Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Aplicações de Análise Funcional em Geometria

Trabalho de Conclusão de Curso

Clara Macêdo Lage

Florianópolis, 18 de dezembro de 2012

Clara Macêdo Lage

Aplicações de Análise funcional em Geometria

Ivan Pontual Costa e Silva

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Bacharel em Matemática e Computção Científica.

18 de fevereiro de 2012

Sumário

Introdução

Este trabalho de conclusão de curso foi desenvolvido ao longo do ano de 2012 e apresenta duas aplicações de Análise Funcional à Geometria Diferencial. O objetivo do trabalho, no entanto, foi desenvolver a habilidade da autora em pesquisa e aumentar seu conhecimento nas áreas envolvidas. Partimos de duas aplicações descritas de modo bastante sucinto no artigo "The inverse function theorem of Nash and Moser " de Hamilton [1], e procuramos os elementos matemáticos presentes na construção e resolução dos problemas, o que trouxe bastante interdisciplinaridade ao trabalho.

O primeiro e mais simples resultado que estudamos foi o teorema da função inversa, que já nos era conhecido, mas até então com aplicações bem mais simples. Este teorema nos diz que dada uma função f de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) entre espaços de Banach X e Y, tal que $f'(x_0)$ é um homeomorfismo linear para algum ponto $x_0 \in X$, podemos concluir que f é localmente invertível e sua inversa local possui a mesma classe de diferenciabilidade de f. Esse resultado é útil para investigar a existência e unicidade de soluções de certas EDP's não-lineares.

Para analisar a derivada de uma função definida em um espaço de Banach é necessário o estudo de operadores lineares em espaços de Banach. De forma geral, estamos interessados em provar que um operador é um homeomorfismo linear, para que satisfaça as condições do teorema da função inversa.

Uma classe de operadores com propriedades interessantes desse ponto de vista são os chamados operadores de Fredholm. Operadores de Fredholm possuem núcleo de dimensão finita, codimensão da imagem finita, e imagem fechada. Essas condições garantem uma certa proximidade desses operadores com operadores invertíveis, apesar de abranger um número bem maior de operadores.

A classe de operadores de Fredholm se mostra interessante pelo teorema da alternativa de Fredholm. Este teorema afirma que dado um operador Fredholm de índice zero, este será injetivo se e somente se for sobrejetivo. Alguns teoremas auxiliares facilitam a prova de que certos operadores são de Fredholm.

Uma estratégia geral é a seguinte: dados X, Y espaços de Banach em um determinado contexto, e uma função $f : X \to Y$ que desejamos que seja invertível (com inversa contínua e de mesma classe de diferenciabilidade do que f), utilizaremos o teorema da função inversa para provar o que queremos. O caminho mais natural é provarmos que para todo ponto $x \in X$, $f'(x)$ é um isomorfismo linear, e provarmos que f é bijetiva. Para provarmos que $f'(x)$ é um operador linear invertível, provamos primeiro que este é Fredholm de índice zero, e depois, utilizando a alternativa de Fredholm, provamos que ele é injetivo ou sobrejetivo, de acordo com as dificuldades impostas pelo problema.

Essa idéia foi aplicada em dois contextos diferentes neste trabalho. Em ambos foi utilizada a teoria de espaços de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, que são espaços de Banach. Utilizamos algumas imersões compactas que foram bastante úteis no decorrer da resolução dos problemas. A mais utilizada foi a imersão $i : C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ para $0 < \beta < \alpha < 1$.

Obviamente, a estratégia geral delineada acima envolveu, na prática, uma análise detalhada de diversos aspectos específicos de casa problema. Boa parte do trabalho foi de fato estudar os contextos específicos das aplicações. Os dois problemas propostos envolviam uma série conteúdos que não estão presentes no curso de graduação.

O primeiro problema estudado é o de perturbação de geodésicas em uma variedade Riemanniana, para o qual existem pontos a e b entre os quais há uma geodésica γ ligando-os. A pergunta é se podemos variar a e b e localmente ainda conseguirmos uma geodésica ligando esses pontos. Esse problema está relacionado à equação que define uma geodésica em uma variedade Riemanniana. Na teoria de equações diferenciais existem teoremas que, dadas algumas condições, demonstram a existência dessas geodésicas. Aqui utilizando o teorema da função inversa e a teoria de operadores de Fredholm, pudemos estudar pertubações dessas equações quanto às suas condições iniciais e seus parâmetros para resolver o problema.

O outro problema apresentado no trabalho é o problema de Plateau. Este famoso problema, busca encontrar a superfície de menor área dado um determinado bordo. Aqui nos restringimos ao caso em que o bordo é o gráfico de uma função. Muitos elementos de equações diferenciais parciais entraram no estudo do problema de Plateau, tais como: método de Perron, o Princípio do Máximo para equações quase-lineares elípticas, regularidade de soluções clássicas para o problema do Laplaciano e o método da continuidade.

Este trabalho contém quatro capítulos e um apêndice. O primeiro capítulo apresenta o teorema da função inversa para espaços de Banach. O segundo capítulo trata dos pré-requisitos em Análise Funcional necessários para o entendimento da solução dos problemas propostos; boa parte do capítulo dedica-se ao estudo de operados de Fredholm. O terceiro capítulo começa apresentando o problema da perturbação de geodésicas e introduzindo as idéias que preciamos para resolvê-lo. Nele são apresentados alguns elementos de geometria necessários para entendermos o problema, tais como: variedades diferenciáveis, espaços tangentes, métrica Rieamanniana, conexões e geodésicas. O quarto capítulo trata do problema de Plateau, além de apresentar e resolver o problema, também são apresentados os elementos matemáticos necessários para entendê-lo e revolvê-lo a partir do modelo proposto. Por fim, no apêndice apresentamos demonstrações que não entraram no texto para que não nos desviassemos demais do objetivo principal e para melhor organização do trabalho.

Capítulo 1

O teorema da função inversa para espaços de Banach

Neste capítulo X, Y serão sempre espaços de Banach. Será assumida a teoria básica de diferenciabilidade nesses espaços como expostos em [12].

Definicão 1.1. Sejam $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos. Um difeomorfismo de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ entre U e V, é uma bijeção $f : U \to V$ de classe C^k cuja inversa é de classe C^k.

Estamos interessados em saber quando uma bijeção de classe C^k é um difeomorfismo. Um exemplo comum de que isso nem sempre é verdade é $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, que é C^∞ mas sua inversa não é sequer diferenciável no ponto 0.

Exemplo 1.2. *A aplicação* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y)$ *é de classe* C^∞. *A matriz jacobiana de* f *no ponto* (x, y) *tem a forma:*

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

O determinante do jacobiano de f *é* $e^{2x} \neq 0$. *Ora,* f *não é injetiva:* $f(x_1, y_1) = f(x'_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ *e* $y_2 = y_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *Também temos* $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. *Entretanto veremos adiante que* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *existem abertos* U *e* V *tais que* $f|_U U \to V$ *é difeomorfismo de classe* C^∞.

Definicão 1.3. Seja (M, d) um espaço métrico. $P : M \to M$ é dita ser uma contração, se existe $\rho \in [0, 1)$ tal que

$$d(P(x), P(y)) \leq \rho d(x, y), \qquad \forall x, y \in U$$

Teorema 1.4. *(**Teorema do ponto fixo para contrações**) Seja* M *um espaço métrico completo e* $P : M \to M$ *uma contração. Então existe um único* $x \in M$, *tal que* $P(x) = x$.

Demonstração. Seja $x_0 \in M$, defina uma sequência $\{x_n\} \subset M$ tal que $x_1 = p(x_0)$ e $x_n = P(x_{n-1})$ para $n > 1$. Então $d(x_{n+1}, x_n) \leq \rho^n d(x_1, x_0)$. Como $\sum \rho^n$ é convergente para $\rho < 1$, verificamos que a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy. Como o espaço métrico é completo, temos que $x_n \to x$, para algum $x \in M$. $d(P(x_n), x_n) = d(x_{n+1}, x_n) \Rightarrow d(P(x), x) = 0$, então $P(x) = x$. Se existirem dois pontos x_1, x_2 tal que $P(x_1) = x_1$ e $P(x_2) = x_2$ então, se $d(x_1, x_2) \neq 0$,

$$d(x_1, x_2) = d(P(x_1), P(x_2)) \leq \rho d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2),$$

uma contradição.

$\square$

Corolário 1.5. *Sejam M e N espaços métricos com M completo e $P : M \times N \to M$ contínuo satisfazendo:*

$$d_M(P(x_1, y), P(x_2, y)) \leq \rho d(x_1, x_2),$$

para algum $0 \leq \rho < 1$. Então para todo $y \in N$ existe um único $x_y \in M$ tal que $P(x_y, y) = x_y$. Se considerarmos $S : N \to M$ a função $S : N \to M$ tal que $S(y) = x_y$ então S é contínua.

Demonstração. Só precisamos demonstrar que S é contínua. Escolhemos um $x_0 \in M$. Para cada y, seja $x_{n+1}^y = P(x_n^y, y)$, $x_1^y = x_0$. Então a função $S_n : N \to M$, tal que $S_n(y) = x_n^y$ é contínua pois P é contínua. Queremos ver que $S_n \to S$, isso fica claro pela desigualdade:

$$d(S_{n+1}(y), S_n(y)) \leq d(S_1(y), S_0(y))\rho^n = C(y)\rho^n.$$

Em que $C : Y \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Então $S_n \mapsto S$ uniformemente em uma vizinhança de qualquer $y_0 \in Y$ fixado. Segue então que S é contínua.

$\square$

Lema 1.6. *Suponha que $f : U \subset X \to X$ satisfaz $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$. com $\lambda \in [0, 1)$. Se U contém a bola fechada $B[a, r]$, tal que $a \in U$ e $\|f(a) - a\| \leq (1 - \lambda)r$, então f admite um ponto fixo em $B[a, r]$.*

Demonstração. Basta provar que $f(B[a, r]) \subset B[a, r]$. Para isso, observamos que

$$x \in B[a, r] \Rightarrow \|x - a\| \leq r \Rightarrow \|f(x) - a\| \leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(a) - a\| \leq \lambda\|x - a\| + (1 - \lambda)r \leq r.$$

$\square$

Teorema 1.7. ***(Teorema da perturbação da identidade.)*** *Seja $\varphi : U \subset X \to X$, para U aberto, uma contração. A aplicação $f : U \to X$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre o conjunto aberto $f(U) \subset X$. Além disso, se $U = X$ temos $f(U) = X$.*

Demonstração. Para $x, y \in U$ quaisquer, temos:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y + \varphi(x) - \varphi(y)\| \geq \|x - y\| - \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geq \|x - y\| - \rho\|x - y\| = (1 - \rho)\|x - y\|,$$

com $0 < p < 1$. Daí segue que f é bijeção de U sobre $f(U)$, e que a aplicação inversa $f^{-1} : f(U) \to U$, cumpre a condição de Lipschitz $\|f^{-1}(w) - f^{-1}(z)\| \leq c\|w - z\|$, em que $c = \frac{1}{(1-\rho)}$. Isso implica que f é homeomorfismo de U sobre $f(U)$. Para provar que $f(U)$ é aberto seja $b \in f(U)$, ou seja $b = a + \varphi(a)$ para algum $a \in U$. Queremos mostrar que dado y suficientemente próximo de b, a equação $y = x + \varphi(x)$, possui solução. Recorreremos, novamente, a contrações. Seja $r > 0$ tal que $B[a, r] \subset U$, e fixe $y \in X$. Consideremos a aplicação

$$\xi_y : B[a, r] \to X$$

$$x \mapsto y - \varphi(x).$$

Então $\xi_y(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Notemos que ξ_y é uma contração para todo y. Então, pelo lema 1.6 ξ_y tem um ponto fixo se $||\xi_y(a) - a|| \leq (1-\rho)r$. Temos

$$\xi_y(a) - a = y - \varphi(a) - a = y - b.$$

Então desde que $||y - b|| \leq (1-\rho)r$, existe x' tal que $f(x') = y$, provando que $f(X)$ é aberto.

Para a segunda parte suponha $U = X$, $(x_n) \subset X$ e $b \in X$ com $f(x_n) \to y$. Temos:

$$||x_n - x_m|| = ||x_n + u(x_n) - \varphi(x_m) - x_m + \varphi(x_m) - \varphi(x_n)|| \leq ||f(x_n) - f(x_m)|| + \rho||x_n - x_m||$$

$$\therefore ||x_n - x_m|| \leq \tfrac{1}{1-\rho}||f(x_n) - f(x_m)|| \to 0.$$

(x_n) é de Cauchy, e $x_n \to x$ para algum $x \in X$. Logo $y = f(x)$ da continuidade de f, e $f(X)$ é portanto aberto e fechado em Y, isto é $f(X) = Y$.

□

Corolário 1.8. *Seja $U \subset X$ aberto e $f : U \to Y$ uma aplicação da forma: $f(x) = Tx + \varphi(x)$, em que $T : X \to Y$ é um homeomorfismo linear e $\varphi : U \to Y$ satisfaz $||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq \lambda||x - y||$, com $\lambda||T^{-1}|| < 1$. Então f é um homeomorfismo de U sobre o conjunto aberto $f(U) \subset X$. Se $U = X$, tem-se $f(U) = Y$.*

Demonstração. Considere a aplicação $\psi = T^{-1} \circ \varphi : U \subset X \to X$, temos que

$$||\psi(x) - \psi(y)|| = ||T^{-1}[\varphi(x) - \varphi(y)]|| \leq ||T^{-1}||||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq ||T^{-1}||\lambda||x - y||.$$

Como $||T^{-1}||\lambda < 1$, vemos que $\psi = T^{-1} \circ \varphi$ é uma contração. Sendo $T^{-1} \circ f = x + \psi$, seque do teorema acima que $T^{-1} \circ f$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $T^{-1}(f(U))$, donde f é um homeomorfismo de U em $f(U)$. Se $U = X$ então, pelo teorema 1.7, $(T^{-1} \circ f)(U) = X$, e $f(U) = T(X) = Y$.

□

Lema 1.9. *Seja $f : U \to V$, com $U \subset X$, $V \subset Y$, abertos um homeomorfismo. Se f é diferenciável em um ponto $a \in U$ e a derivada $f'(a) : X \to Y$ é um homeomorfismo lienar e o homeomorfismo inverso $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$.*

Demonstração. Para simplificar a notação escreveremos $g = f^{-1}$. Como o único candidato possível para derivada de g no ponto b é $f'(a)^{-1}$, escrevemos

$$g(b + w) - g(b) = f'(a)^{-1}w + s(w), \tag{1.1}$$

$\forall w \in Y$ tal que $b + w \in V$. Mostremos que $\lim_{w \mapsto 0} \frac{s(w)}{||w||} = 0$. Escrevemos $v = g(b+w) - g(b)$. Então $f(a+v) - f(a) = f([g(b) + g(b+w) - g(b)]) - b = f(g(b+w)) - b = b + w - b = w$. Como f e g são contínuas, $w \to 0$, se e somente se, $v \to 0$. A diferenciabilidade de f no ponto a nos dá:

$$f(a + v) - f(a) = f'(a).v + r(v), \text{ em que } \lim_{v \mapsto 0} \frac{r(v)}{||v||} = 0 \tag{1.2}$$

Na igualdade 1.1, substituimos o lado esquerdo por v, e no lado direito substituímos $w = f(a + v) - f(a)$ pela igualdade dada em 1.2. Ficamos com

$$v = v + f'(a).r(v) + s(w),$$

donde:

$$s(w) = -f'(a)^{-1}.r(v) \text{ e } \frac{s(w)}{\|w\|} = -f'(a)^{-1}.\frac{r(v)}{\|v\|}\frac{\|v\|}{\|w\|}.$$

Além disso, pelo teorema, o quociente $\frac{\|v\|}{\|w\|} = \frac{\|v\|}{\|f(a+v)-f(a)\|}$ é limitado nas proximidades de $v = 0$. Como a transformação linear $f'(a)^{-1}$ é contínua e se anula na origem, segue da expressão:

$$\frac{s(w)}{\|w\|} = -f(a)^{-1}\frac{r(v)}{\|v\|}\frac{\|v\|}{\|w\|}$$

que $\lim_{w\mapsto 0}\frac{s(w)}{\|w\|} = 0$, donde: $g = f^{-1}$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$.

□

Lema 1.10. *O conjunto* $(I(X,Y) = \{T : X \to Y : T$ *é homeomorfismo linear* $\}$ *é aberto no conjunto* $B(X,Y)$ *de* X *em* Y*. Além disso, a aplicação inversão* $I : I(X,Y) \to I(X,Y)$ *tal que* $I(T) = T^{-1}$ *é de classe* C^∞.

Demonstração. Começamos vendo que se $\|I - A\| < 1$ então A é invertível. Temos a fórmula:

$$A^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty}(I-A)^n.$$

Sabemos que esta soma converge pois assumimos que $\|I-A\| < 1$. Para ver que de fato converge para A^1 escrevemos: $A = I - (I - A)$, considemos o produto:

$$(A-(I-A))(I+(I-A)+(I-A)^2+...) = I+(I-A)+(I-A)^2+...-(I-A)-(I-A)^2-....$$

Como a série é absolutamente convergente podemos trocar a ordem dos termos da maneira que quisermos, donde podemos ver que a série acima converge para I.

Para o caso geral, dada A uma aplicação invertível, se $S \in B(X,Y)$ e $\|S - T\| \leq \|T^{-1}\|^{-1}$ então $\|T^{-1}S - I\| \leq 1$ implicando $T^{-1}S$ invertível, o implica S invertível.

Seja

$$I : I(X,Y) \to I(X,Y)$$
$$TT^{-1}$$

Note que

$$f(A+H) - f(A) = (A+H)^{-1} - A^{-1} = (A(I+A^{-1}H)^{-1} - A^{-1} = (I+H)^{-1}A^{-1} - A^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(A^{-1}H)^nA^{-1} - A^{-1} = A^{-1}HA^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-A^{-1}H)^n.$$

Como

$$\left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-A^{-1}H)^n\right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\|(-A^{-1}H)\|^n \leq \frac{\|A\|^{-1}\|^2\|H\|^2}{1-\|A^{-1}H\|}$$

Chegamos a conclusão que

$$f(A+H) - f(A) = A^{-1}HA + r(H),$$

Tal que $\lim_{\|H\|\mapsto\infty}\frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = 0$.
Note que $I'(A)(B) = -I(A)BI(A)$, donde, por indução, concluímos que I é C^∞.

□

Teorema 1.11. ***(Teorema da função inversa para espaços de Banach)*** *Seja $f : U \subset X \to V \subset Y$, uma aplicação de classe C^1. Seja $x_0 \in U$ tal que $Df(x_0) : X \to Y$ seja uma aplicação linear invertível. Então existe uma vizinhança $U' \subset U$ de f_0 e uma vizinhança $V' \subset V$ de $g_0 = f(x_0)$ tal que $f : U' \to V'$ é bijetivo e $P^{-1} : V' \to U'$ é diferenciável. Ou seja $f|_{U'}$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Para simplificar a notação, suponhamos, sem perda de generalidade, que $a = f(a) = 0$, Escrevendo: $f(x) = f'(a)x + r(x)$ temos que r é de classe C^k em a e $r'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$, como r' é contínua, temos que existe uma bola aberta B_λ (em torno de $a = 0$) tal que $|r'(x)| < \lambda$, daí pela desigualdade do valor médio, existe uma bola B' tal que $x, y \in B' \Rightarrow \|r(x) - r(y)\| \leq \epsilon\|x - y\|$. Seja λ tal que $\frac{\lambda}{\|f'(a)^1\|} < 1$, pelo corolário 1.8, f é um homeomorfismo de V sobre o aberto $W = f(V)$ e, pelo lema acima (1.9), a inversa $f^{-1} : W \to V$ é diferenciável no ponto $f(a)$. Como $f \in C^1$ a aplicação $f' : U \to B(X, Y)$ é contínua. Como o conjunto dos isomorfismos lineares entre espaços de Banach é aberto em $B(X, Y)$ e $f'(a)$ é isomorfismo, o aberto V pode ser tomado pequeno o suficiente para que para todo $x \in V$ $f'(x) : X \to Y$ seja ainda um isomorfismo, pelo lema $f^{-1} : W \to V$ é diferenciável, logo f é difeomorfismo. □

Capítulo 2

Pré-requisitos em Análise Funcional

2.1 Espaços de Hölder

Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função k vezes diferenciável. Utilizaremos nesse capítulo e no decorrer do texto a notação de multiindices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in Z_+^n$ para que possamos escrever de maneira mais compacta $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha 2} ... \partial x_n^{\alpha n}}$ em que $\alpha_1 + ... + \alpha_n = |\alpha| \leq k$.

Definicão 2.1. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$, aberto. Definimos, para $k \in \mathbb{N}$:

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \;\; : \;\; \forall \alpha \in Z_+^n, |\alpha| \leq k, D^\alpha u \text{ existe, é limitada e uniformemente contínua}\}$$

Nesse espaço, definimos a norma:

$$||u||_{C^k} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha(x) u|.$$

De fato, $||.||_{C^k}$ é uma norma, e $(C^k(\Omega), ||.||_{C^k})$ é um espaço de Banach, como está provado em [9].

Definicão 2.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Definimos para $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in [0, 1]$:

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\Omega) : [u]_{\alpha,k} = \sup_{|\beta|=k} \left(\sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{||x-y||_{\mathbb{R}^n}}^{\alpha} \right) < \infty. \right\}$$

Com a norma dada por:

$$||u||_{C^{k,\alpha}} := ||u||_{C^k} + [u]_{\alpha,k}.$$

Os espaços $C^{k,\alpha}(\Omega)$ são chamados *espaços de Hôlder.*

Teorema 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, então:*

1. *Todo elemento $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$ possui uma única extensão, a qual continuaremos denotando por u, para o espaço $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$. Por esse motivo muitas vezes identificaremos $C^{0,\beta}(\Omega)$ e $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$.*

2. *$C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach com a norma $||.||_{C^{0,\beta}} : C^{0,\beta} \to [0, \infty)$*

Demonstração. (1) Seja $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$, então $[u]_\beta < \infty$. Seja $x_0 \in \partial\Omega$, e (x_n) uma sequência tal que $x_n \to x_0$. Sabemos que:

$$|u(x_n) - u(x_m)| \leq [u]_\beta |x_n - x_m|^\beta \to 0 \tag{2.1}$$

O que mostra que $(u(x_n))$ é uma sequência de Cauchy, e portanto, $u(x_n) \to \overline{u}(x_0)$ (uniformamente). Gostaríamos de mostrar que essa definição independe da sequência escolhida. Ora, se há outra sequência (y_n) tal que $y_n \to x_0$ então:

$$|u(x_n) - u(y_n)| \leq [u]_\beta |x_n - y_n|^\beta \to 0 \tag{2.2}$$

Donde $u(y_n) \to \overline{u}(x_0)$. Podemos então definir a função $\overline{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que $\overline{u}(x) = u(x)$ se $x \in \Omega$ e $\overline{u}(x) = \lim_{n \mapsto \infty} u(x_n)$ em que $x_n \to x$, se $x \in \partial\Omega$.

Tomando o limite quando $x_n \to x$ em 2.1 e 2.2 temos que para qualquer ϵ pode-se achar m, n suficientemente grandes, tal que:

$$|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)| \leq |\overline{u}(x) - u(x_m)| + |\overline{u}(y) - u(y_n)| + |u(x_m) - u(y_n)| \leq \epsilon + \epsilon + [u]_\beta |x_n - x_m|^\beta$$

Fazendo $m, n \mapsto \infty$ segue que:

$$|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)| \leq [u]_\beta |x - y|^\beta$$

O que mostra que $\overline{u}$ tem a mesma norma de u, em especial $\overline{u} \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ concluindo a demonstração.

(2) È simples ver que $||u||_{C^{0,\beta}}$ é uma norma. Basicamente:

$$[u+v]_\beta = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{u(x)+v(x)-u(y)-v(y)}{|x-y|^\beta} \leq \sup_{x,y\in\Omega} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^\beta} + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^\beta} = [u]_\beta + [v]_\beta$$

Para ver que $C^{k,\beta}$ é completo seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, utilizamos o fato de $C^0(\overline{\Omega})$ ser completo para inferir que existe $u \in C^0(\overline{\Omega})$ tal que $||u_n - u||_0 \mapsto 0$. Temos que para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ tal que $x \neq y$:

$$\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^\beta} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{u_n(x)-u_n(y)}{|x-y|^\beta} \leq \limsup [u_n]_\beta \leq \lim_{n\mapsto\infty} ||u_n||_{C^{0,\beta}} \leq \infty$$

O que implica $u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$. De maneira parecida:

$$\frac{u(x)-u_n(x)-u_n(y)+u(y)}{|x-y|^\beta} = \lim_{n\mapsto\infty} \frac{(u_n-u_m)(x)-(u_n-u_m)(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \limsup [u_n - u_m]_\beta \leq \lim_{n\mapsto\infty} ||u_n - u_m||_{C^{0,\beta}} \mapsto 0.$$

E portanto $\lim_{n\mapsto\infty} ||u_n - u|| \mapsto 0$, o que conclui a demonstração.

□

Observação *É fácil ver que o teorema anterior pode facilmente ser generalizado para funções* $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ *ao invés de funções* $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$*, para isso basta usar a completude de* $C^k(\overline{\Omega})$ *ao invés da completude de* $C^0(\overline{\Omega})$*.*

No decorrer do trabalho será muito útil o fato de que há uma imersão compacta $C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para* $0 < \alpha < \beta < 1$.

Para provar a existência da imersão, temos que para $u \in C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ *e* $|\lambda| \leq k$:

$$\sup_{x,y\in\Omega, 0<|x-y|<1} \frac{|D^\lambda u(x) - D^\lambda u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|D^\lambda u(x) - D^\lambda u(y)|}{|x-y|^\beta}$$

e

$$\sup_{x,y\in\Omega,|x-y|\geq 1} \frac{|D^\lambda u(x)-D^\lambda u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq 2\sup_{x\in\Omega} |D^\lambda u(x)|$$

Donde podemos concluir que:

$$||u||_{C^{k,\alpha}} \leq 2||u||_{C^{k,\beta}}$$

Para vermos que a inclusão é de fato compacta escolhemos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $C^{0,\beta}(\Omega)$. Como (u_n) é limitada, podemos, por Arzelá Ascoli, supor que $u_n \to u$ (passando por uma subsequência) em $C^0(\Omega)$. Por simplicidade consideremos $u = 0$, então:

$$\frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq (\frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x-y|^\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}} |u_n(x) - u_n(y)|^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \tag{2.3}$$

$$\leq [u_n]_\beta^{\frac{\alpha}{\beta}} (2||u_n||_{C^0})^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \mapsto 0 \tag{2.4}$$

Provando que a imersão é compacta. Para o caso geral em que $k \geq 1$ temos que se um subconjunto $A \subset C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ é limitado então A é limitado em $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ e portanto existe uma sequência $\{u_n\} \subset A$ tal que $u_n \to u$ em $C(\overline{\Omega})$, também $\{D_1 u_n\}$ é limitada em $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ e portanto existe uma subsequência, que por simplicidade será denotada também por $\{u_n\}$, tal que $D_1 u_n \to u_1$ em $C(\overline{\Omega})$. Como temos convergência uniforme sabemos que $u_1 = D_1 u$, por esse mesmo processo existe uma sequência u_n tal que $D^\lambda u_n \to D^\lambda u$ em $C(\overline{\Omega})$, para todo λ satisfazendo $0 \leq |\lambda| \leq k$.

Finalmente, temos que a desigualdade 2.3 aplicada a função $D^\lambda u$ nos mostra que toda sequência limitada em $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ e convergente em $C^k(\overline{\Omega})$ é de Cauchy em $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$, e portanto convergente nesse espaço. Como A é um subconjunto limitado arbitrário seque então que a imersão é de fato compacta.

2.2 Teoremas básicos

Alguns teoremas fundamentais nos cursos de análise funcional serão utilizados na próxima sessão. As demonstrações frequentemente serão omitidas pois é bastante simples encontrá-las e entendê-las nos livros sugeridos.Ao longo desse capítulo $K = \mathbb{R}$ ou C

Teorema 2.4. ***(Teorema de Hanh Banach)*** *Seja V um espaço vetorial sobre K e p um funcional sublinear em V, ou seja $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \forall \lambda, x \in V$ e $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in V$. Seja M um subespaço de V e seja $f : M \to K$ um funcional linear em M satisfazendo:*

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in M$$

Então existum funcional linear F em V tal que $F(x) = f(x), \ \forall x \in M$ e $|F(x)| \leq p(x), \ x \in V$.

Demonstração. Ver Bachman e Lawrence "Functional Analysis", [6] capítulo 11, pag. 165 □

O seguinte corolário do Teorema de Hanh Banach será usado frequentemente no que segue e por abuso de linguagem nos referimos a ele como O teorema de Hanh Banach

Corolário 2.5. *Seja X um espaço normado e $xzinX$ $\{0\}$. Então existe um funcional f : $X \to K$ contínuo com $||f|| := \sup_{||x||=1} |f(x)| = 1$ e $f(x) = ||x||$.*

Demonstração. Seja $M = \{\alpha x : \alpha \in K\}$. M é um subespaço. Defina $f^* : M \to K$ pondo $f^*(\alpha x) := \alpha||x||$. f^* é claramente limitado e podemos notar que

$$|f^*(\alpha x)| = |\alpha|||x|| = ||\alpha x||,$$

e tomando $p = ||.||$ no teorema de Hanh-Banach, existe $f : X \to K$ funcional linear tal que $f|_M = f^*$ e

$$|f(y)| \leq ||y||, \quad \forall y \in X,$$

ou seja, f é ´contínuo e $||f|| \leq 1$. Mas $f(x) = f^*(x) = ||x|| \to f(\frac{x}{||x||}) = 1$, donde $||f|| = 1$, como queríamos. □

Definicão 2.6. (Espaço dual) Seja X espaço de Banach sobre K. Denotamos $X^* = \{f : Y \to \mathbb{R} \;\; : \;\; f \text{ contínua}\}$, X^* é chamado espaço dual topológico de X

Definicão 2.7. Sejam X e Y espaços de Banach. Denotamos $B(X, Y)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos $T : X \to Y$.

Proposicão 2.8. *Um operador linear $T : X \to Y$ em que X e Y são espaços de Banach é contínuo se e somente se é limitado, ou seja, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $||Tx|| \leq K||x||$.*

Demonstração. Ver Bachman e Lawrance "Functional Analysis", [6] capítulo 11, pag. 176. □

Teorema 2.9. *$B(X, Y) = \{T : X \to Y | T$ é linear e limitada $\}$ é espaço de Banach com a norma: $||T||_{B(X,Y)} = \sup_{||x||_X=1} ||Tx||_Y$*

Demonstração. Ver Bachman e Lawrence "Functional Analysis", [6] capítulo 15, pag 254. □

Definicão 2.10. Sejam X e Y espaços topológicos. Então $T : X \to Y$ é uma aplicação aberta se para todo conjunto aberto em $U \subset X$ a imagem $T(U)$ é aberta em Y.

Teorema 2.11. ***(Teorema da aplicação aberta)*** *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ linear contínuo e sobrejetivo. Então a aplicação T é aberta.*

Demonstração. Ver Brezis, "Fcuntional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations " [7] capítulo 2, pag. 35 □

Teorema 2.12. *Sejam X, Y espaços de topológicos $f : U \to V$ bijeção contínua com $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos. Então se f é uma aplicação aberta então T^{-1} é contínua.*

Demonstração. Ver Brezis " Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations" [7] capítulo 2, pág. 36. □

Definicão 2.13. Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : D \subset X \to Y$, sendo D um subespaço, é *fechado* se seu gráfico:

$$G(T) = \{(x, y) | x \in D, \; y = Tx\}$$

for um subespaço fechado em $X \times Y$.

Teorema 2.14. ***(Teorema do gráfico fechado)*** *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : D \subset X \to Y$ um operador linear fechado, em que D é subespaço de X. Então se D é fechado em X, o operador T é limitado.*

Demonstração. Ver Brezis "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations", [7] capítulo 2, pag. 37. □

Lema 2.15. *Seja X um espaço de Banach e $M \subset X$ um subespaço vetorial. Então:*

1. *Se* $\dim M < \infty$, *então existe um espaço vetorial fechado $N \subset X$ tal que $M \oplus N = X$.*
2. *Se* $\dim(\frac{X}{M}) < \infty$, *então existe espaço vetorial fechado $N \subset X$ tal que $M \oplus N = X$.*

Demonstração. (1) Seja $\{e_1, ..., e_n\} \subset M$ uma base de M. M é fechado pois possui dimensão finita. Sejam $\alpha_i : M \to \mathbb{R}$ funcionais lineares contínuos tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)e_i, \quad \forall x \in M.$$

Pelo teorema de Hanh-Banach existe funcional linear contínuo $\Lambda_i : X \to \mathbb{R}$ extendendo α_i, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Seja

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} N(\Lambda_i)$$

Como cada Λ_i é contínuo, N é fechado. Dado $x \in M \cap N$, temos $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)e_i = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(x)e_i = 0_X$, e portanto $M \cap N = \{0_X\}$.

Agora, dado qualquer $x \in X$ seja $y_x = x - \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(x)e_i$. $\forall j \in \{1, ..., n\}$, temos $\Lambda_j(y_x) = \Lambda_j(x) - \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(x)\Lambda_j(e_i) = \Lambda_j(x) - \Lambda_j(x) = 0$. Portanto $y_x \in N$, então $x = y_x + \sum \Lambda_i(x)e_i$, implicando $M \oplus N = X$.

(2) Seja $\{e_1, ..., e_n\} \subset X$ tal que $\Delta = \{\frac{e_1}{M}, ..., \frac{e_n}{M}\} \subset \frac{X}{M}$ é uma base de $\frac{X}{M}$. Seja $N = span\{e_1, ..., e_n\}$. N é de dimensão finita e portanto fechado.

Dado $x \in N \cap M$, temos $\frac{x}{M} = \frac{0_X}{M} = 0_{\frac{X}{M}}$. Como $x \in N$ existem $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, donde $\frac{x}{M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{e_i}{M} \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, pois Δ é linearmente independente. Logo $x = 0_X$, ou seja $N \cap M = \{0_X\}$.

Dado $x \in X$ arbitrário, existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ tal que

$$\frac{x}{M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\frac{e_i}{M}),$$

temos que $y_x = x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in M \Rightarrow x = y_x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ e portanto $M \oplus N = X$.

□

2.3 Operadores de Fredholm

Neste capítulo denotaremos a imagem de um operador T por $\Im(T)$.

Definicão 2.16. Sejam X, Y espaços de Banach, e $T \in B(X, Y)$. T é dito *operador de Fredholm* se:

1. O núcleo do operador T, denotado por $N(T)$ possui dimensão finita.
2. $Coker(T) := \frac{Y}{\Im(T)}$ possui dimensão finita.
3. $\Im(T)$ é um subespaço fechado de Y.

Se $T : X \to Y$ é operador de Fredholm, definimos o *índice de Fredholm* por:

$$ind(T) = dim(N(T)) - \dim(Coker(T)).$$

Veremos alguns exemplos de operadores de Fredholm no contexto que estamos procurando. Estes exemplos ilustram o quão sensível a definição de operador de Fredholm é ao espaço para o qual o operador está definido.

Exemplo 2.17. *Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão finita. Então qualquer operador $T : V \to W$ é de Fredholm é $ind(T) = dim(W) - dim(V)$. A saber, temos que $dim(CokerT) = dim(W) - dim(\Im(T))$. Pelo teorema do Núcleo e imagem (Ver [15] cap. 6 pag.* 68*) temos que $dim(V) = dim(N(T)) + dim(\Im(T))$, logo $ind(T) = dim(CoketT) - dim(N(T)) = dim(W) - dim(V)$.*

Exemplo 2.18. *Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Seja $C^k[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ de classe $C^k\}$, $C^k[a, b]$ é espaço de Banach com a norma*

$$||f||_{C^k} := sup_{x\in[a,b],0\leq l\leq k}|f^l(x)|$$

Considere o operador

$$\frac{d}{dx} : C^1[a, b] \to C^0[a, b]$$

$$f \mapsto f'$$

Então $||\frac{df}{dx}||_{C^0} \leq ||f||_{C^1}, \forall f \in C^1[a, b]$. Portanto $\frac{d}{dx}$ é um operador linear limitado. Também

$$f' = 0 \Rightarrow f = cte$$

O espaço das funções constantes tem dimensão um, gerado pela função $f = 1$. Daí $dim(N(T)) = 1$. Além disso, para $g \in C^0$ definimos:

$$f_g(x) = \int_a^x g(s)ds, \forall x \in [a, b]$$

Logo, $\frac{df_g}{dx} = g$, e $\Im(\frac{d}{dx}) = C^0[a, b]$. Portanto, $Coker(\frac{d}{dx})$ é trivial e concluímos que $\frac{d}{dx}$ é Fredholm $ind(\frac{d}{dx}) = 1$.

Exemplo 2.19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) um conjunto limitado aberto e conexo, em que $\partial\Omega$ uma variedade C^3 compacta.*

Considere o operador

$$\Delta : C^3(\overline{\Omega}) \to C^3(\overline{\Omega})$$

$$f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Δ é claramente limitado.

*Veremos que Δ **não** é Fredholm a partir do teorema da existência e unicidade para o problema de Dirichlet para o Laplaciano (aqui são usadas as especificações do conjunto Ω) Ver em [2] capítulo* 6*. Sabemos que $\forall\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ existe uma única $u_\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\Delta u_\varphi = 0, \quad u_\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$$

implicando que

$$C^{2,\alpha}(\partial\Omega) \to N(\Delta)$$

$$\varphi \mapsto u_\varphi$$

é isomorfismo. Isso nos diz, em particular, que $dim(N(\Delta)) = +\infty$, e portanto Δ não é Fredholm.

Exemplo 2.20. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ e $\alpha \in (0,1)$ como no exemplo 2.17. Seja:*

$$X = \{f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

com a norma induzida pelo espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. X é subespaço fechado e logo um espaço de Banach por si só.

Definimos o operador

$$\Delta : X \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$$

$$f \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i^2}$$

Novamente, pela existência e unicidade de solução para o problema de Dirichlet, existe uma única função $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que:

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Mas como essa equação é satisfeita pela solução nula, segue que essa única solução é $u = 0$, isto é, Δ é inejetora. Também dada $f \in C(\overline{\Omega})$, existe uma única $u_f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que:

$$\Delta u_f = f \text{ e } u_f|_{\partial\Omega} = 0$$

Isto é, Δ é sobrejetiva. Logo pelo teorema da aplicação aberta Δ é um homeomorfismo linear; em particular, é Fredholm e $ind(\Delta) = 0$.

Daremos agora uma nova visão do conjunto de operadores de Fredholm dentro do conjunto de operadores contínuos. Queremos ver o conjunto de operadores de Fredholm é aberto em $B(X,Y)$, e também entender melhor o compotamento da função índice.

Lema 2.21. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in B(X,Y)$. Suponha que existe $N \subset Y$ um subespaço fechado tal que $N \oplus \Im T = Y$, então:*

$$CokerT \cong N$$

Demonstração. Definimos φ :

$$\varphi : N \to CokerT$$

$$y \mapsto \tfrac{y}{\Im T}$$

É claro que φ é linear e sobrejetiva. Também, se $\varphi(y) = 0 \Rightarrow y \in \Im T \cap N \Rightarrow y = 0$ donde φ é injetora.

É fácil ver que $CokerT$ é um espaço de Banach com a norma:

$$||\frac{y}{\Im T}||_{CokerT} := \inf_{x \in X} ||y - Tx||_Y$$

Mas então, $||\frac{y}{\Im T}||_{CokerT} \leq ||y||_Y, \ \ \forall y \in N,$

portanto φ é contínua. Pelo teorema da aplicação aberta φ é um homeomorfismo linear. □

Teorema 2.22. *Sejam X, Y operadores de Banach e $T \in B(X, Y)$ um operador de Fredholm. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $P \in B(X, Y)$ com $||P|| < \epsilon$ existe um operador linear:*

$$A_p : N(T) \to CokerT$$

tal que:

$$\dim(N(T + P)) = \dim(N(A_P)) \text{ } e \text{ } \dim(Coker(T + P)) = \dim(CokerA_P).$$

Demonstração. Como temos $\dim N(T) < \infty$ e $\dim(\frac{Y}{\Im T}) < \infty$, pelo lema 2.14 existem subespaços fechados $M \subset X$, $N \subset Y$ tal que: $X = M \oplus N(T)$, $Y = \Im T \oplus N$. Seja:

$$T' : M \to \Im T$$

$$x \mapsto Tx$$

É fácil ver que T' é um isomorfismo linear. Como $M \subset X$, e $\Im T \subset Y$ são fechados, também são espaços de Banach, e portanto T' é um homeomorfismo linear pelo teorema da aplicação aberta. Como o conjunto dos operadores lineares invertíveis é aberto em $B(X, Y)$, sabemos que existe $\epsilon' > 0$ tal que sempre que $a : M \to \Im T$ for operador linear cumprindo $||a|| < \epsilon'$, $T' + a$ é também um homeomorfismo linear entre M e $\Im T$.

É fácil vermos que as projeções $\pi_1 : Y \to \Im T$, $\pi_2 : Y \to N$, são contínuas (utilizando para tanto o teorema do gráfico fechado). Seja $\epsilon := \frac{\epsilon'}{||\pi_1||+||\pi_2||+1}$ e seja $P : X \to Y$ um operador linear contínuo tal que: $||P|| < \epsilon$. Sejam $i : M \hookrightarrow X$, e $j : N(T) \hookrightarrow X$ as inclusões canônicas. Definimos os operadores: $a_p : M \to \Im T$, $b_p : N(T) \to \Im T$, $c_p : M \to N$ e $d_p : N(T) \to N$, por:

$$a_p := \pi_1 \circ p \circ i, \qquad b_p := \pi_1 \circ p \circ j$$

$$c_p := \pi_2 \circ p \circ i, \qquad d_p := \pi_2 \circ p \circ j.$$

Pela escolha de ϵ é claro que $||a_p|| < \epsilon'$, então $T + a_p : M \to \Im T$ é um homeomorfismo linear.

Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Podemos escrever: $x = x_m + x_{N(T)}$, $y = y_{\Im T} + y_N$ de maneira única. (com os subespaços indicados nos subíndices.) Definimos $G : X \to X$ e $H : Y \to Y$ como:

$$Gx = x_M - (T' + a_p)^{-1} \circ b_p(x_{N(T)}) + x_{N(T)}$$

$$Hy = y_{\Im T} - c_p \circ (T' + a_p)^{-1}(y_{\Im T}) + y_N$$

Afirmação 1: G e H são homeomorfismos lineares.

É simples ver que H e G são lineares. A continuidade segue da continuidade de π_1 e π_2 e das projeções: $\pi_1' : X \to M$, $\pi_2' : X \to N(T)$.

Além disso:

$$Gx = 0_X \Rightarrow x_M - (T' + a_p)^{-1} \circ b_p(x_{N(T)}) + x_{N(T)} = 0_X \Rightarrow x_M - (T' + a_p)^{-1} \circ b_p(x_{N(T)}) = 0_X \\ \text{e } x_{N(T)} = 0_X \Rightarrow x_M = 0_X.$$

e

$$Hy = 0_Y \Rightarrow y_{\Im T} - c_p \circ (T + a_p)^{-1}(y_{\Im(T)}) + y_N = 0_X \Rightarrow y_{\Im(T)} = 0_Y \text{ e} \\ c_p \circ (T' + a_p)^{-1}(y_{\Im T}) + y_N = 0_Y \Rightarrow y_N = 0_Y \Rightarrow y = 0_Y,$$

e isso prova que G e H são injetivas.

Finalmente, dados $x' \in X$ e $y' \in Y$ escrevemos novamente: $x' = x'_M + x'_{N(T)}$ e $y' = y'_{\Im T} + y'_{N(T)}$, e definimos: $x = (T' + a_p)^{-1} \circ b_p(x'_{N(T)}) + x'_M + x'_{N(T)}$ e $y = c_p \circ (T' + a_p)^{-1}(y'_{\Im T}) + y'_{\Im T} + y'_{N(T)}$. É fácil conferir que $Gx = x'$ e $Hy = y'$. Sendo assim G e H são sobrejetivos e portanto homeomorfismos lineares pelo teorema da aplicação aberta. Isso mostra a afirmação 1.

Seja $A'_p : N(T) \to N$ dado por $A'_p = -c_p \circ (T' + a_p)^{-1} \circ b_p + d_p$.

Afirmação 2: $H \circ (T + P) \circ G = (T' + a_p) \oplus A'_p$.

De fato, dado $x = x_M + x_{N(T)} \in X$, temos:

$$H \circ (T + P) \circ G(x) = H \circ (T + P)(x_M - (T' + a_p)^{-1} \circ b_p(x_{N(T)}) + x_{N(T)}) = \\ H[T'x_M - T'(T' + a_p)^{-1} \circ b_p \circ (x_{N(T)}) + a_p(x_M) + c_p(x_M) - a_p(T' + a_p)^{-1} \circ b_p(x_{N(T)}) - \\ c_p(T' + a_p)^{-1} \circ b_p(x_{N(T)}) + b_p(x_{N(T)}) + d_p(x_{N(T)})] = H[(T' + a_p)x_M + c_p(x_M) + A'_p(x_{N(T)})] = \\ (T' + a_p)x_M - c_p(T' + a_p)^{-1}(T' + a_p)x_M + c_p(x_M) + A'_p(x_M + x_{N(T)}),$$

o que prova a afirmação 2.

Agora, seja

$$\phi : N(T + P) \to N(A'_p)$$
$$x \mapsto [G^{-1}(x)]_{N(T)}.$$

Precisamos verificar que ϕ está bem definida, vejamos que:

$$(T + P)x = 0_Y \Rightarrow [H \circ (T + P) \circ G](G^{-1}(x)) = 0_Y \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow (T' + a_p) \oplus A'_p([G^{-1}(x)]_M + [G^{-1}(x)]_{N(T)}) = 0_Y \tag{2.6}$$

$$\Rightarrow (T' + a_p)([G^{-1}(x)]_M) = 0_Y e A'_p([G^{-1}(x)]_K = 0_Y \tag{2.7}$$

$$\therefore [G^{-1}(x)]_{N(T)} \in N(A'_x),$$

e então ϕ está bem definida.

Além disso, note que $\phi(x) = 0_X \Rightarrow [G^{-1}(x)]_{N(T)} = \phi_X \Rightarrow (T' + a_p)([G^{-1}(x)]_M) = 0_Y \Rightarrow [G^{-1}(x)]_M = 0_X$ (aproveitando o que foi feito na equação 2.7). Concluindo que ϕ é injetiva.

Para concluir que ϕ é isomorfismo, observamos que dado $x \in N(A'_p)$, em particular $x \in N(T)$. Seja $x' = Gx$. Então $\phi x' = x$ e portanto ϕ é sobrejetora.

Podemos, então, concluir que

$$\dim(N(T+P)) = \dim(N(A'_p)).$$

Vamos agora analisar a função

$$Coker(T+P) \to Coker(H \circ (T+P) \circ G)$$

$$\frac{y}{\Im(T)} \mapsto \frac{H(y)}{\Im(H \circ (T+P) \circ G)}$$

é simples ver que a função acima é um isomorfismo, e portanto que:

$$Coker(T+P) \cong Coker((T' + a_p) \oplus A'_p),$$

utilizando para isso a afirmação 2.

Seja

$$\rho : Coker((T' + a_p) \oplus A'_p) \to Coker A'_p$$

$$\frac{y}{\Im(T' + a_p) \oplus A'_p} \mapsto \frac{y_N}{\Im A'_p}.$$

ρ é bem definida, pois

$$[(T' + a_p) \oplus A'_p(x_M + x_{N(T)})]_N = A'_p(x_{N(T))}),$$

Se $\frac{y_N}{\Im A'_p} = \frac{0_Y}{\Im A'_p} \Rightarrow y_N \in \Im A'_p$, então $y_N = A'_p(x_{N(T)}$, para algum $x_{N(T)} \in N(T)$.

Escrevemos

$$y = y_{\Im T} + y_N = (T' + a_p) \oplus A'_p((T' + a_p)^{-1}(y_{\Im T} + x_{N(T)}) \in \Im((T' + a_p) \oplus A'_p)$$

então $\frac{y}{\Im(T' + a_p) \oplus A'_p} = \frac{0_Y}{\Im(T' + a_p) \oplus A'_p}$, e portanto ρ é injetiva. Como ρ é claramente sobrejetiva, segue que

$$\dim[Coker(T+P)] = \dim(Coker A'_p).$$

Finalmente como $N \cong Coker T$ pelo 2.21 podemos definir $\tau : N \to Coker T$ como sendo esse isomorfismo, e definir $A_p : N(T) \to Coker T$ por $A_p = \tau \circ A'_p$. Temos $N(A_p) = N(A'_p)$ e $Coker A_p = Coker A'_p$. Então,

$$\dim N(T+P) = \dim(N(A_p))$$

$$\dim(Coker(T+P)) = \dim(Coker A_p)$$

o que conclui a demonstração.

□

Corolário 2.23. *Sejam X, Y espaços de Banach , e $Fred(X,Y) = \{T \in B(X,Y) : T$ é Fredholm $\}$. Então, na topologia da norma em $B(X,Y)$, $Fred(X,Y) \subset B(X,Y)$ é aberto, e a função $ind : T \in Fred(X,Y) \mapsto ind T \in \mathbb{R}$ é localmente constante.*

Demonstração. Seja $T \in Fred(X,Y)$ pelo teorema anterior existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall P \in B(X,Y)$ com $||P|| < \epsilon$, existe uma aplicação $A_p : N(T) \to Coker T$ tal que:

$$\dim(N(T+P)) = \dim N(A_p) < \infty$$

$$\dim(Coker(T+P)) = \dim(Coker A_p) < \infty$$

Então sabemos que existe subespaço fechado N tal que $N \oplus \Im T = X$, pelo lema 2.13. Consideremos a função

$$S : (\tfrac{X}{\Im T}) \oplus N \to Y$$

$$\tfrac{x}{N(T)} \mapsto T(x) + z$$

Vejamos que S é homeomorfismo. Para ver que S é contínuo basta notar que $\|S(\frac{x}{N(T)}, z)\| \leq \|T\| \|\frac{x}{N(T)}\|_{\frac{x}{N(T)}} + \|z\|_Y \leq (\|T\| + 1) \|(\frac{x}{N(T)}, z)\|$. Além disso S é bijetivo donde, pelo teorema da aplicação aberta, S é homeomorfismo linear. Em particular, S leva espaços fechados em espaços fechados, e então

$$\Im T = S(\tfrac{x}{N(T)} \oplus \{0_Y\})$$

Portanto $\Im T$ é fechada e $T+P$ é operador de Fredholm, concluindo que $Fred(X, Y)$ é aberto.

Pela construção de A_p (teorema 2.20) esta é uma aplicação linear entre espaços de dimensão finita, e portanto é um operador de Fredholm. Também:

$$ind(T + P) = ind A_p = \dim(N(T)) - \dim(Coker T) = ind(T)$$

Sempre que $\|P\| < \epsilon$, provando o teorema.

□

Algumas das propriedades interessantes de operadores de Fredholm relacionan-se com operadores compactos, os quais definiremos a seguir.

Definicão 2.24. Sejam X, Y espaços de Banach. Um operador linear $T : X \to Y$ é dito *compacto* se dado $E \subset X$ limitado, tivermos $T(E) \subset Y$ pré-compacto.

Note que todo operador compacto é limitado, e $T \in B(X, Y)$ é compacto se e somente se $T(B_X)$ é pré-compacto em Y onde $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Proposicão 2.25. *Seja X um espaço de Banach. Seja $T \in B(X, Y)$, T compacto e $\Im(T)$ fechada. Então* $\dim(\Im(T)) < \infty$.

Demonstração. Temos que $\Im(T)$ é um espaço de Banach com a norma induzida. Daí pelo teorema da aplicação aberta, $T(B_X)$ é aberto. Por outro lado, $T(B_X)$ possui fecho compacto em $\Im(T)$, implicando que $\Im(T)$ é localmente compacto, e portanto possui dimensão finita. □

Proposicão 2.26. *Seja $T \in B(X)$ operador compacto e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, então* $\dim(N(T - \lambda I_X)) < \infty$

Demonstração. Temos que $N(T - \lambda I_X) \subset X$ é fechado, e portanto um espaço de Banach. Seja $N = N(T - \lambda I_X)$, então $T_N := T|_N$ é compacto. Provemos que $\Im T_N = N$. Sabemos que $y \in \Im T_N \Rightarrow y = Tx$, $x \in X$ Então como $y \in N(T - \lambda I_X)$, temos $y = Tx = \lambda x \in N$. Por outro lado se $y \in N \Rightarrow Ty = \lambda y \Rightarrow y = T\frac{y}{\lambda} = T_N(\frac{y}{\lambda}) \Rightarrow y \in \Im T_N$. O resultado segue aplicando a proposição anterior a T_N.

□

A primeira observação sobre operadores compactos relacionada a operadores de Fredholm é que um operador compacto $T : X \to Y$ com $\dim(Y) = \infty$, *jamais será um operador de Fredholm. A saber, se T fosse operador de Fredholm, este possuiria imagem fechada, o que significa que teria imagem com dimensão finita (ver [9]). Além disso a dimensão da co-imagem seria finita, o que implicaria que a dimensão de Y é finita.*

2.4 Topologia fraca*

A prova de algumas propriedades e teoremas relacionados a operadores de Fredholm e operadores compactos envolve uma análise um pouco mais profunda dos espaços de Banach, inclusive topologicamente. É fato que os funcionais lineares têm uma grande importância no estudo desses espaços. Consideremos para uma topologia neste espaço, na qual sabemos a forma dos funcionais contínuos em $X^* = \{f : X \to K | f$ *é contínua na norma* $\}$..

*Sabemos que quanto mais abertos possui um espaço topológico mais fácil é uma função ser contínua deste espaço para um outro fixado. De uma maneira geral o contrário acontece com compactos, quando mais abertos há, maior a possibilidade de coberturas abertas, e portanto menos compactos. A topologia fraca * é uma topologia no espaço dual com menos elementos do que a topologia com a norma usual, e portanto com mais compactos o que muitas vezes é útil, por exemplo quando queremos achar mínimos de funcionais.*

A caminho de definir a topologia fraca (lê-se "fraca-estrela") no espaço dual, consideremos a seguinte função:*

$$J : X \to X^{**}$$

$$x \mapsto \quad J(x) : X^* \to \mathbb{R} \tag{2.8}$$

$$x^* \mapsto x^*(x)$$

Para vermos que J *é isometria, notemos que:*

$$||J(x)||_{X^{**}} = sup_{||y^*||_{X^*}=1}|J(x)(y^*)| = sup_{||y^*||_{X^*}=1}|y^*(x)| \leq ||x||_X$$

A última desigualdade é, na verdade, uma igualdade, já que pelo teorema de Hanh-Banach podemos achar $y^* \in X^*$ *tal que* $y^*(x) = ||x||_X$ *e* $|y^*| = 1$*, concluindo que de fato* $||J(x)||_{X^{**}} = ||x||_X$*, donde segue que* J *é isometria e portanto contínua e injetiva.*

Não há razão, no caso geral, para que $J(X) = X^{**}$.

Definicão 2.27. X é dito ser espaço *reflexivo* se tivermos $X^{**} = J(X)$

Definicão 2.28. A topologia *fraca** definida no espaço dual X^* é a topologia menos fina que torna os funcionais em $J(X)$ contínuos.

Assim uma sequência (ou net) $(f_i) \subset X^*$ *converge para algum* $f \in X^*$ *na topologia fraca* se e somente se* $f_i(x) \to f(x), \forall x \in X^*$.

2.5 A alternativa de Fredholm.

Operadores de Fredholm possuem uma certa similaridade com operadores invertíveis. Na verdade, quando pensamos em operadores de Fredholm, estamos "limitando" o quanto o operador pode ser não invertível. O resultado que ilustra essa proximidade de operadores de Fredholm com operadores invertíveis é o teorema da alternativa de Fredholm. Desenvolveremos, nessa sessão, os elementos necessários para prová-la.

Definicão 2.29. Dados X, Y espaços de Banach, $T \in B(X, Y)$ satisfaz a *alternativa de Fredholm* se satisfaz uma das duas alternativas:

1. Se $dim(N(T)) = 0$ então $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tal que: $T(x) = y$

2. Se $0 < dim(N(T)) < \infty$ e $n = dim(N(T))$, então existe um subconjunto do dual de Y, $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset Y^*$, linearmente independente, tal que dado $y \in Y$:

$$\exists x \in X \text{ tal que } T(x) = y \Leftrightarrow f_i(y) = 0, i = 1, 2, ..., n.$$

Definicão 2.30. Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$. O *operador adjunto* de T é o operador linear dado por

$$T^* : Y^* \to X^*$$

$$f \mapsto f \circ T$$

Proposicão 2.31. *Se X, Y são espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$, então $T^* \in B(Y^*, X^*)$ e ainda*

$$||T^*|| = ||T||.$$

Demonstração. Seja $x \in X$ tal que $||x||_X \leq 1$. Então $\forall f \in Y^*$:

$$|(T^* f)x| = |f(Tx)| \leq ||T||||f||_{Y^*},$$

donde

$$||T^* f||_{X^*} \leq ||T||||f||_{Y^*}.$$

Logo, $T^* \in B(Y^*, X^*)$ e $||T^*|| \leq ||T||$.
Por Hanh Banach, se $Tx \neq 0_Y$ então $\exists f \in Y^*$ tal que $||f||_Y = 1$ e $f(Tx) = ||Tx||_Y$.
Então, se $||x|| \leq 1$,

$$||Tx||_Y = |f(Tx)| = |(T^* f)(x)| \leq ||T^* f||_{X^*} \leq ||T^*||,$$

donde concluímos que $||T|| \leq ||T^*||$.

□

Teorema 2.32. *Se X, Y são espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$ então*

$$T \text{ é compacto} \Leftrightarrow T^* \text{ é compacto.}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $U^* = B_{Y^*} = \{f \in Y^* : ||f||_{Y^*} \leq 1\}$, e seja $(g_n) \subset U^*$.

Então $|g_n(y) - g_n(y')| \leq ||g_n||_{Y^*}||y - y'||_Y \leq ||y - y'||_Y$, e em particular, $|g_n(y)| \leq ||y||_Y$. Logo a sequência (g_n) é equicontínua e pontualmente limitada. Seja $U = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$. Temos por hipótese que $T(U)$ é pré-compacto, e portanto, $f_n := f_n|_{\overline{T(U)}} : \overline{T(U)} \to K$, possui subsequência que converge uniformemente, pelo teorema de Arzelá-Ascoli. Seja essa sequência (f_m), temos:

$$||f_m - f_{m'}||_{C^0} \equiv \sup_{y \in \overline{T(U)}} ||f_m(y) - f_{m'}(y)|| \geq \sup_{x \in U} ||g_m(Tx) - g_{m'}(Tx)|| = \\ \sup_{x \in U} ||T^* g_m(x) - T^* g_{m'}(x)|| = ||T^* g_m - T^* g_{m'}||_{Y^*},$$

implicando $(T^* g_m)$ sequência de Cauchy em Y^*, logo convergente pela completude de X^*. Portanto $T(U^*)$ é pré-compacto em X^*.

($\Leftarrow$) Sejam: $J : X \to X^{**}$ e $J' : Y \to Y^{**}$ as imersões canônicas como na equação 2.8. Seja $E \subset X$ um conjunto limitado. Sabemos que $J(E)$ é limitado pois a função J é contínua. Observe que para todo $x \in X$, e para toda $f \in Y^*$, temos:

$$(J' \circ Tx)(f) = f(Tx) = T^* f(x) = J(x)(T^* f) = T^{**}(J(x))(f),$$

concluindo que: $J' \circ T = T^{**} \circ J$

Lembrando da primeira parte do teorema, se T^* é compacto, então T^* também o é. Sendo assim $T^{**}(J(E)) \subset Y^{**}$ é pré-compacto, donde $J'(T(E)) \subset Y^{**}$ é pré-compacto. Em particular $J'(T(E))$ é totalmente limitado. Dado $\epsilon > 0$, para certos $x_1, ..., x_n \in E$,

$$J'(T(E)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\epsilon}^{Y^{**}}(J'(Tx_i)),$$

Dado $x \in E$, para algum $i \in \{1, ..., n\}$ temos $\|Tx - Tx_i\|_Y = \|J(Tx) - J(Tx_i)\|_{Y^{**}} < \epsilon$, já que J' é isometria, segue que

$$T(E) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_Y(Tx_i),$$

e assim $T(E)$ é totalmente limitado, e então pré-compacto, o que implica T compacto.

$\square$

Teorema 2.33. *Sejam X, Y são espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$ tem imagem fechada, então*

$$(CokerT)^* \cong N(T^*)$$

Demonstração. Sabemos que $CokerT := \frac{Y}{Im(T)}$ é um espaço de Banach, pois $Im(T)$ é fechada. (Ver resultado em [6] , capítulo 8, pag. 126). A norma desse espaço é dada por

$$\|\tfrac{y}{\Im(T)}\|_{\frac{Y}{\Im(T)}} := \inf_{x \in X} \|y - Tx\|_Y \quad (y \in Y).$$

E portanto o espaço dual $(CokerT)^*$ é também um espaço de Banach. Pela proposição 2.29 $T^* \in B(Y^*, X^*)$, e então $N(T^*)$ é um subespaço fechado de Y^*, o que também significa que $N(T^*)$ é um espaço de Banach com a norma induzida.

Definimos a função,

$$\begin{aligned} \phi : N(T^*) &\to (CokerT)^* \\ f &\mapsto \phi(f) : CokerT \to K \\ &\qquad \frac{y}{\Im(T)} \mapsto f(y). \end{aligned}$$

ϕ está bem definida, pois $f(Tx) = (T^* f)(x) = 0$, $\forall x \in X$. Queremos provar que ϕ é isomorfismo linear. De fato, ϕ é linear e $\|\phi(f)(\frac{y}{Im(T)})\| = |f(y)| = |f(y - Tx)| \leq \|f\|_{Y^*}\|y - Tx\|$, $\forall x \in X$.

$$\therefore \left|\phi(f)(\tfrac{y}{\Im(T)})\right\| \leq \|f\|_{Y^*} \left\|\tfrac{y}{\Im(T)}\right\|_{CokerT}.$$

E então $\|\phi(f)\| \leq \|f\|_{Y^*}$, donde ϕ é limitada (contínua).

Seja

$$\begin{aligned}\psi : (CokerT)^* &\to N(T^*)\\ g &\mapsto \psi(g) : Y \to K\\ & \qquad y \mapsto g\left(\frac{y}{\Im(T)}\right)\end{aligned}$$

É claro que ψ é linear. ψ está bem definida, pois para $g \in (CokerT)^*$, temos:

$$(T^*(\psi(g)))(x) = \psi(g)(Tx) = g\left(\tfrac{Tx}{Im(T)}\right) = 0,$$

$\forall x \in X$. Portanto, $T^*(\psi(g)) = 0 \Rightarrow \psi(g) \in N(T^*)$. Então dada $g \in (CokerT)^*$, para todo $y \in Y$, temos $\phi(\psi(g)) = g$, o que nos diz que ϕ é sobrejetiva.

Para ver que ϕ é injetiva basta notar que se $f \in N(T^*)$, e $\phi(f) = 0$ então $f(y) = 0,\ \forall y \in Y$, o que nos dá $f = 0$.

Conclui-se, portanto que ϕ é um homeomorfismo linear (Usando o teorema da aplicação aberta).

□

Teorema 2.34. *Se X é um espaço de Banach, $T \in B(X)$ é compacto, e $\lambda \in K \setminus \{0\}$, então $T - \lambda I_X$ é um operador de Fredholm.*

Demonstração. Começamos notando que para toda $f \in X^*$ e $\forall x \in X$, temos que

$$((T - \lambda I_X)^*)f(x) = f(Tx - \lambda x) = f(Tx) - \lambda f(x) = [(T^*f - \lambda I_{X^*})f]x.$$

Ou seja, $(T - \lambda I_X)^* = T^*f - \lambda I_{X^*}$. Como T^* e compacto pelo teorema 2.32, temos pela proposição 2.26 que: $\dim(Im(N(T - \lambda I_X)) < \infty$, e $\dim(N(T^* - \lambda I_{X^*})) < \infty$. Queremos provar que $\Im(T - \lambda I_X) < \infty$ é fechada, neste caso, pelo teorema 2.33:

$$\dim(Coker(T - \lambda I_X)^*) = \dim(N(T^* - \lambda I_{X^*})) < \infty.$$

$\dim(Coker(T - \lambda I_X)) = \dim(Coker(T - \lambda I_X)^*) < \infty$, como gostaríamos. Então, mostremos que $\Im(T - \lambda I_X)$ é fechada.

Primeiramente notemos que existe $M \subset X$ fechado (Lema 2.13) tal que $M \oplus N(T - \lambda I_X) = X$. Definimos

$$S : M \to X$$

$$x \mapsto Tx - \lambda x$$

É claro que S é linear, contínuo e injetivo. Também é clara a inclusão $\Im(S) \subset \Im(T - \lambda I_X)$. Queremos provar a igualdade entre esses conjuntos. Para isso, seja $y \in \Im(T - \lambda I_X)$, então $y = Tx - \lambda x$ para algum $x \in X$. Por propriedade da soma direta, existe um único $x_m \in M$ e $x_0 \in N(T - \lambda I_X)$, tal que $x = x_m + x_0$. Então $y = Tx_m - \lambda x_m = Sx_m$ e então $y \in (S)$, o que prova a inclusão: $\Im(S) \subset \Im(T - \lambda I_X)$. Provaremos a seguir que $\Im(S)$ é fechada.

Afirmação: Existe $r > 0$ tal que $r\|x\| \leq \|Sx\|$.

Suponha que não, então existe uma sequência x_n' com a propriedade que $\frac{1}{n}\|x_n'\| > \|Sx_n'\|$. Normalizando essa sequência, temos que $x_n = \frac{x_n'}{\|x_n\|}$. Temos então que $\|x_n\| = 1$, e $\|S(x_n)\| < \frac{1}{n} \to 0$. Como T é compacto temos que para alguma subsequência (x_m), $Tx_m \to x_0 \in X$. Note que

$$\lambda x_m = \lambda x_m - Tx_m + Tx_m = -Sx_m + Tx_m \to x_0 \in M.$$

Temos ainda que $S(x_0) = S(\lim_{m\mapsto\infty} \lambda x_m) = \lim_{n\mapsto 0} \lambda Sx_m = 0$, implicando, pela injetividade de S, que $x_0 = 0$. Por outro lado $\|x_m\| = 1$, um absurdo. Isso prova a afirmação.

Seja $r > 0$ tal que $r\|x\| \leq \|Tx\|, \quad \forall x \in M$. Dado $(x_n) \subset M$ com $Sx_n \mapsto y$, segue que (x_n) é de Cauchy e portanto $x_n \to x$, para algum $x \in M$, daí $Sx_n \mapsto Sx$ e então $y = Sx$. Mas isso é dizer que $\Im S = \Im(T - \lambda I_X)$ é fechada, como queríamos, completando a demonstração.

□

Proposicão 2.35. *Seja X espaço de Banach. Sejam $T \in B(X)$ um operador compacto e $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então $T - \lambda I$ satisfaz a alternativa de Fredholm.*

Demonstração. Veja E. Kreyszig,[**?**] "introductory Functional Analysis with applications" cap. 8. □

Teorema 2.36. *Sejam X, Y espaços de Banach, então $T \in B(X, Y)$ é operador de Fredholm se e somente se existe $R \in B(Y, X)$ tal que:*

$$R \circ T - I_X \text{ e } T \circ R - I_Y$$

são operadores compactos.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se T é operador de Fredholm existe $M \subset X$, $N \subset Y$ subespaços fechados tais que: $X = M \oplus N(T)$, $Y = \Im T \oplus N$. (Lema 2.15)

Seja:

$$T' : M \to N$$

$$x \to Tx$$

T' é claramente um homeomorfismo linear. Seja $R' : N \to M$ sua inversa. Definimos $R : Y \to X$ da seguinte maneira, dado $y \in Y$, existem $x_m \in M$ e $y_n \in \Im(T)$ tal que $y = Tx_m + y_n$, então podemos definir $Ry = x_m + R'y_n$. Segue que R está bem definido, é linear e contínuo, pois $\|Ry\| = \|R'T'x_m + R'y_n\| = \|R'(T'x_m + y_n)\| \leq \|R'\|\|y\|$.

Seja $x = x_m + x_{N(T)} \in X$. Então:

$$R \circ Tx = R(T'x_m) = x_m \Rightarrow (R \circ T - I_X)x = x_m - (x_m + x_{N(T)}) \Rightarrow (R \circ T - I_X) \in N(T)$$

Então concluímos que $\dim(\Im(R \circ T - I_X)) < \infty$. Isso implica $R \circ T - I_X$ compacto pois se U é um subconjunto limitado de Y, então $(R \circ T - I_X)(U)$ é limitado, e seu fêcho está contido em um espaço de dimensão finita (que é fechado), portanto $\overline{(R \circ T - I_X)(U)}$ é compacto.

Para $y = T'x_m + y_n$ $T \circ Ry = T'x_m + T' \circ R'y_n = T'x_m + y_n$, então $T \circ R - I_Y = 0$, que é trivialmente compacto.

($\Leftarrow$) Se $R \in B(Y, X)$ nomeamos: $K = R \circ T - I_X$, $K' = T \circ R - I_Y$, então, $R \circ T = K + I_X$, $T \circ R = K' + I_Y$. Pelo teorema 2.34, $R \circ T$ e $T \circ R$ são Fredholm. Note que $N(T) \subset N(R \circ T)$ e $Coker T \subset Coker(T \circ R)$, mostrando que T é Fredholm.

□

Lema 2.37. *Sejam X, Y, Z espaços de Banach então:*

1. *O conjunto $K(X,Y) \subset B(X,Y)$ dos operadores compactos de X em Y é um subespaço vetorial fechado na topologia da norma.*

2. *Se $S \in B(X,Y)$, $T \in B(Y,Z)$ e ao menos um deles é compacto, então $T \circ S$ também é compacto.*

Demonstração. (1) Se T é compacto, é claro que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ λT é compacto. Se T e S são compactos, é claro que $T+S$ é compacto. Seja T_n uma sequência de operadores compactos e $T \in B(X,Y)$ tal que $\|T_n - T\|_{B(X,Y)} \to 0$. Queremos mostrar que T é comapcto. Como Y é completo basta mostrar que para todo $\epsilon > 0$ temos uma cobertura finita de $T(B_X)$ de bolas de raio ϵ (Ver J.R Munkeres [**?**] sessão 7.3). Dado $\epsilon > 0$ fixamos um natural n tal que $\|T - T_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Como $T_n(B_X)$ é pré-compacto temos uma coleção finita de bolas de raio $\frac{\epsilon}{2}$ cobrindo $T_n(B_X)$, podemos escrever $T_n(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$, para $x_i \in X$. então segue que $T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$

(2) Se $U \subset X$ é limitado $(T \circ S)U = T(S(U))$, que é pré-compacto.

□

Teorema 2.38. *Sejam X, Y, Z espaços de Banach e $T \in B(X,Y)$, $S \in B(T,Z)$. Se T e S são operadores de Fredholm então $S \circ T$ é operador de Fredholm e ainda:*

$$ind(S \circ T) = ind(S) + ind(T)$$

Demonstração. Sabemos pelo teorema 2.33 que existem $R_T \in B(Y,X)$ e $R_S \in B(Z,Y)$ tal que os operadores $K_T = R_T \circ T - I_X$, $K'_T = T \circ R_T - I_Y$, $K_S = R_S \circ S - I_Y$, $K'_S = S \circ R_S - I_Z$ são compactos.

Temos que:

$$S \circ K'_T = S \circ T \circ R_T - S \Rightarrow S \circ K'_T \circ R_S = (S \circ T) \circ (R_T \circ R_S) + K'_S - I_Z \Rightarrow$$
$$(S \circ T) \circ (R_T \circ R_S) - I_Z = S \circ K'_T \circ R_S - K'_S.$$

Assim como:

$$R_T \circ K_S = R_T \circ R_S \circ S - R_T \Rightarrow R_T \circ K_S \circ T = R_T \circ R_S \circ S \circ T - R_T \circ T + I_X - I_X \Rightarrow$$
$$(R_T \circ R_S) \circ (S \circ T) - I_X = R_T \circ K_S \circ T + K_T.$$

Então pelo lema 2.34 e o teorema 2.33 $S \circ T$ é Fredholm.

Definimos, para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$A_t : Y \oplus X \to Z \oplus T$$

$$[x,y] \mapsto \begin{pmatrix} \cos tS & -\sin tS \circ T \\ \sin tI_Y & \cos tT \end{pmatrix}$$

A função: $t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto A_t \in B(Y \oplus X, Z \oplus Y)$ é contínua com a topologia da norma. Para ver isso basta abrir a aplicação considerando o $\sup_{\|(x,y)\|=1} A_t(x,y)$ e majorar de acordo com as normas dos operadores envolvidos.

Podemos escrever: $A_t = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cos tI_Y & -\sin I_Y \\ \sin tI_Y & \cos tI_Y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} I_Y S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$

É fácil ver que está é uma composição de operadores de Fredholm, que é, portanto, Fredholm. Como o índice é localmente constante temos que $indA_t$ é constante. Em particular $indA_0 = indA_{\frac{\pi}{2}}$. Temos

$A_0 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ Q & T \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -S \circ T \\ I_y & 0 \end{pmatrix}$
Sabemos que $(x, y) \in N(A_0) \Leftrightarrow y \in S$ e $x \in N(T)$, então

$$N(S) + N(T) \to A_0$$

$$[x, y] \mapsto [y, x],$$

é um isomorfismo e $\dim(N(A_0)) = \dim(N(S)) + \dim(N(T))$.
Também definimos:

$$\varphi : CokerS \oplus CokerT \to CokerA_0$$
$$\left(\frac{z}{\Im S}, \frac{y}{\Im T}\right) \mapsto \frac{(z, y)}{\Im A_0}$$

Vejamos que φ está bem definida: Suponha $z = Sy'$, $y = Tx'$,

$$(z, y) = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} y' \circ T \\ x' \end{pmatrix} \in \Im A_0$$

É claro que φ é linear e limitada, φ é um isomorfismo. Então:

$$\dim(CokerA_0) = \dim(CokerS) + \dim(CokerT)$$

$\therefore indA_0 = indS + indT$.
Além disso, as funções:

$$\psi_1 : N(S \circ T) \to N(A_{\frac{\pi}{2}})$$
$$x \mapsto (0_Y, x)$$

$$\psi_2 : Coker(S \circ T) \to CokerA_{\frac{pi}{2}}$$
$$\frac{y}{\Im(S \circ T)} \mapsto \frac{(z, 0_Y)}{\Im(A_{\frac{\pi}{2}})}$$

são isomorfismos. A demonstração que ψ_1 é de fato um isomorfismo é clara. Já para vermos que ψ_2 está bem definida temos que:

$$z = S \circ Tx \Rightarrow \begin{pmatrix} z \\ 0_Y \end{pmatrix. \begin{pmatrix} 0 & -S \circ T \\ I_Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_Y \\ -x \end{pmatrix} \in \Im(A_{\frac{\pi}{2}}).$$

Ademais, claro que ψ_2 é linear, e:

$$\begin{pmatrix} z \\ 0_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -S \circ T \\ I_Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow z = S \circ T(-x)$$

$\therefore z \in \Im(S \circ T)$. Portanto ψ_2 é injetora. Finalmente, dado $(z, y) \in Z \oplus Y$,

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -S \circ T \\ I_Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \circ T \\ 0_X \end{pmatrix}$$

Então:

$$\frac{(z,y)}{\Im(A_{\pi}2} = \psi_2(\frac{z}{\Im(S\circ T)})$$

e ψ_2 é sobrejetiva. Portanto

$$ind(A_{\frac{\pi}{2}}) = ind(S \circ T),$$

e concluímos

$$ind(S \circ T) = indS + indT.$$

□

Definicão 2.39. Dados X espaço de Banach, $M \subset X$, um subespaço de X e $N \subset X^*$ um subesespaço X^*, definimos seus *anuladores* como:

$$M^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in M\}$$

$$\perp^N = \{x \in X : g(x) = 0, \forall g \in N\}$$

Teorema 2.40. *Seja X espaço de Banach, $M \subset X$, um subespaço de X e $N \subset X^*$ um subesespaço X^*, então:*

1. *$M^{\perp}$ é fechado na topologia fraca* em X^*.*

2. *${}^{\perp}N$ é fechado na topologia dada pela norma em X.*

3. *${}^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}$, considerando a topologia dada pela norma em X.*

4. *$({}^{\perp}N)^{\perp} = \overline{N}$ na topologia fraca* de X^**

Demonstração. É fácil verificar que $M^{\perp}$ e ${}^{\perp}N$ são subespaços vetoriais.

1. $M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} N(\phi_x)$, em que:

$$\phi_x : X^* \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto f(x)$$

   são funções contínuas na topologia fraca*, logo $N(\phi_x)$, $\forall x \in M$ é fechado, e portanto $M^{\perp}$ é fechado.

2. Provaremos que toda sequência converge em ${}^{\perp}N$ possui limite em ${}^{\perp}N$. Seja $(x_n) \subset^{\perp} N$ uma sequência com $x_n \mapsto x$. Para qualquer $g \in N$ é fato que $g(x_n) \mapsto g(x)$, como $g(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $x \in^{\perp} N$.

3. Se $x \in M$, então para toda $f \in M^{\perp}$ temos $f(x) = 0$, implicando $x \in^{\perp} (M^{\perp})$. Por (2) sabemos que $\overline{M} \subset^{\perp} (M^{\perp})$. Suponha que $x \notin \overline{M}$, pelo teorema de Hanh-Banach, $\exists f \in X^*$ tal que $f|_{\overline{M}} = 0$ e $f(x) = ||x|| > 0$. Em particular, $f \in M^{\perp}$ e $x \notin^{\perp} (M^{\perp})$. Portanto: $\overline{M} =^{\perp} (M^{\perp})$.

4. Demonstra-se de maneira análoga ao item (3), apenas trocando a topologia dada pela norma pela topologia fraca*.

□

Teorema 2.41. *Suponha X, Y espaços de Banach e $T \in B(X,Y)$. então:*

$$N(T^*) = Im(T)^\perp \text{ e } N(T) =^\perp (Im(T^*)).$$

Demonstração. Temos que $f \in N(T^*) \Leftrightarrow T^* f = 0_{X^*} \Leftrightarrow \forall x \in X, f(Tx) = 0 \Leftrightarrow f \in \Im(T)^\perp$

Para a outra afirmação temos que: $x \in N(T) \Leftrightarrow Tx = 0_Y \Leftrightarrow \forall f \in Y^*, f(Tx) = 0 \Leftrightarrow \forall f \in Y^*, T^* f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in^\perp Im(T^*)$.

□

Teorema 2.42. ***(Alternativa de Fredholm.)*** *Sejam X, Y espaços de Banach, e $T \in B(X,Y)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T satisfaz a alternativa de Fredholm.*
2. *T é operador de Fredholm de índice* 0.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Se vale (1) na definição 2.26 então T é um isomorfismo e portanto um homeomorfismo linear pelo teorema da aplicação aberta. Mas então T é Fredholm e $ind(T) = 0$.

Se vale (2) na definição 2.26 então temos que mostrar que $\dim(cokerT) < \infty$, e que $\dim(cokerT) = \dim N(T) = n$. Seja $\{f_1, ..., f_n\} \subset Y^*$ um conjunto linearmente independente tal que:

$$y \in \Im(T) \Leftrightarrow f_i(y) = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.9}$$

Definimos

$$N = span\{f_1, ..., f_n\},$$

N é um subespaço de Y^* de dimensão n, em particular, N é fechado na topologia da norma e na topologia fraca*. Sabemos que (2.9) é equivalente a

$$\Im(T) \equiv^\perp N, \tag{2.10}$$

E como $\perp_N$ é fechado na topologia induzida pela norma em Y, (Teorema 2.37) então $\Im(T)$ é fechado na topologia da norma. Então, pelo teorema 2.30

$$\dim[(CokerT)^*] = \dim(N(T^*),$$

Também, por 2.10 segue que

$$\Im(T)^\perp = (^\perp N)^\perp$$

O teorema 2.40 nos diz que $(^\perp N)^\perp$ é o fecho de N em Y^*, mas como vimos anterioremente, N é fechado na topologia fraca*, donde

$$(\Im(T))^\perp \equiv N,$$

e portanto pelo teorema 2.41 $\dim(N(T^*)) = n$. Isso mostra que $(CokerT)^*$ possui dimensão finita e $\dim(CokerT) = \dim((CokerT)^*) = \dim(N(T^*)) = n$, o que conclui a primeira parte da demonstração.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se tivermos $\dim(N(T)) = 0$ então T é um homeomorfismo linear, então vale (1) na definição 2.26.

Caso tenhamos $\dim(N(T)) = n > 0$, pelo fato de $\Im(T)$ ser fechada temos (Teorema 2.30)

$$\dim(N(T^*)) = \dim(CokerT) = n$$

Onde a última igualdade segue do fato de $\dim CokerT = \dim N(T)$, seja $\{f_1, ..., f_n\} \subset Y^*$ uma base de $N(T^*)$. Então pelo teorema 2.37,

$$\perp_{N(T^*)} = \perp_{(ImT)^\perp} = \Im T$$

Pois pelo teorema 2.40 $\perp_{(ImT)^\perp}$ é fechado na topologia da norma. Então:

$$\exists x \in X, y = Tx \Leftrightarrow f_i(y) = 0, \forall i = \{1, ..., n\}.$$

O que prova o teorema.

□

Teorema 2.43. *Sejam X, Y espaços de Banach. Seja T operador de Fredholm e K operador compacto. Então $T + K$ é Fredholm e $ind(T + K) = ind(T)$.*

Demonstração. Pelo teorema 2.36, existe operador linear contínuo $R \in B(Y, X)$ tal que $R \circ T - I_X$ e $T \circ R - I_Y$ são operadores compactos. Então

$$R \circ (T + K) - I_X = [(R \circ T) - I_X] + R \circ K$$

$$(T + K) \circ R - I_Y = [T \circ R - I_X] + K \circ R$$

e ambos os lados direitos dessa equação são compactos.

Mas então $T + K$ é Fredholm (teorema 2.36), e além disso, R é operador de Fredholm. Então pelo teorema 2.38 temos:

$$ind(R \circ (T + K)) = indR + ind(T + K)$$

$$ind(R \circ T) = indR + indT$$

Escrevemos:

$$K'_X = R \circ (T + K) - I_X$$

$$K_X = R \circ T - I_X$$

Então:

$$indR + ind(T + K) = ind(K'_X + I_X), \quad indR + indT = ind(K_X + I_X)$$

Pela proposição 2.32 com o teorema 2.42 concluímos que os índices dos segundos membros acima são 0, ou seja,

$$ind(K'_X + I_X) = ind(K_X + I_X) = 0.$$

donde segue o resultado.

□

Capítulo 3

Geodésicas em variedades Riemannianas

3.1 Apresentação do problema

Dada uma variedade Riemanniana M gostaríamos de saber se dada uma geodésica entre dois pontos $a, b \in M$ isso significa que localmente teremos a existência de geodésicas na variedade entre pontos $p \in U$ e $q \in U$, onde U e V são vizinhanças de a e b respectivamente. Geodésicas são curvas que intuitivamente representam a menor distância entre dois pontos. Desenvolveremos na próxima sessão uma parte introdutória da teoria de geometria Riemanniana que nos permitirá chegar em uma equação diferencial parcial que da´ra condições necessárias e suficientes para que uma curva γ seja uma geodésica. Também daremos significado preciso para o que é escrever "localmente" essa curva.

Para termos uma primeira idéia do que seria esse problema, imaginando que temos γ expressa localmente por: $\gamma = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ então γ é geodésica se e somente se satisfizer as seguintes n equações diferenciais parciais:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}$$

$k = 1, 2, .., n$. Em que v^j e Γ_{ij}^k serão dados.

Queremos ver esse problema como uma aplicação do teorema da função inversa. Nosso objetivo é então trabalhar com o operador:

$$P : A \to B$$

$$\gamma \mapsto \frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0$$

$k = 1, 2, ..., n$ Onde A e B são espaços de Banach.

Também é necessário dizermos quais os pontos envolvidos, para os quais queremos buscar a geodésica. Então nosso objetivo final é provar que:

$$B : A \to B \times M \times M$$

$$\gamma \mapsto (P(\gamma), \gamma(0), \gamma(1))$$

é um difeomorfismo se restrita a um aberto em torno de uma geodésica pré definida, para isso utilizaremos o teorema da função inversa, ou seja, provando que $DB(\gamma)$ é homeorfismo linear para toda γ geodésica.

Mesmo sem definir os espaços os quais vamos trabalhar, podemos a partir da nossa noção de cálculo em espaços de Banach inferir que:

$$DB(\gamma)h = (DP(\gamma)h, h(0), h'(0))$$

Em que:

$$\{DP(f)h\}^i = \tfrac{d^2h^i}{dt^2} + \textstyle\sum_j 2\Gamma^k_{j,k}\tfrac{dx^j}{dt}\tfrac{dh^k}{dt} + \textstyle\sum_j \tfrac{\Gamma^i_{j,k}}{x^i}\tfrac{x^j}{dt}\tfrac{dx^k}{dt}h^l.$$

Neste ponto utilizaremos a alternativa de Fredholm, buscando simplificar a prova de que $DB(\gamma)$ é um isomorfismo.

3.2 Variedades Riemannianas

Faremos agora uma pequena apresentação de conceitos básicos em geometria que estão presentes em nosso primeiro problema. Nosso objetivo é provar a existência de geodésicas em variedades Riemannianas. Geodésicas são em muitos casos o caminho mais curto entre um ponto e outro, como retas em um espaço euclidiano. Em uma variedade Riemanniana quem determina o comprimento de uma curva é a métrica assim como no $\mathbb{R}^n$ quem faz esse papel é a norma usual.

Quando pensamos em variedades, pensamos em objetos que localmente se parecem com o $\mathbb{R}^n$, no sentido topológico, e para os quais podemos dar uma estrutura onde se possa fazer cálculo. Buscamos noções intrínsecas a esses objetos, que não dependam das funções que os identificam com o $\mathbb{R}^n$.

Definicão 3.1. (Cartas) Dado um espaço topológico M, uma carta de dimensão n é um par (U, φ), onde U é um conjunto aberto de M, e $\varphi : U \to R^n$ é um homeomorfismo de U em um aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Dadas duas cartas de dimensão n (U_1, φ_1) e $(U_2\varphi_2)$ ao espaço topológico M em que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, chamamos de *mapas de transição* as funções:

$$\varphi_1^2 : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

$$y \mapsto \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y)$$

$$\varphi_2^1 : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

$$y \mapsto \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(y)$$

Observe que são homeomorfismos entre abertos de $\mathbb{R}^n$.

Definicão 3.2. (Atlas). Dado um espaço topológico M, um atlas A de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ de dimensão n é um conjunto de cartas $\{U_i, \varphi_i\}_i$ de dimensão n tal que:

- $\bigcup_i U_i = M$

- Sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então os mapas de transição φ_i^j, φ_j^i são C^k difeomorfismos.

Doravante omitiremos à referência à dimensão quando não houver risco de confusão. Dadas duas cartas (U, φ) e (U, ψ) de classe C^k, dizemos que são compatíveis se houver intersecção $U \cap V \neq \emptyset$ temos que os mapas de transição $\varphi \circ \psi^{-1}$ e $\psi \circ \varphi^{-1}$ são difeomorfismos de classe C^k.

Definicão 3.3. Dois atlas A e A' são *equivalentes* se todas as cartas de A forem compatíveis com cada carta de A'.

É fácil ver que a compatibilidade ente atlas induz uma relação de equivalência no conjunto dos atlas de um espaço topológico M.

Definicão 3.4. (Atlas Maximal). Um atlas A de classe C^k diz-se *maximal* quando dado um outro atlas qualquer de classe C^k A' $A \subset A' \Rightarrow A = A'$.

De fato a união de atlas é ainda um atlas. Dada uma classe de equivalência a união de todo os atlas da classe é um atlas maximal. compatível com todos os outros atlas. Portanto todo atlas está contido em um único atlas maximal.

Definicão 3.5. (Variedade). Uma variedade de classe C^k e de dimensão n é um espaço topológico M, munida de um atlas maximal de classe C^k e dimensão n.

Note que para descrever uma variedade, basta definir um atlas, subentendendo-se que este há de ser incluído em um único atlas máximo.

Exemplo 3.6. ***(O espaço projetivo*** $\mathbb{R}P^n$***.)*** *Definimos* $\mathbb{R}P^n$ *como um subconjunto de* $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ *módulo a seguinte relação de equivalência:*

$$u \backsim v \Leftrightarrow u = \lambda v \text{ para algum } \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}.$$

Podemos vê-lo como o espaço das "direções" em $\mathbb{R}^n$*, munido de topologia quociente.*

Dado um ponto $p = [x_1, .., x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n$ *chamamos as componentes da classe de equivalência* $(x_1, ..., x_{n+1})$ *de coordenadas homogêneas de* $\mathbb{R}P^n$

Definimos o conjunto de abertos $U_i = \{[x_1, ..., x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$*. Esses abertos estão bem definidos pois se* $[x_1, ..., x_{n+1}] = [y_1, ..., y_{n+1}]$ *então* $x_i = \lambda y_i$ *e* $\lambda \neq 0$*.*

Definimos as cartas:

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$$

$$[x_1, ..., x_{n+1}] \mapsto (\tfrac{x_1}{x_i}, \tfrac{x_2}{x_i}, ..., \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \tfrac{x_{n+1}}{x_i})$$

φ_i *está bem definida porque todas suas componentes são definidas através de divisões.*

Notemos que φ *é homeomorfismo através da expressão de sua inversa:*

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}P^n$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto [x_1, ..., x_i, 1, x_{i+1}, ..., x_n]$$

É bastante simples verificar que de fato são inversas.

Devemos verificar os mapas de transição. Na intersecção de duas cartas temos que, assumindo sem perda de generalidade que $i < j$ *:*

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(x_1, ..., x_n) = (\tfrac{x_1}{x_j}, ..., \tfrac{x_{i-1}}{x_j}, \tfrac{1}{x_j}, \tfrac{x_i}{x_j}, ..., \tfrac{x_{j-1}}{x_j}, \tfrac{x_{j+1}}{x_j}, ..., \tfrac{x_n}{x_j})$$

Que é um difeomorfismo de classe C^∞. Note o domínio $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ e imagem $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ de $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$ são ambos abertos de $\mathbb{R}^n$

Exemplo 3.7. ***(Esfera em** $\mathbb{R}^n$) A esfera em $R^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ é uma variedade compacta (com a topologia induzida). Para cobrir S^n são necessárias pelo menos duas cartas, as chamadas projeções estereográficas. Denotaremos N ("polo norte") o conjunto formado pelo ponto $(0, ..., 0, 1) \in S^n$ e por S ("polo sul") o conjunto formado pelo ponto $(0, ..., 0, -1) \in S^n$. As cartas são:*

$$\sigma_1 : S^n - N \to \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \mapsto \tfrac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, ..., x_n)$$

e

$$\sigma_1 : S^n - S \to \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \mapsto \tfrac{1}{1+x_{n+1}}(x_1, ..., x_n)$$

A medida que nos aproximamos do pólo norte o módulo de σ_1 aumenta. A direção do vetor fica determinada pelas coordenadas anteriores. Para S^3 é possível enxergar o comportamento dessa função com maior clareza, imaginando um plano tangente a esfera no pólo sul, por exemplo. Cada ponto s desse plano está relacionado a uma reta que intersecta a esfera em um ponto S', sendo esse ponto a imagem inversa de s por σ.

Queremos que σ_i e σ_2 sejam homomorfiamos. Para isso exibimos suas inversas:

$${\sigma_1}^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n - N$$

$$(x_1, x_2, ...x_n) \mapsto (\tfrac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1}(2x_1, ..., 2x_n), \textstyle\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 1))$$

e

$${\sigma_2}^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n - S$$

$$(x_1, x_2, ...x_n) \mapsto (\tfrac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1}(2x_1, ..., 2x_n), -(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1))$$

Sendo simples verificar que estas são de fato as inversas. Também é simples a verificação de que na intersecção dos domínios, ou seja, em $S^n - \{N, S\}$ as funções de transição

$$\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1} = \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$$

são difeomorfismos de classe C^∞. Ambas tem a seguinte expresssão:

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto \tfrac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}(x_1, ..., x_n)$$

Que é uma função C^∞ a menos do ponto $(0, ..., 0)$. Concluímos que S^n é variedade de dimensão n e classe C^∞.

Antes de falarmos em espaços tangentes, estenteremos a noção de diferenciabilidade para funções entre variedades. A partir de agora, "variedade" ou "variedade diferenciável" será sempre entendida como de classe C^∞, que são as mais relevantes para a Geometria.

Definicão 3.8. Sejam M_1 e M_2 duas variedades de dimensão n e m respectivamente e $h : M_1 \to M_2$ contínua. Dizemos que h é de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ se para todo $p \in M_1$ existe uma carta (U, φ) em M_1 com $p \in U$ e uma carta (V, ψ) em M_2 com $q = h(p) \in V$, com $f(U) \subset V$, e

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V)\mathbb{R}^n$$

é uma função de classe C^k.

Exemplo 3.9. *Seja M uma variedade. Dada uma curva $\gamma : (a, b) \to M$ temos que pela definição γ é de classe C^k se para cada $p \in \mathbb{R}$ pudermos achar cartas (U, φ) em (a, b) tal que $p \in U$ e (V, ψ) em M tal que $\gamma(p) \in V$ tal que $\psi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^k. Porém a carta (U, φ) pode ser tomada como $U = (a, b)$ $\varphi = Id$, donde precisamos apenas verificar que:*

$$\psi \circ \gamma : (a, b) \to \psi(V)$$

é uma função C^k

A partir de agora, uma aplicação ser diferenciável será sinônimo de ser C^∞.

Gostaríamos de introduzir o conceito de espaço tangente a uma variedade M. Uma das formas de fazer isso é pensarmos em uma curva γ sobre essa variedade. Quando imaginamos uma variedade como a esfera S^2, é intuitivo que ao passar em determinado ponto p o vetor $\gamma'(p)$ tangência a esfera, e portanto faz parte de seu espaço tangente. A forma mais natural de trazermos essa curva para o $\mathbb{R}^n$, quando a variedade não está imersa lá, é utilizando as cartas da variedade M. Surgiu assim a idéia de, dada uma carta φ , associar duas curvas γ_1 e γ_2 tal que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p \in M$, ao valor da derivada $(\varphi \circ \gamma_1)'(0)$, $(\varphi \circ \gamma_1)'(0)$. É fácil ver que esse valor não depende das cartas, e assim poderia-se definir o espaço tangente como a classe de equivalência de curvas. Essa construção existe; no entanto, outras definições equivalentes e mais fáceis de trabalhar apareceram.

Deixaremos de trabalhar com classes de equivalência de curvas para trabalharmos com a derivada direcional de funções da variedade com valores reais. Para o conceito de derivada direcional aparecem novamente as curvas, de forma que a idéia continua sendo parecida. Se $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ essas curvas darão origem à mesma função, como é possível observar a partir da definição abaixo.

Definicão 3.10. (Vetor tangente) Sejam M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é uma curva diferenciável em M. Suponha $\alpha(0) = p \in M$, e seja $D(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : \text{f é diferenciável}\}$ O *vetor tangente* à curva em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : D(M) \to \mathbb{R}$ dada por: $\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}$.

Definicão 3.11. (Espaço Tangente) Sejam M uma variedade e $p \in M$. Definimos o *espaço tangente a p*, denotado por T_pM como o espaço vetorial dos vetores tangentes a p.

A dimensão de T_pM fica determinada através de um isomorfismo com o $\mathbb{R}^n$. Novamente usaremos uma carta $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ e definimos:

$$(d\varphi)_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$$

$$v = \alpha'(0) \mapsto (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

De fato, dado $v = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ se considerarmos as curvas $\varphi_v^{-1}(t) = \varphi_i^{-1}(a_1t, a_2t, ..., a_nt, ..., 0)$, então $(\varphi \circ \varphi_v)'(0) = v$. Mostrando que a função é sobrejetiva. Para ver que $d\varphi_p$ é injetiva vejmos que se $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$ então $(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$ para toda $f \in D(M)$. A saber:

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) = (f \circ \varphi^{-1})'((\varphi \circ \alpha)(0))(\varphi \circ \alpha)'(0) =$$
$$(f \circ \varphi^{-1})'((\varphi^{-1} \circ \beta)(0))(\varphi \circ \beta)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$$

Assim $\alpha'(0) + \beta'(0)$ é a imagem inversa de $(\varphi \circ (\alpha + \beta))'(0)$.

Vamos construir uma base para T_pM, chamada base coordenada.

Seja φ uma carta $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$

Considere $x_i : t \mapsto \varphi^{-1}(0, ..., 0, t, 0, ..., 0)$, com t na i-ésima posição. x_i é uma curva chamada curva coordenada, para todo $i = 1, 2, .., n$. Queremos mostrar que o conjunto $\{x_i'(0) : i = 1, 2, ..., n\}$ é uma base para T_pM. Note que:

$$x_i'(0) : D(M) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto (f \circ x_i)'(0)$$

Denotaremos também $x_i'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ ou simplesmente $\frac{\partial}{\partial x_i}$ se não houver risco de confusão.

Queremos expressar qualquer vetor tangente como combinação de vetores $x_i'(0)$. Para utilizarmos a regra da cadeia utilizaremos a carta φ e sua inversa φ^{-1} com objetivo de obtermos funções em $\mathbb{R}^n$. Temos que dada $f \in D(M)$, $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ e também:

$$\varphi \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto (x_1(t), ..., x_n(t))$$

então:

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f \circ \varphi^{-1}((x_1(t), ..., x_n(t)))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n x_i'(0)(\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}) =$$
$$(\sum_i x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i}))f$$

Logo o vetor tangente ou a aplicação $\alpha'(0)$ pode ser escrito apenas em termos nas aplicações $x_i'(0)$:

$$\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i}).$$

Mostrando assim que de fato temos n vetores tangentes como base do espaço.

Observação: Dada uma variedade M e um atlas $\{U^\alpha, \varphi^\alpha\}_\alpha$, se $p \in U_\alpha$ chamaremos de curvas coordenadas as curvas $x_i^\alpha : t \mapsto (\varphi^\alpha)^{-1}(0, ..., t, ..., 0)$. com t na i-ésima coordenada.

Exemplo 3.12. ***(Fibrado tangente)*** *Seja M uma variedade de dimensão n. Chamamos TM o conjunto de todos os espaços tangentes $\bigcup_{p\in M} TpM$. Podemos ver um ponto em TM como um par (p, v) onde p é um ponto de M e v é um vetor tangente a esse ponto. Sendo assim há uma projeção natural:*

$$\phi : TM \to M$$

$$(p, v) \mapsto p.$$

Gostaríamos de ver TM como uma variedade diferenciável. Ao mesmo tempo introduziremos TM como espaço topológico, utilizando para isso a topologia induzida pelas cartas que definiremos.

Seja $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ um atlas maximal de M. Denotamos as coordenadas de U_α por $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ e as bases de cada espaço tangente a $p \in U_\alpha$ por $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$.

Para cada $\alpha \in A$, definimos:

$$y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$$

$$(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) \mapsto (x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \textstyle\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha})$$

Gostaríamos de mostrar que $(TM, \bigcup_\alpha (U_\alpha, y_\alpha))$ é uma variedade difenciável.

Como $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}|_p\}$ é uma base para $TM, p \in U_\alpha$, é claro que $\bigcup_\alpha y_\alpha((U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM$.

Também é claro que y_α é uma bijeção. Também y_α é automaticamente um homeomorfismo, já que a topologia em questão é a topologia induzida pela família de funções $\{y_\alpha\}_\alpha$.

Assim basta verificarmos os mapas de transição. Seja $(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$. Então:

$$(p, v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta))$$

Onde $q_\alpha \in U_\alpha, q_\beta \in U_\beta$ e $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$.

Então:

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)((q_\alpha), d(x_\beta \circ x_\alpha)(v_\alpha)).$$

Agora, recorrendo ao fato de $\bigcup_\alpha (U_\alpha, x_\alpha)$ ser um atlas, temos que $(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$ é diferenciável e $d(x_\beta \circ x_\alpha)$ também o é.

Proposicão 3.13. *Sejam M_1 e M_2 duas variedades de dimensão n e m respectivamente e $\varphi : M_1 \to M_2$ uma função diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e para cada $v \in T_pM$ escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$ com $\alpha(p) = 0$ e $\alpha'(0) = v$. Seja $\beta = \varphi \circ \alpha$. Defina a função:*

$$d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$$

$$v \mapsto d\varphi(v) = \beta'(0)$$

Então $d\varphi_p$ é linear e não depende da escolha de α.

Demonstração. Sejam $\psi_1 : U \subset M_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\psi_2 : V \subset M_2 \to \mathbb{R}^n$ cartas, tais ques $p \in U$ e $\varphi(p) \in V$. Sendo $q = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Podemos escrever:

$$\psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1}(q) = (y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n))$$

$y_1, ..., y_n : U \to V$.

Por outro lado também podemos podemos expressar os elementos de U utilizando α e a carta ψ_1 :

$$\psi_1 \circ \alpha(t) = (x_1(1), ..., x_n(t))$$

Compondo, temos:

$$\psi_2^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), ..., x_n(t)), .., y_n(x_1(t), ..., x_n(t))$$

E portanto:

$$\beta'(0) = (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x_i'(0), ..., \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x_i'(0))$$

O que mostra a independência de $\beta'(0)$ com α.

Também podemos escrever:

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = (\tfrac{\partial y_i}{\partial x_j})(x_j')$$

$i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n$

Onde $\frac{\partial y_j}{x_j}$ são os elementos de uma matriz mxn e x_j' indica uma coluna com n elementos. Então $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de T_pM em $T_{\varphi(p)}M$.

□

Definicão 3.14. A aplicação linear $d\varphi_p$ é chamada *derivada* de φ em p.

Definicão 3.15. Um *campo vetorial* em uma variedade é uma função diferenciável $F : M \to TM$ tal que $\phi \circ F = I$ em que

$$\phi : TM \to M$$

$$(p, v) \mapsto p.$$

Se $f \in D(M)$ chamamos de derivada de f ao longo do campo X a aplicação:

$$X(f) : M \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \tfrac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}$$

em que $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ é diferenciável e tal que $\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$ e $p = \gamma(0)$.

Definicão 3.16. Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade *diferenciável* onde cada espaço tangente TpM é munido de um produto interno g_p, que variam suavemente, no sentido de que, para quaisquer campos vetoriais X e Y

$$g : M \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$$

É uma função C^∞. A função $g : p \in M \mapsto g_p$ é uma *métrica Riemaniana* em M.

Exemplo 3.17. ***(Métrica induzida por imersões)*** *Sejam M uma variedade de dimensão n e $f : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão, ou seja, f diferenciável e sua derivada $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{R}^{n+k}$ é injetora para todo $p \in M$. Então podemos definir uma estrutura Riemanniana em M da seguinte maneira: $g_p(u, v) = \langle df_pu, df_pv\rangle$ para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$. Em particular como f é injetiva g_p é positiva definida e temos um produto interno para cada ponto. Dados dois campos vetoriais X e Y em M gostaríamos que a função*

$$g : M \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \langle df_pX(p), df_pX(p)\rangle$$

fosse diferenciável. Isso é verdade porque essa função pode ser decomposta em funções C^∞. O produto interno em $\mathbb{R}^n$ é uma função C^∞ assim como a derivada de f é diferenciável. S

A mesma coisa pode ser feita para uma variedade Riemanniana N no lugar de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Exemplo 3.18. ***(A métrica em S^2)*** *Consideremos a inclusão da esfera em $\mathbb{R}^{\nvDash}$ da maneira canônica: $I : S^2 \to \mathbb{R}^3$ a identidade restrita a S^2.*

Consideremos a parametrização:

$$\phi : (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \to S^2$$

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$$

Então analogamente ao exemplo anterior, podemos induzir na esfera uma métrica g a partir da métrica euclidiana em $\mathbb{R}^3$, chamada métria padrão ou usual em S^2.

$$g_p(u, v) = \langle dI_p(u), dI_p(v)\rangle$$

Utilizaremos então nosso conhecimento sobre derivação de funções entre variedades.

$$dI_p : T_pM_1 \to T_{I(p)}M_2$$

$$v \mapsto \beta'(0) = (I \circ \alpha)'(0)$$

onde $\alpha'(0) = v$.

Para determinarmos essa forma bilinear usando coordenadas locais é conveniente sabermos onde a base do espaço T_pM é mandada por ela. Escreveremos essa base como: $\{\frac{d}{d\theta}, \frac{d}{\phi}\}$, onde essa é a base do vetor tangente associada à parametrização ϕ com $p \in \Im\phi$ Então:

$$dI_p(\tfrac{d}{d\theta}) = (I \circ \phi)'(0)$$

Mas $(I \circ \varphi_\theta)'(0) = \frac{d\varphi}{d\theta}$ no sentido usual de $\mathbb{R}^3$.

Daí ficamos com

$$d_pI(\tfrac{d}{d\theta}) = (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi), -\sin(\theta))$$

Pelo processo análogo, temos:

$$d_pI(\tfrac{d}{d\varphi}) = (-\sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)\sin(\theta), 0)$$

Daí:

$$g_p(\tfrac{d}{d\theta}, \tfrac{d}{d\varphi}) = \langle d_p I(\tfrac{d}{d\theta}), d_p I(\tfrac{d}{d\varphi})\rangle = 0$$

$$g_p(\tfrac{d}{d\theta}, \tfrac{d}{d\theta}) = \langle d_p I(\tfrac{d}{d\theta}), d_p I(\tfrac{d}{d\theta})\rangle = 1$$

$$g_p(\tfrac{d}{d\varphi}, \tfrac{d}{d\varphi}) = \langle d_p I(\tfrac{d}{d\varphi}), d_p I(\tfrac{d}{d\varphi})\rangle = \sin^2(\theta)$$

Ou seja, podemos representár o produto interno em p pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

3.3 Conexões, derivada covariante e geodésicas

Para introduzirmos a idéia de conexão, precisaremos trabalhar com bases para os espaços tangentes. Daqui para frente trabalharemos frequêntemente com campos.

Note que, na definição anterior tínhamos que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *como a derivada da curva coordenada, associada a sua carta* (U, φ) *em M. Na verdade podemos escrever a definição anterior como:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : D(M) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto (f \circ x_i)'(0)$$

em que $x_i = \varphi^{-1}(0, ..., t, .., 0)$ *com t na i-ésima coordenada, é a curva coordenada associada a uma carta* φ*, e* $x_i(0) = p$*. podemos escever:* $(f \circ x_i)'(0) = (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ x_i)'(0) = \langle (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi \circ x_i)(0), (\varphi \circ x_i)'(0)\rangle = \langle (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p), (0, .., 1, .., 0)\rangle = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p))$

Logo podemos pensar $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *como:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) : D(M) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)),$$

em cada $p \in M$*. Podemos, então, ver*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TM$$

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

como um campo vetorial localmente definido. Em príncipio, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *é um campo definida locamente em U. Algumas vezes utilizaremos propriedades que só estarão definidas para campos definidos em toda a variedade. Por isso é interessante falarmos na extenssão desse campo para toda variedade.*

Extensões de campos são feitas utilizando uma "bump function" cuja existência é provada em [14]. Por definição, dizemos que f é uma "bump function" para um ponto $p \in U$*, com relação ao campo* $\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TM$ *então* $f \in C^\infty(M) = D(M)$*,* $f = 1$ *para um aberto* $V \subset U$*,* $p \in V$*, e além disso o suporte de f está contido em U. Seja f então com essas propriedades. Defina* $Z : M \to TM$ *por:*

$$Z_i(q) = 0 \in T_qM, q \notin U \text{ e } Z_i(q) = f(q)\frac{\partial}{\partial x_i}, q \in U$$

Então Z_i é um campo, cuja restrição a V é $\frac{\partial}{\partial x_i}$. É claro que Z_i é diferenciável.

Usaremos constantemente a notação $\frac{\partial}{\partial x_i}$ simbolizando, na verdade Z_i.

Definicão 3.19. Seja $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ uma curva. Dizemos que V é um *campo ao longo de c* se: $V : I \subset \mathbb{R} \to TM$ for tal que $V(t) \in T_{c(t)}M$, $\forall t \in I$ Dada uma carta $\varphi_{c(t)} : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ em que $\Im c \subset U$ podemos escrever V como:

$$V(t) = \sum_i V_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(c(t))$$

Em que $V_i : I \to \mathbb{R}$.

Dizemos que V é diferenciável se V_i é diferenciável para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Quando estudamos geometria de superfícies, dada uma superfície $S \subset R^3$ e um campo V, a maneira de definir derivação é utilizando a derivada usual em R^3 e projetando-a no espaço tangente. Se quisermos definir esse conceito em variedades não podemos utilizar a derivada usual.

O que faremos a partir de agora é motivado por definirmos a noção de derivada para um campo ao longo de uma curva. Para isso utilizaremos uma definição bastante abstrata, a de conexões. A idéia por trás dessas definições é a de definir uma maneira natural de transportar vetores de um espaço tangente a outro, para que possa fazer sentido somar dois pontos na imagem de V.

Seja $\Upsilon(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis de uma variedade M e $D(M)$ o conjunto das funções em $\mathbb{R}$ de classe C^∞.

Definicão 3.20. Uma *conexão afim* em uma variedade diferenciável M é uma função:

$$\nabla : \Upsilon(M) \times \Upsilon(M) \to \Upsilon(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

$\forall X, Y, Z \in \Upsilon(M)$ e $\forall f, g \in D(M)$

Onde $X(f)$ denomina a derivada de f com relação ao campo X.

Observação: *A conexão afim é um conceito local, no sentido que para calcular $\nabla_X Y(p)$ precisamos apenas do valor de $X(p)$ de X em p e de Y em um aberto $U \subset M$, tal que $p \in U$.*

Para demonstrar isso, comecemos verificando que dados dois campos Y_1 e Y_2 tais que $Y_1 = Y_2$ em um aberto $U \subset M$,, $p \in U$ então $\nabla_X Y_1(p) = \nabla_X Y_2(p)$. Seja $W = Y_1 - Y_2$, de modo que $W = 0$ em U. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma "bump function," ou seja, função diferenciável tal que $f = 1$ em um aberto $V \subset U$, em que $p \in V$, e $f = 0$ fora de U. Então $fW = 0$. Pela propriedade (2) inferimos que: $\nabla_X(fW) = 0$. Por outro lado

$$\nabla_X(fW) = f\nabla_X W + X(f)W \Rightarrow \nabla_X(fW)(p) = \nabla_X W(p),$$

e portanto: $\nabla_X W(p) = 0$.

Fazendo o mesmo processo para cada $p \in M$*, temos que a conexão depende apenas do valor do campo* Y *em um aberto.*

Agora veremos a afirmação mais específica de que $\nabla_X Y(p)$ *depende apenas do valor de* X *no ponto* p*. Escrevendo os campos* X *e* Y *em coordendas, a partir de uma parametrização* $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$*, em torno de* p*, temos:*

$$X(p) = \textstyle\sum_i X_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \quad Y(p) = \sum_j Y_j(p)\frac{\partial}{\partial_{x_j}}(p)$$

Estamos descrevendo o campo localmente, faremos novamente uma extensão para que possamos aplicar as propriedades de conexão. Essa extensão depende novamente de uma "bump function" f*, e como anteriormente:* $f = 1$ *em* $V \subset U$ *e suporte de* f *está contido em* U*. Seja então a extensão* $\overline{x_i} : M \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\overline{X_i}(q) = 0, q \notin U \text{ e } \overline{Xi}(q) = f(q)x_i(q),\ q \in U.$$

E então: $\overline{X}(q) = \sum_i \overline{X_i}(q)\frac{\partial}{\partial x_i}(q)$*,* $\forall q \in M$*. lembrando que já estamos considerando* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *estendido.*

O mesmo pode ser feito com Y*. Por simplicidade, novamente, continuaremos denotando* X *e* Y *em coordenadas. Agora sim, utilizando as propriedades de conexão:*

$$\nabla_{\sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}} \textstyle\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i X_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{i,j} X_i Y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}(Y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Nesse ponto, para facilitar a notação e podermos evoluir nos cálculos, introduziremos aqui os símbolos de Christoffel.

Definicão 3.21. (Símbolos de Christoffel.) Escolhida uma carta $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ podemos escrever:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \textstyle\sum_k \Gamma_{i\ j}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Então $\Gamma_{i\ j}^k : M \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis chamadas *símbolos de Christoffel.*

Reescrevendo com os símbolos de Cristhoffel temos:

$$\nabla_X Y = \textstyle\sum_{i,j} X_i Y_j \sum_k \Gamma_{i\ j}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i\ j} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}(Y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

e trocando j *por* k *no segundo somatório finalmente obtemos:*

$$\nabla_X Y = \textstyle\sum_k (\sum_{i,j} X_i Y_j \Gamma_{i\ j}^k + X(Y_k))\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Isso mostra que $\nabla_X Y(p)$ *depende apenas do valor de* X *de ponto* p *já que do lado direito da igualdade não aparece a nenhum coeficiente relacionado a derivada de* X*. A saber* $\nabla_X Y$ *depende apenas de* $X_i(p)$*,* $Y_k(p)$ *e* $X(Y_k)(p)$*, donde* $\nabla_X Y$ *depende do valor de* Y *ao longo de uma curva tangente a* p*.*

É também interessante observar que um exemplo de conexão em um espaço euclidiano é a derivada usual, que encontra-se representada pela por: $\sum_k X(Y_k)\frac{\partial}{\partial x_k}$*. Dessa forma os símbolos de Cristoffel podem ser vistos como uma "correção" desta derivada de acordo com a conexão dada.*

Apesar da definição abstrata, o que estamos definindo fica mais claro a partir da próxima proposição, que visa a relacionar a noção de derivada de um campo V ao longo de uma curva à idéia de conexões afins. Basicamente a cada conexão poderemos associar uma noção de derivada para V, que chamaremos sua derivada covariante. A relação entre esses dois objetos está em podermos ver um campo vetorial restrito a imagem de uma curva c como um campo ao longo de uma curva e relacionar então a conexão deste campo com relação ao campo c′ a sua derivada covariante, como mostra a terceira propriedade da proposição seguinte.

Proposicão 3.22. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Existe uma única correspondência que associa um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ a outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ a cada c tal que:*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}, \;\; \forall V, W\Upsilon(c)$
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt} \;\; \forall V \in \Upsilon(c)\forall f \in D(M)$
3. *Se* $V(t) = Y(c(t))$ *então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y, \;\; \forall t \in I$, *em que* $Y \in \Upsilon(M)$

Essa correspondência é chamada derivada covariante de V ao longo de c.

Observe que (3) *faz sentido pois, como já vimos, $\nabla_X Y$ depende apenas do valor de X no ponto $p \in M$*

Demonstração. Primeiramente provaremos que se a derivada covariante existe ela é única. Seja $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ uma carta com $c(I) \cap U \neq \emptyset$. Podemos escrever $V(t) = \sum_j v_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j}(c(t))$.

Da primeira e segunda propriedades podemos inferir que:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j} \circ c + \sum_j v^j \frac{\frac{\partial}{x_j} \circ c}{dt}$$

$x \circ c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, então utilizando a terceira propriedade, e os símbolos de Christoffel, vem

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j} \circ c + \sum_{i,j,k} \frac{dx_i}{dt} v^j (\Gamma_{i\ j}^{k})(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ c), \tag{3.1}$$

o que mostra a unicidade de $\frac{DV}{dt}$.

Para demonstrar a existência, definimos $\frac{DV}{dt}$ em U por 3.1 É claro que 3.1 possui as propriedades de derivada covariante. Para provar que esta definição independe da escolha de coordenadas escolhemos outra carta $y : W \subset M \to \mathbb{R}^n$ tal que $W \cap U \neq \emptyset$, as definições através de x e y são, na verdade, a mesma definição em $W \cap U$ pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$. Segue então que a definição pode ser estendida para toda a curva M (utilizando um conjunto de cartas cobrindo a imagem de c), o que conclui a demonstração.

□

Definicão 3.23. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $u \in I$.

Em coordenadas $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$, *um campo vetorial V ao longo de c ser paralelo significa que:*

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x_j}(c(t)) + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt}(t)v^j(t)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}(c(t))$$

Escrevendo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$*, em termos dos símbolos de Christoffel, e trocando* j *por* k *na primeira soma, ficamos com:*

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k\{\frac{dv^k}{dt}(t) + \sum_{i,j} v^j(t)\frac{dx_i}{dt}(t)\Gamma_{ij}^k(c(t))\}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Com isso estamos em condições de provar a existência de um campo de vetores paralelo ao longo de uma curva c*, como diz a próxima proposição.*

Proposicão 3.24. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Sejam* $c : I \to M$ *uma curva diferenciável em* M *e* V_0 *um vetor tangente a* M *em* $c(t_0)$*,* $t_0 \in I$ *(ou seja,* $V_0 \in T_{c(t_0)}M$*). Então existe um único campo de vetores paralelo* V *ao longo de* c *tal que* $V(t_0) = V_0$*.* $V(t)$ *é chamado o transporte paralelo de* $V(t_0)$ *ao longo de* c*.*

Demonstração. Primeiro nos preucuparemos com o caso mais simples em que $c(I) \subset U$ para uma carta $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$. Seja $x(c(t)) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$ e seja $V_0 = \sum_j v_0^j X_j$ onde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0))$. Suponhamos que existe um V sobre c que é paralelo ao longo de c com $V(t_0) = V_0$ então, escrevendo isto em coordenadas:

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_k\{\frac{dv^k}{dt}(t) + \sum_{i,j} v^j(t)\frac{dx_i}{dtt}\Gamma_{ij}^k(c(t))\}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

logo temos o seguinte sistema de $EDO's$:

$$0 = \frac{dv^k}{dt}(t) + \sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k(c(t))v^j(t)\frac{dx_i}{dt}(t), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Note que os símbolos de Christoffel são dados, associados à conexão ∇ e que $x_i(t)$ também é dado, associado a curva c. Então temos um sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem. Podemos, então utilizar, então, os teoremas de existência e unicidade para EDO's de primeira ordem. Em particular dada uma condição unicial $v^k(t_0) = v_0^k$ temos uma única solução. Daí segue então a existência e unicidade de V.

No caso em que $c(I)$ não está contido na imagem de nenhuma parametrização, sabemos que para todo $t_1 \in I$ o segmento $c[t_0, t_1] \subset M$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas (imagens de parametrizações) para as quais V pode ser definido como na construção acima. Como cada uma das definições é unica, não temos problema com as que eventualmente coincidirem nas intersecções, e portanto podemos definir V para $[t_0, t_1]$.

□

Para o que fizemos até agora não foi necessária a definição de variedade Riemanniana. A pegunta natural agora é como contruir uma conexão afim em uma variedade Riemanniana. Introduziremos, então, uma noção de compatibilidade entre uma métrica e uma conexão.

Definicão 3.25. Compatibilidade entre métrica e conexão. Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $g = \langle , \rangle$, se:

Para enunciarmos o teorema de Levi-Civita precisamos da definição de uma conexão **simétrica.**

Definicão 3.26. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \Upsilon(M).$$

Teorema 3.27. ***Levi- Civita.*** *Dada uma variedade Riemanniana M existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

1. *∇ é simétrica.*
2. *∇ é compatível com a métrica Riemanniana.*

Esta será chamada conexão de Levi-Civita ou Riemanniana de M.

Demonstração. Primeiramente suponhamos que tal conexão ∇ exista. Então:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{3.2}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{3.3}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \tag{3.4}$$

Somando 3.2 e 3.3, subtraindo 3.4 e ainda utilizando a simetria de ∇, segue que:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle.$$

Isolando, obtemos a *identidade de Koszul*

$$\langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}. \tag{3.5}$$

Mas então, por Z ser arbitrário e sabermos o valor de $\langle Z, \nabla_Y X\rangle$ para todo o Z, sabemos da álgebra linear que $\nabla_Y X$ está totalmente definido. Isso prova que caso ∇ exista, ela será única.

Novamente, para mostrar a existência, definiremos ∇ por 3.5, é, então, claro que ∇ possui as propriedades que queríamos.

□

Seja M uma variedade Riemanniana com métrica $\langle , \rangle$, $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ carta local e $p \in U$. Sendo que $g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\rangle_p$. De identidade de Koszul, temos que:

$$\textstyle\sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\}$$

Escrevemos (g^{km}) para inversa da matriz (g_{km}) e temos

$$\textstyle\Gamma^m_{i\,j} = \frac{1}{2}\sum_k \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\} g^{km}$$

Sendo essa a expressão clássica para os símbolos de Christoffel, em termos da métrica.

Definicão 3.28. (Geodésica) Uma curva $\gamma : I \to M$ é uma *geodésica* se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a.b]$ é chamada geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Vamos deduzir as equações locais satisfeitas por uma geodésica $\gamma : I \to M$ Dada uma carta $x_0 = (U, x)$ em torno de $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$ descrevemos γ em U por:

$$\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

Então γ será geodésica se e somente se:

$$0 = \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = \sum_k \{\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\gamma)\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\}\frac{\partial}{\partial x^k} \circ c \tag{3.6}$$

Temos o sistema de equações de segunda ordem:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\gamma)\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0\ ,\ \ k = 1, ..., n.$$

3.4 Resolução do problema

Por simplicidade, consideraremos a variedade M como um aberto de $\mathbb{R}^n$. De fato, algumas variedades ou grande parte delas, podem ser vistas através de apenas uma carta, como a esfera menos um ponto, por exemplo. Entretanto, é claro que, se limitamos nossa análise a apenas uma carta, o resultado pode ser diferente do que considerando a variedade inteira. Nesse sentido o resultado que obtemos é local.

Vimos neste capítulo que uma geodésica em uma variedade Riemanniana γ escrita localmente como $circ\gamma = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ onde $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ é uma cara local, deve cumprir o sistema de equações

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0\ ,\ \ k = 1, ..., n.$$

Esse sistema foi deduzido em 3.6. Γ^k_{ij}, são dados, chamados símbolos de Christhofell, que representam informações sobre os campos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Veremos esse sistema como um operador para cada coordenada, para isso denotaremos $C^k[0, 1]^n = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n : f \in C^k\}$, é claro que se $f \in C^2[0, 1]^n$ então $f^i \in C^k[0, 1]$. É fácil ver que $C^k[0, 1]^n$ é de Banach com a norma $\sup_{l \leq k, t \in [0,1]} \|f^l(t)\|_{\mathbb{R}^n}$. Nesse espaço considere o subconjunto $V = \{f \in C^2[0, 1]^n\ :\ f([0, 1] \subset U\}$ em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto.

Afirmação V é um conjunto aberto.

Gostaríamos de ver que V é aberto. A demonstração é simples. Seja $f_0 \in V$. Seja f^i_0 uma componente de f_0. Então como f^i_0 está definida em um subconjunto compacto, sabemos que existe $\sup f^i_0(x) = a$ e também sabemos que a projeção $p^i(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Como $p^i(U)$ é uma união enumerável de intervalos, podemos imaginar, sem perda de generalidade que U é um intervalo. Então $a \in p^i(U)$ e $a < \sup\{p^i(U)\}$. Seja $\epsilon_i = \sup\{p^i(U)\} - a$. Então se $\sup |f^i - f^i_0| < \epsilon_i$ é claro que $f([0, 1]^n) \subset p^i(U)$. Assim, aplicando o mesmo para cada componente de f e tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_i\}$ temos que se $\|f - f_0\| < \epsilon \Rightarrow f \in V$, o que prova a afirmação.

Definiremos um operador

$$P : V \to C^0[0,1]^n$$

$$f \mapsto (\tfrac{d^2 f^1}{dt^2} + \textstyle\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(f) \tfrac{df^1_i}{dt} \tfrac{df^1_j}{dt}, ..., \tfrac{d^2 f^n}{dt} + \textstyle\sum_{i,j} \Gamma^k_{i\,j}(f) \tfrac{df^n_i}{dt} \tfrac{df^n_j}{dt}$$

Queremos um operador que dada uma função nos dê as informações necessárias para sabermos se f é uma geodésica e que também nos diga que pontos f está ligando. Isso porque pensando em nosso objetivo final, queremos um operador invertível, para o qual dados dois pontos na variedade possamos invertê-lo e achar a geodésica que os liga. O operador a ser considerado é, portanto:

$$B : V \subset C^2[0,1]^n \to C^0[0,1]^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$f \mapsto (P(f), f(0), f(1))$$

Verifica-se facilmente que B é diferenciável e que sua derivada em $f \in V$ é dada por

$$DB(f)h = (DP(f)h, h(0), h(1)), \qquad \forall h \in C^2[0,1]^n$$

Onde:

$$\{DP(f)h\}^i : C^2[0,1] \to C^0[0,1]$$

$$h \mapsto \tfrac{d^2 h^i}{dt^2} + \textstyle\sum_{j,k} 2\Gamma^k_{j,k} \tfrac{df^j}{dt} \tfrac{dh^k}{dt} + \textstyle\sum_{j,k} \tfrac{\partial \Gamma^i_{j,k}(f)}{\partial x^l} \tfrac{f^j}{dt} \tfrac{df^k}{dt} h^l.$$

Provaremos que $DB(f)$ é Fredholm de índice 0.

Aqui entra uma hipótese importante. Vamos supor que existem pontos $a, b \in U \subset \mathbb{R}^n$ tal que exista uma geodésica f ligando a e b. Supomos que f *não possui pontos conjulgados,* (ver apêndice, sessão 1).

Queremos, então, olhar para o operador num todo como a soma de um operador Fredholm de índice zero a um operador compacto, o que mantém o índice do operador, como vimos no segundo capítulo, teorema 2.43.

Primeiramente observemos o operador:

$$D^2 : C^2[0,1]^n \to C^0[0,1]^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$h \mapsto (h'', h(0), h(1))$$

O núcleo desse operador são as funções $h \in C^2[0,1]$ tal que: $h'' = 0$, $h(0) = 0$, $h(1) = 0 \Rightarrow h = 0$ (núcleo trivial). Donde $dim(N(T)) = 0$. Por outro lado, é fato que esse operador linear é sobrejetivo, pois se $g \in C^0[0,1]^n$ sejam: $f(y) + K_1 = \int_0^y g(x)dx$ e $h(z) + K_2 = \int_0^z (f(y) + K_1)dy$, escolhendo apropriadamente K_1, K_2 teremos que $D(h) = (g, g(0), g(1))$. Portanto, D^2 é homeomorfismo linear (pelo teorema da aplicação aberta), e em particular é Fredholm de índice 0.

O próximo operador a ser observado é:

$$D^1 : C^2[0,1]^n \to C^0[0,1]^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$h \mapsto (h', 0, 0)$$

Este operador é compacto, já que dada uma sequência $\{h_n\} \subset C^2[0,1]^n$, tal que $||h_n||_{C^2} \leq K$, então como $sup_{x\in[0,1]}||h_n''(x)|| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}$, temos, pela desigualdade do valor médio,

$$|h_n'(x) - h_n'(y)| \leq K|x-y|, \text{ e } ||h_n'||_{C^0} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in [0,1]$$

Nessa situação podemos usar Arzelá-Ascoli para concluir que existe subsequência convergente em $C[0,1]^n$ para (h_n'), concluindo que o operador D é compacto.

Sabemos do primeiro capítulo que a imersão i de $C^2[0,1]^n$ em $C^0[0,1]^n$ é compacta. Se $\phi \in C^0[0,1]^n$ então o seguinte operador:

$$M : C^2[0,1] \to C^0[0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$h \mapsto (\phi.h, 0, 0)$$

também o é. A saber se tivermos uma sequência $\{h_n\} \subset C^2[0,1]$, com $||h_n||_{C^2} \leq 1$ existe subsequência h_{n_k} convergente em C^0, $h_{n_k} \mapsto h$ (Dada pela compacidade da imersão). Segue então que $(\phi h_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ também converge. $(||\phi h_{n_k} - \phi h|| \leq ||\phi||(||h_{n_k} - h||)$.

Escolhendo ϕ como sendo $\phi(t) = \sum_{ij} \frac{\partial \Gamma_{ij}^k(f)}{\partial x^l}(t)\frac{df^k}{dt}(t)\frac{df^i}{dt}(t)$, podemos introduzir M como dado por:

$$M(h) = (\textstyle\sum_{ij} \frac{\partial \Gamma_{ij}^k(f)}{\partial x^l}\frac{df^k}{dt}\frac{df^i}{dt}h^l, 0, 0)$$

Então para provar que $M(h)$ é compacto, basta vermos que $\phi \in C^0[0,1]$ De fato, lembremos que Γ_{ij}^k é dado pelo campo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$, de maneira que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}(p) = \textstyle\sum_k \Gamma_{ij}^k(p)\frac{\partial}{\partial x_k}(p).$$

Como por definição: $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$ é um campo de classe C^∞, então $\Gamma_{ij}^k : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é diferenciável. Como $f \in C^2$ é fato que a composição $\Gamma_{ij}^k(f)$ é contínua. O mesmo vale para a derivada em relação a qualquer coordenada, já que o campo é C^∞.

Por último definimos:

$$M' : C^0[0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to C^0[0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$(h, a, b) \mapsto (\textstyle\sum_{ij} 2\Gamma_{ij}^k \frac{df^j}{dt}h, 0, 0)$$

Então $(M' \circ D')$ é uma composição de operador contínuo com operador compacto, portanto compacto.

Juntando todas essas informações temos:

$$DB(f)(h) = D^2(h) + (M' \circ D^1)(h) + M(h)$$

Temos então a soma de um operador de Fredholm de índice zero com dois operadores compactos o que implica que $DB(f)$ é Fredholm de índice 0, e portanto podemos usar a alternativa de Fredholm.

Provemos então que $DB(f)$ é injetiva. Sabemos que f é geodésica sem pontos conjulgados. As soluções de: $DB(f)h = 0$, são os chamados *Campos de Jacobi.* Sabemos que se f não possui pontos conjulgados então a única solução para este campo é a solução $h \equiv 0$, (Ver Manfredo "Geometria Riemanniana" ,[3], pag. 129.) daí segue que $DB(f)$ é injetiva.

Com esse resultado em mãos sabemos que existe uma vizinhança $V_0 \times W_1 \times W_2 \subset C^0[0,1]^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ contendo o ponto $(0, a, b)$, tal que B é um difeomorfismo. Sendo assim, sabemos que para quaisquer potnos $a' \in W_1$ e $b' \in W_2$ existe geodésica $B^{-1}(0, a', b')$ de classe C^∞ ligando a' a b'.

Capítulo 4

O Problema de Plateau

4.1 Apresentação do Problema

O conhecido *problema de Plateau* é o problema de, dada uma curva de Jordan $J \subset \mathbb{R}^3$ encontrar a superfície de área mínima com essa fronteira. O problema de Plateau pode ser abordado num contexto de Cálculo Variacional. Daremos aqui uma visão em termos de *EDP's* para essa problema.

Consideraremos uma função f do disco $D \subset \mathbb{R}^2$ fechado unitário em $\mathbb{R}$. A fronteira a ser considerada será o gráfico de $f|_{\partial D}$ em $\mathbb{R}^3$ Consideramos o operador (com $0 < \alpha < 1$ fixado)

$$P : C^{2,\alpha}(D) \to C^{\alpha}(D)$$
$$f \mapsto (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{yx} + (1 + f_x^2)f_y$$

A equação diferencial $(1+f_{yy})f_{xx} - 2f_x f_y f_{yx} + (1+f_{xx})f_y = 0$ é condição necessário para que f tenha área mínima.

Temos também o operador:

$$B: \; C^{2,\alpha}(D) \to C^{\alpha}(D) \oplus C^{2,\alpha}(\partial D)$$
$$(f \mapsto P(f), f|_{\partial})$$

Gostaríamos, portanto, que o operador B fosse invertível nos pontos da forma $0 \oplus g$. Inicialmente investigaremos o operador derivada:

$$DB(f)h = DP(f)h \oplus h_{\partial D} \quad f, h \in C^{2,\alpha}(D)$$

em que, dada $f \in C^{2,\alpha}(D),$:

$$DP(f)h = (1+f_y^2)h_{xx} - 2f_x f_y h_{xy}(1+f_x^2)h_{yy} + 2(f_x f_{yy} - f_y f_{xy})h_x + 2(f_y f_{xx} - f_x f_{xy})h_y. \;\; \forall h \in C^{2,\alpha}(D)$$

Queremos ver que $DB(f)$ é um homeomorfismo linear, e isso envolve, claramente, um estudo sobre o tipo de equação diferencial que ela se encaixa, veremos na resolução do problema que $DB(f)h = 0$ é uma equação diferencial eliptica. Para ficar mais fácil de trabalharmos com ela, dividiremos nosso esforço em duas partes, e trabalharemos apenas com a parte principal; o restante será trabalhado com a teoria de operadores compactos.

Buscamos, portanto, resultados que mostrem a bijetividade do operador:

$$A : C^{2,\alpha}(D) \to C^{\alpha}(D) \oplus C^{2,\alpha}(\partial D)$$
$$h \mapsto ((1 + f_y^2)h_{xx} - 2f_x f_y h_{xy}(1 + f_x^2)h_{yy}, h|_{\partial D})$$

para uma $f \in C^{2,\alpha}(D)$ fixada.

Além disso, também provaremos que B é injetiva, e sobrejetiva em para os pontos da forma $0 \oplus g$. Vamos estudar uma série de resultados técnicos em EDP's elípticas que nos auxiliarão na resolução de nosso problema.

4.2 Equações diferenciais parciais Elípticas, estimativas para o caso linear.

Definicão 4.1. (Equação diferencial linear elíptica de segunda ordem)
Uma equação diferencial do tipo:

$$a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i D_i u + c(x)u = f,$$

em que a^{ij}, b^i, c e f são funções dadas, é dita uma equação diferencial linear de segunda ordem. Os índices i, j quando colocados em cima e embaixo subentenderão uma soma nos mesmos. Muitas vezes veremos essa equação como um operador linear L tal que:

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i D_i u + c(x)u.$$

Se u pertence a um espaço de funções definidas em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o operador L é dito *elíptico* se para todo $x \in \Omega$ a matriz de entradas $[a^{ij}(x)]$ for positiva. Equivalentemente se para $\lambda(x), \Lambda(x)$ denotando o mínimo e o máximo dos autovalores de $[a^{ij}(x)],$:

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

para qualquer $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.
Se existir um número λ_0 tal que: $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ então L é dito *estritamente elíptico.*

O problema de Plateau nos apresenta uma equação linear (derivada da função B) não muito familiar. Para provar que esse operador linear é invertível, precisaremos de um pouco de conhecimento em equações lineares elípticas e estritamente elípticas.

Começaremos essa capítulo estudando o chamado *método da contuidade*, um teorema que utiliza apenas Análise Funcional. Nosso objetivo é deixar a solubilidade de um problema do tipo: $Lu = f$ em que L é linear e estritamente elíptico, em função da soluvabilidade do problema $\Delta u = f$, para o qual existem métodos de solução, que podemos estudar posteriormente.

Teorema 4.2. *(**Método da continuidade**) Seja X um espaço de Banach, Y um espaço linear normado e sejam $L_0, L_1 : X \to Y$ operadores contínuos de X em Y. Para cada $t \in [0, 1]$ temos:*

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1$$

Suponha que existe constante $C > 0$ tal que:

$$||x||_X \leq C||L_t x||_Y, \quad \forall t \in [0,1].$$

(C independe de t.) Então L_1 é sobrejetivo se e somente se L_0 é sobrejetivo.

Demonstração. Suponha que L_s é sobrejetivo para algum $s \in [0,1]$. Por 4.2, L_s é bijetivo e sua inversa $L_s^{-1} : Y \to X$ existe pelo teorema da aplicação aberta. Para $t \in [0,1]$ e $y \in Y$, a equação $L_t x = y$ é equivalente a:

$$L_s(x) = y + (L_s - L_t)x = y + (t-s)L_0 x - (t-s)L_1 x$$

O que por sua vez é equivalente a:

$$x = L_s^{-1} y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x \tag{4.1}$$

Considerando a aplicação $T : X \to Y$ em que $Tx = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$, notemos que ela é uma contração se $|s-t| \leq \delta = [C(||L_0|| + ||L_1||)]^{-1}$.

Logo pelo teorema do ponto fixo de Banach podemos resolver 4.1 para todo $t \in [0,1]$ que satisfaz $|s-t| \leq \delta$. Podemos, então, dividir o intervalo $[0,1]$ em subintervalos abertos de tamanho δ. Como esses intervalos terão intersecção usamos o mesmo princípio para provar que L_t é sobrejetivo para todo $t \in [0,1]$, em particular para $t = 0, t = 1$.

□

Fazendo uso do teorema acima, dado L estritamente elíptico com certa regularidade (a ser especificada) em seus coeficientes, em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, desejamos considerar a curva:

$$L_t u = tLu + (1-t)\Delta u, 0 \leq t \leq 1,$$

em que $L \equiv L_1$, e provar que estamos nas condições do método da continuidade para que valha: L sobrejetivo $\Leftrightarrow$ Δ sobrejetivo.

Provar que estamos nas condições do método da continuidade envolve várias estimativas.Consideremos L definida em espaços de Hölder. Queremos achar uma constante C tal que:

$$||x||_{C^{2,\alpha}} \leq C||L_t x||_{C^\alpha}$$

O domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ também colabora nessas estimativas, devemos, portanto, começar a estudar a fronteira de Ω e sua regularidade.

Definicão 4.3. Um aberto limitado Ω em $\mathbb{R}^n$ é dito ser de classe $C^{k,\alpha}$ $(0 \leq \alpha \leq 1,\ \ k \geq 1)$ se cada ponto $x \in \partial\Omega$ existe uma bola aberta com centro em x $B(x)$, e um difeomorfismo $\psi : B \to D \subset \mathbb{R}^n$, D aberto tal que:

1. $\psi(B \cap \Omega) \subset \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$
2. $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset D \cap \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}\mathbb{R}^n$
3. $\psi \in C^{k,\alpha}(\overline{B}), \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

Definicão 4.4. Um domínio Ω tem porção de fronteira $T \subset \partial\Omega$ de classe $C^{k,\alpha}$ se para cada ponto $x_0 \in T$ existir uma bola $B = B(x_0)$ na qual as condições de definição são satisfeitas e $B \cap \partial\Omega \subset T$.

Observação: Note que um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^n$ é de classe $C^{k,\alpha}$ se cada ponto $x \in \partial\Omega$ possui uma vizinhança que pode ser vista como o gráfico de uma função $f_x : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{k,\alpha}$.

Sejam k, j, α, β tal que: $j + \beta < k + \alpha$ e $0 < \alpha < \beta < 1$. Então, se Ω é um domínio de classe $C^{k,\alpha}$, então Ω é também um domínio de classe $C^{j,\beta}$.

Muitas vezes ao trabalharmos com estimativas, é preciso definir alguma quantidade que naturalmente aparece como uma boa estimativa, e assim acontece várias vezes nas estimativas a seguir. Várias normas serão definidas, pois estas aparecerão como majorantes ou minorantes em desigualdades, mas nosso objetivo final é voltar para a norma "usual" dos espaços $C^{k,\alpha}$.

Definicão 4.5. Seja $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, definimos $d_x = dist(x, \partial\Omega)$ e $d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$. Definimos ainda as seguintes quantidades:

$$[u]^*_{k,0,\Omega} = [u]^*_{k,\Omega} = \sup_{x\in\Omega,|\beta|=k} d_x^k |D^\beta u(x)|, \;\; k = 0, 1, ...; \quad |u|^*_{k,0,\Omega} = |u|^*_{k,\Omega} = \textstyle\sum_{j=0}^k [u]^*_{j,\Omega};$$

$$[u]^*_{k,\alpha,\Omega} = \sup_{x,y\in\Omega,|\beta|=k} d_{x,y}^{k+\alpha} \tfrac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad |u|^*_{k,\alpha,\Omega} = |u|^*_{k,\Omega} + [u]_{k,\alpha,\Omega}$$

Observação:$[u]^*_{k,\alpha,\Omega}$ são seminormas em $C^{k,\alpha}(\Omega)$. enquanto que $|u|^*_{k,\alpha,\Omega}$, $|u|^*_{k,,0,\Omega}$, $[u]^*_{k,\alpha,\Omega}$ são também normas em $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Começaremos as estimativas por um lema que será bastante útil, relacionando as seminormas definidas acima.

Lema 4.6. *Suponha $j + \beta < k + \alpha$, em que $j, k = 0, 1, 2, ...$ e $0 < \alpha, \beta \leq 1$. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante $C(\epsilon, k, j)$ tal que:*

$$[u]^*_{j,\beta,\Omega} \leq C|u|_{0,\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha,\Omega}. \tag{4.2}$$

$$|u|^*_{j,\beta,\Omega} \leq C|u|_{0,\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha,\Omega}. \tag{4.3}$$

Demonstração. A demonstração para estas desigualdades encontra-se no apêndice. □

Para conseguirmos estimativas mais precisas, precisaremos, mais uma vez, definir um conjunto de seminormas.

Definicão 4.7. Seja $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, seja ρ um número real, e k um inteiro, então:

$$[f]^{(\rho)}_{k,0,\Omega} = [f]^{(\rho)}_{k,\Omega} = \sup_{x\in\Omega,|\beta|=k} d_x^{k+\rho} |D^\beta f(x)|; \quad [f]^{(\rho)}_{k,\alpha,\Omega} = \sup_{x,y\in\Omega,|\beta|=k} d_{x,y}^{k+\alpha+\rho} \tfrac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

$$|f|^{(\rho)}_{k,\Omega} = \textstyle\sum_{j=0}^{(\rho)} [f]^{(\rho)}_{j,\Omega}; \quad |f|^{(\rho)}_{k,\alpha,\Omega} = |f|^{(\rho)}_{k,\Omega} + [f]^{(\rho)}_{k,\alpha,\Omega}.$$

Observação: $[f]^{(\rho)}_{k,0,\Omega}$, $[f]^{(\rho)}_{k,\alpha,\Omega}$ são seminormas em $C^k(\Omega)$, e $|f|^{(\rho)}_{k,\Omega}$ e $|f|^{(\rho)}_{k,\alpha,\Omega}$, são normas em $C^k(\Omega)$.

Lema 4.8. *Para toda $f, g \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ verifica-se:*

$$|fg|^{\sigma+\tau}_{0,\alpha,\Omega} \leq |f|^{\sigma}_{0,\alpha,\Omega}|g|^{\tau}_{0,\alpha,\Omega}$$

Em que $\sigma + \tau \geq 0$.

Lema 4.9. *Suponha $L_0 = A^{ij}D_{ij}u = f(x)$ em que $A^{ij} \in \mathbb{R}, A^{ij} = A^{ji}$, e $[A^{ij}]$ é uma matriz tal que existem constantes λ, Λ tal que:*

$$\lambda||\xi|^2 \leq A^{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Se Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ seja $u \in C^2(\Omega), f \in C^\alpha(\Omega)$ satisfazendo $L_0u = f$. Então existe $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$, tal que:

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$

Demonstração. A demonstração encontra-se em .... □

O próximo teorema é parte essencial da solução final do problema, ele introduz uma estimativa bastante forte, pois majora a norma $C^{2,\alpha}$ da solução de uma equação do tipo $Lu = f$ em termos da norma de u em C^0 e da norma de f em C^α, que é o que estamos buscando. A demonstração do teorema é bastante tecnica, e foi incluída no apêndice pela importância do teorema.

Teorema 4.10. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma para a equação:*

$$Lu = a^{i,j}D_{ij}u + b^iD_iu + du = f$$

$a^{ij}, b^i, c \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, e $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Suponha também que existem constantes positivas λ, Λ tal que:

1. *$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$*
2. *$|a^{ij}|^0_{0,\alpha,\Omega}, |b^i|^1_{0,\alpha,\Omega}, |c|^2_{0,\alpha,\Omega} \leq \Lambda$*

Então:

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega})$$

Em que $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

Corolário 4.11. *Seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $Lu = f$ em um domínio limitado Ω em que L é estritamente elíptico e seus coedicientes estão em $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Então se $\Omega' \subset \Omega$ com $dist(\Omega', \partial\Omega) \geq d$, então existe constante C tal que:*

$$d|Du|_{0,\Omega} + d^2|D^2u|_{0,\Omega'} + d^{2+\alpha}[D^2u]_{\alpha,\Omega'} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}), \tag{4.4}$$

em que $C(L, n, \alpha, \Omega)$.

Demonstração. Segue diretamente do teorema 4.10 □

É interessante que essa desigualdade valha também para a fronteira de um domínio Ω. A regularidade na fronteira de um domínio entra como parte essencial nas desigualdades.

O que faremos agora é trabalhar primeiramente com porções de fronteira contidas em um subespaço de R^n. Enunciaremos um lema análogo ao anterior. A demonstração será omtiida, pois não acrescenta muito ao objetivo do texto. A demonstração assemelha-se com a do lema anterior, o fato da fronteira estar em um aubespaço é bastant útil porque podemos utilizar projeções e suas propriedades para "dividir" distâncias.

Lema 4.12. *Suponha $j+\beta < k+\alpha$. Em que $j,k = 0,1,2,...$ e $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Seja Ω aberto em $\mathbb{R}^n_+$ com porção de fronteira T em $x_n = 0$. Seja $u \in C^{k,\alpha}(\Omega \cup T)$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante $C = C(\epsilon, j, k)$, tal que:*

$$[u]^*_{j,\beta,\Omega\cup T} \leq C|u|_{0,\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha,\Omega\cup T}.$$

$$|u|^*_{j,\beta,\Omega\cup T} \leq C|u|_{0,\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha,\Omega\cup T}.$$

Observação: Apesar da notação ser mantida, as seminormas utilizadas no lema 4.12 são um pouco diferentes, no sentido que o peso das seminormas da definição devem mudar pela entrada da porção de fronteira T. A mudança é a troca de $d_{x,y}$ por $\overline{d}_{x,y} = dis(x, \partial\Omega - T)$. No entanto esta mudança não terá grande influência no decorrer do texto.

Teorema 4.13. *Seja Ω um conjunto aberto de R^n_+ com fronteira portion T em $x_n = 0$. Seja L um operador linear elíptico. Suponha que $u \in C^{2+\alpha}(\Omega \cap T)$ é uma solução limitada de $Lu = f$ em Ω, e que $u = 0$ em T, além disso existe Λ tal que:*

$$|a^{ij}|_{0,\alpha,\Omega\cap T}, |b^i|^{(1)}_{0,\alpha,\Omega\cap T}, |c|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega\cap T} \leq \Lambda; \;\; |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega\cap T} < \infty. \tag{4.5}$$

Então

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega\cup T} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega\cup T})$$

Em que $C = C(n, \alpha, \lambda, \tau)$.

Demonstração. A prova para este lema é a mesma prova do teorema, as mudanças são apenas para o contexto $\Omega \cup T$ ao invés de Ω. Então d_x passa a ser $\overline{d}_x$, (Ver demonstração do lema 5.6 no apêndice), troca-se o uso do lema 5.5 pelo lema 5.6. □

Nosso próximo passo é estendermos nossas definições para conjuntos onde a porção de fronteira não é necessariamente um semiplano.

É bastante razoável que essa generalização para um domínio qualquer Ω de classe $C^{k,\alpha}$ utilize o fato de que podemos vincular um domínio Ω' com porção de fronteira em um hiperplano, com um domínio qualquer. Este vínculo é feito a partir do difeomorfismo Ψ presente na definição de domónios $C^{k,\alpha}$. Feito isso, devemos investigar a relação das normas de funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com normas da função $u \circ \Psi^{-1} : D \to \mathbb{R}$. Note que, como Ψ e Ψ^{-1} são de classe $C^{k,\alpha}$ elas possuem extensão para o fêcho de Ω, (Ver capítulo 2 sessão 2.1). Em particular Ψ, Ψ^{-1} são diferenciáveis, o que garante, portanto, pelo teorema do valor médio para funções de várias variáveis, garantindo que existe uma constante K tal que:

$$|\Psi(x) - \Psi(y)| \leq K|x-y| \qquad |\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(y)| \leq K|x-y|.$$

Este resultado, com alguns cálculos a mais, nos fornece várias majorações relacionas às normas que estamos trabalhando . Para facilitar a notação pensaremos em $x' = \Psi(x)$ e $y' = \Psi(y)$. Também $\overline{u}(x') = u \circ \psi^{-1}(x)$. No lema a seguir utilizaremos as seguintes desigualdades:

$$K^{-1}|u(x)|_{j,\beta,\Omega} \leq |\overline{u}(x')|_{j,\beta,\Omega'} \leq K|u(x)|_{j,\beta,\Omega}. \tag{4.6}$$

$$K^{-1}|u(x)|^{*}_{j,\beta,\Omega\cup T} \leq |\overline{u}(x')|^{*}_{j,\beta,\Omega'\cup T'} \leq K|u(x)|^{*}_{j,\beta,\Omega\cup T}. \tag{4.7}$$

$$K^{-1}|u(x)|^{\sigma}_{j,\beta,\Omega\cup T} \leq |\overline{u}(x')|^{\sigma}_{j,\beta,\Omega'\cup T'} \leq K|u(x)|^{\sigma}_{j,\beta,\Omega\cup T}. \tag{4.8}$$

Lembrando que K depende de Ψ e do domínio Ω.

Mais uma vez deixaremos a demonstração do lema para o apêndice por ser uma prova bastante técnica.

Lema 4.14. *Seja Ω um domínio $C^{2+\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$ e sejam $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ solução para o problema $Lu = f$, $u = 0$ em $\partial\Omega$, em que $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, e L é operador elíptico tal que existe τ tal que:*

$$|a^{ij}|_{0,\alpha,\Omega}, |b^{i}|_{0,\alpha,\Omega}, |c|_{0,\alpha,\Omega} \leq \tau. \tag{4.9}$$

Enttão para algum δ existe uma bola $B = B_{\delta}(x_0)$ para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que:

$$|u|_{2,\alpha,B\cap\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}) \tag{4.10}$$

Em que $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

Observação: Note que a dependência de C em relação a Ω no lema anterior está diretamente relacionada a constante K, que depende do difeomorfismo escolhido, e portanto de Ω.

Finalmente, o enunciado final que nos permitirá provar o teorema principal desse capítulo. Sua demonstração, também bastante técnica, está feita no apêndice.

Teorema 4.15. *Seja Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}$ uma solução de $Lu = f$ em Ω, em que $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ bem como os coeficientes de L estão em C^{α} e os coeficientes de L satisfazem, pra constantes positivas λ, Λ :*

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.11}$$

e

$$|a^{ij}|_{0,\alpha,\Omega}, |b^{i}|_{0,\alpha,\Omega}, |c|_{0,\alpha,\Omega} \leq \Lambda \tag{4.12}$$

Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, e suponha que $u = \varphi$ em $\partial\Omega$. Então:

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}) \tag{4.13}$$

Em que $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

Finalmente, provaremos que a solubilidade de uma equação do tipo $Lu = f$ (com L nas condições adequadas) depende apenas da soluvabilidade de $\Delta u = f$

Teorema 4.16. *Seja Ω um domínio $C^{2+\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$. Seja L estritamente elíptico en Ω com coeficientes em $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e com $c \le 0$ então se o problema de Dirichlet para a equação de Poisson $\Delta u = f$ em Ω, $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, tem solução em $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ para toda $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e toda $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ o problema:*

$$Lu = f, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{4.14}$$

também tem solução única em $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ para toda f e φ.

Demonstração. Pela hipótese sabemos que:

$$\lambda|\xi|^2 \le a^{ij}\xi_i\xi_j, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.15}$$

$$|a^{ij}|_{0,\alpha}, |b^i|_{0,\alpha}, |c|_{0,\alpha} \le \Lambda, \tag{4.16}$$

para constantes positivas, λ, Λ.

Primeiramente podemos restringir o problema ao caso em que $u = 0$ em $\partial\Omega$, pois de forma geral, o problema 4.14 é equivalente ao problema: $Lv = f - L\varphi \equiv f'$ em Ω, $v = 0$ em $\partial\Omega$

Considere a família de equações:

$$L_t u \equiv tLu + (1-t)\Delta u = f, 0 \le t \le 1. \tag{4.17}$$

Então $L_0 = \Delta$, $L_1 = L$. Para cada t fixo, os coeficientes de L_t satisfazem as desigualdades (4.15), (4.27) sendo que $\lambda_t = \min(1, \lambda)$, $\Lambda_t = \max(1, \tau)$.

Também se $X = C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\}$ e $Y = C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, então:

$$L_t : X \to Y$$

$$w \mapsto L_t w.$$

A existência de solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é equivalente à invertibilidade de L. Dada $f \in C^{\alpha}(\Omega)$, suponha u_t uma solução para $Lu_t = f$. Pelo teorema 4.15 , temos a desigualdade:

$$|u_t|_0 \le C \sup_{\Omega} |f| \le C|f|_{0,\alpha},$$

Em que $C = C(\lambda, \Lambda)$ e C depende do diâmetro de Ω. Agora pelo teorema (4.19) temos:

$$|u_t|_{2,\alpha} \le C|f|_{0,\alpha},$$

Ou seja:

$$||u||_X \le C||L_t||_Y,$$

Sendo que C independe de t. Agora como L_0, por hipótese, é sobrejetivo, podemos aplicar o método da continuidade, donde segue o teorema,

□

Resolvemos parte do problema, mas deixamos pendente a questão de como resolver $\Delta u = f$ para uma f dada. Temos que investigar também a regularidade desta solução. Isso será feito na próxima sessão.

4.3 Estudo do Laplaciano

Agora temos a necessidade de desenvolver uma teoria para a existência de soluções para o Laplaciano nas condições do teorema acima. Essa teoria envolve a convolução de funções e o chamado potencial Newtoniano, além de lemas que garantam a regularidade que desejamos. Para definir o potencial Newtoniano vamos definir e estudar a solução fundamental da equação de Laplace

$$\Delta u = 0$$

Definimos como solução fundamental para equação de Laplace em $\mathbb{R}^n$, a função

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, (n > 2), \tag{4.18}$$

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \frac{1}{2\pi}\log(|x-y|), (n = 2). \tag{4.19}$$

Em que ω_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Podemos verificar derivando diretamente que:

$$D_i\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n}; \tag{4.20}$$

$$D_{ij}\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}\{|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_j - y_j)\}|x-y|^{-n-2} \tag{4.21}$$

Temos então que Γ é a harmônica (satisfaz a equação de Laplace). Vamos fazer algumas estimativas imediatas em relação às derivadas de Γ :

$$|D_i\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{1-n}; \tag{4.22}$$

$$|D_{ij}\Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{\omega_n}|x-y|^{-n}; \tag{4.23}$$

$$|D^\beta\Gamma(x-y)| \leq C|x-y|^{2-n-|\beta|}, \tag{4.24}$$

Em que $C = C(n, |\beta|)$.

Definicão 4.17. Seja f definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma função integrável. O *potencial Newtoniano* de f é a função

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy.$$

Lema 4.18. *Seja f limitada e integrável em um domínio w, e seja ω o potencial Newtoniano de f. Então $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$, e para $x \in \Omega$,*

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y)f(y)dy, i = 1, 2, ..., n.$$

Demonstração. Queremos provar que $D_i w$ é contínua. Olhando para as estimativas que temos, parece natural que a função:

$$v(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y)f(y)dy$$

seja tal que $v = D_i w$. Para provar isso precisamos reduzir o domínio onde é calculada a integral, pois para um determinado x fixo, $\lim_{y \mapsto x} \Gamma(x-y) \to \infty$, (basta observar 4.18).

Fixe uma função $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ tal que: $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 0$ para $t \leq 1$, $\eta(t) = 1$ para $t \geq 2$. Defina para $\epsilon > 0$:

$$w_\epsilon = \int_\Omega \Gamma(x-y)\eta_\epsilon(|x-y|)f(y)dy, \quad \eta_\epsilon(|x-y|) = \eta(\tfrac{|x-y|}{\epsilon})$$

Então, quando y está muito próximo a x, $\eta_\epsilon(|x-y|) = 0$, e assim, como f é limitada podemos ver que $\omega_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$, pois:

$$\lim_{t \mapsto 0} \frac{\omega_\epsilon(x+te_i) - \omega(x)}{t} = \lim_{t \mapsto 0} \int_\Omega \frac{\Gamma(x+te_i-y)\eta_\epsilon(|x+te_i-y|) - \Gamma(x-y)\eta(|x-y|}{t} f(y)dy$$

Para $t < \frac{\epsilon}{2}$ temos:

$$= \lim_{t \mapsto 0} \int_{|x-y| > \frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(x+te_i-y)\eta_\epsilon(|x+te_i-y|) - \Gamma(x-y)\eta_\epsilon(|x-y|)}{t} f(y)dy = \int_{|x-y| \geq \epsilon} D_i\Gamma\eta_\epsilon f(y)dy.$$

Também podemos observar que:

$$v(x) - D_i w_\epsilon(x) = \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} D_i\{(1-\eta_\epsilon)\Gamma\} f(y)dy$$

Já que $w_\epsilon = v$ se $|x-y| \geq 2\epsilon$.

Então, lembrando de 4.22 e utilizando coordenadas polares:

$$|v(x) - D_i w_\epsilon(x)| \leq \sup|f| \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} (|D_i\Gamma + \tfrac{2}{\epsilon}|\Gamma|)dy \leq \int_\Omega \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{1-n} =$$
$$\sup|f| \int \omega_n \int_0^{2\epsilon} (\frac{1}{n\omega_n} r^{1-n} + \frac{2r^{2-n}}{\epsilon n(2-n)\omega_n})\frac{4\epsilon^2}{2} r^{n-1} dr = \sup|f|\omega_n(\int_0^{2\epsilon} \frac{1}{\omega_n} dr + \frac{2}{\epsilon n(2-n)\omega_n}\int_0^{2\epsilon} r dr) =$$
$$\sup|f| \frac{\omega_n}{n\omega_n}(2\epsilon + \frac{2}{(n-2)}2\epsilon) \leq 2\frac{\omega_n}{n\omega n}\epsilon(1 + \frac{1}{n-2}) \leq \sup|f|\frac{2n\epsilon}{n-2},$$

(Para $n > 2$)

Analogamente obtemos para $n = 2$:

$$\sup|f| \int_{|x-y| \leq 2\epsilon} (|D_i\Gamma| + \tfrac{2}{\epsilon}|\Gamma|)dy \leq 4\epsilon(1 + |\log 2\epsilon|)$$

Também é verdade que:

$$|w_\epsilon(x) - v(x)| = \int_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} (\Gamma\eta_\epsilon - \Gamma)f(y)dy + \int_{|x-y| \leq \epsilon} (\sup|f|2|\Gamma| + \epsilon|\Gamma|)dy$$

Então, segue que $w_\epsilon, D_i w_\epsilon$, convergem uniformemente em subconjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$ para w e v quando $\epsilon \to 0$. Provando que $\omega \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $D_i w = v$. □

Observação: Note que se $f \in C_0^\infty(\Omega)$, (possui suporte compacto e é infinitamente diferenciável) podemos escrever:

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z)f(x-z)dz$$

E então $\omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Note também que se f é só contínua, só podemos garantir que ω é diferenciável. Em busca de propriedades mais amigáveis para ω encontramos novamente os espaços de Hölder.

Lema 4.19. *Seja f limitada, Hôlder contínua em Ω, e seja w o potencial Newtoniano de f. então $w \in C^2(\Omega)$, $\Delta w = f$ e também, para $\Omega_0 \subset \Omega$*

$$D_{ij}w(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)d_{s_y}, \tag{4.25}$$

sendo Ω_0 um domínio apropriado onde valha o teorema da divergência. f é estendida valendo 0 *fora de Ω_0.*

Demonstração. Pela estimativa para $D^2\Gamma$ e como f é Hölder contínua em Ω a função:

$$u(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma v_j(y)ds_y$$

está bem definida. Para ver isso é preciso fazer uma mudança de variáveis análoga a feita no lema anterior.

Seja $v = D_i\omega$ e defina para $\epsilon > 0$

$$v_\epsilon(x) = \int_\Omega D_i\Gamma\eta_\epsilon f(y)dy,$$

em que η_ϵ, como no lema anterior, é tal que: $\eta_\epsilon = \eta(\frac{|x-y|}{\epsilon})$, e η tem as propriedades: $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 1$ para $t > 2$.

Seja $X = D_i\Gamma\eta_\epsilon$, utilizaremos o teorema da divergência aplicado ao campo:

$$\Phi = \sum_k D_k X^k = (0, 0, ..., D_i\Gamma\eta_\epsilon, 0, ..., 0).$$

Então:

$$\int_\Omega div\Phi = \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon) = \int_{\partial\Omega} \Phi^k v_k dS = \int_{\partial\Omega} D_i\Gamma\eta_\epsilon v_j dS,$$

em que v_k representa a normal a superfície de Ω.

Podemos dizer então que

$$D_j v_\epsilon(x) = \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)f(y)dy = \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)(f(y)-f(x))dy + f(x)\int_{\Omega_0} D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)dy =$$
$$\int_{\Omega_0} D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma v_j(y)ds_y$$

para ϵ suficientemente pequeno.

Para a última majoração utilizaremos que $f \in C^\alpha(\Omega)$:

$$|u(x) - D_j v_\epsilon(x)| = |\int_{|x-y|\leq 2\epsilon} D_j\{(1-\eta_\epsilon)D_i\Gamma\}(f(y)-f(x))dy| \leq$$
$$[f]_{\alpha,x}\int_{|x-y|\leq 2\epsilon}(|D_{ij}\Gamma| + \tfrac{2}{\epsilon}|D_i\Gamma|)|x-y|^\alpha dy \leq (\tfrac{n}{\alpha}+4)[f]_{\alpha,x}(2\epsilon)^\alpha.$$

Note que a menor regularidade que pode ser exigida de f para o tipo de majoração exigido é $f \in C^\alpha$

Se tomarmos $\epsilon < dist(x, \partial\Omega)$. Então temos que $D_j v_\epsilon$ converge uniformemente para u em subconjuntos compactos de Ω quando $\epsilon \mapsto \infty$, e como v_ϵ converge uniformemente para $v = D_i w$ em Ω, obtemos que $w \in C^2(\Omega)$ e $u = D_{ij}w$. Finalmente tomando $\Omega_0 = B_R(x)$ em 4.25, temos que para um R suficientemente grande:

$$\Delta w(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} f(x)\int_{|x-y|=R} v_i(y)v_i(y)ds_y = f(x).$$

completando a demonstração. □

O próximo teorema pode ser provado utilizado o método de Perron (ver apêndice). Em seu anunciado há a exigência de "regularidade da fronteira com respeito ao Laplaciano". A regularidade da fronteira é definida apartir da existência de uma função $w \in C^0(\overline{\Omega})$ tal que para toda bola $B \subset \Omega$ e toda função harmônica h tal que $h \leq w$ em ∂B, tem-se $h \leq w$ em Ω. Uma tal função é dita superharmônica. Mais especificamente um ponto $\xi \in \partial\Omega$ é regular com respeito ao Laplaciano se existe w com as propriedades citadas e além disso:

1. $w > 0$ em $\overline{\Omega} - \{\xi\}$

2. $w(\xi) = 0$

Teorema 4.20. *Seja Ω um dominio limitado e suponha que cada ponto de $\partial\Omega$ é regular (com respeito ao Laplaciano). Então se f é limitada, Hölder contínua em Ω, o problema de Dirichlet $\Delta u = f$ em Ω e $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, tem solução única para qualquer $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Definimos o potencial Newtoniano de f e fixamos $v = u - w$. A equação diferencial $\Delta u = f$ em Ω, $u = \varphi$ em $\partial\Omega$ é, então, equivalente à equação $\Delta v = 0$ em Ω, $v = \varphi - w$ em $\partial\Omega$. A existência de solução para este problema segue pelo método de Perron (ver apêndice) □

Vamos agora ao lema que prova a regularidade que gostaríamos para o potencial Newtoniano em termos da regularidade de f. Este teorema garante a regularidade para compactos contidos em Ω. Iremos provar, na verdade, que $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Lema 4.21. *Seja $B_1 = B_R(x_0)$, $B_2 = B_{2R}(x_0)$ bolas concêntricas em $\mathbb{R}^n$. Seja $f \in C^\alpha(\overline{B_2})$, $0 < \alpha < 1$, e seja ω o potencial Newtoaniano de f em B_2. Então $w \in C^{2,\alpha}$ e:*

$$|D^2 w|_{0;B_1} + R^\alpha [D^2 w]_{\alpha,B_1} \leq C(|f|_{0,B_2} + R^\alpha [f]_{\alpha,B_2} \tag{4.26}$$

Em que $C = C(n, \alpha)$.

Demonstração. Pelo lema 4.20 temos a fórmula 4.25:

$$D_{ij}w(x)| \leq \tfrac{|f(x)|}{n\omega_n} R^{1-n} \int_{\partial B_2} ds_y + \tfrac{[f]_\alpha}{\omega_n} \int_{B_2} |x-y|^{\alpha-n} dy \leq 2^{n-1}|f(x)| + \tfrac{n}{\alpha}(3R)^\alpha [f]_\alpha \leq C_1(|f(x)| + R^\alpha [f]_\alpha)$$

Em que $C_1 = C_1(n, \alpha)$.
Para um ponto $\overline{x} \in B_1$ temos novamente por 4.25:

$$D_{ij}w(\overline{x}) = \int_{B_2} D_{ij}\Gamma(\overline{x}-y)(f(y) - f(\overline{x}))dy - f(\overline{x}) \int_{\partial B_2} D_i\Gamma(\overline{x}-y)v_j(y)ds_y. \tag{4.27}$$

Escrevendo $\delta = |x - \overline{x}|$, $\xi = \frac{1}{2}(x + \overline{x})$, escrevemos:

$$D_{ij}w(\overline{x}) - D_{ij}w(x) = f(x)I_1 + (f(x) - f(\overline{x}))I_2 + I_3 + I_4 + (f(x) - f(\overline{x}))I_5 + I_6,$$

em que:

$$I_1 = (D_i\Gamma(x-y) - D_i\Gamma(\overline{x}-y))v_j(y)ds_y$$

$$I_2 = \int_{\partial B_2} D_i\Gamma(\overline{x}-y)v_j(y)ds_y$$

$$I_3 = \int_{B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(\overline{x}-y)(f(y)-f(\overline{x}))dy$$
$$I_4 = \int_{B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(\overline{x}-y)(f(y)-f(\overline{x}))dy$$
$$I_5 = \int_{B_2-B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(x-y)dy$$
$$I_6 = \int_{B_2-B_\delta(\xi)}(D_{ij}\Gamma(x-y)-D_{ij}\Gamma(\overline{x}-y))(f(\overline{x})-f(y))dy.$$

Vamos estimar essas integrais.
Primeiramente, note que para algum x' entre x e $\overline{x}$, temos:

$$|I_1| \leq |x-\overline{x}| \int_{\partial B_2} |DD_i\Gamma(x'-y)|ds_y \leq \frac{n2^{n-1}|x-\overline{x}|}{R},$$

lembrando de 4.25 pois $|x'-y| \geq R$ para $y \in \partial B_2$.
Portanto:

$$|I_1| \leq n^2 2^{n-\alpha}(\tfrac{\delta}{R})^\alpha,$$

já que $\delta = |x-\overline{x}| \leq 2R$.
Para I_2 :

$$|I_2| \leq \frac{1}{n\omega_n}R^{1-n}\int_{\partial B_2} ds_y = 2^{n-1}.$$

$$|I_3| \leq \int_{B_\delta(\xi)} |D_{ij}\Gamma(x-y)||f(x)-f(y)|dy \leq \frac{1}{\omega_n}[f]_\alpha \int_{B_{\frac{3\delta}{2}}(x)} |x-y|^{\alpha-n}dy = \frac{n}{\alpha}(\tfrac{3\delta}{2})^\alpha[f]_\alpha$$

Para I_4 (de forma análoga a I_3) :

$$|I_4| \leq \frac{n}{\alpha}(\tfrac{3\delta}{2})^\alpha[f]_\alpha,$$

Para I_5 :

$$|I_5| = |\int_{\partial(B_2-B_\delta(\xi))} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)ds_y \leq$$
$$|\int_{\partial B_2} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)ds_y| + |\int_{\partial B_\delta(\xi)} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)ds_y| \leq 2^{n-1} + \frac{1}{n\omega_n}(\tfrac{\delta}{2})^{1-n}\int_{\partial B_\delta(\xi)} ds_y = 2^n$$

Finalmente para I_6 :

$$|I_6| \leq |x-\overline{x}| \int_{B_2-B_\delta(\xi)} |DD_{ij}\Gamma(x'-y)||f(\overline{x})-f(y)|dy$$

Para algum x' no segmento que liga x a $\overline{x}$. Continuando a majoração, para $c = \frac{n(n+5)}{\omega_n}$.

$$\leq c\delta \int_{|y-\xi|\geq\delta} \frac{|f(\overline{x})-f(y)|}{|x'-y|^{n+1}}dy \leq c\delta[f]_\alpha \int_{|y-\xi|\geq\delta} \frac{|x'-y|^\alpha}{|x'-y|^{n+1}}dy \leq c(\tfrac{3}{2})^\alpha 2^{n+1}\delta[f]_\alpha \int_{|y-\xi|\geq\delta} |\xi-y|^{\alpha-n-1}dy$$

Já que $|\overline{x}-y| \leq \frac{3}{2}|\xi-y| \leq 3|x'-y|$. Concluindo então:

$$I_6 \leq \frac{c'}{1-\alpha}2^{n+1}(\tfrac{3}{2})^\alpha\delta^\alpha[f]_\alpha,$$

em que $c' = n^2(n+5)$.
Juntando todas as majorações temos:

$$|D_{ij}w(\overline{x}) - D_{ij}w(x)| \leq C_2(R^{-\alpha}|f(x)| + 2[f]_\alpha)|x-\overline{x}|^\alpha, \tag{4.28}$$

em que C_2 é um aconstante dependendo apenas de n e α.
O resultado final segue de 4.28 e 4.27.

□

Neste ponto provamos que a equação $\Delta u = f$ com $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ possui solução $u \in C^{2,\alpha}(B)$ em que B é uma bola e $B \subset \Omega$. Isso certamente resolve o problema quando Ω é um circulo. Os demais casos também poserm ser comtemplados pelo teorema abaixo, cuja demonstração será omitida.

Teorema 4.22. *Seja Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ limitado. Sejam $f \in C^{\alpha}(\Omega)$, e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet:*

$$\Delta u = f \text{ em } \Omega, \qquad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega$$

possui única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

4.4 O Príncipio do Máximo

O Princípio do máximo é muitas vezes associado a funções analíticas, ou funções diferenciáveis no sentido complexo. Na verdade, podemos vê-lo em um contexto bem mais amplo, que é o que faremos a seguir. Teremos versões do Príncípio do Máximo para vários tipos de equações diferenciais, nosso objetivo é trabalhar com equações quasilineares, inspirados pelo exemplo do operador do problema de Plateau:

$$P(f) = (1 + f_x^2)f_{yy} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx}$$

Faremos então duas versões do princípio do máximo. Uma será usada para provar a outra. Começaremos trabalhando com equações lineares.

Escrevendo um operador linear L na forma;

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_i u + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji}.$$

em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sabemos que ele é eliptico se a matriz $[a^{ij}(x)]$ é positiva. Então está bem definida a função $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$, que para cada $x \in \Omega$ associa o menor autovalor de $[a^{ij}(x)]$, e que portanto:

$$\lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j, \tag{4.29}$$

para toda $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n - 0$.

Feitas essas observações podemos enunciar o princípio do máximo fraco.

Teorema 4.23. *(**Príncipio do Máximo Fraco**) Seja L um operador elíptico em um domínio limitado Ω. Escrevemos L na forma:*

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_i u + c(x)u, a^{ij} = a^{ij}.$$

Em que $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $a^{ij} \in C(\Omega)$.

Suponha que:

$$Lu \geq 0 (\leq 0), c = 0 \tag{4.30}$$

em Ω,

e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Suponha ainda que existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)} \leq b_0 < \infty, i = 1, ..., n, x \in \Omega \tag{4.31}$$

Então o máximo (mínimo) de u em $\overline{\Omega}$ é atingido em $\partial\Omega$, ou seja:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u). \tag{4.32}$$

Demonstração. Note que se $Lu > 0$ em Ω (desigualdade estrita) e se supusermos que u atinge um máximo em $x_0 \in \Omega$, então $Du(x_0) = 0$, e portanto a matriz $D^2u(x_0)$ ou seja, a matriz com coeficientes $[D_{ij}(x_0)]$ é não positiva. Como L é elíptico segue que a matriz de coeficientes $[a^{ij}(x_0)]$ é positiva. Sabemos que $Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0$, (já que $b^iD_i(x_0) = 0$) contradizendo $Lu > 0$ e portanto vale o teorema.

Por (4.31), $\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)} \leq b_0$. Como $a^{11}(x) \geq \lambda(x)$ existe uma constante $\gamma > 0$ suficientemente grande tal que:

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{11} + \gamma b^1)e^{\gamma x_1} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0)e^{\gamma x_1} > 0$$

Então para qualquer $\epsilon > 0$ temos: $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ em Ω, e

$$\sup_{\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}),$$

fazendo $\epsilon \to 0$, segue que $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$, como queríamos. □

Observação: É fácil ver que o resultado contínua válido se $\frac{b^i}{\alpha}$ é localmente limitada, isto é, se $\forall x \in \Omega$, existe $b_x \in \mathbb{R}$ e $\Omega_x \subset\subset \Omega$ contendo x tal que:

$$\left|\frac{b^i(y)}{\lambda(y)}\right| \leq b_x, \quad \forall y \in \Omega_x.$$

Em particular, o resultado vale se a^{ij}, b^i são contínuas.

Definicão 4.24. (**Equações Quase-lineares**) Uma EDP de segunda ordem é dita *quase-linear* quando pode ser escrita na forma:

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du), a^{ij} = a^{ij} \tag{4.33}$$

Em que $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e $u \in C^2(\Omega)$. Os coeficientes de Q são funções $a^{ij}, b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definicão 4.25. Uma equação quase-linear Q é dita *elíptica* em Ω se a matriz de seus coeficientes $[a^{ij}(x, z, p)]$ for positiva para todo $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se $\lambda(x, z, p)$ e $\Lambda(x, z, p)$ denotarem o mínimo e o máximo autovalor de $[a^{ij}(x, z, p)]$ então temos:

$$0 < \lambda(x, z, p) \leq a^{ij}(x, z, p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x, z, p)|\xi|^2$$

para toda $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e para todo $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definicão 4.26. Uma equação quasilinear Q é dita *elíptica com respeito a uma função* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se $\forall x \in \Omega$ a matriz $[a^{ij}(x, u(x), Du(x))]$ for positiva.

Teorema 4.27. *(**Princípio da comparação**) Sejam $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega})$, tal que $Qu \geq Qv$ em Ω, $u \leq v$ em $\partial\Omega$, em que:*

1. *O operador Q é elíptico com respeito a u e v;*

2. *Os coeficientes $a_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ou $a^{ij}(x, z, p)$, são independentes da variável z;*

3. *Os coeficientes $b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são não crescentes em z para cada $(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$;*

4. *Os coeficientes a^{ij}, b são continuamente diferenciáveis com respeito à variável p, em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

Então $u \leq v$ em Ω. Além disso se $Qu > Qv$ e $u \leq v$ em $\partial\Omega$ e valem as condições $(1), (2), (3)$, *então temos a desigualdade estrita $u < v$, em Ω.*

Demonstração. Sabemos que Q é elíptico com relação a u, então temos (Somando e subtraindo o termo $a^{ij}(x, Du)D_{ij}v$ e $b(x, u, Dv)$:

$$Qu - Qv = a^{ij}(x, Du)D_{ij}(u - v) + (a^{ij}(x, Du) - a^{ij}(x, Dv))D_{ij}v + b(x, u, Du) - \\ b(x, u, Dv) + b(x, u, Dv) - b(x, v, Dv) \geq 0$$

Como pela hipótese (2) os coeficientes a_{ij} independem da variável z abusaremos da notação e escreveremos $a_{ij}(x, y)$ para $x \in \Omega$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

Faremos um truque a fim de tornar a equação não linear em uma equação linear. Escreveremos: $w = u - v, a^{ij}(x) = a^{ij}(x, Du(x))$, ou seja, consideraremos a composição como uma função apenas de x, e $[a^{ij}(x, Du) - a^{ij}(x, Dv)]D_{ij}v + b(x, u, Du) - b(x, u, Dv) = b^i(x)D_i w$. Para justificar a existência de coeficientes (funções) b^i usamos a condição (4) e o teorema do valor médio, já que para cada x existe x' (sendo que x' depende continuamente de x), tal que:

$$b(x, u(x), Du(x)) - b(x, u(x), Dv(x)) = \frac{\partial b}{\partial x_3}(x, u(x), x')(D(u - v)) = b'(x)Dw$$

e

$$[a^{ij}(x, Du(x)) - a^{ij}(x, Dv(x))]D_{ij}v(x) = [\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_2}(x, x')D(u(x) - v(x))]D_{ij}v(x) = \\ c^{ij}(x)Dw(x)D_{ij}v(x) = [\textstyle\sum_j c^{ij}(x)D_{ij}v(x)]_i D_i w(x) = c_0^i D_i w(x)$$

Em que $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_2}$ é, na verdade, a derivada de a_{ij} em relação as últimas entradas relativas ao vetor $Du(x)$.

Observanmos que a convexidade do domínio exigida pelo teorema do valor médio é satisfeita já que estamos em $\mathbb{R}^n$.

Em suma temos que existe a função b^i, a saber $b^i = c_0^i D_i v + b'$

Utilizando a hipótese (3), e substituindo as funções definidas acima podemos concluir que:

$$Lw = a^{ij}(x)D_{ij}w + b^i D_i w \geq 0$$

em $\Omega^+ = \{x \in \Omega | \omega(x) > 0\}$ e $w \leq 0$ em $\partial\Omega$.

Notemos que $a^{ij}(x, Dv(x)), a^{ij}(x, Du(x)) \in C^0(\Omega)$ e $u, v \in C^0(\overline{\Omega})$, podemos estender a^{ij} e b^i para $\overline{\Omega}$. Sendo assim $\frac{b^i}{\lambda} \in C^0(\overline{\Omega}) \Rightarrow \frac{b^i}{\lambda} \leq k$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Portanto podemos usar o princípio do mácimo para equações lineares para concluir que $w \leq 0$ em Ω. Se $Qu > Qv$ em Ω, a função w não pode assumir valor não negativo em Ω (Ver prova do princípio do máximo para equações lineares). Então $w < 0$ em Ω. $\square$

Corolário 4.28. *Seja Q um operador elíptico. Sejam $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfazendo $Qu = Qv$ em Ω, e $u = v$ em $\partial\Omega$, então, supondo válidas as condições do teorema , $u = v$*

Demonstração. Segue diretamente do teorema anterior. □

4.5 Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder

Nesa sessão, utilizaremos o teorema do ponto fixo de Schauder para provar a existência de solução para equações quasilineares elípticas, o que na próxima sessão nos auxiliará na demontração de que os pontos do tipo $0 \oplus f|_{\partial\Omega}$ fazem parte da imagem do operador B do problema de Plateau.

Seja uma equação quase-linear elíptica da forma:

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u.Du) = 0$$

Em que Q é eliptica. Dada a regularidade necessária para os coeficientes e uma função φ também regular o suficiente, utilizaremos teoremas para equações lineares para afirmar que se v possui certa regulridade, o problema:

$$a^{ij}(x, v, Dv)D_{ij}u + b(x, v, Dv) = 0, \quad \text{em } \Omega \text{ e } u = \varphi \text{ em } \partial\Omega.$$

Possui solução em certo espaço. A idéia é utilizar o teorema do ponto fixo neste operador, a fim de encontrar uma solução para a equação quasilinear Q.

Começamos então enunciando o teorema do ponto fixo de Schauder:

Teorema 4.29. ***(do ponto fixo de Leray-Schauder)*** *Seja K um conjunto compacto e convexo em um espaço de Banach X e seja $T : K \to K$ contínio. Então T possui um ponto fixo, isto é, $Tx = x$ para todo $x \in K$.*

A demonstração do teorema está fora do objetivo desta sessão, (Veja em Gilbarg " Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", [2], pag 280.)

Corolário 4.30. *Seja K um conjunto fechado e convexo em um espaço de Banach X e seja $T : K \to K$ uma aplicação contínua tal que a imagem $T(K)$ é pré-compacta. Então T possui um ponto fixo.*

Vamos agora ao teorema que será utilizado na aplicação:

Teorema 4.31. *Seja T uma aplicação linear compacta de um espaço de Banach X nele mesmo, e suponha que exista uma constante M tal que:*

$$||x||_X < M$$

para todo $x \in X$ satisfazendo $x = \sigma Tx$ para $\sigma \in [0, 1]$. Então T possui um ponto fixo.

Demonstração. Assimos, sem perda de generalidade que $M = 1$. Definimos a aplicação:

$$T^*x = Tx, \text{ se } ||Tx|| \leq 1 \qquad T^*x = \frac{Tx}{||Tx||}, \text{ se } ||Tx|| \geq 1$$

Então T^* é contínuo da bola unitária $\overline{B} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ nela mesma. Vejamos que $T^*(B)$ também é pré-compacto. Note que $y \in T^*(\overline{B}) \Rightarrow y = Tx, x \in \overline{B}$, se $\|Tx\| < 1$ então $T^*x = Tx$ por outro lado se $\|Tx\| > 1$ então $T^*x = T(\frac{x}{\|Tx\|}$ e como $\|\frac{x}{\|Tx\|}\| \leq 1$ temos que $T^*x \in T(\overline{B})$, donde concluímos que $T^*(\overline{B}) \subset T(\overline{B})$ e portanto $T^*(\overline{B})$ é pré-compacto.

Pelo corolário 4.30 T^* possui um ponto fixo x. Devemos mostrar que x também é ponto fixo de T. Se $\|Tx\| \leq 1$ o teorema está demonstrado. Se $\|Tx\| \geq 1$ então $x = T^*x = \sigma Tx$, em que $\sigma = \frac{1}{\|Tx\|}$, enquanto que $\|x\| = \|T^*x\| = 1$, o que contradiz a hipótese: $\|x\| < M = 1$. Portanto $\|Tx\| \leq 1$ e conseguentemente $x = Tx = T^*x$. □

Pelo teorema acima, parece interesante saber o que seria o operador σT no caso em que estamos estudando. Para $0 < \beta < 1$ defina

$$\begin{aligned} T : C^{1,\beta}(\Omega) &\to C^{2,\alpha\beta}(\Omega) \\ v &\mapsto u \end{aligned} \tag{4.34}$$

Em que u é única solução da equação linear:

$$Q = a^{ij}(x, v, Dv)D_{ij}u + b(x, v, Dv) = 0 \text{ em } \Omega \quad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega.$$

A garantia que $u \in C^{2,\alpha\beta}(\Omega)$ está no teorema de solução para equações **lineares**, (teorema 4.17 e 4.22) A equação $u = \sigma Tu$ é equivalente a equação

$$\begin{aligned} u = \sigma Tu \Leftrightarrow Q_\sigma u = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + \sigma b(x, u, Du) = 0 \\ u = \sigma\varphi \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Teorema 4.32. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ e suponha que Q é elíptica em $\overline{\Omega}$ com coeficientes $a^{ij}, b \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$. Seja $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então se para algum $\beta > 0$ existir constante M, independente de u e σ, tal que para qualquer solução do problema de Dirichlet, $Q_\sigma u = 0$, $u = \sigma\varphi$ em $\partial\Omega$, $0 < \sigma \leq 1$ satisfizer*

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} < M, \tag{4.36}$$

então o problema de Dirichlet $Qu = 0$ $u = \varphi$ em $\partial\Omega$ possui solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$

Demonstração. Consideramos o operador T como definido em 4.34. Mostremos que T é compacto. Relembraremos a estimativa do teorema 5.5, temos que se os coeficientes de Q tem regularidade $C^{0,\alpha\beta}$ então:

$$|u|_{2,\alpha\beta,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha\beta,\Omega} + |f|_{0,\alpha\beta,\Omega}) \tag{4.37}$$

Em nosso caso $f = 0$. para concluir essa estimativa observamos que se $v \in C^{1,\beta}$ então os coeficientes de Q que são composições de a^{ij} com derivadas de v pertencem a $C^{\alpha\beta}$ (é fundamental entender que importância de $v \in C^{\alpha\beta}$ está na regularidade dos coeficientes). E portanto com a regularidade necessária temos que vale a equação acima.

O C que aparece em 4.37 depende da limitação dos coeficientes da equação. Em nosso caso dependem das normas: $|a^{ij}(x, v, Dv)|_{0,\alpha\beta\Omega}$ e $|b^i(x, v, Dv)|_{0,\alpha\beta,\Omega}$. Dado um conjunto limitado A em $C^{1,\beta}$ temos que $v \in A \Rightarrow \|v\|_{C^0(\Omega)} \leq c_1$ e $\|Dv\|_{C^0(\Omega)} \leq c_2$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Sejam $B_{c_1} \subset \mathbb{R}$ e $B_{c_2} \subset \mathbb{R}^n$ bolas fechadas de raio c_1 e c_2 respectivamente. Consideremos a extensão da função a^{ij} para $\overline{\Omega}$ e sua restrição nas outras coordendas

$$a^{ij} : \overline{\Omega} \times B_{c_1} \times B_{c_2}$$

Então se $v \in A \Rightarrow v \in a^{ij}(\overline{\Omega} \times B_{c_1} \times B_{c_2})$. o conjunto $\overline{\Omega} \times B_{c_1} \times B_{c_2}$ é compacto, somado ao fato de Q ser elíptica, isso significa que podemos então achar constantes $\lambda > 0$ e $\Lambda \leq \infty$ de maneira que

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

e

$$|a^{ij}|_{0,\alpha,\Omega} \leq \Lambda$$

sendo assim podemos aplicar o teorema 4.15 para concluir que T leva conjuntos limitados de $C^{1,\beta}(\Omega)$ em conjuntos limitados de $C^{2,\alpha\beta}(\Omega)$

Por Arzela Ascoli, temos que conjuntos limitados de $C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ em $C^2(\overline{\Omega})$ são pré compactos. Isso prova que T é compacto se considerarmos seu contradominio como C^2.

Aplicando o teorema 4.31 para o operador $T : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^2(\overline{\Omega})$, temos que existe ponto fixo u, e então $u \in C^2$.

Seja $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ nosso ponto fixo: $u = Tu$. Ora, como agora os coeficientes ficam em C^α, usamos novamente 4.37 trocando $\alpha\beta$ por α, temos que $u \in C^{2,\alpha}$. Mas por definição de T, $u = Tu$, e portanto nosso ponto fixo, que é a solução buscada, está em $C^{2,\alpha}$, como desejado.

□

Precisamos agora provar a existência de um β com a limitação pedida no teorema anterior. Infelizmente a demonstração para esse teorema esta fora do escopo do trabalho, pois envolve tecnicas geométricas mais avançadas, já que as hipóteses envolvem restrições no bordo do domínio Ω. Vamos, portanto, apenas enunciar este teorema.

Teorema 4.33. *Seja $Q = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u$, supondo que os coeficientes $a^{ij} \in C^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$. Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Suponha que $\Omega \in C^{2,\alpha}$ e que a curvatura média H' de $\partial\Omega$ é não negativa em todos os pontos de Ω. Então existe $\beta > 0$ tal que:*

$$||u||_{C^{1,\beta}} < M,$$

sempre que $Q_\sigma u = 0$ e $u = \sigma\varphi$ para algum $\sigma \in [0, 1]$.

E portanto podemos concluir que:

Teorema 4.34. *Seja Ω um domínio $C^{2,\gamma}$ limitado em $\mathbb{R}^n$. Então o problema de Dirichlet $Qu = 0$, $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, para $\varphi \in C^{2,\gamma}$, possui solução se e somente se a curvatura média H' de $\partial\Omega$ é não negativa para todo ponto de $\partial\Omega$.*

Demonstração. Segue diretamente de 4.33 e 4.32. □

4.6 Resolução do Problema de Plateau

Após todos os resultados relativos a teoria de equações lineares elípticas de segunda ordem, temos que juntar as peças para resolver nosso problema inicial. Queremos provar que o operador:

$$\begin{aligned} B:\ & C^{2,\alpha}(D) \to C^{\alpha}(D) \oplus C^{2,\alpha}(\partial D) \\ & f(\mapsto P(f), f|_{\partial\Omega}) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo local, é injetivo, e alcança todos os pontos da forma $0 \oplus g$, com $g \in C^{2,\alpha}(\partial D)$. É importante frisar aqui que estamos vendo funções em $C^{2,\alpha}(\partial D)$ como restrições de funções em $C^{2,\alpha}(D)$, em que D é o disco fechado.

Lembramos que:

$$\begin{aligned} P : & C^{2,\alpha}(D) \to C^{\alpha}(D) \\ f \mapsto & (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{yx} + (1 + f_x^2)f_y. \end{aligned}$$

O primeiro passo é provar que a derivada:

$$DB(f)h = (1 + f_y^2)h_{xx} - 2f_x f_y h_{xy}(1 + f_x^2)h_{yy} + 2(f_x f_{yy} - f_y f_{xy})h_x + 2(f_y f_{xx} - f_x f_{xy})h_y, h|_{\partial\Omega}$$

é bijetiva.

Separaremos a derivada em duas aplicações:

$$\begin{aligned} A_f^1 : & C^{2,\alpha}(D) \to C^{\alpha}(D) \oplus C^{2,\alpha}(\partial D) \\ & h \mapsto ((1 + f_y^2)h_{xx} - 2f_x f_y h_{xy}(1 + f_x^2)h_{yy}, h|_{\partial\Omega}) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} A_f^2 : & C^{2,\alpha}(D) \to C^{\alpha}(D) \oplus C^{2,\alpha}(\partial D) \\ & h \mapsto 2(f_x f_{yy} - f_y f_{xy})h_x + 2(f_y f_{xx} - f_x f_{xy})h_y \oplus 0). \end{aligned}$$

Então: $A_f^1 + A_f^2 = DB(f)$. Primeiramente provaremos que $DB(f)$ possui índice de Fredholm zero. Para isso veremos que A_f^1 possui índice de Fredholm zero e que A_f^2 é um operador compacto, e utilizaremos o teorema 2.43 que nos diz que a soma de um operador compacto com um operador de Fredholm é Fredholm de mesmo índice.

Demonstraremos que a aplicação A_f^2 é compacta. Nos basearemos na imersão compacta $i : C^{2,\alpha} \to C^{0,\alpha}$ (Ver capítulo 1). Para demonstrar que A_f^2 é compacta escolhemos arbitrariamente (h^n) uma sequência limitada em $C^{2,\alpha}(D)$. Pela imersão compacta em $C^{0,\alpha}(D)$ sabemos que existe subsequência convergente para h_{xx}^n, h_{yy}^n e h_{xy}^n, podemos tomar uma única subsequência na qual todas sejam convergentes utizando o truque de tomar uma como subsequência da anterior. Como os coeficientes envolvendo f estão em $C^{0,\alpha}(D)$ eles não interferem na convergência, donde existe subsequência (h^{n_k}) tal que $(A_f^2(h^{n_k}))$ é convergente. Como (h^n) é arbitrária segue que A_f^2 é compacto.

Agora vejamos que A^1_f é Fredholm de índice zero. Começamos provando que A^1_f é estritamente elíptico. Definimos: $a^{11} = (1 + f_y^2)$, $a^{21} = a^{12} = -f_x f_y$ e $a^{22} = (1 + f_x^2)$. Sabemos que um operador é elíptico. Se os autovalores da matriz de sua parte principal com componentes $[a^{ij}(x)]$ são positivos para todo x. Para ver que A^1_f é elíptico basta ver que o determinante da matriz $[a^{ij}(x)]$ é positivo, pois este é o produto de seus autovalores. Temos a matriz:

$$M(x) = \begin{pmatrix} (1 + f_y^2)(x) & -f_x(x) f_y(x) \\ -f_x f_y(x) & (1 + f_x^2)(x) \end{pmatrix},$$

donde $\det(M) = f_x^2 + f_y^2 + 1 > 0$. Logo segue que A^1_f é elíptico.

Para ver que A^1_f é estritamente elíptica, notemos que as derivadas de f estão definidas continuamente em $\overline{\Omega}$ o que significa que a função $\lambda(x) = \min\{\lambda : \lambda$ é autovalor de M(x)$\}$ pode ser definida em $\overline{\Omega}$, donde existe um mínimo para λ e portanto existe λ_0 tal que $0 < \lambda_0 < \lambda(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Vejamos o enunciado do teorema 4.17 :

Seja L estritamente elíptico e Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ limitado. Suponha que f e os coeficientes de L estejam em $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet:

$$Lu = f \text{ em } \Omega, \qquad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega$$

possui única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ se e somente se o problema:

$$\Delta u = f \text{ em } \Omega, \qquad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega$$

possui única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Dessa maneira podemos utilizar o teorema citado acima, e concluir que a solução para o problema:

$$A^1_f h = f \text{ em } \Omega \qquad h = \varphi \text{ em } \partial\Omega$$

depende do estudo da solução de $\Delta h = f$ e $h|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Pela sessão 4.3 e em especial pelo teorema 4.22 temos o resultado que precisamos. Vejamos o enunciado de 4.22:

Seja Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ limitado. Sejam $f \in C^\alpha(\Omega)$, e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet:

$$\Delta u = f \text{ em } \Omega, \qquad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega$$

possui única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Então juntando o teorema 4.17 com o teorema 4.23, concluímos que A^1_f é bijetiva, e portanto Fredholm de índice zero. Assim, sabemos que $A^1_f + A^2_f = DB(f)$ é de Fredholm de índice zero para toda $f \in C^{2,\alpha}(D)$.

Pelo fato de $DB(f)$ possuir índice de Fredholm zero podemos utilizar a alternativa de Fredholm, ou seja, $DB(f)$ é injetiva se e somente se é sobrejetiva. Provaremos que $DB(f)$ é injetiva utilizando o Princípio do Máximo para equações lineares, apresentado na sessão 4.4. Usaremos o teorema 4.23 :

Seja L um operador elíptico em um domínio limitado Ω. Escrevemos L na forma:

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, a^{ij} = a^{ij}.$$

Em que $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$,
Suponha que:

$$Lu \geq 0(\leq 0), c = 0 \tag{4.38}$$

em Ω,
e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Também que existe b_0 tal que:

$$\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)} \leq b_0 < \infty, \qquad i = 1, ..., n, x \in \Omega \tag{4.39}$$

Então o máximo (mínimo) de u em $\overline{\Omega}$ é atingido em $\partial\Omega$, ou seja:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u). \tag{4.40}$$

No caso de $DB(f)$, temos que b_i envolve apenas as primeiras derivadas de f. Como $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, temos que as derivadas de primeira ordem de f estão continuamente definidas em $\overline{\Omega}$ bem como a função λ, assim: $\frac{b_i(x)}{\lambda(x)} \leq K$, para algum $K \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \Omega$.

Agora suponha que $DB(f)h = 0$ então $h|_{\partial\Omega} = 0$, donde, pelo Princípio do Máximo temos que $h = 0$. Com isso terminamos a demonstração de que $DB(f)$ é bijetiva.

Para ver que B é injetiva utilizaremos o Principio do máximo, trabalhado na sessão 4.4 Em especial, o teorema 4.27 e seu corolário 4.28 . Lembraremos o enunciado do corolário 4.29

Corolário: Seja Q um operador elíptico. Sejam $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfazendo $Qu = Qv$ em Ω, e $u = v$ em $\partial\Omega$, então, supondo válidas as condições do teorema , $u = v$.

As "condições do teorema" citadas acima, são:

1. O operador Q é elíptico com respeito a u e v;

2. Os coeficientes $a_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, são independentes da variável z;

3. Os coeficientes $b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são não crescentes em z para cada $(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$;

4. Os coeficientes a^{ij}, b são continuamente diferenciáveis com respeito a variável p, em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Analisando o operador B, se supusermos $B(f_1) = B(f_2)$ temos que $f_1|_{\partial D} = f_2|_{\partial D}$ e que $P(f_1) = P(f_2)$. desde que P esteja nas condições do **Corolário**. Em especial se P é elíptico em relação a qualquer função $f \in C^{2,\alpha}(D)$.

Agora não estamos mais no caso linear. Para P, temos que que $a^{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$a^{11}(x, p, z) = (1 + z_2^2) \qquad a^{12}\,(x, p, z) = a^{21}(x, y, z) = z_1 z_2 \qquad a^{22}(x, p, z) = (1 + z_1^2).$$

O fato que a matriz $[a^{ij}(x, f, Df)]$ é positiva para toda f foi visto no caso linear, já que a matriz coincide com a matriz M analisada acima. Portanto A^2_f é elíptica com relação a f para qualquer $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

A fim de utilizar o **Corolário** citato precisamos observar que P é dado por uma equação quasilinear. De fato a equação: $(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{yx} + (1 + f_x^2)f_y = g$ pode ser escrita como: $a^{ij}(x, f, v)D_{ij}f = g$, para a^{ij} definidos acima. Também a^{ij} claramente não depende da coordenada p, bem como é uma função diferenciável em relação a todas as variáveis. Cabe também observar que $b = 0$ o que implica cumprir a condição (3).

Finalmente, se $B(f_1) = B(f_2) \Rightarrow P(f_1) = P(f_2)$ e $f_1 = f_2$ em ∂D. Logo, utlizando o corolário do princípio do máximo, citado acima, temos que $f_1 = f_2$ em D, provando a injetividade de B.

Resta-nos provar que B atinge os pontos do tipo $0 \oplus g$ para $g \in C^{2,\alpha}(\partial D)$. Para isso utilizaremos os resultados da seção 5.5. Lembramos que esses resultados são construídos a partir do teorema do ponto fixo de Schauder. Ao final da seção, temos o teorema o teorema 4.34

Seja Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ limitado em $\mathbb{R}^n$. Então o problema de Dirichlet $Qu = 0$, $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, para $\varphi \in C^{2,\alpha}$, possui solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ se e somente se a curvatura média H' de $\partial\Omega$ é não negativa para todo ponto de $\partial\Omega$.

Como estamos trabalhando com $\Omega = D$ e o circulo possui curvatura constante igual ao inverso de seu raio, o **Teorema 4** é trivialmente satisfeito. Donde prova-se diretamente que B atinge os pontos da forma $0 \oplus g$, $g \in C^{2,\alpha}(\partial D)$.

Com todos esses resultados em mãos, concluímos que o problema de Plateau possui solução, e além disso que dada $g \in C^{2,\alpha}(\partial D)$ podemos achar uma vizinhança para qual essa solução está em $f \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e restrito a essa vizinhança, essa solução é dada a partir de um difeomorfismo. Isto estabelece dependência diferenciável da solução em relação às condições de contorno.

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Pontos Conjulgados.

Entender realmente o que são pontos conjulgados seria muito trabalhoso para o tempo limitado do TCC. Como essa condição apareceu naturalmente no problema, falaremos apenas um pouco sobre sua definição.

Um campo vetorial J em uma geodésica γ é dito um *campo de Jacobi* se satisfaz a equação:

$$\tfrac{D^2}{dt}J(t) + R(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t)0$$

Em que R é o tensor de curvatura. (Ver Manfredo "Geometria Riemanniana" [3] Capítulo 5).

Assim dois pontos $p, q \in M$ em que $p = \gamma(0)$ e $q = \gamma(t_0)$ e γ é geodésica ligando p e q, são ditos *conjugados,* se existe um campo se Jacobi J não identicamente nulo em γ tal que $J(0) = J(t_0) = 0$.

Exemplo 5.1. *Na esfera S^2 os pontos conjulgados são pontos antipodais.*

Exemplo 5.2. *R^n não possui pontos conjulgados.*

5.2 Relações entre seminormas em espaços de Hölder

No terceiro capítulo vimos no lema que relacionada as seminormas utilizadas em $C^{k,\alpha}$ e demonstração segue abaixo.

Lema 5.3. *Suponha $j + \beta < k + \alpha$, em que $j, k = 0, 1, 2, ...$ e $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante $C(\epsilon, k, j)$ tal que:*

$$[u]^*_{j,\beta,\Omega} \leq C|u|_{0,\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha,\Omega}. \tag{5.1}$$

$$|u|^*_{j,\beta,\Omega} \leq C|u|_{0,\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha,\Omega}. \tag{5.2}$$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para os casos $j, k = 0, 1, 2$ pois apenas esses serão utilizados nos resultados a seguintes. O caso geral inclui as mesmas idéias por um processo de indução.

Primeiramente, note que a prova de 5.1 implica a prova de 5.2 já que $|u|^*_{j,\beta,\Omega} = |u|^*_{j,\Omega} + [u]^*_{k,\alpha,\Omega} = \sum_{k=0}^{j} [u]^*_{k,\Omega} + [u]^*_{k,\alpha,\Omega}$, e $[u]_{k,\Omega} = [u]_{k,0,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + \epsilon [u]^*_{k,\alpha,\Omega})$, $(l < j+\beta < k+\alpha)$.

Omitiremos, a partir de agora, o subíndice Ω, já que este será o mesmo durante toda a demonstração.

Separaremos a prova em casos:

(i) $j = 1, k = 2, \alpha = \beta = 0$. Queremos, então, mostrar que, para todo $\epsilon > 0$

$$[u]^*_1 \leq C(\epsilon)|u|_0 + \epsilon [u]^*_2. \tag{5.3}$$

Seja $x \in \Omega$ e seja d_x a distância desse ponto para a fronteira de Ω. Para cada $\mu \leq \frac{1}{2}$ definimos $d = \mu d_x$. Escolheremos posteriormente a constante μ para que o resultado final seja obtido. Para $i = 1, 2..., n$ considere x', x'' como sendo os pontos inicial e final, respectivamente, do segmento de comprimento $2d$ paralelo ao eixo x_i e com centro em x. Então, pelo teorema do valor médio, para algum $\overline{x}$ nesse segmento, temos:

$$|D_i u(\overline{x})| = \tfrac{|u(x') - u(x'')|}{2d} \leq \tfrac{1}{d}|u|_0.$$

Também:

$$|D_i u(x)| = |D_i u(\overline{x}) + \int_{\overline{x}}^{x} D_{ii} u dx_i| \leq \frac{1}{d}|u|_0 + d \sup_B |D_{ii} u| \leq \frac{1}{d}|u|_0 + d \sup_{y \in B} d_y^{-2} \sup_{y \in B} d_y^2 |D_{ii} u(y)|. \tag{5.4}$$

Seja $B_d(x)$ a bola com centro em x e raio d. Observe que, pela desigualdade triângular, para todo $y \in B$ e para todo $z \in \partial\Omega : |x - z| \leq |x - y| + |y - z| \Rightarrow |x - z| \leq d + d_y \; \forall z \in \partial\Omega, \Rightarrow d_x \leq d + d_y \Leftrightarrow d_y > d_x - d = (1 - \mu) d_x \geq \frac{d_x}{2}$. Sendo assim: $\frac{1}{d_y^2} \leq \frac{4}{d_x^2} \Leftrightarrow \frac{d_x}{d_y^2} \leq 4\mu$.

Multiplicando 5.4 por d_x e utilizando essas majorações, segue que:

$$d_x |D_i u(x)| \leq \mu^{-1}|u|_0 + 4\mu \sup\nolimits_{y \in \Omega} d_y^2 |D_{ii} u(y)| \leq \mu^{-1}|u|_0 + 4\mu [u]^*_2$$

Portanto:

$$[u]^*_1 = \sup\nolimits_{x \in \Omega, i=1,\dots,n} d_x |D_i u(x)| \leq \mu^{-1}|u|_0 + 4\mu [u]^*_2.$$

Agora podemos escolher μ adequadamente, ou seja, $\mu \leq \frac{\epsilon}{4}$ e $C = \mu^{-1}$.

(ii) $j \leq k; \beta = 0, \alpha > 0$. De maneira parecida com o caso anterior, sejam $x \in \Omega, 0 < \mu \leq \frac{1}{2}, d = \mu d_x, B = B_d(x)$, e, finalmente, x', x'' pontos extremos do segmento de comprimento $2d$ paralelo ao eixo x_i, com centro em x. Novamente, pelo teorema do valor médio, existe $\overline{x}$ tal que:

$$|D_{il} u(\overline{x})| = \tfrac{|D_i u(x') - D_i u(x'')|}{2d} \leq \tfrac{1}{d}|D_i u|_0.$$

E sendo $d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$, a distância do conjunto $\{x, y\}$ a fronteira de Ω, temos:

$$|D_{il}u(x)| \leq |D_{il}u(\overline{x})| + |D_{il}u(x) - D_{il}u(\overline{x})| \tag{5.5}$$

$$\leq \frac{1}{d} \sup_{y \in B} d^{y-1} \sup_{y \in B} d_y |D_i u(y)| + d^\alpha \sup_{y \in B} d_{x,y}^{-2-\alpha} \sup_{y \in B} d_{x,y}^{2+\alpha} \frac{|D_{il}u(x) - D_{il}u(y)|}{|x-y|^\alpha} \tag{5.6}$$

A última desigualdade segue pois: $\frac{d}{|x-y|} \geq 1$. Novamente, como $d_y, d_{x,y} > \frac{d_x}{2}$ para $y \in B$, temos: $\frac{d_x}{\mu d_y} \leq \frac{2}{\mu}$. Utilizando essas duas desigualdades e lembrando que $d = \mu d_x$, também obtemos: $\frac{d_x^2 d^\alpha}{d_{x,y}^{2+\alpha}} \leq 2^{2+\alpha} \frac{d_x^{2+\alpha}\mu^\alpha}{d_x^{2+\alpha}} \leq (\mu)^\alpha 2^{2+\alpha}$. Seque que, multiplicando 5.6 por d_x^2 :

$$d_x^2 |D_{il}u(x)| \leq [u]_1^* + 2^{2+\alpha}\mu^\alpha [u]_{2,\alpha}^*.$$

Tomando o supremo em i, l e $x \in \Omega$, e escolhendo μ tal que $8\mu \leq \epsilon$, $C = \frac{2}{\mu}$, obtemos:

$$[u]_2^* \leq C(\epsilon)[u]_1^* + \epsilon [u]_{2,\alpha}^*.$$

Se substituirmos $D_i u$ por u, obtemos, em um caso mais fácil e fazendo as modificações necessárias:

$$[u]_1^* \leq C(\epsilon)|u|_0 + \epsilon [u]_{1,\alpha}^*.$$

Sendo assim, aqui fica resolvido também o caso $j = k = 1, \beta = 0, \alpha > 0$.

Utilizaremos no caso (*iii*) e (*iv*) o fato que:

$$[u]_{j,\beta}^* = \sup_{x,y \in \Omega, |\sigma| = j} d_{x,y}^{j+\beta} \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \sup_{x,y \in \Omega, |\sigma| = j} d_x^{j+\beta} \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x-y|^\beta} \tag{5.7}$$

(*iii*) $j < k; \beta > 0, \alpha = 0$. Sejam $x, y \in \Omega$, e sejam μ, d e B definidos como no caso (*i*) e (*ii*). Vamos começar com $j = 0$, lembrando que queremos provar que:

$$[u]_{0,\beta}^* \leq C(\epsilon)|u|_0 + \epsilon [u]_1^*$$

Se $y \in B$, obtemos do teorema do valor médio que, para $0 < \beta \leq 1$:

$d_x^\beta \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} = d_x^\beta \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} |x-y|^{1-\beta} \leq (d_x \mu)^{1-\beta} d_x^\beta |Du|_{0;B} = \mu^{1-\beta} d_x |Du|_{0;B} \leq 2\mu^{1-\beta}[u]_1^*$;

Se $y \notin B$ temos:

$$d_x^\beta \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq 2\mu^{-\beta}|u|_0, \tag{5.8}$$

pois $|x - y| \geq d = d_x \mu \Rightarrow \frac{d_x}{|x-y|} \leq \mu$

Com essas duas inequações e 5.7 obtemos:

$$[u]_{0,\beta}^* = \sup_{x,y \in \Omega} d_{x,y}^\beta \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq 2\mu^{-\beta}|u|_0 + 2\mu^{1-\beta}[u]_1^*. \tag{5.9}$$

Isso implica 5.1 quando $\beta < 1$ e $2\mu^{1-\beta} \leq \epsilon$. Se aplicarmos 5.3 na parte direita de 5.9 e escolhermos μ adequadamente, obtemos 5.1 para $j = 0, k = 2, \alpha = 0, 0 < \beta \leq 1$.

A prova para $j = 1, k = 2$ segue da mesma maneira se trocarmos $D_i u$ por u, no lugar de 5.8 ebc teremos:

$$d_x^{1+\beta}\frac{|D_i u(x) - D_i u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \mu^{-\beta}[d_x|D_i u(x)| + d_y|D_i u(y)|] \leq 2\mu^{-\beta}[u]_1^*.$$

Basta então aplicar então 5.3.

(iv) $j \leq k; \alpha, \beta > 0$. Note que é suficiente provar o caso $j = k$ e portanto $\alpha > \beta$, isto porque se $j \leq k$ podemos utilizar o caso $j = k$ para obtermos o índice j do lado direito de 5.1 e assim trivialmente $[u]_{j,\alpha,\Omega}^* \leq [u]_{k,\alpha,\Omega}^*$.

Novamente, com a mesma notação dos casos anteriores, se $y \in B$:

$$d_x^\beta\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \mu^{\alpha-\beta}d_x^\alpha\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Note que se $y \in B$ então $\min(d_x, d_y) \geq \min(d_x, d_x - d) = \min(d_x, d_x(1-\mu)) \geq \frac{1}{2}d_x$. Donde para $y \in B$ $\sup d_{x,y}^\alpha\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \geq (\frac{1}{2})^\alpha\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$.

$$\tag{5.10}$$

Se $y \notin B$,

$$d_x^\beta\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq 2\mu^\beta|u|_0.$$

Tomando o supremo para x, y e considerando 5.7 e 5.10, podemos escolher $\epsilon = \frac{\mu^{\alpha-\beta}}{2^\alpha}$, $C = \frac{2}{mu}$,então obtemos:

$$[u]_\beta^* \leq C|u|_0 + \epsilon[u]_\alpha^*$$

Ou seja, 5.1 para $j = k = 0$

Se $j = k = 1, 2$ então procedemos de maneira parecida a anterior, por exemplo, para $k = j = 2$, temos que, se $y \in B$:

$$d_x^{2+\beta}\frac{|D_{il}u(x) - D_{il}u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \mu^{\alpha-\beta}d_x^{2+\alpha}\frac{|D_{il}u(x) - D_{il}u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

Se $y \notin B$, então:

Por outro lado, se $y \notin B$:

$$d_x^{2+\beta}\frac{|D_i u(x) - D_i u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq 2\mu^{-\beta}d_x^2 \sup|D_{il}(u(x)|.$$

Pela parte *(ii)*

$$\sup_{x\in\Omega} d_x^2|D_{il}(u(x))| \leq \frac{2}{\mu}[u]_1^* + \epsilon[u]_{2,\alpha}^*$$

Essas equações junto a equação 5.7 e 5.10 conclui a desigualdade para este caso, encerrando a demonstração.

□

5.3 Teoremas para estimativas.

Dados dois conjuntos Ω_1 e Ω_2 em $\mathbb{R}^n$ utilizaremos por vezes a notação $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ se $\inf_{x\in\Omega_1} d(x, \partial\Omega_2) > 0$.

Outro teorema apresentado e de importância bastante grande para a demonstração final é:

Teorema 5.4. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e seja $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução limitada em Ω para a equação:*

$$Lu = a^{i,j}D_{ij}u + b^i D_i u + du = f$$

$a^{ij}, b^i, c \in C^\alpha$, e então $f \in C^\alpha(\Omega)$. Suponha também que existem constantes positivas λ, τ tal que:

1. *$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$*
2. *$|a^{ij}|^0_{0,\alpha,\Omega}, |b^i|^1_{0,\alpha,\Omega}, |c|^2_{0,\alpha,\Omega}$*

Então:

$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega})$$

Em que $C = C(n, \alpha, \lambda, \tau)$.

Demonstração. Note que, graças ao lema 4.6 é suficiente provar que $[u]^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega})$. Mostraremos que é suficiente provar a desigualdade para um subconjunto compacto em Ω. Seja $\{\Omega_i\}$ uma sequência de subconjuntos compactos de Ω tal que $\Omega_i \subset \Omega_{i+1} \subset\subset \Omega$ e $\bigcup \Omega_i = \Omega$. (É fato que essa sequência sempre existe quando Ω é um domínio limitado. Basta tomar, por exemplo, $\Omega_i = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) \leq \frac{1}{i}\}$). Supomos então que existe $C(n, \alpha, \lambda, \tau)$ tal que: $[u]^*_{2,\alpha,\Omega_i} \leq C(|u|_{0,\Omega_i} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega_i})$, para todo $i = 1, 2, .., n$. Então dados $x, y \in \Omega$, existe um i tal que para todo $j, k = 1, 2, ..., n$:

$$(d^{(i)}_{x,y})^{2+\alpha}\frac{|D_{jk}u(x) - D_{jk}u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq [u]^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega_i} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega_i}) \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega})$$

Lambrando que $d^{(i)}_{x,y} = \min\{dist(x, \partial\Omega), dist(y, \partial\Omega)\}$. Fazendo $i \mapsto \infty$, como a última desigualdade não depende de i obtemos:

$$d^{2+\alpha}_{x,y}\frac{|D_{jk}u(x) - D_{jk}u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}), \forall x, y \in \Omega.$$

Como o supremo do lado esquerdo é, por definição $[u]^*_{2,\alpha,\Omega}$, segue que basta provarmos o resultado para um compacto dentro de Ω.

Sejam x_0, y_0 pontos de Ω. Definimos $d_x = dist(x, \partial\Omega)$. Suponha que $d_{x_0} = d_{x_0,y_0} = \min(d_{x_0}, d_{y_0})$. Seja $\mu \leq \frac{1}{2}$ uma constante positiva que especificaremos depois. Seja $d = \mu d_{x_0}$, $B = B_d(x_0)$. Por hipótese u é tal que $Lu = f$,´podemos reescrever esta equação da seguinte maneira:

$$a^{ij}(x_0)D_{ij}u = (a^{ij}(x_0) - a^{ij})D_{ij}u - b^i D_i u - cu + f = F,$$

Podemos olhar essa equação como uma equação de coeficientes constantes $a^{ij}(x_0)$, para assim usarmos o lema 4.9. Se $y_0 \in B_{\frac{d}{2}}(x_0)$ sabemos que se considerarmos B como o domínio onde estamos trabalhando, então $dist(x_0, B) = d_{x_0} = \frac{d}{2}$, e o mesmo vale para d_{x_0,y_0} pela hipótese inicial. Então utilizando o lema 4.9, para todo $j, k = 1, 2, ..., n$

$$(\tfrac{d}{2})^{2+\alpha}\frac{|D^2_{jk}u(x_0) - D^2_{jk}(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leq C(|u|_{0,B} + |F|^{(2)}_{0,\alpha,B});$$

Como $d = d_{x_0}\mu$, temos que

$$d^{2+\alpha}_{x_0}\frac{|D^2_{jk}u(x_0) - D^2_{jk}(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leq \tfrac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0,B} + |F|^{(2)}_{0,\alpha,B});$$

No caso em que $y_0 \notin B_{\frac{d}{2}}$, temos:

$$d^{2+\alpha}_{x_0}\frac{|D^2_{jk}u(x_0) - D^2_{jk}(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leq (\tfrac{2}{\mu})^\alpha(d^2_{x_0}|D^2_{jk}u(x_0)| + d^2_{y_0}|D^2_{jk}u(y_0)|) \leq \tfrac{4}{\mu^\alpha}[u]^*_{2,\Omega}.$$

Juntando as duas últimas majorações, para os dois casos complementares, obtemos:

$$d^{2+\alpha}_{x_0}\frac{|D^2_{jk}u(x_0) - D^2_{jk}(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leq \tfrac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0,B} + |F|^{(2)}_{0,\alpha,B}) + \tfrac{4}{\mu^\alpha}[u]^*_{2,\Omega}.$$

Agora vamos para uma segunda parte, onde buscamos estimar $|F|^{(2)}_{0,\alpha,B}$ em termos de $|u|_{0,\Omega}$ e $[u]^*_{2,\alpha,\Omega}$. Sabemos que:

$$|F|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq \sum_{ij}|(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x))D_{ij}u|^{(2)}_{0,\alpha,B} + \sum_i |b^iD_iu|^{(2)}_{0,\alpha,B} + |cu|^{(2)}_{0,\alpha,B} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,B}. \tag{5.11}$$

Vamos então estimar os termos a direita da inequação. Se $x \in B$, então $d_x \leq d$ e $\frac{1}{2}d_{x_0} \leq (1-\mu)d_{x_0} \leq d_x$. Ultilizando isso, Para $g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$:

$$|g|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq d^2|g|_{0,B} + d^{2+\alpha}[g]_{\alpha,B} \leq \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2}[g]^{(2)}_{0,\Omega} + \frac{\mu^{2+\alpha}}{(1-\mu)^{2+\alpha}}[g]^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \tag{5.12}$$

$$\leq 4\mu^2[g]^{(2)}_{0,\Omega} + 8\mu^{2+\alpha}[g]^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \leq 8\mu^2|g|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}. \tag{5.13}$$

Vamos justificar essas inequações com mais detalhes. Para provar, por exemplo que $d^2|g|_{0,B} \leq \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2}$, temos que:

$$d^2|g|_{0,\Omega} = d^2\sup_{x\in B}|g(x)| = (\mu d_{x_0})^2\sup_{x\in B}|g(x)| \leq \tfrac{\mu^2}{(1-\mu)^2}d^2_x\sup_{x\in B}|g(x)|, \forall x \in B. \Rightarrow$$
$$d^2|g|_{0,\Omega} \leq \tfrac{\mu^2}{(1-\mu)^2}\sup_{x\in B}d^2_x\sup_{x\in B}|g(x)| \leq \tfrac{\mu^2}{(1-\mu)^2}\sup_{x\in B}d^2_x|g(x)| \leq \tfrac{\mu^2}{(1-\mu)^2}[g]^{(2)}_{0,\Omega}.$$

Analogamente podemos justificar $d^{2+\alpha}[g]_{\alpha,B} \leq \frac{\mu^{2+\alpha}}{(1-\mu)^{2+\alpha}}[g]_{0,\alpha\Omega}$.

Já a última desigualdade $4\mu^2[g]^{(2)}_{0\Omega} + 8\mu^{2+\alpha}[g]^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \leq 8\mu^2|g|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}$, justifica-se apenas pela definição, lembrando que: $|g|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} = [g]^{(2)}_{0,\Omega} + [g]^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}$.

Note que a desigualdade $|g|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq 8\mu^2|g|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}$, é muito mais precisa do que a simples desigualdade $|g|^{(2)}_{0,\alpha,B} \leq |g|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}$, considerando que μ pode tomar valores bastante pequenos.

Para simplicar a notação, denotaremos $(a(x_0)-a(x))D^2u \equiv (a^{ij}(x_0)-a^{ij}(x))D^2_{ij}u$ para cada par i,j. Lembremos que $[u]^*_{2,\alpha,\Omega} = \sup_{x,y\in\Omega,|\beta|=k} d^{k+\alpha}_{x,y}\frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}$ e que $[u]^*_{2,\Omega} = \sup_{x\in\Omega,|\beta|=k} d^2_x|D^\beta u(x)|$. Então, é fácil ver que: $[D^2u]^{(2)}_{0,\Omega} \le [u]^*_{2,\Omega}$, e $[D^2u]^{(2)}_{0,\Omega} \le [u]_{2,\alpha,\Omega}$. Sendo assim, de 5.3 e do fato de para toda $f,g\in C^\alpha(\Omega)$ termos: $|fg|^{(\sigma+\tau)}_{0,\alpha,\Omega} \le |f|^{(\sigma)}_{0,\alpha,\Omega}|g|^{(\sigma)}_{0,\alpha,\Omega}$ obtemos:

$$|(a(x_0)-a(x))D^2u|^{(2)}_{0,\alpha,B} \le |a(x_0)-a(x)|^{(0)}_{0,\alpha,B}|D^2u|^{(2)}_{0,\alpha,B} \le$$
$$|a(x_0)-a(x)|^{(0)}_{0,\alpha,B}(4\mu^2[u]^*_{2,\Omega}+8\mu^{2+\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega}).$$

Também para simplificar a notação faremos $a^{ij}=a$. Da hipótese sabemos que $|a|^{(0)}_{0,\alpha,\Omega} \le \Lambda$, isto é: $\Lambda \ge |a|^{(0)}_{0,\Omega}+[a]^{(0)}_{0,\alpha,\Omega} = \sup_{x\in\Omega}|a(x)|+\sup_{x,y\in\Omega}\sup_{x,y\in\Omega,|\beta|=k} d^\alpha_x\frac{|a(x)-a(y)|}{|x-y|^\alpha} = \sup_{x\in\Omega}|a(x)|+[a]_{\alpha,\Omega}$. Lembrando novamente que $|f|^{(\sigma)}_{k,\alpha,\Omega} = |f|^{(\sigma)}_{k,\Omega}+[f]^{(\sigma)}_{k,\alpha,\Omega}$, temos

$$|a(x_0)-a(x)|^0_{0,\alpha,B} \le \sup_{x\in B}|a(x_0)-a(x)|+d^\alpha[a]_{\alpha,B} \le 2d^\alpha|a|_{\alpha,B} \le 2^{1+\alpha}\mu^\alpha|a|^{*\,(0)}_{0,\alpha,\Omega} \le 4\Lambda\mu^\alpha.$$

A penúltima desigualdade é justificada por: $2d^\alpha[a]_{\alpha,B} = 2d^\alpha\sup_{x,y}\frac{|a(x)-a(y)|}{|x-y|^\alpha} \le 2(2d_x\mu)^\alpha\sup_{x,y}\frac{|a(x)-a(y)|}{|x-y|^\alpha}, \forall x\in B$, donde: $2d^\alpha[a]_{\alpha,B} \le 2^{1+\alpha}[a]^*_{0,\alpha,\Omega}$.

Vamos agora estimar o termo principal de 5.11 utilizando 5.1

$$\sum_{ij}|(a^{ij}(x_0)-a^{ij}(x))D_{ij}u|^{(2)}_{0,\Omega,B} \le 32n^2\Lambda\mu^{2+\alpha}([u]^*_{2,\Omega}+\mu^\alpha[u]^*_{2,\alpha,\Omega}) \tag{5.14}$$

$$\le 32\Lambda\mu^{2+\alpha}(C(\mu)|u|_{0,\Omega}+2\mu^\alpha[u]_{2,\alpha,\Omega}). \tag{5.15}$$

A última desigualdade é obtida se colocarmos $\mu^\alpha=\epsilon$ na desigualdade 5.1.

Mais uma vez, para simplificarmos a notação, escreveremos $bDu = b^iD_iu$ para cada $i=1.2,...,n$, obtemos de 5.3 e da hipótese sobre b:

$$|bDu|^{(2)}_{0,\alpha,B} \le 8\mu^2|bDu|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega} \le 8\mu^2|b|^{(1)}_{0,\alpha,\Omega}|Du|^{(1)}_{0,\alpha,\Omega} \tag{5.16}$$

$$\le 8\mu^2\Lambda|u|^*_{1,\alpha,\Omega} \le 8\mu^2\Lambda(C(\mu)|u|_{0,\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega}), \tag{5.17}$$

a última equação ocorre se tomarmos $\epsilon=\mu^{2\alpha}$ em 5.2.

$$|b^iD_iu|^{(2)}_{0,\alpha,B} \le 8n\Lambda\mu^2(C(\mu)|u|_{0,\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega})$$

De mesma maneira utilizando , e 5.2 obtemos:

$$|cu|^{(2)}_{0,\alpha,B} \le 8\mu^2|c|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}|u|^{(0)}_{0,\alpha,\Omega} \le 8\Lambda\mu^2(C(\mu)|u|_{0,\Omega}+\mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega})$$

E finalmente:

$$|f|^{(2)}_{0,\alpha,B} \le 8\mu^2|f|_{0,\alpha,\Omega}. \tag{5.18}$$

Seja $C=C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)$ e $C(\mu)=C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,\mu)$. Juntando os resultados em 5.14, 5.18 obtemos:

$$|F|^{(2)}_{0,\alpha,B} \le C\mu^{2+2\alpha}[u]^*_{2,\alpha,\Omega}+C(\mu)(|u|_{0,\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega})$$

Com essa desigualdade em mãos, podemos combiná-la a parte direita da equação **??**, com a equação (4.2) com $\epsilon = \mu^{2\alpha}$ para estimarmos $[u]^*_{2,\Omega}$, de **??** obtemos:

$$d^{2+\alpha}_{x_0,y_0}\frac{|D^2u(x_0)-D^2u(y_0)|}{|x_0-y_0|^\alpha} \leq C\mu^\alpha[u]^*_{2,\alpha,\Omega} + C(\mu)(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$

Sendo que o a parte direita da equação não depende de x_0, y_0, donde podemos tomar o supremo em $x_0, y_0 \in \Omega$ e ficamos com:

$$[u]^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C\mu^\alpha[u]^*_{2,\alpha,\Omega} + C(\mu)(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$

Note que nossa hipótese inicial de $d_{x_0} = d_{x_0,y_0}$, utilizada em alguns passos, não interfere no resultado final, dado que podemos trocar x_0 por y_0 afim de obtê-la.

Finalmente podemos escolher μ adequadamente tal que: $C\mu_0^\alpha \leq \frac{1}{2}$. Obtemos então o resultado desejado:

$$[u]^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$

□

Teorema 5.5. *Seja Ω um domínio $C^{2,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}$ uma solução de $Lu = f$ em Ω, em que $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ bem como os coeficientes de L estão em C^α e os coeficientes de L satisfazem, pra constantes positivas λ, Λ :*

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{5.19}$$

e

$$|a^{ij}|_{0,\alpha,\Omega}, |b^i|_{0,\alpha,\Omega}, |c|_{0,\alpha,\Omega} \leq \Lambda \tag{5.20}$$

Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, e suponha que $u = \varphi$ em $\partial\Omega$. Então:

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}) \tag{5.21}$$

Em que $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

Demonstração. Primeiramente notemos que é suficiente provar para o caso $u = 0$ em $\partial\Omega$ e $\varphi = 0$. Isso porque, no caso geral, se fizermos $v = u - \varphi \Rightarrow v|_{\partial\Omega} = 0$, e fixarmos $f' = f - L\varphi$, então $Lu = f \Leftrightarrow Lv = f'$. A partir disso, se supusermos esse caso especial já provado, temos que:

$$|v|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|v|_{0,\Omega} + |0|_{2,\alpha,\Omega} + |f'|_{0,\alpha,\Omega}) \leq C(|u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{0,\Omega} + |f'|_{0,\alpha,\Omega}). \tag{5.22}$$

Então, utilizando a desigualdade triângular reversa, e que $|L\varphi|_{0,\alpha,\Omega} \leq C'|\varphi|_{0,\alpha,\Omega} \leq |\varphi|_{2,\alpha,\Omega}$, temos:

$$|u|_{2,\alpha,\Omega}C + 1(|u|_{0,\Omega} + |\varphi|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}), \tag{5.23}$$

o que nos dá o que gostaríamos no caso geral. Consideremos então que $\varphi = 0$. Obteremos a desgigualdade invocando resultados anteriores e separando os pontos em casos. Para o caso de um ponto na fronteira, lembraremos do lema anterior, que nos diz, entre outras coisas, que para cada $x_0 \in \partial\Omega$, existe uma bola de raio δ (em que δ independe de x_0) tal que $x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow |u|_{2,\alpha,B\cap\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega})$. Utilizando este δ, que por conveniência escreveremos $\delta = 2\rho$, separaremos os pontos de Ω em dois casos: $(i) x \in \{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) \leq \delta\}$ e $(ii) x \in \Omega \setminus \Omega_\rho = \{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) > \rho\}$.

No caso (i) temos que existe um $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $x \in B_\delta(x_0)$, então vale a desigualdade:

$$|Du(x)| + |D^2u(x)| \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha}) \tag{5.24}$$

Para $x \in B_\delta(x_0)$

Para o caso (ii) lembremos do corolário 5.11. Substituindo $d = \rho$ temos 5.24 para o caso (ii), não necessariamente para o mesmo C. Escolhendo a maior das constantes podemos supor 5.24 válida para todo $x \in \Omega$.

Para avaliar a norma α, vamos separar os pontos de Ω em três casos: $(i) x, y \in B_\delta(x_0)$, para algum x_0; $(ii) x, y \in \Omega_\rho$; $(iii) x$ ou $y \in \Omega \setminus \Omega_\rho$, mas x e y não estão na mesma bola $B_\delta(x_0)$. Assim, todas as possibilidades foram consideradas. Queremos considerar o quociente $\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}$. No caso (i), o lema nos dá a a desigualdade:

$$\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C_1(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}) \tag{5.25}$$

No caso (ii) pelo corolário 5.11 obtemos a mesma inequação para outra constante C_2. Já no caso (iii) temos que $d(x, y) \geq \rho$, então:

$$\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \rho^{-\alpha}(|D^2u(x)| + |D^2u(y)|) \leq C_3(|u|_0 + |f|_{0,\alpha}), \tag{5.26}$$

a última inequação é válida por 5.24.

Agora , escolhendo $C = \max(C_1, C_2, C_3)$, e tomando o supremo em $x, y \in \Omega$, obetemos:

$$[D^2u]_\alpha \leq C(|u|_0 + |f|_{0,\alpha})$$

Junto a 5.24, segue o teorema.

□

Lema 5.6. *Seja Ω um domínio $C^{2+\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$ e sejam $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ solução para o problema $Lu = f$, $u = 0$ em $\partial\Omega$, em que $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, e L é operador elíptico tal que existe τ tal que:*

$$|a^{ij}|_{0,\alpha,\Omega}, |b^i|_{0,\alpha,\Omega}, |c|_{0,\alpha,\Omega} \leq \tau. \tag{5.27}$$

Enttão para algum δ existe uma bola $B = B_\delta(x_0)$ para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que:

$$|u|_{2,\alpha,B\cap\Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}) \tag{5.28}$$

Em que $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

Demonstração. Pela definição de domínio $C^{2,\alpha}$, cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ possui uma vizinhança $B(x_0)$ tal que existe um difeomorfismo $\Psi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tal que: $\Psi(B_{x_0}) = D \subset \mathbb{R}^n$. Como D é a imagem de uma bola por um difeomorfismo, D é um aberto conexo. Denotamos: $B' = B_\rho(x_0) \cap \Omega$, $D' = \Psi(B')$. Podemos, sem perda de generalidade, supor que D' possui porção de fronteira em em um hiperplano do $\mathbb{R}^n$. (Caso contrário comporíamos Ψ com um difeomorfismo adequado, que leve D em um conjunto contido em um hiperplano). Sendo assim: $T = B_\rho(x_0) \cap \partial\Omega \subset \partial B'$ e $T' = \Psi(T) \subset \partial D'$ (T' é uma porção de fronteira em um hiperplano).

Fazemos a mudança de variáveis $y = (\Psi_1(x), ..., \Psi_n(x))$. Seja $\overline{u}(y) = u(x)$ (utilizamos essa notação para $\overline{u}(y) = u \circ \Psi^{-1}(y)$). E seja $\overline{L}\overline{u}(y) = Lu(x)$, em que:

$$\overline{L}\overline{u} = \overline{a}^{ij} D_{ij}\overline{u} + \overline{b^i} D_i \overline{u} + \overline{cu} = \overline{f}(y)$$

Em que, naturalmente:

$$\overline{a}^{ij}(y) = \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_r} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_s} a^{rs}(x), \quad \overline{b^i}(y) = \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_r x_s} a^{rs}(x) + \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_r} b^r(x),$$

$$\overline{c}(y) = c(x), \overline{f}(y) = f(x)$$

Por 4.10 temos que em D' :

$$\overline{\lambda}|\xi|^2 \leq \sum_{i.j} \overline{a}^{ij} \xi_i \xi_j$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, em que $\overline{\lambda} = \frac{\lambda}{K}$.

Sabemos que a constante K depende de Ψ e B'. Também para essa escolha de K adequada temos que:

$$|\overline{a}^{ij}|_{0,\alpha,D'}, |\overline{b}^i|_{0,\alpha,D'}, |\overline{c}|_{0,\alpha,D'} \leq \overline{\Lambda} = K\Lambda; \quad |\overline{f}|_{0,\alpha,D'} \leq \infty \tag{5.29}$$

Portanto estamos nas condições do teorema 4.13 e $\overline{L}\overline{u} = \overline{f}$ em D', que possui porção de pronteira T' (em um hiperplano). Então:

$$|\overline{u}|^*_{2,\alpha,D' \cup T'} \leq C(|\overline{u}|_{0,D'} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,D' \cup T'}),$$

lembrando que $C = C(n, \alpha, \overline{\lambda}, \overline{\Lambda})$.

Também por 4.7 4.8, para um possível novo calor de C :

$$|u|_{2,\alpha,B \cup T} \leq C(|u|_{0,B'} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,B' \cup T}) \leq C(|u|_{0,B'} + |f|_{0,\alpha,B'}) \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}). \tag{5.30}$$

Notando que agora C também depende de B'. Seja $B'' = B_{\frac{\rho}{2}}(x_0) \cap \Omega$ observe que:

$$\min(1, \frac{\rho}{2})|u|_{2,\alpha,B''} \leq |u|_{2,\alpha,B' \cup T} \tag{5.31}$$

Obtemos então, para um possível novo valor de C :

$$|u|_{2,\alpha,B''} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}).$$

Temos a desigualdade em mãos, entretanto, devemos lembrar que o raio ρ da bola que escolhemos, está relacionado com a vizinhança para o qual está definido o difeomorfismo Ψ, e esta depende de x_0. Para corrigir esse problema tomemos a cobertura aberta de todas as bolas para cada x, $\{B_{\frac{\rho}{4}}(x)\}_{x \in \partial\Omega}$. Como $\partial\Omega$ é um conjunto compacto para Ω domínio, então existe subcobertura finita formada pelas bolas $B_{\frac{\rho_i}{4}}(x_i)$, $i = 1, 2, ..., N$. Escolhemos, então, $\delta = \min(\frac{\rho_i}{4})$, e temos então que $C = \max C_i$, em que C_i correponde a constante da desigualdade para x_i. Sendo assim, para todo $x \in \partial\Omega$ existe um i tal que $x \in B_{\frac{\rho_i}{4}}(x_i)$, então $B_\delta(x_i) \subset B_{\frac{\rho_i}{2}}(x_i)$, e vale a desigualdade:

$$|u|_{2,\alpha,B \cap \Omega} \leq |u|_{2,\alpha,B \cap \Omega} \leq C(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}),$$

em que $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$. □

5.4 Funções superharmônicas e o Método de Perron.

Apresentaremos um pequeno resumo do método de Perron assumindo algumas afirmações e teoremas sem demonstração. Sendo Ω um domínio, o método de Perron prova a existência de solução para a equação de Dirichlet: $\Delta u = 0$ com condição de fronteira $u = \varphi$ em $\partial\Omega$ e φ contínua.

Definicão 5.7. Seja Ω um domínio. Uma função $u \in C^0(\Omega)$ é dita ser subharmônica (superhamônica) se para toda bola $B \subset \Omega$ e toda função h harmônica em B satisfazendo $u \leq h$ ($u \geq h$) em $\partial\Omega$ também tivermos $u \leq h$ ($u \geq h$) em B.

A definição, bem como as propriedades de funções subharmônicas, estão bastante envolvidas com o princípio do módulo máximo, resultado que trabalhamos no capitulo anterior. Vamos enunciar uma versão um pouco mais específica desse princípio para utilizarmos agora nas deduções em relação a funções subharmônicas.

Teorema 5.8. ***(Princípio máximo para funções harmônicas)*** *Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ ($\Delta u \leq 0$) em Ω. Então u assume seu máximo (mínimo) em $\partial\Omega$.*

Também iremos assumir algumas propriedades sobre a integral de Poisson apresentada a seguir.

Seja $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ então temos a fórmula da integral de Poisson:

$$u(y) = \frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B_R} \frac{u}{|x-y|^n}$$

Para $y \in \Omega$.

Teorema 5.9. *Seja $B = B_R(0)$ e seja φ uma função contínua em ∂B, então a função u definida por:*

$$u(x) = \frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B_R} \frac{\varphi}{|x-y|^n}, \quad x \in B \; u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial B$$

é tal que $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ e satisfaz $\Delta u = 0$ em B.

$$\varphi(x) = u(x), x \in \Omega$$

Vamos listar algumas propriedades de funções subharmônicas. Se u é superharmônica em Ω então:

1. *Se v é subharmônica em um domínio limitado Ω' tal que $v \geq u$ em $\partial\Omega$ então $v > u$ em Ω ou $v \equiv u$.*

   Para ver porque isso é verdade suponhamos por contradição que exista um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $(u - v)(x_0) = \sup_\Omega(u - v) = M \geq 0$. Podemos assumir que existe uma bola $B = B(x_0)$ tal que $u - v \neq M$ em ∂B. Sejam $\overline{u}$, $\overline{v}$, as funções harmônicas que se igualam a u, v, respectivamente, em ∂B, (ilsutradas no teorema 6.4*) temos as seguintes desigualdades:*

$M = (u - v)(x_0) \leq (\overline{u} - \overline{v})(x_0) \leq \sup_{\partial B}(\overline{u} - \overline{v}) \leq M$, (5.32)

A última desigualdade vale porque o valor de $u - v$ em $\partial\Omega$ é sempre menor do que M, bem como o valor de $\overline{u} - \overline{v}$.

Assim vale a igualdade em 5.32. Note que é importante que $M \geq 0$ para usarmos o princípio do módulo máximo. Pelo príncipio do módulo máximo para funções harmônicas temos que $\overline{u} - \overline{v} \equiv M$ em B, o contradiz a escolha de B.

2. *Se u não é constante então só atinge máximos (mínimos) na fronteira de Ω.*

   Por contradição suponha que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\sup_{\Omega} u = u(x_0)$. Considere uma bola $B(x_0) \subset \Omega$ e $v = u(x_0)$. então $u \leq v$ em $\partial\Omega$ e pelo item anterior se u não é constante então $u < v$ em B, contradizendo a existência de x_0.

3. *Seja $B \subset \Omega$ é uma bola. Denotaremos $\overline{u}$ a função definida através da integração de Poisson em ∂B, que satisfaz $\overline{u} = u$ em ∂B. Definimos:*

$$U(x) = \overline{u}(x), x \in B; \qquad U(x) = u(x), x \in \Omega \setminus B,$$

   então a função U é subharmônica em Ω.

   Para provar esta afirmação escolhemos arbitrariamente uma bola $B' \subset \Omega$ e seja h uma função harmônica em B' tal que $h \geq U$ em $\partial B'$. Como $u \leq U$ em B', então temos $u \leq h$ em B'. Como u é subharmônica vale que $U \leq h$ em $B' - B$. Como U é harmônica em B, temos pelo princípio do módulo máximo segue que $U \leq h$ em $B \cap B'$. Assim $U \leq h$ em B' e U é subharmônica em Ω.

4. *Sejam $u_1, u_2, ..., u_N$ funções subharmônicas em Ω. Então a função $u(x) = \max\{u_1(x), ..., u_N(x)\}$ é subhamônica em Ω.*

Seja Ω um domínio limitado e φ uma função limitada em $\partial\Omega$. Uma função $u \in C^0(\Omega)$ é dita ser uma subfunção se for subharmônica e $u \leq \varphi$ em $\partial\Omega$. De maneira análoga uma função v é chamada superfunção se v fo superharmônica e $v \geq \varphi$ em $\partial\Omega$. Seja S_φ o conjunto das subfunções relativas a φ, vamos enunciar agora o principal teorema do método de Perron.

Teorema 5.10. *A função $u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$ é harmônica em Ω.*

Demonstração. Pelo princípio do módulo máximo se $v \in S_\varphi$ então $v \leq \sup \varphi$, o que significa que u está bem definida. Fixemos um ponto $y \in \Omega$. Pela definição de u existe uma sequência $\{v_n\}$, tal que $v_n(y) \mapsto u(y)$. Substituiremos v_n por $v'_n = \max\{v_n, \inf \varphi\}$, claro que v'_n continua sendo contínua. $\{v'_n\}$ é, então, uma sequência limitada. Seja $B_R(y) \subset \Omega$, definiremos V_n como na observação (3). Pela observação, $V_n \in S_\varphi$, e $V_n(y) \mapsto u(y)$. Sabemos também que a sequência $\{V_n\}$ contém uma subsequência $\{V_{n_k}\}$ convergente uniformemente em qualquer bola $B_\rho \subset B_R(y)$ e que a função limite v é harmônica em B. É claro que $v \leq u$ e que $v(y) = u(y)$.

Nosso objetivo é provar que $u = v$ em B. Suponha, por contradição, que exista $z \in B$ tal que: $v(z) < u(z)$ para algum $z \in B$. Então, pela definição de u, existe uma função $\overline{u}$ tal que $v(z) < \overline{u}(z) < u(z)$. Vamos definir $w_k = \max(\overline{u}, V_{n_k})$, e W_k como sendo a função definida analogamente a observação (3). Analogamente ao passo anterior $\{W_k\}$ possui subsequência convergente $W_{n_k} \mapsto w$, e $v \leq w \leq u$ em B. Claro que $u(y) = v(y) = w(y)$, mas pelo princípio do módulo máximo, se considerarmos a função $w - v \geq 0$ temos que ela atinge um mínimo em $y \in \Omega$ donde $w = v$. Sendo assim conclúmos que $v = u$ em B e portanto u é harmônica em $\overline{\Omega}$. □

Lema 5.11. *Seja u a função harmônica definida em Ω pelo método de Perron. Seja $\xi \in \partial\Omega$, e φ contínua em ξ, então sempre que $x \mapsto \xi$ temos $u(x) \mapsto \varphi(\xi)$*

Demonstração. □

Teorema 5.12. *Se Ω é um domínio em que todos os pontos da fronteira são regulares, então a equação de Dirichlet em um domínio limitado possui solução para condição de fronteira contínua*

Este teorema conclui o método de Poission, atingindo seu objetivo final de provar a existência de soluções para o problema de Dirichlet com fronteira contínua.

Considerações finais

Após desenvolver este trabalho de conclusão de curso acredito conhecer melhor o método para resolver um problema em matemática bem como para entender uma resolução um pouco mais complexa. Foi necessário procurar muitos resultados e principalmente novas definições. Saber lidar com novas definições e tentar torná-las mais claras é, a meu ver, um dos grandes ganhos do trabalho de conclusão de curso.

Muitas vezes foi necessário lidar com teoremas para os quais a demonstração estava fora do escopo do trabalho, o que é incomum para um aluno de graduação. Esta situação também foi um grande aprendizado visto que a pesquisa em matemática exige que deixemos certas "caixas pretas" (como explicou o professor orientador Ivan Pontual).

Durante o trabalho foi necessário buscar vários elementos matemáticos que enriqueceram meu conhecimento em algumas áreas. Tive a oportunidade de conhecer um pouco de Geometria Riemanniana, que nunca havia estudado, e equações diferenciais parciais de um ângulo bem diferente do visto na graduação. O contato com essas definições e teoremas foi bastante importante para minha formação.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] *Hamilton, R.* The inverse function theorem of Nash and Moser , *American Mathematical Society, (1981).*

[2] *Gilbarg, D. Trudinger N.S.,* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order , *Springer-Verlag, N. York (1983).*

[3] *Carmo, M. P.,* Geometria Riemanniana, *IMPA - Projeto Euclides, Rio de Janeiro (2005).*

[4] *Broeder, A.,* Mathematical Analysis, *Springer-Verlag, Brown University (2001).*

[5] *Adams, R. A.; Fournier J. F. ,* Sobolev Spaces, *Academic Press, Vancouver, Canada (2003).*

[6] *Bachman, G. Narici L.,* Functional analysis, *Academic Press, N. York (1966).*

[7] *Brezis, H.,* Functional analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equationa, *Springer-Verlag, N. York (2003).*

[8] *Jurgen, J.,* Riemannian Geometry and Geometric Analysis, *Springer-Verlag, N. York (2008).*

[9] *Kreyszig, E.,* Introductory Functional Analysis with Aplications, *John Wiley, N. York (1978).*

[10] *Silva, I.P.C,* Notas sobre operadores de Fredholm, *Florianópolis, 2012, não publicado.*

[11] *Lime. E.L.* Curso de Análise vol. 2, *IMPA - Projeto Euclides, Rio de Janeiro (2009)*

[12] *Nachbin L.* Introduction to Functional Analysis, Banach Spaces and Differential Calculus, *University of Rochester (1981)*

[13] *Munkres, J. R.,* Topology, A First Course, *Prentice Hall, (1975)*

[14] *Warner F.* {Foundations of differenciable manifolds and Lie Groups Springer-Verlag (1971)

[15] Lima E. {*Álgebra Linear IMPA, Rio de Janeiro (2006)*