UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

# Introdução à Teoria básica de Álgebras

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**Fernando Leandro**

**Florianópolis, 2014**

**Fernando Leandro**

# *Introdução à Teoria básica de Álgebras*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador:
Fernando de Lacerda Mortari

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2014

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 01/CCM/2014.

Prof. Silvia Martini de Holanda Janesch
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Fernando de Lacerda Mortari
Orientador

Prof. Gilles Gonçalves de Castro

Prof. Danilo Royer

# *Agradecimentos*

Agradeço minha família por todo o apoio dado durante esses 4 anos de graduação, sem tal apoio incondicional tenho certeza que o caminho até aqui teria sido muito mais árduo. Também por sempre terem priorizado minha educação, esse com certeza é um diferencial.

Também um agradecimento muito especial à Giovana, minha namorada, companheira e amiga que me ajudou, apoiou e acima de tudo me fez me sentir bem todos os dias. Se não fosse você talvez não tivesse feito este trabalho e concluído no tempo certo minha graduação.

Ao meu orientador Fernando de Lacerda Mortari agradeço pela paciência que tende ao infinito e pelas inúmeras explicações dadas de forma clara. Também pela oportunidade de ser seu bolsista, com as nossas conversas e discussões minha maturidade matemática cresceu muito. Sem a menor dúvida você é um exemplo de pessoa e profissional a ser seguido.

Agradeço aos professores Gilles Gonçalves de Castro e Danilo Royer por terem aceito fazer parte da banca deste trabalho e pelos comentários feitos sobre o mesmo.

Ao professor José Luiz Rosas Pinho, mais conhecido como Pinho, e a todos(as) os(as) amigos(as) do grupo PET que me acolheram e puderam me fazer abrir os olhos para a Matemática com conselhos, explicações e tantas outras contribuições. Sem esse grupo maravilhoso com certeza não teria chegado tão longe.

Agradeço todos(as) os(as) amigos(as) que me acompanharam durante a graduação, inclusive aqueles(as) que desistiram, sem as conversas e parceria nos estudos provavelmente tudo seria mais difícil.

Por fim mas não menos importante, aos meus amigos de Bauru e da Unesp, não vou dizer o nome de todos porque posso ser injusto esquecendo alguém. Quando ficava de férias e tinha oportunidade de voltar para minha cidade, sempre tinha algo a ser feito graças à vocês. Sempre me receberam de braços abertos e bastante alegria, muito obrigado.

# 1 Lista de símbolos

Seja $(G, *)$ um grupo. Denotaremos apenas por $G$ o grupo $(G, *)$;

Seja $(S, *)$ um semigrupo. Denotaremos apenas por $S$ o semigrupo $(S, *)$;

$\mathbb{K}$: um corpo qualquer;

$\mathbb{C}$: o conjunto dos números complexos;

$\mathbb{R}$: o conjunto dos números reais;

$\mathbb{Z}$: o conjunto dos números inteiros;

$\mathbb{N}$: o conjunto dos números naturais;

$f \circ g$: composição das funções $f$ e $g$;

$C[a,b]$: conjunto de todas as funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas;

$D(a,b)$: conjunto de todas as funções $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferenciáveis;

$I_n$: matriz identidade $n \times n$;

$A$ álgebra sobre $\mathbb{K}$, denotaremos o elemento neutro da álgebra $A$ por $0_A$;

$A \cong B$: $A$ é isomorfo a $B$.

# *Sumário*

# 2 Introdução

Estudar Álgebras é um ponto de partida para aqueles que futuramente querem estudar $^{*}-$ Álgebras e em seguida $C^{*}-$ Álgebras, pois tais estruturas estão presentes na matemática moderna em aplicações para mecânica quântica e para um estudo de análise funcional. Outra estrutura que podemos estudar logo após conhecer álgebras é a Álgebra de Lie que surgiu com Sophus Lie quando estudava equações diferenciais.

Consideramos pré-requisitos para estudar álgebras, a teoria básica de grupos, anéis e espaços vetoriais. Grupos e Anéis podem ser encontradas em [2], onde o leitor pode encontrar as definições, inúmeros exemplos e diversos exercícios. Para espaços vetoriais, recomendamos a leitura de [1] por possuir um texto bem compreensível e inúmeros exercícios.

Nosso primeiro passo será construir uma teoria básica sobre álgebras com o intuito do leitor conhecer vários exemplos de álgebras e com isso perceber o quanto elas estavam presentes durante o curso de Matemática. Desenvolveremos as noções de subálgebras, homomorfismos de álgebras, núcleo de homomorfismos, ideais, relação de equivalência e por fim o teorema do homomorfismo para álgebras.

Logo em seguida responderemos a seguinte pergunta: será que a partir da operação de um grupo conseguimos, de uma maneira natural, construir a álgebra do grupo em questão? Feito isso estudaremos alguns exemplos mais sofisticados de álgebras e terminaremos com o teorema do homomorfismo para álgebras mostrando algo bem interessante sobre a álgebra do semigrupo $\mathbb{N}$ e a álgebra dos polinômios em uma variável com coeficientes em $\mathbb{C}$.

# 3 Álgebras

O objetivo deste capítulo é construir uma teoria básica sobre álgebras, começando com a definição de álgebra sobre $\mathbb{K}$, exemplos e por fim o teorema do homomorfismo para álgebras.

**Definição 1.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma *álgebra sobre* $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial $A$, sobre o mesmo corpo, munido com uma operação binária

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\rightarrow A \\ (a,b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

chamada de *multiplicação* que satisfaz às seguintes propriedades, para quaisquer $a,b,c \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

(ii) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(iii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(iv) $(\alpha a) \cdot b = \alpha(a \cdot b) = a \cdot (\alpha b)$.

**Observação 2.** As condições (i), (ii), (iii) nos dizem que $(A,+,\cdot)$ é um anel e a condição (iv) indica como a mutiplicação por escalar se compatibiliza com a multiplicação na álgebra. Note que dada $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$, $A$ com a soma e multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e, $A$ com a soma e a multiplicação é um anel, ou seja, $A$ é um espaço vetorial e anel ao mesmo tempo.

Durante o curso de Matemática vemos constantemente um exemplo de álgebra que não nos é apresentado dessa forma.

**Exemplo 3.** Considere $\mathbb{C}$ com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos. Podemos enxergar $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, definindo a multiplicação por escalar por dado $\alpha \in \mathbb{C}$ (escalar) e $a \in \mathbb{C}$ (vetor), $\alpha a$ é simplesmente o vetor dado pela multiplicação dos números complexos $\alpha$ e $a$.

Vejamos que o espaço vetorial $\mathbb{C}$ com multiplicação de números complexos é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Isto ocorre, pois a multiplicação de números complexos distribui em relação à adição de números complexos, e é associativa, e, portanto, as condições (i)-(iii) são satisfeitas. Também a condição (iv) é satisfeita, pois o vetor $(\alpha a)b$ é simplesmente a multiplicação de números complexos e já vimos que essa multiplicação é associativa.

Quando estudamos o plano cartesiano conhecemos, dado um número natural n fixo, o $\mathbb{R}^n$ que é o conjunto das $n-uplas$ ordenadas de números reais. Se definirmos as operações de soma e multiplicação entrada a entrada em $\mathbb{R}^n$, é fácil provar que $\mathbb{R}^n$ com tais operações é um anel, pois estaremos somando e multiplicando $n$ números reais (é fácil concluir porque $\mathbb{R}$ é um corpo). Definindo em $\mathbb{R}^n$ uma operação de soma e multiplicação por escalar entrada a entrada também, pode-se verificar que $\mathbb{R}^n$ com estas operações é um espaço vetorial(veja [5] p.31 Exemplo 1). O exemplo abaixo nos mostra o mesmo para $\mathbb{C}^n$.

**Exemplo 4.** Fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere $\mathbb{C}^n$, o conjunto das $n-uplas$ de números complexos. Vamos mostrar que $\mathbb{C}^n$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais do espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ e multiplicação definida entrada a entrada, ou seja, $(a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n) = (a_1\cdot b_1,\dots,a_n\cdot b_n)$.

Sabemos que $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial (veja [1], p.9). Vamos verificar que os ítens da Definição 1 são satisfeitos.

(i) Dados $a,b,c \in \mathbb{C}^n$, ou seja, $a = (a_1,...,a_n), b = (b_1,\dots,b_n)$ em que cada $a_i, b_i \in \mathbb{C}, i = 1,...,n$ vamos mostrar que a multiplicação distribui em relação à soma pela direita:

$$
\begin{aligned}
a\cdot(b+c) &= (a_1,\dots,a_n)\cdot[(b_1,\dots,b_n)+(c_1,\dots,c_n)] \\
&= (a_1(b_1+c_1),\dots,a_n(b_n+c_n)) \\
&= (a_1b_1,\dots,a_nb_n)+(a_1c_1,\dots,a_nc_n) \\
&= (a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n)+(a_1,\dots,a_n)\cdot(c_1,\dots,c_n) \\
&= a\cdot b+a\cdot c
\end{aligned}
$$

(ii) Agora dados $a,b,c \in \mathbb{C}^n$ vamos mostrar que a multiplicação distribui em relação à soma pela esquerda:

$$
\begin{aligned}
(a+b)\cdot c &= [(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)]\cdot(c_1,\dots,c_n)\\
&= ((a_1+b_1)c_1,\dots,(a_n+b_n)c_n)\\
&= (a_1c_1,\dots,a_nc_n)+(b_1c_1,\dots,b_nc_n)\\
&= (a_1,\dots,a_n)\cdot(c_1,\dots,c_n)+(b_1,\dots,b_n)\cdot(c_1,\dots,c_n)\\
&= a\cdot c+b\cdot c
\end{aligned}
$$

(iii) Dados $a,b,c\in\mathbb{C}^n$, ou seja, $a=(a_1,...,a_n), b=(b_1,\dots,b_n), c=(c_1,\dots,c_n)$ em que cada $a_i,b_i\in\mathbb{C}, i=1,...,n$. Vamos mostrar que a multiplicação é associativa:

$$
\begin{aligned}
(a\cdot b)\cdot c &= [(a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n)]\cdot(c_1,\dots,c_n)\\
&= (a_1b_1,\dots,a_nb_n)\cdot(c_1,\dots,c_n)\\
&= ((a_1b_1)c_1,\dots,(a_nb_n)c_n)\\
&= (a_1(b_1c_1),\dots,a_n(b_nc_n))\\
&= (a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,c_1,\dots,b_nc_n)\\
&= a\cdot(b\cdot c)
\end{aligned}
$$

Note que a multiplicação é associativa, pois cada coordenada é um número complexo e sabemos que a multiplicação de números complexos é associativa.

(iv) Dados $\alpha\in\mathbb{C}$ e $a,b\in\mathbb{C}^n$, a multiplicação se compatibiliza com a multiplicação por escalar do espaço vetorial $\mathbb{C}^n$:

$$
\begin{aligned}
(\alpha a)\cdot b &= (\alpha a_1,\dots,\alpha a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n)\\
&= ((\alpha a_1)b_1,\dots,(\alpha a_n)b_n)\\
&= (\alpha(a_1b_1),\dots,\alpha(a_nb_n))\\
&= \alpha(a_1b_1,\dots,a_nb_n)\\
&= \alpha(a\cdot b)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos também:

$$\begin{aligned}
(\alpha a)\cdot b &= (\alpha a_1,\ldots,\alpha a_n)\cdot(b_1,\ldots,b_n)\\
&= ((\alpha a_1)b_1,\ldots,(\alpha a_n)b_n)\\
&= (a_1(\alpha b_1),\ldots,a_n(\alpha b_n))\\
&= (a_1,\ldots,a_n)\cdot(\alpha b_1,\ldots,\alpha b_n)\\
&= a\cdot(\alpha b)
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{C}^n$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$.

**Exemplo 5.** Fixado um $n\in\mathbb{N}$, o conjunto $M_n(\mathbb{C})$ formado por todas as matrizes com $n$ linhas, $n$ colunas e entradas em $\mathbb{C}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ com suas operações usuais (o leitor que quiser saber mais sobre matrizes, suas propriedades e operações básicas pode consultar por exemplo [6], capítulo 3).

A multiplicação de matrizes usual não é como a soma (feita entrada a entrada). E porque não utilizamos a operação de multiplicação de matrizes entrada a entrada (que é bem mais fácil de fazer as contas)? Há duas justificativas para essa pergunta. A primeira é que se considerarmos a multiplicação entrada a entrada, multiplicar matrizes seria o mesmo que fazer a multiplicação como em $\mathbb{R}^n$, por exemplo, e isso não nos acrescenta nada de novo, logo poderíamos ficar apenas com $\mathbb{R}^n$. O outro motivo é que com a multplicação definida multiplicando linha por coluna podemos mostrar um isomorfismo entre a álgebra das matrizes e a álgebra do próximo exemplo.

**Exemplo 6.** Fixe $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Considere o seguinte conjunto:

$$\mathscr{L}(V) := \{T : V\to V | T \text{ é transfomação linear}\}$$

Vamos provar que $\mathscr{L}(V)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas pontualmente e a multiplicação da álgebra é a composição de funções.

Vamos começar mostrando que $\mathscr{L}(V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

(A1) Vamos mostrar que dadas $T,R,S\in\mathscr{L}(V)$, então a transformação linear $(T+R)+S$ é igual a $T+(R+S)$, ou seja, a soma é associativa. Para tanto é suficiente comparar seus valores em um vetor genérico $v\in V$. Então:
$((T+R)+S)(v) = (T+R)(v)+S(v) = (T(v)+R(v))+S(v) = T(v)+(R(v)+S(v)) =$

$T(v)+(R+S)(v)=(T+(R+S))(v)$

Como queríamos.

(A2) Vamos mostrar que a soma é comutativa, ou seja, dadas $T,R \in \mathscr{L}(V)$ que a transformação linear $T+R$ é igual a $R+T$. Para tanto é suficiente comparar seus valores em um vetor genérico $v \in V$. Logo:

$(T+R)(v)=T(v)+R(v)=R(v)+T(v)=(R+T)(v)$

Logo, $T+R=R+T$.

(A3) Vamos mostrar que existe $E \in \mathscr{L}(V)$ tal que para todo $T \in \mathscr{L}(V)$, $T+E=E+T=T$. Seja $E \in \mathscr{L}(V)$ a transformação linear nula, isto é, $E(v)=\vec{0}_V$, $\forall v \in V$, o vetor nulo do espaço vetorial V. Dado $v \in V$, arbitrário, temos:

$(T+E)(v)=T(v)+E(v)=T(v)+\vec{0}_V=T(v)$

Logo, $T+E=T$.

(A4) Vamos mostrar que para cada $T \in \mathscr{L}(V)$ existe $N \in \mathscr{L}(V)$ tal que $T+N=E$. Para tanto, para cada $v \in V$, defina $N(v)=-T(v)$. Então:

$(T+N)(v)=T(v)+N(v)=T(v)+(-T(v))=T(v)-T(v)=\vec{0}_V$

Assim, $T+N=E$.

(M1) Agora vejamos que a multiplicação por escalar satisfaz as propriedades de espaço vetorial. Dados $\alpha \in \mathbb{K}$, $T,R \in \mathscr{L}(V)$ vamos mostrar que a transformação linear $\alpha(T+R)$ é igual a $\alpha T+\alpha R$. Para tanto é suficiente comparar seus valores em um vetor qualquer $v \in V$. Então:

$[\alpha(T+R)](v)=\alpha[(T+R)(v)]=\alpha[T(v)+R(v)]=\alpha T(v)+\alpha R(v)=(\alpha T)(v)+(\alpha R)(v)$

Assim, $\alpha(T+R)=\alpha T+\alpha R$.

(M2) Dados $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathscr{L}(V)$, vamos mostrar que a transformação linear $(\alpha+\beta)T$ é igual a $\alpha T+\beta T$. Para isso, tome $v \in V$. Então:

$((\alpha+\beta)T)(v)=(\alpha+\beta)T(v)=\alpha T(v)+\beta T(v)=(\alpha T)(v)+(\beta T)(v)$

Assim, $(\alpha+\beta)T=\alpha T+\beta T$.

(M3) Dados $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $T \in \mathscr{L}(V)$, vamos mostrar que a transformação linear $(\alpha\beta)T$ é igual a $\alpha(\beta T)$. Para isso, basta mostrar que dado $v \in V$, temos:

$[(\alpha\beta)T](v)=(\alpha\beta)T(v)=\alpha(\beta T(v))=[\alpha(\beta T)](v)$

Logo, $(\alpha\beta)T=\alpha(\beta T)$.

(M4) Seja $1 \in \mathbb{K}$ a unidade do corpo. Vamos mostrar que $1T = T$ para toda $T \in \mathscr{L}(V)$. Para isso, tome $v \in V$, e então:

$(1T)(v) = 1T(v) = T(v)$

Concluindo assim que $\mathscr{L}(V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Agora resta mostrar que a multiplicação de $\mathscr{L}(V)$ satisfaz os ítens da Definição 1.

(i) Dados $T,R,S \in \mathscr{L}(V)$ vamos mostrar que a transformação $(T+R)\cdot S$ é igual a $T\cdot R+T\cdot S$. Para isso, é suficiente mostrar que seus valores coincidem num vetor qualquer $v \in V$. Então:

$$\begin{aligned}
((T+R)\cdot S)(v) &= ((T+R)\circ S)(v) \\
&= (T+R)S(v) \\
&= T(S(v))+R(S(v)) \\
&= (T\cdot S)(v)+(R\cdot S)(v) \\
&= (T\cdot S+R\cdot S)(v) \\
&= (T\cdot S)(v)+(R\cdot S)(v)
\end{aligned}$$

Assim, $(T+R)\cdot S = T\cdot S+R\cdot S$.

(ii) Vejamos agora que dadas $T,R,S \in \mathscr{L}(V)$ as transformações lineares $T\cdot(R+S)$ e $T\cdot R+T\cdot S$ são iguais. Para isso, tome $v \in V$ e verifiquemos que seus valores coincidem em $v$. Então:

$$\begin{aligned}
(T\cdot(R+S))(v) &= (T\circ(R+S))(v) \\
&= T((R+S)(v)) \\
&= T(R(v)+S(v)) \\
&= T(R(v))+T(S(v)) \\
&= (T\cdot R)(v)+(T\cdot S)(v) \\
&= (T\cdot R+T\cdot S)(v) \\
&= (T\cdot R)(v)+(T\cdot S)(v)
\end{aligned}$$

Como queríamos.

(iii) Agora dadas $T,R,S \in \mathscr{L}(V)$ vejamos que a multiplicação é associativa, ou seja, que as transformações lineares $(T\cdot R)\cdot S$ e $T\cdot(R\cdot S)$ são iguais. Como a multiplicação é definida pela composição de funções, que sabemos ser associativa, segue que a multiplicação é associativa.

(iv) Dado $\alpha \in \mathbb{K}$ e $T, R \in \mathscr{L}(V)$ vamos verificar que a multiplicação por escalar se compatibiliza com a multiplicação, ou seja, $(\alpha T) \cdot R = \alpha(T \cdot R) = a \cdot (\alpha R)$. Para isso, tome $v \in V$ e vamos mostrar que seus valores coincidem:
$((\alpha T) \cdot R)(v) = [(\alpha T) \circ R](v) = \alpha T(R(v)) = \alpha(T \circ R)(v) = [\alpha(T \cdot R)](v)$
$((\alpha T) \cdot R)(v) = [(\alpha T) \circ R](v) = \alpha T(R(v)) = T(\alpha R(v)) = T((\alpha R)(v)) = [T \cdot (\alpha R)](v)$

Assim, fica provado que $\mathscr{L}(V)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$.

**Exemplo 7.** Seja $X$ um conjunto não vazio, e considere o conjunto:

$$\mathscr{F}(X, \mathbb{C}) := \{f : X \to \mathbb{C} | f \text{ é função}\}$$

Definindo as operações pontualmente (induzidas das operações em $\mathbb{C}$), ou seja, dados $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ e $x \in X$, temos $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Definindo ainda a multiplicação pontualmente, ou seja, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, provemos que $\mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Começaremos provando que $\mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$:

(A1) Dados $f, g, h \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, vamos mostrar que $(f+g)+h$ e $f+(g+h)$ são iguais. Para tanto, tome $x \in X$ e verifiquemos que os valores das funções coincidem em $x$:
$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$

(A2) Dados $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ vamos mostrar que $f+g$ e $g+f$ são iguais. Então, tome $x \in X$:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

(A3) Vamos mostrar que existe $s \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ tal que $f+s = s+f = f$, para toda $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$. Para isso, seja $s \equiv 0$, ou seja, $s$ é a função nula para todo $x \in X$. Sendo assim, dado $x \in X$, temos:
$(f+s)(x) = f(x) + s(x) = f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$

(A4) Para qualquer função $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$, defina $h \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ como sendo a função $h(x) = -f(x)$, para todo $x \in X$. Assim, temos:
$(f+h)(x) = f(x) + h(x) = f(x) - f(x) = 0$

(M1) Dados $\alpha \in \mathbb{C}$, $f,g \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ vamos mostrar que $\alpha(f+g)$ e $\alpha f + \alpha g$ são as mesmas funções. Tome $x \in X$, então:
$[\alpha(f+g)](x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$

(M2) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ mostremos que $(\alpha+\beta)f$ e $\alpha f + \beta f$ são iguais. Tome $x \in X$:
$((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$

(M3) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f \in A$ vamos verificar que $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$. Para isso, tome $x \in X$:
$((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha(\beta f))(x)$

(M4) Seja $1 \in \mathbb{C}$ a unidade do corpo. Então, dados $f \in A$ vamos mostrar que $1f$ e $f$ coincidem. Então tome $x \in X$:
$(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$

Logo, $A = \mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ é um espaço vetorial. Note que em todas as contas feitas acima, concluímos que as propriedades de espaço vetorial valiam, pois em $\mathbb{C}$ valem, ou seja, o contradomínio foi de grande valia. Agora verifiquemos que a multiplicação, definida pontualmente, satisfaz os ítens da Definição 1.

(i) Dados $f,g,h \in A$ vamos verificar que $(f+g)\cdot h$ e $(f\cdot h)+(g\cdot h)$ são iguais. Para tanto, tome $x \in X$ e verifiquemos que seus valores coincidem em $x$:
$((f+g)\cdot h)(x) = (f+g)(x)\cdot h(x) = (f(x)+g(x))\cdot h(x) = f(x)h(x)+g(x)h(x) = (f\cdot h)(x)+(g\cdot h)(x) = (f\cdot h+g\cdot h)(x)$

(ii) Dados $f,g,h \in A$ vamos verificar que $f\cdot(g+h)$ e $(f\cdot g)+(f\cdot h)$. Para tanto, tome $x \in X$ e verifiquemos que seus valores coincidem em $x$:
$(f\cdot(g+h))(x) = f(x)\cdot(g+h)(x) = f(x)\cdot(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x) = (f\cdot g)(x)+(f\cdot h)(x) = (f\cdot g+f\cdot h)(x)$

(iii) Dados $f,g,h \in A$ vamos verificar que $(f\cdot g)\cdot h$ e $f\cdot(g\cdot h)$. Para tanto, tome $x \in X$ e verifiquemos que seus valores coincidem em $x$:
$((f\cdot g)\cdot h)(x) = (f\cdot g)(x)\cdot h(x) = (f(x)\cdot g(x))\cdot h(x) = (f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x)) = f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x)) = f(x)\cdot(g.h)(x) = (f\cdot(g\cdot h))(x)$

(iv) Agora, dado $\alpha \in \mathbb{C}$ e $f,g \in A$ verifiquemos que $(\alpha f)\cdot g$, $\alpha(f\cdot g)$ e $f\cdot(\alpha g)$ coincidem. Para isso, tome $x \in X$:

$((\alpha f)\cdot g)(x) = (\alpha f)(x)\cdot g(x) = [\alpha f(x)]g(x) = f(x)[\alpha g(x)] = f(x)\cdot[\alpha g](x) = (f\cdot[\alpha g])(x)$
Também:
$((\alpha f)\cdot g)(x) = (\alpha f(x))\cdot g(x) = [\alpha f(x)]g(x) = \alpha[f(x)g(x)] = \alpha[(f\cdot g)](x) = [\alpha(f\cdot g)](x)$

Concluindo assim que $A$ é um espaço vetorial com uma operação de multiplicação que satisfaz os ítens da Definição 1. Assim, $A$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Note que em nenhum momento foi preciso utilizar o fato de que a álgebra é sobre $\mathbb{C}$. Sendo assim poderíamos definir este mesmo exemplo sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer.

Quando estuda-se cálculo aprendemos o que são funções contínuas e em seguida funções deriváveis. Podemos então pensar no conjunto de todas as funções contínuas e de todas as funções deriváveis e poderíamos fazer a seguinte pergunta: será que esses conjuntos munidos com uma operação de soma e multiplicação por escalar formam um espaço vetorial?. E, se sim, será que poderíamos adicionar uma operação de multiplicação que satisfizesse os ítens da Definição 1? Para os exemplos abaixo considere o corpo $\mathbb{R}$.

**Exemplo 8.** Considere o conjunto $C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$. Definindo as operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação pontualmente, $C[a,b]$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Sabemos que a soma, multiplicação por escalar e multiplicação de funções contínuas definidas pontualmente é uma função contínua([4], p.77, Exemplo 11), portanto $C[a,b]$ é fechado com tais operações. Note que uma função contínua, em particular, é uma função e, portanto, tudo que foi feito no Exemplo 7 vale para este exemplo. O importante aqui também é notar que a função nula sempre é contínua e que se $f$ é uma função contínua então $-f$ também. Portanto, $C[a,b]$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

**Exemplo 9.** Seja $D(a,b) := \{f : (a,b) \to \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável}\}$. Definindo as operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação pontualmente, $D(a,b)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Sabemos que a soma, multiplicação por escalar e multiplicação de funções deriváveis definidas pontualmente é uma função derivável (veja [4], p.154, Teorema 1), portanto $D(a,b)$ é fechado com tais operações. Note que uma função derivável, em particular, é uma função e, portanto, tudo que foi feito no Exemplo 7 vale para este exemplo. O importante aqui é notar que a função nula é derivável e que se $f$ é uma função derivável então $-f$ também. Portanto, $D(a,b)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

**Exemplo 10.** O conjunto $P(\mathbb{K})$ formado por todos os polinômios em uma variável com coeficientes em $\mathbb{K}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Sabemos que $P(\mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (veja [6], p.76 Exemplo 4.2) e também um anel (veja [2], p.282).

## 3.1 Subálgebras

Na Observação 2 foi dito que uma álgebra é ao mesmo tempo um anel e espaço vetorial. Sabemos que anéis possuem subanéis e que espaços vetoriais possuem subespaços vetoriais. A definição abaixo nos dirá o mesmo sobre álgebras.

**Definição 11.** Sejam $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $S$ um subconjunto não vazio de $A$. Dizemos que $S$ é uma subálgebra de $A$ se:

(i) $S$ é fechado com as operações de $A$.

(ii) $S$ também é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$.

**Exemplo 12.** Sejam $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ e $C[a,b]$ como nos Exemplo 7 e Exemplo 8, respectivamente. Vamos provar que $C[a,b]$ é uma subálgebra de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.

Sabemos do Exemplo 8 que $C[a,b]$ é fechado com as operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação definidas pontualmente e que também é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Portanto, $C[a,b]$ é uma subálgebra de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.

**Exemplo 13.** Seja $M_2(\mathbb{C})$ a álgebra das matrizes $2\times 2$ sobre $\mathbb{C}$ e $S \subset M_2(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $2\times 2$ triangulares superiores. Vamos mostrar que $S$ é uma subálgebra de $M_2(\mathbb{C})$.

Note que o conjunto das matrizes triangulares superiores é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{C})$, portanto as operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes triangulares superiores são fechadas. Falta apenas mostrar que a mutiplicação satisfaz os ítens da Definição 1. Sejam $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix}$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, i \in \{1,2,4\}$ matrizes triangulares superiores.

(i) Dadas $A, B, C \in S$ vamos mostrar que $(A+B)\cdot C$ e $A\cdot C + B\cdot C$ são iguais:

$$\begin{aligned}
(A+B)\cdot C &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ 0 & a_4+b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1c_1+b_1c_1 & a_1c_2+a_2c_4+b_1c_2+b_2c_4 \\ 0 & a_4c_4+b_4c_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1c_1 & a_1c_2+a_2c_4 \\ 0 & a_4c_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1c_1 & b_1c_2+b_2c_4 \\ 0 & b_4c_4 \end{pmatrix} \\
&= A\cdot C + B\cdot C
\end{aligned}$$

(ii) Dados $A, B, C \in S$ vamos mostrar que $A\cdot(B+C)$ e $A\cdot B + A\cdot C$ são iguais:

$$\begin{aligned}
A\cdot(B+C) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ 0 & b_4+c_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1+a_1c_1 & a_1b_2+a_1c_2+a_2b_4+a_2c_4 \\ 0 & a_4b_4+a_4c_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2+a_2b_4 \\ 0 & a_4b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1c_1 & a_1c_2+a_2c_4 \\ 0 & a_4c_4 \end{pmatrix} \\
&= A\cdot B + A\cdot C
\end{aligned}$$

(iii) Sabemos que o produto de matrizes é associativo (veja [5], p.20 teorema 8).

(iv) Dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $A, B \in S$ vamos mostrar que $(\alpha A)\cdot B = \alpha(A\cdot B) = A\cdot(\alpha B)$:

$$\begin{aligned}
(\alpha A)\cdot B &= \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ 0 & \alpha a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha a_1)b_1 & (\alpha a_1)b_2+(\alpha a_2)b_4 \\ 0 & (\alpha a_4)b_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(\alpha b_1) & a_1(\alpha b_2+a_2(\alpha b_4) \\ 0 & a_4(\alpha b_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha b_1 & \alpha b_2 \\ 0 & \alpha b_4 \end{pmatrix} \\
&= A\cdot(\alpha B)
\end{aligned}$$

Também temos que:

$$\begin{aligned}
(\alpha A)\cdot B &= \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ 0 & \alpha a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha a_1)b_1 & (\alpha a_1)b_2 + (\alpha a_2)b_4 \\ 0 & (\alpha a_4)b_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_1 b_1) & \alpha(a_1 b_2) + \alpha(a_2 b_4) \\ 0 & \alpha(a_4 b_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_1 b_1) & \alpha(a_1 b_2 + a_2 b_4) \\ 0 & \alpha(a_4 b_4) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \\
&= \alpha(A\cdot B)
\end{aligned}$$

Assim a multiplicação satisfaz os ítens da Definição 1 e portanto $S$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Sendo assim, $S$ é uma subálgebra de $M_2(\mathbb{C})$.

O seguinte resultado nos dará uma caracterização para subálgebras.

**Proposição 14.** Seja $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $B \subset A$. Então $B$ é uma subálgebra de $A$ se, e somente se, $B$ é um subespaço vetorial de $A$ e subanel de $A$.

***Demonstração:***

($\Rightarrow$)Vamos começar provando que se $B \subset A$ é uma subálgebra de $A$ então $B$ é um subespaço vetorial e subanel de $A$. De fato, se $B \subset A$ é uma subálgebra de $A$, pela Definição 11, $B$ é fechado com as operações de A e uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Logo, $B$ é um espaço vetorial e anel ao mesmo tempo. Como $B \subset A$ é fechado com as operações de $A$ e é um espaço vetorial de $A$ então $B$ é um subespaço vetorial e também um subanel de $A$.

($\Leftarrow$)Sabemos que $B \subset A$ é um subespaço vetorial e subanel de $A$. Sendo assim, $B$ é fechado pelas operações de $A$. Pela definição de subespaço vetorial e subanel temos que $B$ é um espaço vetorial e anel. Portanto, $B$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. ∎

## 3.2 Homomorfismo de Álgebras

Na Teoria de Anéis e Grupos aprendemos o que são homomorfismo entre anéis e homomorfismo entre grupos. Em Álgebra Linear aprendemos o que é uma transformação linear entre espaços vetoriais que podem ser entendidos como homomorfismos entre espaços vetoriais. A seguir, veremos o que é um homomorfismo entre álgebras e alguns exemplos.

**Definição 15.** Fixe um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $A$ e $B$ álgebras sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : A \to B$. Dizemos que $\varphi$ é um *homomorfismo entre álgebras* se, dados $a,b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ quaisquer, valem:

(i) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

(ii) $\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$;

(iii) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Observe que na definição acima temos que $\varphi$ é um homomorfismo de anéis (i e iii) e também uma transformação linear (i e ii).

**Exemplo 16.** Seja $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Afirmamos que a função identidade $id_A : A \to A, a \mapsto a$, é um homomorfismo de álgebras sobre $\mathbb{K}$.

Vamos mostrar que a função $id_A$ satisfaz as condições da Definição 15. Tome $a,b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $id_A(a+b) = a+b = id_A(a) + id_A(b)$.

(ii) $id_A(\alpha a) = \alpha a = \alpha id_A(a)$.

(iii) $id_A(a \cdot b) = a \cdot b = id_A(a) \cdot id_A(b)$.

Portanto, $id_A$ é um homomorfismo entre álgebras.

**Exemplo 17.** Seja $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. A função nula $o : A \to A$, $o(a) = 0_A$, em que $0_A$ é o elemento neutro da álgebra $A$, é um homomorfismo de álgebras sobre $\mathbb{K}$.

Vamos mostrar que a função $o$ satisfaz as condições da Definição 15. De fato, tome $a,b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $o(a+b) = 0_A = 0_A + 0_A = o(a) + o(b)$.

(ii) $o(\alpha a) = 0_A = \alpha 0_A = \alpha o(a)$.

(iii) $o(a \cdot b) = 0_A = 0_A \cdot 0_A = o(a) \cdot o(b)$.

Portanto, $o$ é um homomorfismo entre álgebras.

**Observação 18.** Os dois exemplos acima nos garantem o seguinte: dada uma álgebra $A$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, sempre existem pelo menos dois homomorfismos de $A$ em si própria, o homomorfismo identidade e o homomorfismo nulo. A menos é claro se $A$ for a álgebra nula.

**Exemplo 19.** Seja $\mathbb{R}$ visto como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Vamos determinar todos os homomorfismos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Fixe um homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seja $a = \varphi(1)$. Sabemos que se conseguirmos identificar o que a função $\varphi$ faz no elemento neutro da multiplicação de $\mathbb{R}$, conseguiremos determiná-la para todos os reais, pois dado $c \in \mathbb{R}$, com $c \neq 1$, $\varphi(c) = \varphi(c.1) = c\varphi(1) = ca$. Se $a = 0$, então a função $\varphi$ é a função nula. Considere $a \neq 0$. Então:

$a = \varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1)\varphi(1) = \varphi(1)^2 = a^2$

Logo, $a = a^2$ e assim $a = 0$ ou $a = 1$. Como $a \neq 0$, segue que $a = 1$ e assim a função $\varphi$ é a função identidade. Portanto, o homomorfismo $\varphi$ ou é a função identidade ou é a função nula.

**Exemplo 20.** Considere $M_n(\mathbb{C})$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Fixe uma matriz $T \in M_n(\mathbb{C})$ inversível. Sabemos que existe a matriz inversa de $T$, denotada $T^{-1}$ e que $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, em que $I$ é a matriz identidade de $M_n(\mathbb{C})$. Defina $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ por, dada $S \in M_n(\mathbb{C})$, $\varphi(S) := TST^{-1}$. Vamos mostrar que $\varphi$ é um homomorfismo bijetor. Mostremos que $\varphi$ satisfaz os ítens da Definição 15. Tome $S, R \in M_n(\mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$:

(i) $\varphi(S+R) = T(S+R)T^{-1} = (TS+TR)T^{-1} = TST^{-1} + TRT^{-1} = \varphi(S) + \varphi(R)$.

(ii) $\varphi(\alpha S) = T(\alpha S)T^{-1} = \alpha TST^{-1} = \alpha\varphi(S)$.

(iii) $\varphi(S \cdot R) = \varphi(SR) = TSRT^{-1} = TSIRT^{-1} = TST^{-1}TRT^{-1} = \varphi(S)\varphi(R) = \varphi(S) \cdot \varphi(R)$.

Logo, $\varphi$ é um homomorfismo entre álgebras. Provaremos agora que o homomorfismo $\varphi$ é injetor. Para tanto, tome $R, S \in M$ tais que $\varphi(R) = \varphi(S)$. Sendo assim:

$\varphi(R) = \varphi(S) \Leftrightarrow TRT^{-1} = TST^{-1} \Leftrightarrow TRT^{-1}T = TST^{-1}T \Leftrightarrow TRI = TSI \Leftrightarrow T^{-1}TR = T^{-1}TS \Leftrightarrow IR = SI \Leftrightarrow R = S$

Portanto, $\varphi$ é injetor. Provemos agora que $\varphi$ é sobrejetor. Tome $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Agora, considere a matriz $X = T^{-1}YT \in M_n(\mathbb{C})$. Então:

$$\varphi(X) = \varphi(T^{-1}YT) = TT^{-1}YTT^{-1} = IYI = Y$$

E assim, $\varphi$ é sobrejetor. Portanto, $\varphi$ é um homomorfismo bijetor entre álgebras.

**Exemplo 21.** Considere $V = \mathbb{R}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com base $\vec{e}_1 = (1,0)$ e $\vec{e}_2 = (0,1)$, denotada *base canônica* de $\mathbb{R}^2$. Considere o conjunto $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Dada $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, uma transformação linear, podemos associar a matriz $[T]_B^B$ como abaixo. Defina $\varphi : \mathscr{L}(V) \to M_2(\mathbb{R})$, $T \mapsto [T]_B^B$. Vamos mostrar que $\varphi$ é um homomorfismo entre álgebras sobre $\mathbb{R}$.

Lembre que para montarmos a matriz $[T]_B^B$ procedemos da seguinte forma:

1. Aplicamos $T$ nos vetores da base;

2. Colocamos os escalares que acompanham o vetor $T(\vec{e}_1)$ na primeira linha e os escalares que acompanham o vetor $T(\vec{e}_2)$ na segunda linha da matriz $[T]_B^B$.

Exemplificando, considere a base $B$ acima. Temos que:

$$T(\vec{e}_1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

$$T(\vec{e}_2) = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$$

Logo,

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Sendo assim, vamos mostrar o item (i) da Definição 15. Dados $T, S \in \mathscr{L}(V)$ temos que:

$$T(\vec{e}_1) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \quad , \quad S(\vec{e}_1) = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$$

$$T(\vec{e}_2) = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \quad , \quad S(\vec{e}_2) = d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2$$

Assim,

$$\varphi(T) = [T]_B^B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ e } \varphi(S) = [S]_B^B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

E assim,

$$\varphi(T) + \varphi(S) = [T]_B^B + [S]_B^B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + d_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$(T+S)(\vec{e_1}) = T(\vec{e_1}) + S(\vec{e_1}) = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_1} = (a_1+c_1)\vec{e_1} + (a_2+c_2)\vec{e_2}$

$(T+S)(\vec{e_2}) = T(\vec{e_2}) + S(\vec{e_2}) = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + d_1\vec{e_1} + d_2\vec{e_1} = (b_1+d_1)\vec{e_1} + (b_2+d_2)\vec{e_2}$

Assim:

$\varphi(T+S) = [T+S]_B^B = \begin{pmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{pmatrix}$

Portanto, $\varphi(T+S) = \varphi(T) + \varphi(S)$. Provando o item (i). Vamos mostrar agora o item (ii) da Definição 15. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $T \in \mathscr{L}(V)$, temos:

$(\alpha T)(\vec{e_1}) = \alpha T(\vec{e_1}) = \alpha(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) = \alpha a_1\vec{e_1} + \alpha a_2\vec{e_2}$

$(\alpha T)(\vec{e_2}) = \alpha T(\vec{e_2}) = \alpha(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) = \alpha b_1\vec{e_1} + \alpha b_2\vec{e_2}$

Assim:

$\varphi(\alpha T) = [\alpha T]_B^B = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha a_2 & \alpha b_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \alpha[T]_B^B = \alpha\varphi(T)$

Provando o item (ii). Vamos mostrar agora o item (iii) da Definição 15. Dados $T, S \in \mathscr{L}(V)$, temos:

$$\begin{aligned} (TS)(\vec{e_1}) &= T(S(\vec{e_1})) = T(c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2}) = c_1T(\vec{e_1}) + c_2T(\vec{e_2}) = \\ &= c_1(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) + c_2(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) = (c_1a_1 + c_2b_1)\vec{e_1} + (c_1a_2 + c_2b_2)\vec{e_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (TS)(\vec{e_2}) &= T(S(\vec{e_2})) = T(d_1\vec{e_1} + d_2\vec{e_2}) = d_1T(\vec{e_1}) + d_2T(\vec{e_2}) = \\ &= d_1(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) + d_2(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}) = (d_1a_1 + d_2b_1)\vec{e_1} + (d_1a_2 + d_2b_2)\vec{e_2} \end{aligned}$$

Portanto, temos:

$\varphi(TS) = [TS]_B^B = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = [T]_B^B[S]_B^B = \varphi(T)\varphi(S)$

Como queríamos. Portanto, $\varphi$ é um homomorfismo entre álgebras. Mais ainda, $\varphi$ é um homomorfismo bijetor de álgebras (veja [6], p.184, teorema 7.2).

**Proposição 22.** Dadas $A$ e $B$ álgebras sobre $\mathbb{K}$ vamos mostrar que se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras então Im($\varphi$) é uma subálgebra de $B$.

***Demonstração:***

Para mostrarmos isso, pela Proposição 14, vamos verificar que Im($\varphi$) é um subanel e um subespaço vetorial de $B$. Para tanto precisamos mostrar o seguinte:

(i) Im($\varphi$)$\neq \emptyset$;

(ii) Para quaisquer $a, b \in$ Im($\varphi$) e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos $\alpha a + b \in$ Im($\varphi$);

(iii) Para quaisquer $a \in$ Im($\varphi$) e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos $\alpha a \in$ Im($\varphi$);

(iv) Para quaisquer $a, b \in$ Im($\varphi$) temos $a \cdot b \in$ Im($\varphi$).

Como $\varphi$ é um homomorfismo entre álgebras, em particular, $\varphi$ é uma transformação linear entre os espaços vetoriais $A$ e $B$. Da álgebra linear sabemos que Im($\varphi$) é um subespaço vetorial de $B$, portanto são satisfeitas as condições (i), (ii) e (iii). Provemos então a condição (iv):

(iv) Se $a$, $b$ são dois elementos quaisquer de Im($\varphi$) então existem $c, d \in A$ tais que $a = \varphi(c)$ e $b = \varphi(d)$. Logo,

$a \cdot b = \varphi(c) \cdot \varphi(d) = \varphi(c \cdot d)$

Como $c \cdot d \in A$ segue que $a \cdot b \in$ Im($\varphi$).

Provando assim que Im($\varphi$) é um subespaço vetorial e subanel de B. Portanto, Im($\varphi$) é uma subálgebra da álgebra $B$. ∎

**Definição 23.** Dadas $A, B$ álgebras sobre $\mathbb{K}$ considere o homomorfismo $\varphi : A \to B$. O *núcleo* de $\varphi$, denotado por Ker($\varphi$), é o seguinte conjunto:

$$\text{Ker}(\varphi) = \{a \in A : \varphi(a) = 0_B\}$$

**Observação 24.** Note que sempre temos que o elemento neutro da álgebra $A$ pertence ao Ker($\varphi$), pois:

$\varphi(0_A) = \varphi(0_A + 0_A) = \varphi(0_A) + \varphi(0_A) \Rightarrow \varphi(0_A) = 0_B$

Portanto, $0_A \in$ Ker($\varphi$) pela definição.

**Exemplo 25.** Sejam $A$ e $B$ álgebras sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras. Vamos mostrar que Ker($\varphi$) é uma subálgebra de $A$.

Para tanto, pela Proposição 14, precisamos mostrar que Ker($\varphi$) é um subanel e um subespaço vetorial de A. Para Ker($\varphi$) ser um subespaço vetorial de $A$ temos que mostrar que dados $a, b \in$ Ker($\varphi$) e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $(\alpha a + b) \in$ Ker($\varphi$). De fato, dados $a, b \in$ Ker($\varphi$) e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos:

$$\varphi(\alpha a + b) = \varphi(\alpha a) + \varphi(b) = \alpha\varphi(a) + \varphi(b) = \alpha 0_B + 0_B = 0_B$$

Portanto, $(\alpha a + b) \in$ Ker($\varphi$) e Ker($\varphi$) é um subespaço vetorial de $A$. Agora, para mostrarmos que Ker($\varphi$) é um subanel de $A$ precisamos mostrar apenas que dados $a, b \in$ Ker($\varphi$) então $a \cdot b \in$ Ker($\varphi$). De fato, dados $a, b \in$ Ker($\varphi$), temos:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = 0_B$$

Portanto, $a \cdot b \in$ Ker($\varphi$) e Ker($\varphi$) é um subanel de $A$. Logo, Ker($\varphi$) é uma subálgebra da álgebra $A$.

**Exemplo 26.** Considere o homomorfismo entre álgebras do Exemplo 20. Vamos calcular quem é o núcleo desse homomorfismo.

Sabemos que sempre temos Ker($\varphi$) $\neq \emptyset$. Tome $A \in$ Ker($\varphi$). Como $A \in$ Ker($\varphi$) temos que:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(A) & = & 0_{M_n(\mathbb{C})} \\ TAT^{-1} & = & T0_{M_n(\mathbb{C})}T^{-1} \\ T^{-1}TAT^{-1}T & = & T^{-1}0_{M_n(\mathbb{C})}T \\ A & = & 0_{M_n(\mathbb{C})} \end{array}$$

Portanto, Ker($\varphi$) $= \{0_{M_n(\mathbb{C})}\}$, ou seja, o núcleo do homomorfismo do Exemplo 20 é apenas a matriz nula. Isso nos faz refletir: na teoria de anéis quando um homomorfismo entre anéis era injetor o seu núcleo era apenas o elemento neutro do anel, e sabemos que o homomorfismo do Exemplo 20 é injetor (bijetor inclusive). Será que vale o mesmo para álgebras? A proposição seguinte nos dirá que sim.

**Proposição 27.** Sejam $A$ e $B$ álgebras sobre $\mathbb{K}$ e considere $\varphi : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras. Então $\varphi$ é injetor se e somente se Ker($\varphi$) $= \{0_A\}$.

***Demonstração:***

($\Rightarrow$) Temos que mostrar que o único elemento pertencente ao Ker($\varphi$) é $0_A$. Tome $e \in$ Ker($\varphi$). Então, $\varphi(e) = 0_B$. Mas $\varphi(0_A) = 0_B$, logo $\varphi(e) = \varphi(0_A)$. Como $\varphi$ é injetor, por hipótese, temos que $0_A = e$.

($\Leftarrow$) Sejam $a_1, a_2 \in A$ tais que $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Queremos mostrar que $a_1 = a_2$. Como $a_2 \in A$ então $-a_2 \in A$. Agora, temos:

$\varphi(a_1) + \varphi(-a_2) = \varphi(a_1) - \varphi(a_2) = 0_B \Rightarrow \varphi(a_1 - a_2) = 0_B$

Assim, $a_1 - a_2 \in \text{Ker}(\varphi)$. Como $\text{Ker}(\varphi) = \{0_A\}$ então $a_1 - a_2 = 0_A$. Logo, $a_1 = a_2$, como queríamos.

Portanto, $\varphi$ é injetor. ■

## 3.3 Ideal

**Definição 28.** Sejam $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $I \subseteq A$ uma subálgebra. Dizemos que $I$ é um ideal de A se:

(i) $ax, xa \in I, \forall a \in A, \forall x \in I$.

Neste ponto já sabemos que uma álgebra se comporta como anel e espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dependendo se considerarmos a soma com a multiplicação ou a soma com a multiplicação por escalar. Veremos abaixo que um ideal de uma álgebra nada mais é do que um subespaço vetorial e um ideal de um anel.

**Proposição 29.** Seja $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Uma subálgebra $I \subset A$ é um ideal de $A$ se e somente se:

(i) $I$ é subespaço vetorial de A, ou seja, dados $x, y \in I$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $(\alpha x + y) \in I$;

(ii) Se $a \in A$ e $x \in I$ então $ax, xa \in I$.

***Demonstração:***

($\Rightarrow$) Por hipótese sabemos que a subálgebra $I$ é um ideal da álgebra $A$ e, portanto, $ax, xa \in I$, para todo $a \in A$ e $x \in I$. Agora, como $I$ é uma subálgebra de $A$, em particular $I$ é um subespaço vetorial de $A$, então $(\alpha x + y) \in I, \forall x, y \in I$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

($\Leftarrow$) É imediato, basta olhar para a definição dada. ■

**Exemplo 30.** Seja $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Vamos mostrar que $I = \{0_A\}$ e $I = A$ sempre são ideais de $A$. Tais ideias são chamados ideais triviais da álgebra.

Dados $x, y \in I = \{0_A\}$ e $a \in A$, temos:

(i) $(ax+y) = (a0_A + 0_A) = 0_A + 0_A = 0_A \in I$.

(ii) $(ax) = a0_A = 0_A a = 0_A \in I$.

Dados $x, y \in I = A$ e $a \in A$, temos:

(i) $(ax+y) = (ax+y) \in A = I$.

(ii) $(ax) \in A = I$ e $(xa) \in A = I$.

**Exemplo 31.** Seja $\mathbb{R}$ visto como álgebra sobre $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que os únicos ideais de $\mathbb{R}$ são os ideais triviais, ou seja, $I = \{0_{\mathbb{R}}\}$ ou $I = \mathbb{R}$.

Seja $I$ ideal de $\mathbb{R}$. Então, pela Proposição 29, $I$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$ logo $\dim I = 0$ ou $\dim I = 1$, e o resultado segue.

**Proposição 32.** Sejam $A$ e $B$ álgebras. Se $\varphi : A \to B$ é homomorfismo de álgebras então Ker($\varphi$) é ideal de $A$.

***Demonstração:***

(i) Sempre temos que $0_A \in$ Ker($\varphi$), logo Ker($\varphi$)$\neq \emptyset$.

(ii) Se $a, b \in$ Ker($\varphi$) e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $(\alpha a + b) \in$ Ker($\varphi$), pois o núcleo é uma subálgebra de $A$.

(iii) Dados $a \in A$ e $i \in$ Ker($\varphi$), temos:
$\varphi(ai) = \varphi(a)\varphi(i) = \varphi(a)0_B = 0_B$.

Logo, $ai \in$ Ker($\varphi$). Analogamente prova-se que $ia \in$ Ker($\varphi$). ∎

**Exemplo 33.** Seja $X$ um conjunto não vazio e $A = \mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ a álgebra sobre $\mathbb{C}$ do Exemplo 7 e $Y \subseteq X$. Considere o conjunto

$$A_Y = \{f : X \to \mathbb{C} | f(y) = 0, \forall y \in Y\}.$$

Vamos mostrar que $A_Y$ é ideal de $A$.

Tome $g,h \in A_Y$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $y \in Y$. Então, temos que:

$(\alpha g+h)(y) = (\alpha g)(y)+h(y) = \alpha g(y)+h(y) = \alpha 0+0 = 0$

Logo $(\alpha g+h) \in A_Y$.

Agora, tome $g \in A_Y$, $f \in A$ e $y \in Y$. Então:

$(fg)(y) = f(y)g(y) = f(y)0 = 0$

$(gf)(y) = g(y)f(y) = 0f(y) = 0$

Logo, $fg, gf \in A_Y$. Portanto, $A_Y$ é ideal de $A$.

Note que caso $Y = \emptyset$ então $A_Y = A$ e caso $Y = X$ então $A_Y = \{0\}$.

## 3.4 Relação de equivalência e Quociente

Seja $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $I$ um ideal de $A$.

**Definição 34.** Dados $a,b \in A$ diremos que *a está relacionado com b*, através de $I$, se $b-a \in I$. Denotaremos isto por $a \sim_I b$.

**Proposição 35.** A relação definida acima é uma relação de equivalência[1], ou seja, é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

***Demonstração:***

(i) Dado $a \in A$ vamos mostrar que $a \sim_I a$, ou seja, que a relação $\sim_I$ é reflexiva. De fato, se $a \in A$ então $a-a = 0 \in I$.

(ii) Dados $a,b \in A$ vamos mostrar que a relação é simétrica, ou seja, se $a \sim_I b$ então $b \sim_I a$. De fato, dados $a,b \in A$ e se $a \sim_I b$ então $b-a \in I$ e, como $I$ é um ideal, $-(b-a) \in I$. Logo $a-b \in I$. Portanto $b \sim_I a$.

(iii) Dados $a,b,c \in A$ vamos mostrar que se $a \sim_I b$ e $b \sim_I c$ então $a \sim_I c$, ou seja, a relação $\sim_I$ é transitiva. De fato, dados $a,b,c \in A$ com $a \sim_I b$ e $b \sim_I c$, ou seja, $b-a \in I$ e $c-b \in I$. Por (ii), temos que $a-b \in I$ e $b-c \in I$ e, como I é um ideal, $(a-b)+(b-c) \in I$ e assim $a-c \in I$. Portanto, $a \sim_I c$. ■

[1]O leitor que quiser saber mais sobre relação de equivalência pode consultar [2] p.78.

Como $\sim_I$ é uma relação de equivalência podemos formar o conjunto quociente $A/\sim_I$ que é o conjunto das classes de equivalência, denotado $A/I$. Dado $a \in A$, denotaremos sua classe de equivalência por $\overline{a}$. Deste modo, $A/I = \{\overline{a} | a \in A\}$.

Neste ponto nos deparamos com a seguinte pergunta: dada $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $I$ um ideal de $A$, será que o conjunto $A/I$ munido de certas operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação tem estrutura de álgebra sobre $\mathbb{K}$? A pergunta surge de uma maneira natural, pois quando estudamos a Teoria de Anéis, dados $A$ anel e $I \subset A$ ideal de A o conjunto quociente $A/I$ é um anel com certas operações definidas naturalmente. Analogamente, quando estudamos a Teoria de Grupos, dados $G$ grupo e $H \subset G$ subgrupo normal de G, o quociente G/H é um grupo com certas operações definidas de uma maneira natural.

Defina em $A/I$ as seguintes operações. Dados $\overline{a}, \overline{b} \in A/I$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ (adição)

(ii) $\alpha\overline{a} = \overline{\alpha a}$ (multiplicação por escalar)

(iii) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$ (multiplicação)

Nosso trabalho agora será o de mostrar que as operações acima estão bem definidas, ou seja, operar dois elementos do conjunto das classes de equivalência, $A/I$, independe da escolha de elementos da mesma classe. Vamos mostrar que a adição em $A/I$ está bem definida.

Dados $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ suponha que $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ e $\overline{b_1} = \overline{b_2}$. Assim, $a_1 \sim_I a_2$ e $b_1 \sim_I b_2$ e então $a_2 - a_1 \in I$ e $b_2 - b_1 \in I$. Como $I$ é um ideal, $(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) \in I$ e, assim, $(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) \in I$, ou seja, $a_1 + b_1 \sim_I a_2 + b_2$. Portanto, $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$.

Agora vamos mostrar que a multiplicação por escalar está bem definida, ou seja, dados $\alpha \in \mathbb{K}$ fixo e $a, b \in A$ tais que $\overline{a} = \overline{b}$ vamos mostrar que $\overline{\alpha a} = \overline{\alpha b}$. Como $\overline{a} = \overline{b}$ então $a \sim_I b$, logo, $b - a \in I$. Agora, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, temos que $\alpha(b - a) \in I$ e então $\alpha b - \alpha a \in I$ e, assim, $\alpha a \sim_I \alpha b$. Portanto, $\overline{\alpha a} = \overline{\alpha b}$.

Por último vamos mostrar que a multiplicação está bem definida. Dados $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ suponha que $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ e $\overline{b_1} = \overline{b_2}$. Vamos mostrar que $\overline{a_1 \cdot b_1} = \overline{a_2 \cdot b_2}$, mais precisamente, vamos mostrar que $a_2 \cdot b_2 \in \overline{a_1 \cdot b_1}$, pois se $b \in \overline{a}$ então $\overline{b} = \overline{a}$. Como $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ e $\overline{b_1} = \overline{b_2}$ então $a_2 - a_1, b_2 - b_1 \in I$. Assim, existem $x, y \in I$ com $a_2 = a_1 + x$ e $b_2 = b_1 + y$. Agora,

$$a_2 \cdot b_2 = (a_1 + x) \cdot (b_1 + y) = (a_1 b_1 + a_1 y + x b_1 + xy)$$

Assim, para que o produto esteja bem definido, precisamos ter $a_2b_2 - a_1b_1 \in I$, ou seja, $a_1y+xb_1+xy \in I$. Mas, como $I$ é um ideal de $A$, $a_1y+xb_1+xy \in I$. Fazendo $i = a_1y+xb_1+xy$, temos $a_1b_1+i \in \overline{a_1 \cdot b_1}$.

Note que o fato de $I$ ser um ideal de $A$ foi de extrema importância, pois caso contrário não poderíamos afirmar que $a_1y+xb_1+xy \in I$.

Portanto, as operações de adição, multiplicação por escalar e multiplicação estão bem definidas em $A/I$.

**Proposição 36.** Sejam $A$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $I \subset A$ um ideal de $A$. Então $A/I$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ com as operações definidas acima.

***Demonstração:***

Vamos mostrar que $A/I$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Começaremos mostrando que $A/I$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

(A1) Dados $\overline{a},\overline{b},\overline{c} \in A/I$, vamos mostrar que a soma é associativa:
$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = (\overline{a+b})+\overline{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a}+\overline{b+c} = \overline{a}+(\overline{b+c})$

(A2) Dados $\overline{a},\overline{b} \in A/I$, vamos mostrar que a soma é comutativa:
$\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b}+\overline{a}$

(A3) Vamos provar que existe $\overline{e} \in A/I$ tal que para todo $\overline{a} \in A/I$ $\overline{a}+\overline{e} = \overline{e}+\overline{a} = \overline{a}$. Seja $\overline{e} = \overline{0}$ o elemento neutro desse espaço vetorial (a classe de equivalência do zero da álgebra $A$). Sendo assim:
$\overline{a}+\overline{0} = \overline{a+0} = \overline{0+a} = \overline{a}$

(A4) Vamos mostrar que para cada $\overline{a} \in A/I$ existe $\overline{s} \in A/I$ tal que $\overline{a}+\overline{s} = \overline{0}$.

Para isso, seja $\overline{s} = \overline{-a}$. Sendo assim:
$\overline{a}+\overline{s} = \overline{a}+\overline{-a} = \overline{a+(-a)} = \overline{a-a} = \overline{0}$

(M1) Dados $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\overline{a},\overline{b} \in A/I$, vamos mostrar que $\alpha(\overline{a}+\overline{b})$ e $\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$ são iguais:
$\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha(\overline{a+b}) = \overline{\alpha(a+b)} = \overline{\alpha a+\alpha b} = \overline{\alpha a}+\overline{\alpha b} = \alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$

(M2) Dados $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\overline{a} \in A/I$, vamos mostrar que $(\alpha+\beta)\overline{a}$ e $\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$ são iguais:
$(\alpha+\beta)\overline{a} = \overline{(\alpha+\beta)a} = \overline{a\alpha+a\beta} = \overline{a\alpha}+\overline{a\beta} = \alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$

(M3) Dados $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\overline{a} \in A/I$, temos:
$(\alpha\beta)\overline{a} = \overline{(\alpha\beta)a} = \overline{\alpha(\beta a)} = \alpha(\overline{\beta a}) = \alpha(\beta\overline{a})$

(M4) Seja $1 \in \mathbb{K}$ a unidade do corpo. Vamos mostrar que dado $\overline{a} \in A/I$, $1\overline{a}$ e $\overline{a}$ são iguais:
$1\overline{a} = \overline{1a} = \overline{a}$

Ficando provado que $A/I$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Agora só falta mostrar que a multiplicação satisfaz os ítens da Definição 1.

(i) Vamos mostrar que a multiplicação distribui em relação à soma pela esquerda, ou seja, $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$. Para isso tome $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in A/I$:
$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

(ii) Vamos mostrar que a multiplicação distribui em relação à soma pela direita, ou seja, $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$. Para isso, tome $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in A/I$:
$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{(a+b)c} = \overline{ac+bc} = \overline{ac} + \overline{bc} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$

(iii) Agora, vamos mostrar que a multiplicação é associativa, ou seja, $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$. Para isso, tome $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in A/I$:
$(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{(ab)c} = \overline{a(bc)} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$

(iv) Por fim, mostremos que $(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b}$, $\alpha(\overline{a} \cdot \overline{b})$ e $\overline{a} \cdot (\alpha\overline{b})$ são iguais. Para isso tome $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\overline{a}, \overline{b} \in A/I$:
$(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{(\alpha a)b} = \overline{\alpha(ab)} = \alpha\overline{ab} = \alpha(\overline{a} \cdot \overline{b})$
Também temos que:
$(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{(\alpha a)b} = \overline{a(\alpha b)} = \overline{a} \cdot (\alpha\overline{b})$

Portanto, $A/I$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. ∎

O próximo teorema dá uma caracterização importante para os ideais de uma álgebra.

**Teorema 37.** Sejam $A$ álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $I \subseteq A$. Se $I$ é ideal de $A$ então existe $B$ álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : A \to B$ homomorfismo entre álgebras tal que $\mathrm{Ker}(\varphi) = I$.

***Demonstração:*** Seja $B = A/I$ e considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : A &\to A/I \\ a &\mapsto \overline{a} \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\varphi$ é um homomorfismo entre álgebras e que $\mathrm{Ker}(\varphi) = I$. Dados $a, b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $\varphi(a+b) = \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b} = \varphi(a) + \varphi(b)$

(ii) $\varphi(\alpha a) = \overline{\alpha a} = \alpha \overline{a} = \alpha \varphi(a)$

(iii) $\varphi(a \cdot b) = \overline{ab} = \overline{a}\overline{b} = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

Provando que $\varphi$ é um homomorfismo entre álgebras. Resta mostrar que Ker($\varphi$) $= I$. Agora, se $a \in$ Ker($\varphi$), temos:

$$\begin{aligned} a \in Ker(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(a) = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow a - 0 \in I \\ &\Leftrightarrow a \in I \end{aligned}$$

Provando que Ker($\varphi$) $= I$, como queríamos. ■

## 3.5 Teorema do homomorfismo

Na teoria de Anéis e Grupos aprendemos um importante resultado, o teorema do homomorfismo para tais estruturas. Nesta seção iremos provar o teorema do homomorfismo para álgebras.

**Teorema 38.** Sejam $A$ e $B$ álgebras sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo entre álgebras. Então, $A/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.

***Demonstração:*** Sabemos que $A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ e Im($\varphi$) são álgebras. Considere a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \delta : A/\mathrm{Ker}(\varphi) &\to \mathrm{Im}(\varphi) \\ \overline{a} &\mapsto \varphi(a) \end{aligned}$$

Vamos começar mostrando que a relação acima é uma função, ou seja, caso escolhamos dois elementos da mesma classe a imagem deles são a mesma. Para isso, tome $\overline{a}, \overline{b} \in A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ e suponha $\overline{a} = \overline{b}$. Assim, $\overline{a} - \overline{b} = \overline{0}$ e, então, $a - b \in$ Ker($\varphi$). Logo, $\varphi(a) - \varphi(b) = 0$. Portanto, $\varphi(a) = \varphi(b)$ e $\delta$ está bem definida como uma função.

Agora, mostremos que $\delta$ é um homomorfismo entre álgebras. Dados $\overline{a}, \overline{b} \in A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, verifiquemos que a função $\delta$ satisfaz os ítens da Definição 15:

(i) $\delta(\overline{a}+\overline{b}) = \delta(\overline{a+b}) = \varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b) = \delta(\overline{a})+\delta(\overline{b})$

(ii) $\delta(\alpha\overline{a}) = \delta(\overline{\alpha a}) = \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a) = \alpha\delta(\overline{a})$

(iii) $\delta(\overline{a}\cdot\overline{b}) = \delta(\overline{ab}) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \delta(\overline{a})\cdot\delta(\overline{b})$

Assim, $\delta$ é um homomorfismo entre álgebras. Provemos agora que $\delta$ é um homomorfismo bijetor entre álgebras.
Dados $\overline{a},\overline{b} \in A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ vamos mostrar que $\delta$ é injetor, ou seja, se $\delta(\overline{a}) = \delta(\overline{b})$ então $\overline{a} = \overline{b}$.

Pela hipótese temos que $\delta(\overline{a}) = \delta(\overline{b})$. Então $\varphi(a) = \varphi(b)$, ou seja, $\varphi(a)-\varphi(b) = \varphi(a-b) = 0$. Sendo assim, $a-b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ e, portanto, $\overline{a-b} = \overline{0}$. Logo, $\overline{a} = \overline{b}$, como queríamos.

Dado $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$ vamos mostrar que $\delta$ é sobrejetor. Para isso precisamos mostrar que existe $\overline{x} \in A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ tal que $\delta(\overline{x}) = y$. Seja $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$ qualquer. Então $y = \varphi(x)$ para algum $x \in A$. Assim, $\delta(\overline{x}) = \varphi(x) = y$, o que significa que $y \in \mathrm{Im}(\delta)$. Portanto $\delta$ é sobrejetora.

Logo, $\delta$ é um homomorfismo bijetor entre álgebras, ou seja, um isomorfismo. ∎

**Exemplo 39.** Sejam $X$ um conjunto não vazio e $Y \subseteq X$. Considere as álgebras $\mathscr{F}(X,\mathbb{C})$ e $\mathscr{F}(Y,\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. Considere ainda a seguinte função restrição

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{F}(X,\mathbb{C}) &\to \mathscr{F}(Y,\mathbb{C}) \\ f &\mapsto f_{|Y} \end{aligned}$$

É fácil ver que tal função é um homomorfismo entre álgebras. Agora, perceba que o $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{C}) | f_{|Y} = 0\} = A_Y$ do Exemplo 33.

Pelo Teorema 38 temos que $\mathscr{F}(X,\mathbb{C})/A_Y \cong \mathscr{F}(Y,\mathbb{C})$.

# 4 Álgebras de grupo

O principal objetivo deste capítulo é mostrar alguns exemplos de álgebras de grupo. Ao decorrer do texto mostraremos como construir uma álgebra a partir de um grupo utilizando a operação do mesmo, ou seja, a multiplicação da álgebra estará relacionada com a operação do grupo de alguma forma.

Antes de mais nada vamos mostrar como a partir de um conjunto qualquer podemos associar um espaço vetorial com relação ao conjunto dado, pois em seguida basta fazer o mesmo para um grupo. Seja $X$ um conjunto e $\mathbb{K}$ um corpo. Considere o espaço vetorial $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ como no Exemplo 7.

**Definição 40.** Dada $f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ o *suporte* de $f$ é o conjunto

$$\text{supp }(f) = \{x \in X | f(x) \neq 0\}.$$

Considere o seguinte conjunto:

$$V(X) = \{f \in \mathscr{F}(X,\mathbb{K}) | \text{supp }(f) \text{ é um conjunto finito}\}.$$

Claramente $V(X) \subseteq \mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. A proposição abaixo nos diz que $V(X)$ possui estrutura de espaço vetorial.

**Proposição 41.** $V(X)$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.

***Demonstração:*** Para mostrarmos que $V(X)$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$, precisamos mostrar que:

1. $V(X) \neq \emptyset$.
   Essa condição é satisfeita, pois a função identicamente nula está em $V(X)$.

2. Dadas $f,g \in V(X)$ então $f+g \in V(X)$, ou seja, basta calcular supp $(f+g)$. Sabemos que supp $(f+g) = \{x \in X | (f(x)+g(x)) \neq 0\}$ vamos provar que supp $(f+g) \subseteq$ supp $(f) \cup$ supp $(g)$. Se $x \in$ supp $(f+g)$ então $(f+g)(x) \neq 0$, donde $f(x)+g(x) \neq 0$ e, portanto, $f(x) \neq 0$ ou $g(x) \neq 0$, isto é, $x \in$ supp $(f)$ ou $x \in$ supp $(g)$, isto é, supp $(f+g) \subset$ supp $(f) \cup$ supp $(g)$.

3. Dada $f \in V(X)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ então $\alpha f \in V(X)$.
   Basta calcular supp $(\alpha f)$. Como o suporte de $f$ é finito então multiplicar os $f(x)$ por um escalar não nulo não muda o seu suporte. Logo supp $(\alpha f)$ é finito.

Portanto, $V(X)$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. ■

Agora vamos encontrar uma base para o espaço vetorial $V(X)$. Para tanto, para cada $x \in X$ fixo defina $\delta_x : X \to \mathbb{K}$ por:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, \text{ se } y = x \\ 0, \text{ se } y \neq x \end{cases}$$

Note que $\delta_x \in V(X), \forall x \in X$, pois supp $(\delta_x) = \{y \in X | \delta_x(y) \neq 0\} = \{x\}$ que é um conjunto finito.

**Proposição 42.** $\{\delta_x\}_{x \in X}$ é uma base para o espaço vetorial $V(X)$.

***Demonstração:*** Para mostrarmos que $\{\delta_x\}_{x \in X}$ é uma base para $V(X)$ precisamos mostrar que esse conjunto gera $V(X)$ e é linearmente independente.

Comecemos mostrando que $\{\delta_x\}_{x \in X}$ gera $V(X)$. Tome $f \in V(X)$ e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ aqueles em que $f(x_i) \neq 0, i = 1, \ldots, k$. Note que $f = f(x_1)\delta_{x_1} + f(x_2)\delta_{x_2} + \ldots + f(x_k)\delta_{x_k}$, ou seja, $f \in V(X)$ pode ser escrito como combinação linear de elementos do conjunto $\{\delta_x\}_{x \in X}$.

Agora vamos mostrar que $\{\delta_x\}_{x \in X}$ é linearmente independente. Para isso suponha que $\alpha_1\delta_{x_1} + \alpha_2\delta_{x_2} + \ldots + \alpha_k\delta_{x_k} = 0$. Aplicando em $x_i \in X, i = 1, \ldots, k$ temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_1\delta_{x_1} + \alpha_2\delta_{x_2} + \ldots + \alpha_k\delta_{x_k})(x_i) \\ &= \alpha_1\delta_{x_1}(x_i) + \alpha_2\delta_{x_2}(x_i) + \ldots + \alpha_k\delta_k(x_i) \\ &= \alpha_i\delta_{x_i}(x_i) \\ &= \alpha_i \end{aligned}$$

Assim, $\alpha_i = 0, i = 1, \ldots, k$. Portanto, $\{\delta_x\}_{x \in X}$ é linearmente independente. ■

Seja $\mathbb{K}$ um corpo e considere $G$ um grupo não vazio. Como foi feito acima considere o espaço vetorial $V(G)$ (podemos fazer isso, pois em particular $G$ é um conjunto não vazio). Queremos dar uma estrutura de multiplicação para $V(G)$ e transformá-lo em um álgebra sobre $\mathbb{K}$. Dados $a,b \in V(G)$, seja $a \cdot b : G \to \mathbb{K}$ a função dada por:

$$(a \cdot b)(g) = \sum_{hk=g} a(h)b(k), \forall g \in G \tag{4.1}$$

Note que se $hk = g$ então $k = h^{-1}g$ e, portanto, podemos escrever

$$(a \cdot b)(g) = \sum_{h \in G} a(h)b(h^{-1}g) \tag{4.2}$$

Denotamos a operação acima por *produto de convolução*. Vamos provar que a operação acima está bem definida, ou seja, dados $a,b \in V(G)$ então $a \cdot b \in V(G)$. Para isso basta mostrar que $a \cdot b$ possui suporte finito.

Primeiro note que $a(h)$ é não nulo apenas para uma quantidade finita de $h \in G$, logo a soma acima possui apenas uma quantidade finita de termos não nulos, estando deste modo bem definida. Agora vamos mostrar que $a \cdot b$ tem suporte finito. Note que para termos $(a \cdot b)(g) \neq 0$ é preciso pelo menos um termo de $a(h)b(k)$, com $hk = g$, seja não nulo **(I)**.

Como $\mathbb{K}$ é corpo temos que $a(h)b(k) \neq 0$ se, e somente se, $a(h) \neq 0$ e $b(k) \neq 0$. Sabemos que $a$ e $b$ possuem suporte finito, ou seja, $a(h)$ e $b(k)$ são não nulos apenas para uma quantidade finita de $h,k \in G$, e portanto $a(h)b(k)$ é não nulo apenas para uma quantidade finita de $h,k \in G$. Seja $A = \{hk | h,k \in G \text{ e } a(h)b(k) \neq 0\}$. Por tudo que foi dito anteriormente $A$ é um conjunto finito, e **(I)** garante que supp $(a \cdot b) \subset A$, assim $a \cdot b$ tem suporte finito.

Agora vamos mostrar que a multiplicação definida em (4.2) satisfaz os ítens da Definição 1.

(i) Dados $a,b,c \in G$ vamos mostrar que $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Para isso, vamos calcular o valor de $a \cdot (b+c)$ em $g \in G$ qualquer:

$$\begin{aligned}
(a \cdot (b+c))(g) &= \sum_{h \in G} a(h)(b+c)(h^{-1}g) \\
&= \sum_{h \in G} a(h)b(h^{-1}g) + \sum_{h \in G} a(h)c(h^{-1}g) \\
&= (a \cdot b)(g) + (a \cdot c)(g)
\end{aligned}$$

Provando o que queríamos.

(ii) Dados $a, b, c \in G$ vamos mostrar que $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. Para isso, vamos calcular o valor de $(a+b)\cdot c$ em $g \in G$ qualquer:

$$\begin{aligned}((a+b)\cdot c)(g) &= \sum_{h\in G}(a+b)(h)c(h^{-1}g)\\ &= \sum_{h\in G}a(h)c(h^{-1}g)+\sum_{h\in G}b(h)c(h^{-1}g)\\ &= (a\cdot c)(g)+(b\cdot c)(g)\end{aligned}$$

Provando o que queríamos.

(iii) Dados $a, b, c \in G$ vamos mostrar que $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$. Para isso, vamos calcular o valor de $(a\cdot b)\cdot c$ em $g \in G$ qualquer:
$[(a\cdot b)\cdot c](g) = \sum_{h\in G}(a\cdot b)(h)c(h^{-1}g) = \sum_{h\in G}(\sum_{l\in G}a(l)b(l^{-1}h))c(h^{-1}g)$ (I)
Seja $k = l^{-1}h$, então $h^{-1} = k^{-1}l^{-1}$. A função $G \to G$, $h \mapsto l^{-1}h$, é bijetora, logo como $h$ percorre todos os elementos de $G$ na soma, $k = l^{-1}h$ também o faz. Assim, por (I), temos:

$$\begin{aligned}[(a\cdot b)\cdot c](g) &= \sum_{k\in G}(\sum_{l\in G}a(l)b(k))c((k^{-1}l^{-1})g)\\ &= \sum_{l\in G}a(l)(\sum_{k\in G}b(k)c(k^{-1}(l^{-1}g)))\\ &= \sum_{l\in G}a(l)[(b\cdot c)(l^{-1}g)]\\ &= [a\cdot(b\cdot c)](g)\end{aligned}$$

Assim, $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

(iv) Dados $a, b \in G$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ vamos mostrar que $(\alpha a)\cdot b = \alpha(a\cdot b) = a\cdot(\alpha b)$. Tome $g \in G$ qualquer:

$$\begin{aligned}[(\alpha a)\cdot b](g) &= \sum_{h\in G}(\alpha a)(h)b(h^{-1}g)\\ &= \sum_{h\in G}\alpha a(h)b(h^{-1}g)\\ &= \alpha\sum_{h\in G}a(h)b(h^{-1}g)\\ &= \alpha(a\cdot b)(g)\end{aligned}$$

Também temos que:

$$\begin{aligned}
[(\alpha a)\cdot b](g) &= \sum_{h\in G}(\alpha a)(h)b(h^{-1}g)\\
&= \sum_{h\in G}\alpha a(h)b(h^{-1}g)\\
&= \sum_{h\in G}a(h)\alpha b(h^{-1}g)\\
&= \sum_{h\in G}a(h)(\alpha b)(h^{-1}g)\\
&= [a\cdot(\alpha b)](g)
\end{aligned}$$

Como queríamos.

Portanto, o produto de convolução satisfaz os ítens da Definição 1. Logo, $V(G)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ em que a operação do grupo $G$ é muito importante.

**Definição 43.** Seja $G$ um grupo. A *álgebra do grupo $G$ sobre $\mathbb{K}$* é o espaço vetorial $V(G)$ munido do produto de convolução definido em (4.2), e denotado por $\mathbb{K}G$.

Vamos mostrar agora que dados $\delta_g, \delta_h \in V(G)$ temos $\delta_g \cdot \delta_h = \delta_{gh}$. Para isso dado $k \in G$ temos:

$$(\delta_g\cdot\delta_h)(k) = \sum_{l\in G}\delta_g(l)\delta_h(l^{-1}k) = \delta_g(g)\delta_h(g^{-1}k) = \delta_h(g^{-1}k)$$

Agora,

$$\delta_h(g^{-1}k) = \begin{cases} 1, \text{ se } g^{-1}k = h \\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ se } k = hg \\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases} = \delta_{gh}(k)$$

Provado isso podemos caracterizar o produto de convolução definido em (4.1) de outra forma: dados $a,b \in \mathbb{K}G$ com $a = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{g_i}$ e $b = \sum_{j=1}^{m}\beta_j\delta_{h_j}$, temos

$$a\cdot b = (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{g_i})\cdot(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\delta_{h_j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j\delta_{g_ih_j} \tag{4.3}$$

**Exemplo 44.** Considere $G$ um grupo com apenas o elemento neutro e $\mathbb{K}$ um corpo. Vejamos quem é a álgebra do grupo $G$.

O espaço vetorial associado a esse grupo, $V(G) = \{\alpha\delta_e | \alpha \in \mathbb{K}\}$, possui apenas um elemento na sua base canônica a saber $\delta_e$. Podemos construir a álgebra do grupo $G$. Agora, dados $f, g \in \mathbb{K}G$, temos:

$f \cdot g = (\alpha\delta_e) \cdot (\beta\delta_e) = (\alpha\beta)\delta_{e*e} = (\alpha\beta)\delta_e$

Note que a multiplicação da álgebra do grupo $G$ se comporta como a multiplicação em $\mathbb{K}$.

Vamos mostrar que $\mathbb{K}G \cong \mathbb{K}$. Lembre que uma transformação linear entre espaços vetoriais está bem definida quando sabemos os seus valores numa base fixada do domínio. Considere a seguinte transformação linear: $\gamma : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$ determinada por $\delta_e \mapsto 1$. Note que $\gamma$ manda a base do espaço vetorial $\mathbb{K}G$ na base do espaço vetorial $\mathbb{K}$. A transformação linear $\gamma$ é bijetora, pois manda base em base. Portanto, é um homomorfismo bijetor entre espaços vetoriais. Precisamos verificar que $\gamma$ é um homomorfismo entre álgebras. Pela Definição 15 precisamos apenas mostrar que $\gamma$ satisfaz o item (iii). Sejam $f, g \in \mathbb{K}G$, assim:

$\gamma(f \cdot g) = \gamma((\alpha\beta)\delta_e) = \alpha\beta = \gamma(\alpha\delta_e) \cdot \gamma(\beta\delta_e) = \gamma(f) \cdot \gamma(g)$

Logo, $\gamma$ é um homomorfismo entre álgebras. Como $\gamma$ é um homomorfismo bijetor entre álgebras segue que $\mathbb{K}G \cong \mathbb{K}$.

**Exemplo 45.** Considere $G = (\mathbb{Z}_2, +)$ e o corpo $\mathbb{C}$. Vamos verificar como se comporta a multiplicação de elementos da álgebra associada ao grupo $G$.

Lembre que $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. O espaço vetorial associado à esse grupo, $V(\mathbb{Z}_2) = \{\alpha\delta_{\overline{0}} + \beta\delta_{\overline{1}}\}$, possui dois elementos na sua base canônica a saber $\delta_{\overline{0}}$ e $\delta_{\overline{1}}$. Agora, dados $f, g \in \mathbb{K}G$, temos:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (\alpha_1\delta_{\overline{0}} + \beta_1\delta_{\overline{1}}) \cdot (\alpha_2\delta_{\overline{0}} + \beta_2\delta_{\overline{1}}) \\ &= \alpha_1\alpha_2\delta_{\overline{0+0}} + \alpha_1\beta_2\delta_{\overline{0+1}} + \beta_1\alpha_2\delta_{\overline{1+0}} + \beta_1\beta_2\delta_{\overline{1+1}} \\ &= \alpha_1\alpha_2\delta_{\overline{0}} + \alpha_1\beta_2\delta_{\overline{1}} + \beta_1\alpha_2\delta_{\overline{1}} + \beta_1\beta_2\delta_{\overline{0}} \\ &= (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\delta_{\overline{0}} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\delta_{\overline{1}} \end{aligned}$$

Analogamente podemos estender o que fizemos acima para $\mathbb{Z}_n$.

Note que a operação no grupo for comutativa então a multiplicação na álgebra também será. Mais ainda, vamos provar o seguinte:

**Proposição 46.** Seja $G$ um grupo finito e $\mathbb{K}$ um corpo. Então $G$ é abeliano se, e somente se, $\mathbb{K}G$ é comutativa.

***Demonstração:***

($\Rightarrow$) Vamos provar que se $G$ é um grupo abeliano então $\mathbb{K}G$ é uma álgebra comutativa. Sejam $a, b \in \mathbb{K}G$. Fixe $g \in G$. Agora, temos que:

$$(a\cdot b)(g) = \sum_{hk=g} a(h)b(k) = \sum_{hk=g} b(k)a(h) = \sum_{kh=g} b(k)a(h) = (b\cdot a)(g)$$

Note que na segunda igualdade usamos o fato de que $\mathbb{K}$ é comutativo e na terceira igualdade usamos a hipótese. Portanto, $\mathbb{K}G$ é comutativa.

($\Leftarrow$) Vamos provar que se a álgebra $\mathbb{K}G$ é comutativa então o grupo $G$ é abeliano. Dados $g,h \in G$ como $\mathbb{K}G$ é comutativa, temos:

$$\delta_g \cdot \delta_h = \delta_h \cdot \delta_g \to \delta_{gh} = \delta_{hg}$$

Perceba que $\delta_{gh} \neq 0$ somente em $gh$ e $\delta_{hg} \neq 0$ somente em $hg$. Portanto, $gh = hg$ e assim $G$ é um grupo abeliano. ■

**Observação 47.** Note que em (4.1) em nenhum momento foi preciso utilizar o fato de que todo elemento de $G$ possui um inverso, ou seja, para definir a álgebra de grupo podemos utilizar o grupo $G$ visto como um *semigrupo*. Assim, pode-se igualmente definir a *álgebra de um semigrupo*.

**Definição 48.** Um semigrupo $S$ é um par $(S,*)$ em que $S$ é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária associativa.

**Exemplo 49.** Seja $(\mathbb{N},+)$ o conjunto dos números naturais e a soma usual. Sabemos que a soma de números naturais é associativa. Portanto, $(\mathbb{N},+)$ é um semigrupo.

**Exemplo 50.** Se $(G,*)$ é um grupo então $(G,*)$ é um semigrupo.

Como $G$ é um grupo então $G \neq \emptyset$ e a operação do grupo, em particular, é associativa. Portanto, $(G,*)$ é um semigrupo.

**Definição 51.** Seja $S$ um semigrupo e $\mathbb{K}$ um corpo. A álgebra do semigrupo $S$, denotada por $\mathbb{K}S$, é o espaço vetorial $V(S)$ munido da operação de multiplicação definida em (4.1).

**Exemplo 52.** Seja o semigrupo dos números naturais com a operação de soma $(\mathbb{N},+)$. Vamos verificar como se comporta a multiplicação de elementos da álgebra do semigrupo $\mathbb{K}\mathbb{N}$.

Dados $f,g \in \mathbb{K}\mathbb{N}$, por (4.3), temos:

$$f\cdot g = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{s_i}) \cdot (\sum_{j=1}^{m} \beta_i \delta_{s_j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \delta_{s_i+s_j}$$

**Observação 53.** Note que quando fizemos a multiplicação dos elementos de $\mathbb{K}\mathbb{N}$, os coeficientes $\alpha_i$ se multiplicavam e os índices dos $\delta_i$ eram somados(a operação do semigrupo é a soma). O mesmo ocorre quando multiplicamos polinômios de uma variável e coeficientes num dado

corpo $\mathbb{K}$. Por exemplo, considere os polinômios $3x^3+2x^2$ e $5x^4+4x$ e façamos a multiplicação entre eles:
$(3x^3+2x^2)(5x^4+4x) = (3.5)x^{3+4}+(3.4)x^{3+1}+(2.5)x^{2+4}+(2.4)x^{2+1} = 15x^7+12x^4+10x^6+$
$+8x^3$

Sendo assim podemos nos fazer a seguinte pergunta: será que $\mathbb{KN}$ do Exemplo 52 e o conjunto dos polinômios de uma variável e coeficientes num dado corpo $\mathbb{K}$ do Exemplo 10, são isomorfos?

**Teorema 54.** Seja $\mathbb{KN}$ a álgebra do semigrupo $\mathbb{N}$ e $P(\mathbb{K})$ a álgebra dos polinômios em uma variável com coeficientes em $\mathbb{K}$. Então $\mathbb{KN} \cong P(\mathbb{K})$.

***Demonstração:*** Primeiramente lembremos que uma transformação linear entre espaços vetoriais está bem definida quando sabemos os seus valores numa base fixada do domínio. A transformação linear $\gamma : P(\mathbb{K}) \to \mathbb{KN}$ determinada por $x^n \mapsto \delta_n$ manda a base do espaço vetorial dos polinômios na base do espaço vetorial do semigrupo $\mathbb{N}$. A transformação linear $\gamma$ é bijetora, pois manda base em base. Portanto, é um homomorfismo bijetor entre espaços vetoriais. Falta porém mostrar que tal função é um homomorfismo entre álgebras. Pela Definição 15 precisamos mostrar apenas que $\gamma$ satisfaz o item (iii). Tome $p,q \in P(\mathbb{K})$ e vefiquemos que $\gamma(p\cdot q) = \gamma(p)\cdot\gamma(q)$. Lembrando que $p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ e $q = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\gamma(p\cdot q) &= \gamma[(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i)(\sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j)] \\
&= \gamma(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i\beta_j x^i x^j) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i\beta_j \gamma(x^{i+j}) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i\beta_j \delta_{i+j} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i\beta_j \delta_i\delta_j \\
&= (\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\delta_i)\cdot(\sum_{j=0}^{n} \beta_j\delta_j) \\
&= \gamma(p)\cdot\gamma(q)
\end{aligned}
$$

Portanto, $\gamma$ é um homomorfismo entre álgebras. Como $\gamma$ é um homomorfismo bijetor entre álgebras, segue que $P(\mathbb{K}) \cong \mathbb{KN}$. ∎

# 5 Considerações Finais

Este trabalho foi realizado durante o ano de 2013 e podemos fazer alguns comentários quanto ao conteúdo que foi desenvolvido. Estudar álgebras é um primeiro passo em direção à um estudo de *-álgebras e $C^*$-álgebras. O presente trabalho não tem um final, uma vez que podemos nos fazer a seguinte pergunta: será que a partir de um grupo podemos criar a $C^*$-álgebra do grupo?

Com relação ao que foi feito, pode-se dizer que foi muito gratificante e prazeroso, pois o objeto de estudo deste trabalho nada mais foi do que combinar a Teoria de Anéis, Grupos e Espaços Vetoriais que vimos durante o curso de Matemática. Uma grande dificuldade no início deste trabalho foi a de conseguir expressar melhor as minhas ideias e deixá-las bem claras e precisas. Foi possível perceber que esta não é uma tarefa fácil e por isso treinar é fundamental. Contudo, com o trabalho terminado, percebemos o quanto foi aprendido durante essa longa caminhada e almejar um futuro com mais conquistas através de muito esforço e dedicação.

# *Referências*

[1] AXLER, Sheldon. **Linear algebra done right**. 2. ed. New York: Springer, 1997. 251p.

[2] DOMINGUES, Hygino H. (Hygino Hugueros); IEZZI, Gelson. **Algebra moderna**. 4. ed. São Paulo (SP): Atual, 2003. 368p.

[3] DUMMIT, David S.; FOOTE, Richard M. **Abstract algebra**. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2004. xii, 932 p.

[4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de calculo** vol.1. 4. ed. Rio de Janeiro (RJ) Livros Tecnicos e Cientificos, 2000. v.

[5] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray Alden. **Algebra linear**. São Paulo (SP): Poligono, 1971. xii, 354p.

[6] LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**: Resumo da Teoria 600 problemas resolvidos 524 propostos. Rio de Janeiro: Mc Graw-hill, 1971. 403 p. (Coleção Schaum). Traduzido por Roberto Ribeiro Baldino.