UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO LIVRO DE JULIUS PETERSEN, ENVOLVENDO A TRANSFORMAÇÃO TRANSLAÇÃO

Diva Cristiane Nascimento Pereira

Orientador Prof. Me. José Luiz Rosas Pinho

FLORIANÓPOLIS

2012

DIVA CRISTIANE NASCIMENTO PEREIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO LIVRO DE JULIUS PETERSEN ENVOLVENDO A TRANSFORMAÇÃO TRANSLAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Professor Me. José Luiz Rosas Pinho

FLORIANÓPOLIS

2012

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n°35/CCM/2012

Prof. Nereu Estanislau Burin

Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. José Luiz Rosas Pinho

Orientador

Prof. Nereu Estanislau Burin

Prof. Antônio Vladimir Martins

“Ou os estudantes se identificam com o povo, com ele sofrendo a mesma luta, ou se dissociam do seu povo, e nesse caso, serão aliados daqueles que exploram o povo”

Florestan Fernandes

Sumário

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

Neste trabalho veremos algumas resoluções de exercícios do livro Construções Geométricas de Julius Petersen, escrito originalmente em 1866 e muito conceituado na área de construções geométricas.

Uma das motivações para a escolha do livro se dá ao fato deste apresentar uma rica variedade de problemas.

Ainda no TCC1 pretendia-se resolver todos os exercícios de transformação geométrica do livro de Petersen, porém, com o desenrolar dos estudos foi visto que este trabalho seria inviável tratando-se do seu tamanho e tempo disponível para sua conclusão. Desta forma, o foco do trabalho se dá na resolução de problemas através da transformação geométrica translação. Escolhemos aqui 35 problemas de translação abordados no livro. Alguns desses problemas estão acompanhados, no livro, de sugestões, por vezes um tanto confusas, para sua resolução.

Optamos por trabalhar a translação sem citar o termo vetor, de maneira a tornar mais simples o estudo, podendo assim ser mais bem compreendido em séries que ainda não tenham passado por essa definição.

Este trabalho tem como fim auxiliar no estudo de construções geométricas e quando possível, fará isto através das estruturas de Petersen, que anunciaremos como teoremas. Suas demonstrações aparecerão no segundo capítulo deste trabalho.

Neste trabalho serão mantidas as numerações e enunciados originais dos problemas do livro de Julius Petersen. Quando considerado necessário, faremos uma observação para melhor compreensão de determinados enunciados.

1.2 Uma pequena biografia de Julius Petersen

Julius Peter Christian Petersen, nasceu no domingo, 16 Junho 1839 na cidade de Soro, Dinamarca, filho de Anna Cathrina Pertersen e Jens Petersen.

Já em 1849 Petersen demonstrava interesse pela matemática. Era apaixonado por resoluções de problemas e passou um bom tempo tentando resolver o problema clássico da trissecção de um ângulo com régua e compasso. Em 1854, devido à condição financeira desfavorável da família deixou a escola e foi trabalhar com um tio como ajudante de mercearia. Cerca de um ano depois, seu tio morreu e lhe deixou algum dinheiro. Com isso ele retornou à escola e, em 1856, entrou na faculdade de tecnologia em Copenhague. Sua primeira publicação ocorreu dois anos depois, quando publicou um texto sobre logaritmos.

De 1859 a 1871 lecionou em uma escola particular de prestigio. Em 1862 foi admitido através de exame na Universidade de Copenhague e começou seus estudos de matemática. No mesmo ano casou-se com Kirstine Bertelsen. Tiveram dois filhos e uma filha.

Petersen era considerado, na escola, um bom professor, embora se sentisse incapaz de controlar seus alunos. Em 1866 ele obteve o grau de Mestre em Matemática e permaneceu na universidade para estudar para seu doutorado. Em 1867 foi premiado com medalha de ouro por seu tratado sobre equilíbrio de corpos flutuantes. Concluiu o doutorado em 1871 e o titulo de sua tese foi “Sobre equações que podem ser resolvidas por raízes quadradas, com aplicação às soluções de problemas com régua e compasso”.

Ainda em 1871, Petersen foi contratado como professor auxiliar na Faculdade de Tecnologia em Copenhagen. Em 1877 foi nomeado professor de matemática na Universidade de Copenhague e continuou nesse cargo ao longo de sua carreira.

No período de 1881 a 1887 também lecionou na Escola de Oficiais do Exército.

Escreveu diversos textos pré-universitários e universitários que alcançaram reconhecimento internacional.

Em 1866 publicou “Métodos e teorias para solução de problemas de construção geométrica” que teve várias edições e traduções para outros idiomas. O objetivo desse trabalho é tornar sistemática a resolução de problemas geométricos, sendo essas sempre feitas com o uso de régua e compasso.

Em 1871 começou o trabalho sobre economia e em 1874 publicou suas próprias ideias sobre o assunto. Em seguida, repentinamente, mudou o foco dos estudos para Criptografia. Em 1875 publicou um texto sobre criptografia.

Em 1877 publicou “A teoria das equações algébricas”.

Petersen foi membro fundador da Sociedade Matemática Dinamarquesa, que passou a existir a partir de 1873.

Em 1891 escreveu um artigo, considerado seu trabalho mais importante, “Die Theorie der regulären Graphs”, A Teoria dos Grafos Regulares, que marca o nascimento da teoria dos grafos.

Em 1887 foi nomeado membro da Comissão de Educação para as Escolas no âmbito do Ministério da Educação.

No período de 1888 a 1909 trabalhou na área de teoria de funções e teoria dos números.

Julius Petersen faleceu no dia 5 agosto de 1910 em Copenhague.

1.3 Notações

Ponto: É representado por uma letra maiúscula, por vezes aparecerá com apóstrofo. Exemplos: C, A', K', etc.

Segmento: É representado por dois pontos, que são os pontos de suas extremidades. Exemplos: AB, D'C, etc.

Reta: É representada por uma letra minúscula ou dois de seus pontos. Exemplos: s, t, A'C, etc.

Semirreta: É representada por dois de seus pontos cujo primeiro ponto que aparece é sua origem. Exemplo: AD é a semirreta de origem A e passando pelo ponto D.

Ângulo: É representado pelo símbolo $\angle$ e três pontos, de modo que o segundo dos três pontos é o vértice do ângulo. Quando o ângulo estiver bem definido, este pode aparecer com o símbolo $\angle$ e o ponto do vértice. Exemplo: $\angle$AOB, $\angle$CDE', $\angle$E etc.

Circunferência: É representada pelo ponto que é seu centro e pelo seu raio, de maneira que estes aparecem entre parênteses e separados por uma vírgula. O ponto antes da vírgula é o centro da circunferência. Exemplo: (O, BD) é a circunferência de centro O e raio BD.

Polígono: É representado pelos pontos de seus vértices, ordenadamente. Exemplo: O polígono ABCD é o quadrilátero cujos vértices são os pontos A, B, C e D, nessa ordem.

Área de um polígono: É representada pela letra maiúscula A e em seu índice aparece a notação do polígono referente. Exemplos: $\mathbf{A_{ABCD}}$ é a área do quadrilátero ABCD, $\mathbf{A_{CEF}}$ é a área do triangulo CEF, etc.

2 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

2.1 Definições

Translação: Uma translação no plano (ou no espaço), segundo um vetor $\vec{u}$, é uma transformação no plano (ou no espaço) que leva cada ponto P do plano (ou do espaço) em um ponto P' de modo que $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$.

Arco-capaz de um ângulo α com relação a um segmento: É um arco de circunferência que passa pelas extremidades dos segmentos de modo que o ângulo inscrito com vértice nesse arco tem medida α.

Pontos colineares: Três ou mais pontos, no plano, são ditos colineares, se a reta que passa por quaisquer dois deles, passa pelos outros.

Ângulo suplementar: Um ângulo α é suplementar de um ângulo β se $\alpha + \beta = 180°$. Neste caso β também é dito suplemento de α.

Ângulo complementar: Um ângulo α é complementar de um ângulo β se $\alpha + \beta = 90°$. Neste caso β também é dito complemento de α.

Tangência entre retas e circunferências: Duas circunferências ou uma reta e uma circunferência são ditas tangentes se elas compartilham um único ponto.

Polígono inscrito em uma circunferência: Um polígono é dito inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices pertencem a esta circunferência.

Segmentos congruentes: Dois ou mais segmentos são ditos congruentes se eles possuem a mesma medida.

Ângulos congruentes: Dois ou mais ângulos são ditos congruentes se eles possuem a mesma medida.

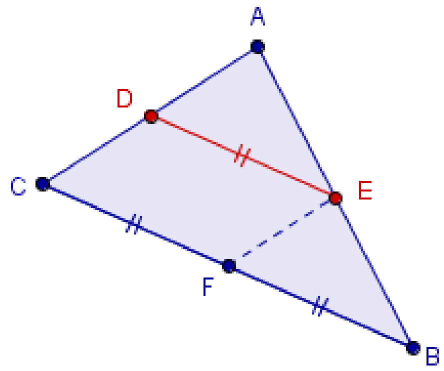
Semelhança de triângulos: Dois triângulos são ditos semelhantes se existir uma correspondência biunívoca entre seus respectivos vértices, de modo que, ângulos de vértices correspondentes são congruentes, e lados cujas extremidades são vértices respectivamente correspondentes são proporcionais.

Congruência de triângulos: Dois triângulos são ditos congruentes se existir uma correspondência biunívoca entre seus respectivos vértices, de modo que, ângulos de vértices correspondentes são congruentes, e lados cujas extremidades são vértices respectivamente correspondentes são congruentes.

2.2 *Teoremas básicos*

<u>Teorema da base média de triângulos</u>:

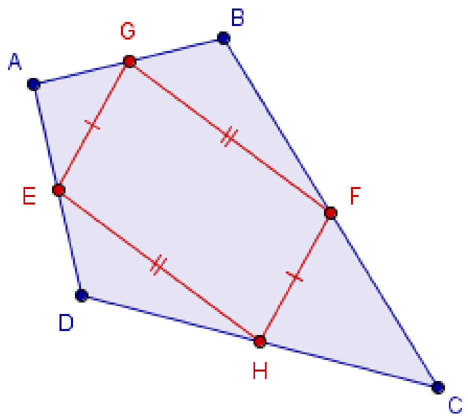
O segmento que une dois pontos médios dos lados de um triângulo é uma base média desse triângulo. A base média de um triângulo é paralela à base correspondente desse triângulo, e sua medida é igual à metade da medida daquela base.



Na figura acima, os pontos D e E são pontos médios dos segmentos AC e AB, respectivamente.

<u>Teorema de Varignon</u>:

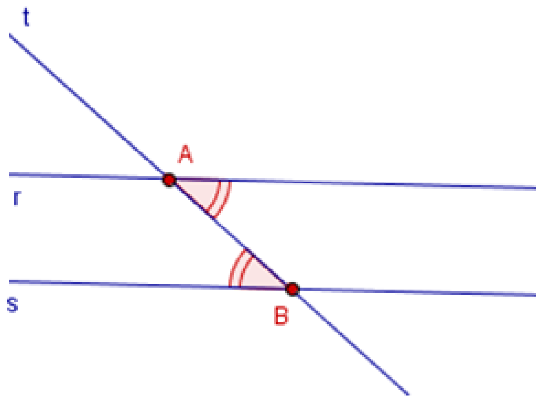
O polígono cujos vértices são os pontos médios de qualquer quadrilátero é sempre um paralelogramo de lados paralelos às suas diagonais, e a área desse paralelogramo é igual à metade da área do quadrilátero.



Na figura acima, os pontos E, G, F e H são pontos médios dos segmentos DA, AB, BC e CD, respectivamente.

Teorema das paralelas:

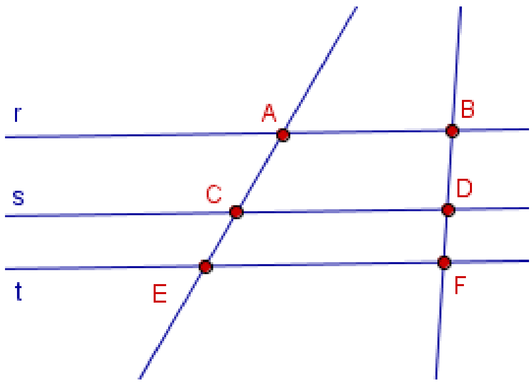
Duas retas são paralelas se, e somente se, os ângulos alternos internos (ou os ângulos correspondentes), obtidos pela intersecção dessas retas com uma reta transversal, forem congruentes.



Na figura acima, as retas r e s são paralelas.

Teorema de Tales:

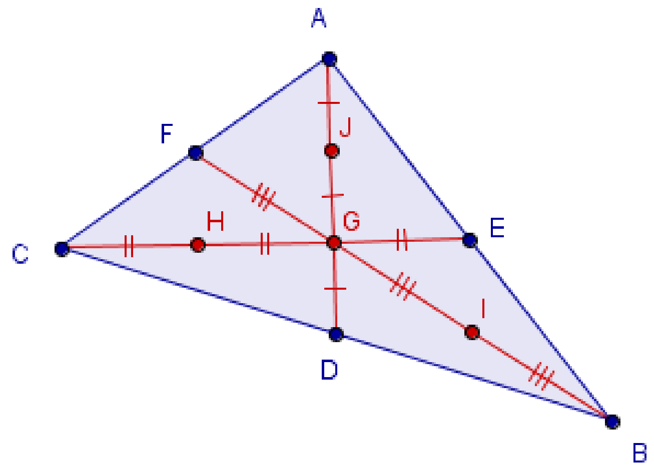
Retas paralelas cortadas por retas transversais formam, nessas transversais, segmentos respectivamente proporcionais.



Na figura acima, as retas r, s e t são paralelas.

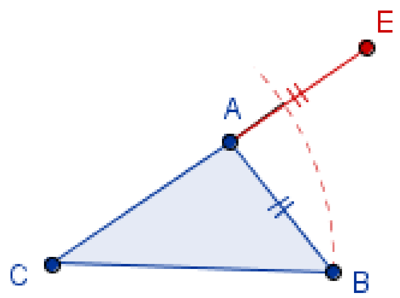
Teorema das medianas:

As três medianas de um triângulo qualquer intersectam-se num mesmo ponto (baricentro) que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.



Na figura acima, o ponto G é o baricentro do triângulo ABC.

<u>Teorema da desigualdade triangular</u>: Em todo triângulo a medida de qualquer lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

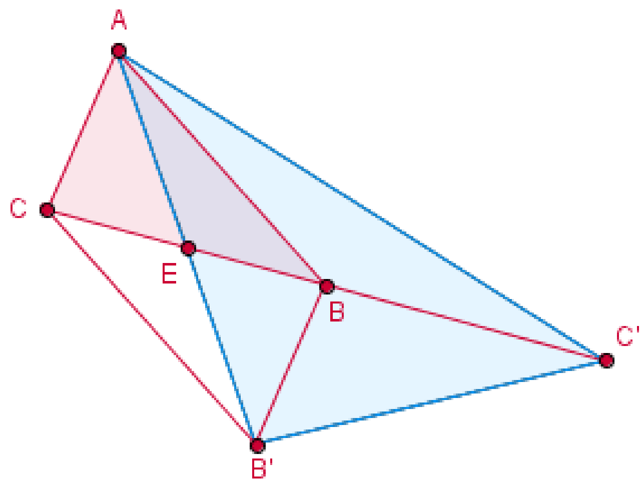


Na figura acima os pontos C, A e E são colineares.

2.3 *Estruturas de Petersen envolvendo translação*

Os teoremas que se seguem são apresentados no livro de Petersen e por ele sugeridos para a resolução dos problemas de construção de triângulos e quadriláteros que envolvem translação.

Teorema 1: Seja ABC um triângulo qualquer. Considere o transladado CB' do lado AB tal que o ponto A caia no ponto C, e considere o ponto C' de modo que B esteja entre C e C', e tal que BC'=BC.



Então:

I) As medidas dos lados do triângulo AB'C' são respectivamente iguais ao dobro das medidas das medianas do triângulo ABC.

II) O ponto B é o baricentro do triângulo AB'C'.

III) As distâncias do ponto B a cada um dos vértices do triângulo AB'C' são iguais, respectivamente, às medidas dos lados do triângulo ABC.

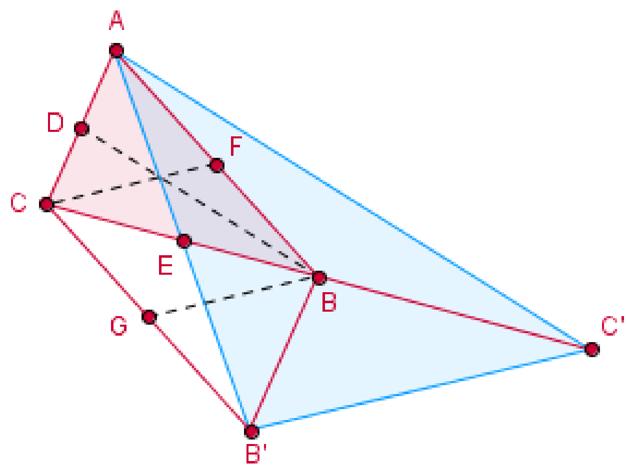
IV) Os ângulos ∠B'BC', ∠C'BA e ∠ABB' são congruentes, respectivamente, aos ângulos externos relativos aos ângulos internos ∠C, ∠B e ∠A do triângulo ABC.

V) Cada um dos triângulos BB'C', BC'A e BAB' possui duas alturas congruentes a duas alturas do triângulo ABC.

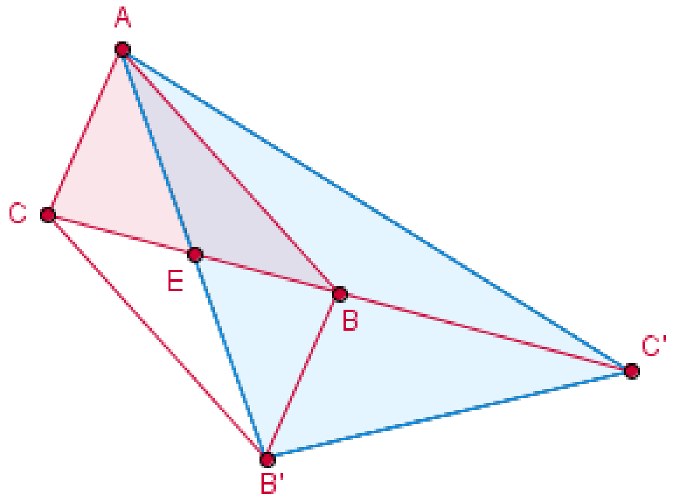
VI) As áreas dos triângulos BB'C', BC'A e BAB', são iguais à área do triângulo ABC, e, portanto, valem $\frac{1}{3}$ da área do triângulo AB'C'.

Demonstração:

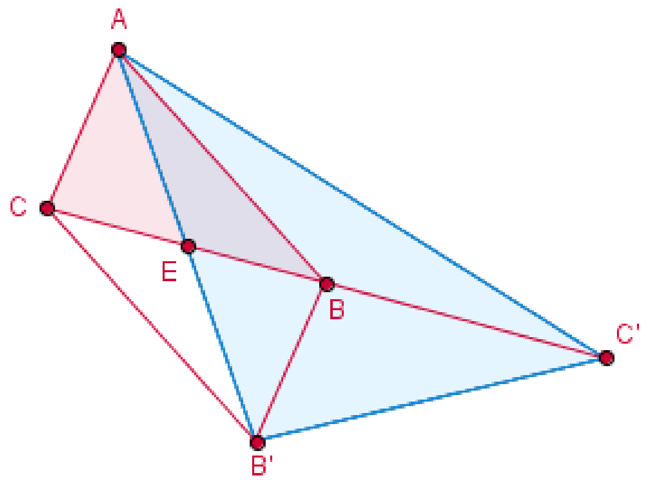
I) Sejam G o ponto médio de CB', CF paralelo a BG com F no segmento AB, e D o ponto médio de AC. Da translação do segmento AB para CB' temos que o quadrilátero ABB'C é um paralelogramo de diagonais AB' e BC cuja intersecção é o ponto E. Portanto E é ponto médio de BC e de AB'. Segue-se que AE é mediana do triângulo ABC e AB'=2 AE. Como D é ponto médio de AC então BD é mediana do triângulo ABC, e como B é ponto médio de CC' pelo teorema da base média aplicado ao triângulo ACC' temos que AC'=2 BD. Aplicando o teorema da base média ao triângulo CB'C' temos que B'C'=2 BG. Do paralelismo de AB e CB', e do paralelismo de CF e BG temos que CFBG é um paralelogramo. Segue-se que CF=BG e $\mathbf{BF} = \mathbf{CG} = \frac{\mathbf{CB'}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{2}}$ e, portanto CF é mediana do triângulo ABC. Além disso, B'C'=2BG=2CF.



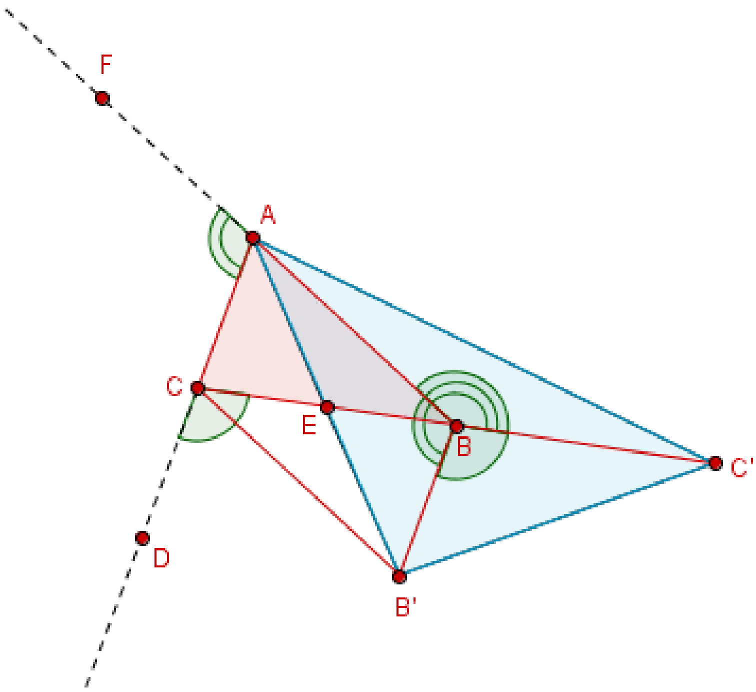
II) Do item (I) e da hipótese temos que C'E é mediana do triângulo AB'C' e $\mathbf{BE} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{BC'}}{\mathbf{2}}$. Segue-se que B é o baricentro do triângulo AB'C'.



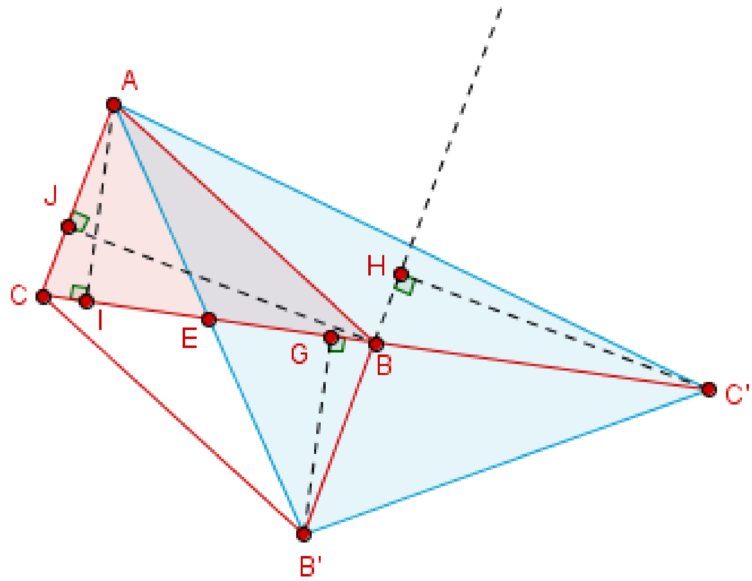
III) Do item (I) e da hipótese temos que BC'=BC e BB'=AC. Portanto as distâncias do ponto B aos vértices do triângulo AB'C' são iguais às medidas dos lados do triângulo ABC.



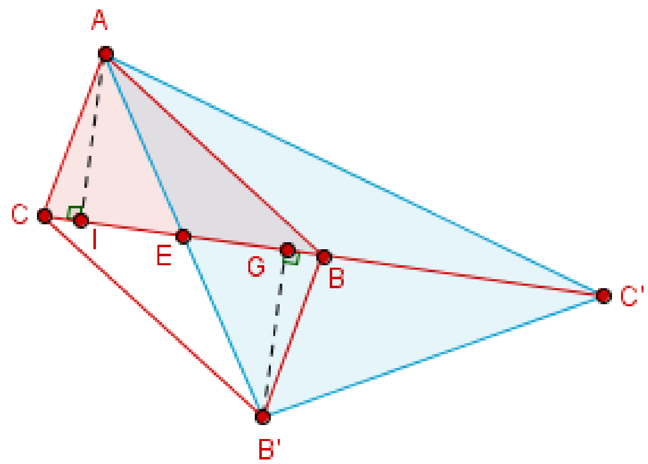
IV) Seja F um ponto da semirreta BA com A entre B e F, e D um ponto da semirreta AC com C entre A e D. O ângulo $\angle$C'BA é ângulo externo relativo ao ângulo interno ∠B do triângulo ABC. Como BB’ e AC são paralelas temos que o ângulo ∠ABB’ é congruente ao ângulo externo ∠CAF relativo ao ângulo interno ∠A do triângulo ABC, e o ângulo ∠B’BC’ é congruente ao ângulo externo∠BCD relativo ao ângulo interno ∠C do triângulo ABC.



V) Sejam BJ e AI as alturas do triângulo ABC com relação aos vértices B e A respectivamente, B’G a altura do triângulo CBB’ com relação ao vértice B’, e C’H a altura do triângulo B’BC’ com relação ao vértice C’. Como AE=EB’ e como os ângulos ∠AEI e ∠B’EG são opostos pelo vértice temos que os triângulos retângulos AIE e B’GE são congruentes. Logo, a altura B’G do triângulo B’BC’ é congruente a altura AI do triângulo ABC. Como CB=BC’ e como os ângulos ∠BCJ e ∠C’BH são congruentes (pois AC e BB’ são paralelas) temos que os triângulos retângulos BCJ e C’BH são congruentes. Logo, a altura C’H do triângulo B’BC’ é congruente a altura BJ do triângulo ABC. Analogamente pode-se provar que os triângulos BC’A e BAB’ possuem duas alturas congruentes a duas alturas do triângulo ABC.



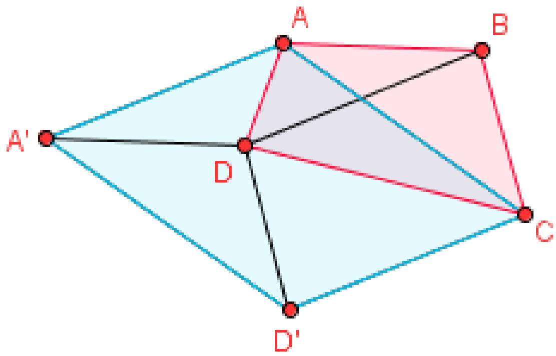
VI) Seja AI a altura do triângulo ABC com relação aos vértices A e B'G a altura do triângulo CBB' com relação ao vértice B'. Do item (v) temos que $A_{\Delta ABC} = \dfrac{CB \cdot AI}{2} = \dfrac{BC' \cdot B'G}{2} = A_{\Delta B'BC'}$. Analogamente pode-se provar que as áreas dos triângulos BC'A e BAB' são iguais à área do triângulo ABC. Portanto cada uma dessas áreas é igual a $\dfrac{1}{3}$ da área do triângulo AB'C'.



■

Obs: Se pudermos construir o triângulo AB’C’ ou qualquer um dos três triângulos com vértice em B, B’BC’, C’BA ou ABB’, conseguiremos obter o triângulo ABC (veja as construções a seguir).

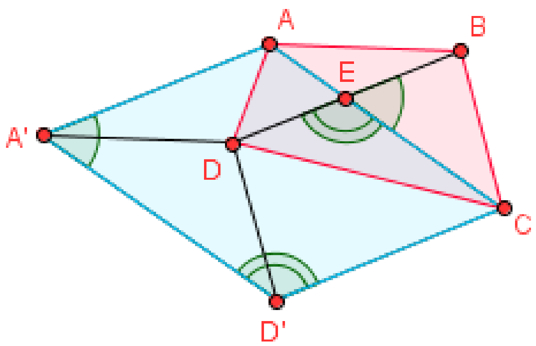
Teorema 2: Seja ABCD um quadrilátero qualquer. Seja CD’ o transladado de BD tal que B caia em C, e seja AA’ o transladado de BD tal que B caia em A. Então:



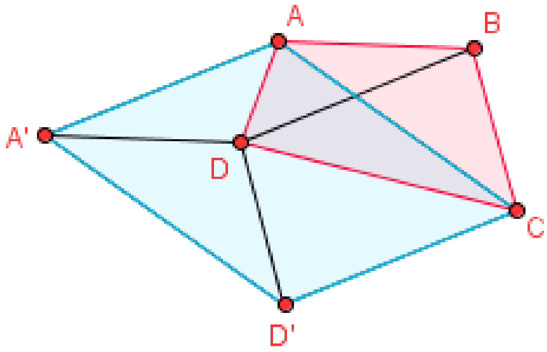
- **I)** ACD’A’ é um paralelogramo cujos lados são respectivamente congruentes e paralelos às diagonais do quadrilátero ABCD, e cujos ângulos são iguais aos ângulos formados por aquelas diagonais.
- **II)** As distâncias do ponto D aos vértices do paralelogramo ACD’A’, DA, DC, DD’ e DA’ são iguais às medidas dos lados DA, DC, BC e AB respectivamente.
- **III)** Os ângulos formados em torno do ponto D, $\angle$ADC, $\angle$CDD’, $\angle$D’DA’ e $\angle$A’DA, são respectivamente congruentes aos ângulos $\angle$ADC, $\angle$BCD, $\angle$CBA e $\angle$BAD do quadrilátero ABCD.
- **IV)** A área do paralelogramo ACD’A’ é o dobro da área do quadrilátero ABCD.
- **V)** As diagonais do paralelogramo ACD’A’ são paralelas aos segmentos que unem os pontos médios dos lados opostos do quadrilátero ABCD e têm medidas iguais ao dobro das medidas desses segmentos.

Demonstração:

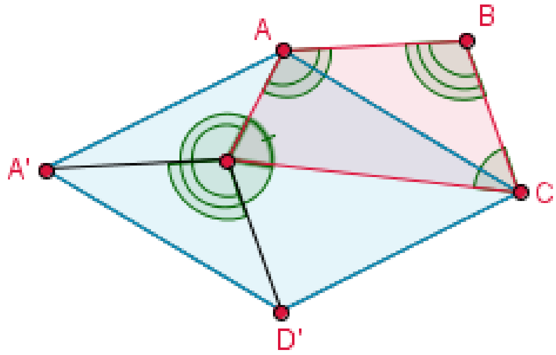
I) Seja E o ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero ABCD. Da translação de BD para CD’ temos que o quadrilátero BCD’D é um paralelogramo e, portanto, CD’ é paralelo a BD, e CD’=BD. Da translação de BD para AA’ temos que o quadrilátero ABDA’ é um paralelogramo e, portanto AA’ é paralelo a BD, e AA’=BD. Segue-se que AA’ é paralelo a CD’ e AA’=CD’. Desta forma, ACD’A’ é um paralelogramo e, portanto, A’D’=AC e seus ângulos opostos são congruentes. Como consequência do paralelismo de AA’ e BD temos que os ângulos ∠A’AC e ∠DEC são congruentes, ou seja, ∠A’D’C e ∠DEC são congruentes. Como consequência do paralelismo de AA’ e BD e de A’D’ e AC temos que os ângulos ∠AA’D’ e ∠BEC são congruentes, ou seja, ∠ACD’ e ∠BEC são congruentes.



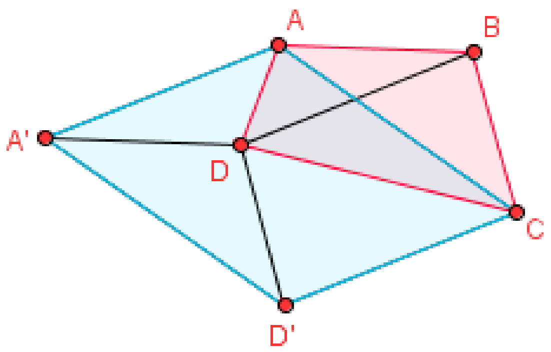
II) As distâncias do ponto D aos vértices A e C do paralelogramo são iguais às medidas dos lados DA e DC do quadrilátero ABCD respectivamente. Do item (i) temos que BCD’D é um paralelogramo e então DD’ = BC. Analogamente obtemos do fato de ABDA’ ser um paralelogramo que DA’= AB.



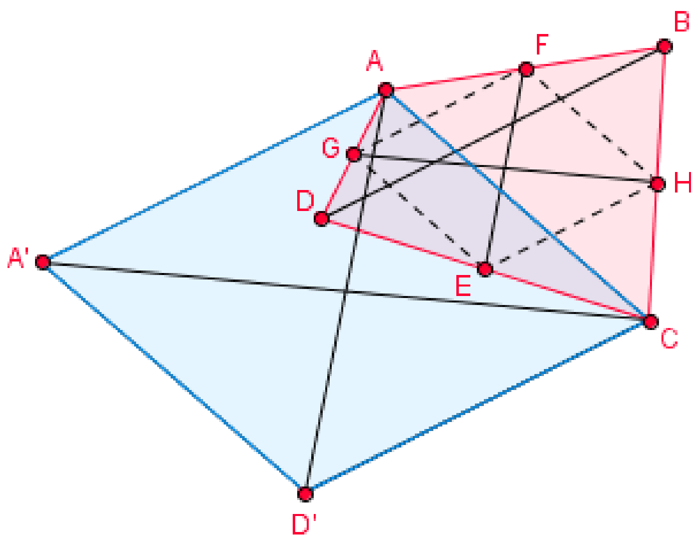
III) O ângulo $\angle$ADC é um dos ângulos do quadrilátero. Os ângulos $\angle$CDD' e $\angle$BCD são congruentes, pois são alternos internos em relação às paralelas DD' e BC. Analogamente, do paralelismo de AB e A'D, os ângulos $\angle$A'DA e $\angle$BAD são congruentes. Das translações realizadas temos que os triângulos D'DA' e CBA são congruentes pelo caso LLL (lado, lado, lado). Segue-se que os ângulos $\angle$D'DA e $\angle$CBA são congruentes.



IV) Do item (iii) os triângulos D'DA' e CBA são congruentes e, portanto, tem a mesma área. Desta forma, $\mathbf{A}_{\mathbf{D'DA}} + \mathbf{A}_{\mathbf{ADC}} = \mathbf{A}_{\mathbf{CBA}} + \mathbf{A}_{\mathbf{ADC}} = \mathbf{A}_{\mathbf{ABCD}}$. Como ABDA' e BCD'D são paralelogramos temos que os triângulos AA'D e DBA são congruentes, e os triângulos BCD e D'DC são congruentes. Portanto $\mathbf{A}_{\mathbf{AA'D}} + \mathbf{A}_{\mathbf{D'DC}} = \mathbf{A}_{\mathbf{DBA}} + \mathbf{A}_{\mathbf{BCD}} = \mathbf{A}_{\mathbf{ABCD}}$. Segue-se que a área do paralelogramo ACD'A' é o dobro da área do quadrilátero ABCD.



V) Sejam os pontos F, E, H e G pontos médios dos segmentos AB, DC, BC e AD, respectivamente. Pelo teorema de Varignon* o quadrilátero FHEG é um paralelogramo cujos lados são, respectivamente, paralelos às diagonais do quadrilátero ABCD e com medidas iguais às metades das medidas das diagonais desse quadrilátero. Segue-se do item (i) que os paralelogramos FHEG e ACD'A' são semelhantes, de lados, respectivamente, paralelos, com razão de semelhança $\frac{1}{2}$. Como conseqüência as medidas das diagonais do paralelogramo ACD'A' são, respectivamente, iguais ao dobro das medidas dos segmentos que unem os pontos médios dos lados opostos do quadrilátero ABCD e aquelas diagonais são, respectivamente, paralelas a esses segmentos.

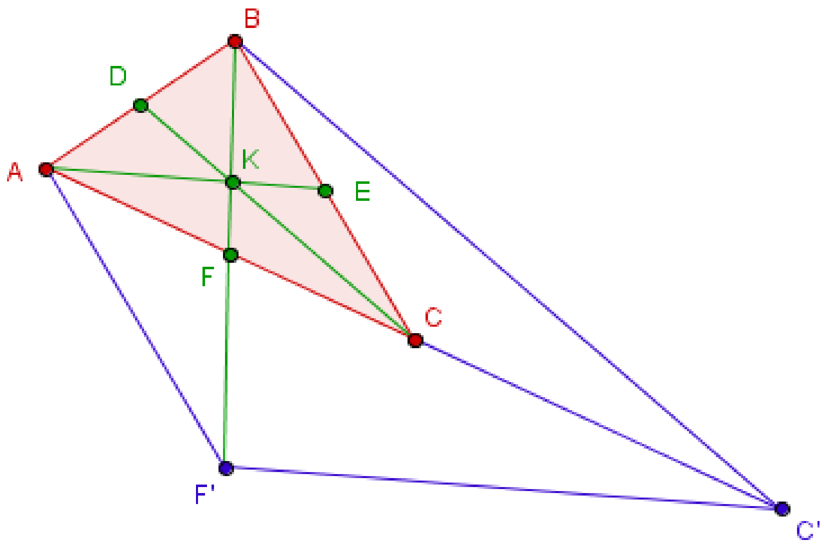


3 RESOLUÇÕES DOS PROBLEMAS

Na análise de cada um dos 35 problemas a seguir optamos por adotar a seguinte convenção: os dados do problema são representados com a cor verde, os elementos que desejamos obter estão em vermelho, e os demais elementos com a cor azul.

246. Construir um triângulo sendo dadas suas medianas.

Análise*:* Seja ABC um triângulo e FB, EA e DC suas medianas. O triângulo BF'C' com F ponto médio de BF' e C ponto médio de AC' é o triângulo cujos lados são o dobro das medianas do triângulo ABC, como mostra o teorema 1 e a figura abaixo.



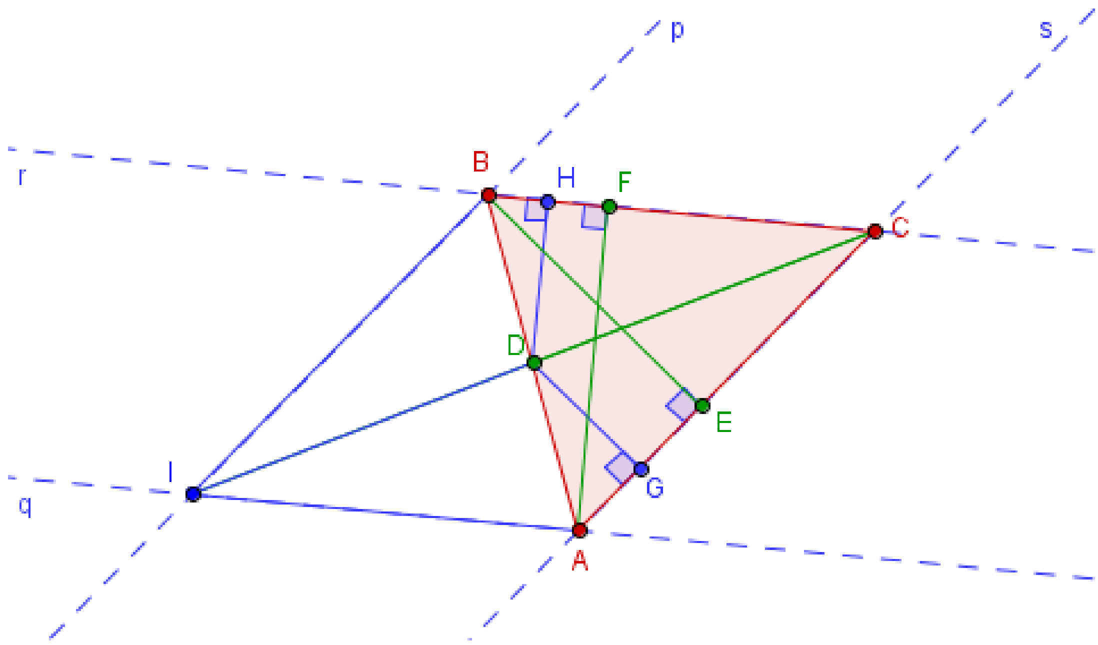
Construção:

1. Sejam AE, BF e CD, as medianas do triângulo ABC.
2. Construa o triângulo F'C'B, com F'C'=2AE, BF'=2BF e BC'=2DC.
3. Trace a mediana C'F do triângulo BC'F'.

4. Trace a circunferência $(\mathbf{F},\frac{\mathbf{BF}}{\mathbf{3}})$ encontrando o ponto K na intersecção da circunferência com o segmento FB.
5. Trace a circunferência $(\mathbf{K},\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\mathbf{DC})$ encontrando o ponto C na intersecção do arco com o segmento FC'.
6. O vértice A é encontrado dobrando o segmento CF, ou seja, 2CF=CA.
7. O triângulo ABC é o triângulo procurado.

247. Construir um triângulo, conhecendo m_c, h_a, h_b.

Análise: Considere o triângulo ABC a mediana $CD = m_c$ e as alturas $BE = h_b$ e $AF = h_a$. Usando o conceito de base média de triângulo, temos que o segmento DH, ortogonal a CB, com H pertencendo a CB é $\frac{AF}{2}$. Da mesma forma, o segmento GD, ortogonal a AC, com G pertencendo a AC é $\frac{BE}{2}$. Transladando BC de forma que C caia em A, obtemos o ponto I. O quadrilátero IACB é um paralelogramo. Observe que IC é uma das diagonais desse paralelogramo e que o ponto D é seu ponto médio.



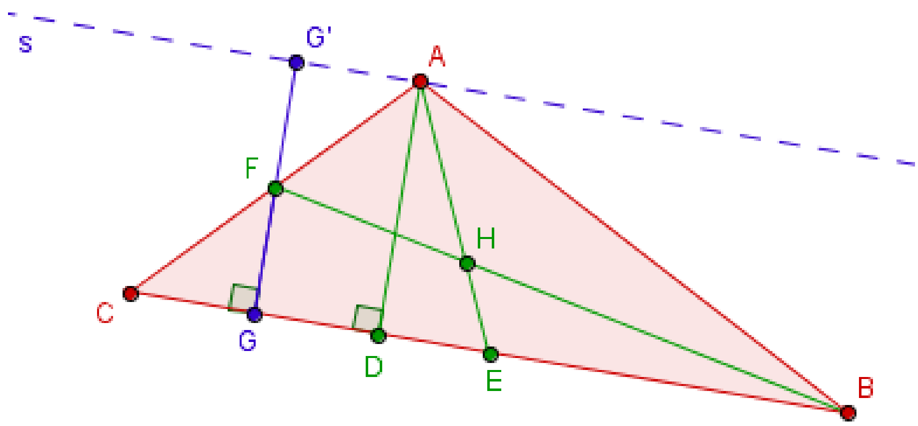
Construção:

1. Considere a mediana CD e as alturas BE e AF do triângulo ABC.
2. Fixe CD.
3. Trace a circunferência $(D, \frac{AF}{2})$ e sua tangente r passando pelo ponto C.
4. Trace a circunferência $(D, \frac{BE}{2})$ e sua tangente s passando por C.

5. Faça a translação de CD de forma que C caia em D, ou seja, IC = 2DC.
6. Trace a reta q paralela a r passando por I onde a intersecção de s com q é o vértice A.
7. Trace a reta p paralela a s passando por I onde a intersecção de r com p é o vértice B.

248. Construir um triângulo conhecendo: h_a, m_a e m_b.

Análise: Considere o triângulo ABC com a altura $AD = h_a$ e as medianas $AE = m_a$ e $BF = m_b$. Usando o conceito de base média de triângulo obtemos que o segmento FG é paralelo a AD e sua medida é $\frac{AD}{2}$. O ponto H é a intersecção entre as medianas, ou seja, o baricentro. O baricentro divide a mediana em dois segmentos. O segmento que une o vértice ao baricentro vale o dobro do segmento que une o baricentro ao lado oposto deste vértice. Portanto AH = 2HE e BH = 2HF.



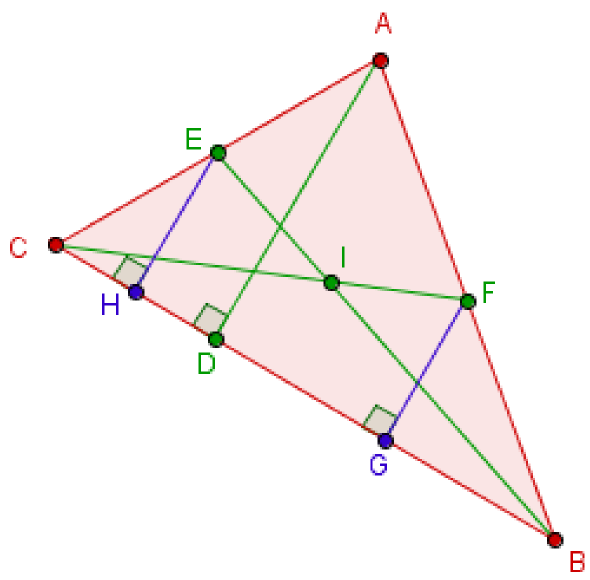
Construção:

1. Considere os segmentos AD e AE as respectivas altura e mediana relativas ao vértice A e BF a mediana relativa ao vértice B do triângulo ABC.
2. Construa o triângulo retângulo FBG, com os lados BF e $\frac{AD}{2}$,e o ângulo $\angle$FGB reto;
3. Dobre o segmento GF, onde G'F = FG;
4. Trace por G' uma reta paralela a GB;
5. Marque a circunferência $(F, \frac{BF}{3})$ encontrando o ponto H sobre FB;
6. Marque a circunferência $(H, \frac{2}{3}AE)$ encontrando o vértice A na intersecção desta com a reta s.

7. Trace a semirreta AF na qual a sua intersecção com o prolongamento do segmento GB é o vértice C;
8. O triângulo ABC é o procurado.

250. Construir um triângulo conhecendo: h_a, m_b e m_c .

Análise: Considere o triângulo ABC suas medianas $BE = m_b$ e $CF = m_c$ e altura $AD = h_a$. Usando o conceito de base média de triângulo, obtemos os segmentos EH e FG, ambos paralelos a AD e medindo $\frac{AD}{2}$. Seja I o baricentro do triângulo ABC.



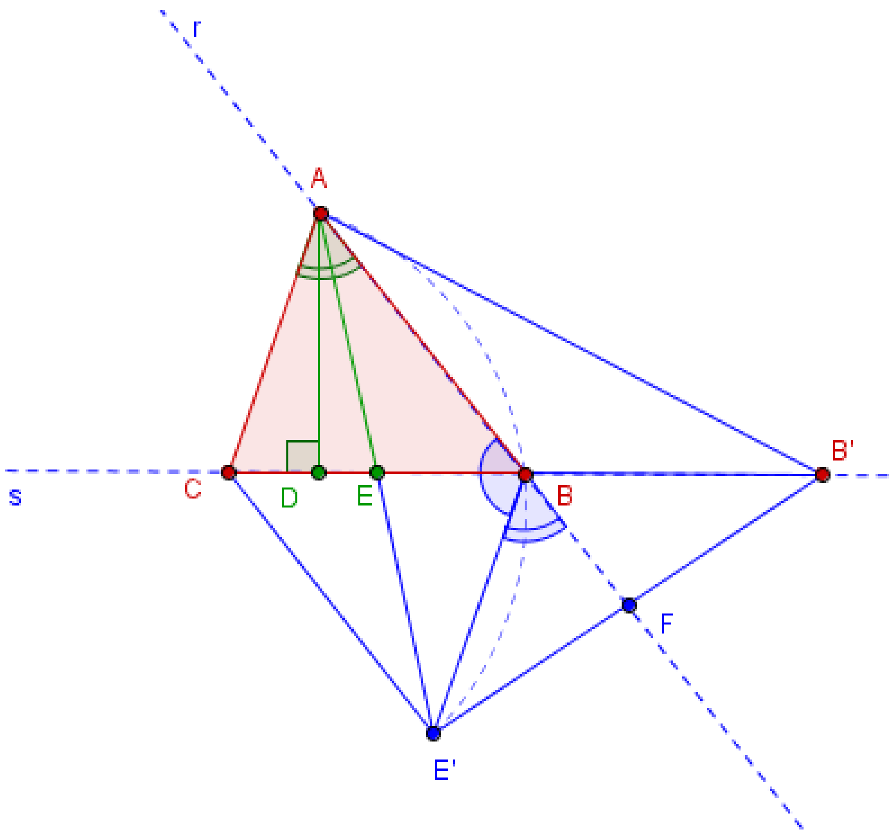
Construção:

1. Considere os segmentos AD, BE e CF a altura relativa ao vértice A, a mediana relativa ao vértice B e CF a mediana relativa ao vértice C do triângulo ABC.
2. Construa o triângulo retângulo EHB, com os lados BE, $\frac{AD}{2}$ e o ângulo $\angle$EHB reto.
3. Marque sobre BE o segmento EI, onde $EI = \frac{EB}{3}$, ou seja, I é o baricentro do triângulo ABC.

4. Trace a circunferência $(\mathbf{I}, \frac{2}{3}\mathbf{CF})$ para encontrar o ponto C, que é a intersecção da circunferência com o prolongamento do segmento HB.
5. Trace o segmento CA onde C, E e A são colineares e tal que CE = EA.
6. A união dos pontos A, B e C forma o triângulo procurado.

251. Construir um triângulo conhecendo o ângulo $\angle A$, h_a e m_a .

Análise*:* Considere o triângulo ABC sendo $AE = m_a$ sua mediana, $AD = h_a$ sua altura e o ângulo, relativos ao vértice A. Seja AB'E' o triângulo cujos lados são o dobro das medianas do triângulo ABC conforme mostra o teorema 1 e a figura abaixo. Note que ADE é um triângulo retângulo, e o ponto E' é resultado da translação do segmento AE na direção da reta AE com o ponto A caindo em E. Seja r a reta que passa por A e B, e F o ponto de intersecção de r com o segmento E'B'. Observe que como AC e BE' são paralelos, então os ângulos ∠E'BF e ∠CAB são congruentes. Assim o ângulo ∠ABE' é o suplemento do ângulo ∠CAB e, portanto, o arco-capaz do ângulo ∠ABE' em relação ao segmento AE' passa pelo ponto B.



Construção:

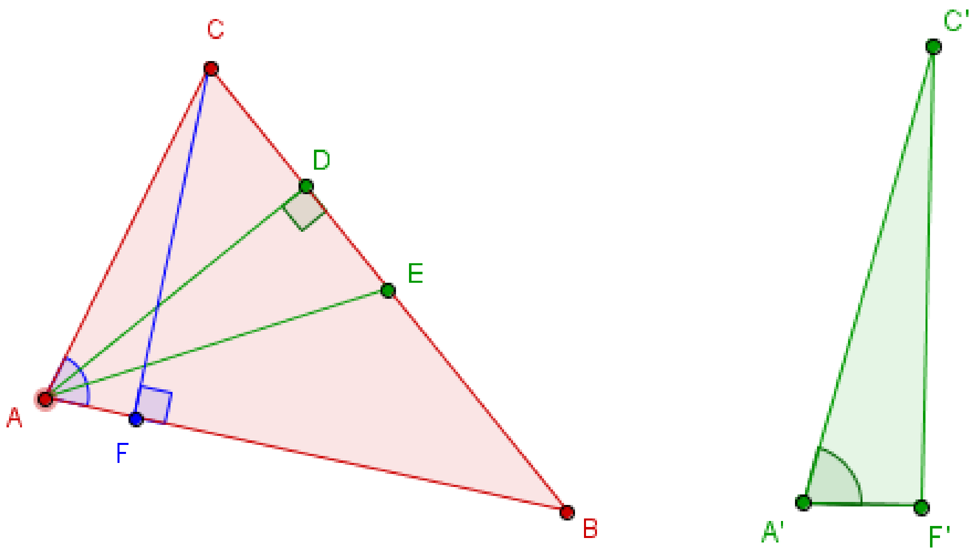
1. Considere os segmentos AE a mediana, AD a altura e o ângulo ∠CAB, relativos ao vértice A do triângulo ABC.
2. Construa o triângulo retângulo ADE com AD cateto e AE hipotenusa.

3. Trace a reta s passando por D e E.
4. Translade o segmento AE na direção da própria reta AE, tal que A caia em E, obtendo o ponto E’.
5. Trace o arco-capaz do ângulo suplementar ao ângulo $\angle \mathbf{A}$ em relação ao segmento AE’, obtendo na intersecção deste arco-capaz com a reta s o ponto B.
6. Marque o ponto C na reta s, tal que E seja ponto médio de CB.
7. O triângulo ABC é o procurado.

252. Construir um triângulo ABC conhecendo h_a, m_a e a razão $\frac{h_c}{b}$.

Observação: Entendemos que a razão $\frac{h_c}{b}$ neste problema é dada através de dois segmentos dados de comprimentos x e y, tais que $\frac{h_c}{b} = \frac{x}{y}$.

Análise: Considere o triângulo ABC, sendo os segmentos $AD = h_a$, $AE = m_a$ e considere os segmentos C'F'= x e C'A'= y, dados através do triângulo A'C'F'. Então os triângulos A'F'C' e AFC são semelhantes e portanto conhecemos o ângulo $\angle A$ do triângulo ABC. O problema recai então no problema 251.

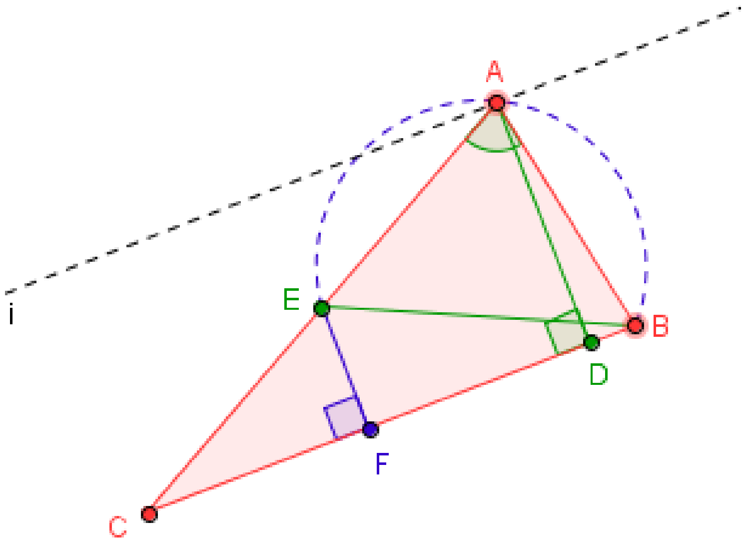


Construção:

1. Considere os segmentos C'F' e C'A'.
2. Construa o triângulo retângulo de hipotenusa C'A' e cateto C'F' obtendo o ângulo $\angle$C'A'F' congruente ao ângulo $\angle$A do triângulo ABC.
3. Proceda agora de acordo com a construção do problema 251.

253. Construir um triângulo conhecendo o ângulo $\angle A$, h_a e m_b.

Análise*:* Considere o triângulo ABC sendo os segmentos $AD = h_a$ e $BE = m_b$ sua altura e mediana respectivamente, e $\angle$A o ângulo relativo ao vértice A. Usando o conceito de base média de triângulo, temos que o segmento EF paralelo a AD tem a metade da medida do segmento AD, pois E é ponto médio de AC. Note que o ponto A está contido no arco-capaz do ângulo $\angle$A em relação ao segmento EB.



Construção:

1. Considere o ângulo $\angle$A, a mediana BE e a altura AD do triângulo ABC.
2. Construa o triângulo FEB sendo EB e FE dois de seus lados, considere $FE = \frac{1}{2}AD$, e o ângulo $\angle$EFB reto.
3. Trace a reta i paralela a FB, cuja distância entre elas é igual a medida do segmento AD.
4. Marque o arco-capaz do ângulo $\angle$A com relação ao segmento EB.
5. A intersecção da reta i com o arco-capaz é o ponto A.
6. Trace o segmento AC passando por E e tal que C, F e B sejam colineares.
7. O triângulo ABC é o procurado.

Observação: No item 5 da construção, uma das três circunstâncias abaixo podem ocorrer:

i) O arco-capaz não intersecta a reta i. Neste caso o problema não tem solução.

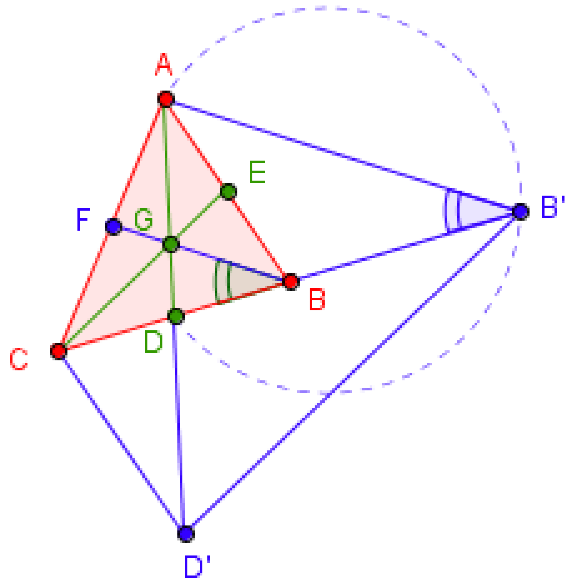
ii) O arco-capaz é tangente a reta i. Neste caso existe apenas uma solução.

iii) O arco-capaz intersecta a reta i em dois pontos. Nesse caso o problema tem duas soluções.

254. Construir um triângulo, conhecendo $\mathbf{m_a}$, $\mathbf{m_c}$ e o ângulo $(\mathbf{m_b}$, a).

Análise: Considere o triângulo ABC, com $\mathbf{AD = m_a}$, BF= $\mathbf{m_b}$ e $\mathbf{CE = m_c}$ suas medianas e o ponto G a intersecção entre elas (baricentro). Seja AB'D' o triângulo cujos lados são o dobro das diagonais do triângulo ABC, ou seja, AD'=2AD, B'A=2BF e D'B'=2CE, conforme mostra o teorema 1 e a figura abaixo.

Pelo paralelismo dos segmentos FB e AB' obtemos que o ângulo $\angle$FBC é congruente ao ângulo $\angle$AB'C. Note que o ponto B' pertence ao arco-capaz do ângulo $\angle$FBC em relação ao segmento AD e como G é baricentro do triângulo ABC, DG=$\frac{1}{3}$DA.



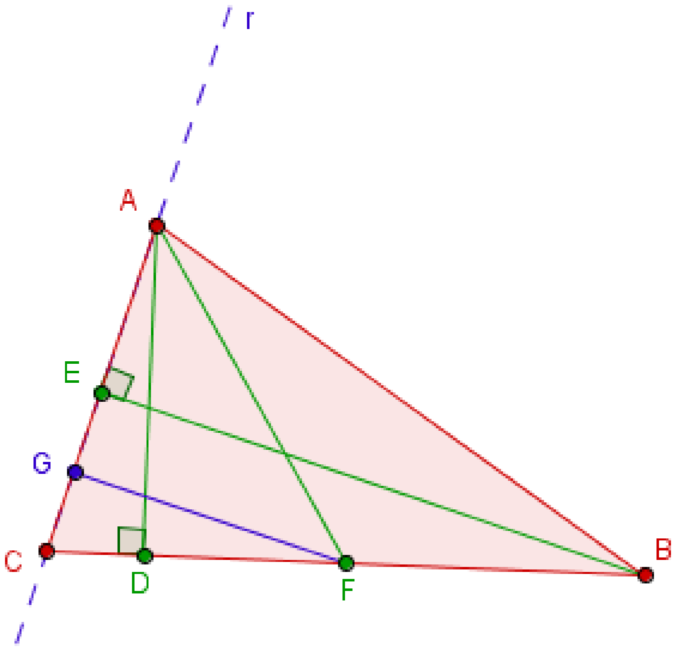
Construção:

1. Considere os segmentos CE e AD medianas do triângulo ABC e $\angle$FBC tal que F é ponto médio do lado AC do mesmo triângulo.
2. Trace o segmento AD' tal que D é ponto médio desse segmento.
3. Marque o arco-capaz do ângulo $\angle$FBC com relação ao segmento AD.
4. Trace o segmento D'B'= 2CE e com B' pertencendo ao arco-capaz de item 3.
5. Marque o ponto G sobre o segmento DA tal que $\mathbf{DG = \frac{1}{3}DA}$.

6. Trace por G um segmento GB paralelo a AB’ e tal que pertence a DB’.
7. Marque o ponto C tal que D é ponto médio de CB.
8. O triângulo ABC é o procurado.

255. Construir um triângulo conhecendo $\mathbf{h_a}$, $\mathbf{h_b}$ e $\mathbf{m_a}$.

Análise*:* Considere o triângulo ABC com as alturas $\mathbf{AD = h_a}$ e $\mathbf{BE = h_b}$ e a mediana $\mathbf{AF = m_a}$. Usando o conceito de base média de triângulos obtemos o segmento FG paralelo a BE medindo $\frac{\mathbf{BE}}{\mathbf{2}}$.



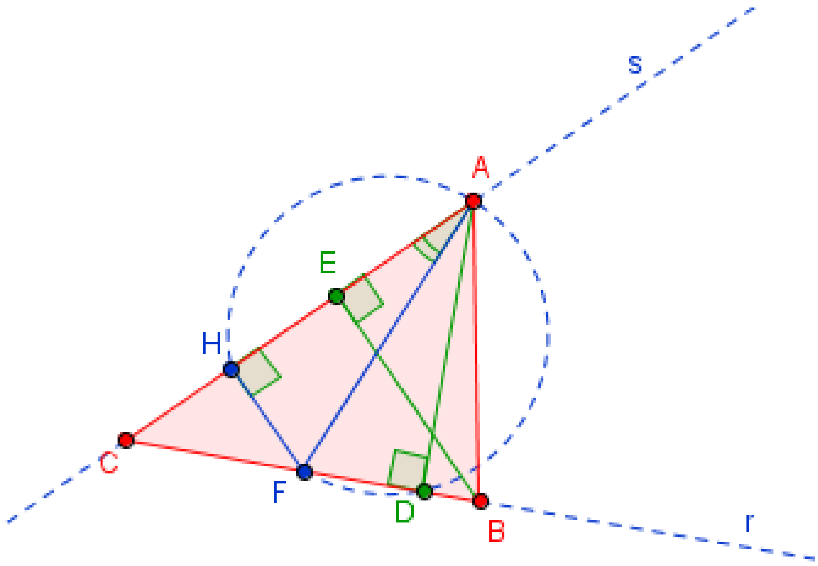
Construção:

1. Considere as alturas AD e BE e a mediana AF do triângulo ABC.
2. Construa o triângulo ADF com os lados AD, AF e o ângulo $\angle$ADF reto.
3. Trace a circunferência $(\mathbf{F}, \frac{\mathbf{BE}}{\mathbf{2}})$ e sua tangente r, passando por A.
4. A intersecção de r com o prolongamento do segmento DF é o vértice C.
5. Os pontos C, F e B são colineares e CF=FB.
6. Unindo os pontos A, B e C, encontra-se o triângulo procurado.

256. Construir um triângulo conhecendo h_a, h_b e o ângulo $(m_a$, b).

Análise: Considere o triângulo ABC, com os segmentos $BE = h_b$ e $AD = h_a$ sendo suas alturas relativas aos vértices B e A respectivamente. Seja o ângulo $\angle$CAF com CA=b, tal que, F é ponto médio do segmento CB. Assim, AF é a mediana do triângulo ABC, relativa ao vértice A. Desta forma, usando o conceito de base média de triângulo, obtemos que BE=2FH.

Note que o ponto A está contido no arco-capaz do ângulo $\angle$CAF com relação ao segmento HF.



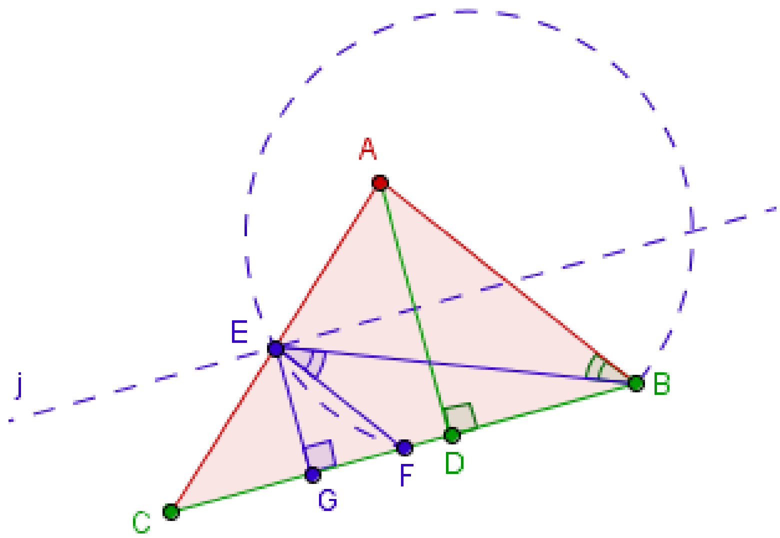
Construção:

1. Considere os segmentos AD e BE as alturas do triângulo ABC, relativas aos vértices A e B respectivamente, e seja $\angle$CAF o ângulo formado pelo lado oposto ao vértice B, do triângulo ABC e a mediana AF tal que F é ponto médio de CB.
2. Construa o arco-capaz do ângulo $\angle$CAF em relação ao segmento HF com $HF = \frac{1}{3}BE$.
3. Trace a reta s passando por H e ortogonal a HF, na intersecção de s com o arco-capaz marque o ponto A.

4. Trace a circunferência (A, AD) e a reta r tangente a esta circunferência, passando pelo ponto F.
5. Na intersecção de r e s, marque o ponto C.
6. Marque o ponto B, tal que F seja ponto médio de CB.
7. O triângulo ABC é o procurado.

257. Construir um triângulo conhecendo h_a, a e o ângulo (m_b, c).

Análise: Considere o triângulo ABC com a altura $AD = h_a$, o lado CB=a e ângulo $\angle$ABE onde E é ponto médio de AC com AB=c. Usando o conceito de base média de triângulo, obtemos que EG é paralelo a AD e sua medida é $\frac{AD}{2}$. Seja F o ponto médio de CD. O segmento EF é paralelo a AB, pois é a união dos pontos médios dos outros dois lados. Portanto pelo teorema de Tales obtemos que o ângulo $\angle$ABE é congruente ao ângulo $\angle$BEF, pois temos segmentos paralelos cortados por um segmento transversal.



Construção:

1. Considere os segmentos AD, CB a altura e lado do triângulo ABC, respectivamente e ângulo $\angle$ABE onde E é ponto médio de AC
2. Trace CB e construa o arco-capaz do segmento FB com o ângulo $\angle$FEB, onde F é ponto médio de CB.
3. Trace a reta j paralela a CB, distando $\frac{AD}{2}$ de CB.
4. Na intersecção do arco com a reta j temos o ponto E.
5. Trace um segmento passando por C, E e A, onde CE=EA.
6. Trace o segmento AB.
7. O triângulo ABC é o triângulo procurado.

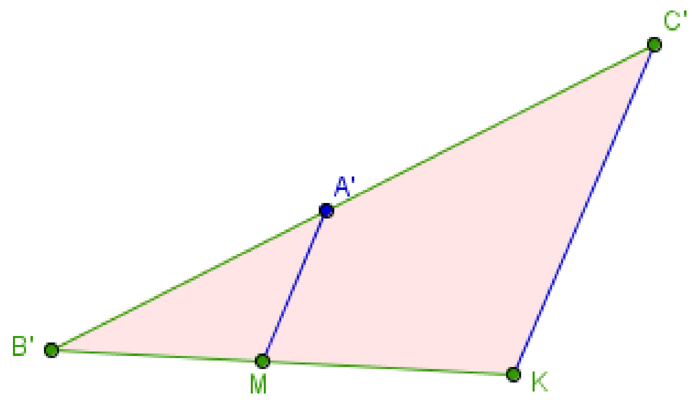
258. Construir um triângulo conhecendo $\mathbf{h_a}$, b+c e $\dfrac{\mathbf{h_b}}{\mathbf{h_c}}$.

Observação: Entendemos que a razão $\dfrac{\mathbf{h_b}}{\mathbf{h_c}}$ neste problema é dada através de dois segmentos B'M e MK dados, tais que $\dfrac{\mathbf{h_b}}{\mathbf{h_c}} = \dfrac{\mathbf{B'M}}{\mathbf{MK}}$.

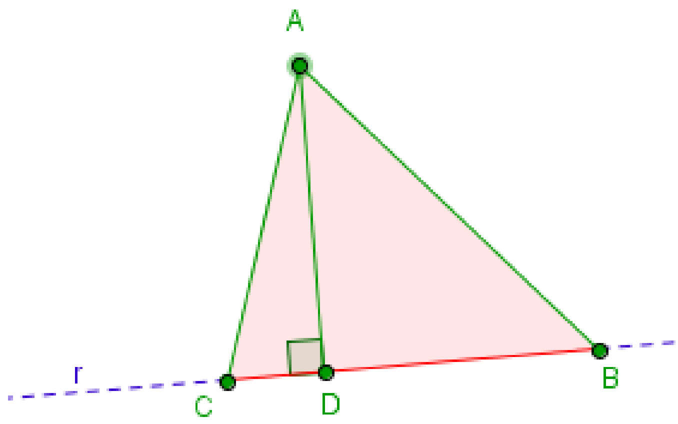
Análise: Considere o triângulo ABC com as alturas $\mathbf{h_a = AD}$, $\mathbf{h_b}$,$\mathbf{h_c}$ tais que, $\dfrac{\mathbf{h_b}}{\mathbf{h_c}} = \dfrac{\mathbf{B'M}}{\mathbf{MK}}$ e os lados AB=c, BC=a e CA=b. O calculo da área do triângulo ABC é dado por $\mathbf{A_{ABC} = \dfrac{c.h_c}{2} = \dfrac{b.h_b}{2}}$, assim obtemos que $\mathbf{c.h_c = b.h_b}$ e, portanto $\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} = \dfrac{\mathbf{h_b}}{\mathbf{h_c}}$. Dessa forma, através do Teorema de Tales e conhecendo a medida dos segmentos B'M, MK e b+c=B'C' podemos encontrar a medida dos segmentos c e b, com c=B'A' e b=A'C', com o ponto A' contido no segmento B'C', conforme a figura (i), abaixo.

Note que se AD é uma altura relativa ao vértice A, do triângulo ABC, esta é perpendicular ao lado BC deste triângulo, conforme a figura (ii) abaixo.

(i)



(ii)

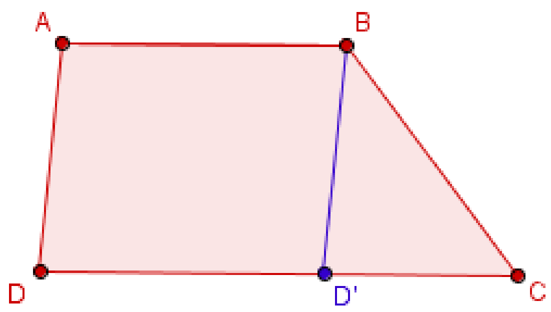


Construção:

1. Seja $\mathbf{h_a} = \mathbf{AD}$, $\mathbf{h_b}$, $\mathbf{h_c}$ as alturas do triângulo ABC, tal que, $\dfrac{\mathbf{h_b}}{\mathbf{h_c}} = \dfrac{\mathbf{B'M}}{\mathbf{MK}}$ e os segmentos AB=c, BC=a e CA=b, os lados deste triângulo com CA+AB=C'B'.
2. (i) Trace o segmento C'B' e o segmento B'K=B'M+MK de forma que o ângulo $\angle$C'B'K seja maior que 0° e menor que 180°.
3. Marque o segmento C'K e o segmento MA' paralelo a C'K, tal que B'M é dado e A' pertença a B'C'. Os segmentos B'A' e A'C' são congruentes aos segmentos BA e AC do triângulo ABC.
4. (ii) Trace uma reta r, e o segmento AD perpendicular a r, com D pertencendo a r.
5. Marque os pontos B e C sobre r, com AC e AB encontrados no item 3 acima.
6. O triângulo ABC é o procurado.

259. Construir um trapézio conhecendo seus quatro lados.

Análise: Considere o trapézio ABDC com AB paralelo a DC. Transladando AD de maneira que A cai em B, encontramos o ponto D' sobre o segmento DC.

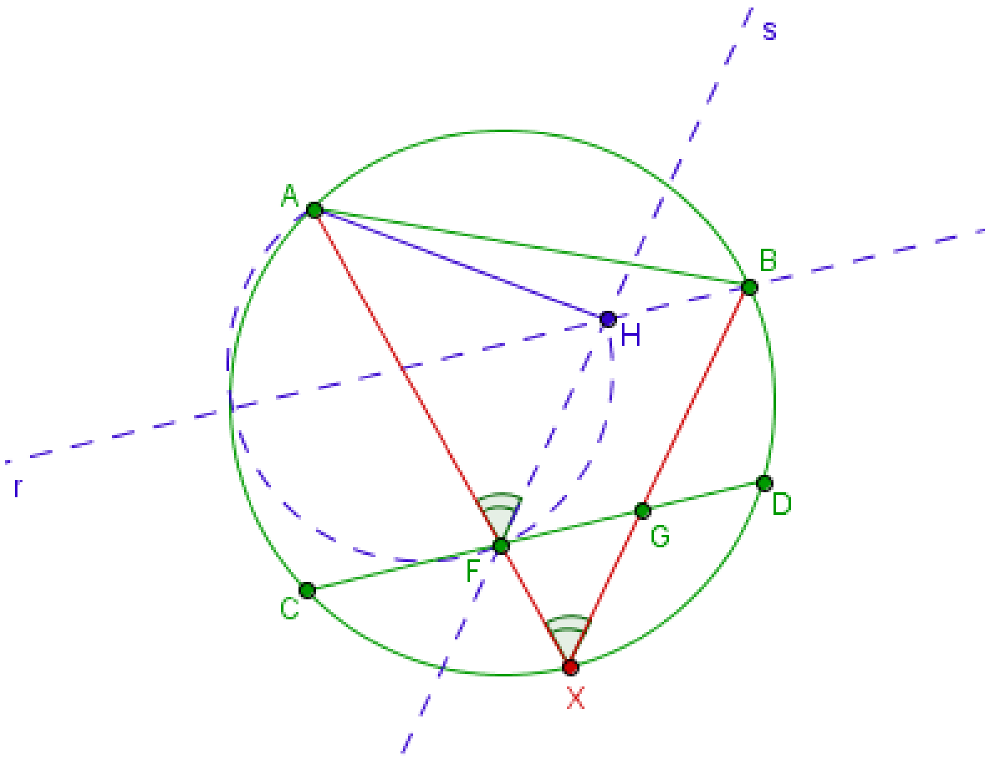


Construção:

1. Considere os lados do trapézio ABCD.
2. Trace o segmento DC.
3. Marque a circunferência (D, AB) = DD', com D' sobre DC.
4. Com a intersecção da circunferência (C, CB) com a circunferência.
5. (D', AD) acha-se B.
6. Trace por B uma reta r paralela a DC.
7. A intersecção de r com a circunferência (D, DA) é o ponto A.
8. O trapézio ABCD é o procurado.

260. Numa circunferência, traçamos duas cordas, AB e CD. Encontrar sobre a circunferência um ponto X, tal que as linhas XA e XB determinem sobre a corda CD, um segmento FG, igual a um segmento dado.

Análise: Considere uma circunferência com as cordas AB e CD, X um ponto da circunferência tal que XA e XB determinam sobre CD um segmento FG. Seja a reta r paralela a CD passando por B e a reta s paralela a BG passando por F e determinando sobre r o ponto H. Pelo teorema das paralelas que diz que retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos correspondentes congruentes entre si, temos que o ângulo $\angle BXA$ é congruente ao ângulo $\angle HFA$. A circunferência, que passa por A, H e F, corresponde ao arco-capaz do ângulo $\angle AXB$ em relação ao segmento AH.



Construção:

1. Considere uma circunferência com os arcos AB e CD e o segmento FG dados.
2. Trace a reta r paralela a CD, passando por B.
3. Trace sobre r a circunferência (B, FG), determinando o ponto H.

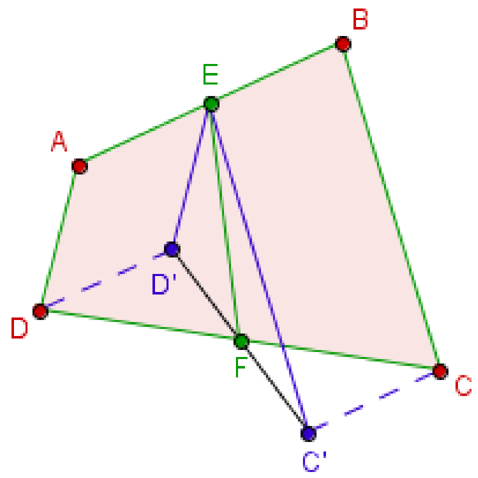
4. Trace o segmento HA.
5. Tome um ponto X' qualquer no arco CD que deve conter o ponto X.
6. Construa o arco-capaz do ângulo $\angle$BX'A em relação ao segmento AH.
7. Na intersecção do arco capaz com o segmento CD marque o ponto F.
8. Trace sobre FD a circunferência (F, FG), determinando o ponto G.
9. Trace as semirretas AF e BG, onde a intersecção dessas semirretas é o ponto X da circunferêcia.
10. X é o ponto procurado.

Observação: No item 7 da construção, uma das três circunstâncias abaixo podem ocorrer:

- **i)** O arco-capaz não intersecta o segmento CD. Neste caso o problema não tem solução.
- **ii)** O arco-capaz é tangente a CD. Neste caso existe apenas uma solução.
- **iii)** O arco-capaz intersecta CD em dois pontos. Nesse caso o problema tem duas soluções.

261. Construir um quadrilátero, conhecendo os quatro lados e o segmento EF que une os pontos médios de AB e CD.

Análise: Considere o quadrilátero ABCD com o segmento EF que une os pontos médios de AB e CD. Seja ED’ a translação de AD, onde A cai no ponto. Forma-se o paralelogramo AED’D. Da mesma forma, EC’ é a translação de BC, onde B cai em E, formando o paralelogramo BEC’C. Note que, como os segmentos AE e BE são iguais, os segmentos DD’ e CC’ também são. Como o segmento AB é paralelo a DD’ e o segmento AB é paralelo C’C, então DD’é paralelo a C’C. Portanto, pelo teorema das paralelas temos que os ângulos $\angle$D’DF e $\angle$C’CF, são congruentes. Pelo caso de congruência de triângulos LAL (lado, ângulo, lado), os triângulos D’DF e C’CF são congruentes e, portanto, os ângulos $\angle$DFD’ e $\angle$CFC’ são congruentes, e os segmentos FC’ e FD’ também são congruentes. Segue-se que os pontos D’, F e C’ são colineares e que segmento EF é uma mediana do triângulo ED’C’ .



Construção:

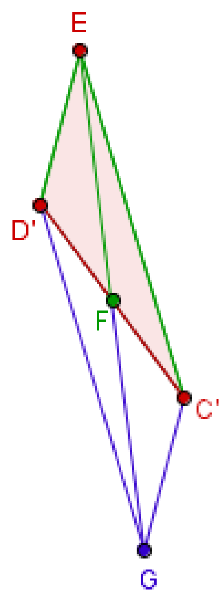
1. Considere os lados do quadrilátero ABCD e o segmento EF que une os pontos médios de AB e DC.
2. Construa o triângulo ED’C’, sabendo que os segmentos AD e BC são dois de seus lados e o segmento EF é a mediana correspondente ao vértice E.
3. Trace as circunferências (D’, AE) e (F, FD). A intersecção destas circunferências é o ponto D.
4. Marque o ponto C, tal que os pontos D, F e C sejam colineares e DF=CF.

5. Trace as circunferências (D, DA) e (E, EA). A intersecção destas circunferências é o ponto A.
6. Marque o ponto B, tal que os pontos A, E e B sejam colineares e AE=EB.
7. A união dos pontos A, B, C e D forma o quadrilátero procurado.

Observação: No item 1. da construção, surge um novo problema:

Construir um triângulo dados dois lados ED’ e EC’ e a mediana correspondente ao vértice E.

Análise: Considere o triângulo ED’C’ onde F é ponto médio do segmento D’C’. Seja G tal que, os pontos E, F e G são colineares e EF=FG. Então, temos que EDGC’ é um paralelogramo.

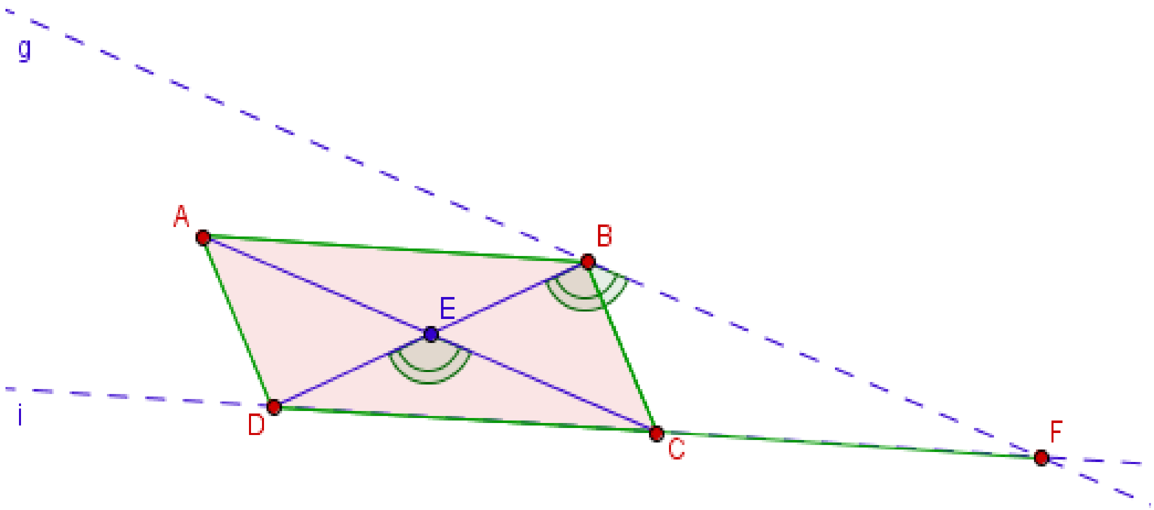


Construção:

1. Considere os segmentos D’E, C’E e EF.
2. Trace o segmento EG tal que F é o ponto médio de EG (ou seja, EG=2EF).
3. Trace as circunferências (E, D’E) e (G, C’E). A intersecção destas duas circunferências é o ponto D’.
4. Trace o segmento D’C’, com F ponto médio de D’C’ (ou seja, D’C’=2DF).
5. O triângulo E, D’ e C’ é o procurado.

268. Construir um paralelogramo, conhecendo os lados e o ângulo das diagonais.

Análise: Considere o paralelogramo ABCD, com o ponto E sendo a intersecção entre as suas diagonais, portando DE=BE e AE=CE (propriedade de paralelogramo). Seja g a reta paralela a diagonal AC, passando pelo ponto B. Temos então, que os triângulos DEC e DBF, são semelhantes por AA (ângulo, ângulo), pois pelo teorema das paralelas o ângulo $\angle$DBF = $\angle$DEC, e o ângulo $\angle$BDF é ângulo em comum dos dois triângulos. Como DB=2DE então DF=2DC, ou seja, C é ponto médio de DF. Portanto o triângulo BDF pode ser construído com os dados do problema.



Construção:

1. Considere os lados do paralelogramo ABCD e o ângulo $\angle$DEC formado pelas suas diagonais, ou seja, E é o ponto de intersecção dessas diagonais.
2. Trace o segmento DF =2DC.
3. Construa o arco-capaz do ângulo $\angle$DEC em relação ao segmento DF.
4. Trace a circunferência (C, CB), encontrando o ponto B na intersecção desta circunferência com o arco-capaz.
5. Trace pelo ponto B a paralela a reta i, e pelo ponto D a paralela a BC, encontrando o ponto A na intersecção dessas duas retas.

Observação: No item 3 da construção, um dos três casos abaixo pode ocorrer:

i) O arco-capaz não intersecta a circunferência (C, CB). Neste caso o problema não tem solução.

ii) O arco-capaz é tangente à circunferência (C, CB). Neste caso existe apenas uma solução.

iii) O arco-capaz coincide com a circunferência (C, CB). Neste caso existe uma infinidade de soluções.

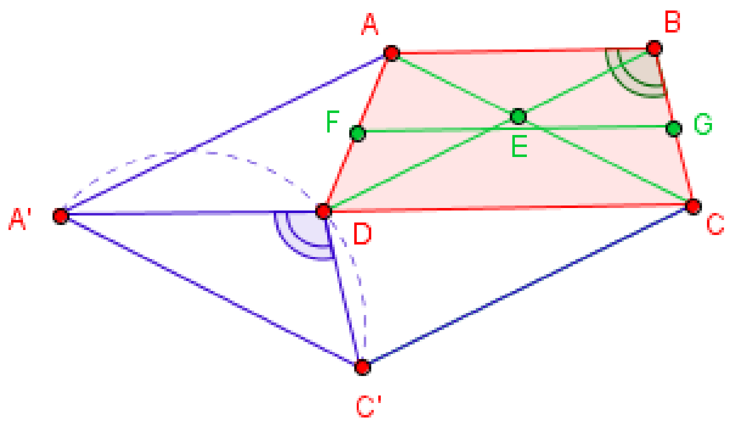
iv) O arco-capaz intersecta a circunferência (C, CB) em dois pontos. Nesse caso o problema tem duas soluções.

269. Construir um trapézio conhecendo as diagonais, a linha que une os meios dos lados não paralelos e um ângulo.

Observação: Entendemos que no enunciado deste problema podemos substituir, “a linha que une os meios dos lados não paralelos” por “o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos”.

Análise: Considere o trapézio ABCD, com AB paralelo a DC, FG o segmento que une os pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente, e E é o ponto de intersecção das diagonais deste trapézio. Seja ACC’A’ o paralelogramo cujos lados são a translação das diagonais do trapézio ABCD, conforme o teorema 2 e a figura abaixo.

Observe que por se tratar de um trapézio, DC pertence a diagonal A’C do paralelogramo ACC’A’, como mostra o problema **281**. Obtemos por meio do teorema 2, que os segmentos BD, CC’ e AA’, são paralelos e congruentes, assim como AC e A’C’ também são e A’C=2FG. Ainda por resultado do teorema 2, temos que os ângulos $\angle$ABC e $\angle$A’DC’ são congruentes. Note que o ponto D pertence ao arco-capaz do ângulo $\angle$A’DC’ com relação ao segmento A’C’.



Construção:

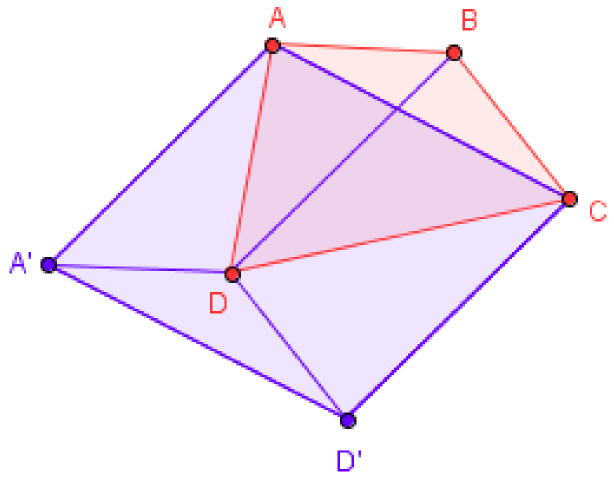
1. Considere os segmentos AC e BD as diagonais do trapézio ABCD, FG o segmento que une os pontos médios dos lados AD e BC, não paralelos, e o ângulo $\angle$ABC, dados.
2. Trace A’C=2FG.

3. Marque o ponto C’ na intersecção das circunferências (A’, AC) e (C, BD).
4. Trace o arco-capaz do ângulo $\angle ABC$ com relação ao segmento A’C’ e na intersecção deste arco com o segmento A’C, marque o ponto D.
5. Translade C’D tal que C’ caia em C, o ponto B será o transladado de D.
6. Marque o ponto A na intersecção das circunferências (C, AC) e (A’, BD).
7. O trapézio ABCD é o procurado.

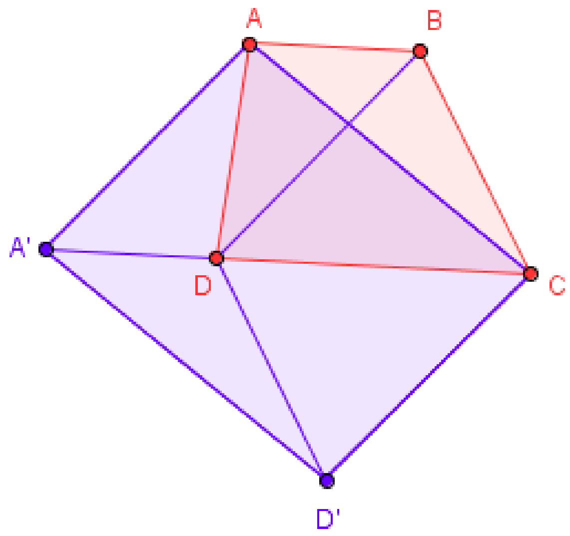
270. Em que caso o ponto D estará sobre uma das diagonais do paralelogramo, resultado da translação geral num quadrilátero?

Análise: Considere ABCD um quadrilátero e ACD'A' o paralelogramo cujos lados são a translação das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme mostra o teorema 2 e a figura (i) abaixo. Usando resultados do teorema 2 obtemos que AB é paralelo a A'D. Para que o ponto D pertença a diagonal A'C do paralelogramo, devemos ter A', D e C colineares e como A'D é paralelo a AB implica que A'C deve ser paralelo a AB, e portanto DC deve ser paralelo a AB. Logo, se o ponto D não estiver na diagonal AD', mas estiver na diagonal A'C do paralelogramo ACD'A', então ABCD é um trapézio, conforme a figura (ii). Caso o ponto D também esteja na diagonal AD', então ABCD será um paralelogramo, conforme a figura (iii).

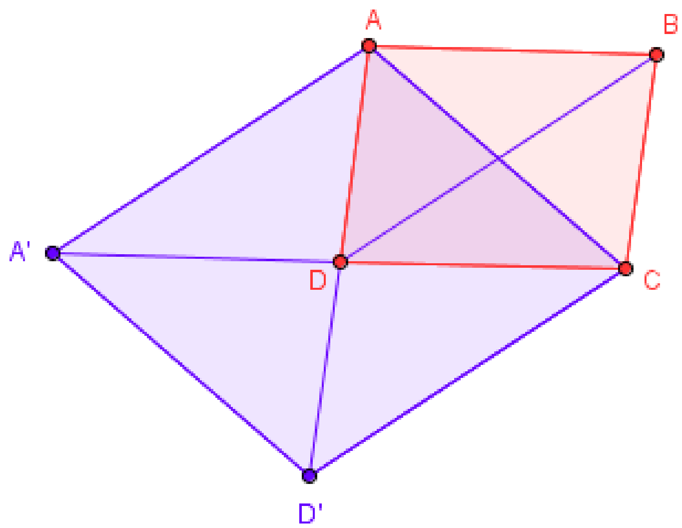
(i)



(ii)



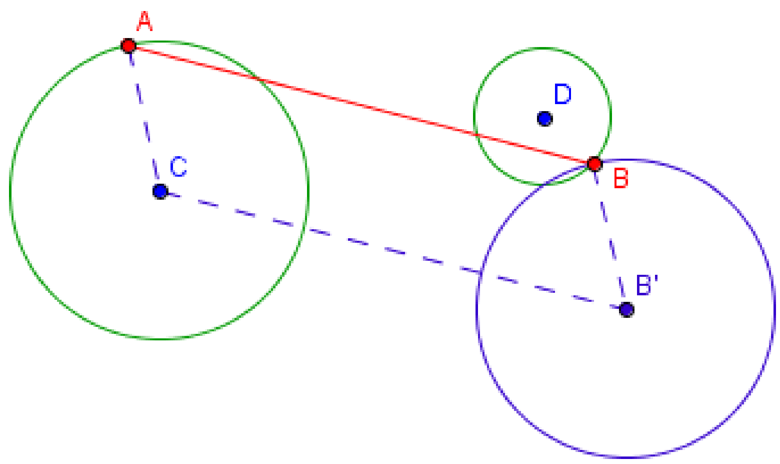
(iii)



271. Traçar uma linha igual e paralela a uma linha dada e que tenha suas extremidades sobre duas circunferências dadas.

Observação: Entendemos que no enunciado deste problema, podemos substituir "linha" por "segmento".

Análise*:* Considere duas circunferências, (C, CA) e (D, DB). O segmento AB, portanto, possui uma extremidade em cada uma das circunferências. Transladando o segmento AC de forma que A caia em B o ponto C cairá em B' obtendo um paralelogramo ABB'C. A circunferência (B', B'B) é a transladada da circunferência (C,CA) na direção e no comprimento do segmento dado.



Construção:

1. Considere as circunferências uma de centro C e outra de centro em D. Seja EF um segmento dado.
2. Translade a circunferência de centro em C com direção e comprimento EF tal que B' seja o centro da nova circunferência.
3. Na intersecção da circunferência de centro B' com a circunferência de centro D encontra-se o ponto B.
4. Trace a circunferência (B, EF) encontrando o ponto A na intersecção desta com a circunferência de centro C.
5. O segmento AB é o procurado

Observação: No item 3 da construção, um dos três casos abaixo pode ocorrer:

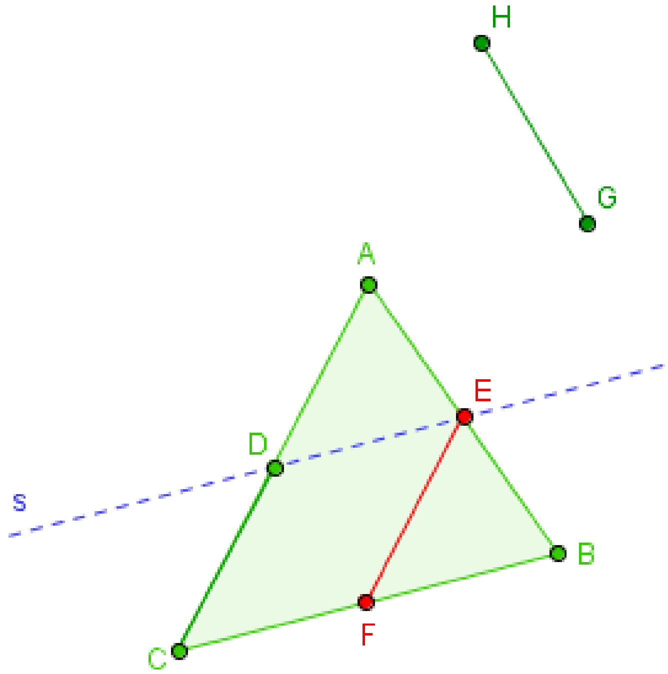
i) As circunferências não se intersectam. Neste caso o problema não tem solução.

ii) As circunferências são tangentes. Neste caso existe apenas uma solução.

iii) As circunferências se intersectam em dois pontos. Nesse caso o problema tem duas soluções.

272. Num triângulo, traçar uma transversal de comprimento dado paralelamente a um dos lados.

Análise: Considere o triângulo ABC e o segmento EF, de comprimento dado, paralelo a AC.. A reta s passando por E e paralela a CB intersecta AC no ponto D. Na translação de EF, tal que E cai no ponto D, o transladado de F será o ponto C.

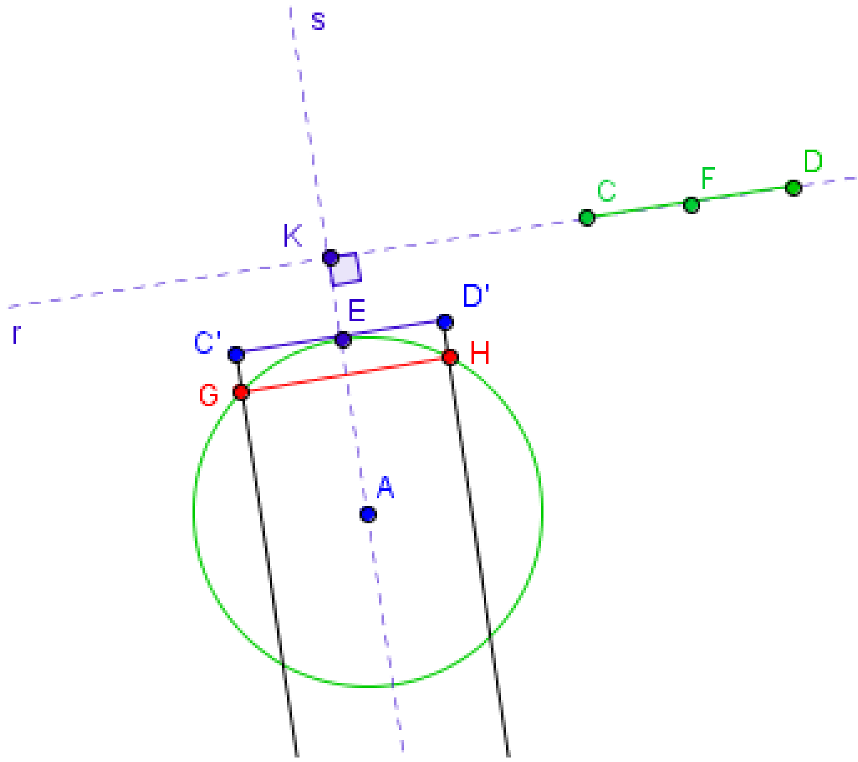


Construção:

1. Considere o triângulo ABC e o segmento GH.
2. Trace o segmento CD=GH tal que D pertença ao segmento CA (ou qualquer outro lado do triângulo ABC).
3. Trace a reta s paralela a CB e marque o ponto E na intersecção de s com AB.
4. Translade o segmento CD tal que D caia em E, o ponto F será o transladado de C.
5. O segmento EF é o procurado.

273. Num círculo, traçar uma corda que seja igual e paralela a um segmento dado.

Análise: Considere a circunferência de centro A e a corda GH paralela e congruente a um segmento CD dado. Seja s a reta perpendicular a corda GH passando por A. A reta s intersecta a corda GH em seu ponto médio e a circunferência no ponto E. Se transladarmos GH de tal maneira que seu ponto médio caia em E, obteremos o segmento C'D', paralelo e congruente a CD. O ponto E é o ponto médio de C'D' e corresponde, por uma nova translação, ao ponto médio F de CD.



Construção:

1. Considere a circunferência de centro A e o segmento CD.
2. Trace a reta r tal que CD pertença a r.
3. Trace a reta s ortogonal a r, passando por A. Seja K a intersecção dessas duas retas.
4. Marque o ponto E na intersecção da reta s com a circunferência de centro A.
5. Marque o ponto F, tal que F é ponto médio de CD.

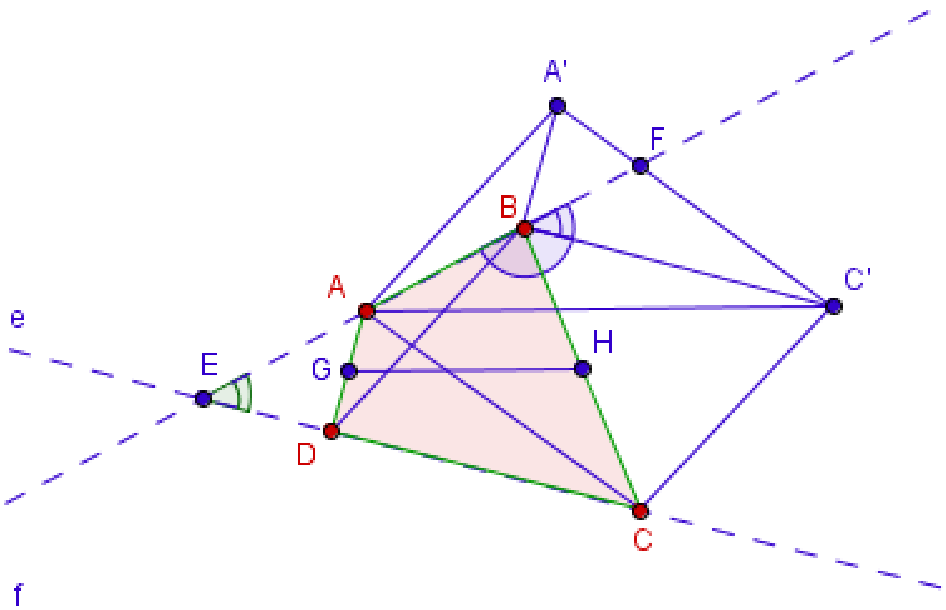
6. Translade o segmento CD tal que F caia em E e C'D' seja o transladado de CD.
7. Trace semirretas, uma de origem C'e outra de origem D', ambas paralelas a reta s e cortando a circunferência de centro A.
8. Na intersecção da semirreta do origem C' com a circunferência, marque o ponto G e na intersecção da semirreta do origem D' com a circunferência, marque o ponto H.
9. O segmento GH é o procurado.

Observação: No item 8 da construção, um dos três casos abaixo pode ocorrer:

- **i)** As semirretas e a circunferência não se intersectam. Neste caso o problema não tem solução.
- **ii)** As semirretas são tangentes a circunferência. Neste caso existe apenas uma solução.
- **iii)** Cada semirreta intersecta a circunferência em dois pontos. Nesse caso o problema tem duas soluções.

279. Construir um quadrilátero, conhecendo seus quatro lados e o ângulo compreendido entre dois lados opostos.

Análise: Considere o quadrilátero ABCD. Seja ACC'A' o paralelogramo cujos lados A'C' e CC' são a translação das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme o teorema 2 e a figura abaixo. Seja GH o segmento que une os pontos médios de AD e BC e ∠AED o ângulo compreendido entre os lados AB e DC do quadrilátero. Seja F o ponto de intersecção do segmento A'C' com a reta que contem o lado AB do quadrilátero. Com base no teorema 2 podemos afirmar que o segmento BC' é paralelo e tem a mesma medida do segmento DC. Logo os ângulos ∠AED e ∠FBC' são congruentes. Ainda do teorema 2 obtemos que GH é paralelo AC' e tal que AC'=2 GH e portanto os pontos G e H pertencem as circunferências (A, AG) e (B, BH), respectivamente.



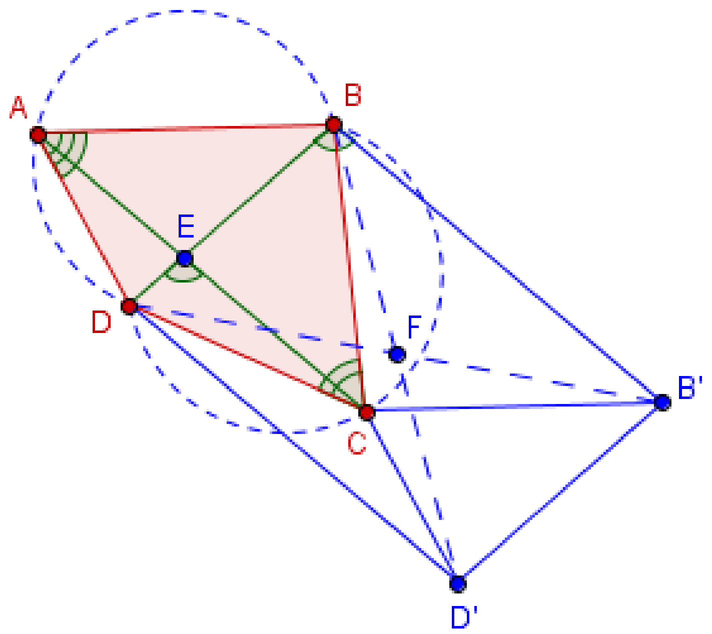
Construção:

1. Considere os lados do quadrilátero ABCD e o ângulo ∠AED compreendido entre os lados BA e CD deste quadrilátero.
2. Construir o triângulo ABC' tendo os lados AB e BC'=DC e o ângulo ∠ABC' que é o suplementar do ângulo dado.

3. Traçar as circunferências (A, AG) e (B, BH) e encontrar um segmento paralelo e igual a GH tal que as extremidades deste segmento pertençam cada uma a uma das circunferências (veja o problema 271).
4. Traçar os segmentos AD e BC passando pelos pontos G e H respectivamente.
5. O quadrilátero ABCD é o procurado.

280. Construir um quadrilátero, conhecendo as diagonais, seu ângulo e dois ângulos opostos.

Análise: Seja ABCD um quadrilátero com AC e BD suas diagonais. Considere ∠A e ∠C os ângulos relativos aos vértices opostos A e C do quadrilátero respectivamente, e ∠DEC o ângulo compreendido entre suas diagonais. Seja DBB'D' o paralelogramo cujos lados são o resultado da translação das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme o teorema 2 e a figura abaixo. Desta forma, obtemos que o ângulo ∠DBB' é congruente ao ângulo ∠DEC, pois BB' é paralelo AC. Note que os vértices A e C do quadrilátero ABCD pertencem, respectivamente, aos arcos-capazes dos ângulos ∠A e ∠C com relação ao segmento DB, ou seja, o segmento AC é paralelo e de igual medida do segmento BB', e cada uma de suas extremidades pertence a uma das circunferências correspondentes aos arcos-capazes citados acima.



Construção:

1. Considere AC e BD as diagonais do quadrilátero ABCD, ∠A e ∠C os ângulos relativos aos vértices opostos A e C do quadrilátero respectivamente, e ∠DEC o ângulo compreendido entre suas diagonais.
2. Construir o paralelogramo DBB'D' com DD'=BB'=AC, DB'=DB e o ângulo ∠DBB'= ∠DEC.

3. Traçar o arco-capaz do ângulo $\angle BCD$ com relação ao segmento DB e o arco-capaz do ângulo $\angle DAB$ com relação ao segmento DB.
4. Encontrar o segmento AC, paralelo e igual a BB', tal que cada uma de suas extremidades pertença a um arco-capaz construído anteriormente (veja o problema 271).
5. O quadrilátero ABCD é o procurado.

Observação: No item 3 da construção, um dos três casos abaixo pode ocorrer:

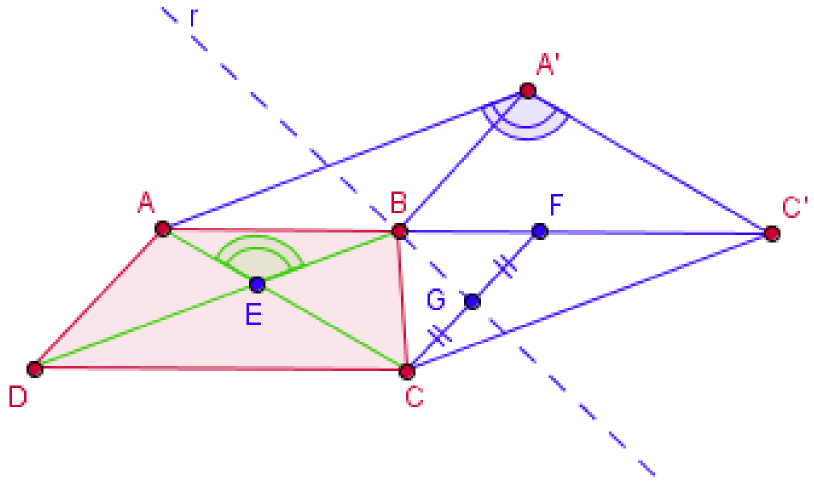
i) Nenhum segmento de comprimento AC pode ter suas extremidades em cada um dos arcos-capazes. Neste caso o problema não tem solução.

ii) Existe um único segmento AC com extremidades em cada um dos arcos-capazes. Neste caso existe apenas uma solução.

iii) Existem dois segmentos de comprimento AC com extremidades em cada um dos arcos-capazes. Nesse caso o problema tem duas soluções.

281. Construir um trapézio conhecendo as diagonais, seu ângulo e a soma de dois lados sucessivos.

Análise: Considere o trapézio ABCD, com AB paralelo a DC e o paralelogramo AA'C'C formado pelas diagonais do trapézio e pelo ângulo entre elas, conforme o teorema 2 e a figura abaixo. Note que por se tratar de um trapézio, ao construir o paralelogramo transladando DC para BC', obtemos A, B e C' colineares, pois AB é paralelo a DC. Assim, se A +BF=AB+BC, com A, B e F colineares, por LLA (lado, lado, ângulo) de congruência de triângulos, temos que a mediatriz r de CF passa por B, pois CB=FB, CG=FG, com G ponto médio de CF, e o ângulo formado pela reta r com o segmento CF é reto. Logo, os triângulos CBG e FBG são congruentes.



Construção:

1. Considere as diagonais DB e AC, o ângulo ∠AEB onde E é a intersecção dessas diagonais e o segmento AB+BC do trapézio ABCD.
2. Construa o quadrilátero AA'C'C com AA'=DB, A'C'=AC e o ângulo ∠AA'C'= ∠AEB.
3. Trace a diagonal AC' e marque o ponto F tal que A, C' e F sejam colineares e AF=AB+BC.
4. Trace a mediatriz r do segmento CF.
5. Marque o ponto B tal que B é a intersecção de r com o segmento AC'.
6. Translade o segmento BC' tal que C' caia em C, obtendo o ponto D.
7. O trapézio ABCD é o procurado.

282. Construir um triângulo, conhecendo ma, o ângulo (mb ,mc) e a sua área.

Observação: Entendemos que neste problema a área do triângulo ABC é dada através do produto de dois segmentos, $\mathbf{A_{ABC} = xy}$, com x e y segmentos dados.

Análise: Considere o triângulo ABC com os segmentos $\mathbf{AD = m_a}$, $\mathbf{BF = m_b}$ e $\mathbf{CE = m_c}$ suas medianas e G o seu baricentro. Seja F'BC' o triângulo cujos lados são o dobro das medianas do triângulo ABC, conforme o teorema 1 e a figura (ii) abaixo. Como os pontos B, G, F e F' são colineares e, segundo o teorema 1, EC é paralelo a BC', o ângulo ∠F'GC, formado por $\mathbf{m_b}$ e $\mathbf{m_c}$ é congruente ao ângulo ∠F'BC'. Desta forma, sabendo que, F'C'=2AD, temos que o ponto B está contido no arco-capaz do ângulo ∠F'GC com relação ao segmento F'C'.

Seja F'C'=2AD=w, assim temos, pelo teorema 1, que $\mathbf{\frac{wh}{2} = A_{F'BC'} = 3A_{ABC} = 3xy}$, então $\mathbf{6xy = wh}$ e consequentemente $\mathbf{\frac{h}{2x} = \frac{3y}{w}}$, com h=altura do triângulo F'BC'. Considere MN=w, NR=2x, MQ=3y e os segmentos NQ e RS paralelos conforme a figura (i) abaixo. Então, pelo teorema de Tales, QS=h.

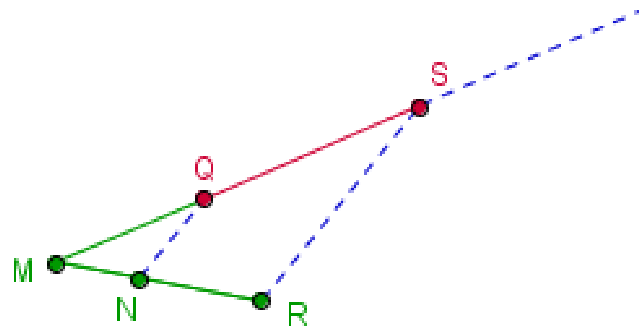


Figura (i)

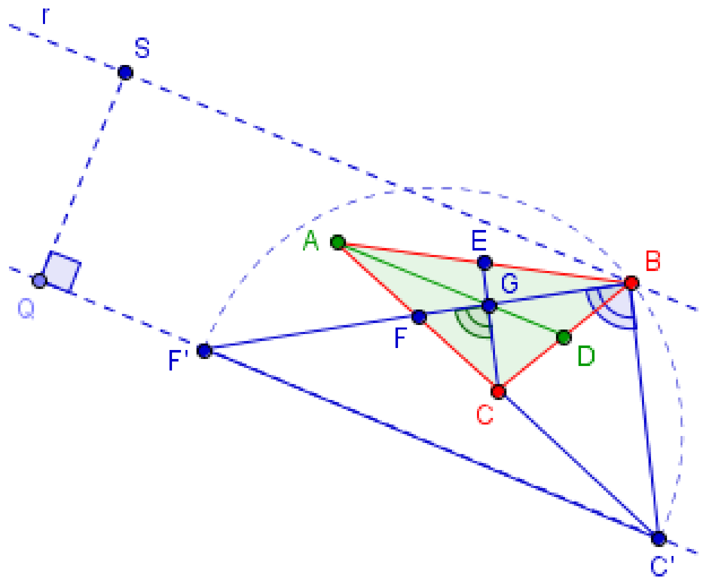


Figura (ii)

Construção:

1. Considere o segmento AD, mediana relativa ao lado BC, o ângulo $\angle$FGC formado pelas outras duas medianas do triângulo ABC e a área do triângulo ABC, dados.
2. (i) Marque a semirreta MQ e o segmento MR formando um ângulo maior do que 0° e menor que 180°, com MR=MN+NR, e tais que MQ=3y, MN=w e NR=2x.
3. Marque o segmento NQ e o segmento RS paralelo a NQ com o ponto S na semirreta MQ.
4. (ii) Trace o segmento F'C' = 2AD.
5. Trace o arco-capaz do ângulo $\angle$FGC com relação ao segmento F'C'.
6. Trace a reta r paralela a F'C', no mesmo semi-plano do arco-capaz em relação à reta F'C', cuja distância a esta reta é o comprimento do segmento QS.
7. Na intersecção do arco-capaz com a reta r marque o ponto B.
8. Marque o ponto médio F do segmento F'B.
9. Marque o ponto C entre F e C' tal que $\mathbf{FC} = \frac{1}{3}\mathbf{FC'}$.

10. Marque o ponto A tal que F seja ponto médio de AC.

11. O triângulo ABC é o procurado.

Observação: No item 7 da construção, um dos três casos abaixo pode ocorrer:

i) O arco-capaz e a reta r não se intersectam. Neste caso o problema não tem solução.

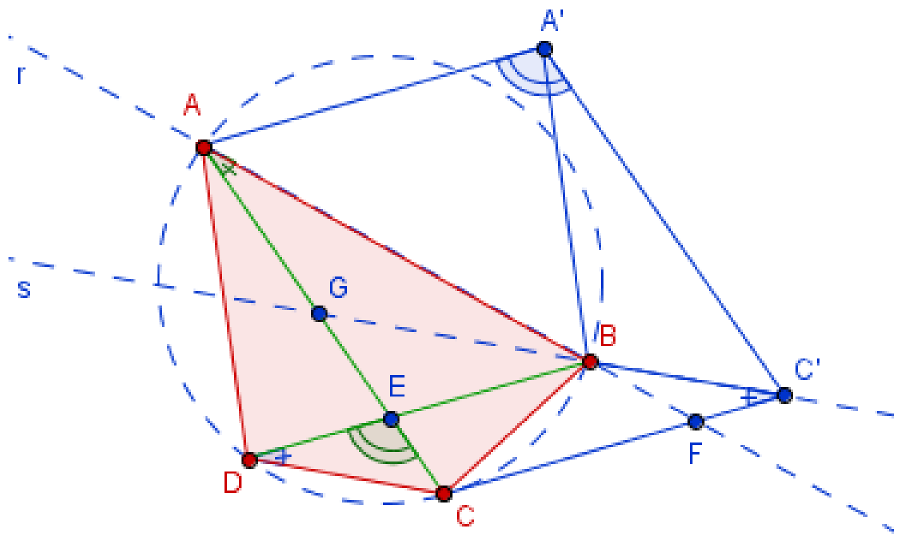
ii) O arco-capaz e reta r são tangentes. Neste caso existe apenas uma solução.

iii) O arco-capaz e a reta r se intersectam em dois pontos. Nesse caso o problema tem duas soluções.

284. Construir um quadrilátero inscrito, conhecendo as diagonais, seu ângulo e o ângulo de uma diagonal e um lado.

Análise: Considere o quadrilátero ABCD inscrito, cujos segmentos AC e DB são suas diagonais, ∠DEC o ângulo entre essas diagonais e ∠CAB o ângulo entre a diagonal AC e o lado AB desse quadrilátero. Seja AA'C'C o paralelogramo formado pela translação das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme o teorema 2 e a figura abaixo.

Observe que como o quadrilátero ABCD é inscrito, o ângulo ∠BDC é congruente ao ângulo ∠CAB, pois estes ângulos estão inscritos no mesmo arco CB. Temos também que os segmentos CC' e DB são paralelos, assim como os segmentos BC' e DC são paralelos, portanto DBC'C é um paralelogramo, e desta forma, os ângulos ∠BDC e ∠BC'C são congruentes. Note que como DB e AA' são paralelos e AC e AC' são paralelos os ângulos ∠DEC e ∠AA'C' são congruentes.



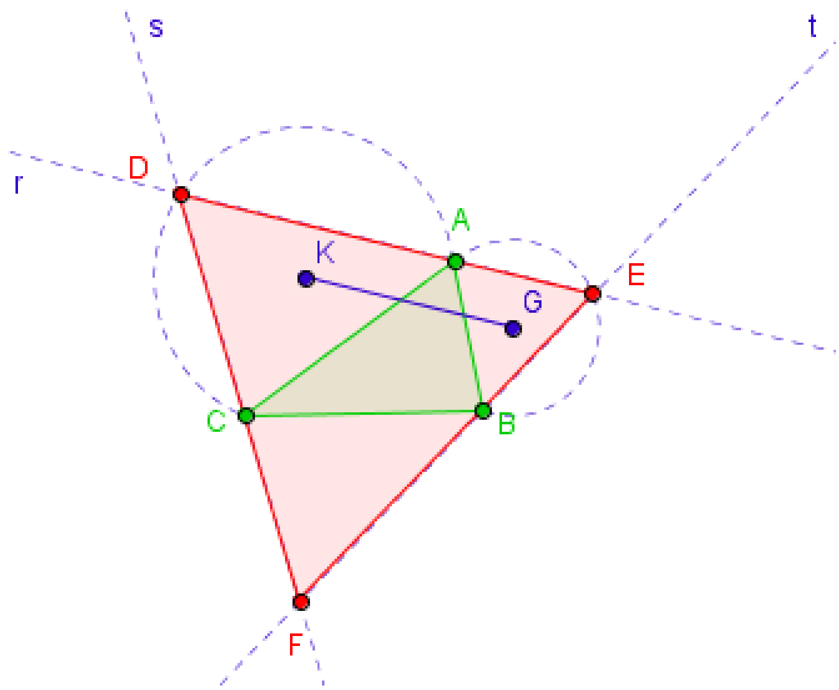
Construção:

1. Considere os segmentos AC e DB as diagonais do quadrilátero ABCD, ∠DEC o ângulo entre essas diagonais e ∠CAB o ângulo entre a diagonal AC e o lado AB desse quadrilátero.
2. Construir o paralelogramo AA'C'C, cujos lados são as diagonais dadas e o ângulo é o ângulo das diagonais também dado.

3. Traçar a reta s passando por C', formando o ângulo $\angle CC'G = \angle CAB$ (dado) com G pertencendo à reta s.
4. Traçar a reta r passando por A, formando o ângulo $\angle CAF = \angle CAB$ (dado) com F pertencendo a reta r.
5. O ponto de intersecção entre as retas r e s é o ponto B.
6. O segmento BD é a translação de C'C tal que C' cai em B.
7. O quadrilátero ABCD é o procurado.

286. Circunscrever a um triângulo dado, o maior triângulo equilátero possível.

Análise*:* Considere o triângulo ABC e o triângulo eqüilátero DEF, maior possível, circunscrito nele. Como o triângulo DEF é eqüilátero, temos que os ângulos $\angle AEB$, $\angle ADC$ e $\angle CFB$ são iguais a $60°$ e, portanto estão inscritos cada um, em um arco-capaz de $60°$ com relação a cada um dos lados do triângulo ABC. Note que, como o triângulo DEF é eqüilátero e o maior possível inscrito no triângulo ABC temos que cada lado do triângulo DEF, com extremidades em um arco-capaz diferente e passando por um vértice do triângulo ABC, deve ter a maior medida possível. Assim, de acordo com a análise feita no problema 262, a metade da medida do lado DE do triângulo DEF deve ser igual à medida do segmento KG que une os centros das circunferências correspondentes aos arcos-capazes de $60°$ com relação aos segmentos CA e AB. Portanto, o segmento DE deve ser paralelo a KG. Isso determinará o triângulo DEF.



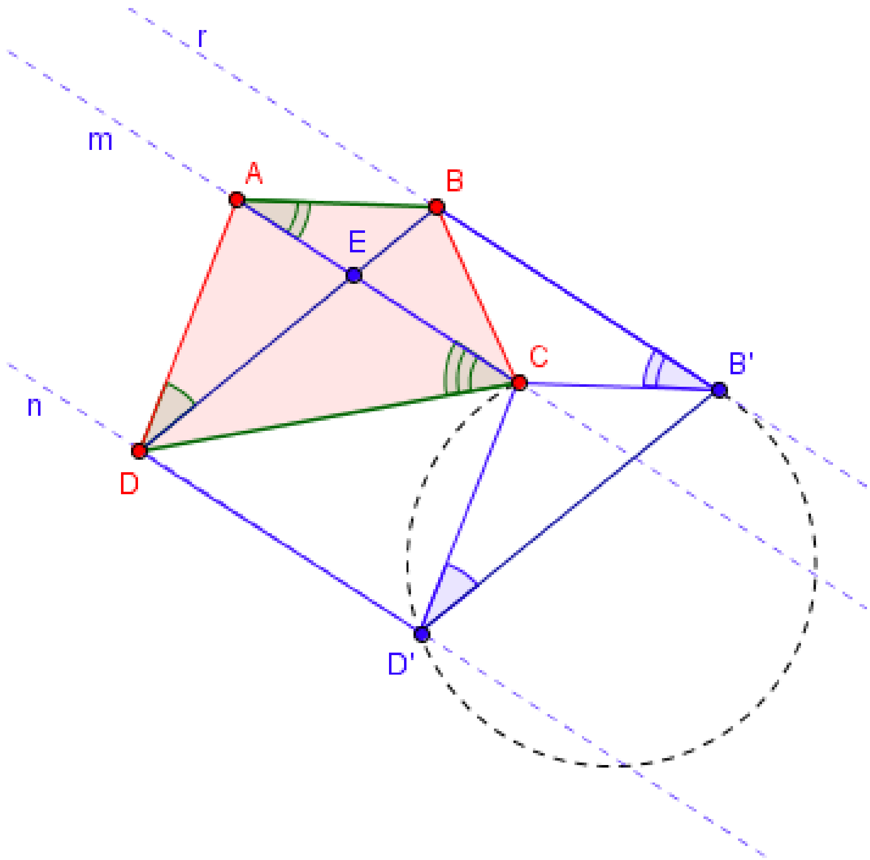
Construção:

1. Considere o triângulo ABC dado.
2. Trace o arco-capaz do ângulo $\angle 60°$ com relação ao segmento AB e faça o mesmo com o segmento AC.

3. Trace o segmento KG, com K e G centros das circunferências correspondentes aos arcos traçados no item 2.
4. Trace por A a reta r, paralela a KG.
5. Marque o ponto D na intersecção do arco de centro K, com a reta r.
6. Marque o ponto E na intersecção do arco de centro G, com a reta r.
7. Trace as retas, s passando por D e C e t passando por E e B com a intersecção destas tem-se o ponto F.
8. O triângulo DEF é o procurado.

288. Construir um quadrilátero ABCD, conhecendo AB, CD e o ângulo ∠BAC, ângulos ∠ACD e ∠BDA.

Análise: Considere o quadrilátero ABCD com os segmentos AB e DC, dois lados opostos e os ângulos ∠BAC, ∠ACD, e ∠ADB, com AC e DB diagonais do quadrilátero ABCD. Seja DBB'D' o paralelogramo formado a partir da translação das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme mostra o teorema 2 e a figura abaixo. Então temos do paralelismo dos segmentos AC e BB', AB e CB' que os ângulos ∠BAC e ∠BB'C são congruentes. Da mesma forma, do paralelismo dos segmentos AD e CD', BD e B'D' temos que os ângulos ∠ADB e ∠CD'B' são congruentes. Note que o ponto D está contido no arco-capaz do ângulo ∠CD'B' em relação ao segmento CB'.



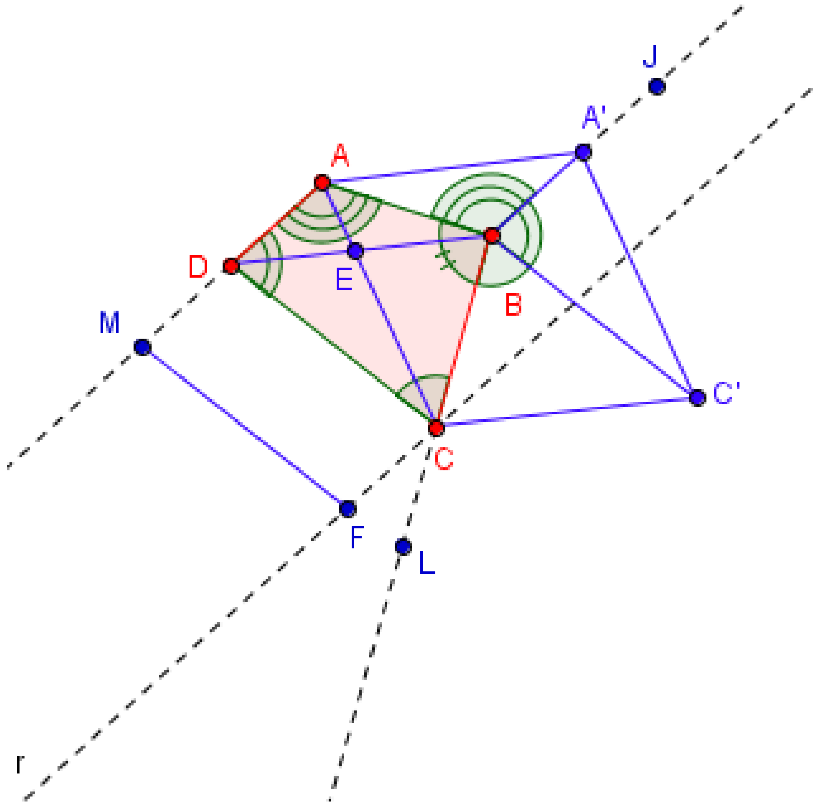
Construção:

1. Considere os segmentos AB e DC, lados do quadrilátero ABCD, e os ângulos ∠BAC, ∠ACD, e ∠ADB, com AC e DB diagonais do quadrilátero ABCD.

2. Trace o segmento CB'=AB.
3. Trace a reta r passando por B', e tal que o ângulo formado entre r e CB' seja congruente ao ângulo $\angle$BAC.
4. Trace por C a reta m, paralela a r.
5. Trace o segmento CD tal que o ângulo formado entre m e CD seja o ângulo $\angle$ACD e com m entre B' e D (conforme a figura de analise).
6. Trace a reta n passando pos D e paralela a m.
7. Marque o arco-capaz do ângulo $\angle$BAC com relação ao segmento CB' com D o ponto de intersecção do arco com a reta n.
8. Translade DB' tal que tal que D' cai no ponto D, o ponto B será o transladado de B'.
9. Translade CB' tal que tal que B' cai no ponto B, o ponto A será o transladado de C.
10. O quadrilátero ABCD é o procurado.

289. Construir um quadrilátero, conhecendo dois lados opostos e todos os ângulos.

Análise: Considere AB e DC lados opostos do quadrilátero ABCD, e ∠DAB, ∠ABC, ∠BCD e ∠CDA os ângulos do quadrilátero ABCD. Seja AA'C'C o paralelogramo cujos lados são o transladado das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme mostra o teorema 2 e a figura abaixo. Com base no teorema 2 temos que os ângulos ∠DAB, ∠ABC, ∠BCD e ∠CDA são congruentes aos ângulos ∠A'BA, ∠ABC (o próprio), ∠CBC' e ∠C'BA' e que os segmentos DC e BC' são congruentes e paralelos.



Construção:

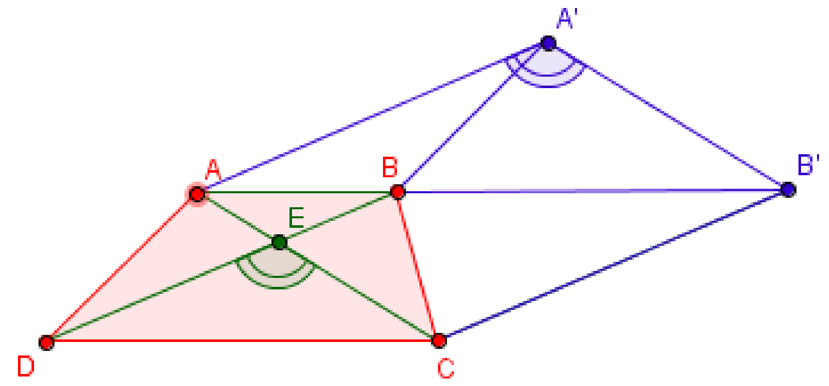
1. Considere AB e DC lados opostos do quadrilátero ABCD, e ∠DAB, ∠ABC, ∠BCD e ∠CDA os ângulos do quadrilátero ABCD.
2. Marque os segmentos BA e BC' e as semirretas BJ e BL, de origem no ponto B, tal que a circunferência de centro em B esteja dividida nos ângulos ∠ABJ=∠DAB, ∠JBC'=∠CDA, ∠C'BL=∠BCD e ∠ABL com J

e L pontos das respectivas semirretas e os segmentos AB e BC'=DC de medidas dadas.

3. Trace a semirreta AM de origem em A, e tal que $\angle$BAM seja congruente e alterno interno ao ângulo $\angle$ABJ.
4. Translade o segmento BC' tal que B caia em M e F seja o transladado de C'.
5. Trace por F a reta r paralela a semirreta AM com a intersecção de r com a semirreta BL encontra-se o ponto C.
6. Trace o segmento CD paralelo ao segmento FM cujo ponto D pertença a semirreta AM.
7. O quadrilátero ABCD é o procurado.

290. Construir um trapézio, conhecendo as diagonais, seu ângulo e um lado.

Análise: Considere o trapézio ABCD sendo o ponto E a intersecção entre suas diagonais. Seja AA'B'C o paralelogramo cujos lados são o transladado das diagonais do trapézio ABCD, conforme mostra o teorema 2 e a figura abaixo. Temos do paralelismo de AC e A'B', DB e AA' que os ângulos ∠DEC e ∠AA'B' são congruentes. Por se tratar de um trapézio, obtemos que o ponto B pertence a diagonal AB' do paralelogramo AA'B'C, como mostra o problema 281**.** Observe, com base no teorema 2, que os segmentos BB' e CD são congruentes e paralelos.

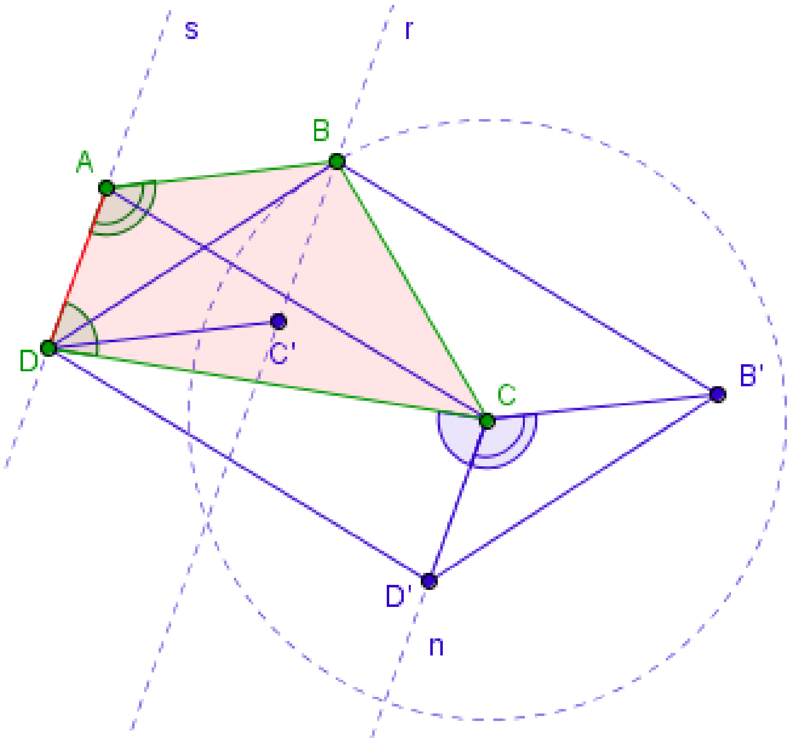


Construção:

1. Considere os segmentos AB e as diagonais AC e BD, o lado e as diagonais do trapézio ABCD. Seja ∠CED o ângulo entre as diagonais do trapézio ABCD, tal que E é a intersecção dessas diagonais.
2. Construa o paralelogramo AA'B'C' com AA'=CB'=DB, A'B'=AC e o ângulo ∠B'A'A=∠CED.
3. Sobre o segmento AB' marque o ponto B tal o segmento AB é o dado.
4. Trace o segmento DC transladando o segmento B'B tal que B' caia em C e D será o transladado de B.
5. O trapézio ABCD é o procurado.

291. Construir um quadrilátero conhecendo três lados, e os ângulos adjacentes ao quarto lado.

Análise: Considere o quadrilátero ABCD, sendo $\angle BAD$ e $\angle ADC$ os ângulos internos deste quadrilátero, relativos aos vértices A e D, respectivamente. Seja BB'D'D o paralelogramo cujos lados são a translação das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme o teorema 2 e a figura abaixo. Com base no teorema 2 obtemos que os ângulos $\angle ADC$ e $\angle D'CD$ são congruentes assim como os ângulos $\angle BAD$ e $\angle B'CD'$ são congruentes. Note também que os segmentos CB' e AB, são congruentes e paralelos, assim como os segmentos AD e CD'. Desta forma a reta r, que passa por B e é paralela ao segmento AD intersecta a circunferência (C, CB) no ponto B.



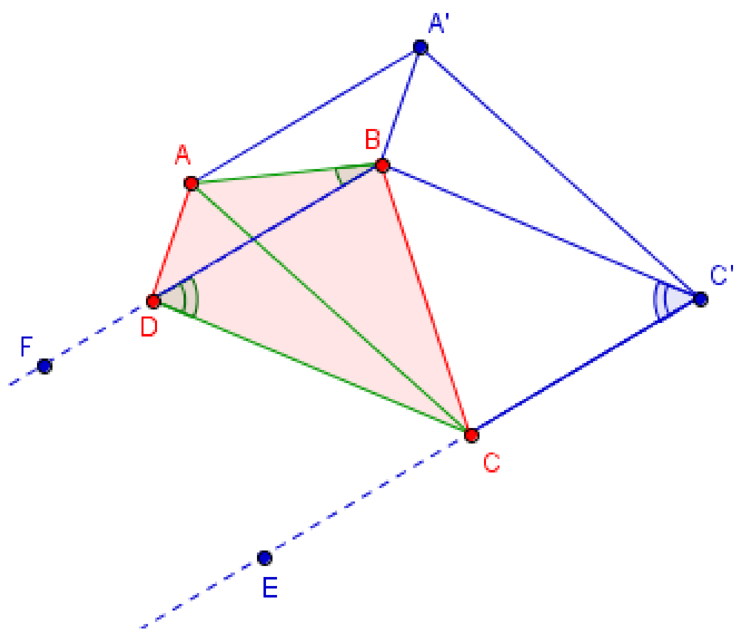
Construção:

1. Sejam os segmentos AB, BC e CD lados do quadrilátero ABCD e os ângulos internos $\angle BAD$ e $\angle ADC$ relativos aos vértices A e D deste quadrilátero, respectivamente.
2. Trace o segmento DC.
3. Trace a semirreta n de origem no ponto C, tal que o ângulo entre DC e n seja o ângulo $\angle ADC$.

4. Trace o segmento CB'=AB, tal que o ângulo entre CB' e n seja o ângulo $\angle$BAD.
5. Trace por D a reta s, paralela a semirreta n.
6. Translade o segmento CB' tal que C caia em D, o ponto C' será o transladado de B'.
7. Marque a circunferência (C, BC).
8. Trace por C' a reta r, paralela a reta s.
9. Marque o ponto B na intersecção de r com a circunferência (C, BC).
10. Marque o ponto A, tal que o segmento AB é dado, e A pertença a reta s.
11. O quadrilátero ABCD é o procurado.

292. Construir um quadrilátero ABCD, conhecendo AB, CD, AC, ângulo ∠ABD e ângulo ∠BDC.

Análise: Considere o quadrilátero ABCD e o paralelogramo AA'C'C cujos lados são a translação das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme mostra o teorema 2 e a figura abaixo. Com base no teorema 2, obtemos que do paralelismo e congruência dos segmentos DB e CC', DC e BC' os ângulos ∠BDC e BC'C são congruentes.

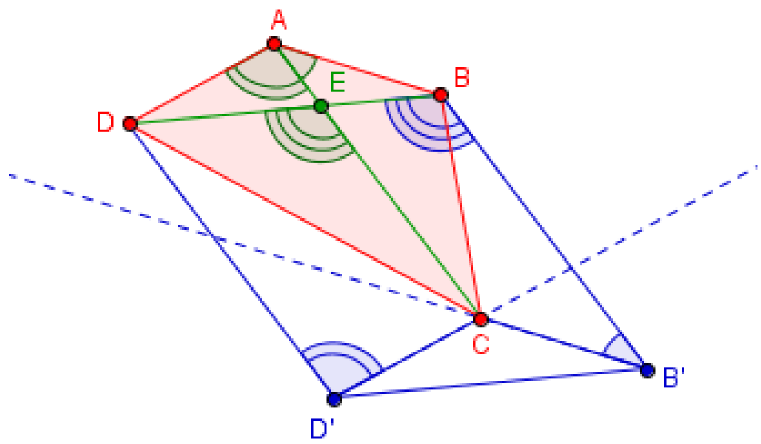


Construção:

1. Considere os segmentos AB, DC e AC e os ângulos ∠ABD e ∠BDC do quadrilátero ABCD, dados.
2. Trace a semirreta C'E de origem em C'.
3. Trace o segmento C'B=DC tal que o ângulo ∠EC'B = ∠BDC.
4. Trace a semirreta BF, de origem em B e paralela a C'E.
5. Trace o segmento AB tal que o ângulo ∠FBA = ∠ABD.
6. Marque o segmento AC tal que C pertence a semirreta C'E e AC tem medida dada.
7. Marque o segmento CD tal que D pertence a semirreta BF e CD tem medida dada.
8. O quadrilátero ABCD é o procurado.

293. Construir um quadrilátero ABCD, conhecendo ângulo $\angle$BAC, ângulo $\angle$CAD, as diagonais e seu ângulo.

Análise: Seja ABCD um quadrilátero e DBB'D' o paralelogramo cujos lados são a translação das diagonais deste quadrilátero, conforme mostra o teorema 2 e a figura abaixo. Com base no teorema 2 obtemos, do paralelismo e congruência dos segmentos DB e D'B', BB' e AC, AC e DD', AD e D'C, e CB'e AB, que os ângulos $\angle$DAC e $\angle$CD'D, $\angle$CAB e $\angle$BB'C, e $\angle$DEC e $\angle$DBB' são congruentes.



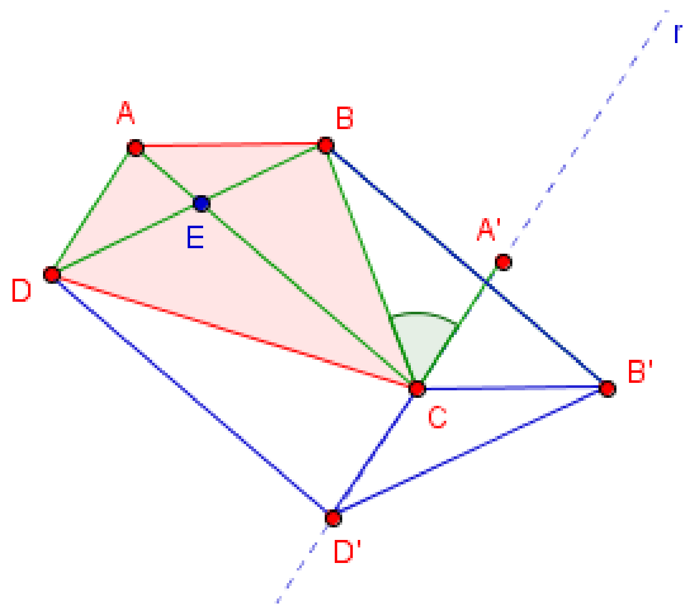
Construção:

1. Considere os segmentos AC, DB e os ângulos $\angle$DAC, $\angle$CAB, DEC do quadrilátero ABCD com o ponto E a intersecção entre as diagonais.
2. Construa o paralelogramo DBB'D' cujos lados são congruentes a DB e AC e o ângulos $\angle$DBB' = $\angle$DEC.
3. Trace a semirreta de origem D' tal que o ângulo entre esta e o segmento DD' seja congruente ao ângulo $\angle$DAC e de forma que esta semirreta tenha pontos interiores ao paralelogramo DBB'D'.
4. Trace a semirreta de origem B' tal que o ângulo entre esta e o segmento BB' seja congruente ao ângulo $\angle$CAB e de forma que esta semirreta tenha pontos interiores ao paralelogramo DBB'D'.
5. Na intersecção dessas semirretas (item 1 e 2), marque o ponto C.
6. Translade o segmento D'D tal que o ponto D' caia em C. O ponto A será o transladado de D.
7. O quadrilátero ABCD é o procurado.

298. Construir um quadrilátero, conhecendo as diagonais, dois lados opostos e seu ângulo.

Análise: Considere o quadrilátero ABCD com $\angle$BCA' o ângulo entre os lados AD e BC, tal que o segmento A'C é congruente e paralelo a AD. Seja DBB'D' o paralelogramo cujos lados são a translação das diagonais do quadrilátero ABCD, conforme o teorema 2 e a figura abaixo. Com base no teorema 2 temos que os segmentos CD' e AD são paralelos e congruentes. Assim, da congruência e paralelismo dos segmentos A'C e AD, temos que os pontos A', C e D' são colineares e C está entre A' e D'.

Ainda pelo teorema 2, temos que os segmentos AC e DD' são paralelos e congruentes.



Construção:

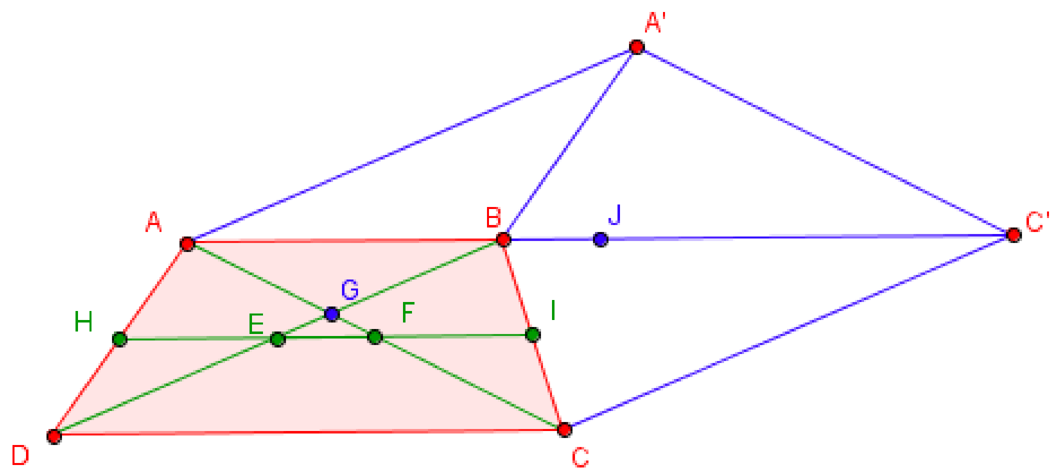
1. Considere os segmentos, AD e BC lados do quadrilátero ABCD, AC e DB as diagonais deste quadrilátero e o ângulo $\angle$BCA' com A'C congruente e paralelo ao segmento AD.
2. Trace o ângulo $\angle$BCA' com o segmento CA' pertencendo a reta r.
3. Marque o ponto D' pertencendo a reta r, e tal que C está entre A' e D', com A'C=CD'.
4. Marque o ponto D, tal que D é a intersecção das circunferências (D',CA) e (B, BD).

5. Marque o ponto A, tal que A é a intersecção das circunferências (C, CA) e (D, DA).
6. O quadrilátero ABCD é o procurado.

305. Construir um trapézio, conhecendo as diagonais, o segmento que une os meios das diagonais e o segmento que une os meios dos dois lados opostos.

Observação: Entendemos que no enunciado deste problema podemos substituir a frase “o segmento que une os meios...” por “o segmento que une os pontos médios...”.

Análise: Considere o trapézio ABCD com HI o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos e EF o segmento que une os pontos médios das diagonais deste trapézio. Seja AA’C’C o paralelogramo cujos lados são a translação das diagonais do trapézio ABCD, conforme o teorema 2 e a figura abaixo. Note que os pontos H, E, F e I são colineares, pois os segmentos AB e DC são paralelos e AD, BC, AC e BD suas transversais, e portanto os pontos médios desses segmentos (AD, BC, AC e BD) estão sobre uma mesma reta. Perceba também que o segmento HE une os pontos médios dos lados AD e DB do triângulo ADB, e assim AB=2HE, da mesma forma o segmento FI une os pontos médios dos lados AC e CB do triângulo ACB, logo AB=2FI. Conclusão AB=HE+FI. Seja J o ponto médio do segmento AC’, temos que como AC’=2HI (teorema 2), então HI=AJ.



Construção:

1. Considere os segmentos AC e DB as diagonais do trapézio ABCD, HI o segmento que une os lados opostos (não paralelos) e o segmento EF que une os pontos médios das diagonais deste trapézio.
2. Construa o triângulo ACC’ cujos lados são AC’=2HI, AC e CC’=DB.
3. Marque o ponto J, tal que J é ponto médio de AC’.

4. Encontre o ponto B, entre A e J tal que JB=EF.
5. Translade o segmento C'C tal que C' caia em B, o ponto D será o transladado de C.
6. O trapézio ABCD é o procurado.

Observação: Caso seja dado, ao invés do segmento HI, o segmento que une os pontos médios dos lados paralelos, então no item 2 construímos o triangulo ACA' cujos lados são AC, AA'=DB e A'C igual ao segmento dado. Depois é só marcar o ponto J como ponto médio de A'C.

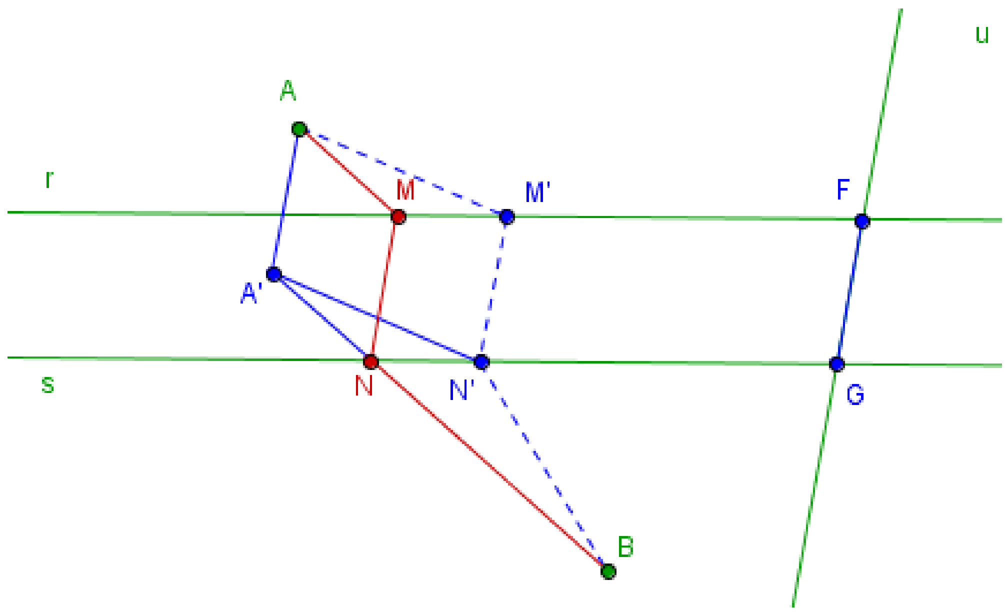
308. Dão-se dois pontos A e B e entre eles duas paralelas. Traçar entre os pontos, um segmento MN de direção dada, tal que a soma AM+MN+NB seja mínima.

Observação: O enunciado dado é muito incompleto. Entendemos que o segmento MN é tal que suas extremidades estão contidas, cada uma, em uma das retas.

Análise: Sejam r e s retas paralelas e u uma reta transversal a elas de direção dada.

Sejam os pontos F e G as intersecções entre u com r e s respectivamente. Os pontos A e B são tais que r e s estão entre A e B, conforme a figura abaixo.

Transladando o ponto A na direção, sentido e módulo de FG, obtemos o ponto A'. O ponto N é a intersecção do segmento A'B com a reta s. Transladando N na direção, sentido e modulo de GF obtemos o ponto M sobre a reta r. Note que AM+NB=A'B. Observe que para N', qualquer, distinto de N e contido em s, temos que A'N'+N'B é maior que A'B, pela desigualdade triangular. Portanto AM'+M'N'+N'B=A'N'+M'N'+N'B > A'B +M'N'=A'B+MN= A'N+BN+MN=AM+MN+NB.



Construção:

1. Sejam r e s retas paralelas com A e B pontos, tais que r está entre A e s, e s está entre B e r. Considere a reta u transversal as retas r e s.

2. Marque os pontos F e G na intersecção da reta u, com as retas r e s, respectivamente.
3. Translade a reta u, tal que o ponto F caia no ponto A e seja A’ o ponto resultante da translação de G.
4. Trace o segmento A’B, tal que a intersecção de da reta s com A’B é o ponto N.
5. Translade o segmento AA’, tal que A’ caia em N e a intersecção dessa translação com a reta r é o ponto M.
6. O segmento MN é o segmento procurado.

4 CONCLUSÃO

No início da realização deste trabalho ao me deparar com um problema de construção geométrica meu primeiro instinto foi pegar os elementos dados no problema e tentar fazer essa construção. Quando me reunia com o professsor José Luiz Rosas Pinho (orientedor) ele me mostrava o quanto facilitava fazer a análise do problema resolvido antes de partir para construção do problema. Através da experiência, tentando e fazendo algumas construções, me convenci de que este processo de análise do problema é indispensável, ainda mais no caso de um problema mais elaborado.

Essa análise é feita supondo o problema resolvido e, através dela, tentamos observar elementos geométricos (pontos, segmentos, circunferências etc) que podem ser obtidos com régua e compasso e que nos levam, finalmente, à construção desejada.

Outra experiência interessante que tive, surgiu na hora de escrever a análise e a construção (passo a passo) do problema. Pude perceber que após uma análise visual do problema era mais facil escrever a construção passo a passo e depois escrever a análise, pois dessa forma eu conseguia usar para analise só as observações fundamentais e não carregar de informações desnecessárias para a construção.

As estruturas propostas por Petersen em seu livro facilitam muito na análise e na resolução dos problemas de construção geométrica relacionados com triângulos e quadriláteros.

Esse trabalho pode ser continuado, para os interessados no assunto, ainda em cima do livro Construções Geométricas de Petersen, com a resolução de problemas envolvendo outras transformações como a rotação e a reflexão, que serve de sugestão para trabalhos futuros.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. PETERSEN, Julius; **Construções Geométricas**. São Paulo: Nobel, 1963.
2. WAGNER, Eduardo; **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM; 2001.
3. NETTO, Sérgio L.; **Construções Geométricas**, exercícios e soluções. Rio de Janeiro: SBM; 2010.
4. **Julius Petersen**. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Julius_Petersen>. Acesso em: 18/11/2012.
5. J J O'CONNOR, E F ROBERTSON. **Petersen Biography**. Disponível em:. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Petersen.html>. Acesso em: 18/11/2012.