Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Introdução concisa aos espaços quocientes em topologia

Trabalho de Conclusão de Curso

Willian Goulart Gomes Velasco

Florianópolis, 2013

Willian Goulart Gomes Velasco

Introdução concisa aos espaços quocientes em topologia

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Bacharel em Matemática e Computação Científica.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2013

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Bacharelado e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n°08/CCM/2013

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Marcelo Ferreira Lima Carvalho
Orientador

Prof. Marcelo Sobottka

Prof. Nereu Estanislau Burin

Dedicado à: Tânia e Bira, pais pacientes e inspiradores;
Gabrielly, irmã tolerante e promissora;
Jenifer, minha companheira e fonte de minha inspiração.
Eu desisti várias vezes, mas eles nunca.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a meus pais Tania Velasco e Bira Velasco, a minha namorada Jenifer Grieger e a minha irmã Gabrielly Velasco que me apoiaram incondicionalmente. Mesmo quando eu queria desistir eles me mantiveram no prumo, mesmo com todo estresse e minhas preocupacões reais ou imaginárias. Sem eles nada disse seria possível, tenho certeza que mais da metade devo a eles.

Também e não menos importante meus amigos de curso ou de serviço que durante esses anos riram e choraram comigo. Para citar alguns, Felipe Tasca, Anderson Porfirio e sua esposa Thais Zarpelon, Renan Manfron, Mario Previatti, Flavio Sartor, Anderson Yoshiura, Gabriel Rosa, Leandro Morgado, Fernanda Silva, Gabriel Carlos, Shirley Machado, João Nicolotti, Luiz Ambrozio e muitos outros que passaram rapidamente mais deixaram sua marca.

Professores foram muitos, por isso uma menção geral ao corpo docente. Agradeço por eles terem sido em muitas vezes os professores que eu precisava e não os que eu desejara. Obrigado e logo dividiremos a profissão.

Sumário

Don't collect data. If you know everything about yourself, you know everything. There is no use burdening yourself with a lot of data. Once you understand yourself, you understand human nature and then the rest follows.

Gödel, K.

Introdução

A área conhecida por Topologia Geral serve de base para muitos outros desenvolvimentos em topologia, por exemplo, topologia diferencial, topologia algébrica e topologia geométrica, além de servir como fundamento para o desenvolvimento de conceitos básicos de análise e geometria. Em sua relação com a geometria temos que esta oferece a topologia exemplos concretos de muitos espaços, por exemplo, superfícies como a esfera, o toro, a faixa de Moebius, garrafa de Klein etc.; os espaços projetivos etc. Enquanto a esfera, o toro (e superfícies em geral) podem ser vistos como subespaços de um espaço euclidiano, o mesmo já não ocorre com o espaço projetivo que é um exemplo do que entendemos por espaços quocientes. Neste sentido, estes espaços quocientes tornam-se mais abstratos e difíceis de tratar do que os espaços que podem ser vistos como superfícies de um espaço euclidiano.

Neste trabalho analisaremos os espaços quocientes em topologia. Estes espaços se originam a partir de um espaço topológico X quando se define uma certa relação de equivalência $\sim$ entre seus pontos. As classes de equivalência assim formadas definem então um novo espaço, denotado por $X/\sim$, e dito o espaço quociente de X por $\sim$. Como veremos, é possivel definir de forma natural uma topologia em $X/\sim$. A importância desse estudo se justifica em parte pela dificuldade em se estabelecer um modo conveniente de pensar a topologia dos espaços quocientes. Em particular, veremos ao tratar com espaços quocientes como formalizar de forma precisa certas construções intuitivas como "colagem" de partes de dois espaços, e a identificação de pontos num espaço por uma certa relação. Esperamos, assim, ilustrar por meio de exemplos e alguns resultados a maneira de como se deve pensar estes espaços.

Nosso trabalho é organizado da seguinte forma. No primeiro capítulo trata da formalização da topologia quociente, tendo em vista sua caraterização mais geral possível. Começando pelas definições das topologias induzidas e co-induzidas para depois se definir a quociente, tal como feito em [2]. No capítulo dois é introduzida a caracterização matemática para o ato intuitivo de colagem e suas propriedades mais importantes. Por fim, são apresentados dois mapeamentos que unem os conceitos de relação de equivalência ao de colagem de espaços.

O texto foi escrito de maneira concisa e direta, de forma a torná-lo tão didático quanto possível. Os assuntos estão separados por tópicos e quando necessário subtópicos, onde são explanados aspectos gerais. Os exemplos e propriedades são os mais importantes, tendo em vista o carater introdutório do assunto. Algumas poucas imagens apenas ilustram alguns fatos, não se tornando desta forma parte de demonstrações ou motivação para estudos.

Quanto aos pré requisitos, assume-se que o leitor seja familiarizado com topologia geral. Conceitos de continuidade, noções de espaços separáveis e teoremas clássicos não serão aqui apresentados. Para estes, as referências [1] ou [2] podem ser consultadas. Para uma visão mais geral (no caso [1]) ou detalhes de demonstraçoes ([2]).

Gostaria de fazer uma menção aos livros citados na bibliografia. O livro [1] serviu como guia para este trabalho ao nortear os assuntos a serem tratados. Entretanto, tal livro possui a característica de ser muito conciso e direto, isto é, ele fornece as proposições e exemplos chave sem se dar ao trabalho de explanações e discussões mais aprofundadas. Por este motivo, outros livros foram muito uteis. O livro [2], base para nossa ementa de curso, serve como grande apoio para teoria geral de topologia. Muitos exemplos são ali apresentados, como as topologias induzidas e co-induzidas. Mas no que se refere as topologias quociente, tal livro não se aprofunda. Assunto este muito bem tratado pelo livro [3]. Este livro possui uma didática muito boa e dedica um capítulo para tratar do mapeamento identificação com suas implicaçoes em espaços quocientes e também demonstra vários resultados referentes a colagem de espaços topológicos.Também muito importante foram os exemplos de espaços quocientados por um subconjunto do mesmo, vistos em [5]. Há também o livro [4] que em seu capítulo introdutório trata de muitos dos assuntos deste trabalho, por exemplo motivando o estudo dos mapementos cilíndrico e cônico. Por fim, e não menos importante, o livro sobre a história da topologia [6] trata das bases de cada assunto estudado em topologia. Há inclusive referências aos trabalhos que deram origem a várias áreas de estudo, assim como motivaçoes dos problema que gostaria de se revolver e os desdobramentos deste em áreas da matemática correlacionadas à topologia, com maior ênfase em topologia algébrica. Apenas com o intuito de dica, gostaria de recomendar as video aulas sobre topologia algébrica, dentre outras, ministradas por N J Wildberger, professor titular em UNSW (University of New South Wales), Austrália.

Algumas considerações Históricas

Afim de situarmos a área da topologia de forma mais ampla da que iremos analisar aqui, faremos a seguir uma breve exposição sobre o desnvolvimento da topologia desde seus primórdios.

Historicamente, a Topologia é a mais nova das linhas da matemática clássica. Aquela surge em meados do século XVIII com Euler. Esse resolveu o problema das pontes de Köenigsberg em 1736 - não o primeiro sobre o assunto, mas de certa forma o mais famoso - trazendo notoriedade e atenção para uma nova área que estava se desdobrando. Sua formalização se deu anos mais tarde no Congresso Internacional de Matemática de 1909, em Roma, através de uma caracterização axiomática baseada na teoria dos conjuntos e sem utilizar o conceito de distância. Por volta de 1914, Hausdorff define os conjuntos abertos através de axiomas, sem considerações métricas. Outras vertentes da topologia se dão via teoria de Análise Funcional e também Equações Diferenciais. Na topologia não interessa a distância, os ângulos e tampouco a configuração dos pontos. Objetos que possam transformar-se em outros, através de funções contínuas reversíveis, são equivalentes e indistinguiveis.

Destacamos aqui a importância de se dominar o conteúdo relativo a espaços quocientes pelo que vemos já no estudo incial da *Homotopia*. Esta é uma das áreas em que se divide a Topologia Algébrica cuja ideia essencial é associar, de forma unívoca a espaços e propriedades topológicas, estruturas e propriedades algébricas. Esta nasceu nas últimas décadas do século XIX quando Poincaré apresentou uma série de trabalhos que a fundamentou. Dentre as descobertas de Poincaré destacam-se os conceitos de homotopia e de grupo fundamental, além de vários teoremas.

Atualmente, a Topologia Algébrica, em caráter introdutório de estudo, se divide naturalmente em duas vertentes: Homologia e Homotopia. A grosso modo, o conceito de Homotopia se refere a existência de uma "deformação" contínua entre duas aplicações $f, g : X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y que é o que define mapeamentos homotópicos; em seguida conceitua-se espaços do mesmo tipo homotópico. O estudo das classes de equivalência de mapeamentos homotópicos surge então como objeto inicial da análise. Em particular, há uma construção em espaços quocientes que serve como critério para verificar se dois mapeamentos $f, g : X \to Y$ são homotópicos que involve a construção de certos espaços quocientes, ditos mapeamentos cilíndricos, denotados por M_f, M_g. Assim, se f e g são homotópicos temos que M_f e M_g devem ser espaços com o mesmo tipo homotópico. Este resultado não será, contudo, abordado aqui.

CAPÍTULO 1

Espaços quociente

1.1 Topologia induzida

Seja X um conjunto e (Y, τ_Y) um espaço topológico. Considere ainda uma função $f : X \to Y$. A coleção das imagens inversas $f^{-1}(U)$ dos abertos $U \subset Y$ pela função f define uma topologia em X, conforme será mostrado.

Proposição 1. *O conjunto* $\tau_{X,ind} := \{f^{-1}(U);\ U \text{ conjunto aberto em } Y\}$ *define uma topologia em* X*.*

Demonstração 1. Devem-se verificar as três propriedades que definem uma topologia. Primeiramente, observe que $\phi = f^{-1}(\phi) \in \tau_{X,ind}$ e $X = f^{-1}(Y) \in \tau_{X,ind}$. Em seguida, dado um número *finito* de elementos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em $\tau_{X,ind}$ temos que existem abertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ em τ_Y tal que se tem

$$A_1 = f^{-1}(U_1),\ A_2 = f^{-1}(U_2), \ldots A_n = f^{-1}(U_n)\ .$$

Daí

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n &= f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(U_n) \\ &= f^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n) \end{aligned}$$

Mas $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \in \tau_Y$ daí, por definição de $\tau_{X,ind}$, temos que $f^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n) \in \tau_{X,ind}$, isto é $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \tau_{X,ind}$.

Por fim, dada uma família arbitrária $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau_{X,ind}$, escolha $V_i \in Y$ aberto tal que $A_i = f^{-1}(V_i)$. Então,

$$\cup_{i\in I} A_i = \cup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\cup_{i\in I} V_i) \in \tau_{X,ind}.\blacksquare$$

Definição 1. Esta coleção de subconjuntos de X, X $\tau_{X,ind}$, definida anteriormente é dita *topologia induzida* em X por f.

Se X tem a topologia induzida por $f : X \to Y$, então qualquer outra topologia em X segundo a qual f é contínua deve conter como abertos pelo menos os conjuntos $f^{-1}(U)$, com U aberto em Y. Assim, $\tau_{X,ind}$ é a topologia menos fina [2] dentre todas as topologias de X onde se tem $f : X \to Y$ contínua.

Obs: O caso particular mais importante da topologia induzida é aquele em que $X \subset Y$ e f reduz-se à aplicação de inclusão $i : X \to Y$. Neste caso, temos $\tau_{X,ind} = \{i^{-1}(U); U \in \tau_Y\}$. Em geral [1]

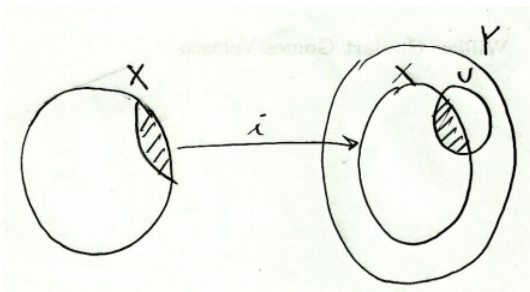


Figura 1: Topologia induzida

Temos $i^{-1}(U) = i^{-1}(U \cap X) = i^{-1}(U) \cap i^{-1}(X) = U \cap X$ o que nos permite então caracterizar

$$\tau_{X,ind} = \{U \cap X; U \in \tau_Y\} \tag{1.1}$$

[1] Figura 1 gentilmente cedida por Marcelo Carvalho.

Estando claro que estamos munindo $X \subset Y$ da topologia induzida, ao invés de escrever $\tau_{X,ind}$ escreveremos simplesmente τ_X a que nós referiremos pelo nome de *topologia subespaço*.

1.2 Topologia co-induzida

Seja X um espaço topológico, Y um conjunto e $f : X \to Y$ uma função sobrejetora de X em Y. Considere o seguinte conjunto $\tau_{Y,f} = \{U \subset Y; f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$.

Tal definição leva ao seguinte resultado:

Proposição 2. *(i) $\tau_{Y,f}$ define uma topologia em Y, e relativa a qual $f : X \to Y$ é contínua.*
(ii) $\tau_{Y,f}$ é a maior topologia relativa a qual f é contínua.

Demonstração 2. (i) Veja que $f^{-1}(\phi) = \phi$ é aberto em X, logo $\phi \in \tau_{Y,f}$. Como $f^{-1}(Y) = X$ também é aberto em X, segue que $Y \in \tau_{Y,f}$. Considere agora $U_1, U_2, \ldots U_n$ elementos de $\tau_{Y,f}$. Temos

$$f^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(U_n)\ .$$

Mas $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots \cap f^{-1}(U_n)$ são abertos em X logo $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(U_n) \in \tau_X$ e assim $f^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n) \in \tau_X$, que por definição nos dá $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \in \tau_{Y,f}$.

Por fim, dada uma família arbitrária $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau_{Y,f}$, então

$$f^{-1}(\cup_{i \in I} U_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

é aberto. Portanto, $\cup_{i \in I} U_i \in \tau_{Y,f}$.

Fica assim provada a primeira assertiva referente à topologia. Quanto a segunda, esta segue do raciocínio:

(ii) Seja τ_Y uma topologia em X mais fina que $\tau_{Y,f}$. Então, existe um conjunto $U \in \tau_Y \setminus \tau_{Y,f}$ tal que $f^{-1}(U) \notin \tau_X$. Assim, $f : X \to Y$ não seria uma função contínua se tomamrmos τ_Y como topologia de Y. Portanto, $\tau_{Y,f}$ é a topologia mais fina [2] que torna f contínua. ■

A topologia $\tau_{Y,f}$ é dita *co-induzida* pela f.

Obs: Seja X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Considere o espaço quociente $X/\sim$. Há uma maneira natural de munir $X/\sim$ de uma topologia através da projeção canônica

$$\pi : X \to X/\sim$$
$$x \to \pi(x) := [x]$$

onde $[x]$ denota a classe de equivalência de x pela relação $\sim$, isto é, $[x] = \{x' \in X; x \sim x'\}$. Assim, podemos tomar para topologia de $X/\sim$ a topologia co-induzida por π, que neste caso é dita a topologia quociente. Analisaremos em mais detalhes este tipo de espaço no que se segue.

1.3 Topologia Quociente

Definição 2. Seja (X, τ_X) um espaço topológico, $\sim$ uma relação de equivalência em X, $Y = X/\sim$ e $\pi : X \to Y$ a aplicação canônica que leva x em sua classe $[x]$. O *espaço quociente de X por $\sim$* é o par $(X/\sim, \tau_{X/\sim,\pi})$.

Obs: Em geral, ao invés de denotarmos a topologia de $X/\sim$ pela notação usual $\tau_{X/\sim,\pi}$ omitiremos a referência a projeção π denotando a topologia de $X/\sim$ simplesmente como $\tau_{X/\sim}$.

A seguir, daremos alguns exemplos de espaços quocientes que aparecem com frequência em matemática. Nos limitaremos apenas a dar uma descrição intuitiva e geométrica de como a relação de equivalência é introduzida.

Exemplo 1. *Toro* [2] *[4]*: O Toro $S^1 \times S^1$ pode ser obtido a partir do retângulo $[0,1] \times [0,1]$ pela relação de equivalência que identifica pares de pontos opostos (vide figura), $(0, y) \sim (1, y)$ e $(x, 0) \sim (x, 1)$.

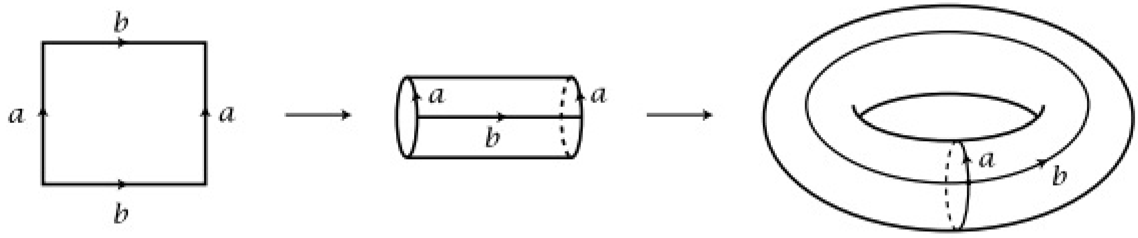


Figura 2: Toro

Exemplo 2. *Garrafa de Klein* [3] *[4]*: Modificando a construção anterior do toro, isto é, considerando a orientação reversa de um dos extremos controi-se a superfície chamada Garrafa de Klein.

[2]Figura 2 proveniente de [4].
[3]Figura 3 proveniente de [4].

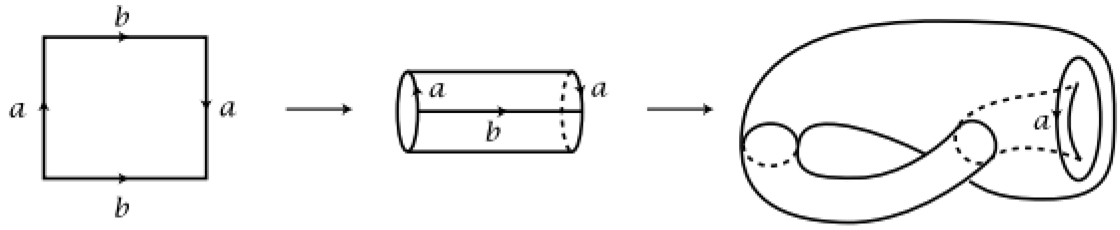


Figura 3: Garrafa de Klein

Por definição, a Garrafa de Klein é o espaço quociente do retângulo obtido pela identificação dos extremos opostos de acordo com a orientação exibida. A identificação do topo e das laterais do retângulo resulta num cilindro, mas, ao se identificar os dois fins do cilindro, exige-se que este passe por si mesmo de modo que a orientação seja mantida, completando assim a garrafa.

Exemplo 3. *Faixa de Mobius [5]*: Seja $X = [-1, 1]$ e a relação $\sim$ que identifica $-x \sim x$. Desta forma o espaço $X \times [0, 1]/\sim$ representa a faixa de Möbius.

Observação 1. *Não "Hausdorfficidade" da topologia quociente.* Ao se tratar com uma topologia quociente, esta pode não ser Hausdorff. Para ilustrar este fato, considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual, e a relação $\sim$ tal que $x \sim y$ se, e somente se, $(x - y) \in \mathbb{Q}$. Então, dois fatos serão mostrados: (i) $\mathbb{R}/\sim$ é não enumerável e (ii) sua topologia é $\tau_{\mathbb{R}/\sim} = \{\mathbb{R},\phi\}$, isto é, resulta na topologia trivial (portanto não Hausdorff). [4]

Segue a verificação de i e ii:

(i) O primeiro fato a ser notado é que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se

$$[x] = \{x + p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, mdc(p, q) = 1\}.$$

Desta forma, $[x]$ é enumerável - pois é formado a partir de somas de números racionais a um real x fixo. Em seguida, observe que $x \in \mathbb{Q}$ implica $[x] = \mathbb{Q}$. Se $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, então

$$[x] = \{x + p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, mdc(p, q) = 1\}$$

e $[x] \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Segue destes dois fatos que

$$(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \cup_{x\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})}[x] \ (*).$$

[4] Essencialmente, este resultado nos chama a atenção de que embora o espaço quociente $\mathbb{R}/\sim$, a semelhança de $\mathbb{R}$, continue sendo não enumerável, ele, contudo, deixa de ser Hausdorff.

Sendo $[x]$ enumerável, vemos que na união dada em $(*)$ devemos ter um número não-enumerável de classes distintas, do contrário, estaríamos escrevendo $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ como uma união enumerável de conjuntos enumeráveis $[x]$, que por sua vez seria um conjunto enumerável, resultando então que $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ seria enumerável, o que é um absurdo. Portanto,

$$\mathbb{R}/\sim = \{[x]; x \in \mathbb{Q}\} \cup \{[x]; x \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})\}$$

é não enumerável.

(ii) Segue a verificação de que a topologia quociente deste conjunto é a topologia trivial. Seja $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ com $\pi(x) = [x]$. Seja $V \in \tau_{\mathbb{R}/\sim}$ com V não vazio. Desta forma, temos

$$\pi^{-1}(V) = \cup_{[x]\in V} \pi^{-1}([x]) \in \tau_{\mathbb{R}}.$$

Como qualquer conjunto aberto em $\mathbb{R}$ possui números racionais e irracionais, considere $x \in \mathbb{Q} \cap \pi^{-1}(V)$. Portanto, $\pi(x) = [x] \in V$ com $\pi^{-1}([x]) = \mathbb{Q} \subset \pi^{-1}(V)$. Como $\pi^{-1}(V)$ é aberto e $\mathbb{Q} \subset \pi^{-1}(V)$, para todo x em $\mathbb{Q}$ existe $\delta_x > 0$ tal que $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset \pi^{-1}(V)$. Pode-se escolher δ_x de forma que este seja racional e definir $x' = x + \delta_x \in \mathbb{Q}$. Analogamente, existe $\delta_{x'} \in \mathbb{Q}$ tal que $(x'-\delta_{x'}, x'+\delta_{x'}) \subset \pi^{-1}(V)$. Daí, $\cup_{x\in\mathbb{Q}}(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset \pi^{-1}(V)$. Mas podemos identificar

$$\mathbb{R} = \cup_{x\in\mathbb{Q}}(x-\delta_x, x+\delta_x)$$

logo temos $\mathbb{R} \subset \pi^{-1}(V)$. É imediato que $\pi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}$, portanto, $\pi^{-1}(V) = \mathbb{R}$. Daí,

$$V = \cup_{x\in\mathbb{R}}[x] = \{[x]; x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}/\sim.$$

Finaliza-se assim a prova de que $\tau_{\mathbb{R}/\sim} = \{\mathbb{R}/\sim,\ \phi\}$.

Proposição 3. *Um espaço quociente de um espaço quociente X é um espaço quociente de X.*

Demonstração 3. Considere (X, τ_X), espaço topológico, e as funções $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_{Y,f})$ e $g : (Y, \tau_{Y,f}) \to (Z, \tau_{Z,g})$, ambas sobrejetivas. Deve-se mostrar que (i) $g \circ f : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_{Z,g\circ f})$ é sobrejetiva e (ii) $\tau_{Z,g\circ f} = \tau_{Z,g}$.

Por serem f e g sobrejetivas a composição também o será. Desta forma, (i) é imediata.

Para (ii), seja $V \in \tau_{Z,g}$. Segue que $g^{-1}(V) \subset \tau_{Y,f}$, que por sua vez implica $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in$

τ_X. Isto é,

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \subset \tau_X.$$

Sendo $g \circ f : (X, \tau_X) \rightarrow (Z, \tau_{Z,g\circ f})$ temos por definição de $\tau_{Z,g\circ f}$ que $V \in \tau_{Z,g\circ f}$, logo $\tau_{Z,g} \subset \tau_{Z,g\circ f}$.

Seja agora $V \in \tau_{Z,g\circ f}$. Da continuidade de $g \circ f : (X, \tau_X) \rightarrow (Z, \tau_{Z,g\circ f})$ temos que $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X$ e da continuidade de $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_{Y,f})$ temos que $g^{-1}(V) \in \tau_{Y,f}$. Segue-se então da continuidade de $g : (Y, \tau_{Y,f}) \rightarrow (Z, \tau_{Z,g})$ que $V \in \tau_{Z,g}$, isto é $\tau_{Z,g\circ f} \subset \tau_{Z,g}$. Concluímos então que $\tau_{Z,g\circ f} = \tau_{Z,g}$ ■

1.4 Mapeamento identificação

O mapeamento que será definido e o teorema posterior, são muito úteis para obtenção de funções contínuas, como será visto.

Definição 3. Dados dois espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y), uma função $f : X \to Y$ é chamada *mapeamento identificação* se:
(i) f é sobrejetora e contínua;
(ii) $\tau_Y = \tau_{Y,f}$.

Proposição 4. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dois espaços topológicos. Considere $f : X \to Y$ sobrejetora. Então, f é mapeamento identificação se, e somente se, para toda função $g : Y \to Z$, g é contínua se, e somente se, $g \circ f$ é contínua.*

Demonstração 4. Suponha $f : X \to Y$ é mapeamento identificação. Então, f é sobrejetora, contínua e $\tau_Y = \tau_{Y,f}$.

Seja agora $g : Y \to Z$ tal que $g \circ f : X \to Z$ é contínua. Tome $U \in \tau_Z$. Logo,

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau_X.$$

Como $\tau_Y = \tau_{Y,f}$ e $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau_X$ temos que $g^{-1}(U) \in \tau_{Y,f}$ que nos dá então que $g : Y \to Z$ é contínua.

Considere agora $g : Y \to Z$ contínua. Logo, a composição $g \circ f$ também o será. Aqui encerra-se a demonstração da "ida".

Para a outra implicação, suponha que $f : X \to Y$ é sobrejetora e que para toda função $g : Y \to Z$, g é continua se, e somente se, $g \circ f$ é contínua.

Deve-se provar que (i) f é contínua e (ii) $\tau_Y = \tau_{Y,f}$. Para (i), seja τ_Y uma topologia em Y (não necessariamente $\tau_Y = \tau_{Y,f}$). Observe que $g : (Y, \tau_Y) \to (Y, \tau_Y)$ é contínua, ou seja, $g \equiv I$. Segue que $f = (g \circ f) : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ é contínua. Para (ii), considere $g_1 : (Y, \tau_Y) \to (Y, \tau_{Y,f})$, $g_1(y) = y$, função que leva valores de Y com a topologia τ_Y em Y com a topologia quociente $\tau_{Y,f}$. Temos que $g_1 \circ f \equiv \tilde{f} : (X, \tau_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y) \xrightarrow{g_1} (Y, \tau_{Y,f})$ é contínua pois é equivalente ao mapeamento $(X, \tau_X) \xrightarrow{\tilde{f}=f} (Y, \tau_{Y,f})$ que é contínuo. Da hipótese segue que $g_1 : (Y, \tau_Y) \to (Y, \tau_{Y,f})$ é contínua.

Consideremos agora, $g_2 : (Y, \tau_{Y,f}) \to (Y, \tau_Y)$, $g_2(y) = y$. Temos $g_2 \circ \widetilde{f} \equiv f : (X, \tau_X) \xrightarrow{\tilde{f}} (Y, \tau_{Y,f}) \xrightarrow{g_2} (Y, \tau_Y)$ é contínua pois é equivalente ao mapeamento $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$

que já vimos ser contínuo. Sendo $g_2 \circ \widetilde{f}$ contínuo segue-se da hipótese que $g_2 : (Y, \tau_{Y,f}) \to (Y, \tau_Y)$ é contínua. Assim, sendo $g_2 = g_1^{-1}$ vemos que g_1 é homeomorfismo, e daí temos $\tau_Y = \tau_{Y,f}$. Tem-se que f, pois, é mapeamento identificação. $\blacksquare$

Proposição 5. *Se (X, τ_X) é espaço topológico compacto, então $(X/\sim, \tau_{X/\sim})$ é compacto [5].*

Demonstração 5. Sabemos que se $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ é contínua e X é compacto tem-se que $(f(X), \tau_{f(X) \subset Y})$ é compacto. Para o caso particular de $\pi : (X, \tau_X) \to (X/\sim, \tau_{X/\sim})$ temos que $\pi(X) = X/\sim$ e $\tau_{\pi(X) \subset X/\sim} = \tau_{X/\sim}$, daí $(X/\sim, \tau_{X/\sim})$ é compacto. $\blacksquare$

1.5 Espaço projetivo

O plano projetivo é geralmente definido como sendo a esfera com os pontos antípodas relacionados. Repetindo a construção de espaços quocientes para o caso em questão temos que dada a esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$ munida da topologia subespaço (vendo $S^2 \subset \mathbb{R}^3$) introduzimos em S^2 a relação que identifica pontos antípodas e assim temos definidas classes $[x] = \{x, -x\} \in S^2/\sim$ elementos de $S^2/\sim$. Finalmente, a partir da projeção canônica $\pi : S^2 \to S^2/\sim$ definimos uma topologia em $S^2/\sim$. Construímos dessa forma o plano projetivo $\mathbb{RP}^2 = (S^2/\sim, \tau_{S^2/\sim})$.

Proposição 6. $\mathbb{RP}^2$ *é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração 6. Sejam $U \in \tau_{S^2}$ e $-U = \{-x; x \in U\} \in \tau_{S^2}$. Desta forma,

$$\pi(U) = \{[x]; x \in U\} \implies \pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U) \in \tau_{S^2}$$

Logo, $\pi(U) \in \tau_{S^2/\sim}$.

Sejam $(S^2/\sim, \tau_{S^2/\sim})$ e $[x], [y] \in S^2/\sim$ com $[x] \neq [y]$. Assim, $\pi^{-1}([x]) = \{x, -x\}$ e $\pi^{-1}([y]) = \{y, -y\}$. Note que por serem classes distintas, $x \neq y$ e $x \neq -y$. Sendo (S^2, τ_{S^2}) Hausdorff, existem abertos $U \ni x$ e $V \ni y$ tais que $U, V, -U, -V$ são disjuntos. Suponha que existe $[z] \in \pi(U) \cap \pi(V)$. Logo, $[z] \in \pi(U)$ com $z \in U$ ou $-z \in U$. Analogamente, $[z] \in \pi(V)$ implica $z \in V$ ou $-z \in V$. Assim, podem ocorrer as seguintes possibilidades:

$$(i) z \in U \cap V; (ii) z \in U \text{ e } -z \in V;$$

$$(iii) -z \in U \text{ e } z \in V; (iv) -z \in U \cap V.$$

Como $U \cap V = \phi$, (i) e (iv) estão descartados. Sejam agora $z \in U$ e $-z \in V$. De $-z \in V$ decorre que $z \in -V$, ou seja, $z \in U \cap V$. Absurdo. Então, $\pi(U) \cap \pi(V) = \phi$ e conclui-se que $(S^2/\sim, \tau_{S^2/\sim})$ é Hausdorff. ■

Obs: Outra descrição para o plano projetivo.
É possível definir o plano projetivo na forma $\mathbb{RP}^2 := (D^2/\sim, \tau_{D^2/\sim})$
Onde:
⌟ $D^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : z^2 \leq 1\}$: disco de raio unitário
⌟ $\partial D := \{z \in \mathbb{R}^2 : z^2 = 1\}$: borda do disco

$\lrcorner$ $D^2/\!\sim\, \ni [z]$

$$[z] = \begin{cases} \{z, -z\} & \text{se } z \in \partial D \\ \{z\} & \text{se } z \in \operatorname{int} D \end{cases}$$

$\lrcorner$ $\pi_+ : D^2 \to D^2/\!\sim$ (sobrejetiva)

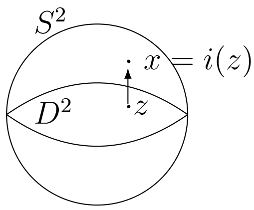
Queremos mostrar que se tem um homeomorfismo: $(D^2/\!\sim, \tau_{D^2/\sim}) \simeq (S^2/\!\sim, \tau_{S^2/\sim})$.

Consideremos a injeção

$i : D^2 \to S^2$

$z = (z^1, z^2) \to x := \left(z^1, z^2, \sqrt{1 - (z^1)^2 - (z^2)^2}\,\right)$

Aqui, a imagem $i(D^2) \equiv S^2_+$ é o hemisfério superior de S^2,



Note que i leva os pontos da borda de D^2 nos pontos do equador de S^2. Como estes pontos coincidem com os pontos da borda de D^2, a ação de i nestes pontos não foi representado na figura.

Temos então o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} D^2 & \xrightarrow{i} & S^2 \\ \downarrow \pi_+ & & \downarrow \pi \\ D^2/\!\sim & \xrightarrow{k} & S^2/\!\sim \end{array}$$

onde k é o único mapeamento que torna o diagrama comutativo, i.e.

$$k \circ \pi_+ = \pi \circ i$$

ou ainda $k([z]) = [i(z)]$. Esta função é uma bijeção.

Seja $U \in \tau_{S^2/\sim,\pi}$. Temos $\pi^{-1}(U) \in \tau_{S^2}$ (pois π é contínua) e $(\pi \circ i)^{-1}(U) = i^{-1} \circ \pi^{-1}(U) \in \tau_{D^2}$ (pois i é contínua e $\pi \circ i$ é a composta de funções contínuas). Mas $k \circ \pi_+ = \pi \circ i$ daí, $\tau_{D^2} \ni (k \circ \pi_+)^{-1}(U) = \pi_+^{-1}(k^{-1}(U))$. Mas π_+ é contínua e da definição de $\tau_{D^2/\sim}$ temos

que $k^{-1}(U) \in \tau_{D^2/\sim}$, i.e. k é contínua.
Finalmente, sendo D^2 compacto em $\mathbb{R}^2$ (pois é fechado e limitado) temos que $(D^2/\sim, \tau_{D^2/\sim})$ é compacto. Também, já vimos que $S^2/\sim$ é Hausdorff. Assim, temos que $k : (D^2/\sim, \tau_{D^2/\sim}) \to (S^2/\sim, \tau_{S^2/\sim})$ é uma bijeção contínua de um espaço compacto em um espaço de Hausdorff. Assim, obtemos que k é um homeomorfismo, i.e. $(D^2/\sim, \tau_{D^2/\sim})$ e $(S^2/\sim, \tau_{S^2/\sim})$ são homeomorfos. ■

Exemplo: $(S^n \times I/S^n \times \{0\}) \simeq D^{n+1}$
De fato.
Sejam $D^{n+1} := \{x \in R^{n+1} : |x| \leq 1\}$, $S^n := \{x \in R^{n+1} : |x| = 1\}$ e $S^n = \partial D^{n+1}$. Considere $f : S^n \times I \to D^{n+1}$ definida por $f(x,t) := tx$. Temos que f é contínua e dado $S^n \times \{0\} \subset S^n \times I$ tem-se $f(S^n \times \{0\}) = 0$. Seja $\frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}} \ni [(x,t)]$ onde

$$[(x,t)] := \begin{cases} S^n \times \{0\} & \text{se } t = 0 \\ \{(x,t)\} & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

Defina
$g : \frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}} \to D^{n+1}$ onde se põe $g[(x,t)] := f(x,t)$. Mas, a projeção $\pi : S^n \times I \to \frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}}$ é um mapeamento identificação logo da porposição **4** temos que $\big(g \circ \pi$ contínua $\Leftrightarrow$ g contínua$\big)$. Mas temos $f = g \circ \pi$ contínua, daí g é contínua. Além disso, $\pi : S^n \times I \to \frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}}$ é contínua e $S^n \times I$ é compacto, logo temos que $\pi(S^n \times I) = \frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}}$ é compacto. Assim, temos que $g : \frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}} \to D^{n+1}$ é contínua, bijetiva definido em um compacto $\frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}}$ e tem por imagem um espaço de hausdorff D^{n+1}, logo g é homeomorfismo $\therefore \frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}} \sim D^{n+1}$.

Pequenas variações destes exemplos, assim como uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em [5], [3] ou mesmo [4].

1.6 Espaço quociente X/A

Sejam X e A conjuntos não vazios com $A \subset X$. Construa a seguinte relação $\sim$ em X: $x \sim y$ se, e somente se, $x, y \in A$ ou $x = y$. Observe que $\sim$ é relação de equivalência em X. Segue a verificação:

• É imediato que $x \sim x$, assim $\sim$ é reflexiva.

• Seja $x \sim y$. Por definição, $x \sim y \implies \big(x, y \in A \text{ ou } x = y\big) \implies \big(y, x \in A \text{ ou } y = x\big) \implies y \sim x$, isto é $x \sim y \implies y \sim x$ e assim $\sim$ é simétrica.

• Finalmente, sejam $x \sim y$ e $y \sim z$. Tem-se

$$\big(x, y \in A \text{ ou } x = y\big) \text{ e } \big(y, z \in A \text{ ou } y = z\big).$$

Há quatro casos

$$(i)\, x, y \in A \text{ e } y, z \in A, \;\; (ii)\, x, y \in A \text{ e } y = z,$$

$$(iii)\, x = y \text{ e } y, z \in A, \;\; (iv)\, x = y \text{ e } y = z$$

De $(i), (ii), (iii)$ temos que $x, z \in A$, logo $x \sim z$.
De (iv) temos que $x = z$, logo $x \sim z$.
Em qualquer dos casos $(i) - (iv)$ encontramos então que $x \sim z$ o que mostra que $\sim$ é transitiva.

Com auxílio desta relação pode-se obter um tipo de espaço quociente ao se relacionar um conjunto com um de seus subconjuntos. É o que faremos a seguir.

Definição 4. Sejam (X, τ_X) espaço topológico e $A \subset X$ não vazio. Então introduzimos um espaço topológico $(X/A, \tau_{X/A})$ onde

$$X/A := \{A, \{x\}; x \in (X \setminus A)\}$$

$\tau_{X/A}$ é a topologia quociente induzida pela projeção canônica $\pi : X \to X/A$.

Exemplo 4. *Cone* [5] *[5]*: Seja X espaço topológico, então chama-se $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$ o *cone* sobre X.

[5] Figura 4 proveniente de [5].

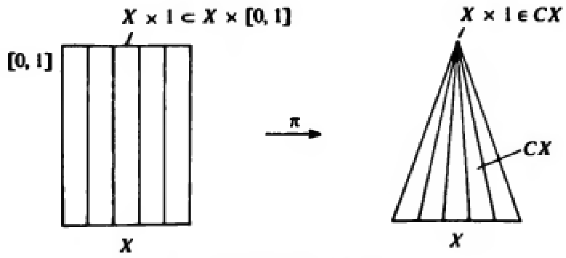


Figura 4: Cone

Exemplo 5. *Suspensão* [6] *[5]*: Dado X espaço topológico, o espaço $\sum X = X \times [-1,1]/\Big(X \times \{-1\} \cup X \times \{1\}\Big)$ é chamado de *suspensão ou cone duplo* sobre X.

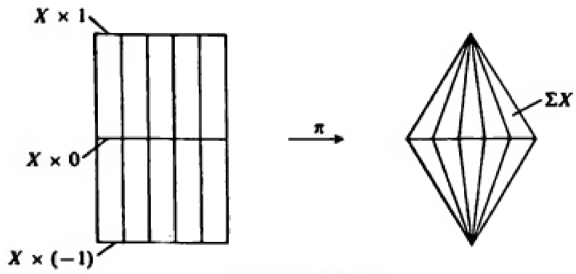


Figura 5: Suspensão

Proposição 7. *(i) Se X é espaço topológico regular e $A \subset X$ é fechado, então X/A é Hausdorff;*

(ii) Se X é espaço topológico normal e A é fechado, então X/A é normal.

Demonstração 7. (i) Sejam X regular e A fechado - em particular, X é Hausdorff. Tome $[x_1], [x_2] \in X/A$ com $[x_1] \neq [x_2]$. Tem-se os casos

(a) $x_1 \in A$ e $x_2 \notin A$ (equivalentemente, $x_1 \notin A$ e $x_2 \in A$);

(b) $x_1, x_2 \notin A$.

(a) Como X é regular e A é fechado, existem $V_1, V_2 \in \tau_X$ tais que $x_1 \in A \subset V_1$ e $x_2 \in V_2$ com $V_1 \cap V_2 = \phi$. Temos definido a projeção $\pi : X \to X/A$ de onde segue que

$$x_1 \in V_1 \implies \pi(x_1) = [x_1] \in \pi(V_1) = \{A, [x]; x \in (V_1 \setminus A)\}.$$

[6]Figura 5 proveniente de [5].

Por um raciocínio análogo,

$$x_2 \in V_1 \implies \pi(x_2) = [x_2] \in \pi(V_2) = \{[x]; x \in V_2\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(V_1)) &= A \cup \{x; x \in V_1 \setminus A)\} = V_1 \in \tau_X \implies \pi(V_1) \in \tau_{X/A}\\ \pi^{-1}(\pi(V_2)) &= \{x; x \in V_2\} = V_2 \in \tau_X \implies \pi(V_2) \in \tau_{X/A}.\end{aligned}$$

Mas,

$$\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \{A, [x]; x \in (V_1 \setminus A)\} \cap \{[x]; x \in V_2\} = \phi \implies \pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \phi.$$

Dessa forma, tomando $U_1 = \pi(V_1)$ e $U_2 = \pi(V_2)$, temos obtido que $[x_1] \in \pi(V_1)$ e $[x_2] \in \pi(V_2)$ e $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \phi$ o que mostra que X/A é Hausdorff.

(b) Como X é Hausdorff, existem $V_1, V_2 \in \tau_X$ tais que $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \phi$. Além disso, A é fechado. Então, $X \setminus A$ é aberto e $x_1, x_2 \notin A$ com $x_1, x_2 \in X \setminus A$. Sejam

$$V_1' = V_1 \cap X \setminus A \text{ e } V_2' = V_2 \cap X \setminus A \text{ ambos em } \tau_X.$$

Por construção, $x_1 \in V_1'$, $x_2 \in V_2$, $V_1' \cap V_2' = \phi$ e

$$x_1 \in V_1' \implies \pi(x_1) = [x_1] \in \pi(V_1'),$$

$$x_2 \in V_2' \implies \pi(x_2) = [x_2] \in \pi(V_2').$$

Como $V_1' \cap A = \phi$ e $V_2' \cap A = \phi$, então

$$\pi(V_1') = \{[x]; x \in V_1'\} \text{ e } \pi(V_2') = \{[x]; x \in V_2'\}.$$

Daí

$$\pi^{-1}(\pi(V_1')) = \{x; x \in V_1'\} = V_1' \in \tau_X, \text{ daí } \pi(V_1') \in \tau_{X/A}$$

e

$$\pi^{-1}(\pi(V_2')) = \{x; x \in V_2'\} = V_2' \in \tau_X, \text{ daí } \pi(V_2') \in \tau_{X/A}.$$

Além disso temos que $\pi(V_1') \cap \pi(V_2') = \phi$. Definindo apenas por conveniência $\pi(V_1') = U_1$ e $\pi(V_2') = U_2$, segue que X/A é Hausdorff.

(ii) Seja X espaço normal. Sejam F_1 e F_2 conjuntos fechados disjuntos em X/A.

Como π é contínua, $\pi^{-1}(F_1)$ e $\pi^{-1}(F_2)$ são conjuntos fechados em X. Notamos que

$$\pi^{-1}(F_1) \cap \pi^{-1}(F_2) = \pi^{-1}(F_1 \cap F_2) = \pi^{-1}(\phi) = \phi.$$

Inicialmente, notamos que não pode ocorrer $A \cap \pi^{-1}(F_1) \neq \phi$ e $A \cap \pi^{-1}(F_2) \neq \phi$. Com efeito, seja $a_1 \in A \cap \pi^{-1}(F_1)$. Então $\pi(a_1) = [a_1] = A \in F_1$. Também, seja $a_2 \in A \cap \pi^{-1}(F_2)$ com $\pi(a_2) = [a_2] = A \in F_2$. Desta forma $F_1 \cap F_2 \neq \phi$. Absurdo.

Restam as possibilidades:

(a) $A \cap \pi^{-1}(F_1) \neq \phi$ e $A \cap \pi^{-1}(F_2) = \phi$ (equivalentemente trocando-se F_1 por F_2) ;

(b) $A \cap \pi^{-1}(F_1) = \phi$ e $A \cap \pi^{-1}(F_2) = \phi$.

(a) Sejam $A \cup \pi^{-1}(F_1)$ e $\pi^{-1}(F_2)^!$ fechados. Tem-se

$$(A \cup \pi^{-1}(F_1)) \cap \pi^{-1}(F_2) = \phi.$$

Como X é normal, existem $V_1, V_2 \in \tau_X$ com $V_1 \cap V_2 = \phi$ tais que $A \cup \pi^{-1}(F_1) \subset V_1$ e $\pi^{-1}(F_2) \subset V_2$. Mas

$$A \subset V_1 \implies \pi(V_1) = \{A, [x]; x \in V_1 \setminus A\}$$

$$A \cap V_2 = \phi \implies \pi(V_2) = \{[x]; x \in V_2\}.$$

Logo, $\pi^{-1}(\pi(V_1)) = A \cup \big(V_1 \setminus A\big) = V_1 \in \tau_X$ e $\pi^{-1}(\pi(V_2)) = V_2 \in \tau_X$, isto é temos que $\pi^{-1}(\pi(V_1)) \in \tau_X$ e $\pi^{-1}(\pi(V_2)) \in \tau_X$ de onde segue-se que $\pi(V_1), \pi(V_2) \in \tau_{X/A}$. Em decorrência de $A \subset V_1$ e $V_1 \cap V_2 = \phi$ segue

$$\{A, [x]; x \in V_1 \setminus A\} \cap \{[x]; x \in V_2\} = \phi,$$

isto é, $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \phi$. Por fim $A \cup \pi^{-1}(F_1) \subset V_1$, aplicando π,

$$\pi(A \cup \pi^{-1}(F_1)) \subset \pi(V_1) \implies \pi(A) \cup F_1 \subset \pi(V_1) \;\text{ logo }\; F_1 \subset \pi(V_1)$$

Analogamente, $\pi^{-1}(F_2) \subset V_2$ implica em $F_2 \subset \pi(V_2)$. Portanto, provamos (neste caso) a normalidade de X/A.

(b) Tome por fechados em X, $A \cup \pi^{-1}(F_1)$ e $\pi^{-1}(F_2)^!$. Tem-se então que

$$(A \cup \pi^{-1}(F_1)) \cap \pi^{-1}(F_2) = \phi.$$

Assim, conclui-se de forma análoga ao item anterior (a). Portanto, X/A é normal. ■

Observação: Justificativa de !. Sendo X normal e $\pi^{-1}(F_1), \pi^{-1}(F_2)$ fechados e disjuntos em X, existem V_1, V_2 abertos tais que $\pi^{-1}(F_1) \subset V_1$ e $\pi^{-1}(F_2) \subset V_2$. Contudo, pode ocorrer $A \cap V_1 \neq \phi$ e $A \cap V_2 \neq \phi$ o que forneceria $F_1 \subset \pi(V_1), F_2 \subset \pi(V_2)$ sem necessariamente $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \phi$. Para evitar tal situação, toma-se por fechados $A \cup \pi^{-1}(F_1)$ e $\pi^{-1}(F_2)$. Segue então da normalidade de X que $A \cup \pi^{-1}(F_1) \subset V_1$ e $\pi^{-1}(F_2) \subset V_2$ em que $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \phi$.

Definição 5. Dados $A \subset X$ e $\sim$ relação de equivalência em X, chama-se

$$\tilde{A} = \{x \in X; x \sim a \text{ para algum } a \in A\}$$

de *saturação de A relativo a $\sim$*.

Proposição 8. *(i) Sejam A e X não vazios com $A \subset X$. $\tilde{A} = X$ se, e somente se, $[x] \cap A \neq \phi \ \forall x \in X$;*

(ii) Seja $\sim$ relação de equivalência tal que $\tilde{A} = X$. Então, $k : A/\sim \to X/\sim$, com $k([a]_A) = [a]_X$, é homeomorfismo se a saturação de cada aberto em A é um aberto em X. Isto é, se $U \in \tau_A$ então $\tilde{U} \in \tau_X$.

Demonstração 8. (i) Sejam $\tilde{A} = X$ e $x \in X$. Então, $x \in \tilde{A}$. Pela definição, existe um elemento $a \in A$ tal que $x \sim a$. Desta forma, $a \in [x]$ e $A \cap [x] \neq \phi$. Suponha agora que $[x] \cap A \neq \phi$, $\forall x \in X$. Tome $x \in X$. Existe $a \in A$ tal que $a \in [x]$. Portanto, $x \sim a$ e $x \in \tilde{A}$, daí $X \subset \tilde{A}$. Como $\tilde{A} \subset X$, tem-se $\tilde{A} = X$.

(ii) <u>Injetividade</u>: seja k como na hipótese e suponha $k([a_1]_A) = k([a_2]_A)$. Desta forma, $[a_1] = [a_1]_X = [a_2]_X$ com $a_1 \sim a_2$. Então, $[a_1]_A = [a_2]_A$.

<u>Sobrejetividade</u>: seja $[x]_X \in X/\sim$. Por hipótese $\tilde{A} = X$ $x \in \tilde{A}$, isto é, existe $a \in A$ tal que $x \sim a$. Assim dado $[a]_A$ tem-se $k([a]_A) = [a]_X = [x]_X$.

<u>Continuidade</u>: sejam as projeções canônicas $\pi_A : A \to A/\sim$ e $\pi_X : X \to X/\sim$. Note que $\pi_X|_A$ é contínua pois é restrição de uma função contínua. Como $\pi_X|_A = k \circ \pi_A$, pela Proposição 4 segue da continuidade da composição que k deve ser contínua.

Falta verificar que k é função aberta. Seja $V \in \tau_{A/\sim}$. Conforme já verificado, π_A é sobrejetora e pode-se escrever

$$V = \pi_A(\pi_A^{-1}(V)) = \{\pi_A(a); a \in \pi_A^{-1}(V)\}.$$

Aplicando k,

$$k(V) = \{k(\pi_A(a)); a \in \pi_A^{-1}(V)\} = \{\pi_X(a); a \in \pi_A^{-1}(V)\}.$$

Observe que $\pi_X^{-1}(k(V)) = \{x \in X; \pi_X(x) \in k(V)\}$. Como $\pi_X(x) \in k(V)$, existe $a \in \pi_A^{-1}(V)$ tal que $\pi_X(x) = \pi_X(a)$ e $x \sim a$. Isto é,

$$\pi_X^{-1}(k(V)) = \{x \in X; \exists a \in \pi_A^{-1}(V), x \sim a\} = \widetilde{\pi_A^{-1}(V)} \implies \pi_X^{-1}(k(V)) = \widetilde{\pi_A^{-1}(V)}.$$

Como π_A é contínua e $V \in \tau_{A/\sim}$ tem-se $\pi_A^{-1}(V) \in \tau_A$ e, por hipótese, segue $\widetilde{\pi_A^{-1}(V)} \in \tau_X$. Então, $\pi_X^{-1}(k(V)) \in \tau_X$ implica $k(V) \in \tau_X/\sim$. Portanto, k é função aberta. ∎

CAPÍTULO 2

Espaço quociente da união disjunta de espaços

Dados dois espaços topológicos X e Y é possível definir um novo espaço que exibe certos aspectos dos espaços X e Y e que intuitivamente se assemelha a um processo de "colagem" de uma parte do espaço X no espaço Y. Formalmente, colamos um conjunto fechado $A \subset X$ em Y por meio de uma função contínua $f : A \to Y$, sendo a colagem efetuada pela identificação de $A \subset X$ com sua imagem $f(A) \subset Y$. Isto leva então a definição de um espaço topológico denotado por $Y \cup_f X$.

Como veremos, os aspectos comuns dos espaços X e Y que são reproduzidos em $Y \cup_f X$ referem-se ao fato que tanto X quanto Y podem ser pensados como mergulhados em $Y \cup_f X$.

2.1 União disjunta

Para efetuarmos a construção de $Y \cup_f X$ inicialmente definimos

Definição 6. Sejam X, Y espaços topológicos. A *união disjunta de* X *e* Y, denotada por $X + Y$, é o espaço

$$X + Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}), \tau_{X+Y}),$$

onde $U \in \tau_{X+Y}$ se

$$\begin{aligned} U \cap (X \times \{0\}) &= U_X \times \{0\} \text{ com } U_X \in \tau_X \\ U \cap (Y \times \{1\}) &= U_Y \times \{1\} \text{ com } U_Y \in \tau_Y. \end{aligned}$$

Proposição 9. *i. $X \times \{0\}, Y \times \{1\}$ são conjuntos abertos e fechados em $X+Y$; ii. Dadas as inclusões $i_X : X \to X+Y$ com $i(x) = (x,0)$ e $i_Y : Y \to X+Y$ com $i(y) = (y,1)$, tem-se que $X \stackrel{i_X}{\to} i_X(X)$ define um homeomorfismo de X em sua imagem $i(X)$, assim como $Y \stackrel{i_Y}{\to} i_Y(Y)$ define um homeomorfismo de Y em $i(Y)$.*

Demonstração 9. i. Observe que

$$(X \times \{0\}) \cap (X \times \{0\}) = X \times \{0\} \text{ com } X \in \tau_X$$

e

$$(X \times \{0\}) \cap (Y \times \{1\}) = \phi \times \{1\} \text{ com } \phi \in \tau_Y.$$

Dessa forma, $X \times \{0\}$ é aberto em $X+Y$. Também

$$(Y \times \{1\}) \cap (X \times \{0\}) = \phi \times \{0\} \text{ com } \phi \in \tau_X$$

$$(Y \times \{1\}) \cap (Y \times \{1\}) = Y \times \{1\} \text{ com } Y \in \tau_Y.$$

Assim, $Y \times \{1\}$ é aberto em $X+Y$. Note agora que

$$\begin{aligned} (X+Y) - X \times \{0\} &= (X \times \{0)\}) \cup (Y \times \{1\}) - X \times \{0\} \\ &= Y \times \{1\} \in \tau_{X+Y}. \end{aligned}$$

Analogamente, $Y \times \{1\}$ é fechado em τ_{X+Y}.

ii. Seja i_X como no enunciado. Note que

$$i_X(X) = \{(x,0); x \in X\} = X \times \{0\}.$$

Logo, $i_X(X) \subset X+Y$. Seja $\tau_{i_X(X)}$ a topologia subespaço em $X+Y$. Por definição os abertos desta topologia são do tipo $i_X(X) \cap U$, com $U \in \tau_{X+Y}$. Daí,

$$\begin{aligned} i_X(X) = X \times \{0\} \implies i_X(X) \cap U &= (X \times \{0\}) \cap U \\ &= U_X \times \{0\} \text{ com } U_X \in \tau_X \end{aligned}$$

Isto é, caracterizamos a topologia como

$$\tau_{i_X(X)} = \{U_X \times \{0\}; U_X \in \tau_X\}.$$

A bijetividade de $X \overset{i_X}{\to} i_X(X)$ segue diretamente da injetividade de $i_X : X \to X + Y$. Para verificar a continuidade de $X \overset{i_X}{\to} i_X(X)$, seja $U_X \times \{0\} \in \tau_{i_X(X)}$. Desta forma

$$i^{-1}(U_X \times \{0\}) = U_X \in \tau_X$$

implicando na continuidade de i_X. Finalizando, seja $U_X \in \tau_X$. Temos

$$i_X(X) = U_X \times \{0\} \in \tau_{i_X(X)}.$$

Então, i_X é função aberta. Portanto, conclui-se que $X \overset{i_X}{\to} i_X(X)$ é homeomorfismo. De maneira análoga, prova-se que $Y \overset{i_Y}{\to} i_Y(Y)$ é homeomorfismo. ■

2.2 Espaços obtidos por colagem

Sejam X e Y espaços topológicos e considere a união disjunta $X+Y$. Dados $A \subset X$ fechado e $f : A \to Y$ contínua, uma relação de equivalência é definida em $X+Y$ pondo:

$$\sim := \begin{cases} (x_1,0) \sim (x_2,0) & \text{se } x_1 = x_2 \text{ ou } f(x_1) = f(x_2); \\ (x,0) \sim (y,1) & \text{se } f(x) = y; \\ (y_1,1) \sim (y_2,1) & \text{se } y_1 = y_2. \end{cases}$$

As classes de equivalência são dadas por:

$[(x,0)] = \{(x,0)\}$ se $x \in X \setminus A$;

$[(y,1)] = \{(y,1)\}$ se $y \in Y \setminus f(A)$;

$[(x,0)] = \{(x',0), (f(x),1); f(x') = f(x),\ x' \in A\}$ se $x \in A$;

$[(y,1)] = \{(y,1), (x,0); f(x) = y,\ x \in A\}$ se $y \in f(A)$.

Claramente, todas essas classes estão em $X+Y/\sim$. Note que se $f(x) = y$ então $[(x,0)] = [(y,1)]$.

Considere a projeção canônica $\pi : X+Y \to X+Y/\sim$. Define-se a *colagem de X em Y pela f* como sendo o espaço definido por

$$Y \cup_f X := (X+Y/\sim, \tau_{Y\cup_f X})$$
$$\tau_{Y\cup_f X} := \tau_{X+Y/\sim}$$

Proposição 10. *Sejam $f : A \subset X \to Y$ contínua e A conjunto fechado. Considere também $Y \cup_f X$, então*

i. $i_Y^* = \pi \circ i_Y : Y \to Y \cup_f X$ é um mergulho topológico;

ii. $i_Y^*(Y)$ é um subespaço fechado de $Y \cup_f X$.

Demonstração 10. i. Para verificar que i_Y^* é mergulho deve-se mostrar que quando $i_Y^*(Y)$ é munido da topologia subespaço de $Y \cup_f X$ tem-se $i_Y^* : Y \to i_Y^*(Y)$ homeomorfismo. Primeiramente verificaremos a bijetividade. Sejam $y_1, y_2 \in Y$ e suponha $i_Y^*(y_1) = i_Y^*(y_2)$, logo

$$[(y_1,1)] = [(y_2,1)] \implies (y_1,1) \sim (y_2,1),$$

desta forma $y_1 = y_2$. Quanto a sobrejetividade, basta notar que $i_Y^*(Y)$ é contradomínio de i_Y^*. Quanto ao homeomorfismo, devemos inicialmente verificar a continuidade de

$$i_Y^* : (Y, \tau_Y) \to (i_Y^*(Y), \tau_{i_Y^*(Y)}).$$

Pela Proposição 9, a função i_Y é contínua, bem como $\pi : X + Y \to (X+Y)/\sim$. Então, $i_Y^* = \pi \circ i_Y$ será contínua, devido à composição. Para verificar que i_Y^* é função aberta, dado $V \in \tau_Y$ deve-se mostrar que

$$i_Y^*(V) \in \tau_{i_Y^*(Y)} \text{ , ou seja, } i_Y^*(V) = i_Y^*(Y) \cap U \text{ com } U \in \tau_{(X+Y)/\sim}.$$

O conjunto U deve ser exibido. Da definição de $\tau_{(X+Y)/\sim}$, U deve satisfazer $\pi^{-1}(U) \in \tau_{X+Y}$. Tem-se

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(i_Y^*(V)) &= \pi^{-1}(i_Y^*(Y) \cap U) \\ &= \pi^{-1}(i_Y^*(Y)) \cap \pi^{-1}(U). \end{aligned}$$

Partindo desse ponto, identificaremos como deve ser a forma do conjunto U. Seja $V \in \tau_Y$. Escrevamos

$$\begin{aligned} V &= (V \cap f(A)) \cup (V \setminus f(A)) \\ &\Longrightarrow i_Y^*(V) = \{[(y,1)]; y \in V \cap f(A)\} \cup \{[(y,1)]; y \in V \setminus f(A)\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} y \in V \cap f(A) &\Longrightarrow [(y,1)] = \{(y,1); y \in f(A) \cap V\} \cup \{(x,0); x \in A, f(x) = y\}, \\ y \in V \setminus f(A) &\Longrightarrow [(y,1)] = \{(y,1); y \in V \setminus f(A)\}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(i_Y^*(V)) &= \pi^{-1}(\{[(y,1)]; y \in V \cap f(A)\} \cup \{[(y,1)]; y \in V \setminus f(A)\}) \\ &= \pi^{-1}(\{[(y,1])]; y \in V \cap f(A)\}) \cup \pi^{-1}(\{[(y,1)]; y \in V \setminus f(A)\}) \\ &= \{(x,0); f(x) = y,\ y \in V \cap f(A)\} \cup \{(y,1); y \in V \cap f(A)\} \cup \{(y,1); y \in V \setminus f(A)\} \\ &= \{(x,0); x \in f^{-1}(V \cap f(A))\} \cup \{(y,1); y \in V\} \\ &= i_Y(V) \cup i_X(f^{-1}(V \cap f(A))) \\ &= i_Y(V) \cup i_X(f^{-1}(V)) \end{aligned}$$

Como $f : A \subset X \to Y$ é contínua, $V \in \tau_Y$ implica $f^{-1}(V) \in \tau_A$ (como usualmente entendido, aqui temos que τ_A refere-se a topologia subespaço em X) e assim existe

$$W_X \in \tau_X \text{ tal que } f^{-1}(V) = W_X \cap A.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(i_Y^*(V)) &= i_Y(V) \cup i_X(W_X \cap A)\\ &= i_Y(V) \cup \big(i_X(W_X) \cap i_X(A)\big) \ \text{(pois } i_X \text{ é injetiva)}\\ &= (i_Y(V) \cup i_X(W_X)) \cap (i_Y(V) \cup i_X(A))\\ &= (i_Y(V) \cup i_X(W_X)) \cap (i_Y(Y) \cup i_X(A)).\end{aligned}$$

Note que na última linha passamos de $i_Y(V)$ a $i_Y(Y)$, o que é justificado lembrando que $i_X(W_X) \subset X \times \{0\}$, $i_X(A) \subset X \times \{0\}$, $i_Y(V) \subset Y \times \{1\}$, $i_Y(Y) = Y \times \{1\}$.

Analogamente,

$$\begin{aligned} Y &= (Y \cap f(A)) \cup (Y \setminus f(A))\\ &\implies i_Y^*(Y) = \{[(y,1)]; y \in Y \cap f(A)\} \cup \{[(y,1)]; y \in Y \setminus f(A)\}\\ &\implies \pi^{-1}(i_Y^*(Y)) = \pi^{-1}\big(\{[(y,1)]; y \in Y \cap f(A)\}\big) \cup \pi^{-1}\big(\{[(y,1)]; y \in Y \setminus f(A)\}\big)\\ &\qquad = \{(x,0); x \in f^{-1}(Y \cap f(A))\} \cup \{(y,1); y \in Y \cap f(A)\} \cup \{(y,1); y \in Y \setminus f(A)\}\\ &\qquad = \{(x,0); x \in f^{-1}(Y \cap f(A))\} \cup \{(y,1); y \in Y\}\\ &\qquad = i_X(f^{-1}(Y \cap f(A)) \cup i_Y(Y)\\ &\qquad = i_X(A) \cup i_Y(Y) \ \text{(pois obviamente } f^{-1}(Y \cap f(A)) = f^{-1}(Y) = A).\end{aligned}$$

Com esta igualdade tem-se

$$\pi^{-1}(i_Y^*(V)) = (i_Y(V) \cup i_X(W_X)) \cap \pi^{-1}(i_Y^*(Y)).$$

Conforme argumento anterior, identificamos U a partir de

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(U) &= i_Y(V) \cup i_X(W_X)\\ &= (V \times \{1\}) \cup (W_X \times \{0\}).\end{aligned}$$

Mas, como π é sobrejetora

$$U = \pi(i_Y(V) \cup i_X(W_X)).$$

Note ainda que

$$\pi^{-1}(U) \cap (X \times \{0\}) = W_X \times \{0\} \text{ com } W_X \in \tau_X.$$

De forma parecida,

$$\pi^{-1}(U) \cap (Y \times \{1\}) = V \times \{1\} \text{ com } V \in \tau_Y.$$

Desses dois últimos fatos $\pi^{-1}(U) \in \tau_{X+Y}$ e, assim, $U \in \tau_{(X+Y)/\sim}$. Para concluir resta ver que $i_Y^*(V) = i_Y^*(Y) \cap U$. De fato,

$$\begin{aligned} i_Y^*(V) &= \pi(i_Y(V)) \\ &= \pi(i_Y(V) \cap i_Y(Y)) \\ &= \pi(i_Y(Y) \cap (i_Y(V) \cup i_X(W_X))), \end{aligned}$$

já que $i_Y(Y) \cap i_X(W_X) = \phi$.

Usaremos a seguir o resultado

$$f(A - B) \cap f(B) = \phi \implies f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \ (*)$$

Note que

$$i_Y(Y) - (i_Y(V) \cup i_X(W_X)) = i_Y(Y) - i_Y(V)$$

e

$$i_Y(Y) - i_Y(V) = \{(y,1); y \in Y \setminus V\} \implies \pi(i_Y(Y) - i_Y(V)) = \{[(y,1)]; y \in Y \setminus V\} \ (2*)$$

Temos também

$$\begin{aligned} i_Y(V) \cup i_X(W_X) &= \{(y,1); y \in V\} \cup \{(x,0); x \in W_X\}; \\ \implies \pi(i_Y(V) \cup i_X(W_X)) &= \{[(y,1)]; y \in V\} \cup \{[(x,0)]; x \in W_X\} \\ &= \{[(y,1)]; y \in V\} \cup \{[(x,0)]; x \in W_X \setminus A\} \cup \{[(x,0)]; x \in W_X \cap A\} \\ &= \{[(y,1)]; y \in V\} \cup \{[(x,0)]; x \in W_X \setminus A\} \cup \{[(y,1)]; y \in f(W_X \cap A)\} \\ &= \{[(y,1)]; y \in V\} \cup \{[(x,0)]; x \in W_X \setminus A\} \ (3*). \end{aligned}$$

Segue que

$$\pi\Big(i_Y(Y) - \big(i_Y(V) \cup i_X(W_X)\big)\Big) \cap \pi\big(i_Y(V) \cup i_X(W_X)\big) = \pi\Big(i_Y(Y) - i_Y(V)\Big) \cap \pi\big(i_Y(V) \cup i_X(W_X)\big)$$

De $(*)$ e $(2*)$ temos que

$$\pi\Big(i_Y(Y) - \big(i_Y(V) \cup i_X(W_X)\big)\Big) \cap \pi\big(i_Y(V) \cup i_X(W_X)\big) = \phi$$

e de $(*)$ segue que

$$\pi\Big(i_Y(Y) \cap \big(i_Y(V) \cup i_X(W_X)\big)\Big) = \pi(i_Y(Y)) \cap \pi(i_Y(V) \cup i_X(W_X))$$

Logo,

$$\begin{aligned} i_Y^*(V) &= \pi\big(i_Y(Y) \cap (i_Y(V) \cup i_X(W_X)\big) \\ &= \pi(i_Y(Y)) \cap \pi(i_Y(V) \cup i_X(W_X)) \\ &= i_Y^*(Y) \cap U. \end{aligned}$$

$$\pi(i_Y(Y) - i_Y(V)) \cap \pi((i_Y(V) \cup i_X(W_X)) = \phi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} i_Y^*(V) &= \pi(i_Y(Y) \cap (i_Y(V) \cup i_X(W_X)) \\ &= \pi(i_Y(Y)) \cap \pi(i_Y(V) \cup i_X(W_X)) \\ &= i_Y^*(Y) \cap U. \end{aligned}$$

Sendo $U \in \tau_{(X+Y)/\sim}$ segue que $i_Y^*(V) \in \tau_{i_Y^*}$, isto é, i_Y^* é função aberta e portanto mergulho.

ii. Veja que $i_Y^*(Y)$ é fechado em $Y \cup_f X$. Conforme visto

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(i_Y^*(Y)) &= i_Y(Y) \cup i_X(A) = (Y \times \{1\}) \cup (A \times \{0\}) \\ &\implies \begin{cases} \pi^{-1}(i_Y^*(Y)) \cap (A \times \{0\}) &= A \times \{0\} \text{ com A fechado em } \tau_X \\ \pi^{-1}(i_Y^*(Y)) \cap (Y \times \{1\}) &= Y \times \{1\} \text{Y fechado em } \tau_Y. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $i_Y^*(Y)$ é fechado em $Y \cup_f X$. ■

Proposição 11. *Seja $f : A \subset X \to Y$, com conjunto fechado. Considere $Y \cup_f X$, então*

i.$i_X^* : X \setminus A \to Y \cup_f X$ é um mergulho topológico;

ii.$i_X^*(X \setminus A)$ é um conjunto aberto.

Demonstração 11. Será empregado um raciocínio semelhante ao usado para verificar o resultado anterior.

(i) Seja $i_X^* : X \setminus A \to i_X^*(X)$. Sejam $x_1, x_2 \in X \setminus A$. Suponha $i_X^*(x_1) = i_X^*(x_2)$. Então

$$[(x_1, 0)] = [(x_2, 0)] \implies (x_1, 0) \sim (x_2, 0) \implies x_1 = x_2,$$

isto é, i_X^* é injetora. A sobrejetividade é imediata.
Conforme a Proposiçao 9, $i_X : X \to i_X(X)$ é homeomorfismo e $\pi : X + Y \to (X + Y)/\sim$ é contínua. Logo, $i_X^* = \pi \circ i_X$ é contínua.
Falta verificar que é função aberta. Seja $V \in \tau_{X \setminus A}$. Como A é fechado, então seu

complementar $X \setminus A$ é aberto. Logo,

$$V \in \tau_{X\setminus A} \leftrightarrow V \in \tau_X.$$

O fato a ser verificado é o seguinte: $i_X^*(V) \in \tau_{i_X^*(X\setminus A)}$, ou seja,

$$i_X^*(V) = i_X^*(X \setminus A) \cap U, \text{ com } U \in \tau_{(X+Y)/\sim}.$$

Note que

$$\begin{cases} i_X^*(V) & = \{[(x,0)]; x \in V \subset X \setminus A\} \\ i_X^*(X \setminus A) & = \{[(x,0)]; x \in X \setminus A\}. \end{cases}$$

Em ambos os casos $[(x,0)] = \{(x,0)\}$ com $x \in X \setminus A$. Segue então que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(i_X^*(V)) & = \pi^{-1}(i_X^*(X \setminus A)) \cap \pi^{-1}(U) \\ & \implies V \times \{0\} = (X \setminus A \times \{0\}) \cap \pi^{-1}(U). \end{aligned}$$

Como $V \subset X \setminus A$, identifica-se $\pi^{-1}(U) = V \times \{0\}$.

Da sobrejetividade,

$$U = \pi(V \times \{0\}) = \{[(x,0)]; x \in V\} = i_X^*(V).$$

Agora

$$\begin{cases} \pi^{-1}(U) \cap (X \times \{0\}) & = (V \times \{0\}) \cap (X \times \{0\}) = V \times \{0\}, V \in \tau_X \\ \pi^{-1}(U) \cap (Y \times \{1\}) & = (V \times \{0\}) \cap (Y \times \{1\}) = \phi \end{cases}$$

$$\implies \pi^{-1}(U) \in \tau_{X+Y} \implies U \in \tau_{(X+Y)/\sim}$$

Sendo $U = i_X^*(V)$

$$\begin{aligned} i_X^*(V) & = \{[(x,0)]; x \in V \subset X \setminus A\} \\ & = \{[(x,0)]; x \in X \setminus A\} \cap \{[(x,0)]; x \in V \ \subset X \setminus A\} \\ & = i_X^*(X \setminus A) \cap i^*(V) \\ & = i_X^*(X \setminus A) \cap U. \end{aligned}$$

Assim, tal escolha de U satisfaz as hipóteses e $i_X^*(V)$ é aberto em $i_X^*(X \setminus A)$. Portanto, a função é aberta e verifica-se o mergulho topológico.

(ii) Para ver que $i_X^*(X \setminus A)$ é conjunto aberto, perceba

$$\begin{aligned} i_X^*(X \setminus A) \quad &= \{[(x,0)]; x \in X \setminus A\} \\ &\implies \pi^{-1}(i_X^*(X \setminus A)) = X \setminus A \times \{0\}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(i_X^*(X \setminus A)) \cap (X \times \{0\}) \quad &= (X \setminus A \times \{0\}) \cap (X \times \{0\}) \\ &= X \setminus A \times \{0\}, \text{ com } X \setminus A \in \tau_X \\ \pi^{-1}(i_X^*(X \setminus A)) \cap (Y \times \{1\}) \quad &= (X \setminus A \times \{0\}) \cap (Y \times \{1\}) \\ &= \phi. \end{aligned}$$

Assim, $\pi^{-1}(i_X^*(X \setminus A))$ é aberto em $X + Y$ e, portanto, $i_X^*(X \setminus A)$ é aberto em $Y \cup_f X$. ■

CAPÍTULO 3

Os mapeamentos cônico e cilíndrico

3.1 Mapeamentos cônico e cilíndrico

Dado um espaço X, imaginemos (ainda que abstratamente) que ele seja uma região do plano. Geometricamente, $X \times [0,1]$ seria visto então como sendo a região constituída por um cilindro tendo o espaço X (na verdade $X \times \{0\}$) por base e o intervalo $[0,1]$ por altura. Ocorre então que, dada uma função $f : X \to Y$, tem-se induzido uma função $f_0 : X \times \{0\} \subset X \times [0,1] \to Y$, $f_0(x,0) := f(x)$ que permite identificar a base do cilindro $X \times I$ com o espaço Y. Repetindo aqui a construção do espaço $Y \cup_f X$, com $X \times I$ no lugar de X, $X \times \{0\}$ no lugar de A e f_0 no lugar de f, obtemos o espaço $Y \cup_{f_0} (X \times I)$ que chamamos de mapeamento cilíndrico da f. A importância deste espaço (bem como o de outro espaço que iremos construir, o chamado mapeamento cônico da f) é evidente em homotopia auxiliando na identificação de mapeamentos homotopicamente equivalentes entre dois espaços X e Y.

Definição 7. Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma função contínua e $f_0 : X \times \{0\} \subset X \times I \to Y$ uma função definida como $f_0(x,0) := f(x)$. O *mapeamento cilíndrico de f* é definido como sendo o espaço $M_f := Y \cup_{f_0} (X \times I)$ com topologia $\tau_{M_f} := \tau_{(X \times I + Y)/\sim}$.

Observe que as classes de equivalência determinadas em $(X \times I) + Y$ por $\sim$ via $f_0 : X \times \{0\} \to Y$ são

$[((x,0),0)] = \{((x',0),0),(f(x'),1); f(x') = f(x)\}$

$[((x,t),0)] = \{((x,t),0); 0 < t \leqslant 1\}$

$[(y,1)] = \{(y,1); y \in Y \setminus f(X)\}$

$[(y,1)] = \{(y,1),((x,0),0); f(x) = y\}.$

Note que

$$[((x,0),0)] = [(y,1)] \text{ se } y = f(x).$$

Um esboço é dado por [1]:

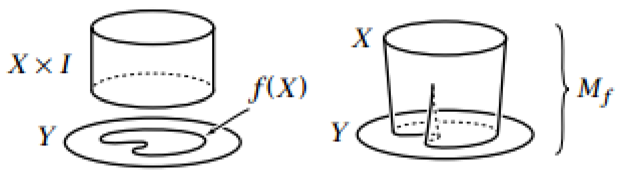


Figura 6: Mapeamento Cilíndrico

Proposição 12. *$X \sim X \times \{1\}$ é um mergulho topológico em M_f como espaço fechado.*

Demonstração 12. Primeiramente deve-se caracterizar a topologia de $X \times \{1\}$. Com este propósito, observe que

$$\begin{aligned} \tau_{X \times I} &= \{U_X \times ((a,b) \cap I); U_X \in \tau_X\} \\ \tau_{X \times \{1\}} &= \{(U_X \times ((a,b) \cap I)) \cap (X \times \{1\}); U_X \in \tau_X, (a,b) \in \tau_{\mathbb{R}}\}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} (U_X \times ((a,b) \cap I)) \cap (X \times \{1\}) &= (U_X \cap X) \times ((a,b) \cap I \cap \{1\}) \\ &= U_X \times \{1\}. \end{aligned}$$

O que leva a caracterizar

$$\tau_{X \times \{1\}} = \{U_X \times \{1\}; U_X \in \tau_X\}.$$

[1]Figura 6 proveniente de [4].

O próximo passo é construir o mergulho propriamente dito. Considere a inclusão

$$i : X \times \{1\} \to (X \times I) + Y \text{ com } i(x,1) = ((x,1),0)$$

e defina a função

$$i^* := \pi \circ i : X \times \{1\} \to M_f = ((X \times I) + Y)/\sim \text{ em que } i^*(x,1) = [((x,1),0)].$$

(Note que esta função i desempenha um papel semelhante ao da função denotada por i_X na proposição 9.) Desta forma

$$\begin{aligned} i^*(X \times \{1\}) &= \{[((x,1),0)]; x \in X\} \subset ((X \times I) + Y)/\sim \\ \tau_{i^*(X\times\{1\})} &= \big\{U \cap i^*(X \times \{1\}); U \in \tau_{((X\times I)+Y/\sim)}\big\}. \end{aligned}$$

Mas $\pi : (X \times I) + Y \to \big((X \times I) + Y\big)/\sim$, e assim o conjunto U acima é tal que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) \cap ((X \times I) \times \{0\}) &\equiv V_{X\times I} \times \{0\} \text{ com } V_{X\times I} \in \tau_{X\times I} \\ \pi^{-1}(U) \cap (Y \times \{1\}) &\equiv V_Y \times \{1\} \text{ com } V_Y \in \tau_Y. \end{aligned}$$

É imediato que i^* é bijeção. A continuidade é assegurada pelo que segue. Seja

$$U \cap i^*(X \times \{1\}) \in \tau_{i^*(X\times\{1\})}; U \in \tau_{((X\times I)+Y)/\sim},$$

logo,

$$\begin{aligned} i^{*-1}(U \cap i^*(X \times \{1\})) &= i^{-1} \circ \pi^{-1}(U \cap i^*(X \times \{1\})) \\ &= i^{-1} \circ \pi^{-1}(U \cap \{[((x,1),0)]; x \in X\}) \\ &= i^{-1}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}\{[((x,1),0)]; x \in X\}) \\ &= i^{-1}\big(\pi^{-1}(U) \cap \big((X \times \{1\}) \times \{0\}\big)\big) \\ &= i^{-1}\big(\pi^{-1}(U) \cap ((X \times I) \times \{0\}) \cap ((X \times \{1\}) \times \{0\})\big). \end{aligned}$$

Como π é contínua e $U \in \tau_{((X\times I)+Y)/\sim}$, então $\pi^{-1}(U) \in \tau_{(X\times I)+Y}$ e

$$\pi^{-1}(U) \cap \big((X \times I) \times \{0\}\big) \equiv U_{X\times I} \times \{0\} \text{ com } U_{X\times I} \in \tau_{X\times I}.$$

Voltando à cadeia de igualdades identificamos

$$\begin{aligned} i^{-1} \circ \pi^{-1}(U \cap i^*(X \times \{1\})) &= i^{-1}\big((U_{X\times I} \times \{0\}) \cap \big((X \times \{1\}) \times \{0\}\big)\big) \\ &= i^{-1}\big((U_{X\times I} \cap (X \times \{1\})) \times \{0\}\big). \end{aligned}$$

Mas temos que

$$U_{X\times I} = U_X \times ((a,b) \cap I), U_X \in \tau_X.$$

Assim,

$$\begin{aligned} U_{X\times I} \cap (X \times \{1\}) &= \big(U_X \times ((a,b) \cap I)\big) \cap (X \times \{1\}) \\ &= (U_X \cap X) \times ((a,b) \cap I \cap \{1\}) \\ &= U_X \times \{1\}. \end{aligned}$$

Finalizando,

$$\begin{aligned} i^{-1} \circ \pi^{-1}(U \cap i^*(X \times \{1\})) &= i^{-1}((U_X \times \{1\}) \times \{0\}) \\ &= U_X \times \{1\} \in \tau_{X\times\{1\}}, \end{aligned}$$

isto é, i^* é contínua.

O próximo item a ser verificado é que i^* é função aberta relativa à topologia $\tau_{i^*(X\times\{1\})}$. Dado $U_X \times \{1\} \in \tau_{X\times\{1\}}$ com $U_X \in \tau_X$, temos

$$i^*(U_X \times \{1\}) = \{[((x,1),0)]; x \in U_X\}.$$

Deve-se mostrar que

$$i^*(U_X \times \{1\}) \in \tau_{i^*(X\times\{1\})},$$

isto é,

$$\begin{aligned} i^*(U_X \times \{1\}) &= \tilde{U} \cap i^*(X \times \{1\}) \\ &= \tilde{U} \cap \{[((x,1),0)]; x \in X\} \end{aligned}$$

com $\tilde{U} \in \tau_{((X\times I)+Y)/\sim}$. Observe também que

$$\begin{aligned} i^*(U_X \times \{1\}) &= \{[((x,1),0)]; x \in U_X\} \\ &= \{[((x,t),0)]; x \in U_X, t \in (a,1]\} \cap \{[((x,1),0)]; x \in X\}, a > 0. \end{aligned}$$

Levando a identificar

$$\tilde{U} = \{[((x,t),0)]; x \in U_X, t \in (a,1], a > 0\}.$$

Aplicando π^{-1} obtém-se
$$\pi^{-1}(\tilde{U}) = (U_X \times (a, 1]) \times \{0\}.$$
Para ver que $\tilde{U}$ satizfaz às hipóteses, note que
$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\tilde{U}) \cap ((X \times I) \times \{0\}) &= ((U_X \times (a, 1]) \times \{0\}) \cap ((X \times I) \times \{0\}) \\ &= ((U_X \times (a, 1]) \cap (X \times I)) \times \{0\} \\ &= U_X \times (a, 1] \times \{0\}\end{aligned}$$
onde $U_X \times (a, 1] \in \tau_{X \times I}$. Analogamente,
$$\pi^{-1}(\tilde{U}) \cap (Y \times \{1\}) = \phi.$$
Assim,
$$\pi^{-1}(\tilde{U}) \in \tau_{((X \times I)+Y)} \implies \tilde{U} \in \tau_{((X \times I)+Y/\sim)}.$$
Fica assim verificado que a funçao é aberta, portanto, mergulho.

Por fim, resta mostrar que o mergulho é fechado. Para isto, deve-se verificar que $\pi^{-1}(i^*(X \times \{1\}))$ é fechado em $(X \times I) + Y$. De fato,
$$\begin{aligned}i^*(X \times \{1\}) &= \{[((x, 1), 0)]; x \in X\} \\ &\implies \pi^{-1}(i^*(X \times \{1\})) = (X \times \{1\}) \times \{0\}.\end{aligned}$$
Logo,
$$\begin{aligned}\pi^{-1}\big(i^*(X \times \{1\})\big) \cap ((X \times I) \times \{0\}) &= ((X \times \{1\}) \times \{0\}) \cap ((X \times I) \times \{0\}) \\ &= (X \times \{1\}) \times \{0\},\end{aligned}$$
com $X \times \{1\}$ fechado em $\tau_{X \times I}$. Também,
$$\begin{aligned}\pi^{-1}\big(i^*(X \times \{1\})\big) \cap (Y \times \{1\}) &= ((X \times \{1\}) \times \{0\}) \cap (Y \times \{1\}) \\ &= \phi \\ &= \phi \times \{1\}.\end{aligned}$$
Portanto, $\pi^{-1}(i^*(X \times \{1\}))$ é fechado em $(X \times I) + Y$, e daí $i^*(X \times \{1\})$ é fechado em M_f. ■

Obs: O que este resultado nos diz é que na construção do mapeamento cilindro temos que Y (na verdade $i_Y^*(Y)$) pode ser visto como um subespaço fechado de M_f.

Definição 8. Seja A um subespaço do espaço topológico (X, τ_X) e $f : X \to A$ uma função contínua. f é dita uma *retração* se $f(a) = a, \ \forall a \in A$. O espaço A é chamado uma *retração de X.*

Proposição 13. *$i_Y^*(Y)$ é uma retração de M_f*

Demonstração 13. Dado M_f, como foi visto da proposição 10, Y está mergulhado em M_f pela função $i_Y^* : Y \to i_Y^*(Y) \subset M_f$. Desta forma, afim de exibir a retração $M_f \to i_Y^*(Y)$, consideremos inicialmente a função $r : M_f \to Y$ definida por

$$u = \begin{cases} [((x,t),0)] \\ [(y,1)] \end{cases} \longmapsto r(u) := \begin{cases} r([((x,t),0)]) = f_0(x,0) = f(x) \\ r([(y,1)]) = y \end{cases}$$

e tomemos $\tilde{r} := i_Y^* \circ r$. Vamos mostrar que $\tilde{r}$ é uma retração.

Inicialmente, vemos que $\tilde{r}([(y,1)]) = i_Y^*(r([(y,1)])) = [(y,1)]$.

Observe que r é contínua. De fato. Seja $V \in \tau_Y$. Pela definiçao de r,

$$r^{-1}(V) = \{[(y,1)]; y \in Y\} \cup \{[((x,t),0)]; x \in f^{-1}(V), t \in I\}.$$

O cerne da questão é verificar que $\pi^{-1}(r^{-1}(V)) \in \tau_{(X \times I)+Y}$. Primeiramente,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(r^{-1}(V)) &= \pi^{-1}\Big(\{[(y,1)]; y \in Y\} \cup \{[((x,t),0)]; x \in f^{-1}(V), t \in I\}\Big) \\ &= \pi^{-1}(\{[(y,1)]; y \in Y\}) \cup \pi^{-1}(\{[((x,t),0)]; x \in f^{-1}(V), t \in I\}) \end{aligned}$$

onde se tem

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\{[(y,1)]; y \in Y\}) &= \{(f(x),1), ((x,0),0); x \in f^{-1}(V)\} \\ &= (V \times \{1\}) \cup \big((f^{-1}(V) \times \{0\}) \times \{0\}\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\{[((x,t),0)]; x \in f^{-1}(V), t \in I\}) &= \{((x,0),0), (f(x),1); x \in f^{-1}(V)\} \cup \\ &\cup \{((x,t),0); 0 < t \leqslant 1, x \in f^{-1}(V)\} \\ &= \big((f^{-1}(V) \times [0,1]) \times \{0\}\big) \cup \big(V \times \{1\}\big) \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(r^{-1}(V)) &= (V \times \{1\}) \cup \big((f^{-1}(V) \times \{0\}) \times \{0\}\big) \cup \\ &\cup \big((f^{-1}(V) \times [0,1]) \times \{0\}\big) \cup \big(V \times \{1\}\big) \\ &= \big((f^{-1}(V) \times [0,1]) \times \{0\}\big) \cup (V \times \{1\}). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(r^{-1}(V)) \cap \big((X \times I) \times \{0\}\big) &= \Big(\big((f^{-1}(V) \times I) \times \{0\}\big) \cup (V \times \{1\})\Big) \cap \\
&\cap \big((X \times I) \times \{0\}\big) \\
&= \Big(\big((f^{-1}(V) \times I) \times \{0\}\big) \cap \big((X \times I) \times \{0\}\big)\Big) \cup \\
&\cup \Big((V \times \{1\}) \cap \big((X \times I) \times \{0\}\big)\Big) \\
&= \big((f^{-1}(V) \times I) \times \{0\}\big) \cup \phi \\
&= (f^{-1}(V) \times I) \times \{0\},
\end{aligned}$$

com $(f^{-1}(V) \times I) \in \tau_{X \times I}$.

Também,

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(r^{-1}(V)) \cap (Y \times \{1\}) &= \Big(\big((f^{-1}(V) \times I) \times \{0\}\big) \cup (V \times \{1\})\Big) \cap \\
&\cap (Y \times \{1\}) \\
&= \Big(\big((f^{-1}(V) \times I) \times \{0\}\big) \cap (Y \times \{1\})\Big) \cup \\
&\cup \Big((V \times \{1\}) \cap (Y \times \{1\})\Big) \\
&= \phi \cup (V \times \{1\}) \\
&= V \times \{1\}, \text{ com } V \in \tau_Y
\end{aligned}$$

Portanto, $r^{-1}(V)$ é aberto em M_f, e assim r é contínua. Sendo i_Y^* contínua segue-se que $\tilde{r} = i_Y^* \circ r$ é contínua. Vemos então que $\tilde{r}$ é uma retração de M_f em $i_Y^*(Y)$. ■

Definimos agora o mapeamento cônico [2] da f.

Definição 9. Seja $f : X \to Y$ contínua e $M_f = Y \cup_{f_0} (X \times I)$. Define-se *mapeamento cônico* da f como $C_f := M_f/(X \times \{1\})$.

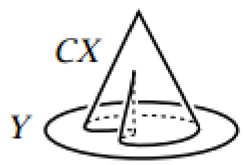


Figura 7: Mapeamento Cônico

Note que $X \times \{1\}$, a rigor, não é um subconjunto de M_f. Assim, seria mais exato escrever $M_f/i^*(X \times \{1\})$ ao invés de $M_f/X \times \{1\}$. Contudo, da proposição 12, temos

[2]Figura 7 proveniente de [4].

$X \times \{1\}$ está mergulhado em M_f de modo que identificamos $X \times \{1\}$ com $i^*(X \times \{1\})$ o que justifica então considerar C_f na forma dada.

O próximo, e último resultado, tem como intenção obter um meio de se saber quando uma funçao $M_f \to Z$ que leva um mapeamento cilíndrico em outro espaço é contínuo.

Proposição 14. *Uma função $g : M_f \longrightarrow Z$ é contínua se, e somente se, $g_1 := g \circ i^*_{X\times I} : X \times I \longrightarrow Z$ e $g_2 := g \circ i^*_Y : Y \longrightarrow Z$ são contínuas.*

Demonstração 14. Dado $g : M_f \to Z$ consideremos as funções $g_1 = g\circ i^*_{X\times I} : X\times I \to Z$ com $x \mapsto g_1(x) = g(i^*_{X\times I}(x)) = g([((x,t),0)])$ e $g_2(y) = g \circ i^*_Y : Y \to Z$ com $y \mapsto g_2(y) = g(i^*_Y(y)) = g([(y,1)])$.

Suponha que g é contínua. Já vimos do estudo anterior sobre colagem de espaços X e Y por meio de uma função $f : A \to Y$ que as funções $i^*_X : X \to Y \cup_f X$ e $i^*_Y : Y \to Y \cup_f X$ são contínuas. O mesmo raciocínio se aplica aqui para mostrar que, tratando da colagem de $X \times I$ e Y através de $f_0 : X \times \{0\} \to Y$, temos que $i^*_{X\times I} : X \times I \to M_f$ e $i^*_Y : Y \to M_f$ são funções contínuas. Como g é contínua e g_1 e g_2 são composiçoes de funções contínuas, segue a continuidade de g_1 e g_2.

Suponhamos agora que se tenha g_1 e g_2 funções contínuas. Seja $V \in \tau_Z$. Para mostar a continuidade de g deve-se mostrar que se tem $g^{-1}(V) \in \tau_{M_f}$, que consiste em mostrar que $\pi^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_{(X\times I)+Y}$, isto é,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(g^{-1}(V)) \cap ((X \times I) \times \{0\}) &= (U_X \times ((a,b) \cap I)) \times \{0\} \\ \pi^{-1}(g^{-1}(V)) \cap (Y \times \{1\}) &= U_Y \times \{1\}. \end{aligned}$$

A função g_1 é contínua, logo $g_1^{-1}(V) = i^{-1}_{X\times I}(\pi^{-1}(g^{-1}(V))) \equiv U_X \times ((a,b) \cap \{0\})$ com $U_X \in \tau_X$. Daí,

$$\begin{aligned} i^{-1}_{X\times I}\Big[\pi^{-1}(g^{-1}(V)) \cap \big((X \times I) \times \{0\}\big)\Big] &= i^{-1}_{X\times I}\big(\pi^{-1}(g^{-1}(V))\big) \cap i^{-1}_{X\times I}\big((X \times I) \times \{0\}\big) \\ &= \big[U_X \times \big((a,b) \cap I\big)\big] \cap (X \times I) \\ &= U_X \times \big((a,b) \cap I\big) \\ \therefore \pi^{-1}(g^{-1}(V)) \cap \big((X \times I) \times \{0\}\big) &= i_{X\times I}\Big(U_X \times \big((a,b) \cap I\big)\Big) \\ &= \Big(U_X \times \big((a,b) \cap I\big)\Big) \times \{0\} \end{aligned}$$

Como g_2 é contínua temos que $g_2^{-1}(V) = i_Y^{-1}(\pi^{-1}(g^{-1}(V))) \equiv U_Y$ com $U_Y \in \tau_Y$. Daí,

$$\begin{aligned} i_Y^{-1}\Big[\pi^{-1}(g^{-1}(V)) \cap \big(Y \times \{1\}\big)\Big] &= i_Y^{-1}\big(\pi^{-1}(g^{-1}(V))\big) \cap i_Y^{-1}\big(Y \times \{1\}\big) \\ &= U_Y \cap Y = U_Y \\ \pi^{-1}(g^{-1}(V)) \cap \big(Y \times \{1\}\big) &= i_Y(U_Y) = U_Y \times \{1\} \end{aligned}$$

Portanto

$$\pi^{-1}(g^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_{(X\times I)+Y} \implies g^{-1}(V) \in \tau_{M_f},$$

ou seja, g é contínua. Finalizando assim a prova. ■

Últimas considerações

Como pode-se ver ao longo deste trabalho, a noção muito intuitiva e singela de colar figuras pode ser também aplicada a estruturas puramente matemáticas e abstratas. No entanto, o maquinário matemático necessário é pesado e delicado. Foi mostrado como obter obter uma relação de equivalência a partir de um conjunto qualquer e como aquela se comporta quando queremos quocientar espaços colados.

Como afirmado na introdução, este trabalho serve para dar o salto da topologia dita geral para a algébrica, começando pelo estudo de homotopias. Tal passagem pode ser vista, em particular, com o mapeamento cilíndrico que em tal teoria tem desdobramentos e propriedades importantes. Além do amadurecimento matemático, obtido na abstração necessária a interpretação de alguns espaços quocientes menos triviais.

Referências

[1] G. E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer GTM 139, 1993.

[2] L. L. Elon *Elementos de Topologia Geral*. SBM, 2009.

[3] J. Dugundji. *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[5] K. Jänich. *Topology*. Springer, 1984.

[6] J. Dieudonné. *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*. Birkh¨auser, 1989.