1A) - Resposta (e)

Uma partícula de massa m está sujeita a força central $\vec{F}(r) = f(r)\hat{r}$. Um experimento mostrou que a trajetoria da partícula tem forma $r(\varphi) = 2R\cos(\varphi)$ em coordenadas polares sendo R uma constante. Calcule a forma da força radial. A parte radial da aceleração em coordenadas polares tem forma

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

e L abaixo é uma constante que corresponde ao valor do momento angular.

(a) $f(r) = -\frac{4L^2R}{m^2}\frac{1}{r^4}$

(b) $f(r) = -\frac{8L^2R^2}{m^2}\frac{1}{r^5}$

(c) $f(r) = -\frac{4L^2}{m^2}\frac{1}{r^3}$

(d) $f(r) = -\frac{8L^2R^2}{m^2}\frac{1}{r^4}$

(e) n. d. a.

A função $f(r)$ é definida como $f(r) = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$. Para uma força radial o momento angular é c onservado $L = mr^2\dot{\varphi} = const$. Dai podemos eliminar $\dot{\varphi}$ o que leva a formula

$$f(r) = -\frac{L^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$$

Substituindo $r = 2R\mathrm{cos}\varphi$ temos

$$\boxed{f(r) = -\frac{8L^2R^2}{m}\frac{1}{r^5}},$$

portanto n. d. a.

1B) - Resposta (c)

Uma partícula de massa m tem a velocidade inicial v_0. Entrando num meio material a partícula esta sujeita a força de freamento proporcional a potencia n da velocidade dela $F = -k(\frac{dx}{dt})^n$ sendo $0 \leq n < 1$. Calcule o tempo T necessário para a partícula parar.

(a) $T = \frac{m}{k} v_0^{2-n}$

(b) $T = \frac{m}{k} v_0^{1-n}$

(c) $T = \frac{m}{k} \frac{v_0^{1-n}}{1-n}$

(d) $T = \frac{m}{k} n v_0^{n-1}$

(e) n. d. a.

A equação de Newton para $v = \dot{x}$ tem forma $m\dot{v} = -kv^n$ dai

$$\frac{dv}{v^n} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \int_{v_0} v \frac{dv'}{v'^n} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt'$$

o que resulta em

$$\frac{1}{1-n}\left(v^{1-n} - v_0^{1-n}\right) = -\frac{k}{m} t \Rightarrow \boxed{v(t) = \left[v_0^{1-n} - \frac{k}{m}(1-n)t\right]^{\frac{1}{1-n}}}$$

A partícula para quando $v(T) = 0$ o que da $\boxed{T = \frac{m}{k} \frac{v_0^{1-n}}{1-n}}$.

2A) - Resposta (d)

A função de Lagrange para um problema unidimensional de uma partícula de massa m em um campo de força é dada por

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - U(x)$$

onde $c = const$. Identifique qual das funções abaixo é equivalente à função de Lagrange L? O parametro a é constante.

(a) $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - U(x) + (\frac{dx}{dt} - a\,x)e^{at}$

(b) $L = -mc^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - U(x)$

(c) $L = +mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - U(x + a)$

(d) $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - U(x) + a\frac{x}{\sqrt{x^2}}\frac{dx}{dt}$

(e) n. d. a.

A differença entre a Lagrangiana original e equivalente e dada por uma derivada temporal total de qualquer função $f(x,t)$. Assim

$$\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2}\frac{2x\dot{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\frac{d}{dt}x^2}{2\sqrt{x^2}} = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2}$$

2B) - Resposta (d)

Encontre a frequencia ω de pequenas oscilações para um sistema dinâmico cuja função de Lagrange tem forma

$$L = \frac{m}{2}\left[1+\sin^2(\alpha x)\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - A\left[\cos(\alpha x) - \frac{\alpha}{2}x\right].$$

(a) $\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{A\alpha^2}{m}$

(b) $\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{A\alpha^2}{m}$

(c) $\omega^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{A\alpha^2}{m}$

(d) $\omega^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}\frac{A\alpha^2}{m}$

(e) n. d. a.

A energia potencial tem forma $U(x) = A\left[\cos(\alpha x) - \frac{\alpha}{2}x\right]$. Dai

$$\begin{aligned} U'(x) &= -A\alpha\left[\sin(\alpha x) + \frac{1}{2}\right] \\ U''(x) &= -A\alpha^2 \cos(\alpha x) \end{aligned}$$

O ponto de equilibro estável x_0 é tal que $U'(x_0) = 0$ e $U''(x_0) > 0$. Dai $\boxed{x_0 = \frac{7\pi}{6\alpha}}$. Tomando $x = x_0 + \xi$ onde $\xi = x - x_0$ podemos expandir L em torno de ponto x_0

$$L = \frac{m}{2}\left[1+\sin^2(\alpha x_0)\right]\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - U(x_0) - \frac{1}{2}U''(x_0)\xi^2 + \dots$$

dai

$$L = \frac{1}{2}M\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}K\xi^2 + const$$

onde $M := \frac{5}{4}m$ e $K := U''(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}A\alpha^2$. O quadrado da frequência das oscilações lineares é definido como

$$\boxed{\omega^2 = \frac{K}{M} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\frac{\alpha^2 A}{m}}.$$

3A) - Resposta (d)

Um jato supersônico move-se acima do aeroporto mantendo o valor constante da sua velocidade v. A trajetoria do jato é tal que existe um ponto P_0 no aeroporto tal que o som da trajetoria inteira chega para P_0 simultaneamente. Considere que num momento $t = 0$ a distancia entre o jato e P_0 tem valor r_0 e o vetor da posição do jato forma ângulo β com a pista. A velocidade do som tem valor $V = const.$ Calcule a distancia d entre os pontos P_0 e P_1 sendo P_1 o ponto onde o jato colide com a terra.

(a) $d = r_0 \frac{V}{\sqrt{v^2-V^2}} \frac{\pi}{\beta}$

(b) $d = r_0 \cos(\pi - \frac{V}{\sqrt{v^2-V^2}} \frac{\pi}{\beta})$

(c) $d = r_0 \exp(\frac{2V}{\sqrt{v^2-V^2}}(\pi + \beta))$

(d) $d = r_0 \exp(-\frac{V}{\sqrt{v^2-V^2}}(\pi - \beta))$.

(e) n. d. a.

As condições do problema podem ser satisfeitas se a velocidade radial do jato for $-V$. As componentes da velocidade em coordenadas polares: $v_r = \dot{r} = -V$, $v_\varphi = r\dot{\varphi}$. Como o valor absoluto da velocidade é constante $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$ então a componente $v_\varphi = \sqrt{v^2 - V^2}$ também é constante. Dai as equações horarias tem forma

$$\dot{r} = -V \tag{1}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{v^2 - V^2}}{r(t)} \tag{2}$$

Integrando (1) com a condição inicial $r(0) = r_0$ temos $r(t) = r_0 - Vt$. Integrando (2) com a condição $\varphi(0) = \beta$ temos

$$\int_\beta^\varphi d\varphi' = \frac{\sqrt{v^2 - V^2}}{V} \int_0^t \frac{dt'}{\frac{r_0}{V} - t'}$$

o que resulta em

$$\boxed{r(t) = r_0 \exp\left[-\frac{V}{\sqrt{v^2 - V^2}}(\varphi - \beta)\right]}$$

O jato atinge a pista para diastancia $d = r(\pi)$.

3B) - Resposta (a)

Um ponto material possui a trajetoria tal que o vetor da velociadade $\vec{v}$ forma um ângulo constante $\alpha < \frac{\pi}{2}$ com o vetor da posição do corpo $\vec{r}$. Considerando que $r(0) = r_0$ e $\varphi(0) = 0$ calcule o caminho s percorido por corpo até atingir o ponto $r = 0$.

(a) $s = \frac{r_0}{\cot\alpha}\sqrt{1 + (\cot\alpha)^2}$

(b) $s = \frac{r_0}{\tan\alpha}\sqrt{1 - (\cot\alpha)^2}$

(c) $s = \frac{r_0}{\tan\alpha}\sqrt{1 + (\tan\alpha)^2}$

(d) $s = \frac{r_0}{\tan\alpha}\sqrt{1 - (\tan\alpha)^2}$

(e) n. d. a.

O cotangente do ângulo α é constante $\cot\alpha = -\frac{v_r}{v_\varphi} = -\frac{\dot{r}}{r\dot{\varphi}} > 0$ sendo v_r and v_φ compone ntes da velocidade em coordenadas polares. Dai

$$\frac{\dot{r}}{r} = -(\cot\alpha)\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -(\cot\alpha)d\varphi$$

Integrando a ultima equação

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'} = -(\cot\alpha)\int_0^{\varphi} d\varphi' \Rightarrow \boxed{r(\varphi) = r_0 e^{-(\cot\alpha)\varphi}}$$

O comprimento da tajetoria tem valor

$$s = \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}dt' = \sqrt{1 + (\cot\alpha)^2}\int_0^t r(t')\dot{\varphi}dt'$$

Definindo uma variavel $\varphi = \varphi(t')$ temos

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{1 + (\cot\alpha)^2}\int_0^{\varphi} r(\varphi')d\varphi' = \sqrt{1 + (\cot\alpha)^2}\, r_0 \int_0^{\varphi} e^{-(\cot\alpha)\varphi'}d\varphi' \\ &= \frac{r_0}{(\cot\alpha)}\sqrt{1 + (\cot\alpha)^2}\left[1 - e^{-(\cot\alpha)\varphi}\right] \end{aligned}$$

O comprimento da trajetoria inteira é dado por

$$\boxed{\lim_{\varphi\to\infty} s(\varphi) = \frac{r_0}{(\cot\alpha)}\sqrt{1 + (\cot\alpha)^2}}.$$

4A) - Resposta (c)

Considere dois fios infinitos carregados isolantes paralelos entre si, posicionados ao longo do eixo **y**, e a uma distância **d** um do outro. O fio 1 apresenta densidade linear de carga três vezes maior que a densidade linear de carga do fio 2. A que distância do fio 1 situa-se um ponto **P**, onde os campos elétricos devidos aos dois fios se anulam?

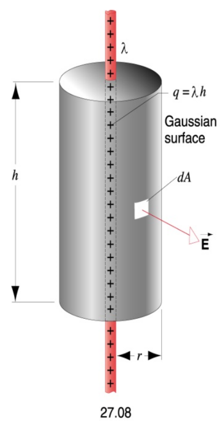
(a) d/4

(b) d/3

(c) 3d/4

(d) 2d/3

(e) n. d. a.



$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \; dA = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r h) = \frac{(\lambda h)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$\vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{(d-x)} \Rightarrow x = \frac{3d}{4}$$

4B) - Resposta (b)

Uma carga elétrica de $+5\mu C$ está uniformemente distribuída ao redor de um anel de raio 1,0m, que se encontra no plano **xz** com seu centro na origem. Uma partícula com carga $+1nC$ e massa $25\mu g$ é liberada do repouso a uma distância de 2 m da origem, ao longo do eixo **y**. Qual a velocidade da partícula após ter percorrido uma grande distância (y≫R)?

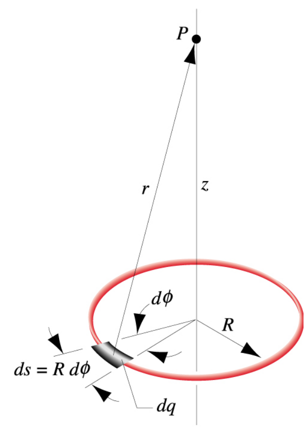
(a) $\approx$ 20m/s

(b) $\approx$ 40m/s

(c) $\approx$ 2m/s

(d) $\approx$ 4m/s

(e) n. d. a.



$$V = \int dV = \int k\frac{dq}{r} = \frac{k}{r}\int_0^{2\pi} \lambda R d\varphi = \frac{2\pi k\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{kQ}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

onde $r = \sqrt{z^2+R^2}$; $dq = \lambda R d\varphi$ e $\lambda = Q/(2\pi R)$.

$$U = qV = \frac{kqQ}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f \Rightarrow \frac{kqQ}{\sqrt{z_i^2+R^2}} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2kqQ}{m\sqrt{z_i^2+R^2}}} \approx 40m/s$$

5A) - Resposta (d)

Um fio retilíneo, que se estende entre as coordenadas $x = 2$m e $x = 4$m, é percorrido por uma corrente $i = 3A$, cujo sentido é o do eixo **x** positivo. Na região existe um campo magnético não uniforme que cresce linearmente com a distância x e aponta na direção positiva do eixo **z**, isto é , $\vec{B} = (B_0 x)\hat{\jmath}$, onde $B_0 = 2T/m$. Qual a força magnética (módulo, direção e sentido) que é exercida sobre o fio?

(a) $\vec{F}_R = (36N)\hat{\imath}$

(b) $\vec{F}_R = (12N)\hat{k}$

(c) $\vec{F}_R = (12N)\hat{\imath}$

(d) $\vec{F}_R = (36N)\hat{k}$

(e) n. d. a.

Houve um erro de digitação na terceira linha: onde se lê "aponta na direção positiva do eixo **z**", deveria estar escrito: "aponta na direção positiva do eixo **y**". Por este motivo, desde que a justificativa esta correta, com valor correto do médulo da força resultante, também será aceita a alternativa (e) n. d. a. como correta.

$$d\vec{F}_R = i d\vec{L} \times \vec{B} = (i\ dx)\hat{\imath} \times (B_0\ x)\hat{\jmath} = (i\ dx\ B_0\ x)\hat{k}$$

$$\vec{F}_R = \left(\int_{2m}^{4m} i\ B_0\ x\ dx \right) \hat{k} = i\ B_0 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{2m}^{4m} \hat{k} = (36\ N)\hat{k}.$$

5B) - Resposta (d)

Uma bobina de indutância $200mH$ e resistência desconhecida é conectada em série com um capacitor de $47{,}9\mu F$ e com uma fonte de corrente alternada com $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \operatorname{sen}(\omega t)$, onde $\omega = 377 rad/s$. A corrente alternada no circuito é dada por $I(t) = I_m \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$. Se o ângulo de fase entre a fem aplicada e a corrente é de 45^o, calcule a resistência da bobina.

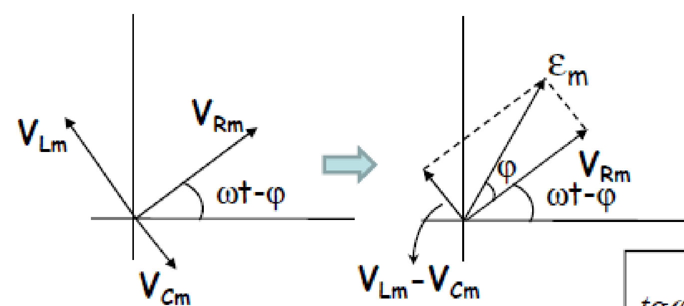
(a) $\approx 12\ \Omega$

(b) $\approx 8\ \Omega$

(c) $\approx 10\ \Omega$

(d) $\approx 20\ \Omega$

(e) n. d. a.



$$\varepsilon_m = \sqrt{V_{Rm}^2 + (V_{Lm} - V_{Cm})^2}$$

$$\varepsilon_m = i_m\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} \Rightarrow \boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{V_{Lm} - V_{Cm}}{V_{Rm}} = \frac{i_m X_L - i_m X_C}{i_m R} = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

$$X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = R\tan\varphi \Rightarrow R = \frac{1}{\tan\varphi}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \approx 20\Omega\ .$$

6A) - Resposta (d)

Sobre um bloco de vidro de índice de refração n_v é colocada uma camada líquida, de índice de refração n_{liq}. O feixe de luz **A**, que incide sobre a camada líquida sob um ângulo $\theta_A = 30^o$, emerge tangencialmente a esta camada. Por outro lado, o raio **B**, que incide sobre a camada sob um ângulo $\theta_B = 45^o$, emerge tangenciando a superfície de vidro. Admitindo-se que o conjunto está no ar (n = 1,00), determine os índices de refração n_{liq} e n_v.

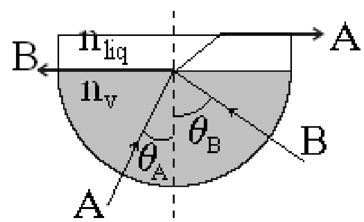
(a) 2 ; 1,41

(b) 2 ; 1,56

(c) 1,56 ; 2

(d) 1,41 ; 2

(e) n. d. a.



Feixe A:

$$n_v \operatorname{sen}\theta_A = n_{liq}\operatorname{sen}\theta_R = n_{ar}\operatorname{sen}90^o = 1 \Rightarrow n_v = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_A} = 2$$

Feixe B:

$$n_v \operatorname{sen}\theta_B = n_{liq}\operatorname{sen}90^o \Rightarrow n_{liq} = n_v \operatorname{sen}\theta_B = \sqrt{2} = 1,41$$

6B) - Resposta (d)

Uma onda luminosa de $\lambda = 625\ nm$ incide quase perpendicularmente em uma película de sabão ($n = 1.3$) suspensa no ar. Qual a menor espessura do filme para a qual as ondas refletidas pelo filme sofrem interferência construtiva?

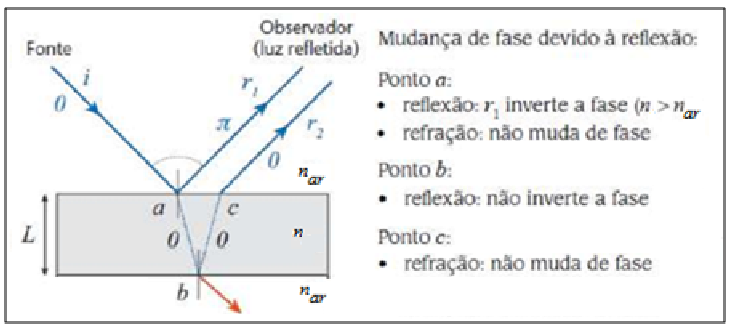
(a) $\approx 240\ nm$

(b) $\approx 156\ nm$

(c) $\approx 313\ nm$

(d) $\approx 120\ nm$

(e) n. d. a.



Condição para interferência construtiva:

$$\Delta L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n}$$

Para incidência quase perpendicular, a diferença de caminho entre os dois raios é:

$$2L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n} \Rightarrow L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n}$$

Logo, para $m = 0 \Rightarrow L_0 = \dfrac{\lambda}{4n} = \dfrac{625\ nm}{4 \times 1,3} \approx 120\ nm$.

7A) - Resposta (c)

Determine a entropia, como função de T e V, de um gás ideal com número constante de partículas. Para isso, utilize as equações de estado $U = (3/2)NkT$ e $pV = NkT$.

(a) $S(T,p) - S_0(T_0,p_0) = Nk\ln\left\{\frac{T}{p}\right\}$

(b) $S(T,p) - S_0(T_0,p_0) = Nk\ln\left\{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right\}$

(c) $S(T,p) - S_0(T_0,p_0) = Nk\ln\left\{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2}\left(\frac{p_0}{p}\right)\right\}$

(d) $S(T,p) - S_0(T_0,p_0) = Nk\ln\left\{\left(\frac{T_0}{T}\right)^{5/2}\left(\frac{p}{p_0}\right)\right\}$

(e) n. d. a.

Para uma mudança de estado reversível temos

$$du = TdS - pdV,$$

onde $dN = 0$. Utilizando as equações de estado para o gás ideal, escrevemos a seguinte equação para a entropia

$$dS = \frac{3}{2}NkT\frac{dT}{T} + Nk\frac{dV}{V}.$$

Para uma mudança do estado $\{T_0, V_0\}$, de entropia S_0, integra-se a equação acima

$$S(T,V) - S_0(T_0,V_0) = \frac{3}{2}NkT\ln\frac{dT}{T} + Nk\ln\frac{dV}{V} = Nk\ln\left\{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\left(\frac{V}{V_0}\right)\right\}.$$

Utilizando a equação $pV = NkT$

$$S(T,p) - S_0(T_0,p_0) = Nk\ln\left\{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2}\left(\frac{p_0}{p}\right)\right\}.$$

7B) - Resposta (b)

Calcule a função de partição de um sistema de N osciladores quânticos independentes, cuja energia é dada por $\varepsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Considere $\beta = 1/kT$. (Sugestão: utilizar a série geométrica $\sum_{n=0}^{N-1} r^n = (1 - r^N)/(1 - r)$.)

(a) $Z = \exp(\beta\hbar\omega N)$

(b) $Z = [2 \ \mathrm{senh}(\beta\hbar\omega/2)]^{-N}$

(c) $Z = \mathrm{senh}(\beta\hbar\omega/2)$

(d) $Z = [\exp(\beta\hbar\omega)]^{-N}$

(e) n. d. a.

Para um sistema de osciladores independentes $Z(T,V,N) = [Z(T,V,1)]^N$. A função de partição para um oscilador é

$$Z(T,V,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta\varepsilon_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta\hbar\omega(n+1/2)] = \exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta\hbar\omega)^n \ .$$

Utilizando a fórmula da série geométrica obtém-se

$$Z(T,V,1) = \frac{\exp\left[-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right]}{1 - \exp[-\beta\hbar\omega]} = \frac{1}{\exp\left[\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right] - \exp\left[-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right]} = \left[2\,\mathrm{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]^{-1} \ .$$

A função de partição do sistema de N osciladores é, portanto,

$$Z(T,V,N) = \left[2\,\mathrm{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]^{-N} \ .$$

8A) - Resposta (d)

Considere um elétron em um estado tal que a componente z do spin é $\frac{1}{2}\hbar$. Quais são os valores esperados de S_x e S_x^2, respectivamente?

(a) $0\hbar$ e $0\hbar^2$

(b) $0\hbar$ e $\dfrac{1}{2}\hbar^2$

(c) $\dfrac{1}{2}\hbar$ e $\dfrac{1}{4}\hbar^2$

(d) $0\hbar$ e $\dfrac{1}{4}\hbar^2$

(e) $\dfrac{1}{2}\hbar$ e $0\hbar^2$

Se o spin da partícula tem componente 1/2 na direção z, então:

$$< S_x >= 0\hbar \tag{3}$$

porque há total incerteza na componente na direção x do spin, ou seja, pode ser $\frac{1}{2}\hbar$ ou $-\frac{1}{2}\hbar$.

Sabe-se que para um elétron:

$$< S^2 >= s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2. \tag{4}$$

Por simetria, $< S_x^2 >=< S_y^2 >$ e então:

$$< S^2 >=< S_x^2 > + < S_y^2 > + < S_z^2 > \tag{5}$$

implica que:

$$\frac{3}{4}\hbar^2 = 2 < S_x^2 > + \frac{1}{4}\hbar^2 \tag{6}$$

e, finalmente;

$$< S_x^2 >= \frac{1}{4}\hbar^2. \tag{7}$$

8B) - Resposta (e)

A probabilidade de três bósons ocuparem o mesmo estado quântico é, comparada com a probabilidade de que três partículas distinguíveis ocupem o mesmo estado;

(a) seis vezes menor

(b) três vezes menor

(c) idêntica

(d) três vezes maior

(e) seis vezes maior

As funções de onda normalizadas das três partículas são $\Psi_\alpha(1)$, $\Psi_\beta(2)$ e $\Psi_\gamma(3)$. Se as partículas são distinguíveis, para escrever a função de onda total basta:

$$\Psi_{\mathrm{d}} = \Psi_\alpha(1)\Psi_\beta(2)\Psi_\gamma(3).$$

Se as partículas são bósons, a função de onda total é simétrica a permutações das partículas:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{b}} = \frac{1}{\sqrt{3!}}\Big[&\Psi_\alpha(1)\Psi_\beta(2)\Psi_\gamma(3) + \Psi_\alpha(1)\Psi_\beta(3)\Psi_\gamma(2) + \Psi_\alpha(2)\Psi_\beta(1)\Psi_\gamma(3) \\ &+\Psi_\alpha(2)\Psi_\beta(3)\Psi_\gamma(1) + \Psi_\alpha(3)\Psi_\beta(1)\Psi_\gamma(2) + \Psi_\alpha(3)\Psi_\beta(2)\Psi_\gamma(1)\Big]\end{aligned} \tag{8}$$

Quando os bósons estão no mesmo estado:

$$\Psi_{\mathrm{b}}(\alpha = \beta = \gamma) = \frac{6}{\sqrt{3!}}\Psi_\alpha(1)\Psi_\alpha(2)\Psi_\alpha(3)$$

e a razão entre as probabilidades é

$$\frac{< \Psi_{\mathrm{b}}(\alpha = \beta = \gamma)|\Psi_{\mathrm{b}}(\alpha = \beta = \gamma) >}{< \Psi_{\mathrm{d}}(\alpha = \beta = \gamma)|\Psi_{\mathrm{d}}(\alpha = \beta = \gamma) >} = \left(\frac{6}{\sqrt{3!}}\right)^2 = 6,$$

ou seja, seis vezes maior.

9A) - Resposta (c)

Considere o modelo de Bohr para um átomo de hidrogênio. Se um elétron de massa m e carga e gira em órbita circular ao redor do próton, a órbita é estável se:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}. \tag{9}$$

O postulado de quantização de Bohr para este sistema significa que:

(a) $mv = n\hbar$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) $mv = n\hbar$ com $n = 1, 2, 3, \ldots$

(c) $mvr = n\hbar$ com $n = 1, 2, 3\ldots$

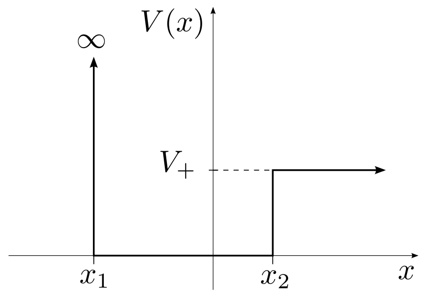
(d) $\frac{1}{2}mv^2 = n\hbar$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$

(e) $\frac{1}{2}mv^2 = n\hbar$ com $n = 1, 1, 2, \ldots$

O modelo de Bohr quantiza o momento angular do elétron.

9B) - Resposta (b)

Considere uma partícula com energia E sujeita à equação de Schrödinger unidimensional com potencial $V(x)$ dado pela figura:



Qual das alternativas abaixo está incorreta?

(a) Se $E < 0$, não há solução física para o problema.

(b) Se $0 < E < V_+$, a função de onda da partícula na região $x > x_2$ é nula.

(c) Se $0 < E < V_+$, a energia faz parte de um espectro discreto.

(d) Se $V_+ < E$, a função de onda da partícula na região $x < x_1$ é nula.

(e) Se $V_+ < E$, a energia faz parte de um espectro contínuo.

Classicamente, não seria possível que a partícula estivesse em uma região de "energia cinética negativa". Contudo, na mecânica quântica, partículas podem tunelar barreiras de potencial e penetrar em regiões nas quais o potencial não é infinito.

10A) - Resposta (a)

Uma partícula de massa m está em um potencial quadrado infinito de largura a, que começa em $x = 0$ e termina em $x = a$. Usando o método variacional e a função de onda não normalizada:

$$\Psi(x) = x(a-x)(c + x(a-x)), \tag{10}$$

calcule o valor aproximado do parâmetro c que dará a melhor aproximação para o estado fundamental:

(a) $0,88\,a^2$

(b) $0,44\,a^2$

(c) $0,00\,a^2$

(d) $-0,22\,a^2$

(e) $-0,44\,a^2$

No método variacional para o estado fundamental, a seguinte expressão deve ser minimizada:

$$E(c) = \frac{<\Psi|H|\Psi>}{<\Psi|\Psi>} \tag{11}$$

Aplicando o hamiltoniano na função de onda dada:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}2[a^2 - c + 6x(x-a)] \tag{12}$$

então:

$$E(c) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\int_0^a x(a-x)(c+x(a-x))[2(a^2-c+6x(x-a))]dx}{\int_0^a [x(a-x)(c+x(a-x))]^2 dx} \tag{13}$$

A integral no denominador é:

$$\int_0^a [x(a-x)(1+cx(a-x))]^2 dx = \frac{a^5}{630}(a^4 + 9a^2c + 21c^2) \tag{14}$$

A integral no numerador é:

$$\int_0^a x(a-x)(c+x(a-x))[2(a^2-c+6x(x-a))]dx = -\frac{a^3}{105}(2a^4 + 14a^2c + 35c^2) \tag{15}$$

Juntando os dois resultados:

$$E(c) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{630}{105a^2}\frac{2a^4 + 14a^2c + 35c^2}{a^4 + 9a^2c + 21c^2} \tag{16}$$

O objetivo é minimizar c. Para isto, as constantes multiplicativas não são importantes. Então:

$$\frac{dE(c)}{dc} = 0 \rightarrow a^2\frac{-4a^4 - 14a^2c + 21c^2}{(a^4 + 9a^2c + 21c^2)^2} = 0 \tag{17}$$

ou

$$-4a^4 - 14a^2c + 21c^2 = 0 \tag{18}$$

com soluções:

$$c_{\pm} = \frac{7 \pm \sqrt{133}}{21} a^2 \tag{19}$$

Por inspeção, a solução $c_+ \approx 0,88\, a^2$ é a de menor energia.

10B) Resposta (e)

Um oscilador anarmônico é descrito pelo seguinte hamiltoniano:

$$H = H_0 + ax^4 \tag{20}$$

em que

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{21}$$

Usando a teoria de perturbação independente no tempo e considerando ax^4 como a perturbação e H_0 como hamiltoniano não perturbado, qual é a primeira correção à energia do estado fundamental?

(a) $\dfrac{a\hbar^2}{m^2\omega^2}$

(b) $\dfrac{1}{2}\dfrac{a\hbar^2}{m^2\omega^2}$

(c) $\dfrac{1}{4}\dfrac{a\hbar^2}{m^2\omega^2}$

(d) $\dfrac{3}{2}\dfrac{a\hbar^2}{m^2\omega^2}$

(e) $\dfrac{3}{4}\dfrac{a\hbar^2}{m^2\omega^2}$

A correção à energia do estado fundamental é dada por:

$$E^{(1)} = \frac{< \Psi_0|ax^4|\Psi_0 >}{< \Psi_0|\Psi_0 >} \tag{22}$$

O estado fundamental de um oscilador harmônico, a menos de uma constante de normalização, é dado por:

$$\Psi_0(x) = \exp(-x^2/x_0^2) \tag{23}$$

ou seja, uma gaussiana. Para determinar x_0 basta aplicar H_0

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\exp(-x^2/x_0^2) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4x^2}{x_0^4} - \frac{2}{x_0^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\exp(-x^2/x_0^2). \tag{24}$$

Para que a mesma função seja recuperada após a aplicação do hamiltoniano;

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{4x^2}{x_0^4} = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{25}$$

ou

$$x_0^2 = \frac{2\hbar}{m\omega}. \tag{26}$$

Assim,

$$E^{(1)} = a \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-2x^2/x_0^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2x^2/x_0^2)}. \tag{27}$$

Usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-bx^2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n b^n} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \tag{28}$$

o resultado é:

$$E^{(1)} = a \frac{3}{16} x_0^4 = \frac{3}{4} \frac{a\hbar^2}{m^2\omega^2}. \tag{29}$$