>detrended fluctuation analysis</i>	80
Tabela 7 – Entropia de Shannon, expoente de Hurst e <i>detrended fluctuation analysis</i>	81
Tabela 8 – Estimativas dos parâmetros da equação 3.13 com 95% de confiança . . .	85

Sumário

1	Introdução	21
1.1	Objetivo	23
1.2	Justificativa	24
1.3	Metodologia	26
2	Processos Estocásticos e Determinísticos Seleccionados	31
2.1	Revisão teórica	31
2.2	Processos estocásticos	38
2.2.1	Random-walk	39
2.2.2	GARCH(p,q) com choques aleatórios advindos de uma distribuição t-Student assimétrica	40
2.2.3	Threshold GARCH	40
2.2.4	Processos estáveis de Lévy	42
2.3	Modelos determinísticos	44
2.3.1	Modelos caóticos	45
2.3.1.1	O expoente máximo de Lyapunov	47
2.3.1.2	O método de Rosenstein para estimação do expoente máximo de Lyapunov	48
2.3.1.3	Um novo teste para distinguir caos de comportamento estocástico, via expoentes de Lyapunov.	49
2.3.2	Log-periodicidade	50
3	Análise Empírica	55
3.1	Características dos dados	55
3.2	Testes utilizados	56
3.3	Resultados	60
3.3.1	Testando a hipótese de Gaussianidade dos dados	66
3.3.2	Mensurando os desvios da normalidade	66
4	Conclusão	87
	Referências	91

1 Introdução

Os avanços tecnológicos continuam a transformar a maneira de operar dos mercados financeiros. O volume transacionado de produtos financeiros através de robôs automatizados, a alta velocidade e o pouco envolvimento humano tem aumentado dramaticamente nos últimos anos.

Algorithmic trading (AT) e transações de alta frequência (HFT) tornaram-se amplamente utilizadas recentemente. Tal fato pode ter introduzido novas dinâmicas no sistema, tornando-se cada vez mais difícil a compreensão dos mercados e sua regulação. Particularmente, tem havido contínua controvérsia a respeito da extensão na qual a tecnologia melhora ou degrada o funcionamento dos mercados financeiros, a influência sobre a volatilidade do mercado e o risco de instabilidades. Transações baseadas em algoritmos robóticos foram, segundo a *Securities and Exchange comission* (SEC), o fator chave para eventos como o *flash crash* de 6 de maio de 2010 (figura 1).

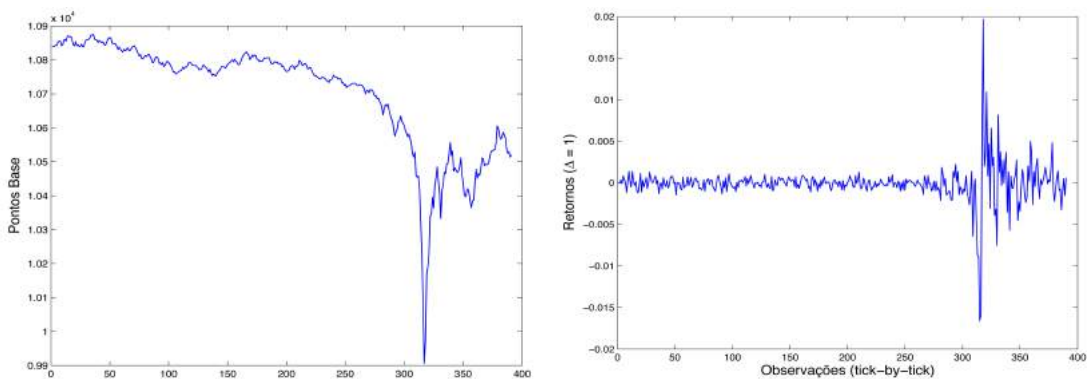


Figura 1 – O *flash crash* no índice Dow Jones Industrial Average (DJIA) ocorrido em 6 de maio de 2010.

Nota: DJIA em nível (esquerda) e seu retorno (direita) em pontos percentuais. As observações são de um único dia de pregão (6 de maio de 2010), amostradas em uma frequência tick-by-tick.

Em 6 de maio de 2010 o mercado de ações americano vivenciou uma das mais severas quedas de preço da história. Mais precisamente, o índice Dow Jones caiu 9% desde o início do dia, apresentando um declínio recorde de pontos-base em termos intradiários. Observando a rapidez do *crash*, onde 998.5 pontos foram perdidos entre 14h 40min. e 15h 00min., seguindo uma retomada de trajetória praticamente imediata, algumas questões como o que realmente motivou tal evento e se os mercados são estáveis vieram à tona (KEANE, 2011).

O gatilho do *crash* ainda permanece envolto em mistério, porém alguns pesqui-

sadores apontam como prováveis causas, além de fatores tecnológicos, os erros humanos. Foi sugerido a princípio que em vez de uma ordem de 16 milhões de dólares, um *trader* erroneamente digitou um algarismo a mais totalizando um valor de 16 bilhões. Em outubro de 2010, a SEC emitiu nota culpando uma ordem de compra acentuada advinda de um único fundo mútuo de investimento, o *Waddel & Reed*, que começou a vender 4.1 bilhões de dólares de contratos futuros do tipo *E-Mini*, através de *robot trading*, levando em consideração apenas volume e desconsiderando tempo ou preço (OTUKI; MAZZEU; DA SILVA, 2010). Uma ordem de venda deste tamanho levaria geralmente 5 horas para ser completada, mas neste caso levou apenas 20 minutos, conforme aponta artigo da *The Economist*, disponível em <http://www.economist.com/node/17202255>.

Entretando, alguns analistas ainda culpam ordens de varredura intra-mercados, ansiedade com o possível *default* da Grécia, eleições na Grã-Bretanha e até fatores como a queda do índice nos dois dias anteriores ao *crash*. Mesmo que não seja a causa principal, operações com robôs através de plataformas de compra e venda eletrônicas como a *Direct Edge* e *BATS*, que são responsáveis por executar ordens em milissegundos, certamente tiveram o papel principal em magnificar o ocorrido em 6 de maio no índice Dow Jones. Assim, uma confluência de fatores (não necessitando de um gatilho em especial) torna-se a explicação mais plausível (OTUKI; MAZZEU; DA SILVA, 2010).

Entretanto, o fato é que os reguladores não agiram prontamente. Após o ocorrido, a SEC sugeriu um sistema de monitoramento de mercado mais amplo, requerendo a suspensão ou diminuição de todas as transações por alguns minutos, caso o mercado estivesse presenciando uma queda abrupta. O resultado de tal política viria um pouco mais à frente.

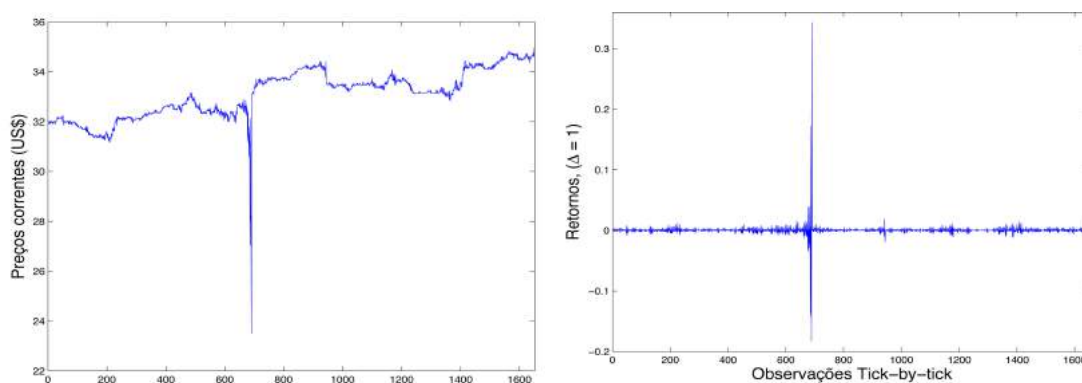


Figura 2 – *Mini flash crash* ocorrido em 27 de abril de 2011 com as ações da Jazz Pharmaceuticals.

O eixo Y representa o preço em US\$ (esquerda) e retorno em % (direita), enquanto eixo X fornece o número de observações: Período 20/04/11 - 29/04/11, totalizando $N = 240$ observações intra-diárias, que equivalem a $N = 1640$ para todo o período.

Em 27 de abril de 2011, com uma queda de 29% em menos de cinco minutos, as ações da Jazz Pharmaceuticals excederam (em muito) as *circuit breaker rules* adotadas

pela SEC. Na (Figura 2), as cotas da Jazz Pharmaceuticals (JAZZ), abriram o pregão em 27/04/2011 negociadas a US\$ 33.59, aproximadamente 4% abaixo de sua maior alta em 52 semanas (US\$ 34.97). A ação foi negociada normalmente em termos de volume até aproximadamente as 10:00 AM EST, quando atingiu o piso (US\$ 23.50) após apenas dois minutos de queda. Em um minucioso estudo feito pela SEC, chegou-se ao veredito de que tanto o *flash crash* ocorrido em 6 de Maio de 2010, como o chamado *mini flash crash* da Jazz Pharm em abril de 2011 foram iniciados quando uma única ordem robusta foi posta no mercado por um *computer generated high frequency market wide sell off*, de maneira que os *stop limits* de diversos investidores foram não intencionalmente acionados (KINETIC, 2011). Entretanto, isso não explica o ocorrido com as ações de outras corporações em 2011: Enstar em 13 de maio, CISCO Systems em 29 de julho, Pfizer em 2 de maio, Progress Energy em 27 de setembro e Micron no quinto dia de agosto.

Enquanto *flash crashes*, ocorrem em índices financeiros como o DJIA, os *mini flash crashes* afetam as ações negociadas. Entretanto, não são especificidades de ativos relacionados somente ao setor da saúde ou de índices como o DJIA. Diversos outros ativos foram vítimas dos denominados *mini flash crashes*, como pode ser observado na (Figura 3).

Crashes são fascinantes em grande medida pois personificam a classe de fenômenos conhecidos como eventos extremos, característicos de inúmeros sistemas naturais e sociais denominados complexos (SORNETTE, 2003). A maturação em direção à instabilidade de um sistema é a hipótese dessa abordagem, ao invés da que se procura um gatilho específico para sua explicação (OTUKI; MAZZEU; DA SILVA, 2010).

Assim, surgem perguntas à respeito da natureza dos dados. São estes governados por uma fórmula determinística ou são eventos puramente estocásticos? São periódicos? Podem ser previstos?

Na tentativa de contribuir para esse entendimento, o presente estudo se baseia primeiramente em uma revisão teórica (capítulo 2), a respeito de modelos alternativos utilizados pela literatura no intuito de modelar séries financeiras contendo eventos extremos. No capítulo subsequente (capítulo 3), nos preocupamos puramente com a descrição dos dados do *flash crash* e *mini flash crashes*. Ademais, testes serão utilizados visando confirmar a rejeição da hipótese de Gaussianidade. O capítulo acaba com a análise do desempenho de modelos alternativos para a descrição dos dados. Por fim, o Capítulo 4 apresenta uma discussão sobre os resultados obtidos assim como a conclusão.

1.1 Objetivo

O objetivo central do trabalho é comparar o desempenho relativo de três modelos estocásticos, três determinísticos e um periódico em descrever o comportamento do retorno

de ações sujeitas aos *flash crashes*. Os três modelos estocásticos utilizados são o *random-walk*, *skewed-t* GARCH (p,q) e o *threshold*-GARCH (p,q), enquanto os determinísticos são a recursão de Feigenbaum e o mapa de Hénon (caóticos) e a hipótese de log-periodicidade.

Para isso, será usado o teste de caos proposto por [Rodriguez et al. \(2005\)](#), via análise da estabilidade dos maiores expoentes de Lyapunov estimados para cada série de tempo. Enquanto a média dos maiores expoentes de Lyapunov ($\hat{\lambda}^{\max}$) de um processo caótico são negativos e aproximadamente estáveis à medida que $\lim_{n \rightarrow \infty}$, o $\hat{\lambda}^{\max}$ de processos estocásticos apresentam além de valores positivos, um comportamento ascendente.

[Matsushita e Da Silva \(2011\)](#) sugerem que a hipótese de log-periodicidade é aceitável para dados intradiários de alta frequência, ao analisar a taxa de câmbio real/US\$, a partir de uma fórmula *three-harmonic*, obtendo um melhor ajuste para dados intra-diários e diários do que a fórmula *two-harmonic* usual proposta por [Fantazzini e Geraskin \(2011\)](#) & [Sornette et al. \(1995\)](#), de maneira que as assinaturas de *crashes* que estão por vir podem também ser detectadas ao se utilizar dados intra-diários de alta frequência.

No que se refere à descrição dos dados, a hipótese de Gaussianidade é testada tendo distribuições de lei de potencia e de Lévy como pano de fundo. Q-Q plots são utilizados para analisar o comportamento extremo das realizações, assim como uma maneira alternativa proposta por Poincaré chamada retrato de fase. A memória do processo será estudada via estatística R/S, proposta por [Mandelbrot e Taylor \(1965\)](#) e a *detrended fluctuation analysis*, de [Peng \(1994\)](#). A entropia de Shannon é usada para medir a incerteza das diferentes séries de tempo.

1.2 Justificativa

Não é novidade a grande preocupação da SEC sobre problemas nos mercados de ações advindos do avanço tecnológico. Desde a queda abrupta sofrida pelo índice NASDAQ em meados dos anos 2000 – fato conhecido como a bolha.com – novas regras, sistemas de monitoramento e segurança denominados *circuit breakers* foram implementados com o intuito de evitar problemas de natureza similar, a despeito de controvérsias sobre sua eficácia. Assim, frente à rapidez e força observada no *flash crash* ocorrido no índice Dow Jones em 6 de maio de 2010, inúmeras preocupações surgiram no que diz respeito à aparente instabilidade dos mercados financeiros globais ([BEDDINGTON, 2012](#)).

Alan Greenspan observou em 30 de agosto de 2002: “Nós do *Federal Reserve* reconhecemos que, apesar de palpites e suspeitas, é extremamente difícil identificar uma bolha efetivamente até o fato em si, ou seja, até que esta tenha estourado. Ademais, mesmo se identificadas com antecedência, a provável reação contracionista do banco central tenderia a transmitir seu efeito para a economia de uma maneira geral, culminando no exato

resultado que estaríamos tentando evitar”.

Apesar do paradoxo explicitado por Greenspan, sugere-se que séries de tempo financeiras podem conter informações preciosas de mudanças de regime, refletindo um comportamento coletivo emergente que merece atenção especial devido a suas inúmeras implicações e aplicações (SORNETTE, 2003).

Seriam esses comportamentos extremos observados no mercado acionário, análogos aos de sistemas naturais como avalanches ou terremotos? Hipóteses como a do *random-walk* sugerem que o comportamento dos preços de ações são aleatórios, não podendo ser previstos baseados em eventos passados. Um sistema aleatório pode ser imprevisível, porém, um sistema imprevisível não necessariamente precisa ser aleatório.

O matemático Ramsey provou que desordem completa é uma impossibilidade (GRAHAM; ROTHCHILD; SPENCER, 1990). Cada grande conjunto de números, como o de retornos de ativos financeiros, necessariamente contém padrões altamente regulares como demonstrado por Mandelbrot e Taylor (1965) & Elliott (1994), em sua teoria das ondas. Em outras palavras, dizem os autores: “Dado um número suficientemente grande de estrelas (dados), é possível encontrar um determinado grupo que forma, ou remete a um “padrão” específico (constelação de leão, peixes...etc)”. A aleatoriedade de uma série está relacionada, portanto, à sua capacidade de revelar qualquer padrão discernível (LIEBOVITCH; SCHEURLE, 2000).

Assim como Elliott (1994) observou que o mercado de ações é uma criação do homem, refletindo, portanto, a idiosincrasia humana, Sornette (2003) explicita que mercados reais exibem um comportamento que difere dramaticamente daqueles previstos por um processo aleatório como o GARCH(1,1) com inovações t-Student. A frequência de *crashes* observada em suas simulações de Monte Carlo foram muito menores do que a frequência de *crashes* presente nos dados reais. Frente aos novos eventos extremos financeiros, qual o grau de confiança das descrições propostas por modelos do tipo GARCH(1,1) ?

Simulações “Monte Carlo” se referem à noção de que realizações aleatórias (como em um cassino), com propriedades prescritas, podem ser usadas para testar a probabilidade de que um determinado padrão pode ocorrer (ou não), por pura “sorte”. Se a probabilidade for bastante pequena, o padrão observado provavelmente não será mero acaso. A consequência é que isso pode ser resultado de um conjunto de efeitos causais que podem ser usados e entendidos.

Chan, Karceski e Lakonishok (1999) dizem que a caracterização da dinâmica complexa de sistemas econômicos fornecem um guia eficiente para reconhecimento de padrões e para previsões de pontos de inflexão nos ciclos de negócios e financeiros. Ademais, seria útil também para estratégias que lidam com otimização de decisões e tecnologia da

informação.

Séries de tempo financeiras e seus valores futuros aparentam ser imprevisíveis. Essa propriedade das séries financeiras não é uma manifestação do fato de que seu preço de mercado não reflete qualquer informação econômica valiosa. Pelo contrário, a série de preços de um ativo financeiro traz consigo uma enorme quantidade de informação não redundante (MANTEGNA; STANLEY, 2000). Entretanto, devido à extensa quantidade de informação, torna-se difícil isolar cada uma e sua associação específica com determinado aspecto ou resultado. A dificuldade em previsões, portanto, é relacionada à abundância de informação presente nos dados e não à falta. Quando uma dada informação afetar o preço de um ativo de maneira específica, esse mercado não será completamente eficiente. Isso permite detectar na série de preço a presença dessa informação específica. Em casos similares, estratégias de arbitragem podem ser concebidas e executadas até que o mercado recupere sua eficiência em misturar todas fontes de informações disponíveis durante a formação dos preços.

Na visão macroeconômica, ao tratar sobre modelos alternativos, Brock e Sayers (1988) nos dizem que caos, por exemplo, representa uma visão radical na perspectiva dos ciclos de negócios. Estes recebem uma explicação endógena com origens na forte estrutura determinística não linear subjacente ao sistema econômico. Tal visão difere (em muito) da visão corrente dominante, que trata das flutuações econômicas como exógenas, baseadas na hipótese de que o equilíbrio econômico é determinado e intrinsecamente estável, de maneira que a economia tende a uma estabilidade de longo prazo, caso não ocorram choques exógenos contínuos.

Aceitando o fato de que ninguém pode prever o futuro quando pessoas estão envolvidas, o presente trabalho terá um viés voltado para a extração e análise da estrutura estatística dos dados, visando sua utilização para o melhor entendimento de eventos financeiros extremos, (como os *flash crashes*) e como estes são relativamente descritos por modelos estocásticos e modelos determinísticos (caóticos e periódicos).

1.3 Metodologia

Muitos dos eventos que acontecem no mundo não são “normais”. A variedade infinita de um jogo de xadrez, desenhos únicos de encostas montanhosas, flocos de neve, sistemas venais de mamíferos, crises financeiras e a complexidade do comportamento humano não podem ser descritos por funções de densidade de probabilidade Gaussianas (LIEBOVITCH; SCHEURLE, 2000)

Com dados não-normais, medidas como média e variância perdem acurácia em fornecer a verdadeira característica de um sistema. Grande parte dos artigos científicos hoje em dia caracterizam os dados que variam ao longo do tempo como “série de tempo”.

Quando um sistema não é caótico, então a série de tempo é uma medida extremamente útil. Entretanto, quando lidamos com um sistema caótico, as realizações medidas em cada experimento serão diferentes, pois com condições iniciais levemente distintas, resultados completamente divergentes serão obtidos. A invariância desse sistema, portanto, é sua melhor forma de descrição, podendo ser analisada através de seu “atrator”. Como comportamentos caóticos podem ser observados em sistemas onde relações sociais estão envolvidas, estes podem não estar sendo significativamente caracterizado pelas suas séries de tempo (LIEBOVITCH; SCHEURLE, 2000).

Com isso em mente, iniciamos o estudo analisando estatisticamente os retornos do *flash crash* de 6 de maio de 2010, ocorrido no índice DJIA e *mini flash crashes*, ocorridos nos ativos: Abott Labs, Apple, CISCO Syst., City Group, Core Molding, Enstar, Jazz Pharm, Micron, Progress Energy, Pfizer, Pall Corp., Rlj Equity, Thermo F. S. e W. Post (ver tabelas 1 e 2), com dados intra-diários do Índice Dow Jones amostrados em uma frequência *tic-by-tic* (com quatro observações por minuto), obtidos da base de dados da Bloomberg.

Iniciando o trabalho, um debate teórico é apresentado no capítulo 2, onde tanto modelos clássicos determinísticos como estocásticos são apresentados. GARCH(1,1) com inovações *skewed-t*, *Threshold-GARCH(p,q,r)* e *random-walk* são os candidatos que representam aleatoriedade enquanto o mapa de Henon e a recursão de Feigenbaum representam as dinâmicas determinísticas, além do *fit* log-periódico proposto por Sornette (2003).

Visando observar qual o melhor ajuste dos dados entre os diferentes modelos explicativos, diversos estudos são realizados. Começando por testes como Lilliefors, Cramer-Von Mises e Jarque-Bera, testamos a hipótese de Gaussianidade. A fim de observar a presença (ou não) de um atrator estranho, além de observar seu comportamento invariante conforme apontado por Henry Poincaré *delay plots* são estimados. Na tentativa de contribuir com a discussão do comportamento extremo dos dados, o estudo de suas “caudas” ou realizações extremas é efetuado via Q-Q plots e ajustes segundo distribuições de probabilidade estáveis de Lévy e lei de potencia.

Testes sobre a presença de memória nas séries também são utilizados, sendo eles a estatística R/S de Mandelbrot e a *detrended fluctuation analysis* de Peng. A entropia de Shannon é estimada para medir o grau de complexidade de cada série de tempo contendo os *mini flash crashes* (reais) e simuladas (estocásticas e caóticas).

Faz-se o teste de hipótese para dinâmica caótica em amostras pequenas proposto por Rodriguez et al. (2005) com algumas modificações (como o uso de dados mal comportados com valores extremos) tal que a informação sobre a natureza (determinística ou estocástica) da série possa ser aproximada.

Os maiores expoente de Lyapunov são estimados via o algoritmo proposto por Ro-

senstein, Collins e Luca (1998), para as séries de tempo geradas por processos determinísticos não-lineares (Hénon e Feigenbaum), processos estocásticos (*skewed-t* GARCH(p,q) e *Threshold* GARCH(p,q)), para 14 ações que apresentaram *mini flash crashes*, incluindo o ocorrido no índice DJIA em 6 de maio de 2010.

Munidos com o expoentes estimados para os três tipos de dados, testes estatísticos serão utilizados para observar sua estacionariedade ou crescimento exponencial. Enquanto para processos puramente aleatórios ou dominados por ruído temos além de valores positivos, uma escalada contínua do λ^{max} , processos determinísticos apresentam um comportamento assintoticamente estacionário, a medida que $N \rightarrow \infty$, incluindo λ^{max} negativos.

Em virtude da influência do número de observações dos dados sobre os resultados e seguindo a proposta de Rodriguez et al. (2005), um *moving block bootstrap* será aplicado às séries de tempo, visando manter inalteradas seus momentos e demais características estatísticas, para que o teste sobre a estabilidade do λ^{max} seja efetuado para diferentes tamanhos amostrais. O teste consiste em subdividir em amostras menores a totalidade da série, de maneira que cada sub-amostra contenha a anterior. Denominadas de blocos para o *bootstrap*, as sub-amostras variam em termos de número de observações para cada série, porém cada bloco denotado por T_i é equivalente a 1/4 da série de tempo em questão. Assim, $\sum_{n=1}^4 T_n = \frac{n}{4}N$, onde $n=\{1,2,\dots,4\}$ e N =tamanho da série de tempo.

Por fim, devido à necessidade de um teste estatístico robusto para o crescimento ou estabilidade da média dos maiores expoentes de Lyapunov ($\langle \lambda^{max}(T) \rangle$) para os diferentes tamanhos amostrais, um teste de dependência linear é realizado. O parâmetro $\hat{\alpha}_1$ estimado da regressão linear:

$$\langle \lambda^{max}(T) \rangle = \alpha_0 + \alpha_1 T + \varepsilon_T, \quad \text{para } T = T_1, \dots, T_4 = N \quad (1.1)$$

será utilizado para testar as propriedades dos λ^{max} . Dessa forma:

$$H_0 : \alpha_1 \leq 0 = (\text{Processo Determinístico}) \quad (1.2)$$

$$H_1 : \alpha_1 > 0 \neq (\text{Processo Determinístico}). \quad (1.3)$$

Consideramos 250 réplicas da regressão acima a fim de construir uma distribuição empírica para o parâmetro α_1 / s , onde s denota o desvio padrão dessas 250 réplicas. O teste é robusto com relação a heterocedasticidade, sendo uma alternativa a testes clássicos para a estimação de λ^{max} , via métodos diretos ou redes neurais (ROSENSTEIN; COLLINS; LUCA, 1998).

Além disso, as séries contendo os eventos extremos serão filtradas através de regressão não paramétrica (*splines*) para determinar possíveis pontos críticos log-periódicos.

Em resumo, utilizaremos métodos computacionais para a observação e comparação de padrões simultaneamente e iterativamente (MCNEIL; RUDIGER; EMBRECHTS, 2005). Para isso, será utilizado o *software* MatLab.

O trabalho foi estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 descreve os processos estocásticos e determinísticos selecionados onde nos preocupamos em apresentar modelos *benchmark* de cada classe estatística e seus embasamentos teóricos. No Capítulo 3 tratamos da parte empírica, enumerando os estudos e testes, descrevendo as séries de tempo e apresentando os resultados. Por fim, no Capítulo 4 discutimos o resultado e comparamos com a literatura existente além de apresentar a conclusão.

2 Processos Estocásticos e Determinísticos Selecionados

2.1 Revisão teórica

Eventos extremos não são peculiaridades de sistemas naturais ou físicos, eles são também uma ameaça real a sistemas sociais e econômicos (SORNETTE, 2003). *Crashes* de diferentes magnitudes e durações foram observados ao longo dos séculos *XIX*, *XX* e *XXI*. Entretanto, foi mais precisamente em 6 de Maio de 2010 que um novo evento extremo pode ser observado.

Responsável por derrubar em 998.5 pontos o índice Dow Jones, entre 14h e 40 min e 15 h, seguindo uma retomada de trajetória praticamente imediata, o evento sofrido pelo índice ficou conhecido como *flash crash* e foi suficiente para demonstrar o alto envolvimento tecnológico em que se encontram os mercados financeiros. Segundo o relatório oficial da SEC, a ordem de venda emitida pelo fundo Waddel & Reed deveria levar, na prática, 5 horas para ser processada; neste caso, levou apenas 20 minutos.

Logo após o *flash crash* sofrido pelo índice DJIA, foi a vez das ações. *Flash crashes* similares ocorreram com frequência alarmante em mais de uma dúzia de ativos financeiros individuais. A (Figura 3) demonstra o comportamento em nível e em termos percentuais, de alguns ativos alvos de *mini flash crashes*. As quedas observadas variam em magnitude e duração. Dentre outras, a *Jazz Pharmaceuticals* apresentou uma queda de aproximadamente 29% em menos de 5 minutos, assim como a Core Molding Technologies Inc., com queda de 19% também em menos de 10 minutos.

Eventos como esse colocam em cheque os atuais sistemas (*circuit breakers*) de proteção e monitoramento da estabilidade dos mercados utilizado pela SEC, assim como trazem à tona discussões à respeito do impacto das transações de alta frequência sobre a dinâmica dos mercados, como apontam Kinectic (2011), Otuki, Mazzeu e Da Silva (2010) & Lecher (2012).

Entretanto, o avanço tecnológico foi também o fator chave para que estudos baseados em enormes quantias de dados empíricos se tornassem possíveis, de maneira com que antigos embates teóricos sobre a natureza dos retornos de ativos financeiros e eventos extremos como *crashes*, pioneirizados por Mandelbrot, Bachelier, Fama e Samuelson voltassem à discussão. Trabalhos seminais que fazem uso dos benefícios tecnológicos (como o de Mantegna e Stanley (1995) e seu grupo da Universidade de Boston) levaram ao

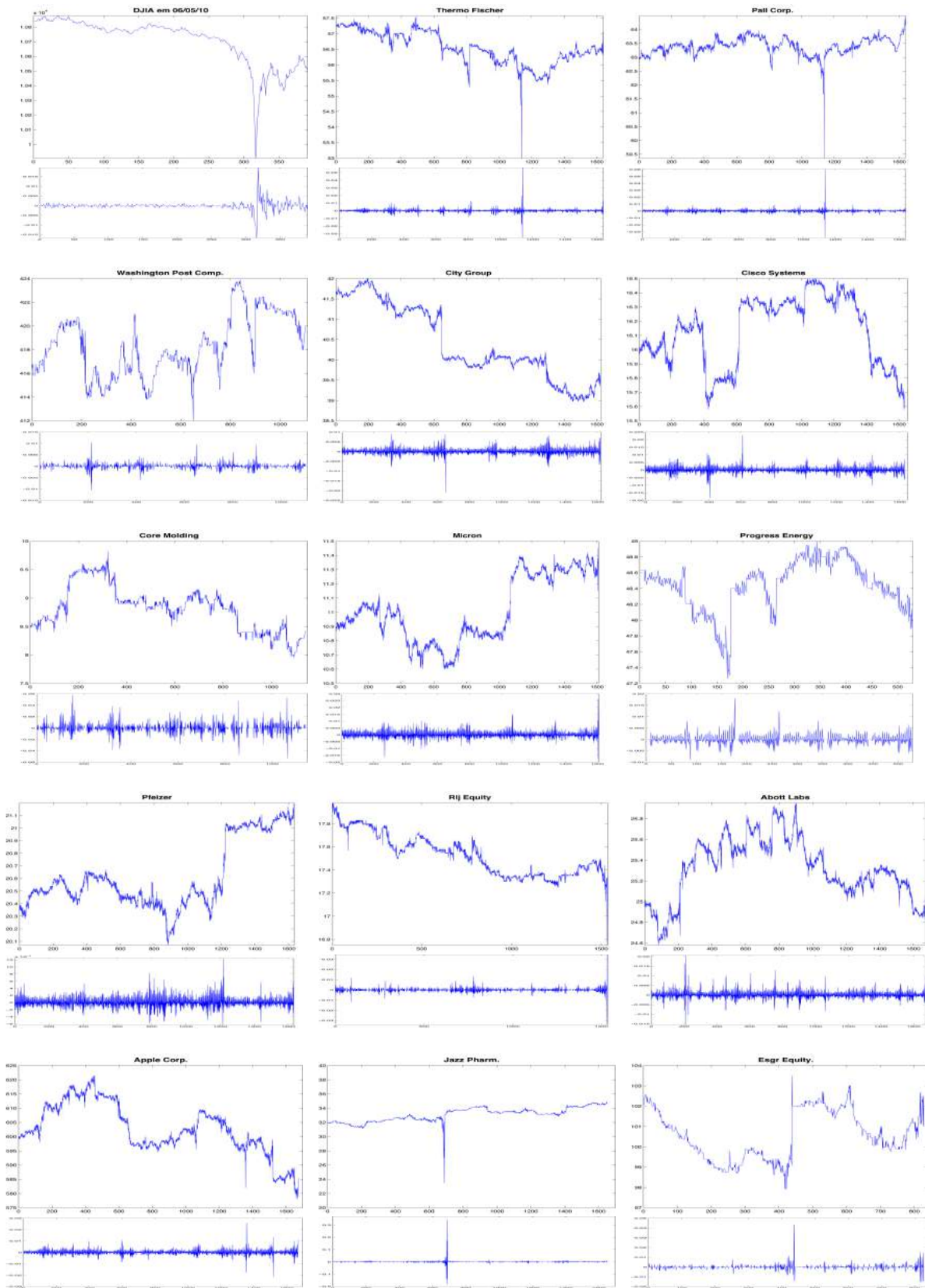


Figura 3 – *Mini Flash Crashes* em preços correntes US\$ (acima) e retornos (abaixo)

Fonte: Bloomberg.

surgimento de um novo *player* na teoria financeira moderna; a econofísica.

De maneira ampla, [Schinckus \(2013\)](#) diz que a econofísica conecta a física com problemas geralmente relacionados à esfera econômica. Apesar do mesmo objeto de estudo (análise da variação dos retornos de ativos financeiros) o método matemático utilizado difere. Econofísicos utilizam processos estáveis de Lévy, que seguem uma lei α -estável do tipo $P(X > x) \approx x^{-\alpha}$ com um parâmetro constante α responsável por modelar a variação dos retornos. O processo é estocástico com incrementos independentes e estacionários. O comportamento segundo uma lei de potência observado nas caudas dos retornos dos ativos é descrito por $x^{-\alpha}$. Esse tipo de distribuição surge de uma generalização da distribuição Gaussiana e faz com que eventos extremos sejam incorporados na função densidade de probabilidade (pdf), tornando-os endógenos i.e. capazes de surgir da própria dinâmica do sistema. Entretanto, os momentos obtidos pela distribuição são infinitos. Essa questão entretanto, foi contornada pelos próprios físicos e será explicada em detalhes na Seção 2.2.4.

Ao tratar da endogeneidade de *crashes*, [Mantegna e Stanley \(1995\)](#) sugerem que a modelagem Gaussiana não somente apresenta problemas em incorporar uns poucos eventos extremos e suas diferentes magnitudes. Apesar de econofísicos, economistas financeiros e econometristas compartilharem alguns elementos teóricos básicos como, por exemplo, a hipótese da teoria ergódica ([PLEROU et al., 2000](#)), fundamentada no preceito de que os dados futuros serão um reflexo estatístico dos dados passados, Stanley argumenta que, dentre outros, um dos fatores que explicam a aparente debilidade de abordagens convencionais em tratar eventos extremos pode estar relacionada ao consenso estabelecido sobre o período amostral utilizado. Em um pequeno número de observações ($n = 10^4$), eventos extremos podem parecer eventos raros. Agora, utilizando ($n = 10^8$) mais eventos extremos são observados, assim como suas diferentes magnitudes, sugerindo que o estudo de suas propriedades consiste em um objetivo específico *per se*.

Entretanto, o fator principal para a aparente ineficácia dos métodos tradicionais em captar eventos extremos ultrapassa o tamanho amostral utilizado. São as hipóteses teóricas em que os estudos se fundamentam que merecem maior atenção.

Passeios aleatórios com e sem tendência são processos bastante utilizados para descrever o comportamento dos preços dos ativos financeiros e baseiam-se na hipótese de Gaussianidade (ver [Bunde, Schellnhuber e Kropp \(2002\)](#) & [Mantegna e Stanley \(2006\)](#)). Desvios da média superiores a alguns desvios padrões são raros segundo uma distribuição normal padrão. Variações superiores a 2 desvios padrões ocorrem com probabilidade 4.45 %, enquanto desvios maiores que 3 desvios padrões têm probabilidade de ocorrência equivalente a 0.3 %. Um desvio acima de 5 desvios padrões tem uma probabilidade de ocorrência segundo sua função densidade de probabilidade equivalente a 0.00000005, i.e. quase nunca observados empiricamente.

Outra pedra angular das finanças clássicas a respeito das premissas básicas sobre a dinâmica dos mercados é chamada de hipótese dos mercados eficientes (HME). Um mercado tido como eficiente é capaz de refletir toda a informação disponível nos preços dos ativos instantaneamente. A motivação teórica por trás da HME, nos diz Mantegna, tem origens no trabalho pioneiro de Bachelier, que no começo do século XX propôs que o preço de ações podem ser descritos como um passeio aleatório. A hipótese foi re-afirmada por Samuelson (1965) com o processo de probabilidade condicional de martingales.

Entretanto, quando um determinado fato afeta o preço de um ativo de maneira específica, a resposta do mercado não é completamente eficiente. Estudos no campo da econofísica foram elaborados para medir esse grau de eficiência dos mercados, como a teoria da complexidade algorítmica Kolmogorov (1998) ou a noção de eficiência relativa, introduzida por Giglio e DaSilva (2008), de maneira que a HME foi relaxada.

Apesar das diversas hipóteses utilizadas para descrever o comportamento hipotético dos mercados financeiros, captar de forma precisa sua dinâmica intertemporal torna-se um desafio extremamente árduo, devido às suas recorrentes instabilidades. Fatos estilizados de ativos financeiros como o decaimento segundo uma lei de potência de suas caudas, leve leptocurtose, assimetria, suas aparentes invariâncias de escala e extrema dificuldade de previsão fazem com que as medidas clássicas de média e desvio padrão não sejam bons indicativos, já que os dados não podem ser descritos por uma distribuição Gaussiana. Mantegna e Stanley (2000) sugerem que uma maneira de caracterizar dados mal comportados é descrever o número de pequenos valores relativamente a grandes valores observados.

Desde 1980 é reconhecido nas ciências físicas que processos estocásticos e séries de tempo imprevisíveis não são sinônimos. Especificamente, a teoria do caos mostrou que series de tempo imprevisíveis podem surgir de sistemas não-lineares determinísticos. Mandelbrot e Taylor (1965) sugeriram que a evolução ao longo do tempo dos preços de ativos nos mercados financeiros podem ser explicada por sua dinâmica determinística não-linear subjacente, fruto de um número limitado de variáveis.

Análises estatísticas dos mercados de ações e de câmbio demonstraram a natureza intermitente não-linear de séries de tempo financeiras, com comportamento não-Gaussiano em suas funções de probabilidade dos retornos e dependência segundo uma lei de potência na densidade espectral. Modelos determinísticos não-lineares de dinâmicas econômicas são capazes de simular séries de tempo que surgem da transição de ordem para caos (BROCK; HOMMES, 1998). Chan, Karceski e Lakonishok (1999) sugerem tal quadro como uma provável explicação da intermitência observada em sistemas econômicos.

Uma característica fundamental de um sistema complexo dinâmico é a possibilidade de ordem e caos existirem conjuntamente ou separadamente. Em um sistema dinâmico ordenado, para condições iniciais arbitrárias, após passar por um período de tran-

sição, o sistema tende a se aproximar de um comportamento periódico com possibilidade de previsibilidade. Em contraste, um sistema dinâmico puramente caótico exibe um comportamento que depende sensivelmente das condições iniciais, fazendo com que previsões de longo prazo sejam impossíveis (HSIEH, 1991).

Caos tem um significado preciso no mundo da física e matemática não-linear. Porém, aplicação da teoria do caos em outras disciplinas como economia, leva geralmente a inconclusões. Sua definição matemática formal varia, porém alguns fatos são sobrepujantes:

1. Caos existe quando um sistema dinâmico determinístico é sensível às condições iniciais levando a um comportamento de longo-prazo imprevisível. Isto é, existe um estado de condições iniciais positivas que não convergem para um ciclo de qualquer natureza.
2. Ocorre uma mistura da série (no sentido topológico) à medida que o número de observações aumenta.
3. Suas órbitas periódicas devem ser densas, tal que realizações de uma variável X_t retornem mais de uma vez a uma mesma vizinhança topológica.

Em economia, macroeconomistas descobriram há algum tempo que certas classes de sistemas determinísticos não-lineares são capazes de produzir uma flutuação auto-sustentada sem a necessidade de choques exógenos. Da Silva (2001) demonstrou que caos pode surgir em séries cambiais fruto da interação entre grafistas e fundamentalistas.

Quanto às questões empíricas, Savit (1998) escreveu uma introdução sobre caos nos preços de mercado de ativos financeiros. Peters (1991) reivindica ter encontrado caos nos mercados financeiros. Com o passar do tempo, inúmeros autores como Brock e Hommes (1998), & Cheung e Fung (1997) se engajaram nesta nova área de pesquisa. Panas e Ninni (2000) reivindicam ter encontrado forte evidência de caos nos retornos diários de ativos relacionados ao mercado de petróleo do mediterrâneo. Kyrtsov e Vorlow (2009) investigaram a rosa dos ventos revelada no espaço de fase ($n(t-1) \times n(t)$) dos retornos das ações do FTSE 100, encontrando uma assinatura fortemente não-linear e possivelmente determinística do processo gerador dos dados. Assim, encontramos na literatura divergências entre a constatação ou não de padrões caóticos em séries financeiras. Porém, um consenso parece aflorar a respeito da não-linearidade do processo gerador dos dados.

O fato de padrões serem encontrados no espaço de fase de uma determinada série de tempo justifica uma definição mais aprofundada do comportamento dinâmico. Atratores estranhos são comumente utilizados em teoria de sistemas complexos para situações em que a trajetória de uma variável aleatória não converge para um equilíbrio estático único. Sprott (1994) apresenta o equilíbrio dinâmico de uma variável como a tendência

de suas realizações se situarem em regiões (vizinhanças) distintas no estado-espço, independentemente do ponto de partida. A esse comportamento de equilíbrio, dá-se o nome de atrator .

Brock e Hommes (2001) ao tratarem da dinâmica de um simples modelo de valoração de ativos descontados a valor presente com crenças heterogêneas, demonstram casos em que um número de estratégias que competem entre si podem levar a trajetórias dinâmicas de preços governadas por atratores estranhos de baixa dimensão, exemplificando a importância de caos, a importância simultânea de diferentes atratores e a existência de bifurcações locais em *steady states*.

Apesar de aparecer como candidato a explicação de eventos fora da curva, modelos determinísticos caóticos para a dinâmica dos retornos de ativos financeiros caíram em desuso. Sobre os motivos da desutilização de caos e suas aplicações nos mercados financeiros, discorrem Mantegna e Stanley (2000) que um dos objetivos de pesquisadores dos sistemas financeiros em termos de dinâmicas não-lineares é construir o hipotético atrator estranho presente na evolução caótica do processo e mensurar sua dimensão denotada por d . A estimação mais acurada de d é > 6 . Para sistemas com $d < 3$, torna-se difícil distinguir entre uma dinâmica caótica ou um processo estocástico, especialmente com a dinâmica determinística subjacente desconhecida. Assim, do ponto de vista empírico, é bem improvável que se possa distinguir aleatoriedade de caos mesmo com uma enorme base de dados.

Apesar de não excluir a hipótese de caos nos mercados financeiros, Mantegna e Stanley (2000) escolhem trabalhar com o paradigma de dinâmica de preços estocástico. Justificam o fato recorrendo ao princípio de que os preços dos ativos dependem fundamentalmente de toda a informação disponível que afete (ou que acredita-se afetar) o ativo em questão. Termina explicitando que toda essa grande quantidade de informação dificilmente poderia ser explicada por um pequeno número de equações não-lineares determinísticas.

Sob a ótica de um geofísico observando mercados financeiros e suas características, nos diz Malevergne e Sornette (2007) que a grande susceptibilidade a eventos extremos significa que o sistema é instável: uma pequena perturbação exógena (ou não) pode levar a uma grande reação coletiva no sentido de rever drasticamente decisões, tal que um grande descompasso súbito entre oferta e demanda no mercado financeiro é capaz de de iniciar um *crash* ou uma histeria generalizada (ponto crítico). Isto é, pequenas perturbações iniciais no sistema levam a reações de longo-prazo imprevisíveis inicialmente (ideia do *butterfly effect*: o bater de asas de uma borboleta no Caribe, por exemplo, pode gerar um tsunami no Japão).

Em física, a definição de crítico é de sumo interesse ao se tratar sistemas complexos. Um sistema se torna crítico quando influências locais propagam-se através de longas distâncias e o estado normal do sistema torna-se extremamente suscetível a pequenas

perturbações. Em outras palavras, diferentes partes do sistema tornam-se incrivelmente correlacionadas (SORNETTE, 2003) de forma que um evento aparentemente aleatório seja, na verdade, determinístico.

Segundo Sornette, modelos que combinam as seguintes características:

1. Sistema em que agentes são influenciados por seus vizinhos;
2. Imitação local se propagando espontaneamente em cooperação global;
3. Cooperação global entre especuladores levando a comportamentos coletivos;
4. Preços relacionados a propriedades do sistema;
5. Parâmetros do sistema evoluindo de maneira lenta ao longo do tempo;

tendem a culminar em crises financeiras.

Essa complexa interação dá origem ao denominado risco sistêmico definido como o risco de que ocorra uma ampliação do processo de imitação local, se propagando espontaneamente em cooperação global no sistema através do *positive feedback*. Isso geralmente é desconhecido e sob certas condições esse processo tende a se amplificar de maneira exponencial, culminando em um comportamento destrutivo, como os *crashes*. Um esquema Ponzi é um ótimo exemplo de *positive feedback* na economia pois seu produto (lucro) é realimentado pela entrada de novos “investidores”, causando rápido crescimento em direção ao colapso (ARTHUR, 2009).

Sistemas simples, que separam claramente *inputs* de *outputs* não apresentam uma tendência ao risco sistêmico. Esse risco é função crescente da complexidade do sistema, pois se torna cada vez mais difícil observar e analisar todas as possíveis combinações das diversas variáveis mesmo sob ambientes de testes específicos. Assim, quanto mais complexo um sistema, mais inclinado ao risco sistêmico ele é, pois é necessária somente uma pequena quantidade de desvio para que o sistema desmorone (SORNETTE, 2003).

Assim, sistemas complexos bem delineados no mundo da física, geralmente apresentam ferramentas próprias de controle para evitar tais situações. Uma pequena quantidade de fricção, resistência, atraso de tempo ou inércia são inseridos em experimentos, no intuito de desacoplar a grande conexão entre *input* e *output* característico do sistema. Tais fatores geram ineficiência, porém, são necessários segundo Sornette (2004) para evitar instabilidades.

Movidos por recentes similaridades entre eventos extremos financeiros, padrões determinísticos e grande quantidade de dados disponíveis, o retorno da teoria do caos e do estudo de padrões caóticos em séries financeiras deu-se efetivamente com o proposto por Rodriguez et al. (2005). Através de um resgate dos testes estatísticos utilizados até

então para a detecção da dinâmica caótica subjacente, devido principalmente ao reduzido número de observações disponíveis, os autores propuseram um *moving block bootstrap* visando a robustez do teste de hipótese e redução da variância do teste de independência linear dos expoentes máximos de Lyapunov estimados para diferentes tamanhos amostrais.

Através de um algoritmo proposto inicialmente por [Rosenstein, Collins e Luca \(1998\)](#) os autores testaram a estabilidade do maior expoente de Lyapunov para diferentes tamanhos amostrais, demonstrando que este é estacionário para processos caóticos à medida que $N \rightarrow \infty$ (assintoticamente) enquanto para processos estocásticos o expoente apresenta um comportamento explosivo, i.e. nunca se estabiliza. Assim, desenvolvem um critério formal que é utilizado como indicador do comportamento caótico de uma série de tempo.

[Mantegna e Stanley \(2000\)](#) & [Mantegna e Stanley \(2006\)](#) sugerem que a mistura de análises empíricas, modelagem, simulações e comparações entre dados empíricos e simulados constituem um procedimento científico parsimonioso para mais precisas análises do processo gerador dos dados de variações de preços e sua final classificação entre determinismo e aleatoriedade. Estudos comparativos entre séries de tempo simuladas e séries de tempo do mundo real com comportamentos específicos apresentam-se como alternativa utilizada não somente pelos autores citados anteriormente, como também por [Setz \(2011\)](#).

Portanto, o Capítulo 2 baseado na nova discussão que caracteriza sistemas financeiros como complexos e motivado pelas recentes descobertas e diferentes testes para dinâmica caótica propostos pela literatura, se estrutura conforme segue: uma primeira seção que trata de processos estocásticos clássicos utilizados para descrever o comportamento dos retornos de séries financeiras como *random-walk*, *skewed-t* GARCH e *threshold* GARCH, incluindo a abordagem de Lévy estável. A segunda seção do presente capítulo trata da abordagem determinística não-linear, apresentando os modelos caóticos, o teste proposto por [Rodriguez et al. \(2005\)](#) para distinção de caos e não-caos, assim como a abordagem log-periódica. Ambas as seções apresentam modelos que serão simulados para comparação com as séries financeiras mal comportadas do mundo real.

2.2 Processos estocásticos

Existe forte evidência empírica a respeito da conclusão de que a volatilidade dos log-retornos de ativos financeiros seja um processo estocástico dependente do tempo. Entretanto, [Mantegna e Stanley \(2006\)](#) apontam que a caracterização completa de aleatoriedade nas flutuações dos retornos de ativos ainda é uma lacuna a ser explorada pela literatura

O autor aponta que o problema da modelagem dos retornos como um processo puramente estocástico compromete aspectos fundamentais e empíricos. O aspecto funda-

mental diz respeito à modelagem teórica de um sistema complexo não-linear que evolui sem leis fixas e sujeitas a impactos exógenos. Já os aspectos empíricos dizem respeito ao papel desempenhado pelo formato exato da função densidade probabilidade (pdf), dos retornos e de sua volatilidade com relação ao apreçamento de produtos financeiros.

Dessa maneira, iniciamos com uma revisão do passeio aleatório (*random walk*) e suas características, seguido por um GARCH(1,1) com choques aleatórios u_t distribuídos segundo uma distribuição t-Student assimétrica. Um *threshold*-GARCH também é utilizado devido principalmente a seu efeito “equilíbrio”, que penaliza (em termos de volatilidade) mais valores negativos do que positivos. Por fim, tratamos da discussão sobre a convergência assintótica de séries aleatórias, assim como processos estáveis de Lévy e a maneira com que os físicos os tornaram empíricamente aplicáveis.

2.2.1 Random-walk

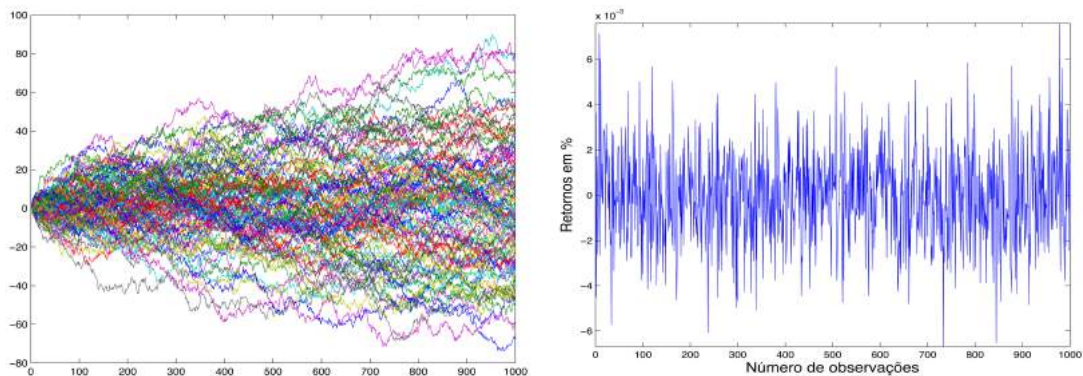


Figura 4 – 100 realizações de um *random walk* (esquerda) e o retorno de uma das 100 realizações (direita).

Por que se preocupar com o somatório de variáveis aleatórias? Em todo lugar a nossa volta, os processos que encontramos e observamos geralmente dependem do acúmulo de inúmeras contribuições ou são resultado de várias causas (SORNETTE, 2003). Desta forma, torna-se interessante estabelecer um processo bem comportado e conhecido para ser usado como *benchmark* em futuras comparações.

Suponha o somatório de n realizações individuais de uma variável aleatória $x_i \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ onde a realização no tempo $t - 1$ não influencia a realização em t , tal que: $S_n = \sum_{i=1}^n \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. A série de tempo $\{S_n\} \sim \text{i.i.d.}(\mu, \sigma^2)$ é denominada de passeio aleatório simples e seus momentos estatísticos $E\{x_i^n\}$ independem da i -ésima observação. Pelo teorema do limite central, tem-se que S_n converge assintoticamente para uma distribuição Gaussiana à medida que $n \rightarrow \infty$.

Assim, passeios aleatórios e passeios aleatórios tendenciosos são usados comumente para modelar variações de preço de séries financeiras. Entretanto, conforme apontam inúmeros estudos, como Nolan (2005) & Sornette (2003), essa classe de distribuições, apesar

de estável, falha em captar fatos estilizados como leptocurtose, assimetria e eventos extremos, cde maneira que Takayasu (2002), Bunde, Schellnhuber e Kropp (2002) & Mantegna e Stanley (2000) os consideram simplesmente *outliers*. Flutuações de magnitude como a *Black Monday* não podem ser descritas por um passeio aleatório, pois a probabilidade $P = (1/2)^N$ de se tomar n passos na mesma direção decresce exponencialmente com o aumento da amostra.

2.2.2 GARCH(p,q) com choques aleatórios advindos de uma distribuição t-Student assimétrica

Modelos ARCH foram aplicados às mais diversas áreas econômicas, como média e variação de inflação, retornos de ativos, taxas de juros e taxas de câmbio e são amplamente utilizados na literatura financeira e extremamente atraentes para deprever fenômenos físicos.

O modelo auto-regressivo generalizado com heterocedasticidade condicional (GARCH) foi elaborado para levar em consideração a correlação de variâncias típica de ativos financeiros. De maneira geral, independente da distribuição do termo de erro utilizada $\{\epsilon_t\}$, processos GARCH tendem a gerar caudas na pdf de x_t que apresentam comportamento leptocúrtico e assimetria.

Assim, tendo em mente séries contendo os *flash crash* e *mini flash crashes*, a série obtida pelo modelo GARCH(1,1), estará sujeita a choques aleatórios via $\epsilon_t \sim \text{skewed-t}(0,1)$, conforme proposto por Kevin Sheppard (em http://www.kevinsheppard.com/wiki/UCSD_GARCH). As realizações $\{\epsilon_t\}$ são independentes e identicamente distribuídas.

A literatura para generalizações do modelo ARCH tornou-se vasta desde o início por Bollerslev (1986). Sendo $y_t = (r_{i,t} - \bar{X}_t)$ a inovação no tempo t , obtém-se uma série de tempo de um processo GARCH(1,1) com $n=2000$ observações, com choques segundo uma distribuição *skewed-t*, de acordo com:

$$y_t = h_t^{1/2} \epsilon_t, \quad (2.1)$$

onde h_t é definido como

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (2.2)$$

com parâmetros $\alpha_0 = 1$, $\alpha_i = 0.1$ e $\beta = 0.8$ e condições iniciais $h_0 = 1$, $y_0 = 0$. A (Figura 5) apresenta a série de tempo y resultante.

2.2.3 Threshold GARCH

Apesar de utilizar uma inovação ($\epsilon \sim \text{Skewed-T}(0,1)$), o modelo anterior supõe que os impactos de choques aleatórios são simétricos, fato rejeitado pela evidência empírica.

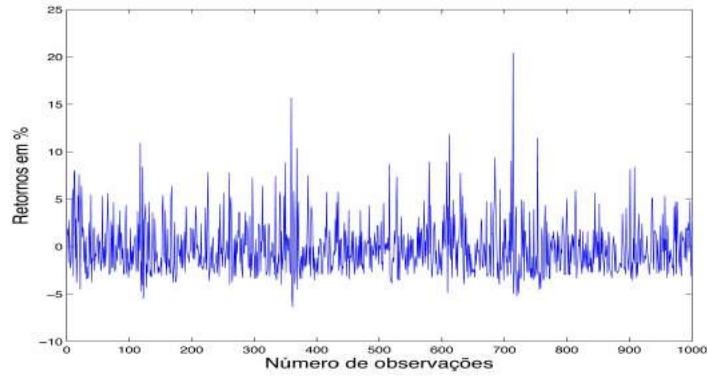


Figura 5 – Série de tempo gerada pelo GARCH(1,1) com $\epsilon_t \sim \text{skewed-}t(0,1)$.

Para aumentar o leque de candidatos ao melhor ajuste de eventos extremos como os *flash crash*, serão utilizadas as séries de tempo geradas por um modelo *threshold*-GARCH em que se tenta captar a assimetria dos choques nos retornos de ativos financeiros. O *threshold*-GARCH é uma extensão do modelo GARCH(p,q) original e permite que o desvio padrão condicional dos retornos dependa do sinal da inovação defasada. Os parâmetros utilizados são: coeficientes AR = 0.675, GARCH = 0.277 e uma constante C = 1. Esses valores foram obtidos segundo o ajuste GARCH para as ações *Progress Energy*, *Jazz Pharmaceuticals* e para a série do DJIA em 6 de maio de 2010. O termo $\epsilon \sim N(0,1)$.

A série de tempo é obtida conforme:

$$\sigma_t^a = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^a + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-1}^{\alpha_i} + \sum_{k=1}^r \Upsilon_k d(\epsilon_{t-k} \leq 0) |\epsilon_{t-k}|^a. \quad (2.3)$$

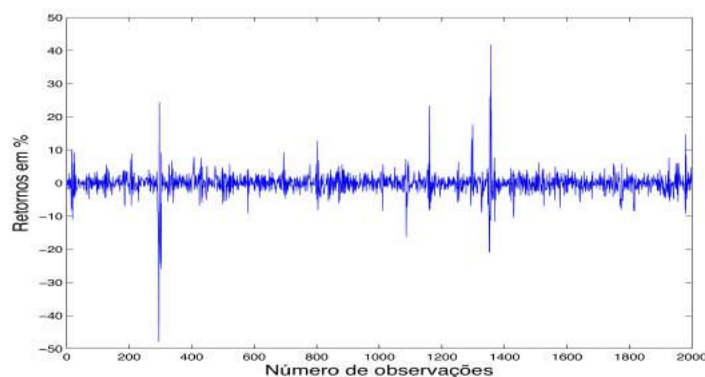


Figura 6 – Série de tempo gerada pelo *threshold*-GARCH (1,1).

O coeficiente a no lado esquerdo da igualdade representa o expoente da variância. Enquanto autores como [Zakoian \(1994\)](#) consideram $a = 1$, outros, como [Glosten, Jagannathan e Runkle \(1993\)](#), sugerem $a=2$. A escolha pode ser livre e, para o segundo caso, tem-se o modelo GARCH-GJR. $d(\bullet)$ é uma variável *dummy* = 1 caso a restrição entre parênteses seja aceita, e zero, caso contrário. Υ é definido como efeito “equilíbrio” e é

geralmente positivo, de forma que a volatilidade aumente, proporcionalmente mais, frente a choques negativos do que a choques positivos. A constante $\omega = 1$.

2.2.4 Processos estáveis de Lévy

Para descrever comportamentos complexos de sistemas dissipativos sem o uso de uma distribuição Gaussiana, os físicos estatísticos usam processos estáveis de Lévy. Estes processos referem-se a uma classe de distribuições infinitamente divisíveis que levam em consideração os fatos estilizados de excesso de curtose e assimetria. Os processos de Lévy são importantes para as finanças por serem a família estatística mais simples cuja trajetória consiste de movimento contínuo intercalado com pulos de descontinuidade de tamanho aleatório, ocorrendo em um intervalo de tempo aleatório (APPLEBAUM, 2004).

Uma distribuição estável de Lévy é definida segundo sua equação característica ($\phi(t)$):

$$\log\phi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \{1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tau \frac{\pi\alpha}{2}\} + iut, \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| \{1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \log |t|\} + iut, \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Quatro parâmetros são necessários para descrever uma distribuição de Lévy. É dito que uma variável aleatória X é distribuída conforme uma Lévy se seus parâmetros $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ respeitarem: $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \gamma \leq 1$, $\beta \geq 0$ e $\delta \in \mathfrak{R}^2$.

A principal propriedade de um processo estável de Lévy, que o distingue de outros processos como "jump-difusion", tornando-o único, é sua estabilidade. Isso significa que o somatório de variáveis aleatórias que apresentam distribuições estáveis com o mesmo coeficiente α terão uma distribuição estável com o mesmo coeficiente de cauda α . Essa propriedade denominada de "escala" (*scaling*), pode ser observada somente em distribuições estáveis. Isso significa, segundo Mantegna e Stanley (2000), que distribuições obtidas com diferentes tamanhos de passos são idênticas quando normalizadas i.e. (X/σ^2). O interessante é que essa propriedade de *scaling* é observada empiricamente nas distriuições dos retornos de ativos financeiros.

O alto interesse por processos de Lévy superou as fronteiras da física desde que os processos foram constatados como a descrição estatística mais apropriada para um grande número de fenômenos distintos como: séries sísmicas e de terremotos Sornette (2004), séries de tempo contendo DNA, difusão de processos epidêmicos, vôos de albatrozes e estudos a respeito da memória humana.

Diversos estudos foram efetuados no intuito de determinar precisamente a forma funcional de séries temporais que apresentam similaridades com eventos naturais, como as séries financeiras, desde que Mandelbrot e Taylor (1965) & Fama (1963) sugeriram distribuições estáveis de Lévy para modelar as caudas longas das distribuições de retornos.

Plerou et al. (2000) mostraram que a distribuição para os retornos amostrados em uma frequência minuto a minuto do S&P 500 é bem descrita pelo comportamento migratório entre um regime de lei de potência do tipo de Lévy, observado anteriormente por Mantegna e Stanley (1995) e um regime, também de lei de potência com o expoente $1 + \alpha$, bem além do regime de Lévy ($0 < \alpha < 2$) (SCHINCKUS, 2013).

Alguns problemas surgiram para o uso de distribuições estáveis de Lévy. O primeiro se refere à infinitude de seu segundo momento. Outra razão diz respeito ao fato de que tais processos são também baseados em um argumento assintótico referente à versão generalizada do teorema do limite central. Análogo às finanças, sistemas físicos referem-se a fenômenos reais cujos momentos não são infinitos nem apresentam um comportamento assintótico.

Físicos acostumados a lidar com problemas de ajuste de dados, tornaram os momentos da distribuição de Lévy finitos através da truncagem. De acordo com determinado critério, como por exemplo, três desvios-padrões, obtiveram a solução analítica para o problema. A truncagem consiste em normalizar a distribuição segundo uma função particular, de maneira que o segundo momento se torne finito. Gupta e Campanha (2002) generalizam essa abordagem com uma pdf genérica, onde l denota o valor de corte no ponto em que a distribuição começa a se distanciar da Lévy. Como alternativa, Nakao (2008) propõe uma truncagem exponencial.

Entretanto, esses cortes abruptos não correspondem ao observado empiricamente, segundo Figueiredo et al. (2007). Devido ao fato de que sistemas reais raramente apresentam uma dinâmica de evolução abrupta, caso fosse utilizada uma truncagem de forma gradual as caudas grossas características seriam subestimadas.

Assim, os autores sugeriram a *exponentially damped levy flight distribution* como solução :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq l \\ \Delta_t^{-\frac{1}{\alpha}} |x_{\Delta_t}| + \theta)^{\beta_1} \exp\{H(x_{\Delta_t})\} & l \leq |x| \leq l_{max} \\ 0 & |x| > l_{max} \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $H(x_{\Delta_t}) = \lambda_1 + \lambda_2[1 - |x_{\Delta_t}|/l_{max}]^{\beta_2} + \lambda_3(|x_{\Delta_t}|^{-l})$ e $\theta, \lambda_1, \lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \leq 0, \beta_1, \beta_2$ e β_3 são parâmetros descrevendo os desvios da distribuição de Lévy, obtidos através de máxima verossimilhança e método dos mínimos quadrados. Essa truncagem em dois passos mantém as características estatísticas da série inalteradas. O primeiro passo é denotado por l , que capta quando a variação começa a se desviar de uma lei estável para um processo de caimento exponencial. O segundo, l_{max} , é o tamanho cuja variância segue um processo de acordo com um uma distribuição abruptamente truncada que pode ser então caracterizada por leis Gaussianas.

Schinckus (2013), Sornette (2004) & Mantegna e Stanley (2000) sugerem o motivo

por trás do debate teórico que levou a plausibilidade dos processos de Lévy: dados empíricos. Modelos construídos por físicos moldam-se a eles ao invés de um mercado ideal inexistente. Nesses modelos, eventos financeiros extremos são uma ameaça real, podendo ser estudados similarmente a transições de fase ou transferências de calor do mundo da física.

Essa foi a solução obtida pelos físicos para os problemas advindos do embate entre Mandelbrot e Taylor (1965) & Fama (1963). Enquanto Mandelbrot propunha que variações nos retornos de séries financeiras eram descritos por uma distribuição estável de Lévy, Eugene Fama preferiu utilizar uma distribuição normal para explicá-los. A solução analítica para a infinitesimalidade dos momentos fez com que com um processo físico aparentemente irrelevante se ajustasse empiricamente aos fatos, de maneira que se tornaram fisicamente plausíveis (SCHINCKUS, 2013).

Apesar de ser uma grande contribuição, a abordagem de Lévy não é a única que trata o processo gerador dos dados subjacente como um processo complexo. A não-linearidade também é assunto e hipótese básica de outras abordagens do comportamento de séries financeiras. A hipótese de que os retornos podem ser considerados eventos determinísticos é apresentado na seção a seguir através de duas abordagens: caos e log-periodicidade. Testes e modelos serão propostos como alternativas à explicação de eventos financeiros extremos como os *flash crashes*.

2.3 Modelos determinísticos

Hipóteses como a do *random walk* sugerem que o comportamento dos preços de ações são aleatórios, não podendo ser previstos baseados em eventos passados. Um sistema aleatório pode ser imprevisível, porém, um sistema imprevisível não necessariamente precisa ser aleatório.

A alternativa é os retornos das ações descritos por modelos determinísticos advindo da teoria do caos, que reproduz um comportamento aparentemente aleatório. A teoria do caos pode descrever a ordem geral de um sistema não-linear. Assim, não estamos na busca de inexistência de ordem, pelo contrário, estamos a sua procura (O’FATHAIGH, 2006).

Torna-se interessante, neste ponto, a distinção entre imprevisibilidade e aleatoriedade. O clima é um exemplo clássico de um sistema imprevisível, pelo menos dentro de um intervalo de tempo. Diz-se que previsões acima de 3 dias são imprecisas. Pode estar ou chovendo ou não. Em um curto intervalo de tempo é possível acertar o estado do tempo; entretanto, a medida que expandimos nossa janela de previsão, a probabilidade de estarmos corretos diminui significativamente (LORENZ, 1969).

Será que então o comportamento do tempo é puramente aleatório? Não. Segundo

Lorenz (1969), se as 12:00 horas de hoje o tempo está úmido e com uma temperatura de quinze graus celsius, é bem improvável que seis horas depois, tenhamos sol e uma temperatura acima de 40 graus. Isso acontece porque se tem uma relação determinística atuando aqui; existem inúmeras variáveis que afetam o tempo, muitas das quais não podemos levar em consideração ao fazer uma previsão sobre condições futuras.

Outro exemplo é o sistema solar. Sua estabilidade é assunto de muita discussão em astronomia. Apesar de os planetas apresentarem trajetórias historicamente estáveis, o efeito sutil que seus campos gravitacionais exercem uns sobre os outros podem se acumular, resultando em efeitos imprevisíveis. Por essa razão Laskar (1994) caracteriza o sistema solar como caótico e previsões de suas trajetórias são inválidas para grandes horizontes de tempo.

A teoria do caos, portanto, mostrou imprevisibilidade mesmo em sistemas determinísticos bem delineados. Entretanto, apesar de imprevisível, sistemas determinísticos trazem mais informação sobre sua trajetória futura do que sistemas puramente estocásticos. Seguindo a linha de raciocínio de (MANDELBROT; TAYLOR, 1965), que sugeriu um comportamento determinístico no retorno de ações advindo das relações não-lineares geradoras do processo, será possível que o comportamento extremo dos dados reais mal-comportados seja análogo ao comportamento caótico de um sistema determinístico? Informações dessa natureza podem ajudar na escolha do regime estatístico de modelos mais adequado em descrever a dinâmica dos dados.

Assim, na seção 2.3.1 apresentamos modelos caóticos clássicos: o mapa de Hénon e a recursão de Feigenbaum e descrevemos em detalhes o teste estatístico utilizado por Rodriguez et al. (2005) para análise de séries temporais que possibilita detectar um regime determinístico. Testes de log-periodicidade também são utilizados. Através de *splines* e o índice de entropia de Shannon sugerido por Da Silva, Matsushita e Silveira (2013), oferecemos um critério de escolha entre modelos candidatos determinísticos e estocásticos a explicação dos *mini flash crashes*. Para inferências sobre a imprevisibilidade da série, foi estimada a entropia de Shannon.

2.3.1 Modelos caóticos

Tomaremos duas séries de tempo determinísticas para comparar com as demais séries de tempo estocásticas visando o melhor ajustamento dos dados do *flash crash*. As séries de tempo caóticas são:

- o mapa de Hénon (1976), descrito conforme

$$x_{t+1} = 1 - 1.4x_t^2 + y_t \quad (2.6)$$

$$y_{t+1} = 0.3x_t, \quad (2.7)$$

onde as condições iniciais são dadas por $x_0 = 0.5$ e $y_0 = 0.2$. A simulação é mostrada na (Figura 7).

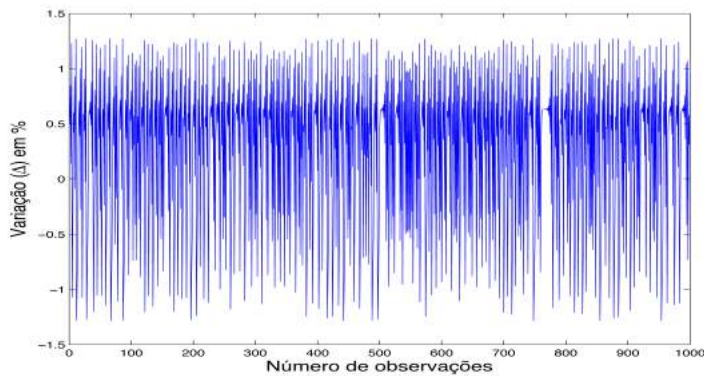


Figura 7 – Série de tempo gerada pelo mapa de Hénon

- A recursão de Feigenbaum com parâmetro 4, de forma que o mapa seja completamente caótico:

$$y_t = 4y_{t-1}(1 - y_{t-1}). \quad (2.8)$$

com condições iniciais $y_0 = 0.7$ (Figura 8).

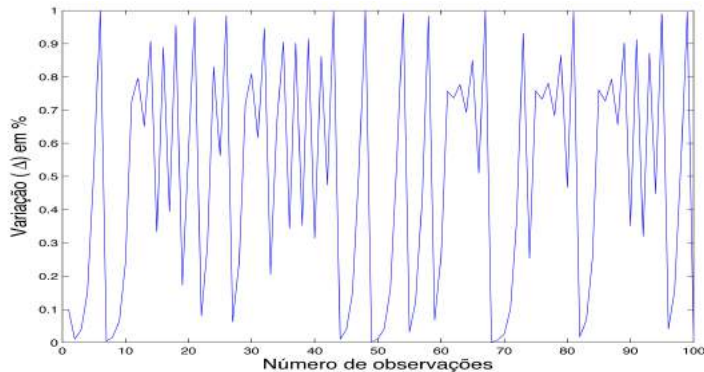


Figura 8 – Série de tempo gerada pela recursão de Feigenbaum

Dentre alternativas como dinâmicas simbólicas e análise do espectro de potência, os expoentes de Lyapunov são utilizados por diversos campos da ciência para testar dinâmicas caóticas. Os expoentes estimados são usados para distinguir processos determinísticos lineares de processos não-lineares, caóticos determinísticos.

Implementações práticas usando séries finitas farão com que qualquer algoritmo padrão para calcular o expoente máximo de Lyapunov (λ^{\max}) via método direto inevitavelmente encontre um valor positivo finito. Assim, λ^{\max} por si só não é suficiente para

distinguir entre processos não-lineares determinísticos e processos estocásticos, especialmente em séries financeiras (RODRIGUEZ et al., 2005). Por isso, processos estocásticos não-lineares como GARCH, são comumente utilizados como modelagem alternativa (HSIEH, 1991).

Além disso, há uma dificuldade em se encontrar um teste estatístico robusto para a presença de caos. Gencay e Dechert (1996) apresentaram uma metodologia baseada em *moving block bootstrap* para computar a distribuição empírica do expoente, provendo um teste de hipótese formal onde o λ^{\max} é igual a um valor hipotético, podendo ser usado para testar a presença de dinâmica caótica.

Visando obter a distribuição amostral do $\hat{\lambda}^{\max}$, considera-se a sequência de variáveis aleatórias fracamente dependentes $[X_1, X_2, \dots, X_N]$, considerada a série de tempo das realizações desse processo estocástico. Segundo Kunsch (1989) & Liu e Singh (1992), a distribuição de determinados estimadores de interesse pode ser consistentemente construída ao se aplicar o *moving blockwise bootstrap*. Considerando $B_t^d = [x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+d-1}]$ o bloco móvel de d consecutivas observações, onde $t \leq N - d + 1$, para uma série de tempo de N elementos, é possível formar um conjunto $[B_1^d, \dots, B_{N-d+1}^d]$ de blocos com tamanho d . Sendo $K = \text{int}(N/d)$, onde $\text{int}(\cdot)$ denota a parte integral, tal que amostrando com reposição de k blocos denotados por $[B_{i1}^d, \dots, B_{ik}^d]$ forma-se a amostra do *bootstrap*.

Ao repetir o procedimento visando a construção de uma sequência de sub-famílias de k blocos amostrados com reposição da família de blocos d -dimensionais $[B_1^d, \dots, B_{N-d+1}^d]$ que podem ser gerados com a série de tempo $[X_1, X_2, \dots, X_N]$, para cada sub-família de k blocos é possível aplicar determinado procedimento padrão para computar o expoente máximo de Lyapunov ($\hat{\lambda}^{\max}$) ao tomar pares das vizinhanças próximas de cada sub-família de blocos. Repetindo o processo um grande número de vezes, obtém-se a distribuição empírica do maior expoente de Lyapunov ($\hat{\lambda}^{\max}$).

2.3.1.1 O expoente máximo de Lyapunov

Na teoria ergódica, médias estatísticas podem ser computadas tanto em termos de tempo médio ou espaço médio. Médias de tempo geralmente dependem de condições iniciais, entretanto, quando existe um atrator no sistema dinâmico, todas as trajetórias possuem as mesmas propriedades estatísticas. Assim, uma medida de complexidade em dinâmicas caóticas pode ser obtida ao se analisar a sensibilidade do comportamento dinâmico frente a mudanças nas condições iniciais, denotadas por dois pontos vizinhos infinitamente próximos. Em sistemas caóticos, pontos próximos de uma vizinhança comum no espaço separam-se exponencialmente com o passar do tempo.

Considerando a família de sub-espacos $V_i^{(1)} \supset V_i^{(2)} \supset \dots \supset V_i^{(n)}$ no espaço tangente

em $\vec{F}^i(\vec{x})$, e os números $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ com as seguintes propriedades:

$$D\vec{F}(V_i^{(j)}) = V_{i+j}^{(j)} \quad (2.9)$$

$$\dim V_i^{(j)} = n + 1 - j \quad (2.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\sqrt{(D\vec{F}^{t*})(D\vec{F}^t)}(x_0)\| = \lambda_j \quad (2.11)$$

para todo $\vec{x}_0 \in V_0^{(j)} - V_0^{(j-1)}$, onde $D\vec{F}^{t*}$ é o transposto de $D\vec{F}^t$ definido como o jacobiano da função $\vec{F}^i(\vec{x})$.

Assim, o expoente de Lyapunov pode ser descrito, segundo [Guckenheimer e Holmes \(1990\)](#), como um número real λ_j responsável por fornecer informações sobre como as órbitas de um atrator se comportam ao longo do tempo (divergem ou andam juntas), dada a evolução dinâmica do sistema. Outra definição consiste na taxa de encolhimento ou espalhamento de segmentos de linhas, áreas e inúmeros outros subvolumes dimensionais no estado-espaço. Segmentos de linha se expandem ou convergem num fator $\lambda^{t\lambda_1}$, áreas por $\lambda^{t(\lambda_1+\lambda_2)}$ e assim por diante. Por essa ótica, um ou mais expoentes de Lyapunov sendo positivos indicam a presença de caos no sistema. Nesses termos, o somatório dos expoentes de Lyapunov é negativo ($\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n < 0$) para sistemas não caóticos ([HARDLE; LINTON, 1994](#)).

Devido à sua complexidade, constata-se que métodos jacobianos de estimação do λ^{\max} via réplicas da abordagem *bootstrap* tornam-se inviáveis. Sendo assim, [Rodriguez et al. \(2005\)](#) utilizam um simples método direto para estimar o expoente máximo de Lyapunov proposto por [Rosenstein, Collins e Luca \(1998\)](#).

2.3.1.2 O método de Rosenstein para estimação do expoente máximo de Lyapunov

O método proposto por Rosenstein é descrito da seguinte maneira. Supondo uma série de tempo observável $[x_1, x_2, \dots, x_N]$, segundo [Takens \(1981\)](#), o primeiro passo é a reconstrução do vetor estado-espaço usando os blocos $[B_1^d, \dots, B_{N-d+1}^d]$ definidos anteriormente, onde $B_t^d = [x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+d-1}]$. Para cada ponto B_t^d , procura-se pelo ponto vizinho mais próximo B_{t*}^d no estado-espaço reconstruído, que minimiza a distância daquele ponto de referência:

$$d_t(0) = \min_{B_{t*}^d} \|B_t^d - B_{t*}^d\| \quad (2.12)$$

onde $\|\dots\|$ denota a norma euclidiana. Para considerar cada par de vizinhos como condições iniciais para trajetórias divergentes, a separação temporal entre elas deve ser maior do que o período médio da série de tempo: $|t - t*| > \text{período médio}$.

O período médio é estimado como a recíproca da frequência média do espectro de potência da série de tempo em questão. A divergência entre pontos vizinhos B_t^d e $B_{t_*}^d$ é dada em uma taxa aproximada pelo máximo expoente de Lyapunov:

$$d_t(i) \cong d_t(0) \exp(\lambda^{max} i \Delta_t), \quad \text{para } i = 1, \dots, T, \quad (2.13)$$

onde i é o número discreto de passos no tempo seguindo o vizinho mais próximo, Δ_t é o período amostral da série de tempo e $d_j(i)$ é a distância entre o j -ésimo par de vizinhos mais próximos, após i passos de tempo. Vale a ressalva de que $i \Delta_t$ corresponde a segundos tal que os expoente de Lyapunov são expressos em bits/segundos. Tomando o logaritmo em ambos os lados da expressão anterior (2.13), obtem-se:

$$\log(d_t(i)) \cong \log(d_t(0)) + \lambda^{max} i \Delta t. \quad (2.14)$$

Para cada valor de t entre 1 e $N-d+1$, a equação (2.14) representa um conjunto de linhas aproximadamente paralelas, cada uma com uma inclinação proporcional em última instância ao λ^{max} . O maior expoente de Lyapunov é então estimado usando um ajuste de mínimos quadrados com uma constante para a linha média, definida como $\langle \log(d_t(i)) \rangle$, onde $\langle . \rangle$ denota o valor médio de todos valores de t .

Vários parâmetros-chave existem no algoritmo de [Rosenstein, Collins e Luca \(1998\)](#). Além da dimensão de incorporação (d) que será chamada de tamanho do *moving block* para o procedimento de *bootstrap*, tem-se que selecionar a defasagem na reconstrução do estado-espaco, o período médio e o número de passos de tempo discreto (i) permitido para a divergência entre vizinhos próximos B_t^d e $B_{t_*}^d$ no estado-espaco. A escolha específica de cada parâmetro varia e será definida em mais detalhes para cada procedimento.

2.3.1.3 Um novo teste para distinguir caos de comportamento estocástico, via expoentes de Lyapunov.

Basicamente, será testada a estabilidade dos maiores expoentes de Lyapunov estimados, $(\hat{\lambda}^{max})$, para cada série de tempo real e simulada. Para isso, será utilizado $\langle \lambda^{max}(T) \rangle$, que é definido como a média da distribuição empírica de 100 réplicas dos $\hat{\lambda}^{max}$ obtidos pelo método direto proposto por [Rosenstein, Collins e Luca \(1998\)](#), através de um *moving block bootstrap*, para diferentes tamanhos amostrais (T_i).

Será testado o comportamento médio das divergências orbitais, à medida que se aumenta o tamanho amostral. Assim, T tem um papel fundamental. O número de observações usadas para estimar os expoentes de Lyapunov via algoritmo proposto por Rosenstein é denominado T . Foi utilizado $T_1=n/4$, $T_2=n/3$, $T_3=n/2$, $T_4=n$ observações, onde n é o tamanho total de cada série analisada. Caso seja obtido um número não-inteiro, o valor é arredondado para cima. Cada bloco T_i , contém o número de observações anterior. Isto é, $T_i = T_{i-1} + 1/4$, até que se atinja $T_4 = 4/4$ da série, ou, sua totalidade. A escolha das subamostras de $T_N = \sum_{i=1}^4 T_i$ baseou-se em [Rodriguez et al. \(2005\)](#).

O esperado é que, enquanto para processos estocásticos o valor médio obtido das 100 simulações do *block bootstrap* não diminua à medida que aumentamos T , para processos determinísticos espera-se que o valor médio diminua, ou até mesmo se estabilize. Em outras palavras, temos uma relação inversa entre o valor médio do $\hat{\lambda}^{max}$ e aumentos no tamanho da amostra T .

Para captar essa relação, [Rodriguez et al. \(2005\)](#) propõem um teste de independência linear, via MQO explicitado por:

$$\langle \lambda^{max}(T) \rangle = \alpha_0 + \alpha_1 T + \varepsilon_T, \quad \text{para } T = T_1, \dots, T_n = N, \quad (2.15)$$

onde α_0 é uma constante e $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Dessa maneira, a estabilidade do maior expoente de Lyapunov é captada por $\hat{\alpha}_1$. A distinção entre série caótica e não-caótica é proposta e testada pelo seguinte teste de hipótese:

$$H_0 : \alpha_1 \leq 0 (= \text{processo determinístico}) \quad (2.16)$$

$$H_1 : \alpha_1 > 0 (\neq \text{processo determinístico}). \quad (2.17)$$

Caso $\hat{\alpha}_1 \leq 0$, aceita-se a hipótese nula de dinâmica determinística. Alternativamente, se $\hat{\alpha}_1 > 0$, caos é rejeitado. Por motivos de robustez na inferência estatística, 250 regressões (2.15), foram simuladas entre a variável explicativa T_i e $\langle \lambda^{max}(T) \rangle$ para cada sub-amostra T , de cada série de tempo. O desvio padrão (s_i) dos $\hat{\alpha}_1$ foram computados e levados em consideração no teste de hipótese, tal que uma distribuição empírica fosse construída para as 250 realizações normalizadas do teste de independência linear ($\hat{\alpha}_1/s_i$). Valores críticos para o intervalo de confiança de 5% encontram-se em parênteses na Tabela (5) do Capítulo 3. O teste é robusto com relação a heterocedasticidade no sentido de White.

2.3.2 Log-periodicidade

Tendo em vista previsões de *crashes*, boa parte das abordagens clássicas usadas para explicá-los procura possíveis causas ou mecanismos em pequenas escalas de tempo (dias, semanas ou meses). [Sornette \(2003\)](#) propõe uma visão diferente, onde a causa subjacente de um *crash* deve ser procurada anos antes do fato em si, mais precisamente no incremento progressivo existente da cooperatividade dos mercados ou interações efetivas entre investidores individuais, que tendem a traduzir-se em uma escalada nos preços dos mercados.

Em linhas gerais, ao analisar o *crash* de outubro de 1987, o autor explicita que comportamentos cooperativos em sistemas complexos não podem ser reduzidos a uma simples decomposição de causas elementares destoadas entre si, e nenhuma causa única pode ser identificada como o fator-chave do *crash*. Deve-se, ao invés disso, observar o fato

de um ponto de vista mais geral, onde o mesmo pode surgir naturalmente como uma “assinatura intrínseca do funcionamento do mercado” onde sua “maturação em direção à instabilidade” possui grande parcela explicativa (SORNETTE, 2003).

Entende-se por instabilidade, segundo o autor, uma grande suscetibilidade frente a perturbações ou influências exógenas e a um crescimento exponencial de perturbações aleatórias que tendem a ocasionar uma mudança de regime ou uma seleção de um novo atrator dada a dinâmica em questão.

Ao observar o comportamento altamente não-linear dos agentes, apresentando padrões de *feedback* positivo e negativo e a maneira própria de organização do mercado, Malevergne e Sornette (2007) levantam a pergunta sobre a possibilidade do *crash* ser um fenômeno de cooperação global, com assinaturas em analogia com as transições de fase existentes na física, onde estas se mostram extremamente importantes em sistemas de não-equilíbrio, como terremotos, avalanches e até nos padrões de propagação de doenças infecciosas.

A busca por log-periodicidade em dados reais começou quando se procurava descobrir quando ocorreria a falha de tanques Kevlar, matrizes de carbono de mísseis *Ariane IV* e foguetes de propulsão. A descoberta foi que a ruptura de estruturas de materiais complexos pode ser entendida como um fenômeno cooperativo levando a assinaturas críticas específicas e detectáveis (SORNETTE et al., 1995).

A chave para a hipótese de log-periodicidade, portanto, é o somatório da imitação cooperativa dos indivíduos, onde a imitação tende a fazer com que o sistema se torne periódico no limiar do *crash*. No mesmo sentido, Sornette (2003), Sornette (2004) & Malevergne e Sornette (2007) propõe que, posteriormente a um *crash*, a função média de uma série de tempo para um índice de ações é caracterizado por uma lei de potência decorada com oscilações log-periódicas, culminando em um ponto crítico que tende a descrever o começo do *crash* no mercado.

A clássica formula que fornece o ajuste log-periódico à lei de potência do comportamento coletivo emergente usada por Sornette é:

$$\log[F_{1p}(t)] = A_2 + B_2(t_c - t)^{m_2}[1 + \cos(\omega \log((t_c - t)/T))], \quad (2.18)$$

onde $\log[F_{1p}(t)]$ representa o logaritmo da evolução do preço da variável aleatória $X \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$, A_2 e B_2 são constantes e ω representa a frequência log-periódica. A log-periodicidade aqui surge da função cosseno do logaritmo da distância $t_c - t$ do tempo crítico t_c . O tempo crítico é obtido pelo ajuste segundo uma lei de potência (veja seção 3.2 a seguir). As oscilações aproximadamente log-periódicas resultam da estrutura oscilatória entre o termo de reversão ao preço fundamental e a aceleração resultante do termo de *trend-following*. Ao juntar ambos, tem-se as flutuações observadas na (Figura 20).

O grande número de parâmetros da equação é motivo de críticas (SORNETTE,

2003). Entretanto, o autor enfatiza a robustez quasi-universal de alguns parâmetros chave da equação em 10 *crashes* analisados: O expoente m^2 que controla a aceleração próxima ao tempo crítico e a razão de escala λ , que quantifica a organização hierárquica no domínio do tempo. Conclui dizendo que, caso a aceleração segundo uma lei de potência decorada com as oscilações log-periódicas resultasse de *noise* ou sorte, esses parâmetros deveriam variar muito de um *crash* para outro. Isso não se sustenta.

Assim, a idéia fundamental por trás da ocorrência de log-periodicidade é a existência de uma hierarquia de escala de tempo (ponto máximo local) de uma função tal como 2.18 ou, como a da fórmula log-periódica usada aqui em detrimento da clássica proposta por Sornette, com uma simples modificação; a introdução de um parâmetro de fase:

$$\ln[F_p(t)] = A + B(\tau)^{m^2} + C(\tau)^{m^2} \cos(\omega \log(\tau) + \pi), \quad (2.19)$$

onde, $\ln[F_p(t)]$ é o logaritmo da série em nível de uma variável aleatória $X \sim (0, \sigma^2)$, A e B são constantes, τ é o tempo crítico ($t_c - t$), ω é a frequência log-periódica, m^2 é a aceleração próxima a τ e π é o parâmetro de fase. A hierarquia característica de tempo surge da interação entre comportamentos coletivos dos agentes (*herd & crowd behavior*) e o retorno das expectativas para a tendência central anterior do sistema. Seguindo Sornette, isso pode ser expressado por:

$$t_c - t_n = \tau \lambda^{\frac{n}{2}}, \quad (2.20)$$

onde

$$\tau = \alpha \exp\left(-\frac{\log \lambda}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\pi}{\beta \log \alpha}\right), \quad (2.21)$$

com $\lambda = e^{\frac{2\pi}{\omega}}$ (SORNETTE, 2003). Segundo o autor, o espaçamento entre sucessivos valores de t_n tende a zero a medida que o tamanho amostral aumenta e t_n converge a t_c . Cabe a ressalva de que essa hierarquia de escala $t_c - t_n$ não é universal, mas depende da especificação do sistema. Entretanto, a razão $\frac{t_c - t_{n-1}}{t_c - t_n} = \lambda^{1/2}$ é esperada como universal. Assim, é possível escrever a relação de singularidade de tempo (t_c), conforme:

$$t_c = \frac{t_{n+1}^2 - t_{n+2}t_n}{2t_{n+1} - t_n - t_{n+2}}. \quad (2.22)$$

O valor para o próximo período de tempo t_{n+3} é predito baseado nos três primeiros, isto é:

$$t_{n+3} = \frac{t_{n+1}^2 + t_{n+2}^2 - t_n t_{n+2} - t_{n+1} t_{n+2}}{t_{n+1} - t_n}. \quad (2.23)$$

A fraqueza desse método consiste na identificação dos valores de tempo característicos t_n que acaba sendo razoavelmente subjetiva (SORNETTE, 2003). Os resultados

obtidos se encontram gráficamente na Figura (20), e os valores estimados para (3.13), na Tabela 8.

O Capítulo 3 a seguir apresenta os resultados obtidos para os modelos determinísticos caóticos e logperiódicos e para os modelos estocásticos.

3 Análise Empírica

3.1 Características dos dados

O Capítulo 3 se divide em dois grandes blocos. Enquanto o primeiro apresenta uma introdução aos dados reais e simulados utilizados, assim como descreve em detalhes os testes realizados, o segundo se preocupa puramente com a análise empírica dos resultados obtidos em conformidade com a metodologia proposta no capítulo anterior.

Os dados foram obtidos na base de dados privada oferecida pela Bloomberg, amostradas durante o horário normal (9:30 a.m. até 4:00 p.m. EST-USA) do pregão do New York Stock Exchange (NYSE), em uma frequência tic-by-tic, variando entre segundos e minutos, porém com aproximadamente 370 observações diárias ou quatro observações por minuto. Assim, cada ação que sofreu um *mini flash crash* apresenta um período utilizado diferente conforme explicitado pela (Figura 1) e Tabela 1. Em conjunto com a existência de um padrão diário periódico e múltiplas transações em um mesmo segundo, a existência de intervalos de tempo espaçados de maneira não uniforme são, segundo Tsay (2010), fatos estilizados de séries de alta frequência.

Diferentes tamanhos amostrais foram utilizados, com os eventos extremos dos *flash crashes* ocorrendo em distintos intervalos de tempo. Para as séries reais, o tamanho amostral varia no intervalo $\in [365, 1672]$ e as simulações foram realizadas com tamanho amostral $n = 2000$. Foram utilizados os retornos das séries conforme:

$$r(t) \equiv e(t + \Delta t) - e(t). \quad (3.1)$$

Todas séries de tempo reais utilizadas foram alvo de eventos extremos. Os ativos com ocorrência de *mini flash crashes* foram: Abbott laboratories, Apple Co., Cisco Systems, City Group, Core Molding Technologies, Enstar, Jazz Pharmaceuticals, Micron, Progress Energy, Pfizer, Pall Corp., Rlj Equity, Thermo Fischer Co. e Washington Post Co., o *flash crash*, foi aquele do índice DJIA em 6 de maio de 2010.

Já as séries temporais simuladas são divididas entre estocásticas e determinísticas. Para o primeiro caso tem-se: *random-walk*, *skewed-t* GARCH e o *threshold*-GARCH. Para o segundo, foram utilizadas duas séries de tempo caóticas: a recursão de Feigenbaum e o mapa de Hénon e log-periodicidade.

3.2 Testes utilizados

O capítulo também apresenta diversos testes, dentre eles: retratos de fase, histogramas comparados a uma distribuição normal-padrão, testes de normalidade (Jarque-Bera, Liliefors e Cramer-Von Misses), gráficos quantílicos, distribuições de Lévy e *power law*, análise R/S de Mandelbrot, a *detrending fluctuation analysis* (DFA) e a entropia de Shannon (H).

Retratos de fase são obtidos ao plotar as realizações em x_{t-1} vs. x_t . Poincaré mostrou a dificuldade de se entender algumas propriedades de determinados sistemas ao analisar simplesmente sua série de tempo. Assim, desenvolveu uma ferramenta para tornar as realiações em um “objeto” (retrato de fase), capaz de demonstrar o comportamento invariante desse sistema (LIEBOVITCH; SCHEURLE, 2000). Essa parte invariante é chamada de atrator e é obtida ao transformar a série de tempo para o chamado estado-espço.

Histogramas representam a distribuição de frequência das realizações seriais e foram elaborados através do *software* MatLab, assim como os gráficos quantílicos (QQplot) e aqueles contendo as distribuições estáveis de Lévy. Enquanto os gráficos quantílicos captam o desvio das caudas da série em relação àquelas sugeridas por um distribuição normal-padrão, a distribuição de Lévy e de lei de potência aparecem como alternativa à explicação das características das séries utilizadas. A estatística R/S e a DFA são testes responsáveis por medir o nível de memória (autocorrelação) em uma série temporal.

As funções densidade probabilidade (pdf) das distribuições estáveis normal-padrão e de Lévy foram obtidas através de (3.2) e (3.3) respectivamente. Diz-se que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se tem uma densidade de probabilidade equivalente a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < \infty. \quad (3.2)$$

A pdf é estável com $\alpha = 2$ e $\beta = 0$; i.e. $N(\mu, \sigma^2) = S(2, 0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, 0; 0) = S(2, 0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, 0; 1)$.

Diz-se que $X \sim \text{Lévy}(\gamma, \sigma)$ se possui densidade

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\sigma)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\sigma)}\right), \sigma < x < \infty. \quad (3.3)$$

A família de pdfs de Lévy é estável com $0 \leq \alpha \leq 2$, incluindo portanto a pdf Gaussiana ($\alpha = 2$). Para $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ tem-se que $\text{Lévy}(\gamma, \sigma) = S(1/2, 1, \gamma, \gamma + \sigma; 0) = S(1/2, 1, \gamma, \sigma; 1)$. Esta é a pdf de Lévy-Smirnov, parte da família das pdfs de Lévy-estável. A distribuição de Cauchy é obtida quando $\alpha = 1$.

Nolan (2005) sugere a obtenção dos parâmetros α , β , γ e δ através do método de máxima verossimilhança. Assim, conforme a equação (3.4) abaixo e com o pacote proposto

pelo mesmo em <http://academic2.american.edu/~jpnolan/>, obtemos os resultados disponibilizados na Tabela 4.

A função de máxima verosimilhança é dada conforme:

$$\sum_x \ln P(X_{\Delta t}) = \sum_x \ln L(X_{\Delta t}) + \sum_x \ln \mathcal{F}(X_{\Delta t}) + \text{constante}. \quad (3.4)$$

Minimiza-se 3.4 como função dos parâmetros da distribuição. A função de máxima verosimilhança é composta de três termos. Para $\Delta_t = 1$, o primeiro termo depende somente de α e γ , enquanto o segundo depende dos parâmetros remanescentes. Assim, o processo de estimação é feito separadamente para a obtenção de α e γ e o resultante é equivalente ao de um processo estocástico gerado por uma pdf de Lévy.

Estatísticas dos últimos cinco séculos revelam uma lei de potência na distribuição de guerras (LEVY, 1983). Sempre que o número de mortes dobra, guerras deste tamanho são 2.62 vezes menos comuns. Quando Mandelbrot e Taylor (1965) descobriram que não havia distribuição Gaussiana nem escala típica nas variações do preço do algodão, isto possibilitou encararmos grandes flutuações de preço como resultado de um arranjo natural no funcionamento dos mercados. Ou seja, estes podem oscilar ferozmente de tempos em tempos mesmo que nada de excepcional ocorra nos fundamentos da economia. As funções de distribuição mais adequadas para a análise do problema não podem então decair exponencialmente, como a Gaussiana. Elas devem decair seguindo uma lei de potência, caracterizando ausência de escala.

É essa discussão que as figuras 17 e 18, tentam captar ao plotar em escala *loglog* a função densidade de probabilidade (eixo y) contra as realizações da série de tempo. Os expoentes α são ajustados via regressão linear (MQO).

Visando analisar a dependência de longo alcance nos retornos dos ativos financeiros, utilizamos a abordagem R/S proposta inicialmente por Mandelbrot e Taylor (1965). A estatística R/S relaciona o tamanho da série (*range* (R)) com seu desvio padrão (S). Seu valor (\tilde{Q}_n) é obtido por:

$$\tilde{Q}_n \equiv \frac{1}{s_n} \left[\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (r_j - \bar{r}_n) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (r_j - \bar{r}_n) \right], \quad (3.5)$$

onde s_n é o estimador de máxima verosimilhança do desvio padrão,

$$s_n \equiv \left[\frac{1}{n} \sum_j (r_j - \bar{r}_n)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.6)$$

O primeiro termo entre colchetes da equação (3.5) é o máximo (sobre k) do somatório parcial dos primeiros k desvios de r_j da média amostral. Como a soma de todos os n desvios de r_j de sua média iguala-se a zero, este máximo é sempre não-negativo. O segundo termo da equação, por sua vez, representa o mínimo (sobre k) dessa mesma

sequência de somatórios parciais, sendo assim sempre não-positivo. A diferença das duas quantidades, o *range* (R), é sempre positiva, tal que $\tilde{Q}_n \leq 0$.

Alguns problemas surgem da abordagem proposta por Mandelbrot, principalmente a diminuição da acurácia da estimativa devido ao pequeno tamanho amostral utilizado neste trabalho. Por isso, foi utilizada uma versão aprimorada da estatística R/S, também utilizada para mensurar a memória de um processo, a (DFA).

Essa distinção entre os testes que mensuram em última instância um mesmo fenômeno, se justifica em grande medida Segundo Granero, Segovia e Perez (2008), a estatística R/S necessita de um número mínimo de pontos em torno de 5.000, enquanto nossos dados chegam no máximo, a 2.000. Assim, essa influência do tamanho amostral pode tornar as estimativas menos precisas. A *detrended fluctuation analysis* entretanto, é aplicada a sinais cujos momentos estatísticos ou dinâmica sejam não estacionários, i.e., sinais similares aos observados em séries financeiras. Assim, a medida DFA surge como alternativa às limitações da estatística R/S de Mandelbrot proposta inicialmente para fins de engenharia.

Em processos estocásticos, teoria do caos e análise de séries temporais, a análise de flutuações livre de tendência surge como uma ferramenta para determinar a auto-afinidade de um sinal e, em especial, é útil para analisar séries que parecem apresentar um processo de memória longa. A *detrended fluctuation analysis* se apresenta como uma maneira alternativa de mensurar a auto-correlação de determinado processo. Caso $\alpha < 1/2$ é dito que a série temporal é anti-correlacionada. Para $\alpha \cong 1/2$ diz-se que a auto-correlação é nula e, por fim, se $\alpha > 1/2$ existe auto-correlação.

O algoritmo da DFA é usado para estimar correlações de longo alcance (PENG, 1994). Se uma sequência de eventos apresenta uma estrutura temporal não aleatória com auto-correlação suavemente decrescente, a DFA pode quantificar quão devagar esses decaimentos na correlação ocorrem, indexados pelo expoente de lei de potência α , que é a inclinação de um *fit* da série via MQO.

Seu cálculo se inicia com a integralização da série a ser analisada. Em seguida, divide-se a série em blocos de tamanhos iguais equivalentes a n . Para cada bloco com tamanho n , uma linha é ajustada aos dados via MQO, representando a tendência daquele bloco. A coordenada y do segmento da linha de ajuste é denotada por $y_n(k)$. Depois, retiramos a tendência da série de tempo integralizada, $y(k)$, subtraindo a tendência local, $y_n(k)$, em cada bloco. Dessa maneira, a flutuação do erro quadrado médio dessa série de tempo livre de tendência e integralizada é calculada por:

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y(K) - y_n(K)]^2}. \quad (3.7)$$

Assim, as flutuações podem ser caracterizadas por um expoente de escalonamento,

α , que é a inclinação da linha que relaciona o $\log F(n)$ com $\log n$. Tanto para o expoente de Hurst R/S como para a estatística DFA, seus valores foram computados para a série até o exato período que precede o *crash*, sendo denotadas por $((R/S)^S$ e DFA^S) na Tabela 7.

A entropia é definida como o ganho máximo esperado em termos de informação em saber um ponto adicional da trajetória típica de um sistema, nos fornecendo uma medida de incerteza ou volatilidade do sistema em questão.

Ao tratar da quantidade de informação disponível nos dados, a entropia é uma medida do grau de incerteza de uma variável aleatória $X \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$. A medida captura o valor esperado da informação contida em uma mensagem ou série particular, e em contraste com os expoentes de Lyapunov que se baseiam na sensibilidade do sistema a mudanças nos valores iniciais como medida de complexidade, trata da imprevisibilidade do sistema, que é outra característica crucial de complexidade.

A entropia de uma variável aleatória X , com possíveis valores $\{x_1, \dots, x_n\}$ e função de probabilidade denotada por $P(X)$, é obtida conforme:

$$H(X) = E[I(X)] = E[-\ln(P(X))], \quad (3.8)$$

onde a letra E , representa o operador de esperança, enquanto I denota a informação contida em X . Assim, conforme [Wickerhauser \(1992\)](#), ao estimar a entropia para uma amostra finita, sua estimativa é dada por:

$$H(X) = \sum_i P(x_i) I(x_i), \quad (3.9)$$

$$H(X) = - \sum_i P(x_i) \log_b P(x_i), \quad (3.10)$$

$$H(X) = - \sum_i \frac{n_i}{N} \log_b \frac{n_i}{N}, \quad (3.11)$$

$$H(X) = \log_b N - \frac{1}{N} \sum_i n_i \log_b n_i. \quad (3.12)$$

Usou-se $(\bullet)_b = e$. Para estimar (3.12), o primeiro passo foi a estimação da função $f(x)$ de densidade pelo método do Kernel. Munidos com a pdf, integramos numericamente a expressão $f(x) \ln(f(x)) \Delta_x$. Onde Δ_x denota o retorno da série. Quanto menor o índice de entropia, menor a complexidade do evento. Em outras palavras, menos imprevisíveis serão suas subsequentes realizações. Alternativamente, quanto maior o valor de H , mais imprevisível será seu comportamento.

Log-periodicidade: Conforme [Sornette \(2003\)](#), foi estimado o ajuste log-periódico dos dados conforme:

$$\ln[F_p(t)] = A + B(\tau)^{m^2} + C(\tau)^{m^2} \cos(\omega \log(\tau) + \pi), \quad (3.13)$$

onde, $\ln[F_p(t)]$ é o logaritmo da série em nível de uma variável aleatória $X \sim (0, \sigma^2)$, A, B e C são constantes obtidas após o *fit* dos demais parâmetros (τ, π, ω e m^2). Seus valores são derivados analiticamente via minimização MQO e plugados na função objetivo, gerando uma função dependente dos quatro parâmetros remanescentes, sendo estes: τ o tempo crítico, ω a frequência log-periódica, m^2 o expoente que controla a aceleração próxima ao tempo crítico e π sendo o parâmetro de fase.

Como estamos lidando com um *fit* não-linear de quatro parâmetros algumas restrições são feitas *a priori* e o problema de vários pontos de mínimo local é contornado usando o otimizador de Levenber-Marquardt, onde a melhor convergência apresentada é tomada como o ponto de mínimo global. Seguindo Sornette (2003), $5 < \omega < 15$, tal que $1.5 < \lambda < 3.5$. τ é tomado como o ponto que antecede o *crash* enquanto π não apresenta muitas restrições. Os resultados obtido se encontram gráficamente na (Figura 20) e os valores estimados de (3.13) na Tabela 8.

Por fim, os expoentes máximos de Lyapunov foram estimados pelo método direto proposto por Rosenstein, Collins e Luca (1998). Em seguida, 100 *moving block bootstrap* foram realizados para quatro tamanhos amostrais distintos, onde cada bloco traz consigo o número de observações do bloco anterior. A média do comportamento dinâmico dos expoentes máximos de Lyapunov $\langle \hat{\lambda}^{max} \rangle$ foi então estimada para cada bloco e, depois, regredida contra o número de observações contida naquele bloco. O objetivo foi, portanto, analisar a estabilidade média da divergência das realizações seriais à medida que aumentamos o tamanho amostral.

Para isso, 250 regressões (2.15) foram realizadas para cada bloco de cada série para a construção de uma distribuição empírica de α_1 , visando a capacidade de inferência estatística (RODRIGUEZ et al., 2005). O teste é robusto com relação a heterocedasticidade no sentido de White.

Os resultados são apresentados na Tabela 5, com valores críticos da distribuição empírica estimada em parênteses, para as 250 simulações normalizadas do teste de independência linear, representadas por $\hat{\alpha}_1$ para cada bloco (T_i). Valores que rejeitam a hipótese nula de caos apresentam H^1 , no canto direito superior, enquanto os demais aceitam a hipótese nula de caos com significância de 95%.

3.3 Resultados

Nas Tabelas 1 e 2 mostramos as estatísticas descritivas clássicas (i.e. μ, σ^2 , curtose e assimetria), número de observações e a queda máxima (*drawdown*) sofrida pelas séries de tempo reais e simuladas. O período amostrado para cada ação e a data do *crash*, também estão incluídos.

Tabela 1 – Estatísticas Descritivas dos retornos dos ativos contendo o *flash crash* e os *mini flash crashes*.

Ação	Amostra (n)	Período	Média (μ)	Variância (σ^2)
Abott Labs	1672	29/04/11 - 31/05/11	6.8648×10^{-07}	4.4884×10^{-06}
Apple Co.	1671	16/03/12 - 30/03/12	-1.4522×10^{-05}	5.2526×10^{-06}
CISCO Syst.	1632	20/07/11 - 29/07/11	-1.5533×10^{-05}	5.2725×10^{-06}
City Group	1620	24/06/11 - 30/06/11	-3.3082×10^{-05}	3.2485×10^{-06}
Core Molding	1144	19/08/11 - 31/08/11	-1.0227×10^{-05}	8.2212×10^{-05}
Enstar	828	12/05/11 - 13/05/11	-1.2263×10^{-05}	7.8117×10^{-06}
Jazz Pharm	1652	20/04/11 - 29/04/11	5.5291×10^{-05}	1.4599×10^{-04}
Micron	1608	29/04/11 - 06/05/11	3.2291×10^{-05}	7.6406×10^{-06}
Progress Energy	528	30/08/11 - 07/09/11	-2.8700×10^{-05}	5.5584×10^{-06}
Pfeizer	1623	02/05/11 - 05/05/11	2.2147×10^{-05}	2.4454×10^{-06}
Pall Corp.	1640	17/02/12 - 02/03/12	1.3602×10^{-05}	6.2189×10^{-06}
Rlj Equity	1536	11/05/11 - 12/05/11	-2.7002×10^{-05}	4.6044×10^{-06}
Thermo F. S.	1640	17/02/12 a 02/03/12	-1.8144×10^{-06}	6.5691×10^{-06}
W. Post	1104	14/06/11 a 20/06/11	6.9993×10^{-06}	1.5832×10^{-06}
Índice DJIA	391	6/5/2010	-7.6953×10^{-06}	5.0441×10^{-06}
Simulações				
random-walk	2000	N.E.	3.154×10^{-06}	0.001
<i>Threshold</i> -GARCH	2000	N.E.	-0.048	5.068
<i>Skewed-t</i> GARCH	2000	N.E.	0.004	3.221
Hénon	2000	N.E.	0.263	0.716
Feigenbaum	2000	N.E.	0.504	0.352

Nota: n é o tamanho da série de tempo. μ é a média amostral e σ^2 denota a variância. N.E. significa a não-existência do valor indicado.

Em praticamente todas as séries de tempo utilizadas, em especial aquelas contendo *mini flash e flash crashes* é possível observar um elevado coeficiente de curtose e assimetria. Por definição, se o valor da curtose de uma série de tempo for igual a 3, então sua pdf tem o mesmo achatamento que a de uma distribuição normal-padrão (i.e. distribuições mesocúrticas). Uma distribuição simétrica por sua vez, é definida quando seu valor se iguala a zero. Tomando como exemplo o caso da Jazz Pharm., observamos um excesso de curtose $K = 472,86$ e uma assimetria de 11.669, valores que excedem em muito os padrões Gaussianos.

Pall Co. e Thermo Fischer Co. também são ativos alvos de *flash crashes*, que apresentam elevados coeficientes de curtose ($K = 251$ e 173 , respectivamente) e reverses (*drawdowns*) de aproximadamente 7%. De maneira geral, todas as séries utilizadas, com exceção do *random walk*, apresentam estatísticas sugerindo a ocorrência de realizações extremas.

Procurando estudar a dinâmica de *outliers*, deu-se início ao estudo empírico com

Tabela 2 – Estatísticas descritivas dos retornos dos ativos contendo o *Flash crash* e os *Mini Flash Crashes*. (continuação)

Ação	Data do Crash	Assimetria	Curtose	Drawdown
Abott Labs	Maio 2011	1.1420	15.4381	0.0431
Apple	23/03/12	0.6084	21.8629	0.0699
CISCO Syst.	29/07/11	0.6777	13.8423	0.0558
City Group	29/06/11	-0.5603	17.3291	0.0724
Core Molding	26/08/11	0.3821	9.9299	0.1904
Enstar	13/05/11	4.2109	78.9024	0.0452
Jazz Pharm	27/04/11	11.6698	472.8615	0.2913
Micron	05/08/11	0.8787	11.5503	0.0476
Progress Energy	27/09/11	1.2511	11.7679	0.0292
Pfizer	02/05/11	0.8677	7.5868	0.0290
Pall Corp.	27/02/12	6.6160	251.0168	0.0725
Rlj Equity	11/05/11	0.5516	90.6679	0.0684
Thermo F. S.	27/02/12	5.1792	173.3840	0.0794
W. Post	16/06/11	0.5849	20.4079	0.0213
Índice DJIA	6/5/2010	-0.0473	33.8842	0.0850
Simulações				
random-walk	N.E.	0.048	3.100	0.006
<i>Threshold</i> -GARCH	N.E.	-20.876	$1.413e^{+03}$	0.283
<i>Skewed-t</i> GARCH	N.E.	1.610	8.139	0.108
Hénon	N.E.	-0.530	2.180	0.574
Feigenbaum	N.E.	-0.016	1.504	0.573

Nota: *Drawdown* representa a queda máxima (% x 100) ocorrida na série.

as (Figuras 9 e 10) responsáveis por explicitar o retrato de fase das séries de tempo reais e simuladas.

Nas séries aleatórias, uma grande concentração de pontos é obtida em valores próximos a zero. Um espalhamento de pontos ocorre à medida que nos distanciamos dessa região central. Espalhamento este que se torna cada vez menos concentrado à medida que nos distanciamos da área central dos eixos, fato que explicita a existência de valores extremos em distintos intervalos de tempo.

Já as séries caóticas apresentam um comportamento distinto. Ao contrário das séries estocásticas, uma região central que contém grande parte das realizações não é observada. As realizações apresentam um comportamento dinâmico constante, dando origem ao que se chamou atrator estranho, i.e. uma região topológica onde as realizações do sistema dinâmico tendem a se estabelecer assintoticamente de maneira ordenada (SPROTT, 1994).

Já os retratos de fase das séries de tempo reais, i.e. aquelas contendo *mini flash crashes* e o *flash crash*, também apresentam suas peculiaridades. O *flash crash* ocorrido

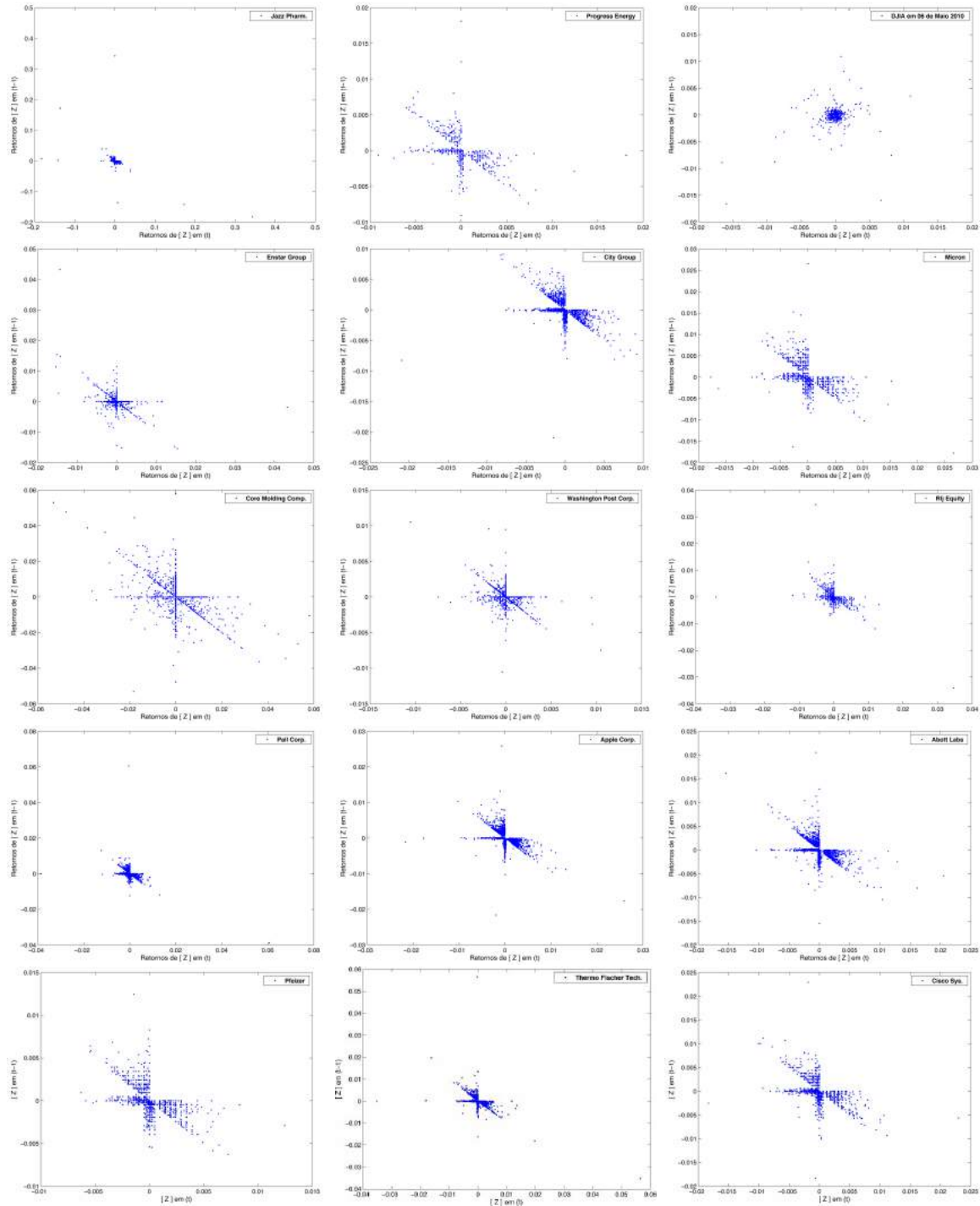


Figura 9 – Retratos de fase (x_t vs x_{t-1}) das ações contendo *flash crashes*

no índice Dow Jones apresenta uma grande concentração de pontos em torno de zero e um espalhamento de realizações com menor frequência, de maneira que nenhum padrão seja discernível. Já as séries contendo os *mini flash crashes*, apresentam em sua totalidade um comportamento distinto do observado no índice DJIA. Em outras palavras, um atrator estranho parece emergir. Existe uma região central onde se encontra a maioria das realizações, e pontos mais distantes que sinalizam realizações extremas. Entretanto,

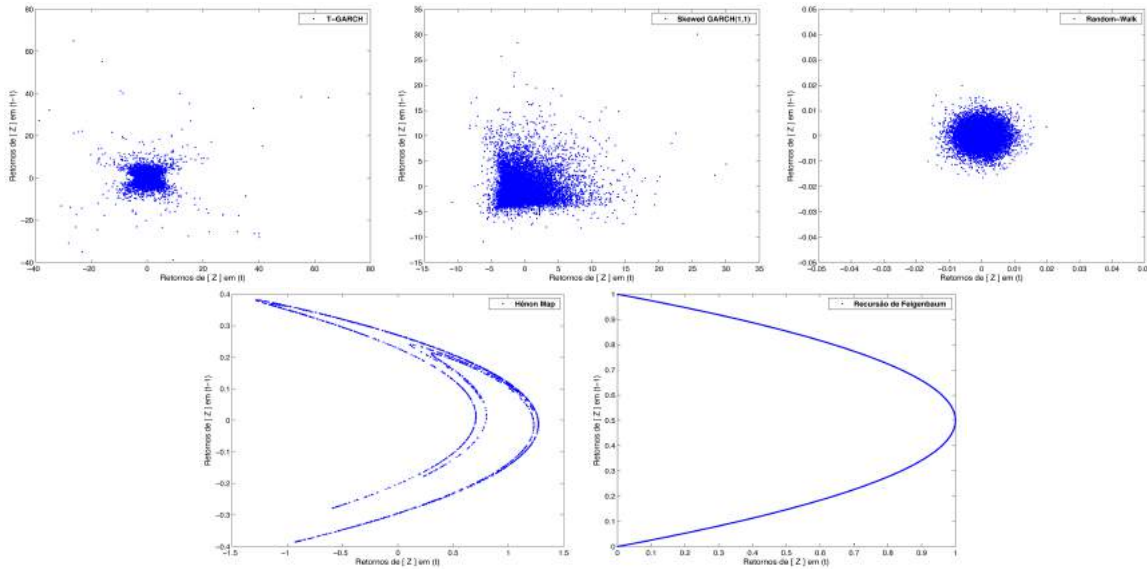


Figura 10 – Retratos de fase (x_t vs x_{t-1}) das séries de tempo simuladas

ao contrário do *flash crash* ocorrido no DJIA, essa região central apresenta um comportamento que, ao invés de um grande número de realizações serem observadas bem próximas a zero, mais realizações extremas surgem. Assim, um aparente círculo em torno de zero (como no *random walk* e no *flash crash*) não é observado.

Para um melhor entendimento da distribuição de frequência entre as diferentes séries temporais, foram elaborados histogramas, responsáveis por fornecer a massa de probabilidade (pdf) das realizações observadas nas séries.

Observando a pdf dos retornos das séries de tempo reais e simuladas frente a um ajuste Gaussiano representado pela linha contínua vermelha (Figura 11 e 12), e excluindo o *random walk*, é possível observar caudas longas i.e. realizações extremas, na totalidade das séries (como pode ser observado nas figuras em escala reduzida localizadas no canto superior direito do histograma de cada ação). A área central das distribuições das séries que contém os *crashes* parecem se comportar similarmente a uma distribuição normal. Entretanto, a frequência de realizações de valores repetidos como zero ($+ - 0.2$) é muito maior do que a distribuição Gaussiana supõe, de maneira com que essa maior massa de probabilidade dos ativos alvos de *crashes*, ultrapassem verticalmente do seu ajuste dado pela linha vermelha.

As séries simuladas requerem um olhar mais cauteloso. As séries obtidas pelo *threshold-GARCH* e *skewed-t GARCH*, se assemelham às pdfs dos dados contendo *crashes*, com valores extremos, assimetria, curtose e maiores número de realizações na região em torno de valores próximos a zero. Entretanto, o ajuste à uma distribuição Gaussiana do *skewed-t GARCH* é maior do que o ajuste do *threshold-GARCH*. Apesar de apresentar assimetria e realizações extremas que superam a linha vermelha, a série apresenta um

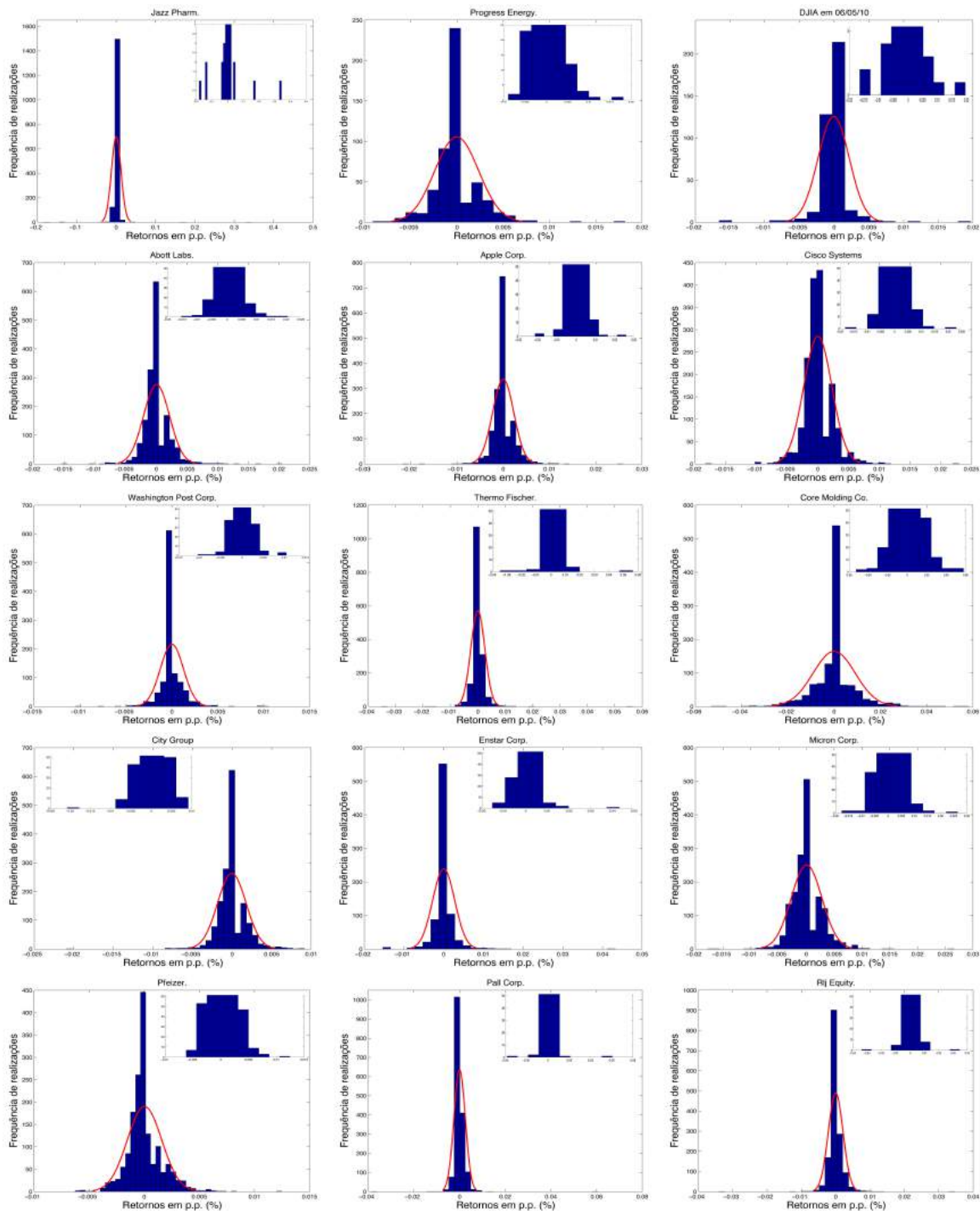


Figura 11 – Histogramas dos retornos de ativos contendo *flash crashes*.

Nota: O histograma capta a distribuição de frequência dos retornos das séries de tempo. As linhas vermelhas representam o suposto ajuste da série para uma distribuição Gaussiana. Para melhor visualização, a figura interior apresenta o resultado em escala reduzida.

número elevado de realizações próximas a zero, ao contrário do obtido pelo *threshold-GARCH*, em que seus valores se encontram quase que na totalidade em torno de zero, e eventos extremos são observados em elevadas magnitudes com baixa frequência.

Por fim, as séries de modelos determinísticos não somente apresentam um formato da pdf completamente distinto das séries aleatórias e das séries contendo *crashes*, como não conseguem em captar eventos muito extremos. Sua maior frequência de realizações encontra-se localizada nos extremos (Feigenbaum) ou distribuídas de maneira “similar” (Hénon).

3.3.1 Testando a hipótese de Gaussianidade dos dados

Visualmente, os testes anteriormente descritos parecem ser unânimes quanto à rejeição do ajuste serial conforme uma distribuição Gaussiana. Assim, para maior robustez estatística, foi testada a hipótese de normalidade das séries de tempo através dos testes; Liliefors, Cramer-Von Misses e Jarque-Bera.

Para fins práticos, foi utilizado o seguinte teste de hipóteses: H_0 aceita a normalidade da série de tempo em questão (denotada por X), enquanto a hipótese alternativa H_1 rejeita a hipótese nula segundo o intervalo de confiança estabelecido de 1%:

$$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.14)$$

$$H_1 : X \neq N(\mu, \sigma^2). \quad (3.15)$$

Na Tabela 3 resumimos o obtido, e explicitamos a rejeição da hipótese nula de normalidade para a totalidade das séries com o nível de significância estabelecido, excluindo o *random walk* que aceita a hipótese nula (com 1%, segundo os testes de Jarque-Bera e Cramer-Von Misses e com 5%, segundo o teste de Liliefors).

3.3.2 Mensurando os desvios da normalidade

Visando isolar o comportamento de valores extremos das pdfs, foram elaboradas as (Figuras 13 e 14) que apresentam os Q-Q *plots*. O ajuste quantílico compara o comportamento bi-caudal de uma distribuição normal-padrão com o das caudas da série em questão. O destoamento de um comportamento descrito por uma distribuição Gaussiana é observado tanto para as séries de tempo reais contendo os *crashes*, como para as simuladas (com excesso do *random walk*). Apesar de ajustes distintos, uma parte dos quantis das séries de tempo reais parece se adaptar aos quantis da normal. Entretanto, desvios de elevadas e diferentes magnitudes são observados à medida que nos distanciamos da área central. Os momentos em que o distanciamento ocorre são distintos para cada caso.

O comportamento quantílico também não é diferente para as séries de tempo simuladas. Excluindo o *random walk*, cujo ajuste é praticamente de 100%, as séries geradas por modelos GARCH tem a parte central dos pontos situadas sobre os quantis da Gaussiana, e uma pequena porção extrema que se distancia da mesma, conforme observado para as séries dos dados reais. As séries determinísticas, entretanto, apresentam uma elevada

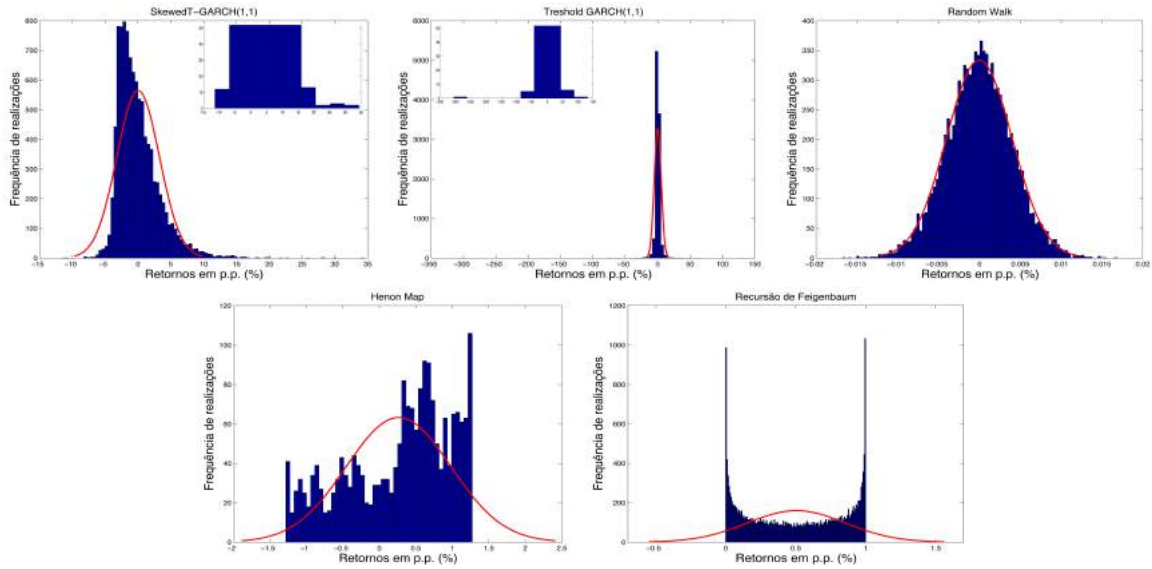


Figura 12 – Histograma de séries de tempo aleatórias e determinísticas simuladas

Nota: O histograma capta a distribuição de frequência dos retornos das séries de tempo. As linhas vermelhas representam o suposto ajuste da série para uma distribuição Gaussiana. Para melhor visualização, a figura interior apresenta o resultado em escala reduzida.

“massa” de pontos fora da reta normal-padrão e seu formato de sino característico. Tal fato confirma a ocorrência de valores extremos de diferentes magnitudes, tanto nas séries estocásticas como nas determinísticas.

Entretanto, Nolan (2005) diz que gráficos quantílicos não são ferramentas satisfatórias para comparar séries leptocúrticas a um ajuste proposto. A primeira razão é visual. Por definição, séries temporais com realizações extremas terão muito mais *outliers* do que uma amostra típica de uma população com variância finita. Isso faz com que o Q-Q plot seja visualmente comprimido, com apenas alguns valores extremos dominando o gráfico. Ademais, caudas grossas implicam que ordens estatísticas extremas terão elevada variabilidade, e, portanto, desvios de uma linha reta ideal são difíceis de avaliar e quantificar de maneira precisa.

Em seguida foram estimados os parâmetros da distribuição de Lévy-estável para os dados contendo os *crashes* e para as simulações (Figuras 15 e 16) conforme sugerido por Nolan (2005).

Para $\alpha = 1$, a distribuição de Cauchy é obtida, e, para o caso limite de $\alpha = 2$, obtem-se a Gaussiana. Por construção, distribuições de Lévy residem no intervalo $\alpha \in [0 : 2]$, e sua forma funcional é mantida se variáveis aleatórias forem somadas, i.e. o somatório de duas variáveis estocásticas independentes x_1 e x_2 são caracterizadas pela mesma distribuição de Lévy.

Para a construção da Lévy teórica (linha preta) foram utilizados os mesmos pa-

Tabela 3 – Teste de normalidade para a pdf empírica dos retornos das ações contendo os *flash crashes* e das séries de tempo simuladas.

Série	Lilliefors	Cramer-Von Misses	Jarque-Bera	Hipótese
CISCO Systems	0.1668 ($1.0x10^{-03}$)	0.0829 (0.00)	$8.083x10^{+03}$ (0.00)	H1
Core Molding Co.	0.2178 ($1.0x10^{-03}$)	0.0816 (0.00)	$2.301x10^{+03}$ (0.00)	H1
Thermo Fischer Co.	0.2106 ($1.0x10^{-03}$)	0.0830 (0.00)	$1.983x10^{+06}$ (0.00)	H1
Washington Post Co.	0.2317 ($1.0x10^{-03}$)	0.0831 (0.00)	$1.391x10^{+04}$ (0.00)	H1
Rlj Equity	0.2079 ($1.0x10^{-03}$)	0.0830 (0.00)	$4.900x10^{+05}$ (0.00)	H1
Pall Corp.	0.1868 ($1.0x10^{-03}$)	0.0830 (0.00)	$4.199x10^{+06}$ (0.00)	H1
Apple Co.	0.2058 ($1.0x10^{-03}$)	0.0829 (0.00)	$2.477x10^{+04}$ (0.00)	H1
Abott Labs	0.2071 ($1.0x10^{-03}$)	0.0829 (0.00)	$1.109x10^{+04}$ (0.00)	H1
Pfeizer	0.1727 ($1.0x10^{-03}$)	0.0830 (0.00)	$1.627x10^{+03}$ (0.00)	H1
Micron	0.1760 ($1.0x10^{-03}$)	0.0828 (0.00)	$5.081x10^{+03}$ (0.00)	H1
Enstar	0.2517 (0.00)	0.0829 (0.00)	$1.997x10^{+05}$ (0.00)	H1
Progress Energy	0.2166 ($1.0x10^{-03}$)	0.0829 (0.00)	$1.804x10^{+03}$ (0.00)	H1
City Group	0.1843 ($1.0x10^{-03}$)	0.0830 (0.00)	$1.388x10^{+04}$ (0.00)	H1
Jazz Pharm.	0.3122 (0.000)	0.0825 (0.00)	$1.517x10^{+07}$ (0.00)	H1
Índice DJIA	0.2259 ($1.0x10^{-03}$)	0.0830 (0.00)	$1.528x10^{+04}$ (0.00)	H1
Simulações				
Random-walk	0.0069 (0.311)	0.0829 (0.00)	8.002 (0.00)	H0
<i>Threshold</i> -GARCH	0.0922 ($1.0x10^{-03}$)	0.0128 (0.00)	$1.804x10^{-03}$ (0.00)	H1
<i>Skewed-t</i> GARCH	0.0903 ($1.0x10^{-03}$)	0.0358 (0.00)	$8.016x10^{-03}$ (0.00)	H1
Hénon	0.1074 (0.00)	0.0143 (0.00)	149.698 (0.00)	H1
Feigenbaum	0.0967 ($1.0x10^{-03}$)	0.0620 (0.00)	$1.864x10^{-03}$ (0.00)	H1

Nota: p-valores estão nos parênteses em negrito. Todos os p-valores são aproximadamente zero, tal que a hipótese nula de Gaussianidade é rejeitada para qualquer nível padrão de significância (0.01, 0.05 e 0.1), excluindo o *random walk*. H1 representa a rejeição da hipótese nula, enquanto H0 aceita a hipótese de que a série se comporta segundo distribuição Gaussiana.

râmetros α , γ e δ , obtidos por (3.4) para série temporal X utilizada. A construção da distribuição normal teórica (linha vermelha) utilizou a variância obtida pelos dados.

Começando pelas séries de tempo contendo os *crashes* um bom ajuste foi observado para a região central das pdfs, porém, os dados extremos ficaram localizados abaixo do ajuste da Lévy teórica, indicando assim quebra de *scaling*. Isso não é inesperado pois a Lévy teórica apresenta variância infinita enquanto empiricamente, a variância dos dados é finita. O ajuste das pdfs empíricas pela distribuição de Lévy é satisfatória para o conjunto de observações, pelo menos para a parte central.

Com exceção do *Threshold*-GARCH, que em um primeiro momento apresenta um ajuste satisfatório frente a uma distribuição estável de Lévy, rejeitando o ajuste Gaussiano, as demais séries; *random walk*, *Skewed-T* GARCH e as séries determinísticas aparentemente rejeitam a distribuição de Lévy e Gaussiana (com exceção do *random-walk* que ajusta-se 100% à normal-padrão).

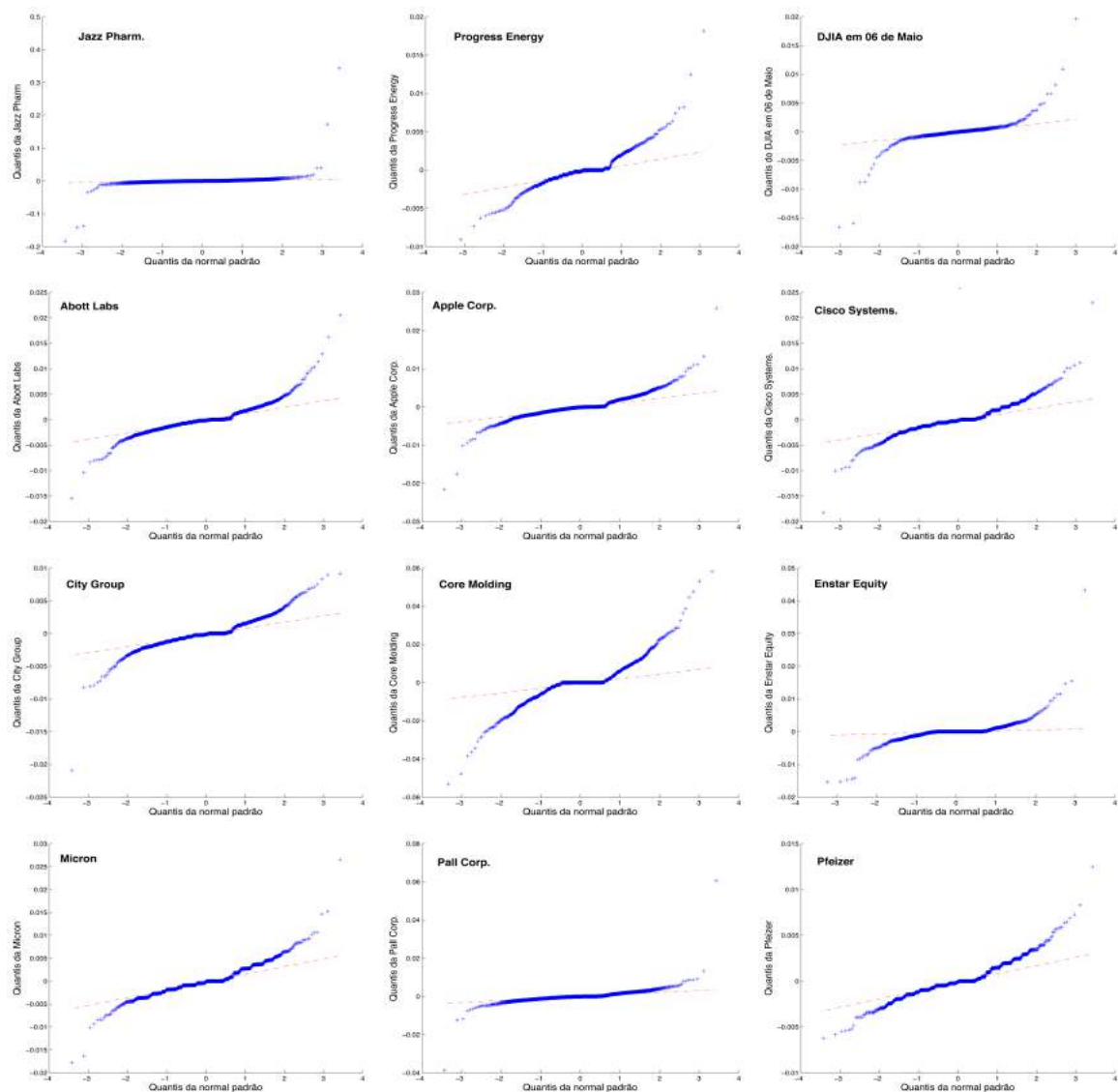


Figura 13 – Q-Q plot dos retornos das ações sujeitas aos *flash crashes*.

Nota: O *plot* quantílico capta a distribuição de frequência bi-caudal dos retornos das séries de tempo. A linha vermelha representa o comportamento de uma distribuição Gaussiana.

Segundo Nolan (2005), determinada variável aleatória $X \sim \text{Lévy}(\gamma, \sigma)$, se seus parâmetros (α , β , γ e δ) respeitarem $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \gamma \leq 1$, $\beta \geq 0$ e $\delta \in \mathfrak{R}$. Os valores que não residem neste intervalo se encontram destacados em **negrito**.

Para as séries de tempo simuladas, o coeficiente $\hat{\alpha}$ está contido no intervalo $\in [0, 2]$ para o *threshold-GARCH* e o *Skewed-T GARCH*. O *random walk*, mapa de Hénon e a recursão de Feigenbaum apresentam valores de $\hat{\alpha}$ superiores a Lévy teórica, i.e. $\hat{\alpha} \geq 2$. Enquanto os demais parâmetros estimados das séries de tempo simuladas parecem se enquadrar no regime da Lévy teórica, o parâmetro de *shape* ($\hat{\gamma}$) do modelo *Skewed-T GARCH* ficam fora o intervalo.

Já as séries de tempo reais apresentam a totalidade dos parâmetros estimados,

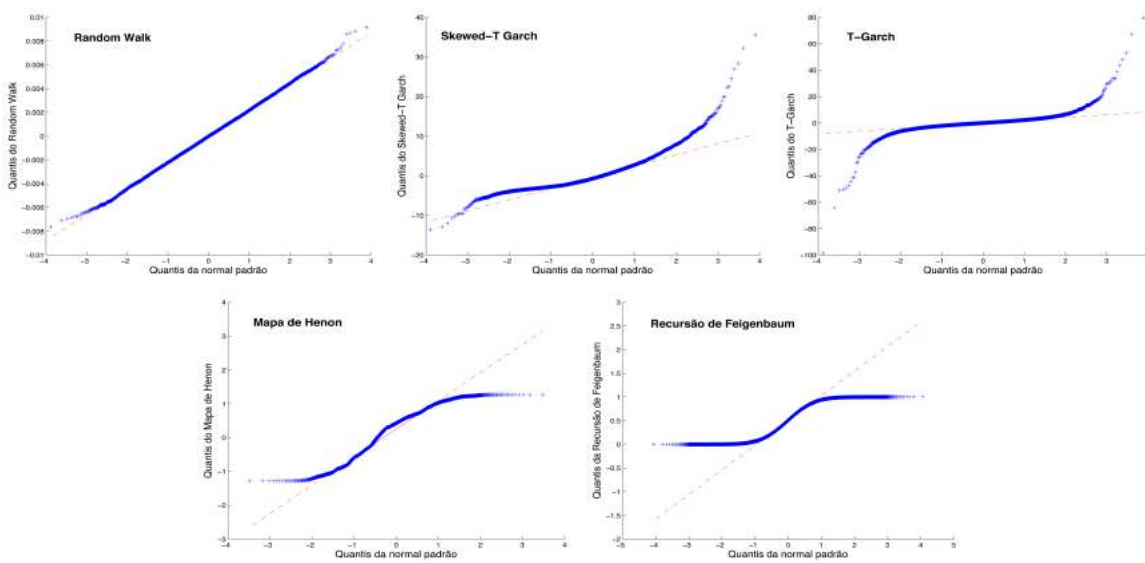


Figura 14 – Q-Q *plot* dos retornos das séries de tempo simuladas.

Nota: O *plot* quantílico capta a distribuição de frequência bi-caudal dos retornos das séries de tempo. A linha vermelha representa o comportamento de uma distribuição Gaussiana.

Tabela 4 – Estatísticas da Lévy estável

Ativo	α	β	γ	δ
Abott Labs	1.283	0.472	0.0008	0.0005
Apple	1.166	0.422	0.0008	0.0009
CISCO Syst.	1.159	0.331	0.0008	0.0007
City Group	1.158	0.262	0.0007	0.0004
Core Molding	1.210	-0.246	0.0001	0.0000
Enstar	1.332	0.064	0.0008	0.0005
Jazz Pharm	1.062	0.103	0.0010	0.0009
Micron	1.353	0.642	0.0012	0.0007
Progress Energy	1.128	0.032	0.0005	-0.0003
Pfeizer	1.232	0.464	0.0006	0.0005
Pall Corp.	1.245	0.424	0.0007	0.0005
Rlj Equity	1.089	0.152	0.0006	0.0005
Thermo F. S.	1.479	0.307	0.0005	-0.0010
W. Post	1.231	0.032	0.0008	0.0007
Índice DJIA	1.263	-0.022	0.0005	-0.0001

Nota: Valores que superam os limites da Lévy teórica se encontram destacados em negrito.

como pertencentes ao intervalo que parametriza a afirmação $X \sim \text{Lévy}(\gamma, \sigma)$, i.e. $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ e $\hat{\delta})$ residem nos seus respectivos intervalos teóricos de uma Lévy estável (NOLAN, 2005).

Assim, com exceção do *random walk* que tende a ser bem descrito por uma distribuição normal-padrão, o restante das séries, principalmente as reais contendo os *crashes*, ficam fora do ajuste da distribuição gaussiana no que tange realizações extremas. Ape-

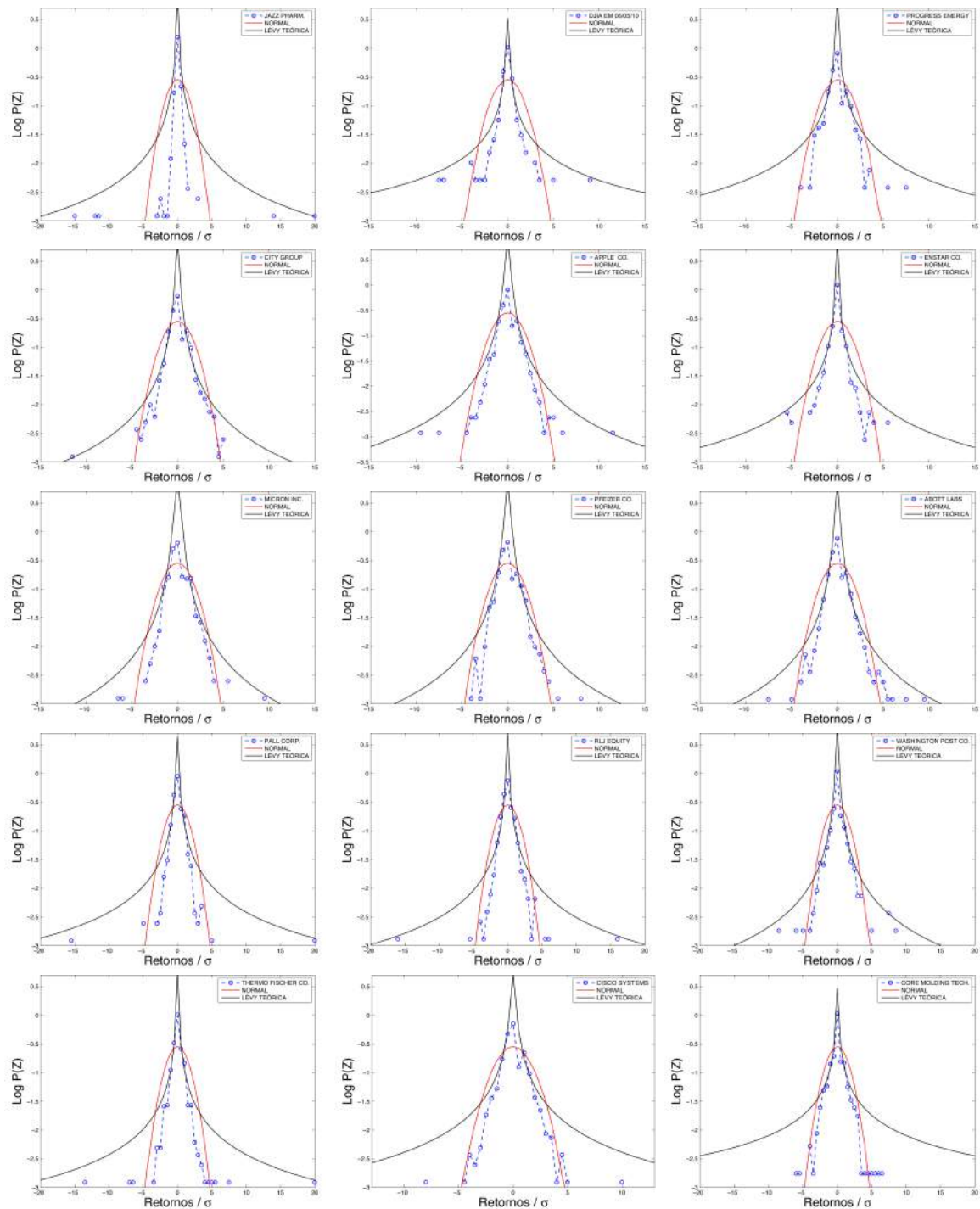


Figura 15 – Ajustes dos dados contendo *flash crashes* frente às distribuições Gaussiana e de Lévy estável.

Nota: As linhas vermelhas representam a distribuição Gaussiana.

sar de apresentar um ajuste satisfatório na região central, a distribuição não consegue incorporar em sua “massa” de probabilidade eventos com elevado desvio-padrão. O resultado é reforçado pelos valores dos parâmetros estimados na Tabela 4, que sugerem, além da estabilidade das séries de tempo reais, um ajuste empírico satisfatório segundo uma distribuição de Lévy.

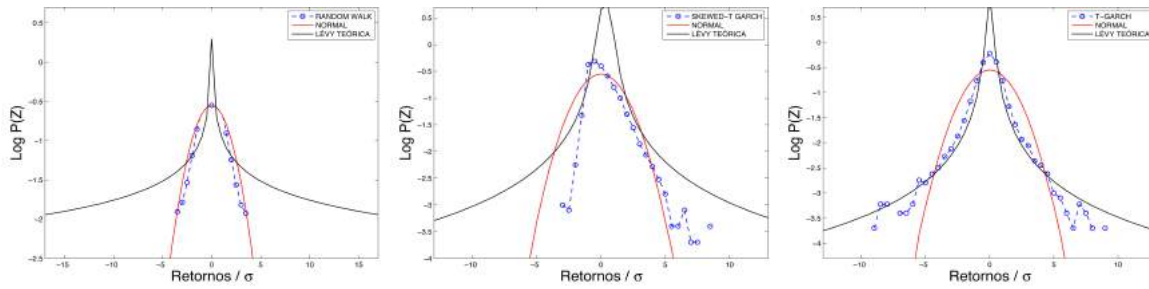


Figura 16 – Ajustes dos dados simulados frente às distribuições Gaussiana e de Lévy estável.

Nota: As linhas vermelhas representam a distribuição gaussiana.

Entretanto, distribuições de Lévy não são a única forma de ausência de escala de descrever a ocorrência de eventos extremos. Na natureza, leis de potência são mais frequentemente observadas e ajustadas aos mais diversos tipos de dados e situações do que a distribuição de Lévy.

Por exemplo, terremotos de pequenas magnitudes ocorrem frequentemente a todo instante. Porém, de tão fracos, dificilmente observamos danos mais graves. Entretanto, quanto maior em termos de pontos na escala Richter um terremoto é, mais rara sua ocorrência, ou seja, menor sua frequência. Esse é o princípio das *power laws*. Avalanches também seguem o mesmo princípio, podem ser descritas da seguinte maneira: em uma montanha onde houve um certo acúmulo de neve perto do ponto crítico do sistema (crítico no sentido descrito como na física), um novo floco de neve caindo desse cume pode tanto iniciar uma avalanche como contribuir ainda mais para a pilha de neve. Caso ocorra uma avalanche, esse único novo floco de neve pode, dependendo do acúmulo de stress presente no sistema, causar uma avalanche de grande ou pequena magnitude (SORNETTE, 2003).

Flutuações no índice S&P 500 que são dezesseis vezes menos frequentes cada vez que dobramos seu valor ou a energia de um terremoto ele se torna quatro vezes menos frequente, as distribuições dos terremotos e *crashes* financeiros são fractais, logo invariante na escala (MATSUSHITA; GLERIA; DA SILVA, 2004).

Nas (Figuras 17 e 18) plotamos em escala *log log* as pdfs das variáveis aleatórias (eixo y) contra suas realizações (eixo x). O *random walk* apresenta claramente um decaimento exponencial de acordo com o obtido pela (Figura 18), em que suas caudas se enquadram no regime Gaussiano. O ajuste dos pontos se encontra aquém (-0.658) do regime teórico de uma lei de potência, isto é, $2 \pm \sigma^2$. Já o restante dos modelos estocásticos merecem um olhar mais atento. Enquanto o *threshold-GARCH* apresenta um aparente comportamento segundo uma lei de potência, o expoente obtido da regressão via MQO sugere o contrário (-0.671). Por fim, o *skewed-t GARCH* fica fora dos limites teóricos de uma distribuição de lei de potência. O parâmetro α estimado se situou em 3,79, sugerindo uma grande quantidade de eventos que fogem ao ajuste central de uma distribuição

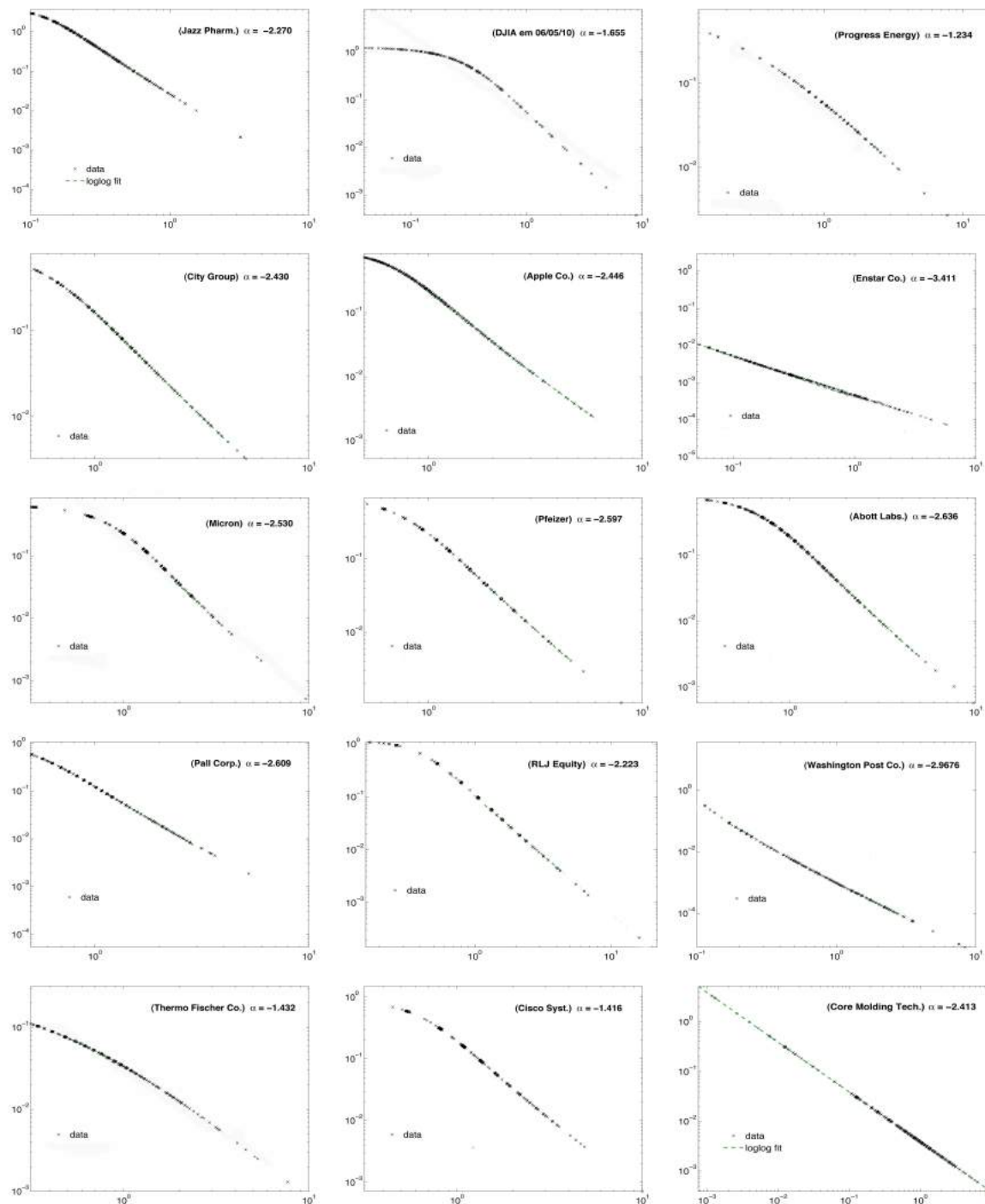


Figura 17 – Power laws

Gaussiana.

O *skewed-t* GARCH é um caso ímpar. Como seus choques advêm de uma *T*-assimétrica, uma grande quantidade de pontos se encontra situada fora da região central da Gaussiana, por exemplo, e assimetricamente alocadas para a cauda direita da distribuição. Isso explica o elevado valor do parâmetro α ajustado via MQO.

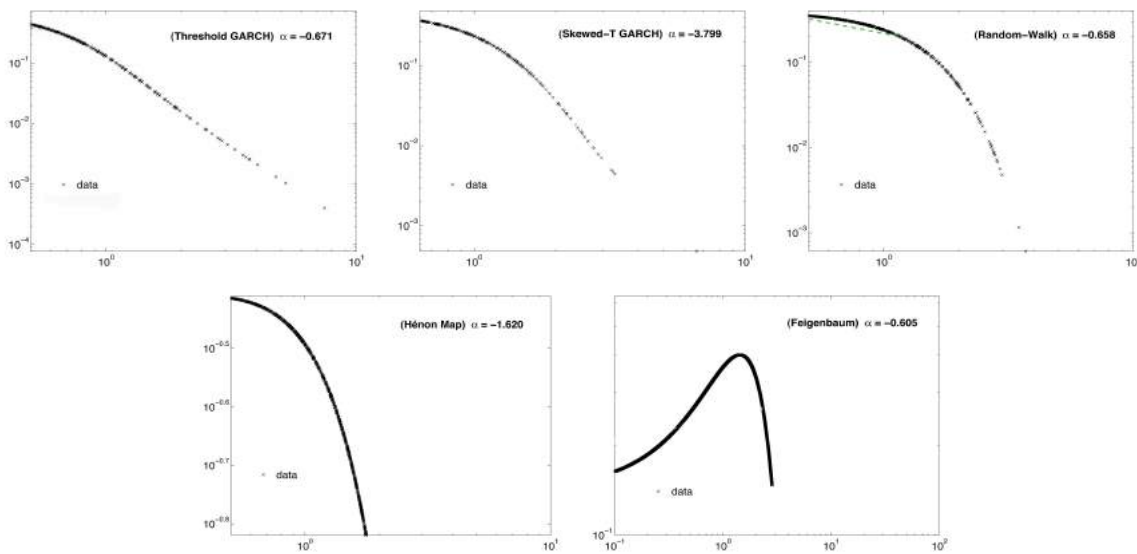


Figura 18 – *Power laws* (dados simulados)

Para o restante das séries simuladas, as séries caóticas do mapa de Hénon e da recursão de Feigenbaum apresentaram um decaimento exponencial, assim como o *random walk*. Portanto, é rejeitada a hipótese das caudas da distribuição serem descritas conforme uma lei de potência para a totalidade das séries simuladas.

Passemos agora à análise das ações. Visualmente, todas as séries apresentam um comportamento conforme uma lei de potência. Porém, teoricamente somente as ações Jazz Pharm ($\alpha = -2.27$), DJIA em 6 de maio de 2010 ($\alpha = 1.65$), City Group ($\alpha = 2.43$), Apple Corp. ($\alpha = 2.44$), Micron ($\alpha = 2.53$), Pfizer ($\alpha = 2.59$), Abbott Labs. ($\alpha = 2.63$), Pall Corp. ($\alpha = 2.60$), Rlj Equity ($\alpha = 2.22$) e Washington Post ($\alpha = 2.96$) se enquadram em um regime característico de *power law*. O restante das ações se encontram além (Enstar) ou aquém (Cisco Systems, Thermo Fischer e Progress Energy) do regime limite.

Assim, é possível inferir algumas conclusões no que diz respeito à frequência de realizações extremas. Para o primeiro grande grupo de dados (os dados reais enquadrados num regime lei de potência), sugere-se que os *flash crashes* se assemelham ao comportamento de eventos extremos como a frequência de terremotos e propagação de craque, surgimento de grandes cidades e eventos de extinção em massa (SORNETTE, 2003). Existe uma grande quantidade de valores em torno de uma tendência central (média, por exemplo), porém, a medida que nos distanciamos dessa região central, a frequência de realizações diminui ao incorporarmos a totalidade dos dados.

Os demais resultados apontam que as séries estocásticas, caóticas e algumas ações (Enstar, Cisco Systems, Thermo Fischer e Progress Energy) não apresentam uma escala característica descrita por uma lei de potência. Segundo Alfarano et al. (2013), é possível que a distribuição dos dados conforme uma lei de potência seja uma explicação plausível

para a clusterização da volatilidade, caudas pesadas, assim como para a memória longa.

Com as conclusões anteriores em mente, torna-se inevitável o teste de qual modelo melhor se ajusta para descrever o comportamento das ações. Essa é a finalidade dos testes restantes deste capítulo. Assim, o novo teste para a distinção entre regime estocástico e determinístico de séries temporais, proposto por [Rodriguez et al. \(2005\)](#), foi realizado e os resultados se encontram na (Figura 19) e Tabela 5.

Analisando a (Figura 19), constata-se uma diferença interessante e essencial entre processos caóticos e estocásticos. Enquanto os maiores expoentes de Lyapunov dos modelos determinísticos são em sua totalidade negativos e se estabilizam à medida que o tamanho amostral aumenta, os expoentes estimados de processos estocásticos apresentam valores positivos e um comportamento crescente com o tamanho amostral (com exceção do *random walk* que decresce logo após uma trajetória inicial ascendente. A diferença de comportamento se deve à presença infinita de barulho em séries aleatórias ([OSEDELEC, 1968](#)).

Conforme visto na Seção 2.3.1.1, a simples existência de expoentes de Lyapunov negativos e sua aparente estabilidade não são condições suficientes para a presença de caos na série de tempo. Para inferências com maior robustez estatística sobre a dinâmica serial é utilizado o novo teste proposto por [Rodriguez et al. \(2005\)](#). Na Tabela 5 se encontram explicitados os coeficientes $\hat{\alpha}_1$ advindos do teste de independência linear (2.15), que, caso sejam negativos, devemos aceitar a hipótese nula (h_0) de processo determinístico com 5% de significância.

A Tabela 5 foi elaborada no intuito de observar o comportamento médio dos maiores expoentes de Lyapunov estimados para cada sub-amostra (*block-size*) da série de tempo total ao longo do tempo. Esse comportamento é explicitado pelo coeficiente da regressão α_1 , nos dizendo o comportamento de $\langle \hat{\lambda}^{max} \rangle$ à medida que aumentamos o tamanho amostral. Estimando uma função de densidade probabilidade (via Kernel) para os valores normalizados de α_i , obtidos em 250 réplicas da regressão linear (2.15) e estimando os quantis da distribuição empírica, na Tabela 5 apresentaremos os valores críticos para 5% de significância entre parênteses.

Analisando os valores para as séries simuladas do mapa de Hénon e da recursão de Feigenbaum, os coeficientes α_1 , passam duas grandes mensagens: a primeira é que todos os valores são negativos e a segunda é que, à medida que avançamos no tamanho das sub-amostras (blocos), o comportamento médio dos maiores expoente de Lyapunov começa a diminuir e, ainda mais, a se estabilizar, quando se atinge a totalidade da amostra (*block size 4*) com significância estatística de 5%. Este fato dá indícios em favor do comportamento aparentemente estável dos maiores expoentes de Lyapunov sugeridos pela (Figura 19).

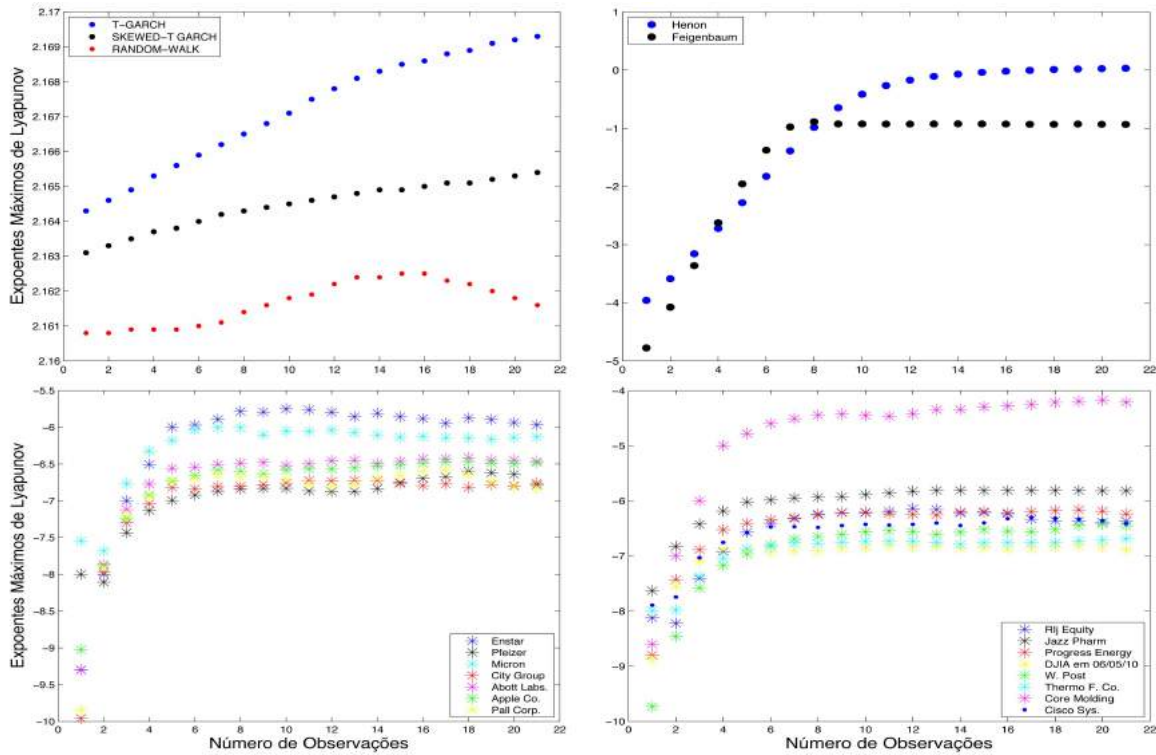


Figura 19 – Estimação do expoente máximo de Lyapunov (λ^{max}) via algoritmo proposto por [Rosenstein, Collins e Luca \(1998\)](#) para séries estocásticas e caóticas (acima) e *flash crashes* (abaixo).

Nota: Para processos estocásticos os expoentes apresentam comportamento explosivo enquanto aparentam se estabilizar nos processos caóticos e algumas ações com *flash crashes*.

Em termos práticos, isso nos diz que a trajetória orbital das realizações do mapa de Hénon e Feigenbaum se encontra contida em determinados limites, independentemente do aumento do número de observações. Talvez a intuição seja maior ao analisar o comportamento médio das divergências no estado espaço ($\langle \hat{\lambda}^{max} \rangle$) das realizações seriais estocásticas.

Começando pelo *random walk*, a primeira mensagem que podemos tirar são seus valores positivos de α_1 , para a totalidade dos blocos. O segundo fato interessante é que, à medida que incorporamos na análise os blocos (1,2,3 e 4), os valores apresentados pelo coeficiente α_1 , diminuem e seguem diminuindo. Isso sugere uma aparente estabilidade para as realizações de um passeio aleatório à medida que $n \rightarrow \infty$. Entretanto, devido ao fato de os valores de α_1 serem positivos, é aceita a hipótese nula de não-determinismo. É possível que isso ocorra pela variância finita das realizações do *random walk*.

Continuando a análise das séries de tempo simuladas dos modelos estocásticos, precisamos detalhar o comportamento de dois modelos *benchmarks* da literatura financeira: o *threshold*-GARCH(1,1) e o GARCH(1,1) com inovações distribuídas conforme uma distribuição t-Student assimétrica, i.e., $\varepsilon \sim \text{skewed-}t(0, \sigma^2)$.

Assim como o *random walk*, ambas as variações dos modelos GARCH(1,1) apresen-

taram valores positivos para α_1 para a totalidade dos blocos, fazendo com que rejeitemos a hipótese nula de determinismo. Enquanto o *threshold*-GARCH apresenta um valor de $\alpha_1 = 9,36e^{-4}$ para um *block size* = 4, o *skewed-t* GARCH apresenta $\alpha_1 = 0.0011$. Tal fato sugere que a divergência das realizações de cada série de tempo são distintas, mesmo surgindo de uma mesma dinâmica (GARCH(1,1)). A estabilidade obtida pelo *threshold*-GARCH a medida que aumentamos o tamanho da amostra é superior àquela obtida pelo *Skewed-T* GARCH, sugerindo mais aleatoriedade neste último.

Resumindo, todos processos estocásticos, primeiro, apresentam valores positivos para o comportamento médio dos maiores expoentes de Lyapunov estimados (rejeitando a hipótese nula de caos e aceitando a alternativa) e, segundo, à medida que aumentamos o número de observações utilizadas para estimar o comportamento do λ^{max} , as divergências das realizações tornam-se cada vez menores. Enquanto para o *random walk* e o *threshold*-GARCH, essas divergências equivalem a ($4.40x10^{-4}$ e $9.36x10^{-4}$ respectivamente), para o *Skewed-T* GARCH são obtido valores um pouco superiores (0.0011), sugerindo variância positiva contínua para ambos os casos.

Por fim, é necessário analisar os resultados obtidos para as séries de tempo reais, isto é, para as ações e índice, alvos de *flash crashes*. Como visto na Seção 2.3.1.3, ao contrário das séries simuladas onde o tamanho amostral utilizado foi de $n = 2000$ para os 5 modelos, as séries de tempo reais variam de tamanho. Assim, bloco 1 = 1/4 da série temporal usada, bloco 2 = 2/4, e assim por diante.

A hipótese alternativa de ausência de caos é rejeitada para a totalidade dos casos com uma significância de 5%. Isto é, aceita-se a hipótese nula de dinâmica caótica, e, consonância com o comportamento estável (e até descendente em alguns casos) dos maiores expoentes de Lyapunov da figura 19.

Independente do *block size* analisado, a trajetória média dos maiores expoentes de Lyapunov estimados decresce e tende a se estabilizar com o aumento do número de observações. Todos os valores obtidos pelo teste de independência linear, via coeficiente α_1 são negativos para as 14 ações e para o índice Dow Jones.

Sendo assim, a análise nos sugere que comportamentos extremos nos retornos de ativos financeiros como os causados pelos *flash crashes* se enquadram em um regime estatístico determinístico similar aos modelos caóticos de Henon e Feigenbaum, cuja dinâmica subjacente difere daquela proposta por modelos clássicos estocásticos da literatura financeira da família GARCH e do *random walk*, sugerindo que eventos como os *flash crashes* são estatisticamente imprevisíveis em um curto intervalo de tempo. Em outras palavras, o sistema pode evoluir para um número infinito de estados diferentes, sem sair de uma região finita do espaço de fase. As variáveis de estado nunca chegam a crescer indefinidamente. Esse tipo de comportamento é compatível com caos.

Tabela 5 – Teste para a estabilidade do maior expoente de Lyapunov.

Coef. da regressão linear	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_1$
Bloco do <i>Bootstrap</i>	block size 1	block size 2	block size 3	block size 4
Abott Labs	-0.0133 (-1.40)	-0.0066 (-8.36)	-0.0045 (-1.27)	-0.0040 (-5.96)
Apple	-0.0135 (-1.00)	-0.0069 (-1.69)	-0.0046 (-1.13)	-0.0034 (-7.65)
CISCO Syst.	-0.0132 (-3.14)	-0.0066 (-6.06)	-0.0044 (-1.12)	-0.0033 (-3.40)
City Group	-0.0145 (-2.19)	-0.0071 (-9.75)	-0.0047 (-1.33)	-0.0043 (-2.00)
Core Molding	-0.0164 (-8.53)	-0.0082 (-9.76)	-0.0056 (-1.65)	-0.0044 (-2.50)
Enstar	-0.0193 (-3.20)	-0.0164 (-1.85)	-0.0108 (-2.62)	-0.0076 (-3.92)
Jazz Pharm	-0.0222 (-2.74)	-0.0067 (-2.71)	-0.0050 (-2.03)	-0.0037 (-5.95)
Micron	-0.0118 (-2.68)	-0.0062 (-8.34)	-0.0063 (-2.38)	-0.0039 (-2.35)
Progress Energy	-0.0628 (-2.23)	-0.0323 (-2.66)	-0.0213 (-2.73)	-0.0123 (-3.91)
Pfeizer	-0.0145 (-6.29)	-0.0070 (-8.61)	-0.0047 (-2.10)	-0.0043 (-1.86)
Pall Corp.	-0.0142 (-3.35)	-0.0071 (-1.58)	-0.0046 (-7.10)	-0.0034 (-1.40)
Rlj Equity	-0.0129 (-6.86)	-0.0066 (-6.79)	-0.0044 (-6.31)	-0.0043 (-1.25)
Thermo F. S.	-0.0137 (-2.69)	-0.0070 (-1.96)	-0.0046 (-2.53)	-0.0042 (-2.56)
W. Post	-0.0231 (-2.14)	-0.0116 (-4.91)	-0.0076 (-5.16)	-0.0063 (-6.76)
Índice DJIA	-0.0701 (-2.79)	-0.0512 (-1.96)	-0.0200 (-1.18)	-0.0179 (-1.25)
Simulações				
random-walk	0.0013 (5.86) ^{H1}	8.07e ⁻⁴ (5.75) ^{H1}	5.25e ⁻⁴ (6.89) ^{H1}	4.40e ⁻⁴ (1.70) ^{H1}
<i>Threshold</i> -GARCH	0.0024 (1.02) ^{H1}	0.0017 (3.37) ^{H1}	8.48e ⁻⁴ (5.23) ^{H1}	9.63e ⁻⁴ (2.04) ^{H1}
<i>Skewed-t</i> GARCH	0.0041 (4.38) ^{H1}	0.0021 (1.58) ^{H1}	0.0014 (1.19) ^{H1}	0.0011 (1.31) ^{H1}
Hénon	-0.0012 (-7.49)	-4.84e ⁻⁴ (-2.63)	-3.42e ⁻⁴ (-3.76)	-2.71e ⁻⁴ (-3.20)
Feigenbaum	-0.0031 (-3.91)	-0.001 (-1.19)	-9.88e ⁻⁴ (-2.44)	-7.60e ⁻⁴ (-2.32)

Nota: Valores em parênteses representam os valores críticos da distribuição empírica de α_i/s_i para a estimação via MQO da regressão linear $\langle \lambda^{max}(T) \rangle = \alpha_0 + \alpha_1 T + \varepsilon_T$. Valores com (●)^{H1} rejeitam a hipótese nula de H_0 = Determinismo com 5% de significância.

Simulações por Monte Carlo não conseguem descrever o comportamento dinâmico das trajetórias dos retornos dos ativos contendo *flash crashes*, independentemente do grau de complexidade do modelo utilizado, seja um simples passeio aleatório ou o fronteiroiro *Threshold* GARCH(1,1), segundo o teste proposto por Rodriguez et al. (2005) a 5% de significância. Afirmam os ganhadores do prêmio nobel em economia de 2013 (ver [The Prize in Economic Sciences \(2013\)](#)), que o comportamento imprevisível no curto prazo do preço de ativos financeiros é devido a elevada volatilidade das expectativas. Este ponto de vista foi confirmado por nossos resultados.

Dando continuidade ao estudo, e principalmente à análise da complexidade contida nas séries temporais, na Tabela 6 e Tabela 7 fornecemos as estimativas das estatísticas R/S e DFA contendo os *flash crashes* e entropia de Shannon e estatísticas (R/S)^S e DFA^S, não contendo os *crashes*. Valores superiores a 0.5, isto é, $0.5 < R/S$ e $DFA < 1$, servem como indicativo de tendência serial persistente, onde realizações passadas têm influência sobre realizações futuras. Quanto mais próximo de 1 for a estatística, mais forte será a memória

do processo. Valores inferiores a 0.5, isto é, $0 < R/S$ e $DFA < 0.5$, indicam anti-persistência serial. Em outras palavras, quão mais próximo de zero for o valor da estatística, mais forte será a tendência da série temporal em reverter para seu valor médio de longo prazo. Caso $R/S = DFA = 0.5$, não haverá influência entre as realizações defasadas e as realizações em t , de maneira que não haverá memória alguma no processo.

Analisando a Tabela 7 para ambos os testes nas séries que incorporam eventos extremos, parece haver uma quantidade significativa de valores próximos a 0.5, indicando a ausência de memória. Entretanto, valores que sugerem um resultado diferente se encontram destacados em itálico. As ações em que os testes sugeriram tendência persistente foram: Apple Co., CISCO Systems, Core Molding Tech. e Thermo Fischer segundo a estatística R/S. Já as ações em que $0 < R/S$ e $DFA < 0.5$ foram: Abott Labs., City Group, Enstar, Jazz Pharm, Progress Energy, Pfizer, Pall Corp, RLJ equity, Thermo Fischer e Washington Post e Índice DJIA segundo o DFA. Por fim, os casos em que $R/S = DFA = 0.5$ foram: CISCO Systems, Core Molding, Jazz Pharm., Pall Corp., e Washington Post segundo o R/S.

Para as simulações, memória longa foi encontrada somente no *threshold*-GARCH, segundo a estatística DFA. A não existência de memória foi obtida para o *random walk* em ambos os testes e para o *SkewedT*-GARCH, segundo o DFA. Para o restante das séries, as estatísticas sugerem anti-persistência das realizações, principalmente para as séries caóticas de Hénon e Feigenbaum.

Assim, o teste R/S sugere que, com exceção da tendência persistente na ação Thermo Fischer e anti-persistente no índice Dow Jones, todas as demais séries não apresentam resultados extremos, i.e. próximos a zero ou um. Pelo contrário, todos parecem se situar em torno de 0.5 com seus respectivos desvios-padrões, sugerindo a não existência de memória longa.

Entretanto, a estatística DFA apresenta resultados distintos. Valores bem abaixo (e acima) de 0.5 foram obtidos, sugerindo que a maioria das ações apresenta um comportamento de reversão à sua trajetória média anterior, com exceção da Apple Co., Cisco Systems e Core Molding, em que realizações defasadas parecem impactar seu comportamento dinâmico, de maneira que há memória longa no processo. Como explicado na seção 3.2, tal fato deve-se à superioridade da DFA sobre a estatística R/S. Segundo [Campbell, Lo e MacKinlay \(1997\)](#), enquanto a primeira particiona em sub-seções a amostra de maneira a eliminar qualquer tendência existente, a *range/standard-deviation* de Mandelbrot não o faz.

Porém, torna-se interessante analisar a questão da auto-correlação serial até o exato momento subsequente dos *flash crashes*. Os resultados são denotados por $(R/S)^S$ e DFA^S . De maneira geral, o obtido foi similar aos valores das estatísticas aplicadas às séries com os *crashes*, com algumas exceções.

Tabela 6 – Entropia de Shannon, expoente de Hurst e *detrended fluctuation analysis*

Ações	Entropia (H)	Memória R/S	Memória DFA	Memória (R/S) ^s	Memória DFA ^s
Abott Labs	0.0468	—	não	—	n.e.
Apple	0.0509	sim	sim	sim	sim
CISCO Syst.	0.0510	—	sim	—	n.e.
City Group	0.0303	não	não	—	n.e.
Core Molding	0.3824	—	sim	—	sim
Enstar	0.0330	—	não	—	n.e.
Jazz Pharm	0.4620	—	não	sim	n.e.
Micron	0.0755	sim	não	sim	não
Progress Energy	0.0178	—	não	—	n.e.
Pfeizer	0.0277	não	não	—	não
Pall Corp.	0.0520	—	não	não	não
Rlj Equity	0.0366	não	não	não	não
Thermo F. S.	0.0546	sim	não	—	não
W. Post	0.0105	—	não	não	n.e.
Índice DJIA	0.0087	não	não	—	n.e.
Simulações					
random-walk	-690.4615	—	—	—	—
Threshold-GARCH	-2.5438e ⁺⁰⁴	não	sim	não	sim
Skewed-t GARCH	-3.7991e ⁺⁰⁴	não	—	não	sim
Hénon	119.9192	não	não	não	não
Feigenbaum	331.7919	não	não	não	não

Nota: H denota a entropia de Shannon, R/S é o expoente de Hurst e DFA a *detrended fluctuation analysis*. **sim** representa memória longa (R/S e DFA > 0.5), **não** representa a ausência de memória (R/S e DFA < 0.5) e — capta (R/S e DFA = 0.5) com significância de 1%. (•)^s denotam as estimativas do expoente de Hurst e da DFA sem a inclusão do *crash*. Isto é, até o exato período anterior a sua ocorrência. n.e. significa a não-existência da estimativa para a série em questão, devido principalmente ao reduzido número de observações anterior a série.

A sigla n.e. presente na última coluna da Tabela 7 se refere ao fato de que, particionando a série até o momento subsequente ao *crash*, o número de observações se torna muito reduzido para obter estimativas confiáveis do R/S e DFA. Esse número se situa no intervalo $\in [1200:2000]$. Para as série simuladas, os valores estimados das estatísticas são os mesmos sem e com os *flash crashes*. Uma das razões é que, para as séries caóticas, não há pulos de elevada magnitude como os contidos nas séries reais. Outra razão é que se torna difícil separar as séries até o exato período subsequente para as séries estocásticas. Diversos “pulos” ocorrem.

Entretanto, nosso interesse primordial são os dados reais e nada mudou diante da decisão de considerar ou não os *flash crashes* para estimar as estatísticas R/S e DFA. As séries que anteriormente apresentam elevada memória, continuam a apresentar. De

Tabela 7 – Entropia de Shannon, expoente de Hurst e *detrended fluctuation analysis*

Ações	(H)	R/S	DFA	(R/S) ^S	DFA ^S
Abott Labs	0.0468	0.479	0.433	0.493	N.E.
Apple	0.0509	0.543	0.675	0.543	0.693
CISCO Syst.	0.0510	0.531	0.571	0.528	N.E..
City Group	0.0303	0.426	0.445	0.474	N.E
Core Molding	0.3824	0.535	0.563	0.512	0.602
Enstar	0.0330	0.473	0.422	0.508	N.E.
Jazz Pharm	0.4620	0.527	0.223	0.604	N.E.
Micron	0.0755	0.575	0.438	0.575	0.438
Progress Energy	0.0178	0.466	0.452	0.466	N.E.
Pfeizer	0.0277	0.450	0.388	0.475	0.355
Pall Corp.	0.0520	0.536	0.150	0.321	0.173
Rlj Equity	0.0366	0.405	0.329	0.405	0.330
Thermo F. S.	0.0546	0.617	0.206	0.529	0.180
W. Post	0.0105	0.508	0.321	0.459	N.E.
Índice DJIA	0.0087	0.398	0.364	0.487	N.E.
Simulações					
random-walk	-690.4615	0.513	0.489	0.513	0.489
<i>Threshold</i> -GARCH	-2.5438e ⁺⁰⁴	0.413	0.586	0.345	0.611
<i>Skewed-t</i> GARCH	-3.7991e ⁺⁰⁴	0.392	0.518	0.392	0.560
Hénon	119.9192	0.362	0.319	0.362	0.319
Feigenbaum	331.7919	0.423	0.338	0.423	0.338

Nota: H denota a entropia de Shannon, R/S é o expoente de Hurst e DFA a *detrended fluctuation analysis*. (\bullet)^S no canto superior direito denota estimativas até o exato período subsequente ao *crash*. Valores destacados em negrito apresentam memória longa (R/S e DFA > 0.5), ou memória fraca (R/S e DFA < 0.5), com significância de 1%. (\bullet)^S denotam as estimativas do expoente de Hurst e da DFA sem a inclusão do *crash*. Isto é, até o exato período anterior a sua ocorrência. N.E. significa a não-existência da estimativa para a série em questão, devido principalmente ao reduzido número de observações anterior a série.

maneira análoga, séries com baixa correlação entre suas realizações continuam a apresentar o mesmo, porém com valores mais significativos.

Assim, em termos de memória serial, a presença dos *flash crashes* nas séries aparentemente faz com que as estatísticas R/S e DFA apresentem valores que puxam para 0.5 i.e., uma reversão à tendência central do comportamento anterior ao *crash* e ao subtrair das séries esses valores extremos, séries que apresentavam maior memória apresentam ainda mais e vice-versa. Conforme nos dizem [Granero, Segovia e Perez \(2008\)](#), é possível que isso ocorra devido aos problemas relacionados com o tamanho amostral ou ao acúmulo de *stress* no sistema.

Na Tabela 7 também apresentamos a entropia de Shannon. Ao analisarmos a coluna H e seus valores, temos de ter em mente uma medida de complexidade. Isto é, quanto mais complexa ou imprevisível a realização de uma série, menor o valor da entropia.

A utilidade de H é relacionada ao fato de nos fornecer o grau de incerteza que, então, pode ser interpretado como se referindo ao grau de ajuste de um modelo específico frente ao outro, em termos de bits. Isto é, a entropia aparece como um complemento ao teste de [Rodriguez et al. \(2005\)](#) para a mensuração da dinâmica dos dados e sua classificação entre complexa (baixo valor de H) e não-complexa.

Quanto mais aleatória uma realização, menor o grau de H em termos de bits de informação que essa série nos fornece. Tomando como exemplo uma moeda justa e sua probabilidade de 1/2 de sair cara ou coroa, a extração de qualquer informação sobre o próximo resultado é impossível. De maneira análoga, caso essa mesma moeda seja viciada, ela trará consigo agora uma tendência na sequência de realizações que se reflete na mudança de sua função de probabilidade. Com uma probabilidade maior de sair cara em detrimento de coroa, de digamos 3/4, essa menor aleatoriedade apresentada pela moeda se reflete no índice de entropia como um maior valor de H em termos de bits. Ou seja, existe alguma informação presente em uma sequência de realizações (probabilidade de sair cara maior que coroa) ao invés de nenhuma (probabilidades iguais).

Ao analisar os resultados algumas importantes distinções se tornam possíveis. Como esperado, as séries aleatórias das variações GARCH apresentam valores negativos em termos de bits (H), assim como o *random walk*. Assim, a aleatoriedade dos processos se reflete na não-disponibilidade ou, capacidade de extrair qualquer informação útil do comportamento futuro das realizações advindas desses processos. Logo, isso é um indicativo de elevada complexidade.

As demais séries simuladas foram as sequências caóticas de Hénon e Feigenbaum. Analogamente aos processos estocásticos, muita informação está contida na série. Isso sugere a existência de uma dinâmica subjacente no processo gerador dos dados capaz de nos fornecer indicativos sobre as realizações desse sistema. Isso se deve ao fato de que, enquanto as séries de Hénon e Feigenbaum são geradas por um sistema de equações diferenciais bem definido, as séries: *threshold-GARCH*, *skewed-t GARCH* e *random walk* são simuladas via Monte-Carlo e seus resultados não descrevem um padrão determinístico, mas seguem uma distribuição de probabilidade previamente definida.

Comparando os resultados da informação disponível em termos de bits, das séries aleatórias e determinísticas simuladas, uma importante distinção foi observada. Agora, temos que analisar em quais dos dois mundos estatísticos os dados do mundo real contendo os *flash crashes* melhor parecem se enquadrar.

Enquanto maiores valores de H foram apresentados pelas séries caóticas, valores baixos foram obtidos para as séries aleatórias. O interessante foi que as ações utilizadas se situaram no meio termo. Ou seja, nem apresentaram valores extremamente baixos nem valores extremamente altos. Isso reafirma o teste sobre a estabilidade da média dos maiores expoentes de Lyapunov estimados, sugerindo que os dados não apresentam completa

aleatoriedade no seu processo gerador. Entretanto, os resultados também rejeitaram que uma enorme quantidade de informação esteja contida nos dados.

Entretanto, em termos absolutos, a entropia de Shannon das ações alvo de *flash crashes* estão menos para uma função temporal que varia de maneira completamente aleatoria (baixo valor em bits de informação), como os modelos clássicos *threshold*-GARCH, *skewed-t* GARCH e *random walk*, do que para um sistema de equações não-lineares determinísticas como o de Hénon e Feigenbaum.

Cabe a ressalva de que não estamos tratando de previsibilidade do comportamento futuro, mas sim de informações contidas na série que nos levam a não aceitar a completa aleatoriedade do comportamento futuro.

Por fim, na (Figura 20) demonstramos os resultados do teste de log-periodicidade proposto por Sornette (2003). O melhor *fit* da equação (3.13) é representado pela linha contínua vermelha para cada ação alvo de *flash crashes*, incluindo o índice Dow Jones em 6 de maio de 2010. O tempo crítico t_c é demonstrado graficamente através da mudança de cor (de azul para preto), representando o *crash*. Os valores estimados da equação (20) se encontram na Tabela 8.

Enquanto algumas ações analisadas não apresentaram inicialmente qualquer traço de log-periodicidade (como Pfizer e Jazz Pharm), logo após a ultrapassagem do tempo crítico (t_c), começaram a apresentar oscilações ajustadas conforme a equação (20). Por exemplo, analisando a evolução temporal do logaritmo dos preços das ações da Jazz Pharmaceuticals, em $\tau = -17$, onde $\tau = t - t_c$, a linha vertical tracejada representa o início do dia da ocorrência do *flash crash* e $\tau = 0$ refere-se ao dia 27 de abril de 2011, 10:56AM. Para $\tau < 0$, não há evidência estatística que possa comprovar a presença de um padrão log-periódico antes do tempo crítico t_c . Mas para $\tau > 0$, a linha vermelha representa a função log-periódica, cujos coeficientes ajustados por regressão não-linear são mostrados na 8.

A evolução do logaritmo dos preços das ações da Pfizer também sugere um comportamento log-periódico após o *crash*. A linha azul se refere ao dia 2 de maio de 2011, enquanto a preta descreve a evolução da série nos dias subsequentes. O *flash crash* se inicia em 2 de maio de 2011, 10:30 AM ($\tau = -407$), indicada pela linha vertical tracejada. Na abertura do pregão no dia seguinte, no instante $\tau = 1$, dá-se início a um padrão periódico do tipo *bear* no intervalo $0 < \tau < 340$. Após $\tau = 400$, percebe-se um deslocamento vertical na evolução da série em comparação com a tendência esperada pela hipótese de log-periodicidade. No dia anterior ($\tau < 0$), não se encontrou movimento log-periódico (ver tabela 8).

O comportamento do $\log(P_t)$ das ações da RLJ Lodging, Enstar e Abbott Labs, entretanto, apresentam oscilações log-periódicas ao longo de toda a série. Começando

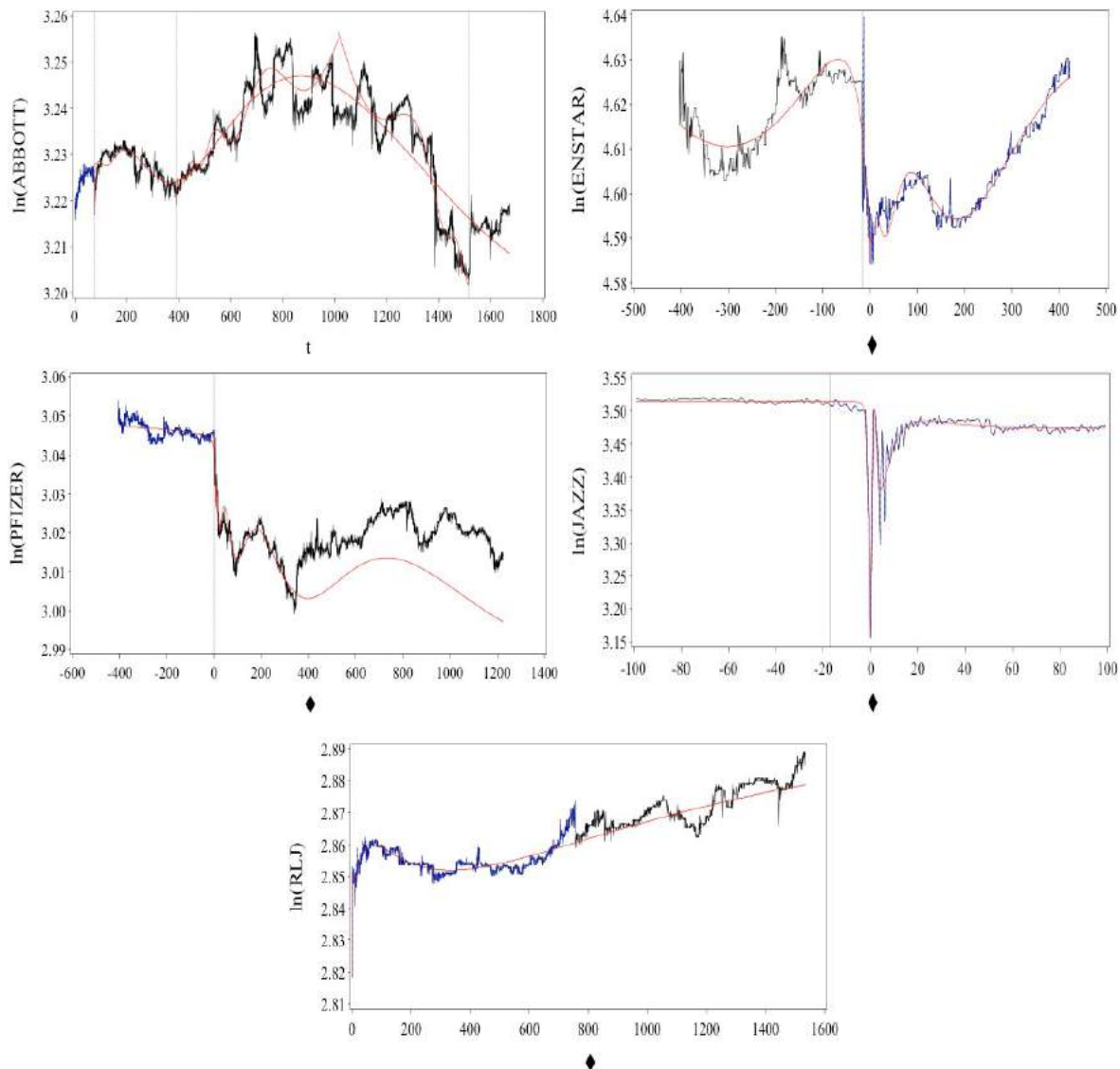


Figura 20 – Ajustes log-periódicos (linha vermelha), para os retornos das ações contendo *flash crashes*

Nota: Retornos da séries são representados pela linha azul. O melhor ajuste da equação (3.13) é denotado pela linha vermelha.

pela RLJ, as linhas azul e preta representam os dados dos dias 11 e 12 de maio de 2011, respectivamente. O *flash crash* se inicia em 11 de Maio de 2011, 10:43AM ($\tau = -1$). Logo em seguida, para $\tau > 0$, surge um padrão log-periódico indicado pela linha vermelha, cujos coeficientes ajustados por regressão não-linear (com base nos dados do intervalo $0 < \tau < 500$) são mostrados na Tabela 8. Extrapolando-se os resultados para $\tau > 500$, nota-se que a série observada acompanha a tendência log-periódica predita pelo modelo.

Para a ação da Enstar (em que $\tau = t - t_c$, as linhas azul e preta representam os dados dos dias 12 e 13 de maio de 2011, respectivamente. O *flash crash* se inicia em 13 de maio de 2011, 10:30 AM ($\tau = -16$), indicada pela linha vertical tracejada. Nessa série, encontramos padrões log-periódicos: uma fase *bear* para $\tau < 0$ e outra *bull* para $\tau > 0$,

Tabela 8 – Estimativas dos parâmetros da equação 3.13 com 95% de confiança

Ação	t_c	$\tau = t - t_c$	A	B	C	m^2	ω	π
Abott Labs	78	$\tau > 0$	3.2281	5.5×10^{-6}	-0.00002	0.9952	3.2827	6.7353
	390	$0 < \tau < 500$	3.2213	0.00022	-0.00005	0.7816	7.4289	3.8781
	1514	$-444 < \tau < 0$	3.2013	0.000347	0.000079	0.8352	4.2314	3.0307
Enstar	405	$\tau > 0$	4.5877	0.00114	0.000675	0.5065	3.5634	3.3093
		$\tau < 0$	4.5874	0.00140	0.00123	0.8435	0.8494	10.7065
Jazz Pharm	962	$0 < \tau < 100$	3.4801	-0.1740	0	-2.7825	2.2054	-0.8180
		$-100 < \tau < 0$	3.5150	-0.1740	0.00141	-2.7825	n.e.	n.e.
Pfeizer	408	$0 < \tau < 340$	3.047	-0.0126	-0.00242	0.1794	4.4503	-1.2450
		$\tau < 0$	3.426	-0.3850	0	-0.00273	0	0
Rlj Equity	2	$0 < \tau < 500$	2.8468	0.00226	0.00141	0.3121	1.6029	0
		—	n.e.	n.e.	n.e.	n.e.	n.e.	n.e.

Nota: $\tau = t - t_c$ é o intervalo de tempo usado para o *fit*. A, B e C são constantes, enquanto π é o parâmetro de fase, m^2 é a aceleração próxima ao tempo crítico e ω é a frequência log-periódica.

representados pela linha vermelha. Os coeficientes ajustados por regressão não linear são mostrados na Tabela 8.

Outra ação com comportamento log-periódico (distinto) ao longo de todo período analisado foi a Abott Labs. Analisando a evolução temporal do logaritmo dos preços das ações da Abbott Labs, em que t representa o tempo, em segundos, a linha azul representa a evolução no dia do *flashcrash*, 2 de maio de 2011 ($1 \leq t \leq 76$) e a preta descreve a evolução da série nos dias seguintes. As linhas verticais indicam os tempos críticos $t_c=78,390$ e 1514 das três fases log-periódicas mostradas na (Figura 20) (linhas vermelhas), cujos coeficientes ajustados são mostrados na Tabela 8. É interessante observar a diversidade de fases log-periódicas no período após o *flash crash* e a reflexão da estrutura de oscilação em $t = 1014$. Nesse ponto, o acúmulo de oscilações coincide com a reversão da tendência, de uma fase *bull* para uma fase *bear*.

A utilização de somente 5 séries das 15, deu-se pelo motivo de ser um número satisfatório de casos para constatar a hipótese de log-periodicidade. Para as séries simuladas, nenhum ajuste foi obtido, corroborando com Sornette (2003), quando comparou o número de *crashes* empíricos com o número de *crashes* gerados por um modelo GARCH(1,1) com inovações t-Student, via *surrogate data*, onde, concluiu a 1% de significância que as assinaturas observadas empiricamente nos mercados não são constatadas pelas séries de tempo simuladas pelo grande *benchmark* da literatura econômica. O mesmo foi obtido no presente estudo para as séries estocásticas e determinísticas.

A existência de log-periodicidade nos dados não-simulados sugere a entrada do sistema em um estado crítico, sujeito a perturbações, fruto da alta correlação dos agentes (SORNETTE, 2003).

4 Conclusão

Nesta dissertação utilizamos 15 séries de tempo reais que exibem eventos extremos e 5 simuladas. A escolha dos dados se relaciona ao problema de qual seria o regime que séries de tempo com comportamentos extremos se enquadram. Os retornos das séries contendo *mini flash crashes* foram submetidas a diversas análises como: retratos de fase, histogramas, Q-Q plots, testes de normalidade, processos de Lévy, *detrended fluctuation analysis* (DFA), *R/S statistic* (*Hurst exponent*) sem e com os eventos extremos, teste de dinâmica determinística, entropia de Shannon e log-periodicidade. Os resultados foram, então, comparados com aqueles obtidos com as séries de tempo caóticas (Hénon e Feigenbaum) e estocásticas (*skewed-t* GARCH(1,1) e *threshold*-GARCH(1,1)), simuladas com o intuito de se observar empiricamente o melhor modelo (estocástico ou determinístico) de ajuste aos dados.

Analisando a estatística descritiva dos dados (Tabelas 1 e 2), medimos a curtose e assimetria, sugerindo que os *crashes* afetam o formato das funções de densidade probabilidade para além de um regime Gaussiano. Assim, o próximo passo foi colher mais evidências que sustentam essa hipótese.

Entre as simulações, o *threshold*-GARCH foi o que melhor modelou os *flash crashes*, entretanto, de forma bem limitada. Esse resultado deve ser atribuído às características específicas do processo gerador dos dados reais assim como à calibragem específica do *threshold* GARCH.

Com motivos para duvidar de um comportamento Gaussiano dos dados, a hipótese nula de distribuição normal-padrão foi rejeitada para a totalidade das ações contendo os *mini flash crashes*, incluindo as séries simuladas caóticas e aleatórias (com exceção do *random walk*, obviamente), segundo os testes de normalidade de Lilliefors, Cramer-Von Mises e Jarque Bera a 1% de confiança. Isso enfatiza dois pontos importantes: o primeiro é que as distribuições estatísticas do processo gerador dos dados simulados e dos dados reais não são Gaussianas. O segundo é que precisamos de mais informação sobre a natureza desses dados e, principalmente, sobre o comportamento das realizações extremas. Logo, o próximo passo foi analisar o comportamento das caudas das distribuições das séries, responsáveis pela rejeição da normalidade.

Dessa forma, os Q-Q *plots* foram estimados. O comportamento caudal forneceu mais indícios para a rejeição da Gaussianidade. Todas as séries simuladas e reais destoaram do comportamento normal-padrão. As ações alvo de *flash crashes*, além de se comportar

diferentemente das realizações dos modelos determinísticos, diferiram entre si. De maneira geral, as séries reais se comportaram conforme uma normal-padrão na grande parte do tempo, apresentando poucos pontos extremos de elevada magnitude.

Funções de densidade probabilidade (pdfs) foram estimadas e seus ajustes frente às distribuições Gaussiana e de Lévy foram analisados. Enquanto o *fit* dos dados segundo distribuição Gaussiana foi rejeitados para a totalidade das séries (excluindo o *random-walk*, obviamente) a 1% de significância, a Lévy estável apresentou bom ajuste para a parte central das pdfs dos dados contendo os *crashes*. Entretanto, apesar de captar em sua massa de probabilidade as realizações mais frequentes, seu ajuste deixa a desejar na tentativa de incorporar as realizações extremas.

A rejeição da Gaussianidade, ou de maneira equivalente, a possibilidade de um comportamento não Gaussiano apresentado pelos dados pode ser fruto da interação entre os agentes provocando comportamentos coletivos de manada no mercado. [Alfarano et al. \(2013\)](#) mostram que tal comportamento coletivo não somente produz estatísticas não-Gaussianas como se torna candidato à explicação de caudas grossas e *clusters* de volatilidade nas séries financeiras. Outros candidatos, apontam os autores, são: a estrutura hierárquica que permeia as relações sociais no meio corporativo, a elevada covariância dos ativos fruto da otimização de portfólio e a velocidade com que notícias são incorporadas nas expectativas dos agentes, assim como o *positive feedback*.

Dando continuidade aos testes propostos no intuito de melhor entender o comportamento das realizações de séries temporais geradas por diferentes processos, foi testada a hipótese de leis de potência nas distribuições de frequência. Somente os modelos caóticos em conjunto com o *random walk* rejeitaram a hipótese. Entretanto, ao fazer um *fit* por uma regressão linear dos pontos, os modelos *threshold-GARCH* e *skewed-t GARCH* ficaram fora dos limites do regime de lei de potência. Assim, nenhum resultado das simulações parece ter sido enquadrado no obtido pelos dados reais. A quase totalidade da série (todas, com exceção da Enstar, Cisco Systems, Thermo Fischer e Progress Energy) apresenta uma distribuição de *power law*.

Se o comportamento do retornos das ações se assemelha a eventos naturais extremos, descartando-se a hipótese de Gaussianidade e apresentando problemas de modelagem estatística conforme processos estocásticos clássicos (como os GARCH utilizados), quais seriam as alternativas para descrever tal comportamento? Essa pergunta levou a se reconsiderar a possibilidade de modelos caóticos. Assim, nada mais natural do que testar a hipótese de caos utilizando as técnicas desenvolvidas mais recentemente ([RODRIGUEZ et al., 2005](#)).

A 5% de confiança foi rejeitada a hipótese alternativa de ausência de caos para a totalidade das séries de tempo reais e, obviamente, caóticas (Hénon e Feigenbaum). A hipótese nula de caos, por sua vez, foi rejeitada para todas as realizações simuladas por

modelos estocásticos. O resultado obtido foi baseado no novo teste de hipóteses proposto por [Rodriguez et al. \(2005\)](#) onde a estabilidade média dos maiores expoentes de Lyapunov é sempre crescente para processos estocásticos - fruto da variância infinita - e estacionários para processos determinísticos. Tal resultado sugere que os ativos alvos de *flash crashes* podem apresentar comportamento caótico como encontrado por [Rodriguez et al. \(2005\)](#) com outra base de dados (séries de câmbio), sem eventos extremos.

Talvez os *flash crashes*, se causados por robôs, algoritmos e *trading* de alta-frequência, sejam caóticos no sentido dado pela teoria dos sistemas dinâmicos, isto é, sua dinâmica não seja genuinamente aleatória. [Chan, Karceski e Lakonishok \(1999\)](#) sugere a possibilidade de que coexista em um sistema complexo ordem e caos como resultado do comportamento coletivo dos agentes em momentos específicos do tempo (ordem de compra ou venda de um ativo por vários agentes).

No intuito de testar se existe ou não memória na série, foram realizados os testes R/S e DFA com e sem a inclusão dos *flash crashes*. Os resultados sugeriram que existe uma pequena reversão a 0,5 para a maioria dos casos, enquanto apenas algumas poucas séries apresentam memória longa (segundo os dois critérios). Além disso, a completa ausência de informação (valores iguais a 0,5) parece ser rejeitada.

A medida de complexidade dada pela entropia de Shannon, foi usada para captar o grau de aleatoriedade presente nos dados. Enquanto valores positivos foram obtidos para as realizações das dinâmicas determinísticas de Hénon e Feigenbaum, respectivamente, valores significativamente negativos foram obtidos para as realizações estocásticas de um passeio aleatório, *threshold-GARCH* e *skewed-t GARCH*, respectivamente. Com resultados em torno de zero para as ações, o teste também nos sugeriu algumas conclusões interessantes.

A primeira e principal é que, ao contrário de séries puramente aleatórias (valores de H positivos), as ações alvo de *flash crashes* não são tão imprevisíveis, trazendo consigo mais informação do que um *random walk* ou um GARCH. Entretanto, não trazem a mesma quantidade de informação das séries de Hénon e Feigenbaum, geradas por um sistema de equações diferenciais.

Logo, o teste sugeriu que existe uma dinâmica subjacente no processo gerador dos dados que fornece indícios que destoam da pura aleatoriedade assim como do puro determinismo. Houve um meio termo para a descrição estatística dos retornos das ações. Apesar de a entropia de Shannon não ter sugerido um modelo mais adequado, ela nos forneceu o incentivo necessário para a busca de log-periodicidade.

Para as cinco séries analisadas, todas apresentam comportamentos log-periódicos antes, durante ou depois do *crash*. [Sornette \(2003\)](#) sugere que a existência de log-periodicidade nos dados não-simulados caracteriza a entrada do sistema em um estado crítico fruto da

alta correlação dos agentes.

Referências

- ALFARANO, S.; MUNDT, P.; FORSTER, N.; MILAKOVIC, M. *The real versus the financial economy: A global tale of stability versus volatility*. 2013. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/zbw/ifwedp/20138.html>>. Working Paper Series. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 88.
- APPLEBAUM, D. *Levy processes: from probability to finance and quantum groups*, 2004. American Mathematical Society. v. 51, p. 1336-1347. Citado na página 42.
- ARTHUR, W. B. *The Nature of Technology: What it is and How it Evolves*, 2009. Free Press. New York. Citado na página 37.
- BEDDINGTON, J. *Foresight: The Future of Computer Trading in Financial Markets*, 2012. The Government Office for Science, London. Citado na página 24.
- BOLLERSLEV, T. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, 1986. Journal of Econometrics. v. 31, p. 307-327. Citado na página 40.
- BROCK, W.; HOMMES, C. *Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model*, 1998. Journal of Economic Dynamics and Control. v. 22, p. 1235-1274. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- BROCK, W.; SAYERS, C. *Is the business cycle characterized by deterministic chaos?*, 1988. Journal of Monetary Economics. v. 22, p. 71-90. Citado na página 26.
- BROCK, W.; HOMMES, C. *Evolutionary dynamics in financial markets with many trader types*, 2001. Journal of Mathematical Economics. v. 41, p. 7-42. Citado na página 36.
- BUNDE, A.; SCHELLNHUBER, H. J.; KROPP, J. *The Science of Disasters, Climate Disruptions, Heart Attacks and Market Crashes*, 2002. Springer, Berlin. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 40.
- CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. *The Econometrics of Financial Markets*, 1997. Princeton University Press. New Jersey. Citado na página 79.
- CHAN, L. K. C.; KARCESKI, J.; LAKONISHOK, J. *On portfolio optimization: forecasting covariances and choosing the risk model*, 1999. Review of Financial Studies, v. 12, p. 937-974. Citado 3 vezes nas páginas 25, 34 e 89.
- CHEUNG, W.; FUNG, H.-G. *Information flows between eurodollar spot and futures markets*, 1997. Multinational Finance Journal, v. 2, p. 255-271. Citado na página 35.
- DA SILVA, S. *Chaotic exchange rate dynamics redux*, 2001. Open Economies Review, v. 12, p. 281-304. Citado na página 35.
- DA SILVA, S.; MATSUSHITA, R.; SILVEIRA, E. *Hidden power law patterns in the top European football leagues*, 2013. Physica A. v. 392, p. 5376-5386. Citado na página 45.

- ELLIOTT, R. N. *The History of the Wave Theory*, 1994. New Classic Library. New York. Citado na página 25.
- FAMA, E. *Mandelbrot and the stable paretian hypothesis*, 1963. The Journal of Business. v. 36, p. 420-429. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 44.
- The Prize in Economic Sciences 2013. *Understanding Asset Prices*, 2013. Press Release. Nobelprize.org. Nobel Media AB 2013. Citado na página 78.
- FANTAZZINI, D.; GERASKIN. *Everything you always wanted to know about log periodic power laws for bubble modelling but were afraid to ask*, 2011. European Journal of Finance, v. 331, p. 610-639 Citado na página 24.
- FIGUEIREDO, A.; MATSUSHITA, R.; SERVA, M.; VISWANATHAN, G.; NASCIMENTO, C.; GLERIA, I. *The Levy sections theorem: an application to econophysics*, 2007. Physica A, v. 386, p. 756-795. Citado na página 43.
- GENCAY, R.; DECHERT, W. *The identification of spurious Lyapunov exponents in Jacobian algorithms*, 1996. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics. v. 1.3, p. 145-154. Citado na página 47.
- GIGLIO, R.; DASILVA, S. *The relative efficiency of financial markets*, 2008. Economics Bulletin. v. 7, p.1-12. Citado na página 34.
- GLOSTEN, L.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. *On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*, 1993. Journal of Finance. v. 48, p. 1779-1801. Citado na página 41.
- GRAHAM, R. L.; ROTHSCHILD, B.; SPENCER, J. *Ramsey Theory*, 1990. Wiley. New York. Citado na página 25.
- GRANERO, M. S.; SEGOVIA, J.; PEREZ, J. G. *Some comments on Hurst exponent and the long memory processes on capital markets*, 2008. Physica A. v. 387, p. 5543-5551. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 81.
- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 1990. Springer-Verlag. New York. Citado na página 48.
- GUPTA, H.; CAMPANHA, J. *Tsallis statistics and gradually truncated Levy distribution of an economic index*, 2002. Physica A. v. 309, p. 381-387. Citado na página 43.
- HARDLE, W.; LINTON, O. *Applied Nonparametric Methods*, 1994. Handbook of Econometrics. Amsterdam. Citado na página 48.
- HSIEH, D. A. *Chaos and nonlinear dynamics: applications to financial markets*, 1991. Journal of Finance. v. 16, p. 1839-1863. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 47.
- KEANE, A.; GOLUB, J. *High Frequency Trading and Mini flash crashes*, 2011. working paper series. Citado na página 21.
- KINECTIC, investments. *Another healthcare sector flash crash stop*, 2011. Disponível em: <<http://seekingalpha.com/article/265834-jazz-pharmaceuticals-another-healthcare-sector-flash-crash-stop>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 31.

- KOLMOGOROV, A. N. *On tables of random numbers*, 1963. Indian Journal of Statistics A. v. 25, p. 369–376. Citado na página 34.
- KUNSCH, H. R. *The jackknife and the bootstrap for general stationary observations*, 1989. The Annals of Statistics. v. 17, p. 1217–1240. Citado na página 47.
- KYRTSOU, C.; VORLOW, C. *Modelling nonlinear comovements between time series*, 2009. Journal of Macroeconomics. v. 31, n. 200-211 Citado na página 35.
- LASKAR, J. *Large-scale chaos in the solar system*, 1994. Journal of Astronomy and Astrophysics. v. 70, p. 389-417. Citado na página 45.
- LECHER, C. 2012. *Stock trading algorithm makes decisions based on superstitions*, Disponível em: <<http://www.popsci.com/technology/article/2012-08/stock-trading-algorithm-makes-decisions-based-superstitions>>. Citado na página 31.
- LEVY, J. S. *War in the Modern Great Power System*, 1983. University of Kentucky Press, Lexington. Citado na página 57.
- LIEBOVITCH, L.; SCHEURLE, D. *Two Lessons from fractals and chaos*, 2000. Springer Complexity. v. 5, p. 34-43. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 27 e 56.
- LIU, R.; SINGH, K. *Moving blocks jackknife and bootstrap capture weak dependence*, 1992. Physica D. v. 89, p. 261–266. Citado na página 47.
- LORENZ, E. N. *Three approaches to atmospheric predictability*, 1969. Bulletin of the American Meteorological Society. v. 21, p. 89–307. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- MALEVERGNE, Y.; SORNETTE, D. *Self-consistent asset pricing models*, 2007. Physica A. v. 382, p. 149-171. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 51.
- MANDELBROT, B.; TAYLOR, H. *On the distribution of stock price differences*, 1965. Operations Research. v. 15, p. 1057-1062. Citado 7 vezes nas páginas 24, 25, 34, 42, 44, 45 e 57.
- MANTEGNA, R.; STANLEY, E. *Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index*, 1995. Nature v. 376, p. 46-49. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 43.
- MANTEGNA, R.; STANLEY, E. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, 2000. Cambridge University Press, Cambridge. Citado 7 vezes nas páginas 26, 34, 36, 38, 40, 42 e 43.
- MANTEGNA, R.; STANLEY, E. *Modeling of financial data: Comparison of the truncated Levy flight and the ARCH(1) and GARCH(1,1) processes.*, 2006. Physica A. v. 254. p. 77–84. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 38.
- MATSUSHITA, R.; DA SILVA, S. *A log-periodic fit for the flash crash of May 6 2010*, 2011. Economics Bulletin, v. 31, p. 1772-1779. Citado na página 24.
- MATSUSHITA, R.; GLERIA, I.; DA SILVA, S. *Sistemas complexos, criticalidade e leis de potencia*, 2004. Revista Brasileira de Ensino de Física, Sao Paulo, v. 26, p. 98-108. Citado na página 72.

- OTUKI, T.; MAZZEU, J.; DA SILVA, S. *The canonical econophysics approach to the flash crash of may 6 2010*, 2011. Applied Mathematical Sciences. v. 5.28, p. 1373-1389. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 31.
- MCNEIL, A.; RUDIGER, J. F.; EMBRECHTS, P. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.*, 2005. Princeton University Press. New Jersey. Citado na página 29.
- NAKAO, H. *Multi-scaling properties of truncated Levy flights*, 2008. Physics Letter A. v. 266, p. 282-302. Citado na página 43.
- NOLAN, J. P. *Modeling financial data with stable distributions*, 2005. Computational Statistics v. 27, p. 499-521. Citado 5 vezes nas páginas 39, 56, 67, 69 e 70.
- O'FATHAIGH, C. D. *The edge of chaos: an alternative to the random-walk hypothesis*, 2006. Physica A. v. 24, p. 159-162. Citado na página 44.
- OSEDELEC, V. L. *A Multiplicative ergodic theorem; Lyapunov characteristic number for dynamical systems*, 1968. Transactions of the Moscow Mathematical Society. v. 19, p. 197-231. Citado na página 75.
- PANAS, E.; NINNI, V. *Are oil markets chaotic? a non-linear dynamic analysis*, 2000, Energy Economics. v. 22, p. 549-568. Citado na página 35.
- PENG, J. *Mosaic organization of DNA nucleotides*, 1994. Physics Review E. v. 49, p. 1685-1689. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 58.
- PETERS, E. E. *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*, 1991. John Wiley and Son. New Jersey. Citado na página 35.
- PLEROU, V.; GOPIKRISHNAN, P.; AMARAL, L.; ROSENOW, B.; STANLEY, E. *Econophysics: financial time series from a statistical physics point of view*, 2000. Physica A. v. 279, p. 443-456. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 43.
- RODRIGUEZ, F.; RIVERO, S.; FELIX, J. *Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents*, 2005. Journal of Applied Econometrics. v. 20, p. 911-930. Citado 16 vezes nas páginas 24, 27, 28, 37, 38, 45, 47, 48, 49, 50, 60, 75, 78, 82, 88 e 89.
- ROSENSTEIN, M. T.; COLLINS, J. J.; LUCA, C. J. D. *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, 1998. Physica D. v. 65, p. 117-134 Citado 7 vezes nas páginas 15, 28, 38, 48, 49, 60 e 76.
- SAMUELSON, P. *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*, 1965. Industrial Management Review. v. 6, p. 41. Citado na página 34.
- SAVIT, R. *When random is not random: an introduction to chaos in market prices*, 1998. The Journal of Futures Markets. v. 8, p. 271-290. Citado na página 35.
- SCHINCKUS, C. *How physicists made stable Levy processes physically plausible*, 2013. Brazilian Journal of Physics. v. 43, p. 281-293. Citado 3 vezes nas páginas 33, 43 e 44.
- SETZ, T. *Wavelet Analysis on Stochastic Time Series*, 2011. ETH Zurich, Computational Science and Engineering. Ph.D. Thesis. Citado na página 38.

- SORNETTE, D. *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*, 2003. Princeton University Press. New Jersey. Citado 16 vezes nas páginas 23, 25, 27, 31, 37, 39, 50, 51, 52, 59, 60, 72, 74, 83, 85 e 89.
- SORNETTE, D. *Critical Phenomena in Natural Sciences*, 2004. Springer series in synergetics. Germany, Heidelberg. Citado 4 vezes nas páginas 37, 42, 43 e 51.
- SORNETTE, D. et al. *Stock market crashes, precursors and replicas*, 1995. Journal of Physics. v. 4, p. 863-881. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 51.
- SPROTT, J. C. *On the probability of chaos in large dynamical systems: a Monte Carlo study*, 1994. Journal of Economic Dynamics and Control. v. 23, p. 1197-1206. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 62.
- TAKAYASU, H. *Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics*, 2002. Springer, Tokyo. Citado na página 40.
- TAKENS, F. *Detecting strange attractors in turbulence dynamical systems*, 1981. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag. v. 898, p. 366-381. Citado na página 48.
- TSAY, R. *Analysis of Financial Time-Series*, 2010 Wiley. New Jersey, Hoboken. Citado na página 55.
- WICKERHAUSER, R. C. *Entropy-based Algorithms for best basis selection*, 1992. IEEE Society on Information Theory. v. 1.32, p. 712-718. Citado na página 59.
- ZAKOIAN, J. M. *Threshold heteroskedastic models*, 1994. Journal of Economic Dynamics and Control. v. 18, p. 931-955. Citado na página 41.