

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática
Curso de Matemática - Licenciatura

Geometria Diferencial de Superfícies

Autora: Scheila Nair Costa
Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
Julho 2008

Scheila Nair Costa

Geometria Diferencial de Superfícies

Trabalho acadêmico de graduação apresentado
à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II,
do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura,
do Centro Ciências Físicas e Matemáticas da
Universidade Federal de Santa Catarina

Professora: Carmem Suzane Comitre Gimenez

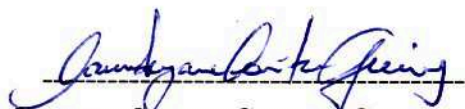
Florianópolis
Julho 2008

Geometria Diferencial de Superfícies

por

Scheila Nair Costa

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 34/CMM/08.



Prof^a Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Eliezer Batista
(Orientador)



Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva



Prof. Ms. Rubens Starke

Agradecimentos

Quando fazemos citações podemos cometer o grave erro de esquecer pessoas que nos foram de grande importância. Entretanto, gostaria de fazer alguns agradecimentos.

À Deus.

Ao meu orientador professor Eliezer Batista, por quem tenho grande admiração, que me orientou com paciência e dedicação. Aos professores que compuseram a banca e se dispuseram a ler meu trabalho, são eles: Professor Ivan P. Costa e Silva com o qual não tive oportunidade de presenciar aulas, e professor Rubens Starke por quem registro também minha grande admiração e com o qual fiz as disciplinas de introdução ao cálculo, cálculo I, II e III, essas com certeza auxiliaram na confecção desse trabalho. Agradeço ainda a todos os outros professores que contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Agradeço à minha família, meu pai Arnaldo, minha mãe Nair, minha filha Krissy e meu irmão Helton (em memória) por tudo que fizeram fazem e representam pra mim.

Aos meus amigos de curso, em especial a Michele A. Borges, a Simone Ossani, a Fabiana Klemann, ao Luiz Nazari e ao Luiz Sardá, esses estiveram comigo durante todo o tempo em que estive na faculdade. E também ao colega Deividi Pansera pela ajuda com o Latex.

Ao meu namorado Caio pelo simples fato de existir, aos meus colegas de trabalho por todo o apoio, e por fim à todos os outros que fazem parte da minha vida.

Sumário

Introdução	1
1 Superfícies Regulares Parametrizadas	4
1.1 Definição e Exemplos	5
1.2 Mudança de Parâmetros	29
2 Aplicações Diferenciáveis e Plano Tangente	34
2.1 Funções Diferenciáveis em Superfícies	34
2.1.1 Funções Reais Diferenciáveis em Superfícies	34
2.1.2 Funções Diferenciáveis Entre Superfícies	36
2.2 Plano Tangente e Diferencial de uma Aplicação	38
3 Primeira Forma Fundamental e Orientação	46
3.1 Métrica (Primeira Forma Fundamental)	46
3.2 Orientação	56
4 Aplicação Normal e Segunda Forma Fundamental	62
4.1 Aplicação Normal de Gauss	62
4.2 Segunda Forma Fundamental	69
5 Curvaturas e Classificação dos Pontos da Superfície	73
5.1 Curvatura Normal e Curvaturas Principais	74

5.2	Classificação dos Pontos da Superfície	82
5.3	Curvatura Gaussiana e Média	89
5.4	Exemplos	93
5.5	Considerações Finais Acerca de Curvatura (Teorema Egregium de Gauss)	101
Apêndice: Álgebra Linear - Transformações Lineares Auto-adjuntas e Formas Quadráticas		107
Conclusão		114
Bibliografia		115

Introdução

A grosso modo, podemos dizer que geometria diferencial é o estudo da geometria através do cálculo. Desde os tempos de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716) o cálculo diferencial era aplicado ao estudo geométrico de curvas em duas dimensões, porém podemos dizer que, o novo ramo da geometria chamado de geometria diferencial teve início em 1827 com Carl Friedrich Gauss (1777-1855), esse publicou em 1828 o artigo clássico, *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Indagações gerais acerca das superfícies curvas), onde existia um volume inteiramente dedicado ao tema.

Estudaremos neste trabalho aspectos da geometria diferencial de superfícies, para tanto, precisamos ter um prévio conhecimento sobre diferenciabilidade e continuidade de funções de várias variáveis e aplicações em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Intuitivamente todos nós temos uma noção do que é superfície, mas descrever uma de forma que fique bem definida não parece ser tão simples. Vamos deixar claro desde o início que os objetos de nossa pesquisa não são superfícies quaisquer, e sim apenas superfícies regulares, essas serão definidas no primeiro capítulo. Queremos estudar propriedades locais, ou seja, aquelas que acontecem nas proximidades de um ponto dessas estruturas, tendo como objetivo definir, identificar, estudar questões métricas, constituir o plano tangente, discutir orientação e introduzir definições de curvaturas.

O estudo das propriedades geométricas locais de uma superfície regular está diretamente ligado ao estudo do comportamento de duas formas quadráticas, a primeira está relacionada com questões métricas e segunda está relacionada ao estudo das curvaturas de curvas da superfície.

Nosso trabalho está organizado em 5 capítulos, no primeiro, na seção 1.1, apresentamos o que é uma superfície regular, exibimos exemplos desses objetos e resultados através de proposições e definições. Na seção 1.2, falamos sobre o fato de um ponto poder ser coberto por mais de uma parametrização, e mostramos como fazer a mudança de coordenadas. No segundo capítulo, na seção 2.1 abordamos funções diferenciáveis sobre superfícies e também entre superfícies. Em 2.2 constituímos o plano tangente existente

em todos os pontos da superfície, plano esse onde as diferenciais das funções estudadas na seção anterior possuem domínio. No terceiro capítulo, na seção 3.1 tratamos da primeira forma quadrática, chamada de primeira forma fundamental, com a qual conseguimos visualizar alguns aspectos geométricos como comprimento de curvas da superfície, ângulo entre curvas e área de regiões contidas na superfície. Com a seção 3.2 conseguiremos concluir quando superfícies são orientáveis e quando não. No quarto capítulo, na seção 4.1 começamos nosso estudo sobre a geometria da aplicação de Gauss, em 4.2 aparece a segunda forma quadrática, denominada segunda forma fundamental. A interpretação geométrica dessa forma nos traz informações sobre curvaturas, e são essas que passamos a estudar no capítulo subsequente. Portanto, no quinto e último capítulo, na seção 5.1 apresentamos as curvaturas normais e principais, onde temos também as direções principais. Na seção 5.2 classificamos os pontos da superfície com auxílio das curvaturas da seção anterior. A seção 5.3 traz as curvaturas médias e gaussianas, em 5.4 exibimos exemplos de superfícies com suas curvaturas, e por fim, na seção 5.5 fazemos algumas considerações acerca de curvaturas, onde demonstramos o famoso teorema egregium de Gauss. Trazemos ainda um apêndice com resultados de álgebra linear necessário para o desenvolvimento principalmente dos capítulos 4 e 5. Os teoremas não demonstrados no decorrer do trabalho são teoremas clássicos de análise e suas demonstrações podem ser encontradas em [6].

Nos dois primeiros capítulos, nosso intuito é mostrar superfícies regulares como sendo subconjuntos do \mathbb{R}^3 que fornecem um ambiente apropriado para se trabalhar o cálculo diferencial, no capítulo 3 apresentamos os primeiros aspectos geométricos envolvidos em nosso estudo, podemos adiantar que esses dependem apenas da superfície, ou melhor, apenas da primeira forma fundamental. O capítulo 4 é indispensável para o estudo do capítulo 5 e é somente neste último que realmente surgem resultados da geometria de Gauss, as curvaturas. Neste trabalho, trataremos as curvaturas do ponto de vista da segunda forma fundamental, ou seja, em nosso estudo essas curvaturas não dependem somente da superfície, mas também do ambiente em que essa está inserida, porém trazemos no final do último capítulo o teorema egregium de Gauss. Este teorema define um fato extraordinário sobre curvaturas, fato esse que relaciona as duas formas fundamentais, não o abordaremos por completo, mas faremos uma demonstração desse nas considerações finais neste mesmo capítulo.

Para concluir, podemos dizer que o objetivo maior de nosso estudo é definir curvaturas de uma superfície regular. Voltando à história e dando uma prévia deste assunto, podemos dizer que, Gauss prolongou a obra de Christiaan Huygens (1629-1695) e Alexis Claude Clairaut (1713-1765) sobre curvatura de uma curva reversa ou plana, e definiu cur-

vatura de superfície num ponto dessa, esta curvatura é chamada de curvatura gaussiana ou curvatura total. Conceitos de raio de curvaturas de curvas já tinham sido surgidos na obra de Apolônio (262 a.C.-190 a.C), uma obra puramente teórica, *As cônicas*. Mas foi o matemático, astrônomo e físico holandês Huygens e seu interesse por horologia¹ que a idéia de curvatura de curvas encontra lugar permanente na matemática, e seu desenvolvimento foi estimulado por preocupações práticas. Clairaut foi um matemático francês, precursor da Geometria Diferencial, realizou importantes estudos sobre curvas no espaço. Voltando a Gauss, e sua curvatura para superfícies, esse afirma que: Se em um ponto de uma superfície bem comportada, for levantada uma reta normal à superfície nesse ponto, esta reta contém um feixe de planos que cortam a superfície em uma família de curvas planas, e cada uma dessas terá uma curvatura. Dessas curvas, duas possuem, respectivamente, o maior e o menor raio de curvatura, e é com essas duas últimas curvaturas que Gauss define curvatura para superfície no ponto referido. Existem anedotas e fatos históricos relativos a Gauss, um desses fatos é o de que, Sophie Germain (1776-1831) uma matemática francesa, iniciou uma troca de correspondências com ele, se passando por um certo Monsieur Leblanc. Gauss ficou impressionado ao descobrir a verdadeira identidade do seu correspondente, mas Germain obteve o respeito e ajuda dele. Na época de Sophie as instituições esta-belecidas eram fechadas às mulheres. Contudo, encerrando nossa introdução aqui, podemos dizer que de pesquisas desta mulher nasceu o conceito de curvatura média de superfícies, assunto esse também abordado em nosso estudo.

¹Estudo ou a ciência e arte relacionada aos instrumentos de medição de tempo.

Capítulo 1

Superfícies Regulares Parametrizadas

Inicialmente, podemos dizer que superfícies regulares são aqueles objetos bidimensionais que não apresentam pontas, arestas, auto-interseções e possuem plano tangente em todos os seus pontos. Para ilustrar, imagine que tomamos pedaços do plano, deformamos e unimos estes pedaços, obtendo uma figura no espaço com as características citadas, desta forma, construímos uma superfície regular. Definidas como subconjuntos de \mathbb{R}^3 , e não como aplicações, elas fornecem um ambiente natural para trabalharmos o cálculo diferencial.

Neste capítulo na seção 1.1 nossa intenção será a de utilizar o conceito de parametrização local para definir e identificar superfícies regulares. Assim, dada uma superfície queremos verificar se ela é regular ou não, e para essa verificação, pegamos um ponto p dela, escolhemos uma vizinhança aberta desse ponto contida nela e construímos uma aplicação com domínio em um aberto do \mathbb{R}^2 e imagem em pontos nessa vizinhança. Chamamos essa aplicação de parametrização, e essa é local, pois estamos falando em vizinhança de p , ou seja, em uma parte da superfície e não nela como um todo. Na seção 1.2 veremos que esse ponto pode ser coberto por mais de uma parametrização, e definiremos como fazer a troca de coordenadas. O plano tangente mencionado no primeiro parágrafo e outros aspectos necessários para tornar uma superfície um ambiente adequado para futuros resultados serão apresentados no decorrer dos próximos capítulos.

1.1 Definição e Exemplos

Definição 1.1. Dado um subconjunto S do \mathbb{R}^3 , S é uma superfície regular se satisfaz as seguintes condições:

- (i) Para todo ponto $p \in S$ existe uma vizinhança aberta $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de p , um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e uma aplicação $X: U \rightarrow V \cap S$ diferenciável. Ou seja, se $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ as funções componentes de X , $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ possuem derivadas parciais de todas as ordens em U ;
- (ii) A aplicação X do item (i) é um homeomorfismo entre U e $V \cap S$, ou seja, X é contínua e existe uma aplicação contínua inversa $X^{-1}: V \cap S \rightarrow U$;
- (iii) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

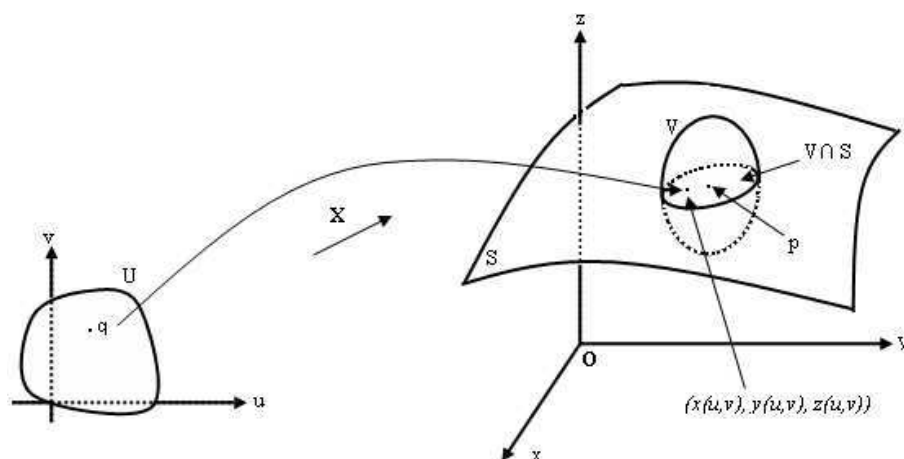


Figura 1.1. O ponto $q \in U$ é levado em um ponto da vizinhança de $p \in S$ através da aplicação X .

Temos que:

- A aplicação X é uma *parametrização local* ou sistema (local) de coordenadas de S em uma vizinhança $V \cap S$ do ponto p ;
- Essa vizinhança $V \cap S$ é chamada de *vizinhança coordenada*;
- Os pontos de U são da forma $q = (u, v)$ e os *parâmetros* u e v são chamadas coordenadas na vizinhança $V \cap S$ de ponto p .

Vamos discutir alguns fatos importantes das condições da definição 1.1, percebemos que a condição de diferenciabilidade em (i) é indispensável se nossa intenção é tratar de geometria diferencial em S . Em (ii) temos que a aplicação X é um homeomorfismo e sua injetividade descarta auto-interseções, veja a figura 1.2 em que temos uma auto-interseção,

constatamos que por menor que seja a vizinhança V de p (p ponto da interseção) não existe um disco aberto do \mathbb{R}^2 que seja homeomorfo à vizinhança coordenada $V \cap S$.

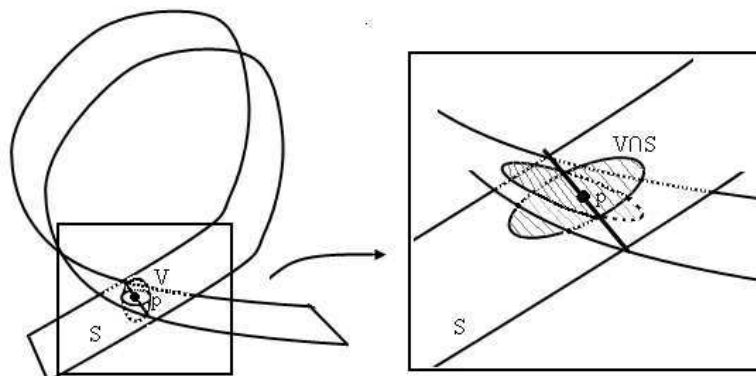


Figura 1.2. V é uma vizinhança qualquer de p , $V \cap S$ é uma vizinhança coordenada p .

Olhando do ponto de vista da topologia e pensando em termos de componentes conexas, vamos supor que para alguma parametrização X de uma vizinhança coordenada $V \cap S$ do ponto p como o da figura 1.2, exista algum aberto conexo U (com raio arbitrariamente pequeno) do plano que contenha $X^{-1}(V \cap S)$. Vejamos que $V \cap S$ não é homeomorfo a U : Em $V \cap S$ existe uma interseção o que implica que em U existe uma curva correspondente à essa e se tirarmos a interseção de $V \cap S$ temos que tirar a curva correspondente em U , mas fazendo isso temos em U duas componentes conexas e em $V \cap S$ quatro (fig. 1.3), portanto U não será homeomorfo a vizinhança $V \cap S$ de p .

Na figura 1.3 perceba que estamos representando a interseção em S e sua curva correspondente em U como uma reta, mas poderia não ser, isso depende de S e da parametrização escolhida.

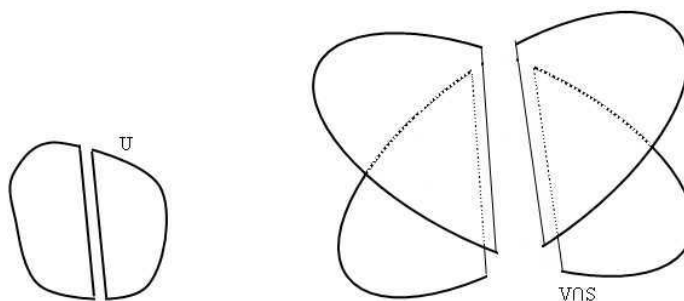


Figura 1.3. A vizinhança $V \cap S$ resulta em quatro componentes conexas ao tirarmos a curva de interseção, enquanto U resulta em duas, logo não são homeomorfos .

Da condição (iii) temos que a diferencial dX_q é uma aplicação linear (ver apêndice), $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ são as derivadas parciais das componentes de X em relação ao ponto q , essas

derivadas correspondem exatamente as colunas da matriz jacobiana $JX(u, v)$ que por sua vez é a matriz da aplicação linear relativa as bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$JX(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Quando fixamos um dos parâmetros e fazemos variar o outro obtemos uma curva em S , essa curva é chamada de *curva coordenada*. Os vetores $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ são os vetores tangentes dessas curvas em $X(q)$. Por comodidade vamos denotar $\frac{\partial X}{\partial u}$ por X_u e $\frac{\partial X}{\partial v}$ por X_v .

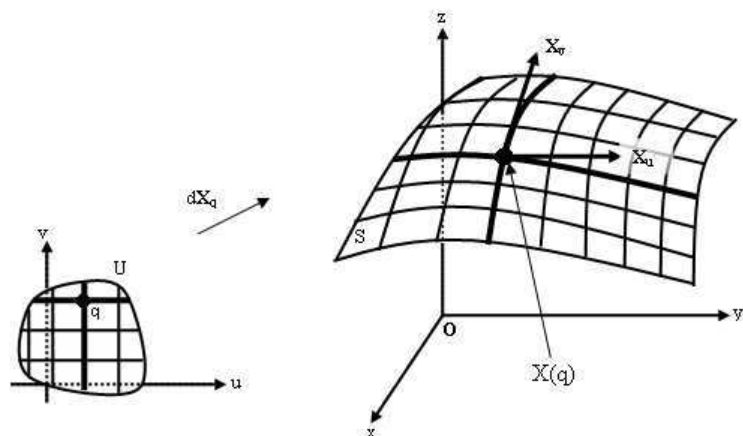


Figura 1.4. X_u, X_v representam as os vetores tangente às curvas coordenadas relacionadas ao ponto q .

A condição iii é equivalente as seguintes afirmações:

- (iii-1) A matriz JX tem posto 2;
- (iii-2) Os vetores X_u e X_v são linearmente independentes;
- (iii-3) $X_u \times X_v \neq 0$ (Vetor nulo).

Observação 1.1. Em muitos livros utiliza-se o símbolo “ \wedge ” ao invés de “ \times ” para denotar produto vetorial.

Ainda a matriz JX ter posto dois nos diz que um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

deve ser diferente de zero em $q = (u, v)$.

Logo percebemos que a condição (iii) nos garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de S e com isso descartamos a possibilidade de bicos na superfície, pois não temos como obter um plano tangente à S em p , quando p está localizado em um bico ou em uma dobra (ver fig 1.5).

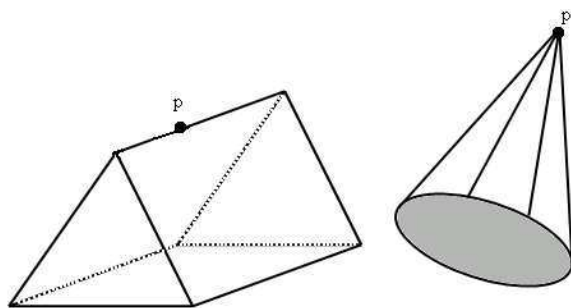


Figura 1.5. Superfícies com bicos e dobras .

Só alertando que, nem todos os autores definem superfície regular da mesma forma, alguns usam condições equivalentes, outros primeiro definem de modo geral uma superfície e no decorrer do assunto inserem aspectos importantes através de proposições, estes aspectos excluem algumas superfícies restando só as regulares. E ainda, uma boa parte da literatura clássica sobre geometria diferencial define superfície simplesmente como uma superfície parametrizada da seguinte forma:

Definição 1.2. *Uma superfície parametrizada $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável X de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 . O conjunto $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado de traço de X . X é regular se a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$. Um ponto $r \in U$ onde dX_r não é injetiva é chamado um ponto singular de X .*

Observe que a definição 1.2 apresenta superfície regular como uma aplicação e não como um subconjunto de \mathbb{R}^3 , e também permite que essa possua um traço com auto-intersecções. Para nosso estudo a definição 1.1 é uma boa definição, então todos os resultados apresentados à partir de agora serão feitos com base nessa.

Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1.1. O Plano. Qualquer plano é uma superfície regular. Seja $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto do \mathbb{R}^3 e sejam w_1, w_2 vetores linearmente independentes do \mathbb{R}^3 . Com isso temos um plano Π bem definido descrito por $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, onde $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $p \in \Pi$ (fig. 1.6).

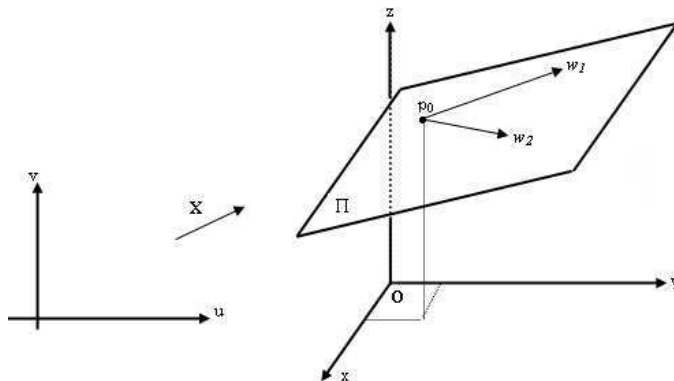


Figura 1.6. Qualquer plano é uma superfície regular e admite uma parametrização global.

As condições (i) e (iii) são de fácil verificação, e (ii) segue do fato de que se tomarmos pontos $p = (x, y, z) \in \Pi$, $w_1 = (a, b, c)$, $w_2 = (d, e, f)$ e fizermos $X(u, v) = p$ teremos

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + u(a, b, c) + v(d, e, f) \\ &= (x_0 + ua + vd, y_0 + ub + ve, z_0 + uc + cf) \end{aligned}$$

$$(I) \quad \begin{cases} x = x_0 + ua + vd \\ y = y_0 + ub + ve \\ z = z_0 + uc + cf \end{cases}$$

Então para qualquer $p(x, y, z) \in \Pi$ temos que a solução das equações $X(u, v) = p$ é uma função de primeiro grau em x, y e z , logo contínua. Fazendo $X^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$, através da restrição do sistema (I) teremos também funções de primeiro grau em u e v , portanto temos um homeomorfismo.

O plano é a superfície regular mais simples e pode ser coberto por uma só parametrização. Nesses casos chamaremos essa de *parametrização global*.

Exemplo 1.2. A Esfera. Seja $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária. \mathbb{S}^2 é uma superfície regular?

$$\text{Isolando } z \text{ temos, } z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \text{ ou } z = -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Verificaremos que $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização, onde X_1 é dada por

$$X_1(u, v) = (u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}), \quad (u, v) \in U$$

$$e U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < 1\}.$$

A diferenciabilidade das duas primeiras funções componentes de X_1 é de verificação trivial, a terceira também é diferenciável, pois o fato de $u^2 + v^2 < 1$ nos garante que a função $\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Portanto a condição (i) é satisfeita.

A condição (ii) segue do fato de que se tomarmos um ponto qualquer $(x, y, z) \in X_1(U) \subset \mathbb{S}^2$, onde $X_1(U) = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 / x^2 + y^2 > 0 \text{ e } z > 0\}$ e fizermos $X_1^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$, teremos u e v bem definidas de maneira única por $u = x$ e $v = y$, logo X_1 é bijetiva, e X_1^{-1} é a projeção de $X_1(U) \subset \mathbb{S}^2$ em U , como projeção é sempre contínua, temos que X_1^{-1} é contínua em $X_1(U)$, e portanto temos um homeomorfismo.

A matriz jacobiana que é dada por

$$JX_1(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} & \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{bmatrix}$$

tem posto 2 para todo $(u, v) \in U$, com isso a condição (iii) está verificada e X_1 é uma parametrização.

Perceba que X_1 cobre apenas parte da esfera: o hemisfério norte sem o equador. Se unirmos X_1 com X_2 (ver fig. 1.7), onde

$$X_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}), \quad (u, v) \in U$$

$$e U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < 1\}$$

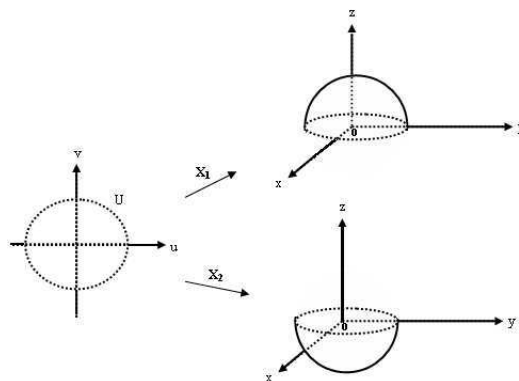


Figura 1.7. X_1 e X_2 são parametrizações locais da esfera unitária.

teremos o hemisfério norte, o hemisfério sul, mas ainda não teremos o equador. Utilizando os planos xz e zy , definiremos as outras parametrizações necessárias para cobrir

toda a esfera

$$\begin{aligned} X_3(u, v) &= (u, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v), \\ X_4(u, v) &= (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v), \\ X_5(u, v) &= (+\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v), \\ X_6(u, v) &= (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v). \end{aligned}$$

Portanto a união dessas seis parametrizações cobrem inteiramente \mathbb{S}^2 , assim mostramos que \mathbb{S}^2 é uma superfície regular.

Uma outra forma de parametrizar \mathbb{S}^2 é dada pelas coordenadas esféricas (φ, θ) , que são a colatitude (complemento da latitude) $\theta \in (0, \pi)$ e a longitude $\varphi \in (0, 2\pi)$ (fig. 1.8). Então seja $U = \{(\varphi, \theta) \mid \theta \in (0, \pi) \text{ e } \varphi \in (0, 2\pi)\}$. Neste caso $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dado por

$$X(\varphi, \theta) = (\text{sen}\theta \cos \varphi, \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \text{cos}\theta).$$

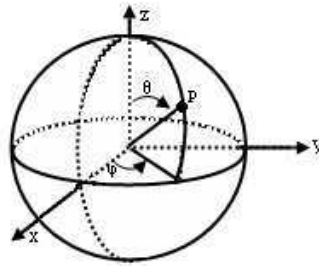


Figura 1.8. Coordenadas esféricas.

Existem derivadas parciais contínuas de todas as ordens das funções componentes de X , logo X é diferenciável e a condição (i) está verificada.

Para a condição (ii), perceba que X não está definida em $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid y = 0, x \geq 0\}$, se tomarmos um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 - C$, teremos que $X^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$ existe, pois θ fica bem determinado de maneira única por $\arccos(z) = \theta$, já que $0 < \theta < \pi$. Perceba, temos $x = \text{sen}\theta \cos\varphi$ e $y = \text{sen}\theta \text{sen}\varphi$. Veja que aqui, podemos cair na tentação de dividir x por y , encontrar $\text{arctg}(\frac{y}{x})$ e concluir que φ também fica bem determinado no intervalo $0 < \varphi < 2\pi$. Mas a função $\text{arctg}(\frac{y}{x})$ não está definida para φ igual a $\frac{\pi}{2}$ ou a $\frac{3\pi}{2}$, e assim teríamos problemas para mostrar que a inversa é contínua. Como nosso interesse é alcançar o estudo de propriedades geométricas das superfícies, não vamos nos prender à questões rigorosas do cálculo. Então, vamos afirmar que, obtido o valor de θ , temos que φ fica determinado de maneira única, onde $0 < \varphi < 2\pi$, e X tem uma inversa X^{-1} para mostrar essa inversa é contínua vamos utilizar a proposição 1.4 demonstrada em breve. Assim existe um homeomorfismo.

Para (iii) temos que

$$X_\varphi = (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0), \quad X_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\theta)$$

então
$$X_\varphi \times X_\theta = (-\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi, -\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

Para condição (iii) ser satisfeita teremos que ter o comprimento de $X_\varphi \times X_\theta$ diferente de zero

$$\begin{aligned} \|X_\varphi \times X_\theta\| &= \sqrt{(-\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi)^2 + (-\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi)^2 + (-\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^4\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta(\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\theta)} \\ &= \operatorname{sen}\theta\sqrt{1} \\ &= \operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

como $\operatorname{sen}\theta \neq 0 \quad \forall \theta \in (0, \pi)$ temos que os vetores X_φ e X_θ são linearmente independentes.

Esta parametrização omite apenas um semi-meridiano de \mathbb{S}^2 , podemos cobrir \mathbb{S}^2 por inteiro com duas parametrizações desse tipo.

Apresentamos ainda uma outra parametrização para esfera no exemplo 1.15 na próxima seção.

Exemplo 1.3. O Cilindro. Seja S o cilindro reto sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 1.9), S admite a parametrização

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X(u, v) &= (\cos u, \operatorname{sen} u, v) \end{aligned}$$

com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$.

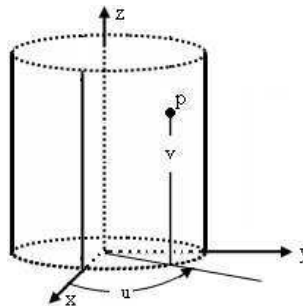


Figura 1.9. Cilindro reto sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

A condição (i) é verificada sem problemas, pois as funções componentes de X tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

Para verificar a condição (ii), perceba que X não está definida em $V = \{(x, y, z) \in S \mid y = 0, x \geq 0\}$, se tomarmos um ponto $(x, y, z) \in S - V$, teremos que $X^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$, onde

$$x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = v,$$

v fica determinado de maneira única por $v = z$, e para determinar u cairíamos na situação de descontinuidade do exemplo anterior. Utilizamos aqui a proposição 1.4 também, com u fica bem determinado de maneira única. Assim mostramos que existe uma bijeção e que X é contínua, assim como X^{-1} , logo X é homeomorfismo.

Para condição (iii) temos que:

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad X_v = (0, 0, 1)$$

então

$$X_u \times X_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

temos que ter o comprimento de $X_u \times X_v$ diferente de zero,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto os vetores X_u e X_v são linearmente independentes e o cilindro é uma superfície regular.

Exemplo 1.4. O Helicóide. Da geometria diferencial de curvas, temos que a curva diferenciável parametrizada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, determina um traço em R^3 chamado de hélice circular. Essa hélice está toda contida no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, e a terceira componente dos pontos dessa é proporcional ao ângulo de rotação t , com constante de proporcionalidade b . O parâmetro t mede o ângulo que o eixo Ox faz com a reta que liga a origem O à projeção do ponto $\alpha(t)$ sobre o plano xy . Se traçarmos por cada ponto dessa hélice uma reta paralela ao plano xy intersectando o eixo Oz , obteremos uma superfície chamada helicóide (fig. 1.10-b).

Vamos obter uma parametrização para o helicóide da seguinte forma: Considere uma reta r , desta superfície, passando por um ponto $\alpha(v) = (a \cos v, a \sin v, bv)$ da hélice e

pelo ponto $p(v) = (0, 0, bv)$ do eixo Oz (fig. 1.10-a). Então r é dada por

$$\begin{aligned} r(u, v) &= p(v) + u(\alpha(v) - p(v)) \\ &= (0, 0, bv) + u[(a \cos v, a \operatorname{senv}, bv) - (0, 0, bv)] \\ &= (0, 0, bv) + (ua \cos v, ua \operatorname{senv}, ubv) - (0, 0, ubv) \\ &= (ua \cos v, ua \operatorname{senv}, bv). \end{aligned}$$

Considerando $a = 1$ (raio do cilindro contendo a hélice), obtemos uma parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para essa superfície dada por:

$$X(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{senv}, bv), \quad -\infty < v < \infty < \pi, \quad -\infty < u < \infty.$$

Vamos verificar se essa parametrização satisfaz as condições para que o helicóide seja uma superfície regular H .

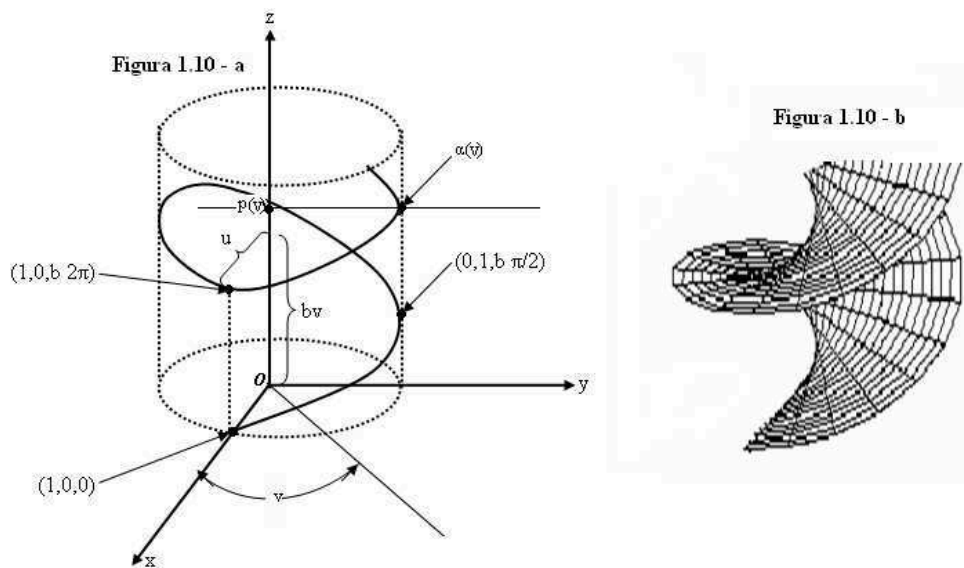


Figura 1.10. Fig. 1.10-a Hélice, fig. 1.10-b Helicóide.

A Condição (i) está satisfeita sem complicações. Para verificar a condição (ii) temos que encontrar v e u em função de x , y e z . Fazendo

$$(u \cos v, u \operatorname{senv}, bv) = (x, y, z)$$

obtemos, que v fica bem determinado por $v = \frac{z}{b}$. Para determinar u fazemos

$$\begin{aligned} u \cos v &= x \quad (. \cos v) \\ u \operatorname{senv} &= y \quad (. \operatorname{senv}) \end{aligned}$$

e temos

$$u = x \cos\left(\frac{z}{b}\right) + y \sin\left(\frac{z}{b}\right).$$

Consideremos então a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{X} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(x \cos\left(\frac{z}{b}\right) + y \sin\left(\frac{z}{b}\right), \frac{z}{b} \right), \end{aligned}$$

que é diferenciável infinitamente, e em particular é contínua. Logo teremos $X^{-1} = \tilde{X}|_H$. Com isso mostramos que existe um homeomorfismo.

Para condição (iii) temos que:

$$X_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad X_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$$

então

$$X_u \times X_v = (b \sin v, -b \cos v, u)$$

temos que ter o comprimento de $X_u \times X_v$ diferente de zero,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{b^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v + u^2} \\ &= \sqrt{b^2 + u^2}, \end{aligned}$$

logo temos que X_u e X_v são linearmente independentes. E assim mostramos que o helicóide é uma superfície regular.

Exemplo 1.5. O Cone. Seja o cone superior dado por $C_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \neq 0\}$ (fig. 1.11), e o cone inferior dado por $C_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -\sqrt{x^2 + y^2}, z \neq 0\}$. Vamos analisar somente C_s , pois a outra análise é feita de forma análoga. C_s é uma superfície regular? Podemos ver que essa superfície admite uma parametrização dada por

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X(u, v) &= (v \cos u, v \sin u, v) \end{aligned}$$

com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 < u < 2\pi, 0 < v < \infty\}$.

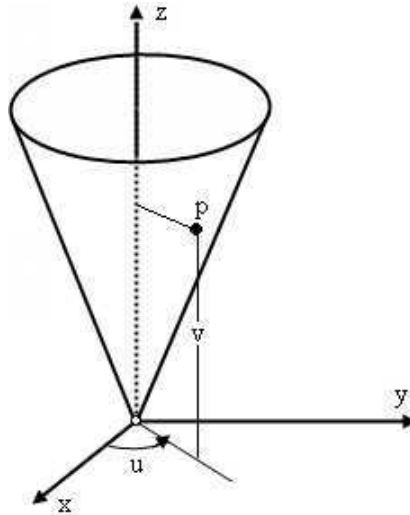


Figura 1.11. Cone Superior.

Perceba que se tivéssemos definido U de tal forma que pudéssemos ter $v = 0$, aconteceria $X(u, 0) = (0, 0, 0)$ e $dX_q = (0, 0, 0)$ para todo $q = (u, 0) \in U$ e dessa forma dX_q não seria injetiva, pois todos os pontos do tipo $q = (u, 0)$ seriam levados em uma mesma imagem, e assim a condição (iii) da definição de superfície regular não seria satisfeita. (Veja a verificação da condição (iii) mais adiante).

Condição (i), como nos exemplos anteriores é verificada sem problemas, já que funções componentes de X tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

Para verificar a condição (ii), temos X não definida no ponto $(0, 0, 0)$, então se tomarmos qualquer ponto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \in S$, teremos que $X^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$, onde

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u, \quad z = v,$$

existe, pois u fica bem determinado de maneira única por $\arctg(\frac{y}{x}) = u$, já que $0 < u < 2\pi$ e v também fica determinado de maneira única por $v = z$ onde $0 < v < \infty$. Assim existe uma bijeção, X é contínua, e X^{-1} também, portanto existe um homeomorfismo.

Para condição (iii) temos que:

$$X_u = (-v \sin u, v \cos u, 0), \quad X_v = (\cos u, \sin u, 1)$$

então

$$X_u \times X_v = (v \cos u, -v, v \sin u)$$

temos que ter o comprimento de $X_u \times X_v$ diferente de zero,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{v^2 \cos^2 u + v^2 + v^2 \sin^2 u} \\ &= \sqrt{2v^2} = v\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Como $0 < v$ temos os vetores X_u e X_v linearmente independentes, logo cone superior sem o ponto $(0,0,0)$ é uma superfície regular.

Exemplo 1.6. O Toro. Seja C a circunferência no plano xz centrada no ponto $(a, 0, 0)$, e com raio $r < a$, onde $a, r \in \mathbb{R}_+^*$ dada por $C = \{(x, y, z) / (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$ (fig 1.12-a). Rotacionando C em torno do eixo Oz (fig 1.12-b) obtemos uma superfície chamada toro, vamos denotá-lo por \mathbb{T}^2 (fig 1.12-c).

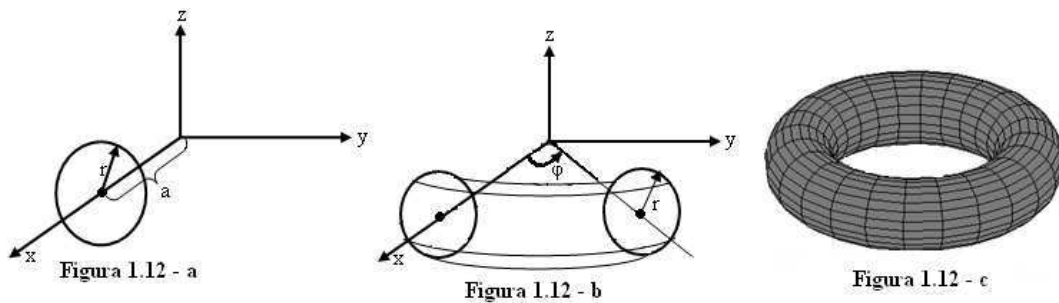


Figura 1.12. Toro.

De $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ temos

$$x = a + r \cos\theta, \quad z = r \operatorname{sen}\theta, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

e uma parametrização para o \mathbb{T}^2 é dada por:

$$X(\theta, \varphi) = ((a + r \cos\theta) \cos\varphi, (a + r \cos\theta) \operatorname{sen}\varphi, r \operatorname{sen}\theta),$$

onde $U = \{(\theta, \varphi) / 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$

A condição (i) é verificada sem problemas.

A parametrização X cobre o toro exceto um meridiano e um paralelo, então para a condição (ii), perceba que X não está definida em $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}^2 / y = 0, e x > 0 \text{ ou } z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 = (a+r)^2\}$. Se tomarmos um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{T}^2 - C$, teremos que $X^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$ existe, pois θ fica determinado por $\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{z}{r})$, onde $0 < \theta < \pi$. Aqui utilizamos novamente a proposição 1.4, onde φ também fica determinado, existindo uma inversa X^{-1} contínua. Logo existe um homeomorfismo.

Para (iii) temos que

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, -r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\theta), \\ X_\varphi &= ((a + r \cos\theta)(-\operatorname{sen}\varphi), (a + r \cos\theta) \cos\varphi, 0) \end{aligned}$$

$$X_\varphi \times X_\theta = (r(a + r \cos \theta) \cos \varphi \cos \theta, r(a + r \cos \theta) \sin \varphi \cos \theta, r(a + r \cos \theta) \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \|X_\varphi \times X_\theta\| &= \sqrt{r^2(a + r \cos \theta)^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2(a + r \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta +} \\ &+ \sqrt{r^2(a + r \cos \theta)^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^2(a + r \cos \theta)^2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= r(a + r \cos \theta). \end{aligned}$$

Como $r, a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a > 0$ temos que os vetores X_φ e X_θ são linearmente independentes garantindo assim a condição (iii) e portanto o toro é uma superfície regular.

Exemplo 1.7. O Parabolóide Hiperbólico. O parabolóide hiperbólico apresenta um traço que nos lembra uma sela de cavalo (fig. 1.13), uma parametrização para essa superfície S é:

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), \quad U = \{(u, v) / u, v \in \mathbb{R}\}.$$

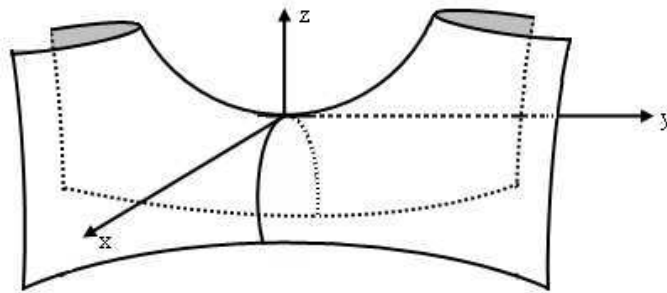


Figura 1.13. Parabolóide Hiperbólico.

As funções componentes de X são diferenciáveis, logo a condição (i) está satisfeita. Se tomarmos um ponto $(x, y, z) \in S$, teremos que $X^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$ existe, pois u, v ficam determinados por $u = x$, e $v = y$ onde $u, v \in \mathbb{R}$. Existe uma bijeção X que é contínua, X^{-1} é a projeção contínua de $X(U) \subset S$ em U , existe assim o homeomorfismo, logo a condição (ii) está verificada.

Temos que

$$X_u = (1, 0, -2u) \quad X_v = (0, 1, 2v),$$

$$JX(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2u & 2v \end{bmatrix}$$

percebemos que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ é diferente de zero garantindo assim a condição (iii) e portanto o parabolóide hiperbólico é uma superfície regular.

Para o próximo exemplo precisamos definir o que é uma curva regular, essa definição é feita de forma análoga ao de superfície regular.

Definição 1.3. Dado um subconjunto C do \mathbb{R}^3 , C é uma curva regular se satisfaz as seguintes condições:

- (i) Para todo ponto $p \in C$ existe uma vizinhança aberta $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de p , um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e uma aplicação $\alpha: I \rightarrow V \cap C$ diferenciável. Ou seja, se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ as funções componentes de α , $x(t), y(t), z(t)$ possuem derivadas de todas as ordens em I ;
- (ii) A aplicação α do item (i) é um homeomorfismo entre I e $V \cap C$, ou seja, α é contínua e existe uma aplicação contínua inversa $\alpha^{-1}: V \cap C \rightarrow I$;
- (iii) Para todo $q = t \in I$, a diferencial $d\alpha_q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Exemplo 1.8. Superfícies de Revolução. Seja $\alpha(u) = (\varphi(u), 0, \psi(u))$ com $a < u < b$ e $\varphi(u) > 0$ uma curva regular no plano xz . Se rotacionarmos α ao redor do eixo Oz obtemos uma superfície de revolução (ou rotação), onde α é chamada curva geratriz de S . Seja v o ângulo de rotação (fig. 1.14), então uma parametrização para essa superfície é a aplicação

$$X(u, v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u)), \quad U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / a < u < b, 0 < v < 2\pi\}.$$

Não encontramos problemas para verificar a condição (i). Vamos então para a condição (ii), primeiro perceba que o fato de $\alpha(u)$ ser uma curva regular teremos que a derivada $\alpha'(u) = (\varphi'(u), 0, \psi'(u))$ é não nula, logo ou $\varphi'(u) \neq 0$ ou $\psi'(u) \neq 0$.

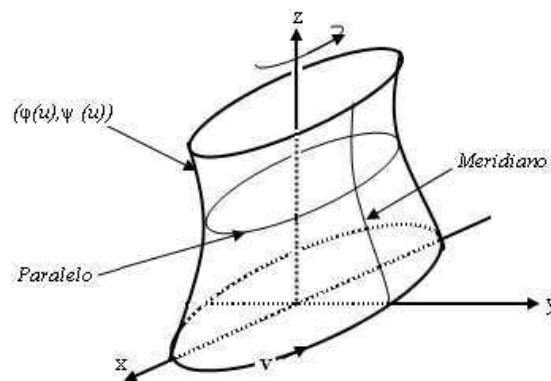


Figura 1.14. Uma superfície de revolução.

Observação 1.2. Se uma função $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável é tal que $f'(u_0) \neq 0$, então $\exists \delta > 0$ tal que $f|_{[u_0-\delta, u_0+\delta]}$ é uma bijeção sobre a imagem (esse é o teorema da função inversa em uma dimensão, mais tarde apresentaremos o teorema em dimensão n).

De X tiramos que

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sen v, \quad z = \psi(u),$$

ao redor de cada ponto u , temos $\varphi'(u) \neq 0$ ou $\psi'(u) \neq 0$, e isso implica que $\varphi(u)$ ou $\psi(u)$ é localmente bijetiva, então:

$$\begin{aligned} \text{se } \varphi(u) &\Rightarrow \varphi(u)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow u = \varphi^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \text{se } \psi(u) &\Rightarrow \psi(u) = z \Rightarrow u = \psi^{-1}(z). \end{aligned}$$

Mais do que isso, φ^{-1} ou ψ^{-1} (quando existirem) serão diferenciáveis, portanto contínuas e desta forma u está definido. Devemos obter agora v uma função contínua de (x, y, z) , para isso vamos fazer uso da fórmula

$$tg\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\sen v}{1 + \cos v}$$

observando que a função $tg\left(\frac{v}{2}\right)$ é um difeomorfismo¹ de $(-\pi, \pi)$ em \mathbb{R} .

Então como $\varphi(u) > 0$ e $v \neq \pi$, temos

$$tg\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\frac{y}{\varphi(u)}}{1 + \frac{x}{\varphi(u)}} = \frac{y}{\varphi(u)} \cdot \frac{\varphi(u)}{\varphi(u) + x} = \frac{y}{\varphi(u) + x} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

daí,

$$v = 2\arctg\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Portanto, se $v \neq \pi$, teremos v uma função contínua de (x, y, z) . Vamos agora verificar para v em um pequeno intervalo em torno de π , ou seja, $v \in (\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon)$, primeiro vamos fazer uma mudança de coordenadas: Seja então $w = v - \frac{\pi}{2}$, teremos

$$\begin{aligned} tg\left(\frac{w}{2}\right) &= \frac{\sen w}{1 + \cos w} = \frac{\sen\left(v - \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos v}{1 + \sen v} = \frac{-\frac{x}{f(u)}}{1 + \frac{y}{f(u)}} \\ &= \frac{-x}{f(u)} \cdot \frac{f(u)}{f(u) + y} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2} + y}, \end{aligned}$$

então

$$w = 2\arctg\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2} + y}\right),$$

substituindo agora em $w = v - \frac{\pi}{2}$, teremos

$$2\arctg\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2} + y}\right) = v - \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = 2\arctg\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2} + y}\right) + \frac{\pi}{2},$$

¹Uma aplicação é dita ser um difeomorfismo se é diferenciável e possui inversa diferenciável.

da mesma forma v é uma função contínua, assim existe um homeomorfismo e a condição (ii) está verificada.

Para a condição (iii) temos que

$$X_u = (\varphi'(u)\cos v, \varphi'(u)\operatorname{senv}, \psi'(u)) \quad X_v = (-\varphi(u)\operatorname{senv}, \varphi(u)\cos v, 0),$$

$$X_u \times X_v = (\varphi(u)\psi'(u)\cos v, \varphi(u)\psi'(u)\operatorname{senv}, \varphi(u)\varphi'(u))$$

logo

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{(\varphi(u)\psi'(u)\cos v)^2 + (\varphi(u)\psi'(u)\operatorname{senv})^2 + (\varphi(u)\varphi'(u))^2} \\ &= \sqrt{(\varphi(u))^2(\psi'(u))^2 + (\varphi(u))^2(\varphi'(u))^2} \\ &= \varphi(u)\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}, \end{aligned}$$

podemos perceber que, por ser $\varphi(u) > 0$, a única forma de $\|X_u \times X_v\|$ ser nulo é ter $(\varphi'(u)) = (\psi'(u)) = 0$, mas como já vimos isso não acontece. Portanto os vetores X_u e X_v são linearmente independentes, assim a condição (iii) está verificada e as superfícies de revolução, são superfícies regulares.

Observação 1.3. Olhando para o exemplo 1.2, podemos observar que a esfera unitária pode ser obtida rotacionando em torno do eixo Oz um círculo de raio um e com o diâmetro sobre o eixo Oz , mas nos pontos em que essa encontra o eixo Oz as derivadas $(\varphi'(u))$ e $(\psi'(u))$ se anulariam simultaneamente, apesar de sabermos que a esfera é uma superfície regular, teríamos problemas com esses dois pontos para enquadrar a esfera como uma superfície de revolução. Então por questão de terminologia, quando falamos em superfície de revolução excluimos aquelas superfícies em que sua curva geratriz encontre o eixo de rotação.

Observação 1.4. Uma outra forma de não conseguirmos definir $\|X_u \times X_v\|$ é quando a curva geratriz possuir um bico, nesse caso as derivadas ou não existem ou são ambas nulas. Mas com a condição (iii) da definição 1.1 já excluimos superfícies com bicos.

As proposições seguintes mostram alguns resultados que facilitam na verificação se uma superfície é ou não regular.

Proposição 1.1. Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então seu gráfico, isto é, o subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $\{(u, v, f(u, v)) / (u, v) \in U\}$ é uma superfície regular. Além disso essa superfície admite uma parametrização global dada pela aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ em que $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in U$.

Demonstração. Vamos mostrar que X é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos desse.

A condição (i) é de fácil verificação, pois as funções componentes de X são diferenciáveis. Cada ponto (x, y, z) do gráfico é imagem por X de um e de somente um ponto $q = (u, v) \in U$, onde $(u, v) = (x, y) \in U$. Portanto, X é bijetiva, e por ser X^{-1} a restrição ao gráfico de f da projeção de \mathbb{R}^3 sobre o plano xy , e sendo projeção sempre contínua, X^{-1} é contínua, logo a condição (ii) está verificada. A condição (iii) é verificada sem problemas, pois a matriz jacobiana de X é igual a

$$JX(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix}$$

e tem posto 2 para todo (u, v) .

□

Portanto, com a proposição 1.1 que acabamos de demonstrar, sabemos que sempre que tivermos o gráfico de uma função diferenciável f , de duas variáveis e imagem em \mathbb{R} , teremos uma superfície regular com parametrização global dada por $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

Exemplo 1.9. As parametrizações X_i para $i = 1, \dots, 6$ do exemplo 1.2 são exemplos em que para cada i temos um gráfico, e cada gráfico desses é uma superfície regular.

Exemplo 1.10. A parametrização X apresentada no exemplo 1.7 tem por traço o parabolóide hiperbólico, que por sua vez é uma superfície regular.

Para a próxima proposição, precisamos que alguns conceitos estejam claros. Então antes de demonstrarmos a proposição 1.2, vamos apresentar o teorema da aplicação inversa e definir o que é um valor regular.

Teorema 1.1. (*Teorema da Aplicação Inversa*) Seja $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) e seja $p \in U$ tal que $F'(p)$ é um isomorfismo linear em \mathbb{R}^n . Então existem abertos $V \subseteq U$ vizinhança de p e $W \subseteq \mathbb{R}^n$ vizinhança de $F(p)$ tal que $F|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe C^k .

Nota: Não cabe ao nosso estudo demonstrar o teorema (veja referência [6]), mas perceba que mesmo sem ter feito menção à ele antes o utilizamos para verificar a condição (ii) da definição 1.1.

Definição 1.4. Dada uma função $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se dF_p não é sobrejetora em $p \in v$ então p é um ponto crítico de F e $F(p) = c$ é um valor crítico.

Definição 1.5. Dada $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a é dito um valor regular de F se todos os pontos $F^{-1}(a)$ não são críticos.

Se pensarmos em uma função $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, quando falamos em valor regular para essa função, estamos falando em um valor $a \in f(V)$, onde $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in V / f(x, y, z) = a\}$ (fig. 1.15), tal que f_x, f_y, f_z que não as derivadas parciais, não se anulam simultaneamente em qualquer ponto de $f^{-1}(a)$. Seja $p \in V \subset \mathbb{R}^3$ Dizer que df_p não é sobrejetora equivale a dizer que no ponto p temos $f_x = f_y = f_z = 0$.

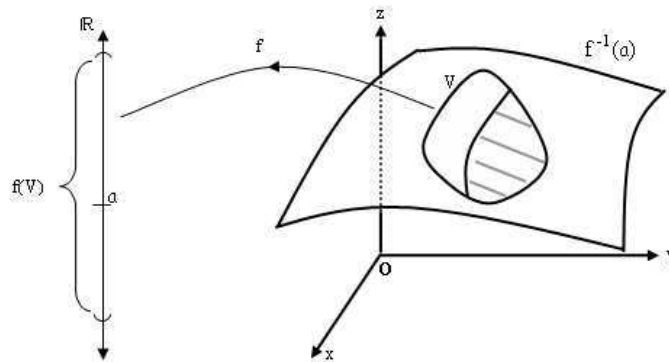


Figura 1.15. a é um valor regular de f .

Proposição 1.2. Dada uma função $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, se a for um valor regular de f então imagem inversa $f^{-1}(\{a\})$ é uma superfície regular.

Demonstração. Temos que:

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = a\}.$$

Seja $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$, então

$$df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right),$$

por ser a um valor regular de F , temos que algumas das derivadas parciais não são nulas, vamos supor sem perda de generalidade que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Definimos agora uma aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : V \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, f(x, y, z)), \end{aligned}$$

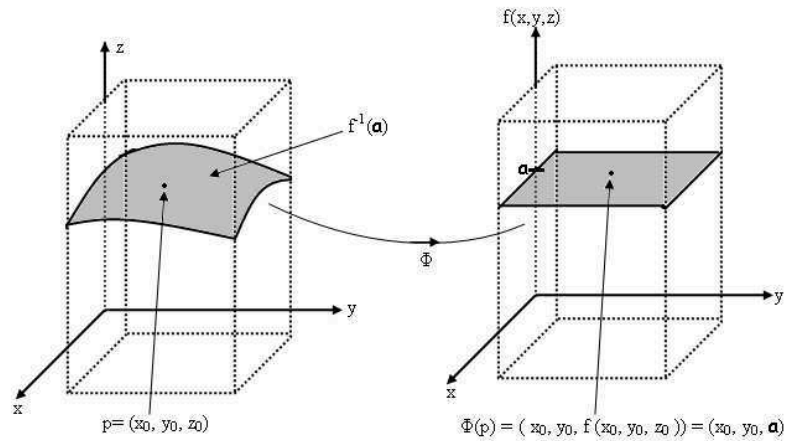


Figura 1.16. Todos os pontos da superfície $f^{-1}(a)$ são levados por Φ no plano $z = a$.

temos que a diferencial de Φ em p é dada por

$$d\Phi_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{bmatrix}, \quad e \quad \det(d\Phi_p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0.$$

Desta forma, o teorema da função inversa garante a existência de abertos U e W tais que, $U \subset V$ é vizinhança de p e W é vizinhança de $\Phi(p)$, tais que $\Phi : U \rightarrow W$ é inversível e $\Phi^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável.

Sabemos que os pontos da imagem de Φ são pontos do tipo (u, v, t) e as funções coordenadas de Φ^{-1} são funções diferenciáveis dadas por

$$\Phi^{-1}(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)),$$

Tomemos agora o ponto (u, v, a) que está na imagem de Φ , então fixando $t = a$ obtemos

$$\Phi^{-1}(u, v, a) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

mas

$$\Phi \circ \Phi^{-1}(u, v, a) = (x(u, v), y(u, v), f(x, y, z)) = (u, v, a),$$

logo temos,

$$u = x(u, v), \quad v = y(u, v)$$

e portanto

$$\Phi^{-1}(u, v, a) = (u, v, z(u, v)).$$

Temos então que $\Phi^{-1}|_{W \cap (t=a)} = V \cap f^{-1}(a)$ é o gráfico de uma função de duas variáveis e imagem nos reais cujo o domínio é o aberto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y, a) \in W\}$, então pela proposição 1.1 temos que para todo $p \in f^{-1}(a)$ conseguimos obter uma vizinhança coordenada, concluindo então que essa define uma superfície regular.

□

Antes de vermos um exemplo, convém enunciar o teorema da função implícita, pois a demonstração da proposição 1.2 é um caso especial do teorema geral dessas funções, e mais tarde vamos utilizar esse resultado.

Teorema 1.2. (*Teorema da Função Implícita*). *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ e $F(x, y, z)$ uma função com derivadas parciais contínuas em U . Seja $(x_0, y_0, z_0) \in U$ tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Então existem vizinhanças B de (x_0, y_0) e J de z_0 , tais que $B \times J \subset U$ e uma única função $g : B \rightarrow J$ satisfazendo $F(x, y, g(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in B$. Além disso, g possui derivadas parciais dadas por:*

$$g_x = \frac{-F_x}{F_z}; \quad g_y = \frac{-F_y}{F_z}.$$

Nota: Não será demonstrado (veja referência [6]).

Exemplo 1.11. O Hiperbolóide de Duas Folhas. Seja o hiperbolóide de duas folhas definido por $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ (fig. 1.17), fazendo

$$\begin{aligned} -x^2 - y^2 + z^2 &= 1 \\ -x^2 - y^2 + z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

temos

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$$

que é uma função diferenciável. As derivadas parciais $f_x = -2x$, $f_y = -2y$, $f_z = 2z$ se anulam simultaneamente somente no ponto $(0,0,0)$, mas esse ponto não pertence à $f^{-1}(0)$, onde 0 é um valor regular de f e o hiperbolóide de duas folhas é uma superfície regular dada por $S = f^{-1}(0)$.

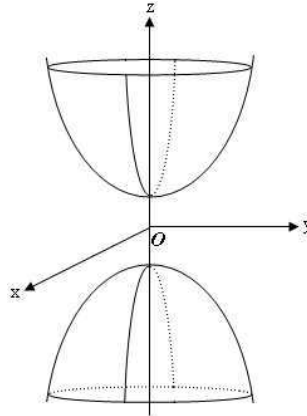


Figura 1.17. O hiperbolóide de duas folhas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície não conexa.

Com o exemplo do hiperbolóide de duas folhas podemos perceber que para uma superfície ser regular não é necessário que ela seja conexa, para nosso entendimento, chamaremos de superfície conexa, aquele subconjunto de \mathbb{R}^3 tal que, dados dois pontos quaisquer desse, podemos ligá-los por uma curva contínua também contida na superfície. A proposição 1.2 pode apresentar superfícies não conexas.

Exemplo 1.12. A esfera unitária do exemplo 1.2 pode ser dada por $S^2 = g^{-1}(1)$, onde

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é uma função diferenciável. As derivadas parciais $g_x = 2x$, $g_y = 2y$ e $g_z = 2z$ são nulas simultaneamente no ponto $(0,0,0)$ que não pertence à $g^{-1}(1)$ e 1 é um valor regular de g .

Com a proposição 1.2 conseguimos dizer se um determinado conjunto é uma superfície regular sem apresentar qualquer parametrização.

A proposição seguinte apresenta ferramentas para mostrarmos que um determinado conjunto de \mathbb{R}^3 não é uma superfície regular. Podemos ver essa proposição também como se fosse uma recíproca local da proposição 1.1, ou seja, qualquer superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição 1.3. *Dada uma superfície regular $S \in \mathbb{R}^3$, qualquer ponto $p \in S$ possui uma vizinhança V em S , tal que V é o gráfico de uma função diferenciável definida por uma das seguintes formas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$.*

Demonstração. Se S é uma superfície regular, então para $p \in S$ existe uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dada por $X : (u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $p \in X(U)$ e $X^{-1}(p) = q$.

Temos que

$$JX_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix},$$

e um dos determinantes Jacobianos deve ser diferente de zero quando calculado em $X^{-1}(p) = q$, supomos sem perda de generalidade que seja $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Vamos considerar agora uma aplicação $\pi(x, y, z) = (x, y)$, ou seja, uma projeção de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 (fig. 1.18). Seja agora $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, então

$$\pi \circ X(u, v) = \pi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x(u, v), y(u, v)),$$

como $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, temos pelo teorema 1.1 que existem $W_1 \subset U$ vizinhança de q e $W_2 \subset \pi \circ X(U)$ vizinhança de $\pi \circ X(q)$, e que

$$\begin{aligned} (\pi \circ X)^{-1} : W_2 &\rightarrow W_1 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

é diferenciável.

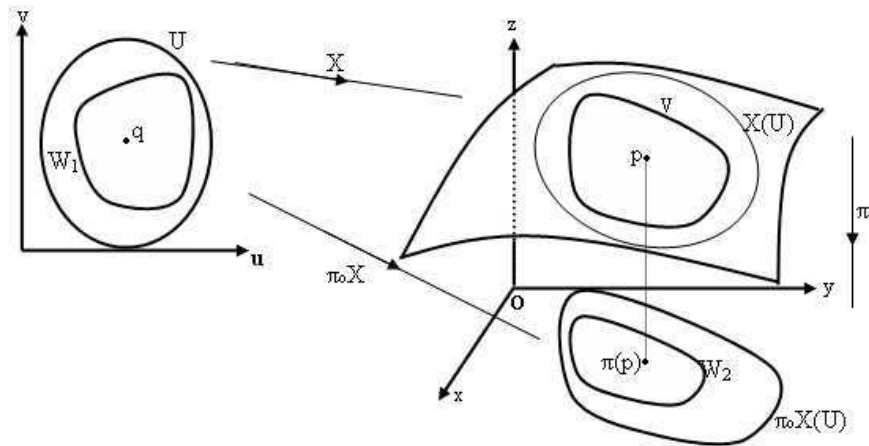


Figura 1.18. Temos que π leva pontos de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 .

Considere agora

$$\begin{aligned} X \circ (\pi \circ X)^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= X(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= (x(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})), y(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})), z(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y}))). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} (\pi \circ X) \circ (\pi \circ X)^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= (\bar{x}, \bar{y}) \\ &= (x(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})), y(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y}))), \end{aligned}$$

logo

$$\bar{x} = x(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})), \quad \bar{y} = y(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})),$$

e substituindo teremos

$$\begin{aligned} X \circ (f \circ X)^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= X(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= (\bar{x}, \bar{y}, z(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y}))), \end{aligned}$$

onde $z = f(\bar{x}, \bar{y})$.

Seja $V = X(W_1)$, então temos

$$\begin{aligned} X \circ (f \circ X)^{-1} : W_2 &\rightarrow V \\ (x, y) &\mapsto (x, y, z(x, y)). \end{aligned}$$

Logo V é localmente um gráfico, e aqui terminamos de demonstrar para um dos casos, os outros são feitos de forma análoga considerando ao invés de utilizar a aplicação π utilizamos $\pi_1(x, y, z) = (x, z)$ ou $\pi_2(x, y, z) = (y, z)$.

□

Exemplo 1.13. Como mencionamos, com a proposição 1.3 conseguimos mostrar que um subconjunto de \mathbb{R}^3 não é uma superfície regular. Voltando ao exemplo 1.5, seja o cone C dado por $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, aqui estamos considerando que z possa ser zero, então no ponto $(0,0,0)$, percebemos que a parametrização dada por

$$X(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}),$$

não é diferenciável, mas poderíamos ter uma outra parametrização onde isso não fosse tão claro. Vamos utilizar a proposição 1.3 para mostrar que não existe uma outra parametrização que satisfaça a definição 1.1, então se C fosse uma superfície regular teríamos uma vizinhança V em C do ponto $(0,0,0)$, onde V seria o gráfico de uma função diferenciável que teria uma das seguintes formas: $x = h(y, z)$, $y = g(x, z)$ ou $z = f(x, y)$. A primeira é a projeção de C sobre o plano yz e a segunda é a projeção de C sobre o plano xz e essas duas não possuem vizinhança do ponto $(0, 0)$, a terceira é a projeção de C no plano xy , onde V coincide com $z = f(x, y) = +\sqrt{x^2 + y^2}$, que não é diferenciável em $(0, 0)$ e portanto C não é uma superfície regular, mas como já vimos no exemplo 1.5, o ponto $(0, 0, 0)$ é o unico ponto problemático e $C - (0, 0, 0)$ é uma superfície regular.

Podemos perceber que na verificação das condições para afirmar que uma superfície é regular, as condições (i) e (iii) são em geral de fácil verificação, já para verificar a (ii) tivemos que ser um pouco mais cautelosos. Então apresentamos agora a última proposição dessa seção, com a qual podemos afirmar que se já sabemos que S é uma superfície regular e temos uma aplicação X candidata à parametrização, tal que essa seja bijetiva e satisfaça as condições (i) e (ii), então X é realmente uma parametrização.

Proposição 1.4. *Seja S uma superfície regular, com $p \in S$ e seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação com $p \in X(U)$ tal que X satisfaz as condições (i) e (iii) da definição 1.1. Suponha X bijetiva. Então X^{-1} é contínua.*

Demonstração. Temos que $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in U$, e seja $q \in U$. Como X satisfaz as condições (i) e (iii) podemos admitir sem perda de generalidade que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Consideramos agora a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \pi(x, y, z) &\mapsto (x, y). \end{aligned}$$

Então pelo teorema 1.1 existem $W_1 \subset U$ vizinhança de q e $W_2 \subset \mathbb{R}^2$ vizinhança de $\pi \circ X(q)$, e

$$\begin{aligned} (\pi \circ X)^{-1} : W_2 &\rightarrow W_1 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

é diferenciável.

Usando agora a suposição que X é bijetiva, então restringindo a $X(W_1)$, temos $X^{-1} = (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi$ (ver fig.1.18). Portanto X^{-1} é composição de funções contínuas, logo contínua, e assim encerramos a demonstração. □

Com o que foi visto até aqui, podemos dizer que temos bem definido o conceito de superfície regular parametrizada.

1.2 Mudança de Parâmetros

Na seção anterior percebemos que um ponto da superfície pode pertencer a mais de uma vizinhança coordenada, ou seja, podemos parametrizar localmente uma superfície por mais de uma parametrização, é interessante ver como fazer a troca de um sistema de

coordenadas para o outro, pois nos próximos capítulos vamos apresentar conceitos que não dependem do sistema de coordenadas escolhido.

Seja um ponto pertencente a duas vizinhanças coordenadas com parâmetros (u, v) e (\tilde{u}, \tilde{v}) a proposição a seguir nos mostra que é possível passar de (u, v) para (\tilde{u}, \tilde{v}) e vice-versa.

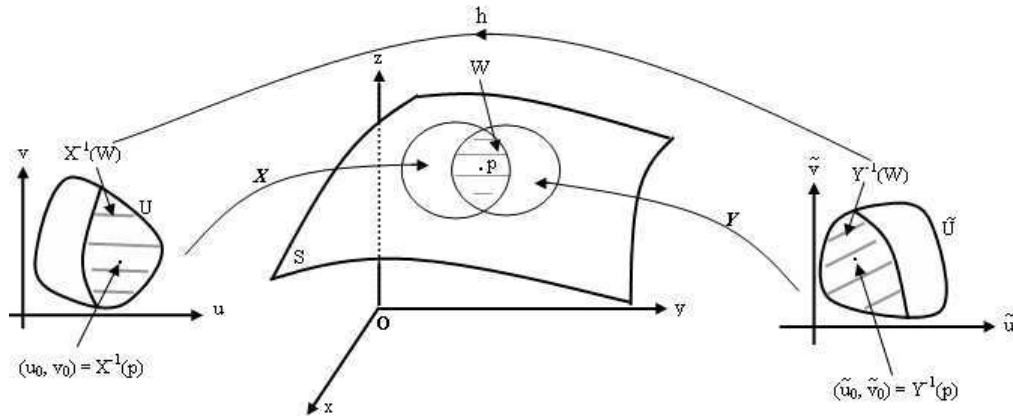


Figura 1.19. Mudança de Parâmetros.

Proposição 1.5. *Seja S uma superfície regular, e sejam $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $Y: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S . Seja $p \in S$ tal que $p \in X(U) \cap Y(\tilde{U}) = W$. Então a mudança de coordenadas $h = X^{-1} \circ Y: Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ é um difeomorfismo (fig. 1.19).*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que h é diferenciável, e essa basta, pois a prova da diferenciabilidade de h^{-1} é feita de forma análoga. Sejam as duas parametrizações X e Y dadas por:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ Y(\tilde{u}, \tilde{v}) &= (x(\tilde{u}, \tilde{v}), y(\tilde{u}, \tilde{v}), z(\tilde{u}, \tilde{v})). \end{aligned}$$

Dado $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in Y^{-1}(W)$, vamos verificar que h é diferenciável em $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Fazendo $h(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = (u_0, v_0)$, como X é parametrização, alguma submatriz de ordem dois da matriz jacobiana $JX(u_0, v_0)$ tem determinante diferente de zero, vamos supor sem perda de generalidade que seja aquela em que o determinante é representado por $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0)$. Estendendo X a uma aplicação

$$\begin{aligned} F: U \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A restrição $F|_{U \times \{0\}} = F(u, v, 0) = X(u, v)$. A matriz jacobiana é dada por

$$JX(u, v, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{bmatrix}$$

e o seu determinante é

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$$

O teorema da função inversa nos garante que existem abertos V e V' onde V é vizinhança de $(x_0, v_0) \in U$ e V' é vizinhança de $X(u_0, v_0) \in W$, tal que $F^{-1} : V' \rightarrow V$ existe e é diferenciável em V . Então, $h = F^{-1} \circ Y$ é diferenciável em $(\tilde{x}_0, \tilde{v}_0) \in \tilde{U}$. A aplicação Y é uma parametrização, então ela é contínua e isso garante que existe uma vizinhança \tilde{V} de $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in \tilde{U}$ tal que $Y(\tilde{V}) \subset V'$. Portanto restringindo ao conjunto \tilde{V} a aplicação h , temos uma composição de aplicações diferenciáveis, $h|_{\tilde{V}} = F^{-1} \circ Y|_{\tilde{V}}$ e portanto h é diferenciável. O ponto $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ foi nos dado de forma arbitária, então h é diferenciável em $Y^{-1}(W)$.

□

Como X^{-1} e Y são homeomorfismos, $h = X^{-1} \circ Y$ também é homeomorfismo, pois é uma composição de homeomorfismos. Mas não poderíamos utilizar esse argumento para mostrar que h é diferenciável, pois perceba que para provar a diferenciabilidade de h na demonstração da proposição 1.5, utilizamos uma aplicação $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a F^{-1} tem domínio em um subconjunto de \mathbb{R}^3 ao invés X^{-1} que tem como domínio um subconjunto da superfície, e isso porque ainda não definimos o que é uma aplicação diferenciável em S . Faremos isso na seção seguinte.

A mudança de parâmetros também é chamada de *reparametrização*.

Exemplo 1.14. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = z, y > 0\}$ (fig. 1.20) uma superfície regular e sejam

$$\begin{aligned} X(r, \theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2) & \theta \in (0, \pi) \\ Y(u, v) &= (u, v, u^2 + v^2) \end{aligned}$$

duas parametrizações de S , então

$$\begin{aligned} X^{-1}(x, y, z) &= \left(\sqrt{z}, \operatorname{arccotg} \left(\frac{x}{y} \right) \right) \\ Y^{-1}(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned}$$

Portanto

$$h = X^{-1} \circ Y = X^{-1}[Y(u, v)] = \left(\sqrt{u^2 + v^2}, \operatorname{arccotg} \left(\frac{u}{v} \right) \right)$$

$$h^{-1} = Y^{-1} \circ X = Y^{-1}[X(r, \theta)] = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

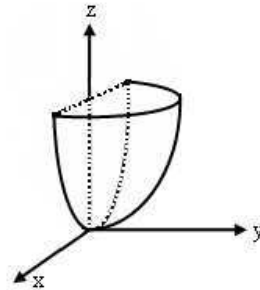


Figura 1.20. A superfície S é parte de um parabolóide de revolução de uma folha.

Exemplo 1.15. Seja \mathbb{S}^2 a esfera unitária, antes de fazermos a mudança de parâmetros, vamos apresentar um resultado importante:

Nota: Uma outra forma de definir uma parametrização para a esfera do exemplo 1.2, é utilizando a projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 - \{P_N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, que leva pontos $p = (x, y, z)$ da esfera \mathbb{S}^2 menos o pólo norte $P_N = (0, 0, 1)$ sobre o plano xy (fig.1.21-a). Seja $\pi(x, y, z) = (u, v)$, então, fazendo $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{P_N\}$ obtemos a parametrização Y apresentada nesse exemplo.

vamos considerar parte de \mathbb{S}^2 , onde $y > 0$ (fig. 1.21-b) e sejam duas parametrizações

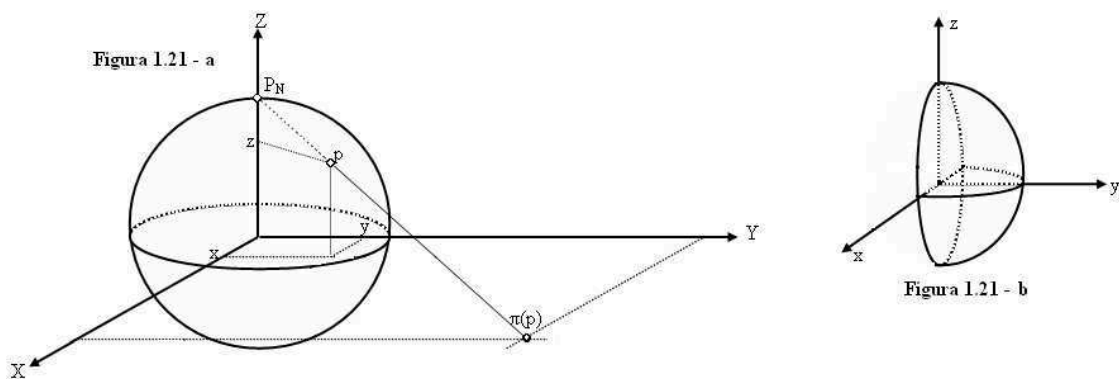


Figura 1.21. Fig. 21-a projeção estereográfica de \mathbb{S}^2 , fig. 21-b Parte de \mathbb{S}^2 .

$$X(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \cos \theta) \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi$$

$$Y(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

então

$$X^{-1}(x, y, z) = \left(\arccos(z), \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{y}\right) \right)$$

$$Y^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

Portanto

$$h = X^{-1} \circ Y = X^{-1}[Y(u, v)] = \left(\arccos\left(\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right), \operatorname{arccotg}\left(\frac{u}{v}\right) \right)$$

$$h^{-1} = Y^{-1} \circ X = Y^{-1}[X(\theta, \varphi)] = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta \cos\varphi}{1 - \cos\theta}, \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{1 - \cos\theta} \right).$$

Com este exemplo encerramos esta seção e também o primeiro capítulo deste trabalho. Apesar de termos visto vários exemplos de superfícies regulares, existem muitos outros onde nem sempre será fácil e por vezes nem possível exibir uma parametrização.

Capítulo 2

Aplicações Diferenciáveis e Plano Tangente

Vimos no capítulo 1 que superfícies regulares são definidas como subconjuntos de \mathbb{R}^3 , então, é de se esperar que seja possível definir aplicações que possuem domínio, e, em alguns casos também contradomínio nestes subconjuntos. Definir essas aplicações é nosso objetivo na seção 2.1 Em 2.2 vamos apresentar o plano tangente existente em todos os pontos de uma superfície regular, e em seguida definiremos as diferenciais das aplicações da seção 2.1 tendo em vista que essas possuem domínio neste plano.

2.1 Funções Diferenciáveis em Superfícies

Nesta seção vamos tratar de dois tipos de aplicações sobre S , a primeira vamos chamar de função f e a outra de aplicação φ , tal que:

$$f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2,$$

onde S, S_1, S_2 representam superfícies regulares quaisquer. O objetivo é definir sob que condições essas aplicações são diferenciáveis em um ponto p da superfície, para tanto faremos uso de uma parametrização da vizinhança coordenada desse ponto. Logo em seguida, utilizaremos os resultados da seção anterior para mostrar que a diferenciabilidade de f e de φ não depende da escolha de parametrização.

2.1.1 Funções Reais Diferenciáveis em Superfícies

Primeiro vamos definir a função real f .

Definição 2.1. *Seja uma função $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$, onde V é um subconjunto aberto de S , e seja $p \in V$. Então f é diferenciável em p se, dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ com $p \in X(U) \subset V$, a composição $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X^{-1}(p)$.*

Exemplo 2.1. Seja S uma superfície regular, escolhamos um ponto fixo em S , digamos $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, e queremos calcular a distância de qualquer outro ponto $p \in S$ ao ponto p_0 . Teremos então a seguinte função

$$\begin{aligned} d : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \end{aligned}$$

mas observe que d não é diferenciável em $p = p_0$, então vamos considerar a função diferenciável d^2 que é a distância ao quadrado. Teremos então

$$\begin{aligned} d^2 : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \end{aligned}$$

Para ilustrar tomemos como exemplo a esfera unitária do exemplo 1.2, e seja o ponto fixo $p_0 = (0, 1, 0)$, temos X dada por

$$x = \text{sen}\theta \cos \varphi, \quad y = \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \quad z = \text{cos}\theta,$$

fazendo a composição

$$\begin{aligned} d^2 \circ X &= (\text{sen}\theta \cos \varphi)^2 + (\text{sen}\theta \text{sen}\varphi - 1)^2 + (\text{cos}\theta)^2 \\ &= \text{sen}^2\theta \cos^2\varphi + \text{sen}^2\theta \text{sen}^2\varphi - 2\text{sen}\theta \text{sen}\varphi + 1 + \text{cos}^2\theta = 2 - 2\text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \end{aligned}$$

que diferenciável para qualquer p .

Proposição 2.1. *A definição de função diferenciável em superfícies é independente da escolha de parametrização .*

Demonstração. Dadas duas parametrizações X e Y , tais que

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S, \quad Y : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S,$$

e uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in W = X(U) \cap Y(\tilde{U})$, em relação a X . Então temos que $f \circ X$ é diferenciável em $X^{-1}(p) \in X^{-1}(W) \subset U$.

Com a proposição 1.5, vimos que a mudança de parâmetros, $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ também é diferenciável, portanto fazendo a composição $f \circ X \circ h$ teremos,

$$f \circ X \circ h = f \circ X \circ X^{-1} \circ Y = f \circ Y$$

que é diferenciável em $Y^{-1}(p) \in Y^{-1}(W) \subset \tilde{U}$. □

2.1.2 Funções Diferenciáveis Entre Superfícies

Vamos agora definir a aplicação φ

Definição 2.2. Dadas duas superfícies S_1 e S_2 regulares e uma aplicação contínua $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$, V_1 conjunto aberto de S_1 , dizemos que φ é diferenciável em $p \in V_1$ se dadas as parametrizações

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$$

com $p \in X_1(U_1)$, e $\varphi(p) \in X_2(U_2)$, temos que $\tilde{\varphi} : X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$ é diferenciável em $X_1^{-1}(p)$ (fig. 2.1).

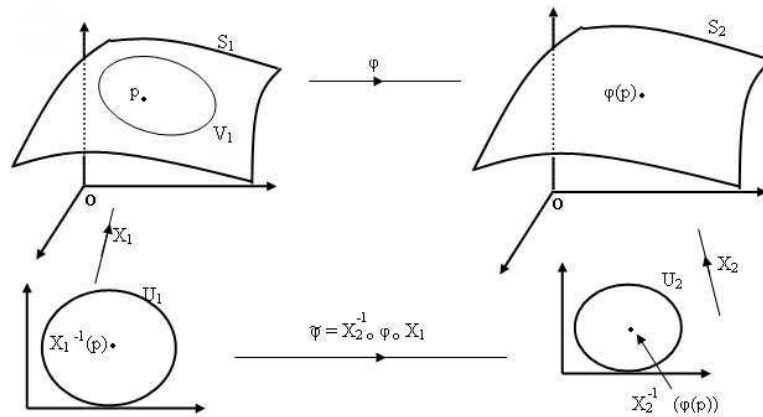


Figura 2.1. Para φ ser diferenciável em p temos que $\tilde{\varphi}$ deve ser diferenciável em $X^{-1}(p)$.

Se dada uma aplicação diferenciável $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$, existir a inversa diferenciável φ^{-1} , então dizemos que S_1 e S_2 são superfícies difeomorfas. Se duas superfícies são difeomorfas então elas são indistinguíveis do ponto de vista da diferenciabilidade.

Exemplo 2.2. Seja a esfera unitária \mathbb{S}^2 do exemplo 1.2 dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com parametrização X

$$x = \text{sen}\theta\text{cos}\varphi, \quad y = \text{sen}\theta\text{sen}\varphi, \quad z = \text{cos}\theta,$$

e seja

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \sigma(x, y, z) &= (ax, by, cz), \end{aligned}$$

fazendo a restrição de $\sigma|_{\mathbb{S}^2}$, os pontos de \mathbb{S}^2 serão levados através dessa restrição em pontos sobre o elipsóide dado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com parametrização Y dada por:

$$x' = a\text{sen}\theta\text{cos}\varphi, \quad y' = b\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, \quad z' = c\text{cos}\theta.$$

Podemos perceber que

$$\tilde{\sigma} = Y^{-1} \circ \sigma \circ X = Y^{-1} \circ Y = (\theta, \varphi),$$

que é diferenciável, o que já podíamos esperar já que a própria $\sigma|_{S_2}$ é diferenciável.

Exemplo 2.3. Exemplo Geral. Seja V um conjunto aberto de \mathbb{R}^3 e uma função diferenciável $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então dadas duas superfícies regulares S_1 e S_2 com $S_1 \subset V$, tal que $\varphi(S_1) \subset S_2$, quando restrita $\varphi|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ teremos uma aplicação diferenciável. Veja a aplicação σ do exemplo anterior.

Observação 2.1. Com os resultados obtidos na seção anterior e nessa, podemos observar que se S é uma superfície regular com uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, teremos que U e $X(U) \subset S$ são difeomorfos, o que mostra, que além de um homeomorfismo, temos um difeomorfismo local entre a superfície e o plano.

Proposição 2.2. A definição de aplicação diferenciável entre superfícies é independente de escolhas de parametrizações, tanto no domínio quanto no contra-domínio.

Demonstração. Dadas duas parametrizações X_1 e X_2 de $p \in S_1$

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1,$$

e dadas duas parametrizações Y_1 e Y_2 de $\varphi(p) \in S_2$

$$Y_1 : V_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2, \quad Y_2 : V_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

onde $\varphi : W_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação contínua de um conjunto W_1 de uma superfície regular S_1 em uma superfície regular S_2 (fig. 2.2).

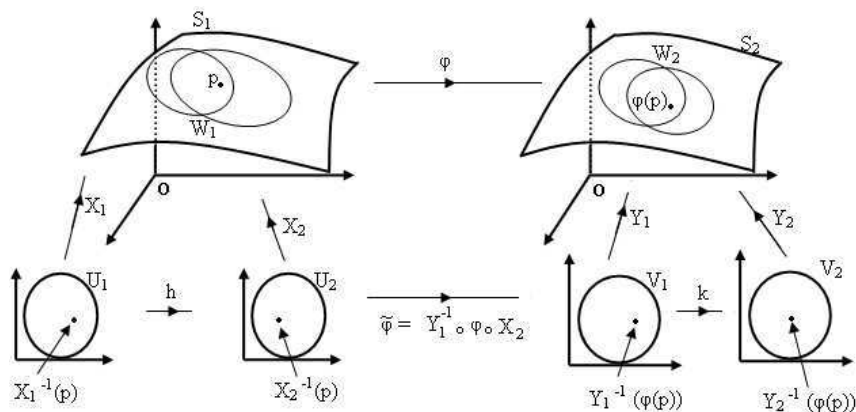


Figura 2.2. A noção de diferenciabilidade entre superfícies independente da escolha de parametrização.

Seja $p \in X_1(U_1) \cap X_2(U_2) = W_1$, $\varphi(p) \in Y_1 \cap Y_2 = W_2 \subset S_2$,

$$h = X_2^{-1} \circ X_1,$$

$$k = Y_2^{-1} \circ Y_1,$$

e seja uma aplicação $\tilde{\varphi} = Y_1^{-1} \circ \varphi \circ X_2$ diferenciável em $X_2^{-1}(p) \in X_2^{-1}(W) \subset U_2$.

Temos então que,

$$Y_1^{-1} \circ \varphi \circ X_1 = \tilde{\varphi} \circ h, \quad Y_2^{-1} \circ \varphi \circ X_2 = k \circ \tilde{\varphi}, \quad Y_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 = k \circ \tilde{\varphi} \circ h$$

são diferenciáveis em seus respectivos pontos.

□

As derivadas das aplicações aqui estudadas não possuem domínio na superfície, mas no espaço tangente à essa, e é esse espaço que passamos a estudar.

2.2 Plano Tangente e Diferencial de uma Aplicação

Como mencionamos na seção 1.1 a condição (iii) da definição 1.1 garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de uma superfície regular, o objetivo nesta seção é estudar a constituição desse plano denotado por $T_p S$.

Seja S uma superfície regular e $p \in S$, podemos perceber que por p podem passar infinitas curvas, vamos primeiro analisar o que acontece com uma dessas curvas. Seja então $X(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em p , considerando u, v como funções diferenciáveis de um parâmetro t , $t \in I \subset \mathbb{R}$. Obtemos uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ diferenciável com traço em S . Desta forma α é uma curva da superfície, conseqüentemente um vetor será tangente a S em p quando for tangente à uma curva de S em p .

Temos

- S - Superfície regular parametrizada,
- $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ - uma parametrização,
- $\alpha : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ - uma curva em U
- $\gamma : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ - curva em S onde $\gamma = X \circ \alpha$.

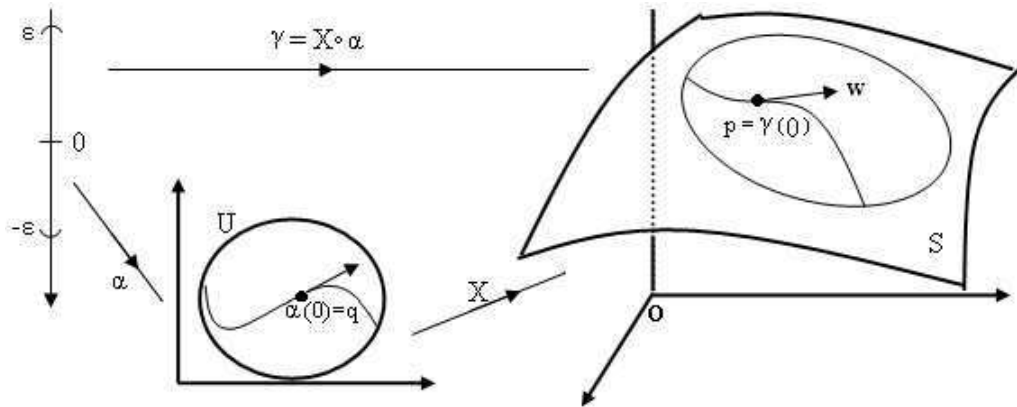


Figura 2.3. O vetor $\gamma'(0) = w$ é tangente à curva $\gamma(t)$ em $p = \gamma(0)$.

A aplicação $\gamma(t)$ nos dá uma curva em S , onde t assume valores em I , vamos querer que em $t = 0$, seja $\gamma(0) = p$, então $w = \gamma'(0)$ é o vetor tangente a curva $\gamma(t)$ em $p \in S$. Esse vetor é dado por

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= X \circ \alpha(u(0), v(0)) \\ \gamma'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(u(0), v(0)) = dX_{(\alpha(0))}\alpha'(0)\end{aligned}$$

Seja $\alpha(0) = q$, podemos ver que a derivada dX_q leva vetores tangentes às curvas passando por q , em vetores tangentes às respectivas curvas na superfície no ponto p tal que $p = X(q)$.

Definição 2.3. Dada uma superfície regular S com $p \in S$, o plano tangente à S em p , é o conjunto dos vetores tangente às curvas em S passando por p , em p .

Proposição 2.3. Seja S uma superfície regular, com $p \in S$ e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em p , tal que $X(q) = p$. Então o conjunto de vetores tangentes à S em $p = X(q)$ é o subespaço vetorial $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ de dimensão 2.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2)$.

Seja um vetor $w \in T_p S$, então existe uma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = w$, e existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, tal que $\alpha(0) = q$, onde $\gamma = X \circ \alpha$ (fig 2.3).

Então

$$w = \gamma'(0) = \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(0) = dX_{(\alpha(0))}(\alpha'(0)) = dX_q(\alpha'(0)) \in dX_q(\mathbb{R}^2).$$

Seja agora um vetor $w = dX_q(v)$ com $v \in \mathbb{R}^2$ e seja a curva $\alpha(t) = q + tv$ contida em U , com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = v$, então

$$\begin{aligned}\gamma = X \circ \alpha(t) \Rightarrow \gamma(0) &= X(\alpha(0)) = X(q) = p \\ \gamma'(0) &= dX(\alpha(0))(\alpha'(0)) = dX_q(v) = w \in T_p S.\end{aligned}$$

Assim mostramos que $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2)$.

Vamos agora mostrar que $T_p S$ é espaço vetorial.

Sejam w, w_1 vetores de $T_p S$, então existem as curvas

$$\begin{aligned}\gamma &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S; & \gamma(0) &= p, & \gamma'(0) &= w \\ \sigma &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S; & \sigma(0) &= p, & \sigma'(0) &= w_1,\end{aligned}$$

e por ser X um homeomorfismo, temos que $X(q) = p$ e existem as curvas

$$\begin{aligned}\alpha &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U; & dX_q(\alpha'(0)) &= w \\ \beta &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U; & dX_q(\beta'(0)) &= w_1.\end{aligned}$$

Seja agora $\eta > 0$, tal que temos uma curva $\phi(t) = q + t(\alpha'(0) + \beta'(0))$ contida em U , onde $t \in (-\eta, \eta)$.

Consideremos a curva em S

$$\begin{aligned}\zeta &: (-\eta, \eta) \rightarrow S \\ & t \mapsto X(\phi(t)) \\ \zeta(t) &= X \circ \phi(t),\end{aligned}$$

então,

$$\zeta(0) = X \circ \phi(0) = X(\phi(0)) = X(q) = p,$$

portanto,

$$\begin{aligned}\zeta'(0) &= dX(\phi(0))(\phi'(0)) \\ &= dX_q(\alpha'(0) + \beta'(0)) \\ &= dX_q(\alpha'(0)) + dX_q(\beta'(0)) \\ &= w + w_1.\end{aligned}$$

Logo, $w_1 + w_2 \in T_p S$.

Consideremos agora, a curva $\phi(t) = q + t\lambda\alpha'(0)$ também contida em U , com $t \in (-\eta, \eta)$, e consideremos a curva

$$\begin{aligned}\zeta &: (-\eta, \eta) \rightarrow S \\ \zeta(t) &= X \circ \phi(t) \\ \zeta(0) &= X \circ \phi(0) = X(\phi(0)) = X(q) = p,\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\zeta'(0) &= dX(\phi(0))(\phi'(0)) \\ &= dX_q(\lambda(\alpha'(0))) \\ &= \lambda dX_q(\alpha'(0)) = \lambda w.\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda w \in T_p S$. Desta forma está demonstrado que $T_p S$ é espaço vetorial.

Como a condição (iii) da definição 1.1 garante que dX_q é injetiva, temos então que o *kernel* (ver apêndice) de (dX_q) é igual ao vetor nulo. Logo $T_p S$ tem dimensão 2 e encerramos a demonstração. □

Um plano está bem definido pela junção de um de seus pontos com dois vetores linearmente independentes contidos no plano, e qualquer outro vetor do plano pode ser obtido com uma combinação linear dos outros dois. Então a escolha de uma parametrização X , com $X^{-1}(p) = q$, determina uma base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ de $T_p S$, chamamos essa de *base associada* a X . Porém $T_p S$ independe da escolha de X .

A equação paramétrica do plano tangente a S em um ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + rX_u + sX_v, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.4. Seja a função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e a um valor regular de f , pela proposição 1.2 sabemos que $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular. Vamos então escrever a equação do plano tangente à $f^{-1}(a)$ em um ponto p dessa superfície, e para tanto vamos utilizar um outro elemento, a saber, o gradiente de f . Seja $T_p f^{-1}(a)$ o plano tangente a $f^{-1}(a)$ em p .

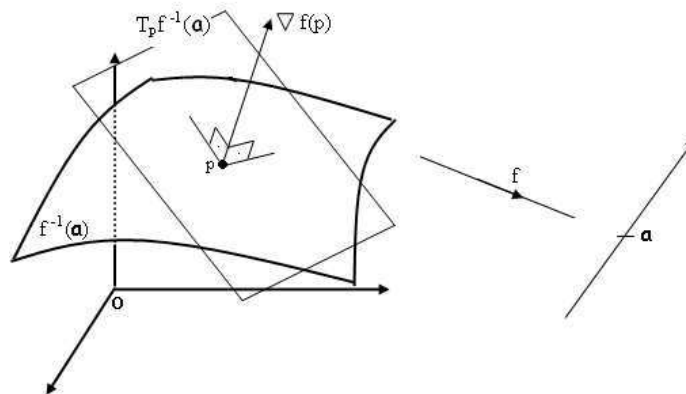


Figura 2.4. O vetor $\nabla f(p)$ é ortogonal ao plano $T_p f^{-1}(a)$.

Sabemos que o gradiente de $f(p)$ denotado por $\nabla f(p)$ é ortogonal a $T_p f^{-1}(a)$ em $p \in f^{-1}(a)$.

Então $T_p f^{-1}(a) = \ker f'(p) = \ker df(p)$.

Primeiro vamos mostrar que $T_p f^{-1}(a) \subseteq \ker f'(p)$. Seja $v \in T_p f^{-1}(a)$, e seja uma curva $\gamma : t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow f^{-1}(a)$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Seja $f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, então $f \circ \gamma(t) = a$ e $(f \circ \gamma)'(t) = 0 \forall t$.

Temos:

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = f'(\gamma(0))(\gamma'(0)) \Rightarrow f'(p)(v) = 0,$$

Logo $v \in \ker f'(p)$.

Seja agora um vetor $v \in \ker f'(p)$, então $f'(p)(v) = 0$, precisamos mostrar que $v \in T_p f^{-1}(a)$. Suponha sem perda de generalidade que $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, então existe

$$\begin{aligned} \phi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \phi(x, y) \end{aligned}$$

tal que $f^{-1}(a) = \text{graf}(\phi)$, ou seja, $(x, y, \phi(x, y)) \in f^{-1}(a) \forall (x, y) \in U$, e $f(x, y, \phi(x, y)) = f(p) = a$.

Seja $p = (x_0, y_0, \phi(x_0, y_0))$, $v = (b, c, d)$ e uma aplicação $\pi(v) = (b, c, 0)$.

Sejam as curvas

$$\begin{aligned} \alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow U \\ t &\mapsto (x_0, y_0, 0) + t(b, c, 0) = (x_0 + tb, y_0 + tc, 0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow f^{-1}(a) \\ t &\mapsto (x_0 + tb, y_0 + tc, \phi(x_0 + tb, y_0 + tc)), \end{aligned}$$

tal que $f \circ \beta(t) = a \forall t$ e $\beta(0) = (x_0, y_0, \phi(x_0, y_0)) = p$

$$\beta'(0) = \left(b, c, \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0)b + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0)c \right),$$

as duas primeiras coordenadas coincidem com as coordenadas do vetor v , queremos então $d = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0)b + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0)c$.

Se $v \in \ker f'(p)$ temos que v e $\nabla f(p)$ são ortogonais, então o produto escalar desses é nulo, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(p), f'(p) \rangle = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(p)b + \frac{\partial f}{\partial y}(p)c + \frac{\partial f}{\partial z}(p)d = 0 \\ &\Rightarrow d = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(p)}{\frac{\partial f}{\partial z}(p)} b - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(p)}{\frac{\partial f}{\partial z}(p)} c, \end{aligned}$$

e utilizando o teorema 1.2 temos que

$$d = \frac{\partial \phi}{\partial x} b + \frac{\partial \phi}{\partial y} c,$$

portanto a terceira coordenada de v está satisfeita e $v \in T_p f^{-1}(a)$.

Então, $w \perp \nabla f(p) \forall w \in T_p f^{-1}(a)$, logo tomando $p = (x_0, y_0, z_0)$ e $w = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ temos a equação do plano tangente à $T_p f^{-1}(a)$ em p dada por

$$\langle \nabla f(p), w \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0$$

Vamos agora falar sobre a derivada das aplicações obtidas na seção anterior.

Definição 2.4. *Seja uma superfície regular S e uma função $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em V , a cada $p \in V$ associamos uma aplicação linear $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ que é chamada a diferencial de f em p , que definimos da seguinte forma:*

Seja $v_p \in T_p S$ e $\gamma : t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v_p$, então a curva $\beta = f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon)$ é diferenciável, e

$$df_p(v_p) = \beta'(0) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)$$

onde $\beta(0) = f(p)$.

Definição 2.5. *Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares, e uma aplicação contínua $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ diferenciável em V_1 , a cada $p \in V_1$ definimos a aplicação linear $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$, atuando em um vetor $v_p \in T_p S_1$ da seguinte forma:*

Tomamos uma curva diferenciável $\gamma : t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v_p$, então

$$d\varphi_p(v_p) = \beta'(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0)$$

onde $\beta = \varphi \circ \gamma$, $\beta(0) = \varphi(p)$.

Podemos perceber que as definições 2.4 e 2.5 são análogas, então a próxima proposição será demonstrada apenas para um dos casos, o outro pode ser feito com o mesmo raciocínio.

Proposição 2.4. *A diferencial $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ definida acima é linear e não depende da escolha da curva que passa por p com vetor tangente v_p .*

Demonstração. Temos que a curva $\beta(t) = \varphi \circ \gamma(t)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\beta(t) = \varphi \circ \gamma(t) = Y \circ Y^{-1} \circ \varphi \circ X \circ X^{-1} \circ \gamma(t),$$

onde X é parametrização da vizinhança de $p \in S_1$ e Y é parametrização da vizinhança de $\varphi(p) \in S_2$. Podemos perceber que $Y^{-1} \circ \varphi \circ X = h$ é a mudança de parâmetros. E seja a curva $\alpha : t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, tal que $X^{-1} \circ \gamma(t) = \alpha(t)$, temos então

$$\begin{aligned} \beta(t) &= Y \circ h \circ \alpha(t), \\ \beta'(0) &= \frac{d}{dt}(Y \circ h \circ \alpha)(0) = dY_r \, dh_q \, \alpha'(0). \end{aligned}$$

Sejam $v, w \in T_p S_1$, e sejam as curvas $\gamma_1 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$, $\gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$, tal que $v = \gamma_1'(0)$, $w = \gamma_2'(0)$ e as curvas $\alpha_1 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ e $\alpha_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} d\varphi_p(\lambda v + w) &= d\varphi_p \circ dX_q(\lambda \alpha_1'(0) + \alpha_2'(0)) \\ &= dY_r \circ dh_q(\lambda \alpha_1'(0) + \alpha_2'(0)) \\ &= \lambda dY_r(dh_q(\alpha_1'(0))) + dY_r(dh_q(\alpha_2'(0))) \\ &= \lambda d\varphi_p \circ dX_q(\alpha_1'(0)) + d\varphi_p \circ dX_q(\alpha_2'(0)) \\ &= \lambda d\varphi_p(v) + d\varphi_p(w). \end{aligned}$$

portanto é linear.

E não depende da escolha de γ , pois sejam

$$\begin{aligned} \gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \gamma(0) &= p, \gamma'(0) = v, \\ \sigma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \sigma(0) &= p, \sigma'(0) = v, \end{aligned}$$

$$d\varphi_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = d\varphi_p(\gamma'(0)) = d\varphi_p(v) = d\varphi_{\sigma(0)}(v) = d\varphi_{\sigma(0)}(\sigma'(0)).$$

□

O que fizemos até agora foi mostrar que superfícies regulares fornecem um ambiente apropriado para se trabalhar noções do cálculo diferencial, o próximo teorema é uma versão do teorema da função inversa para superfícies.

Teorema 2.1. *Seja $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ diferenciável em $p \in S_1$ e $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ uma transformação linear invertível, então existem abertos $V \subset S_1$ e $W \subset S_2$ com $p \in V$ e $\varphi(p) \in W$ tal que $\varphi|_V$ é um difeomorfismo.*

Nota: Não será demonstrado. (demonstração segue-se da aplicação imediata do teorema 1.1 em \mathbb{R}^2 .)

Um plano tangente à uma superfície regular nos permite ainda calcular um ângulo, a saber, o ângulo entre superfícies num ponto p pertencente à intersecção dessas. Antes de definir esse ângulo precisamos do seguinte resultado: Seja S uma superfície regular, fixando uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ para $p \in S$, obtemos um vetor normal unitário em $p = X(q) \in X(U)$ definido como

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Definição 2.6. *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares que se intersectam, tal que $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, e seja $p \in S_1 \cap S_2$. O ângulo θ entre as superfícies S_1 e S_2 em p é dado por $\theta = \arccos \langle N_{S_1}(p), N_{S_2}(p) \rangle$. Onde $N_{S_1}(p)$ é o vetor normal unitário em $p \in S_1$ e $N_{S_2}(p)$ é o vetor normal unitário em $p \in S_2$.*

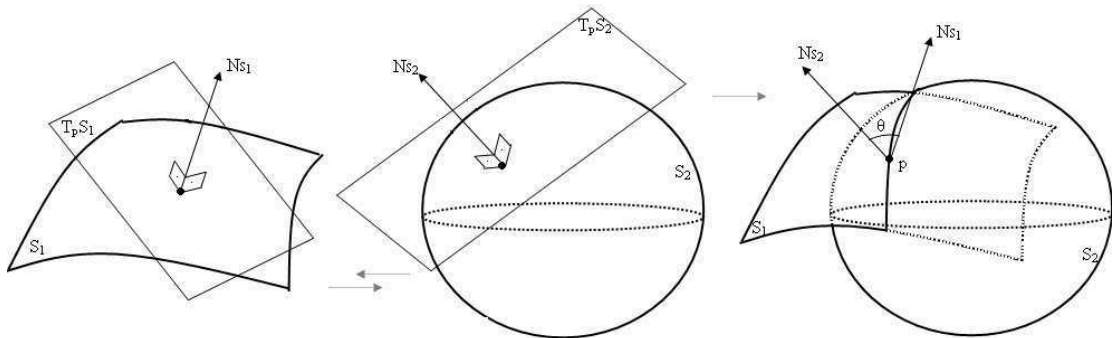


Figura 2.5. O ponto $p \in S_1 \cap S_2$ e θ é o ângulo entre S_1 e S_2 em p .

Podemos perceber que a existência e continuidade do plano tangente exige apenas que as parametrizações possuam derivadas parciais de primeira ordem, porém algumas superfícies mesmo possuindo plano tangente em todos os seus pontos, não são regulares, pois as aplicações que as definem não são suficientemente diferenciáveis para satisfazer nossa definição 1.1, mas não abordaremos esta questão, e queremos que as aplicações que definem uma superfície regular sejam infinitamente diferenciáveis para evitar esse tipo de situação, pois nossa intenção é tratar questões geométricas e não questões de cálculo diferencial.

Capítulo 3

Primeira Forma Fundamental e Orientação

Neste capítulo, na seção 3.1 veremos a primeira forma fundamental, com a qual conseguimos fazer alguns cálculos geométricos, e na seção 3.2 vamos estudar as condições necessárias para que uma superfície seja orientável.

3.1 Métrica (Primeira Forma Fundamental)

A partir de agora, talvez seja interessante imaginarmos que somos habitantes de uma superfície regular. Primeiramente queremos calcular (sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3) comprimento entre pontos da superfície, ângulos entre curvas e área de regiões na superfície. Como faremos isso? Em nosso estudo vamos desenvolver dois tipos de formas quadráticas (ver apêndice), a primeira descreveremos nesta seção e a segunda na seção 4.2, e mais tarde em 5.5 veremos como as duas estão relacionadas.

À primeira forma quadrática damos o nome de *primeira forma fundamental* e geometricamente, essa forma apresenta uma estrutura métrica que nos permitirá calcular comprimentos, ângulos e área de regiões na superfície.

Definição 3.1. *Se S é uma superfície regular, $T_p S$ o plano tangente em p para $p \in S$ e $w \in T_p S$ então a aplicação*

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

é denominada primeira forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

A aplicação I_p expressa como a superfície adquire o produto interno usual do \mathbb{R}^3 , então calcular o produto interno de dois vetores pertencentes ao plano T_pS é igual a calcular o produto interno desses como vetores do \mathbb{R}^3 .

Seja $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva diferenciável em S e descrita por uma parametrização X , temos então que $\gamma'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t)$ é um vetor tangente a superfície e portanto pertencente a T_pS para algum $p \in S$, logo

$$\begin{aligned} I_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= \langle X_u u'(t) + X_v v'(t), X_u u'(t) + X_v v'(t) \rangle_{\gamma(t)} \\ &= (X_u u'(t) + X_v v'(t))^2 \\ &= (X_u)^2 (u'(t))^2 + 2X_u u'(t) X_v v'(t) + (X_v)^2 (v'(t))^2 \\ &= \langle X_u, X_u \rangle (u'(t))^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle u'(t)v'(t) + \langle X_v, X_v \rangle (v'(t))^2 \end{aligned}$$

Denotando $\langle X_u, X_u \rangle$, $\langle X_u, X_v \rangle$, $\langle X_v, X_v \rangle$ por E , F , G respectivamente obtemos:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle_p, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle_p, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle_p \end{aligned}$$

onde E , F , G são os coeficientes da primeira forma fundamental em p

Exemplo 3.1. Seja um plano $P \subset \mathbb{R}^3$, $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in P$ e $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ são vetores linearmente independentes pertencentes a P . Uma parametrização para esse plano é dada por:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= p_0 + uw_1 + vw_2, & (u, v) \in \mathbb{R}^2 \\ X_u &= w_1 \\ X_v &= w_2 \end{aligned}$$

Então, obtemos para um ponto qualquer $p \in P$ os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = |w_1|^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = |w_2|^2 = (b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 \end{aligned}$$

Vamos agora considerar que os vetores w_1 e w_2 sejam vetores ortogonais unitários, então

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

ou seja, obtemos coeficientes constantes para um ponto arbitrário de P .

Exemplo 3.2. Seja um cilindro reto $S \subset \mathbb{R}^3$, sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$ (ver fig. 1.9, seção 1.1), sabemos que uma parametrização para S é dada por:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (\cos u, \operatorname{sen} u, v) \\ U &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty\}, \end{aligned}$$

desta forma temos:

$$X_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \quad X_v = (0, 0, 1)$$

Então, obtemos para um ponto qualquer $p \in S$ os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \end{aligned}$$

Não cabe à esta seção e nem à este capítulo falar sobre a igualdade obtida para os coeficientes do plano e do cilindro, aliás, este assunto não será tratado com o devido rigor em nosso estudo, mas iremos comentar esse fato nas considerações finais do capítulo 5.

Exemplo 3.3. Seja o helicóide $H \subset \mathbb{R}^3$ do exemplo 1.4 (seção 1.1), uma parametrização para H é dada por:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u \cos v, u \operatorname{sen} v, bv) \\ U &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < v < 2\pi, \quad 0 < u < 1\}, \end{aligned}$$

Então:

$$X_u = (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, b), \quad X_v = (\cos v, \operatorname{sen} v, 0)$$

E os coeficientes para um ponto $p \in H$ são:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = u^2 + b^2. \end{aligned}$$

Munidos com a primeira forma fundamental, veremos agora como calcular comprimentos, ângulos e áreas mencionadas no início dessa seção.

Seja S uma superfície regular, onde $X : U \rightarrow S$ é uma parametrização de S , com U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e sejam $\alpha(t)$ e $\gamma(t)$ duas curvas, tais que

$$\alpha : (a, b) \rightarrow U, \quad \gamma : (a, b) \rightarrow S.$$

Então $\gamma(t)$ está contida em S e $\gamma(t) = X \circ \alpha = X(u(t), v(t))$ (fig. 3.1).

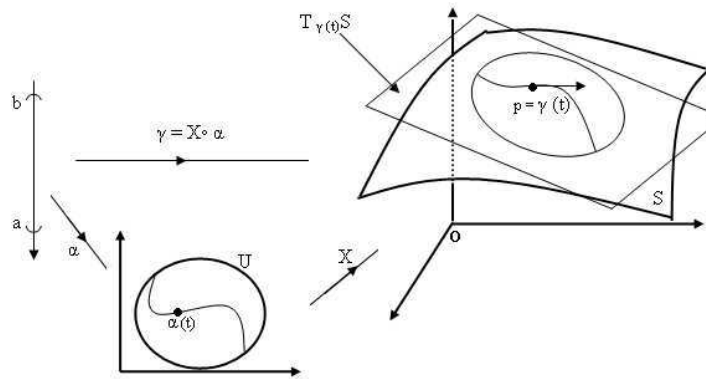


Figura 3.1. O vetor $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$.

Sabemos que o comprimento de arco da curva γ é dado por:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Então derivando $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ temos:

$$\gamma'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t),$$

sabemos também que, por ser $\gamma(t)$ contida na superfície, o vetor velocidade $\gamma'(t)$ está contido no plano $T_{\gamma(t)}S$, então

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \\ &= \sqrt{I_{\gamma(t)}(\gamma'(t))} \\ &= \sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt.$$

Exemplo 3.4. Seja uma esfera S de raio r , uma parametrização para essa esfera é dada por

$$X(\theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

onde,

$$\begin{aligned} X_\theta &= (r \cos\theta \cos\varphi, r \cos\theta \sin\varphi, -r \sin\theta) \\ X_\varphi &= (-r \sin\theta \sin\varphi, r \sin\theta \cos\varphi, 0). \end{aligned}$$

Calculando a primeira forma fundamental obtemos,

$$\begin{aligned} E &= r^2 \\ F &= 0 \\ G &= r^2 \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Vamos agora calcular o comprimento de uma curva γ contida na esfera, temos que $\gamma(t) = X(\theta(t), \varphi(t))$, fixamos $\theta(t) = \theta_0$ e fazemos variar $\varphi(t) = t \in (0, 2\pi)$, então $\theta'(t) = 0$ e $\varphi'(t) = 1$.

Logo

$$\sqrt{E(\theta'(t))^2 + 2F\theta'(t)\varphi'(t) + G(\varphi'(t))^2} = \sqrt{G},$$

e

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{G} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2\theta_0} dt \\ &= r \sin\theta_0 \int_0^{2\pi} dt = (r \sin\theta_0) t \Big|_0^{2\pi} = (r \sin\theta_0) 2\pi. \end{aligned}$$

Poderíamos ter fixado $\varphi(t) = \varphi_0$ e variado $\theta(t) = t \in (0, \pi)$ então $\theta'(t) = 1$ e $\varphi'(t) = 0$.

Logo

$$\sqrt{E(\theta'(t))^2 + 2F\theta'(t)\varphi'(t) + G(\varphi'(t))^2} = \sqrt{E},$$

e

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^\pi \sqrt{E} dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} dt \\ &= r \int_0^\pi dt = r t \Big|_0^\pi = r \pi. \end{aligned}$$

Então para calcular o comprimento do equador de S , podemos fixar $\theta = \frac{\pi}{2}$, e variar $\varphi = t \in (0, 2\pi)$

$$\left(r \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) 2\pi = 2\pi r.$$

Exemplo 3.5. Seja o cilindro de raio r e com eixo central Oz , uma parametrização dessa superfície é dada por

$$X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Temos

$$X_u = (-r \sin u, r \cos u, 0), \quad X_v = (0, 0, 1)$$

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Seja $\gamma(t)$ uma curva contida no cilindro, tal que, fixamos $v(t) = v_0$ e variamos $u(t) = t$, $t \in (0, 2\pi)$, então $v'(t) = 0$ e $u'(t) = 1$, logo

$$\sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} = \sqrt{E},$$

e

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{E} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt \\ &= r \int_0^{2\pi} dt = r t \Big|_0^{2\pi} = r 2\pi. \end{aligned}$$

O que já era de se esperar, pois estamos medindo o comprimento de uma circunferência contida no cilindro.

Vamos agora fixar $u(t) = u_0$ e variar $v(t) = t$, $0 < t < 10$, então $u'(t) = 0$ e $v'(t) = 1$, logo

$$\sqrt{E(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} = \sqrt{G},$$

e

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{10} \sqrt{G} dt = \int_0^{10} \sqrt{1} dt \\ &= \int_0^{10} dt = t \Big|_0^{10} = 10u.c. \text{ (unidade de comprimento)}. \end{aligned}$$

O que também podíamos esperar, pois estamos medindo o comprimento de um segmento vertical de $10u.c.$ contido no cilindro.

Vejamos agora como medir ângulos entre curvas em uma superfície.

Sejam $\gamma_1(t) = X \circ \alpha_1 = X(u_1(t), v_1(t))$ e $\gamma_2(t) = X \circ \alpha_2 = X(u_2(t), v_2(t))$ duas curvas

parametrizadas regulares contidas em uma superfície regular S , tais que essas se intersectam em $t = t_0$, no ponto $p = X(q) = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, onde X é uma parametrização de S . Então o ângulo θ de intersecção, dessas duas curvas no ponto p , é dado por:

$$\cos\theta = \frac{\langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0) \rangle}{\|\gamma'_1(t_0)\| \|\gamma'_2(t_0)\|},$$

ou seja, o ângulo θ entre duas curvas de S é definido como sendo o ângulo entre os vetores tangentes a essas curvas no ponto de intersecção.

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\gamma'_1(t_0) &= X_u u'_1(t_0) + X_v v'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) &= X_u u'_2(t_0) + X_v v'_2(t_0),\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0) \rangle &= X_u u'_1(t_0) X_u u'_2(t_0) + X_u u'_1(t_0) X_v v'_2(t_0) \\ &\quad + X_v v'_1(t_0) X_u u'_2(t_0) + X_v v'_1(t_0) X_v v'_2(t_0) = \\ &= (X_u)^2 u'_1(t_0) u'_2(t_0) + X_u X_v (u'_1(t_0) v'_2(t_0) + v'_1(t_0) u'_2(t_0)) \\ &\quad + (X_v)^2 v'_1(t_0) v'_2(t_0) \\ &= E u'_1(t_0) u'_2(t_0) + F (u'_1(t_0) v'_2(t_0) + v'_1(t_0) u'_2(t_0)) + G v'_1(t_0) v'_2(t_0),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\gamma'_1(t_0)\|^2 &= \langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_1(t_0) \rangle \\ &= E (u'_1(t_0))^2 + 2F u'_1(t_0) v'_1(t_0) + G (v'_1(t_0))^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\gamma'_2(t_0)\|^2 &= \langle \gamma'_2(t_0), \gamma'_2(t_0) \rangle \\ &= E (u'_2(t_0))^2 + 2F u'_2(t_0) v'_2(t_0) + G (v'_2(t_0))^2.\end{aligned}$$

Obtemos assim o ângulo θ , por comodidade vamos omitir o ponto de aplicação t_0 da fórmula abaixo,

$$\theta = \arccos \frac{E u'_1 u'_2 + F (u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + G v'_1 v'_2}{\sqrt{E (u'_1)^2 + 2F u'_1 v'_1 + G (v'_1)^2} \sqrt{E (u'_2)^2 + 2F u'_2 v'_2 + G (v'_2)^2}}.$$

Em particular, dada uma superfície regular S e uma parametrização $X(u, v)$ de $p \in S$, obtemos curvas coordenadas em S passando por p , tais que os vetores tangentes à essas são X_u e X_v , então o ângulo entre essas curvas é

$$\varphi = \arccos \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

É um outro atributo geométrico que a primeira forma fundamental nos traz, é a possibilidade de calcular a área de uma região limitada sobre uma superfície, vejamos de uma forma geométrica como definir essa área.

Sejam S uma superfície regular e $R \subset S$ uma região limitada, tal que $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização de S e $R = X(Q)$, ou seja, R é a imagem por X de uma região limitada $Q \subset U$. Tomemos então uma partição P que divide Q em um número finito de regiões Q_{ij} , fazendo isso teremos um número finito de regiões R_{ij} de R , tal que $R_{ij} = X(Q_{ij})$. Perceba que a intersecção de duas regiões R_{ij} deve ser ou vazia ou conter somente pontos da fronteira de ambas. Vamos aproximar a área da região $R_{ij} = X(Q_{ij})$ pela área do paralelogramo contido em $T_p S$, onde $p = X(u_{i-1}, v_{i-1})$. As regiões Q_{ij} são representadas por retângulos de lados $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ e $\Delta v_i = v_j - v_{j-1}$ (ver fig. 3.2).

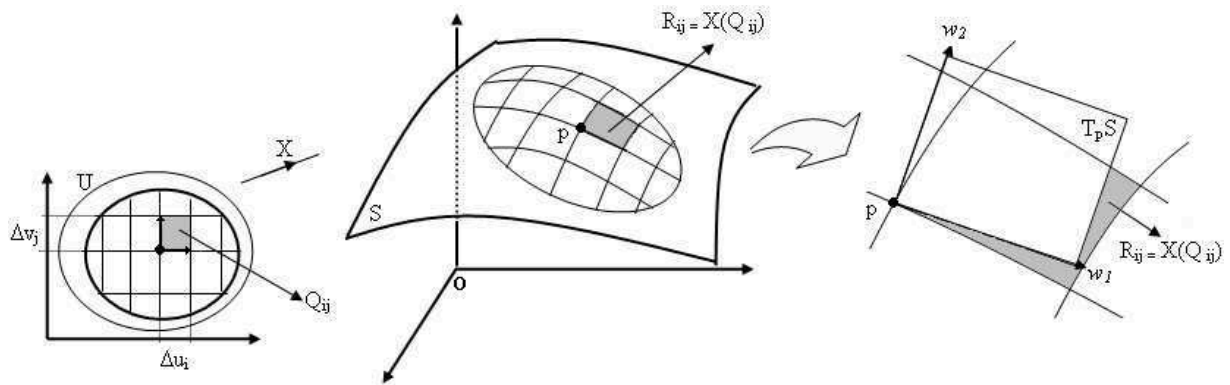


Figura 3.2. Aproximamos a área R_{ij} pela área do paralelogramo em $T_p S$ com lados w_1 e w_2 .

Temos que $w_1 = \Delta u_i X_u$ e $w_2 = \Delta v_j X_v$ são as imagens dos vetores que são os lados dos retângulos Q_{ij} . E a área do paralelogramo gerado por w_1 e w_2 é

$$A_{ij} = \|w_1 \times w_2\| = \|\Delta u_i X_u \times \Delta v_j X_v\| = \Delta u_i \Delta v_j \|X_u \times X_v\|,$$

então a área da região R é dada pelo somatório das áreas A_{ij} , quando o número de regiões Q_{ij} tenderem ao infinito, e conseqüentemente a norma das partições tenderem a zero, logo

$$\begin{aligned} A &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{R_{ij} \in P} A_{ij} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{R_{ij} \in P} \Delta u_i \Delta v_j \|X_u \times X_v\| \\ &= \iint_Q du dv \|X_u \times X_v\|, \end{aligned}$$

onde $|P| = \sup \{\Delta u_i \Delta v_i / R_{ij} \in P\}$.

O cálculo da área da região R não depende da parametrização X , para mostrarmos isso considere uma outra parametrização $Y : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, onde $R \subset Y(\tilde{U})$, tal que $\tilde{Q} = Y^{-1}(R)$, antes de continuarmos precisaremos dos seguintes resultados

Definição 3.2. *Seja uma aplicação $h : \tilde{Q} \rightarrow Q$, chamamos de jacobiano de h ao determinante:*

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix}$$

Teorema 3.1. *Seja f uma aplicação integrável sobre Q , sendo Q uma região fechada e limitada do plano uv . Seja \tilde{Q} uma região fechada e limitada do plano $\tilde{u}\tilde{v}$ e uma aplicação $h : \tilde{Q} \rightarrow Q$ onde*

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Se h for uma bijeção com derivadas parciais contínuas em \tilde{Q} e se $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}$ não se anula em \tilde{Q} , então

$$\iint_Q f(u,v) du dv = \iint_{\tilde{Q}} f(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u} d\tilde{v}$$

Nota: Não será demonstrado.

Temos que $h = X^{-1} \circ Y$ e a mudança de parâmetros e o jacobiano de h é $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}$. Então utilizando o teorema 3.1 obtemos

$$\iint_{\tilde{Q}} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u} d\tilde{v} = \iint_{\tilde{Q}} \|X_u \times X_v\| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u} d\tilde{v} = \iint_Q \|X_u \times X_v\| du dv.$$

Assim mostramos que a integral envolvida para calcular área de regiões contidas numa superfície, não depende da escolha da parametrização, podemos então apresentar a seguinte definição

Definição 3.3. *Seja S uma superfície regular, e seja $R \subset S$ uma região limitada em S contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Então chamamos de área de R ao número positivo dado por*

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \times X_v\| du dv,$$

onde $Q = X^{-1}(R)$.

Note que entre os vetores X_u e X_v existe um ângulo θ , tal que acontece:

$$\cos\theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|}$$

e

$$\|X_u \times X_v\| = \|X_u\| \|X_v\| \operatorname{sen}\theta,$$

elevando ambas igualdades ao quadrado e somando o membros obtemos a identidade:

$$\|X_u \times X_v\|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2$$

que usamos para exprimir a área através dos coeficientes da primeira forma fundamental

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{\|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2} \\ &= \sqrt{(EG - F)} \end{aligned}$$

Convém observar que existem vizinhanças coordenadas que cobrem a superfície inteira, exceto por algumas curvas, mas curvas não contribuem para área, então não teremos problemas em exigir que R esteja delimitada em alguma vizinhança coordenada de S .

Exemplo 3.6. Seja S uma esfera de raio r , já vimos que $E = r^2$, $F = 0$, $G = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$, logo

$$\sqrt{(EG - F)} = \sqrt{r^4 \operatorname{sen}^2\theta} = r^2 \operatorname{sen}\theta$$

sabemos que $0 < \theta < \pi$ e $0 < \varphi < 2\pi$ então a área total de S^2 é dada por:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \right] d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^\pi d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos\pi - (-\cos 0)] d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} 2 d\varphi \\ &= 2r^2 (\varphi|_0^{2\pi}) \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Exemplo 3.7. Vamos calcular a área do toro apresentado no exemplo 1.6, temos que $E = r^2$, $F = 0$, $G = (a + r \cos\theta)^2$, logo

$$\sqrt{(EG - F)} = \sqrt{r^2(a + r \cos\theta)^2} = r(a + r \cos\theta)$$

onde $0 < \theta < 2\pi$ e $0 < \varphi < 2\pi$ então a área total do toro é dada por:

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(a + r \cos\theta) d\theta d\varphi \\
 &= r \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (a + r \cos\theta) d\theta \right] d\varphi \\
 &= r \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a d\theta + \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \right] d\varphi \\
 &= r \int_0^{2\pi} [a(\theta|_0^{2\pi}) + \text{sen}\theta|_0^{2\pi}] d\varphi \\
 &= r \int_0^{2\pi} 2\pi a d\varphi \\
 &= 2\pi ar(\varphi|_0^{2\pi}) \\
 &= 4\pi^2 ar.
 \end{aligned}$$

3.2 Orientação

Antes de tudo podemos afirmar que toda superfície é localmente orientável, porém estamos interessados em orientação no sentido global, ou seja, envolvendo toda a superfície.

Seja S uma superfície regular, $T_p S$ o plano tangente em $p \in S$ e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização da vizinhança coordenada de p . Os vetores X_u e X_v representam uma base para $T_p S$, e a partir desses dois vetores podemos escrever um vetor normal unitário ao $T_p S$ da seguinte forma

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Podemos obter um vetor dessa maneira para todo $p \in X(U) \subset S$.

Definição 3.4. *Seja S uma superfície regular, e V um conjunto aberto de S , chamamos a aplicação $N : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de campo diferencial de vetores normais em um aberto $V \subset S$, que associa a cada $p \in V$, um vetor normal unitário $N(p)$ a S em p .*

Se X é uma parametrização da vizinhança coordenada de $p \in S$, então para o aberto $X(U) \subset S$ conseguimos obter um campo diferencial de vetores normais.

Então se S admite uma parametrização global, a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida para todo $p \in S$.

Definição 3.5. *Uma superfície regular S é dita orientável se existe um campo de vetores normais unitários definidos em toda a superfície, ou seja, existe uma aplicação contínua*

diferenciável

$$\begin{aligned} N : S &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\mapsto N(p) \quad \forall p \in S. \end{aligned}$$

Exemplo 3.8. Superfícies dadas pela proposição 1.1, apresentadas na seção 1.1 admitem parametrização global X , então essas são orientáveis, pois temos $N(p)$ definido para todo $p \in S$ e N é contínua pois X é diferenciável.

Exemplo 3.9. Superfícies dadas pela proposição 1.2, também apresentadas na seção 1.1, são orientáveis. Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e $a \in \mathbb{R}$ valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular orientável e para $p \in f^{-1}(a)$ obtemos

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|},$$

f é diferenciável então $N(p)$ é contínua, e está bem definida pois $\nabla f(p) \neq 0 \forall p \in f^{-1}(a)$ por ser a um valor regular.

Podemos perceber que, a partir dos vetores X_u e X_v , é possível escrever um outro vetor normal unitário ao $T_p S$ em p da seguinte forma

$$N(p) = -\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

tal que o que foi discutido até aqui sobre orientação é válido para esse vetor também, ou seja a aplicação $\bar{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $N(p) = -\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ também determina um campo diferencial de vetores normais. Então a escolha de uma N ou uma \bar{N} determina uma orientação de $T_p S$ e conseqüentemente de S .

Proposição 3.1. *Toda superfície regular conexa orientável tem exatamente duas orientações.*

Demonstração. Sabemos que para todo $p \in S$, existem apenas dois vetores normais unitários possíveis $N(p)$ ou $-N(p)$. Sejam dois campos de vetores normais unitários a S , N e \bar{N} , então para cada p em S , temos $N(p) = \bar{N}(p)$ ou $N(p) = -\bar{N}(p)$. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma(p) &= \langle N(p), \bar{N}(p) \rangle, \end{aligned}$$

que é contínua, e só assume valores 1 e -1 , como S é conexa e σ é contínua temos que a imagem $\sigma(S) \subseteq \{-1, 1\}$ também é conexa, logo ou $\sigma(S) = \{-1\}$ ou $\sigma(S) = \{1\}$. Portanto

ou $N(p) = \bar{N}(p) \forall p \in S$ ou $N(p) = -\bar{N}(p) \forall p \in S$. Assim podem existir duas e somente duas orientações possíveis N ou $-N$

□

Mas, como já foi visto, nem todas as superfícies admitem uma parametrização global, assim precisamos de mais de uma parametrização para cobrir a superfície por inteira, e nisso existem pontos que podem pertencer a mais de uma vizinhança coordenada.

Então seja $p \in S$ e $X(u, v)$ parametrização de uma vizinhança de p , através de X podemos determinar uma orientação para vizinhança de p associada à base ordenada $\{X_u, X_v\}$, se p também pertence a vizinhança coordenada de outra parametrização $Y(\tilde{u}, \tilde{v})$ temos uma nova base ordenada $\{Y_{\tilde{u}}, Y_{\tilde{v}}\}$, onde $X(u, v) = Y(\tilde{u}, \tilde{v})$. Derivando essa igualdade podemos expressar a base $\{Y_{\tilde{u}}, Y_{\tilde{v}}\}$, em termos da primeira obtendo

$$Y_{\tilde{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \quad Y_{\tilde{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}, \quad (3.1)$$

em que temos $u = u(\tilde{u}, \tilde{v})$ e $v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$ expressões da mudança de coordenadas.

Sabemos que para cada p existe um plano tangente a S , e podemos dizer que a orientação de $T_p S$ induz uma orientação na vizinhança de p . As bases $\{X_u, X_v\}$ e $\{Y_{\tilde{u}}, Y_{\tilde{v}}\}$ são bases do plano $T_p S$, desta forma se p pertence a duas vizinhanças coordenadas, onde as orientações coincidem, afirmamos que S é orientável, se isso não acontece, S é dita não-orientável. Para S ser orientável as bases $\{X_u, X_v\}$ e $\{Y_{\tilde{u}}, Y_{\tilde{v}}\}$ devem determinar a mesma orientação de $T_p S$, isso é possível se e somente se o Jacobiano de mudança de coordenadas $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}$ é positivo (ver proposição 3.2 abaixo).

Ter uma família de vizinhanças coordenadas, implica em ter uma coleção de parametrizações que denotamos por $\{(U_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in I}\}$, $I \in \mathbb{N}$. Chamamos esta coleção de atlas da superfície S , tal que:

- (i) $S = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha(U_\alpha)$ onde $U_\alpha \in \mathbb{R}^2$, ou seja, as parametrizações do atlas cobrem S .
- (ii) Para quaisquer parametrizações X_α e X_β , $\alpha, \beta \in I$, temos que $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ é diferenciável em $X_\beta^{-1}(X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta))$.

Definição 3.6. Um atlas $\{(U_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in I}\}$ é orientado se as jacobianas das aplicações $\Phi_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ têm todas determinante positivo.

Vejamus uma justificativa, seja p em uma superfície orientável, tal que p pertence a duas vizinhanças coordenadas com parametrizações $X(u, v)$ e $Y(\tilde{u}, \tilde{v})$, podemos escrever

$N(p)$ de duas maneiras

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \quad \text{ou} \quad \tilde{N}(p) = \frac{Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}}{\|Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}\|},$$

e utilizando as equações de (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}} &= \left(X_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) \times \left(X_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \right) \\ &= (X_u \times X_v) \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) \\ &= (X_u \times X_v) \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right), \end{aligned}$$

note que

$$\tilde{N}(p) = \frac{Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}}{\|Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}\|} = \frac{(X_u \times X_v) \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right)}{\|X_u \times X_v\| \left\| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right\|} = N(p) \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}}{\left\| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right\|}.$$

Logo $\tilde{N}(p) = N(p)$ se, e somente se $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0$, ou seja, se o determinante Jacobiano é positivo.

E com isso obtemos o seguinte resultado

Proposição 3.2. *Uma superfície regular S é orientável se e somente se possui um atlas orientado*

Demonstração. Primeiro vamos supor que S é orientável. Então, seja N uma orientação em S e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local com $p_\alpha \in X(U)$, com a proposição 3.1 sabemos que ou $N|_{X(U)} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ ou $N|_{X(U)} = -\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$. No primeiro caso tomamos $U_\alpha = U$ e $X_\alpha(u, v) = X(u, v)$, para o segundo tomamos $U_\alpha = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / (u, -v) \in U\}$ e $X_\alpha(u, v) = X(u, -v)$. A família $\{(U_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in I}\}$ é um atlas de S e por construção é orientado.

Agora seja $\{(U_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in I}\}$ uma atlas orientado, tomamos a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, tal que para $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ temos

$$N(p) = \frac{\frac{\partial X_\alpha}{\partial u} \times \frac{\partial X_\alpha}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X_\alpha}{\partial u} \times \frac{\partial X_\alpha}{\partial v} \right\|},$$

construído desta maneira N é uma orientação em S .

□

Vejam os um exemplo de uma superfície não-orientável.

Exemplo 3.10. A Faixa de Möbius.

A faixa de Möbius \mathbb{M} é uma superfície regular, e é obtida considerando um segmento aberto \overline{AB} dado no plano yz por $y = r$, $|z| < a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ e um círculo C^1 dado por $x^2 + y^2 = r^2$, tal que $r > a$. Deslocamos o centro c do segmento \overline{AB} ao longo do círculo C^1 , fazendo esse percorrer um ângulo φ então giramos \overline{AB} em torno de seu centro c , de tal forma que o ângulo formado entre o segmento \overline{AB} e o plano formado por Oz e c seja $\frac{\varphi}{2}$. Quando c completa uma volta ao longo do círculo C^1 o segmento \overline{AB} retorna a sua posição inicial como segmento \overline{BA} , ou seja, com os pontos extremos invertidos (ver fig. 3.3).

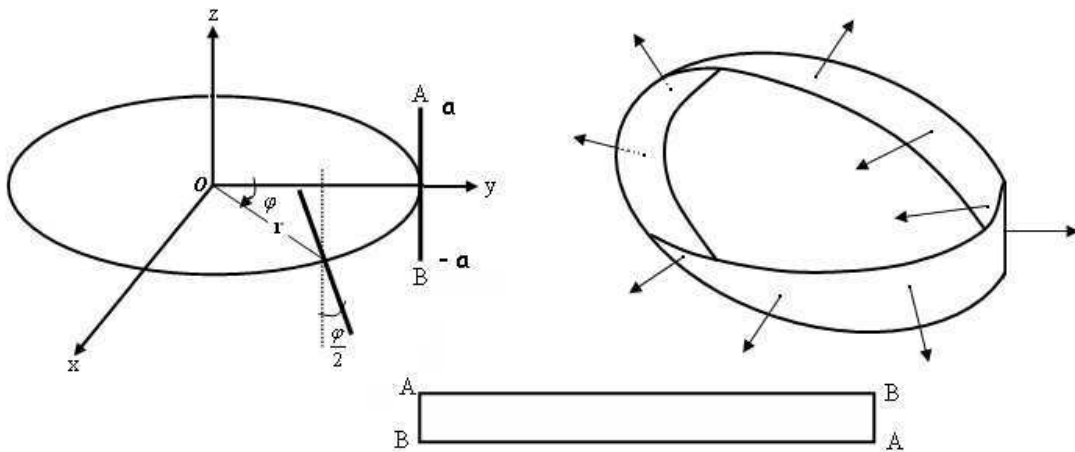


Figura 3.3. Faixa de Möbius.

Para efeito de cálculos vamos considerar $|a| = 1$. Uma parametrização para \mathbb{M} é dada por

$$X(u, \varphi) = \left(\left(r - u \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \operatorname{sen} \varphi, \left(r - u \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \operatorname{cos} \varphi, u \operatorname{cos} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

$$U = \{ (u, \varphi) \in \mathbb{R}^2 / -1 < u < 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi \}.$$

A parametrização X deixa de fora o segmento vertical em $\varphi = 0$.

Supondo agora que o segmento \overline{AB} tome como origem de partida o eixo Ox , ou seja, Ox é o eixo de origem dos " φ 's", temos agora outra parametrização

$$Y(\tilde{u}, \tilde{\varphi}) = \left(\left(r - \tilde{u} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{\varphi}}{2} \right) \right) \operatorname{cos} \tilde{\varphi}, \left(r - \tilde{u} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{\varphi}}{2} \right) \right) \operatorname{sen} \tilde{\varphi}, \tilde{u} \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tilde{\varphi}}{2} \right) \right)$$

A parametrização Y deixa de fora o segmento vertical em $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

A intersecção dessas duas vizinhanças coordenadas é constituída por duas componentes conexas, então existem abertos W_1 e W_2 , tal que

$$W_1 = \left\{ X(u, \varphi) / \frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi \right\}, \quad W_2 = \left\{ X(u, \varphi) / 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Em W_1 temos que a mudança de parâmetros e o determinante jacobiano é

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u, & \tilde{\varphi} &= \varphi - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{\varphi})}{\partial(u, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \end{aligned}$$

e em W_2 temos que a mudança de parâmetros e o determinante jacobiano é

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -u, & \tilde{\varphi} &= \frac{3\pi}{2} + \varphi \\ \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{\varphi})}{\partial(u, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \end{aligned}$$

Se \mathbb{M} fosse uma superfície orientável, existiria um campo de vetores normais $N : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que para todo p na vizinhança coordenada de $X(u, \varphi)$, poderíamos admitir sem perda de generalidade que em W_1 e em W_2 teríamos

$$N(p) = \frac{X_u \times X_\varphi}{\|X_u \times X_\varphi\|} = \frac{Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{\varphi}}}{\|Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{\varphi}}\|},$$

o que é uma contradição, pois em ambos os casos teríamos que ter $\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{\varphi})}{\partial(u, \varphi)} = 1$, o que não acontece. Portanto, a faixa de Möbius não é orientável.

Um outro fato importante que podemos concluir nesta seção é sobre difeomorfismo, o conceito de orientabilidade é invariante por difeomorfismo, ou seja, resulta da proposição 3.2 que qualquer orientação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação diferenciável. Desta forma dadas duas superfícies regulares S_1 e S_2 , se $\sigma : S_1 \rightarrow S_2$ é um difeomorfismo e S_1 é orientada, então, σ induz uma orientação em S_2 e assim temos que S_1, S_2 ou são ambas orientáveis ou ambas não-orientáveis. Se S é uma superfície conexa orientável e existe um difeomorfismo $\sigma : S \rightarrow S$, pela proposição 3.1, sabemos que S pode ter exatamente duas orientações distintas, então a orientação induzida por σ em S pode preservar ou inverter a orientação.

Com o conceito de campo de vetores normais, Gauss define uma aplicação, e é essa aplicação que vamos estudar no próximo capítulo.

Capítulo 4

Aplicação Normal e Segunda Forma Fundamental

No capítulo anterior estudamos a primeira forma fundamental e com ela conseguimos fazer alguns cálculos geométricos. Neste capítulo, na seção 4.2 trataremos de outra forma fundamental, essa é essencial para o estudo geométrico do próximo capítulo, que é nosso objetivo maior. E para tanto é indispensável o estudo da aplicação normal de Gauss, estudada em 4.1.

4.1 Aplicação Normal de Gauss

A partir de agora não mencionaremos mais superfícies que não sejam regulares e nem orientáveis, então S denotará uma superfície regular orientável onde já foi escolhida uma orientação.

Para uma superfície S , a aplicação normal de Gauss, ou somente aplicação de Gauss de S é definida da seguinte forma:

Definição 4.1. *Dada $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com orientação N , a aplicação normal de Gauss é a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada localmente por*

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

onde \mathbb{S}^2 é a esfera unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

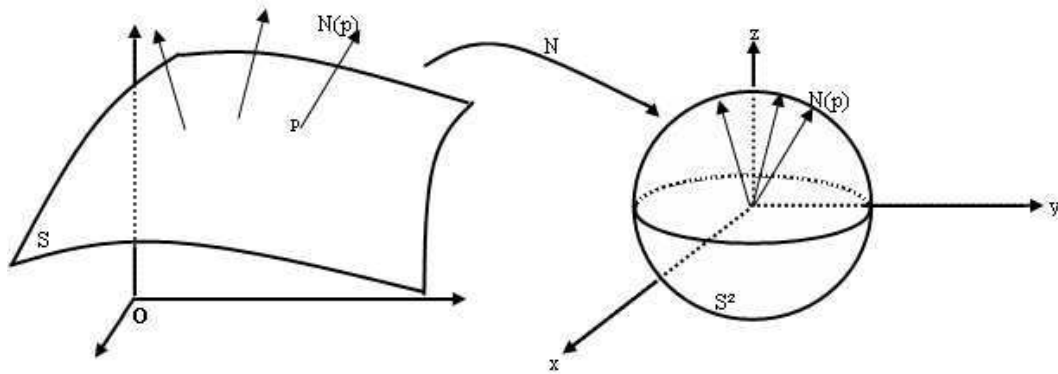


Figura 4.1. Aplicação de Gauss.

Ou seja, a aplicação de Gauss une todos os vetores normais unitários à S , fazendo com que esses tenham todos a mesma origem, e como seus comprimentos valem um, esses vetores possuem extremidades em pontos em uma esfera no \mathbb{R}^3 de raio um (fig. 4.1).

A forma como os vetores normais se distribuem em \mathbb{S}^2 nos dá informação sobre a forma local de S , então o que faremos é estudar a variação de N , ou seja, a derivada de N .

Seja $p \in S$, sabemos que o vetor $N(p)$ é normal ao plano tangente $T_p S$ em p , mas podemos perceber que $N(p)$ também é normal ao plano $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$, logo esses planos são paralelos, e portanto são os mesmos subespaços vetoriais. Desta forma a derivada da aplicação de Gauss, que é a aplicação linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ pode ser vista como um operador linear (ver apêndice) $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$.

Vamos ver como esse operador age.

Seja uma curva em S dada por $\alpha : t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v_p$, se restringirmos a aplicação de Gauss N à curva α obtemos uma curva $N \circ \alpha(t) = N(t)$, que é uma curva parametrizada na esfera \mathbb{S}^2 , formada por pontos que são extremos dos vetores $N(t)$.

Para calcular o vetor tangente a curva N em $N(p)$ fazemos

$$\begin{aligned} N(t) &= N \circ \alpha(t) \\ N'(t) &= dN_{\alpha(t)} \circ \alpha'(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'(0) &= dN_{\alpha(0)} \circ \alpha'(0) \\ N'(0) &= dN_p(v_p). \end{aligned}$$

O vetor tangente $N'(0)$ é um vetor de $T_p S$, e ele mede a taxa de variação do vetor normal N restrito a curva $\alpha(t)$ em p (fig. 4.2), ou seja, estamos tentando medir o quanto a superfície se afasta do plano tangente $T_p S$, em uma vizinhança de $p \in S$.

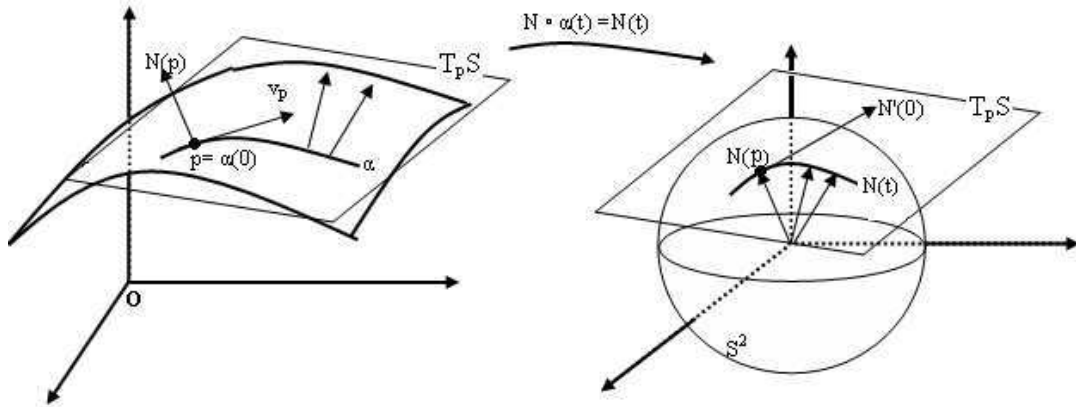


Figura 4.2. O operador dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p .

Exemplo 4.1. Seja P um plano dado por $ax + by + cz + d = 0$, da geometria analítica percebemos que o vetor (a, b, c) é um vetor normal ao plano, então um vetor normal unitário em $p \in P$ é dado por $N(p) = (a, b, c) / \|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\|$, e é constante para todo $p \in S$, ou seja não depende de x, y ou z . Logo para qualquer curva em P teremos $dN_p = 0$.

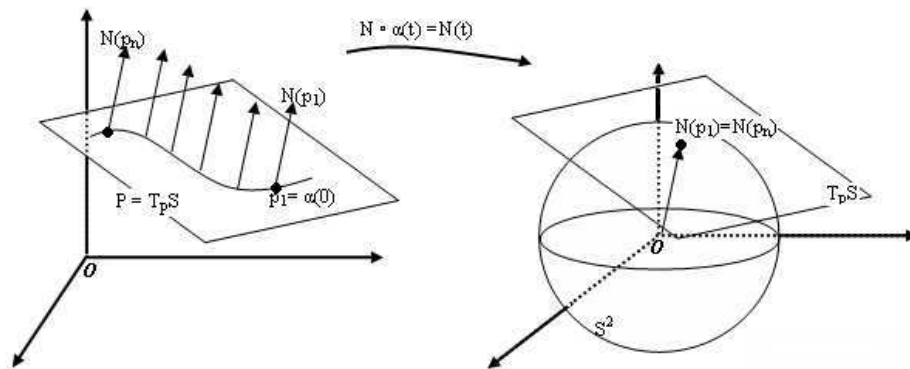


Figura 4.3. O vetor $N(p)$ é constante para todo p logo não tem variação, então $dN_p = 0$.

Exemplo 4.2. Seja S a esfera de raio r dada por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Uma parametrização para o hemisfério norte dessa esfera é dada por

$$X(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)}), \quad (u, v) \in U, \quad U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < r^2\},$$

onde

$$X_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)}}\right), \quad X_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)}}\right),$$

fazendo os devidos cálculos, obtemos

$$N = \left(\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{\sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)}}{r}\right),$$

então, para qualquer $(x, y, z) \in X(U) \subset S$ teremos que

$$N = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right).$$

Na verdade, é de fácil visualização que esse resultado é válido não só para $p \in X(U)$, mas para todo ponto $\in S$.

Seja uma curva parametrizada em S dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, tal que em $t = 0$ seja $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v_p$ (fig. 4.4), temos que $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Então, restrito a curva $\alpha(t)$ o vetor normal

$$N(t) = \frac{1}{r}(x(t), y(t), z(t))$$

é uma função vetorial de t , e portanto

$$\begin{aligned} dN(\alpha'(t)) &= N'(t) = \frac{1}{r}(x'(t), y'(t), z'(t)) \\ dN(\alpha'(0)) &= dN(v_p) = N'(0) = \frac{1}{r}(v_p) \\ dN(v_p) &= \frac{1}{r}(v_p). \end{aligned}$$

Podemos perceber que $dN(v_p) = \frac{1}{r}(v_p)$ para todo $p \in S$ e todo $v_p \in T_p S$.

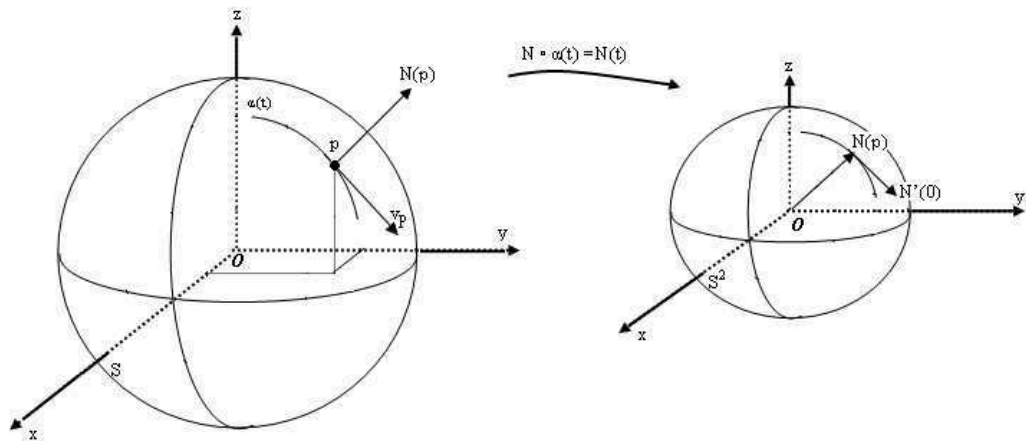


Figura 4.4. Na esfera S de raio r , temos $dN_p(v_p) = \frac{1}{r}(v_p) \quad \forall p \in S$.

Observe agora que $\tilde{N} = \left(-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r} \right)$, também é normal a S , neste caso teríamos que $dN(v_p) = -\frac{1}{r}(v_p)$ para todo $p \in S$ e todo $v_p \in T_p S$ (fig 4.5).

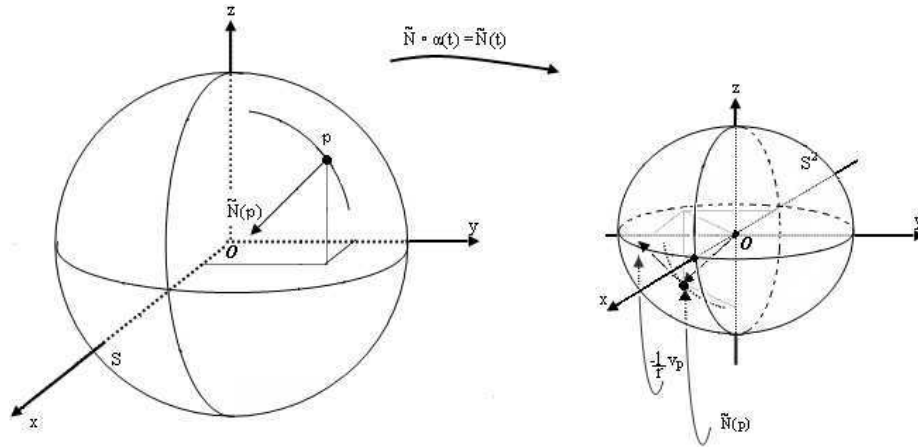


Figura 4.5. Se a orientação de S for \tilde{N} , temos $d\tilde{N}_p(v_p) = -\frac{1}{r}(v_p) \quad \forall p \in S$.

Exemplo 4.3. Seja o cilindro reto dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$, como já foi visto no capítulo 1, uma parametrização para essa superfície é dada por

$$X(u, v) = (\text{senu}, \text{cenu}, v), \quad (u, v) \in U, \quad U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\},$$

onde

$$X_u = (-\text{senu}, -\text{cenu}, 0), \quad X_v = (0, 0, 1),$$

fazendo os devidos cálculos, obtemos

$$N = (\text{cenu}, \text{senu}, 0) \Rightarrow N = (x, y, 0).$$

Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, temos que $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Então, restrito a curva $\alpha(t)$ o vetor normal $N(t) = (x(t), y(t), 0)$ é uma função vetorial de t , e portanto

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = (x'(t), y'(t), 0).$$

Se α for uma reta contida no cilindro paralela ao eixo Oz , teremos que o vetor v_p tangente a curva também será paralelo ao eixo Oz , logo $dN_p(v_p) = 0 = 0v_p$ (fig 4.6-a).

Se α for uma curva contida no cilindro paralela ao plano xy , teremos o vetor w tangente a curva, onde $dN_p(w) = w$ (fig 4.6-b).

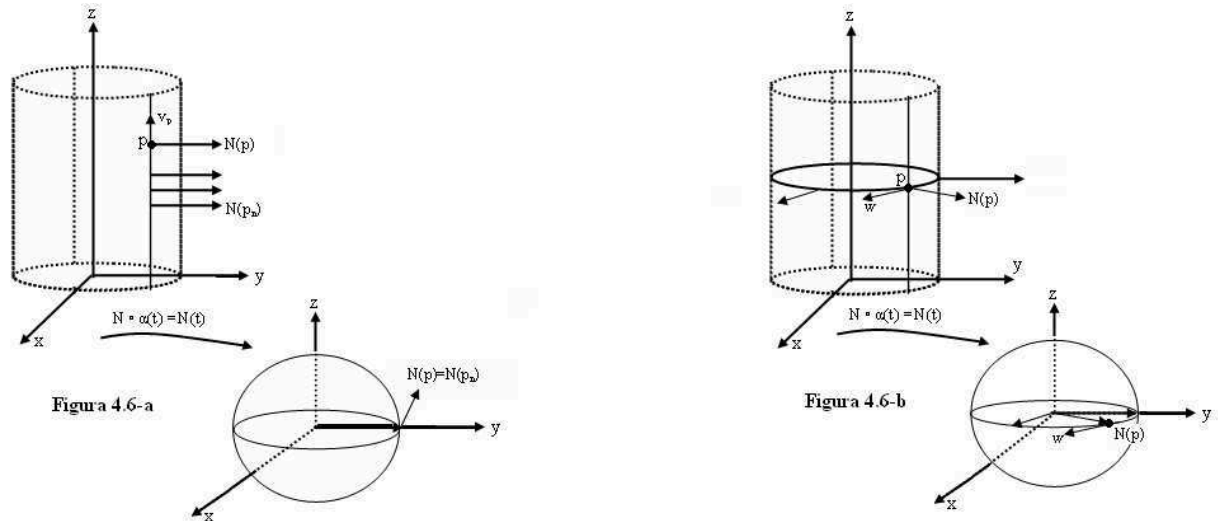


Figura 4.6. Se α é paralela ao eixo Oz não temos variação de N .

Podemos perceber que v_p e w são autovetores (ver apêndice) da aplicação dN , e seus autovalores são respectivamente 0 e 1.

Considerando a outra orientação \tilde{N} , teríamos $\tilde{N} = (-x, -y, 0)$, onde $dN_p(w) = -w$. Neste caso teríamos v_p e w autovetores com autovalores 0 e -1 respectivamente.

Proposição 4.1. *A aplicação da diferencial de Gauss, ou seja, O operador $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ é um operador auto-adjunto (ver apêndice).*

Demonstração. Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p , seja $\{X_u, X_v\}$ a base associada a T_pS e seja $\{w_1, w_2\}$ uma base de T_pS . Pela proposição 2.4 (seção 2.2) sabemos que a aplicação é linear. Seja w_1, w_2 dois vetores de T_pS , tal que $\{w_1, w_2\}$ também seja uma base para T_pS , então, temos que mostrar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para ser auto-adjunto.

Usaremos a seguinte notação: Seja $w \in T_pS$, então w pode ser escrito como uma combinação dos vetores da base

$$w = w^u X_u + w^v X_v, \quad w^u, w^v \in \mathbb{R},$$

e dN_p aplicado a w será

$$\begin{aligned} dN_p(w) &= dN_p(w^u X_u + w^v X_v) = w^u dN_p(X_u) + w^v dN_p(X_v) \\ &= w^u N_u + w^v N_v. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle &= \langle dN_p(w_1), w_2^u X_u + w_2^v X_v \rangle \\
&= w_2^u \langle dN_p(w_1), X_u \rangle + w_2^v \langle dN_p(w_1), X_v \rangle \\
&= w_2^u \langle dN_p(w_1^u X_u + w_1^v X_v), X_u \rangle + w_2^v \langle dN_p(w_1^u X_u + w_1^v X_v), X_v \rangle \\
&= w_2^u \langle w_1^u N_u + w_1^v N_v, X_u \rangle + w_2^v \langle w_1^u N_u + w_1^v N_v, X_v \rangle \\
&= w_2^u w_1^u \langle N_u, X_u \rangle + w_2^u w_1^v \langle N_v, X_u \rangle \\
&\quad + w_2^v w_1^u \langle N_u, X_v \rangle + w_2^v w_1^v \langle N_v, X_v \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle w_1, dN_p(w_2) \rangle &= w_1^u w_2^u \langle X_u, N_u \rangle + w_1^u w_2^v \langle X_u, N_v \rangle \\
&\quad + w_1^v w_2^u \langle X_v, N_u \rangle + w_1^v w_2^v \langle X_v, N_v \rangle .
\end{aligned}$$

Comparando as expressões, para mostrar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$, basta mostrar que $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$.

Sabemos que N é ortogonal aos vetores X_u, X_v , então $\langle N, X_u \rangle = 0 = \langle N, X_v \rangle$, derivando essas igualdades em relação a v e a u , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_u \rangle = \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle \\
0 &= \frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_v \rangle = \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle .
\end{aligned}$$

Como $X_{uv} = X_{vu}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle \\
\langle N_v, X_u \rangle &= \langle N_u, X_v \rangle .
\end{aligned}$$

□

Com a proposição que acabamos de demonstrar, podemos afirmar que a diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é auto-adjunta, e esse é um fato importante, pois a toda aplicação auto-adjunta podemos associar uma forma bilinear simétrica, nesse caso, $B : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, e a toda forma bilinear podemos associar uma forma quadrática, nesse caso, $Q : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ (ver apêndice). Nas próximas seções veremos que, podemos obter uma interpretação geométrica dessa forma quadrática, e é essa forma que passamos a estudar a partir de agora.

4.2 Segunda Forma Fundamental

Nesta seção apresentaremos a segunda forma fundamental sob um aspecto bastante algébrico, vamos mostrar fórmulas de como calculá-la, e no próximo capítulo vamos estudar suas contribuições geométricas.

Definição 4.2. A segunda forma fundamental de S em p , é definida como sendo a forma quadrática $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle$.

Perceba que, utilizamos a forma quadrática $-Q$ na definição da segunda forma fundamental, é só uma questão de convenção, na próxima seção entenderemos o porquê.

A partir de agora vamos considerar que todas as parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ são compatíveis com a orientação de S , ou seja, em $X(U)$, $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$.

Vamos ver como calcular a segunda forma em um vetor $\alpha'(t)$ qualquer em $T_p S$.

Seja $p \in S$ e $X(u, v)$ uma parametrização em p . Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, então o vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é dado por

$$\alpha'(0) = X_u u'(0) + X_v v'(0)$$

e

$$dN(\alpha'(0)) = N'(u(0), v(0)) = N_u u'(0) + N_v v'(0).$$

Sabemos que o vetor $\alpha'(0) \in T_p S$, então podemos aplicar a segunda forma nesse vetor, temos

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= - \langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= - \langle N_u u'(0) + N_v v'(0), X_u u'(0) + X_v v'(0) \rangle \\ &= -[u'(0) \langle N_u, X_u u'(0) + X_v v'(0) \rangle + v'(0) \langle N_v, X_u u'(0) + X_v v'(0) \rangle] \\ &= -[u'(0)u'(0) \langle N_u, X_u \rangle + u'(0)v'(0) \langle N_u, X_v \rangle + \\ &\quad + v'(0)u'(0) \langle N_v, X_u \rangle + v'(0)v'(0) \langle N_v, X_v \rangle] \\ &= -[(u'(0))^2 \langle N_u, X_u \rangle + 2u'(0)v'(0) \langle N_u, X_v \rangle + (v'(0))^2 \langle N_v, X_v \rangle]. \end{aligned}$$

Denotando $- \langle N_u, X_u \rangle$, $- \langle N_u, X_v \rangle = - \langle N_v, X_u \rangle$, $- \langle N_v, X_v \rangle$ por e , f , g respectivamente, obtemos.

$$II_p(\alpha'(0)) = (u'(0))^2 e + 2u'(0)v'(0)f + (v'(0))^2 g.$$

Os vetores N_u e N_v pertencem ao plano T_pS , logo podemos escrever eles como combinação dos vetores X_u, X_v

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v, \quad N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

então

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11} \langle X_u, X_u \rangle + a_{21} \langle X_v, X_u \rangle \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11} \langle X_u, X_v \rangle + a_{21} \langle X_v, X_v \rangle \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12} \langle X_u, X_u \rangle + a_{22} \langle X_v, X_u \rangle \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12} \langle X_u, X_v \rangle + a_{22} \langle X_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$, obtemos,

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= a_{12}E + a_{22}F, \\ -g &= a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

que em forma matricial é dado por:

$$-\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}.$$

Então, multiplicando a matriz formada pelos coeficientes da segunda forma fundamental, pela matriz inversa da matriz formada pelos coeficientes da primeira forma fundamental obtemos os coeficientes a_{ji} , $i, j = 1, 2$. Faremos isso.

Primeiro calculando a inversa obtemos,

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix},$$

multiplicando as duas matrizes tiramos

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Proposição 4.2. *O coeficientes E , F e G da primeira forma fundamental satisfazem $EG - F^2 > 0$.*

Demonstração. Seja θ o ângulo entre os vetores X_u e X_v , então

$$0 < |X_u \times X_v|^2 = |X_u|^2 \cdot |X_v|^2 \cdot \text{sen}^2\theta = |X_u|^2 \cdot |X_v|^2 \cdot (1 - \text{cos}^2\theta) = EG - F^2,$$

Logo $EG - F^2 > 0$.

□

Portanto substituindo os a_{ji} , $i, j = 1, 2$ obtemos os coeficientes e , f e g . Para efeito de futuros cálculos, o procedimento para encontrar os coeficientes da segunda forma será o seguinte:

Na seção anterior vimos que $\langle N, X_u \rangle = 0 = \langle N, X_v \rangle$, de onde obtemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_u \rangle = \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle \Rightarrow \langle N, X_{uu} \rangle = - \langle N_u, X_u \rangle = e$$

logo

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle \\ &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

Observação 4.1. *Utilizamos a notação $\langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle = \det(X_u, X_v, X_{uu})$, onde (X_u, X_v, X_{uu}) representa uma matriz 3×3 cujas colunas (ou linhas) são formada pelos componentes dos vetores X_u, X_v, X_{uu} na base canônica do \mathbb{R}^3 .*

Os coeficientes f e g são obtidos de forma análoga

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_u \rangle = \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle \Rightarrow \langle N, X_{uv} \rangle = - \langle N_v, X_u \rangle = f$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_v \rangle = \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle \Rightarrow \langle N, X_{vv} \rangle = - \langle N_v, X_v \rangle = g$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Perceba que a matriz $[a_{ij}]$, dada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

esta matriz chamada de *Matriz de Weingarten*, é a matriz relacionada ao operador linear $dN : T_pS \rightarrow T_pS$ na base $\{X_u, X_v\}$, note que essa matriz não é necessariamente simétrica (conferir teorema 3. do apêndice).

A interpretação da segunda forma fundamental nos traz as informações que buscamos para estudar curvaturas normais, curvaturas principais e curvatura gaussiana dos pontos de uma superfície, o que é o objetivo do próximo capítulo.

Capítulo 5

Curvaturas e Classificação dos Pontos da Superfície

Finalmente vamos começar a falar da geometria que nos interessa neste trabalho, já apresentamos a primeira forma fundamental e com ela conseguimos fazer alguns cálculos geométricos, mas nesse capítulo trataremos de outro tipo de geometria, a *geometria extrínseca* da superfície, geometria essa relacionada com a segunda forma fundamental, estudada na seção 4.2.

Geometria extrínseca considera propriedades métricas da superfície em relação ao ambiente em que ela está inserida, esse ambiente é o \mathbb{R}^3 , enquanto a geometria intrínseca de uma superfície diz respeito às suas propriedades métricas internas, e essas referem-se a primeira forma fundamental.

Imagine que tomamos uma folha de papel, colocamos dois pontos distintos sobre ela A e B , ligamos A ao B obtendo um segmento \overline{AB} . Se encurvamos a folha de papel, o comprimento do segmento \overline{AB} não se altera, mas a distância entre os pontos sim, e agora, o segmento passou a ter uma curvatura diferente da anterior. Como observadores conseguimos ver que o segmento ganhou uma nova curvatura, mas se fossemos o ponto A ou o B ou qualquer outro ponto sobre a folha de papel não conseguiríamos perceber. Como calcular essa nova curvatura?

Neste capítulo vamos definir curvaturas do ponto de vista do observador, ou seja, utilizaremos o ambiente em que a superfície está inserida. Na seção 5.1 trazemos a curvatura normal e as curvaturas principais, em 5.2 fazemos uma classificação dos pontos da superfície, em 5.3 apresentamos a curvatura média e Gaussiana, em 5.4 exibimos alguns exemplos e por fim em 5.5 faremos umas considerações finais sobre curvatura

gaussiana, onde apresentaremos o teorema egregim de Gauss, esse relaciona as duas formas quadráticas mostrando que a curvatura pode ser incluída nas propriedades intrínsecas da superfície.

O que possibilitará nosso estudo nesse capítulo é a existência de um campo de vetores normais apresentado na seção 3.2, portanto trataremos apenas de superfícies orientadas.

5.1 Curvatura Normal e Curvaturas Principais

Antes de definir as primeiras curvaturas para superfícies, vamos apresentar uma breve revisão sobre curvatura de uma curva, pois vamos precisar desse conceito.

Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável, então para cada $t \in (a, b)$ existe o vetor $\alpha'(t)$, e esse garante a existência de uma reta tangente a curva em t na direção de $\alpha'(t)$.

Definição 5.1. *Seja α uma curva parametrizada diferenciável, dizemos que α é regular se, $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in (a, b)$.*

Uma curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita parametrizada pelo *comprimento de arco* se, para cada $t_0, t_1 \in (a, b)$, com $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Ou seja

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0 \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = 1 \quad \forall t \in (a, b).$$

Supondo que α determine a posição de uma determinada partícula, então, a curva está parametrizada pelo comprimento de arco exatamente quando a partícula se move com velocidade constante igual a 1.

Definição 5.2. *Seja $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in (a, b)$. O número $\|\alpha''(s)\| = k(s)$ chama-se curvatura de α em s (fig. 5.1).*

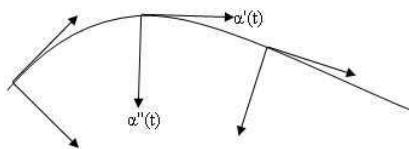


Figura 5.1. A curvatura e $\alpha''(t)$ permanecem invariantes por uma mudança de orientação da curva α .

Voltando ao nosso estudo, seja uma curva α parametrizada por comprimento de arco contida em uma superfície S .

Sejam:

- $\alpha(s) = p$, $\alpha'(s)$ o vetor tangente a α em p , $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ curvatura de α em p ;
- $N(p) = N \circ \alpha(s)$ a normal a S em p , θ é o ângulo entre $N \circ \alpha(s)$ e $\alpha''(s)$;
- $\cos\theta = \langle N \circ \alpha(s), \alpha''(s) \rangle$;
- O plano formado por $N(p)$ e $\alpha'(s)$ é normal a superfície.

temos a seguinte definição

Definição 5.3. A curvatura normal *definida por α em p* é dada por $K_n(\alpha, s) = k(s)\cos\theta$, ou seja,

$$K_n(\alpha, s) = \langle N \circ \alpha(s), \alpha''(s) \rangle .$$

Ou seja, a curvatura normal da curva α , em um ponto $p = \alpha(s)$, é igual a componente do vetor $\alpha''(s)$ segundo a normal $N(p)$, ou ainda, K_n é o comprimento da projeção do vetor $\alpha''(s)$ sobre $N(p)$ (fig. 5.2).

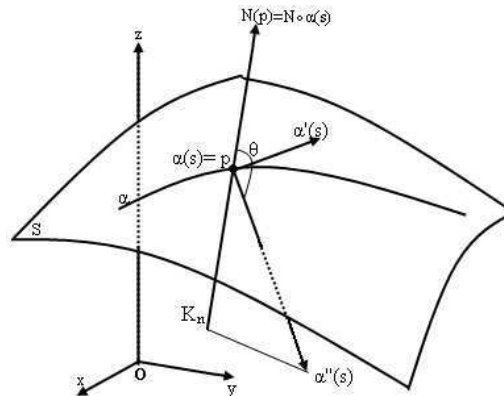


Figura 5.2. K_n é o comprimento da projeção do vetor $\alpha''(s)$ sobre $N(p)$.

Vamos ver agora como expressar K_n em termos da segunda forma fundamental.

Seja uma curva regular α parametrizada por comprimento de arco contida em S , onde s é o comprimento de arco da curva. Seja $\alpha(0) = p$, perceba que o vetor $\alpha'(0)$ pertence ao $T_p S$ é ortogonal a $N(p) = N(\alpha(0))$, então $\langle \alpha'(0), N \circ \alpha(0) \rangle = 0$.

A mesma coisa acontece para os vetores $\alpha'(s)$ com os vetores normais $N(\alpha(s))$, tal que esse último é obtido a partir da restrição dada por $N(s) = N \circ \alpha(s)$ do vetor normal N à curva $\alpha(s)$. Portanto o vetor $\alpha'(s)$ pertence ao plano $T_{\alpha(s)} S$ que é ortogonal a normal

$N(\alpha(s))$, logo esse dois vetores são ortogonais e $\langle \alpha'(s), N \circ \alpha(s) \rangle = 0$, derivando essa igualdade, obtemos

$$\langle \alpha''(s), N \circ \alpha(s) \rangle + \langle \alpha'(s), N' \circ \alpha(s) \cdot \alpha(s) \rangle = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \langle \alpha''(s), N \circ \alpha(s) \rangle &= - \langle \alpha'(s), N' \circ \alpha(s) \cdot \alpha(s) \rangle \\ K_n(\alpha, s) &= - \langle \alpha'(s), N' \circ \alpha(s) \cdot \alpha(s) \rangle \\ &= - \langle \alpha'(s), dN_{(\alpha(s))}(\alpha'(s)) \rangle \\ &= II_{(\alpha(s))}, \end{aligned}$$

ou seja, a curvatura normal no ponto $\alpha(s)$ de uma curva regular contida em S , cuja a tangente nesse ponto é o vetor $\alpha'(s)$, é igual ao valor que obtemos aplicando a segunda forma fundamental $II_{\alpha(s)}$ nesse vetor $\alpha'(s)$. Aqui podemos perceber o porquê utilizamos o sinal de “-” na definição da segunda forma fundamental, pois queremos que a curvatura em um ponto seja igual a segunda forma fundamental nesse ponto e não o oposto dela.

Se uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ não estiver parametrizada pelo comprimento de arco, então, para calcular a curvatura normal temos

$$\begin{aligned} K_n(\gamma, t) &= \left\langle \frac{d}{ds} \gamma'(t), N \circ \gamma(t) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{ds} \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right), N \circ \gamma(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right), N \circ \gamma(t) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right), N \circ \gamma(t) \right\rangle \\ &= - \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \left\langle \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \frac{d}{dt} N \circ \gamma(t) \right\rangle = - \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2} \langle \gamma'(t), dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \rangle \\ &= \frac{II_{(\gamma(t))}}{I_{(\gamma(t))}}, \end{aligned}$$

onde podemos perceber que se $\|\gamma'(t)\|^2 = 1 \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = 1 \Rightarrow \gamma$ parametrizada por comprimento de arco.

Proposição 5.1. (Meusnier). *Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, nesse ponto, a mesma curvatura normal.*

Demonstração. Já demonstramos. Na explicação acima, mostramos que a curvatura normal K_n em $p \in S$ só depende da direção tangente à curva passando por p em p . \square

Definição 5.4. *Seja S uma superfície, $N(p)$ o vetor normal a S em p , e seja v um vetor unitário do plano $T_p S$. O plano P_v formado por v e $N(p)$ intersecta S segundo uma curva plana C_v , essa curva C_v é chamada de seção normal de S em p segundo v (fig. 5.3).*

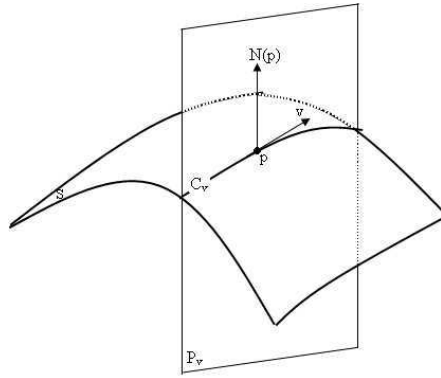


Figura 5.3. A curva C_v é uma seção normal a S .

Observando a proposição 5.1 e a definição 5.4 podemos perceber que dada uma curva C_n contida na superfície passando por p , tal que em p temos uma seção normal C_v , então C_n e C_v tem a mesma curvatura (ver fig 5.4).

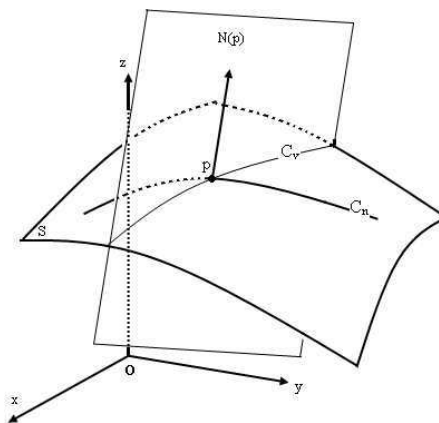


Figura 5.4. A curva C_n contida em S e a curva plana C_v tem as mesmas curvaturas em p .

A curvatura normal K_n de S em p é igual ao valor absoluto da curvatura de C_v . O sinal de K_n muda conforme a concavidade da superfície no ponto p , depende se a concavidade aponta no sentido de $N(p)$ (nesse caso positivo) ou no sentido oposto (nesse caso negativo).

Para estudar as curvaturas normais em $p \in S$ basta analisar as curvaturas das seções normais.

Exemplo 5.1. No Exemplo 4.1 (seção 4.1) vimos que em um plano P temos $dN_p = 0$ para qualquer curva passando por p em P . Podemos perceber que para qualquer $p \in P$ teremos o plano P_v formando por $N(p)$ e v_p no referido ponto p , e para todos P_v as seções normais são retas em P (fig. 5.5).

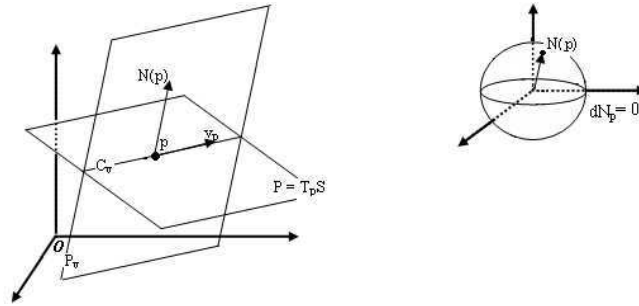


Figura 5.5. As seções normais em P são retas, e portanto todas tem curvatura nula.

Como uma reta tem curvatura nula, as curvaturas das seções normais são todas nulas. E ainda, a segunda forma fundamental é o número resultante do cálculo do produto interno de $dN(p)$ com o vetor tangente em p , o qual também será nulo.

Exemplo 5.2. No Exemplo 4.2 vimos que em uma esfera S de raio r , escolhendo a orientação N , temos que $dN_p = \frac{1}{r}(v_p)$ para qualquer curva passando por p em S . Podemos perceber que para quaisquer planos P_v formados por $N(p)$ e v_p as seções normais são circunferências de raio r contidas em S (fig 5.6). A segunda forma fundamental em p é $\langle dN_p, v_p \rangle = \langle \frac{1}{r}v_p, v_p \rangle = \frac{1}{r} \langle v_p, v_p \rangle = \frac{1}{r}$, logo a curvatura em p é $\frac{1}{r}$, o que também é verdade para toda circunferência de raio r , logo as curvaturas das seções normais são $\frac{1}{r}$.

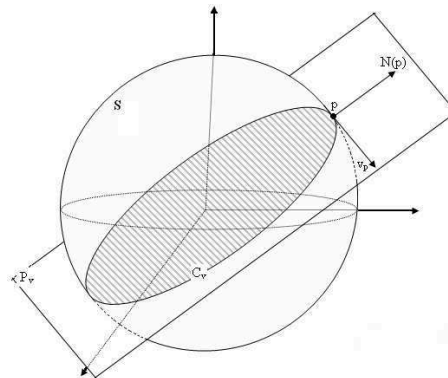


Figura 5.6. As seções normais em S são circunferências de raio r , e portanto todas tem curvatura $\frac{1}{r}$.

Exemplo 5.3. No Exemplo 4.3 (seção 4.1) vimos que em um cilindro reto S dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$, escolhendo a orientação N , dependendo da escolha da curva temos que $dN_p = 0$ ou $dN_p = w$.

As seções normais no cilindro em um ponto p podem ser retas (fig 5.7-a), elipses (fig. 5.7-b) ou circunferências (fig. 5.7-c).

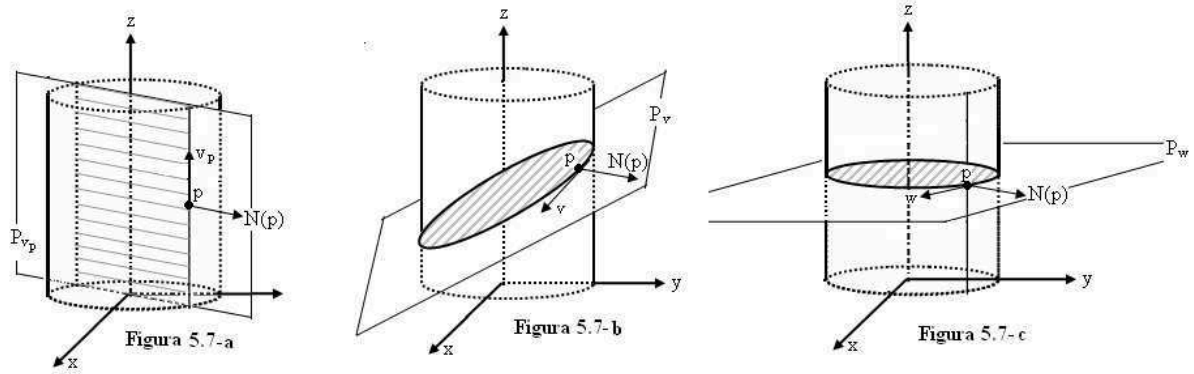


Figura 5.7. As seções normais no cilindro variam de uma reta à uma circunferência passando por uma, família de elipses.

Como o cilindro é construído sobre pontos de um círculo de raio um, temos que os valores das curvaturas normais variam de 0 a 1, se fosse de raio r iriam variar de 0 a $\frac{1}{r}$. Como vimos no exemplo 4.3 os vetores v_p e w correspondem às direções das curvaturas normais 1 e 0 respectivamente, então a segunda forma fundamental assume seu valor máximo quando aplicada a w e mínimo em v_p

Vamos tornar precisa a noção de a segunda forma fundamental assumir um máximo e um mínimo.

Imagine o plano P_v que contém v e $N(p)$ girando em torno do vetor $N(p)$. Como o vetor v tem norma 1, quando giramos P_v em torno de $N(p)$, v descreve em T_pS um círculo S^1 de raio 1 (fig 5.8).

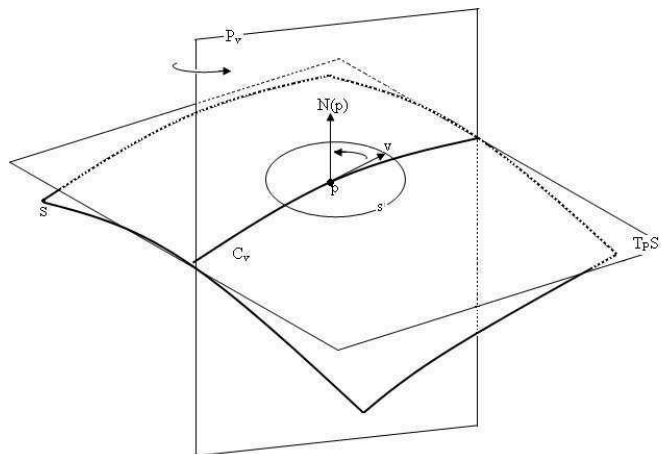


Figura 5.8. O círculo S^1 tem raio $1 = \|v\|$.

Para construirmos uma seção normal basta tomarmos uma direção (vetor unitário) em T_pS . Então a curvatura normal $K_n(p)$ pode ser vista como uma aplicação contínua,

dada por

$$\begin{aligned} K_n(p) : \mathbb{S}^1 \subset T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto K_n(p)(v) = II_p(v) \end{aligned}$$

tal que $\|v\| = 1$.

Vamos utilizar o seguinte teorema

Teorema 5.1. *Seja D um conjunto fechado e limitado, ou seja, compacto de \mathbb{R}^2 e uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em D . Então f assume o seu valor máximo absoluto ($f(a, b) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in D$) e também seu mínimo absoluto ($f(a, b) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in D$) em D*

Nota: Não será demonstrado (ver [6]).

O conjunto \mathbb{S}^1 é compacto e $K_n(p)$ é contínua em \mathbb{S}^1 , então pelo teorema 5.1 existem e_1 e e_2 , tal que $K_n(p)(e_1)$ é valor máximo e $K_n(p)(e_2)$ é valor mínimo.

Voltemos ao operador linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, sabemos que dN_p está associado a uma forma bilinear simétrica $B : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$B_p(v, v) = II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle,$$

onde $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$. Por ser B simétrica, temos

$$B(v, w) = - \langle dN(v), w \rangle = - \langle v, dN(w) \rangle = B(w, v),$$

Utilizando o teorema 1 do apêndice, sabemos que para cada $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tal que, II_p assume um máximo λ_1 e um mínimo λ_2 , quando restrita ao círculo \mathbb{S}^1 , tal que aqui temos $\lambda_1 = K_1$ e $\lambda_2 = K_2$. Sabemos ainda que e_1 e e_2 são autovetores de dN_p com autovalores $-K_1$ e $-K_2$ respectivamente. Ou seja,

$$dN_p(e_1) = -K_1 e_1 \quad \text{e} \quad dN_p(e_2) = -K_2 e_2.$$

Observação 5.1. *Perceba que aqui, diferente do que acontece no apêndice, os autovalores aparecem com sinais negativos, isso se deve ao fato de estarmos utilizando a forma quadrática $-Q$.*

E ainda os valores K_1 e K_2 (vamos considerar $K_1 \geq K_2$) são os valores extremos da curvatura normal em p , ou seja, o máximo e o mínimo que II_p restrita a um círculo unitário em $T_p S$ pode assumir.

Definição 5.5. *O máximo e o mínimo da curvatura normal, K_1 e K_2 respectivamente, são denominados curvaturas principais de S em p e os autovetores e_1 e e_2 correspondentes fornecem as direções principais.*

Exemplo 5.4. No exemplo do plano temos que para qualquer ponto p do plano $dN_p = 0 = 0v_p$, logo a segunda forma fundamental é contante para qualquer vetor de T_pS , então todas as direções são principais e são extremos para a curvatura normal, e portanto a curvatura principal vale 0.

Exemplo 5.5. No esfera de raio r temos que para qualquer ponto p da esfera, $dN_p = \frac{1}{r}v_p$, logo a segunda forma fundamental também é contante para qualquer vetor unitário de T_pS , então todas as direções são principais e são extremos para a curvatura normal. Aqui a curvatura principal vale $\frac{1}{r}$.

Exemplo 5.6. No cilindro do exemplo 5.3, temos que os autovetores v e w fornecem as direções principais, onde os autovalores respectivos 0 e 1, são as curvatura principais.

Definição 5.6. *Uma curva regular e conexa α é dita uma linha de curvatura de S se, para todo p contido em α , digamos $\alpha(t_0) = p$, temos que $\alpha'(t_0)$ é uma direção principal.*

Teorema 5.2. *(Olinde Rodrigues.) Uma condição necessária e suficiente para que uma curva α regular e conexa em S seja uma linha de curvatura de S é existir uma curva $\lambda : s \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$N'(s) = \lambda(s)\alpha'(s)$$

Demonstração. Se $N'(s) = \lambda(s)\alpha'(s)$ então $\alpha'(s)$ é autovetor de $dN_{\alpha(s)}$, portanto temos que $\alpha'(s)$ é direção principal logo $\alpha(s)$ é linha de curvatura.

A recíproca também é válida, ou seja, se α é linha de curvatura temos que $\lambda(s) = K_1(s)$ ou $\lambda(s) = K_2(s)$.

□

Euler mostrou que, conhecendo as curvaturas principais K_1 e K_2 em um ponto p da superfície conseguimos calcular as curvaturas normais nesse ponto segundo um vetor direção v . Ele fez isso da seguinte forma: Se v é uma direção em T_pS , então $\|v\| = 1$, sabemos que e_1 e e_2 formam uma base ortonormal de T_pS , digamos que v forma um ângulo θ com o vetor e_1 , então podemos escrever

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

e utilizando a segunda forma fundamental, a curvatura normal K_n na direção de v é dada por

$$\begin{aligned}
 K_n = II_p(v) &= - \langle dN_p(v), v \rangle \\
 &= - \langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta \rangle \\
 &= \langle K_1 e_1 \cos \theta + K_2 e_2 \operatorname{sen} \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \operatorname{sen} \theta \rangle \\
 &= K_1 \cos^2 \theta \langle e_1, e_1 \rangle + K_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \langle e_1, e_2 \rangle + \\
 &\quad + K_2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \langle e_2, e_1 \rangle + K_2 \operatorname{sen}^2 \theta \langle e_2, e_2 \rangle \\
 &= K_1 \cos^2 \theta + K_2 \operatorname{sen}^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Com as curvaturas principais conseguimos encontrar a curvatura Gaussiana e a curvatura média. Por outro lado conhecendo-se as curvaturas Gaussiana e média conseguimos uma relação para o cálculo das curvaturas principais, veremos esta relação na seção 5.3.

5.2 Classificação dos Pontos da Superfície

A partir das curvaturas principais podemos classificar os pontos de uma superfície.

Definição 5.7. *Existem quatro classificações possíveis para os pontos de uma superfície, $p \in S$:*

- (a) *Elíptico, se as curvaturas principais forem ambas negativas ou positivas. (Mais tarde veremos que essa condição é equivalente a dizer que: O ponto é elíptico se $K(p) > 0$, onde K é a curvatura Gaussiana, ou ainda se $\det(dN_p) > 0$);*

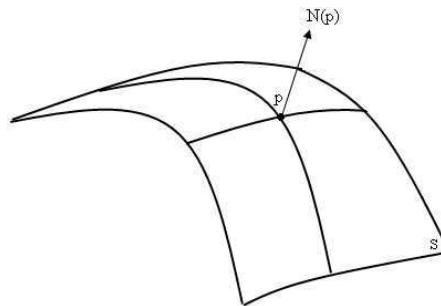


Figura 5.9. O ponto p é dito elíptico.

- (b) *Hiperbólico, se as curvaturas principais possuem sinais contrários (da mesma forma se $K(p) < 0$, ou $\det(dN_p) < 0$);*

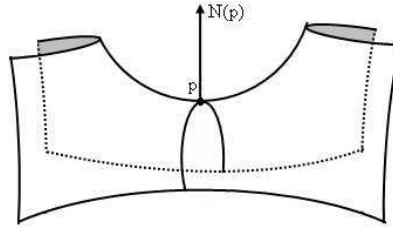


Figura 5.10. O ponto p é dito hiperbólico.

- (c) Parabólico, se uma das curvaturas principais é não nula e a outra é nula (ou se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$, onde H é a curvatura média);

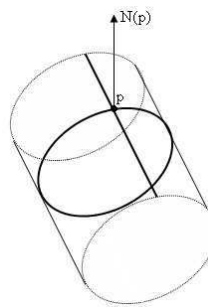


Figura 5.11. O ponto p é dito parabólico.

- (d) Planar, se as curvaturas principais são ambas nulas (ou se $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$).

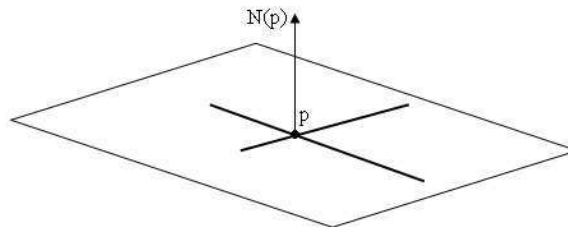


Figura 5.12. O ponto p é dito planar.

Proposição 5.2. *Seja $p \in S$. Se p é um ponto elíptico, então existe uma vizinhança conexa V de p em S tal que todos os pontos de V estão do mesmo lado em relação a $T_p S$. Por outro lado, se p é um ponto hiperbólico, qualquer vizinhança V (conexa) de p terá pontos em ambos os lados de $T_p S$ (fig 5.13).*

Demonstração. Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização da vizinhança de p , tal que $p = X(u_0, v_0)$. Vamos considerar a função distância d , de um ponto $r = X(u, v)$ ao plano $T_p S$, dada por

$$d(u, v) = \langle X(u, v) - X(u_0, v_0), N(p) \rangle .$$

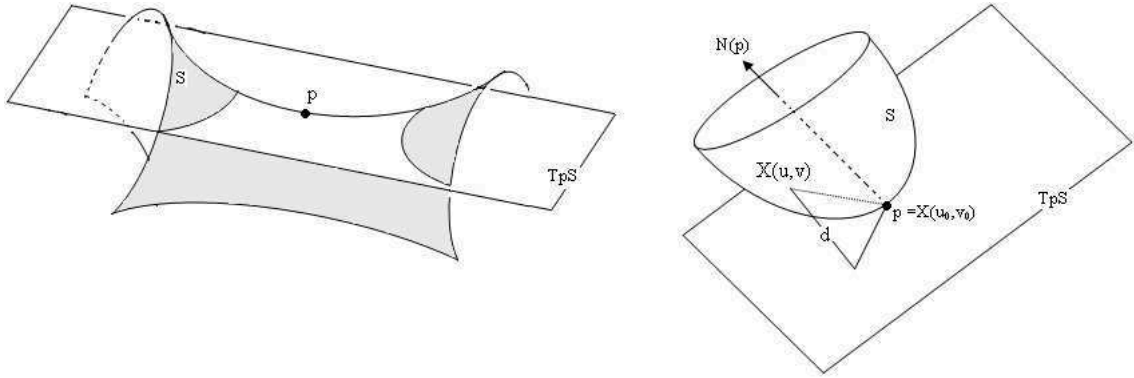


Figura 5.13. d é a distância de p até $X(u, v)$.

Utilizando em $X(u, v)$ a fórmula de Taylor¹ temos

$$\begin{aligned} X(u, v) &= X(u_0, v_0) + X_u(u_0, v_0)(u - u_0) + X_v(u_0, v_0)(v - v_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}[X_{uu}(u_0, v_0)(u - u_0)^2 + 2X_{uv}(u_0, v_0)(u - u_0)(v - v_0) + X_{vv}(u_0, v_0)(v - v_0)^2] \\ &\quad + \tilde{R}, \end{aligned}$$

onde \tilde{R} satisfaz a condição

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} \frac{\tilde{R}}{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} = 0.$$

Então, fazendo os devidos cálculos temos

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \langle X(u, v) - X(u_0, v_0), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2}[\langle X_{uu}, N(p) \rangle (u - u_0)^2 \\ &\quad + 2\langle X_{uv}, N(p) \rangle (u - u_0)(v - v_0) \\ &\quad + \langle X_{vv}, N(p) \rangle (v - v_0)^2] \\ &\quad + \langle \tilde{R}, N(p) \rangle, \end{aligned}$$

vamos denotar $\langle \tilde{R}, N(p) \rangle = R$, e como vimos no capítulo anterior $\langle X_{uu}, N(p) \rangle = e$, $\langle X_{uv}, N(p) \rangle = f$ e $\langle X_{vv}, N(p) \rangle = g$, logo escrevendo temos

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \langle X(u, v) - X(u_0, v_0), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2}[e(u - u_0)^2 + 2f(u - u_0)(v - v_0) + g(v - v_0)^2] + R \\ &= II_p(w) + R, \end{aligned}$$

onde o vetor $w = (u - u_0)X_u + (v - v_0)X_v$ e $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{R}{w^2} = 0$.

¹A fórmula de Taylor ou polinômio de Taylor de ordem n de uma aplicação f em (x_0, y_0) é, num certo sentido, o polinômio de grau menor ou igual a n que melhor aproxima f numa vizinhança de (x_0, y_0) .

Se p é elíptico, $II_p(w)$ tem o mesmo sinal $\forall w \in T_pS$, então existirá uma vizinhança de p tal que a função d tem o mesmo sinal.

Se p é hiperbólico existem vetores w_1 e w_2 pertencentes ao T_pS tal que

$$II_p\left(\frac{w_1}{\|w_1\|}\right) = -II_p\left(\frac{w_2}{\|w_2\|}\right),$$

e desta forma qualquer vizinhança de p terá pontos tais que d seja negativo e pontos tais que d seja positivo.

□

Quando os pontos são parabólicos ou planares a superfície está em um lado do plano tangente, e pode ter uma reta em comum com esse plano.

Definição 5.8. *Se em $p \in S$, $K_1 = K_2$, então p é chamado de um ponto umbílico.*

Todos os pontos de uma esfera e de um plano são pontos umbílicos, em particular, podemos perceber que todos os pontos planares são umbílicos.

Para demonstrar a proposição seguinte precisaremos antes do seguinte teorema

Teorema 5.3. *Seja $[a, b]$ um intervalo fechado e seja I_α , $\alpha \in [a, b]$, uma coleção de intervalos abertos em $[a, b]$ tais que $\cup_\alpha I_\alpha = [a, b]$. Então é possível escolher um número finito de abertos $I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_i} = I$ da coleção I_α tais que $\cup I_{k_i}$, $i = 1, \dots, n$.*

Nota: Não será demonstrado, ver [6].

Proposição 5.3. *Se todos os pontos de uma superfície conexa são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.*

Demonstração. Seja $X(u, v)$ uma parametrização de uma vizinhança coordenada V de $p \in S$, tal que p é ponto umbílico e todos os pontos em V também são umbílicos.

Vamos analisar o ponto p como se fosse um ponto qualquer de V . Por ser p umbílico, então para todo $w \in T_pS$ temos $II_p(w) = K$ e $dN_p(w) = \lambda w$. Escrevendo w como uma combinação de X_u e X_v temos $w = w_1X_u + w_2X_v$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} dN(w_1X_u + w_2X_v) &= \lambda(p)(w_1X_u + w_2X_v) \\ N_uw_1 + N_vw_2 &= \lambda(p)(w_1X_u + w_2X_v), \end{aligned}$$

onde $\lambda(p) = \lambda$ é uma função real diferenciável em V .

Como w é arbitrário temos,

$$N_u w_1 = \lambda w_1 X_u \Rightarrow N_u = \lambda X_u \quad (*),$$

$$N_v w_2 = \lambda w_2 X_v \Rightarrow N_v = \lambda X_v \quad (**).$$

Derivando (*) em relação a v e (**) em relação a u temos,

$$N_{uv} = \lambda X_{uv} + \lambda_v X_u \quad N_{vu} = \lambda X_{vu} + \lambda_u X_v,$$

logo $\lambda_v X_u = \lambda_u X_v$, e $\lambda_v X_u - \lambda_u X_v = 0$, mas como X_u e X_v são linearmente independentes temos que $\lambda_u = \lambda_v = 0$, para todo ponto em V . Sabemos que V é conexo, portanto λ é constante em V .

1º Caso: $\lambda = 0$,

então de (*) e (**) temos que $N_u = N_v = 0$, como V é conexa implica $N = N_0$ constante para todo ponto em V , logo V está contida em um plano.

2º Caso: $\lambda \neq 0$,

então, considere o ponto y em função de u e v dado por $y(u, v) = X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v)$, utilizando (*) e (**) temos que $y_u = y_v = 0$, logo como V é conexa temos y fixo, digamos $y = y_0$, então

$$\left(X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right)_u = \left(X(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right)_v = 0.$$

Como

$$\|X(u, v) - y(u, v)\| = \frac{1}{|\lambda|},$$

representa uma esfera de raio $\frac{1}{|\lambda|}$ e centro em y_0 , logo V está contida em uma esfera.

Com isso demonstramos a proposição localmente, para estendermos globalmente, ou seja, para toda S , vamos utilizar o fato de que S é conexa, dado qualquer outro ponto $r \in S$, existe uma curva contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = r$. Para cada ponto $\gamma(t)$ desta curva existe uma vizinhança $V_t \subset S$ onde chegamos à conclusão que V_t está ou em um plano ou em uma esfera, de tal forma que $\gamma^{-1}(V_t)$ é um intervalo aberto contido no intervalo fechado $[0, 1]$. Temos que o intervalo $[a, b]$ é todo coberto por $\cup \gamma^{-1}(V_t)$, $t \in [0, 1]$ e, como $[a, b]$ é fechado, pelo teorema 5.3 temos que existem t_1, \dots, t_n tal que $[0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^n \gamma^{-1}(V_{t_i})$, ou seja, $\gamma([0, 1])$ é coberto por um número finito de vizinhanças V_t .

Se os pontos de uma vizinhanças coordenadas V_{t_i} estão em um plano, então todas as outras V_{t_j} também estarão no mesmo plano. Se os pontos de uma vizinhança coordenada

V_{t_i} estão em uma esfera, então todas as outras V_{t_j} também estarão na mesma esfera. Como existe uma quantidade finita de vizinhanças V_{t_i} , temos que $\cup V_{t_i}$ está contida ou em um plano ou em uma esfera. Como r é arbitrário, concluímos que ou S está contida em um plano ou S está contida em uma esfera.

□

Definição 5.9. *Uma direção assintótica em $p \in S$ é um vetor $v \in T_p S$ tal que $II_p(v) = 0$. Uma curva assintótica de S é uma curva γ conexa e regular contida em S , tal que para todo $p \in \gamma$ a reta tangente a γ em p é uma direção assintótica.*

Definição 5.10. *A indicatriz de Dupin em $p \in S$ é o conjunto de vetores $w \in T_p S$ tal que $II_p(w) = \pm 1$.*

Estudando a indicatriz de Dupin conseguimos uma interpretação geométrica para as direções assintóticas.

Vamos ver agora como escrever as equações da indicatriz de Dupin. Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_p S$, onde e_1, e_2 são autovetores de dN_p , e seja (ξ, η) as coordenadas cartesianas de $T_p S$ na base $\{e_1, e_2\}$. Seja $v \in T_p S$ tal que $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, $\|v\| = 1$, e seja $w \in T_p S$ tal que $w = \rho v$, $\rho \neq 0$. Pela fórmula de Euler temos

$$\begin{aligned} \pm 1 = II_p(w) = II_p(\rho v) &= \rho^2 II_p(v) \\ &= K_1 \rho^2 \cos^2 \theta + K_2 \rho^2 \sin^2 \theta \\ &= K_1 \xi^2 + K_2 \eta^2, \end{aligned}$$

onde $w = \xi e_1 + \eta e_2$. A equação da indicatriz é dada por $K_1 \xi^2 + K_2 \eta^2 = \pm 1$. Vamos ver o que acontece com essa equação para pontos elípticos, hiperbólicos, parabólicos e planares.

(1) Elíptico:

(a) K_1 e $K_2 < 0$

$$K_1 \xi^2 + K_2 \eta^2 = -1 \Rightarrow (-K_1) \xi^2 + (-K_2) \eta^2 = 1$$

(b) K_1 e $K_2 > 0$

$$K_1 \xi^2 + K_2 \eta^2 = 1$$

Ou seja, nos dois casos temos uma elipse, e essa se degenera em uma circunferência se o ponto p é umbílico não planar ($K_1 = K_2 \neq 0$).

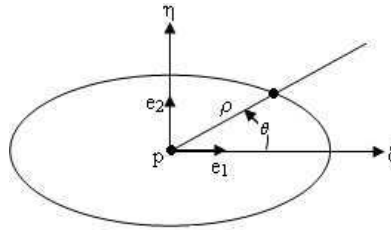


Figura 5.14. O ponto p é um ponto elíptico.

(2) Hiperbólico:

Em pontos hiperbólicos K_1 e K_2 possuem sinais diferentes, seja $K_2 < 0 < K_1$, temos

$$K_1\xi^2 + K_2\eta^2 = 1 \Rightarrow K_1\xi^2 - (-K_2)\eta^2 = 1 \text{ (hipérbole (I))},$$

$$K_1\xi^2 + K_2\eta^2 = -1 \Rightarrow (-K_2)\eta^2 - K_1\xi^2 = 1 \text{ (hipérbole (II))}.$$

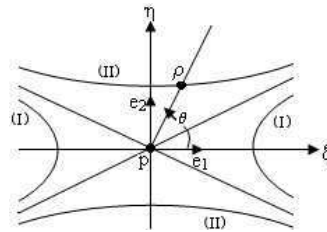


Figura 5.15. O ponto p é um ponto hiperbólico.

As direções assintóticas são as assíntotas das hipérboles.

(3) Parabólico:

Em um ponto parabólico temos que $K_1 = 0$ ou $K_2 = 0$, vamos supor que $K_1 = 0$,
($K_2 < K_1$)

$$K_2\eta^2 = -1 \Rightarrow (-K_2)\eta^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{-K_2}\eta = \pm 1, \text{ logo } \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{-K_2}}$$

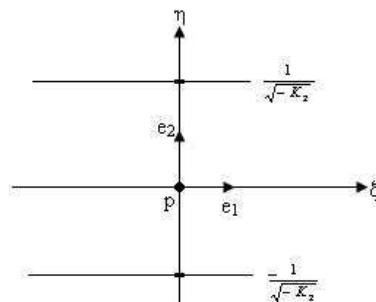


Figura 5.16. O ponto p é um ponto parabólico.

Ou seja, nesse caso a indicatriz de Dupin se degenera em um par de retas paralelas, e ainda, a direção dessas retas é a única direção assintótica em p .

(4) Planar:

Em pontos planares $K_1 = K_2 = 0$, a indicatriz de Dupin é um conjunto vazio.

O exemplo 5.9 da seção 5.4 traz uma propriedade interessante da indicatriz de Dupin.

5.3 Curvatura Gaussiana e Média

Dado o operador linear $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$, ou seja, a diferencial da aplicação normal de Gauss, seja a base $\{e_1, e_2\}$ de T_pS , podemos associar uma matriz a dN_p relacionada a essa base, que nesse caso vai ser dada por uma matriz diagonal, e os elementos da diagonal são os autovalores associados a e_1 e e_2 .

Definição 5.11. *Seja $p \in S$, o determinante da matriz de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p . em termos das curvaturas principais temos*

$$K = K_1 K_2.$$

Definição 5.12. *Seja $p \in S$, o negativo da metade do traço da matriz de dN_p é chamado de curvatura média H de S em p , em termos das curvaturas principais temos*

$$H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2).$$

Se mudarmos a orientação da superfície o determinante não muda, mas o traço muda de sinal.

Vamos agora expressar a curvatura Gaussiana K e a curvatura média H em termos da primeira e segunda forma fundamental. Vimos na seção 4.2 do capítulo anterior, que a matriz $[a_{ij}]$ é uma matriz relacionada ao operador dN_p , onde já calculamos os elementos a_{ij} , então

$$\begin{aligned} \det[a_{ij}] &= \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \left(\frac{f^2 F^2 - fFgE - eGfF + eGgE}{(EG - F^2)^2} \right) - \left(\frac{geF^2 - gFfE - fGeF + f^2GE}{(EG - F^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{f^2 F^2 + eGgE - geF^2 - f^2GE}{(EG - F^2)^2} \right) = \left(\frac{-f^2(GE - F^2) + eg(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \right) \\ K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Por serem $-K_1$ e $-K_2$ autovalores de dN , temos que K_1 e K_2 satisfazem a seguinte equação $dN(v) = -\mathbf{k}v$ para algum $v \in T_pS$, $v \neq 0$. Podemos escrever essa equação em forma matricial como $dN(v) = -\mathbf{k}v = -\mathbf{k}I(v)$, onde I é a aplicação identidade. Então

$$\det[dN(v) + \mathbf{k}I(v)] = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} \end{bmatrix} \right] = \begin{vmatrix} a_{11} + \mathbf{k} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \mathbf{k} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{11} + \mathbf{k})(a_{22} + \mathbf{k}) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$a_{11}a_{22} + a_{11}\mathbf{k} + \mathbf{k}a_{22} + \mathbf{k}^2 - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

sabemos que $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = K$, então

$$\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}(a_{11} + a_{22}) + K = 0$$

K_1 e K_2 são raízes desse polinômio, então

$$H = -\frac{1}{2}(K_1 + K_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right)$$

logo

$$H = \left(\frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} \right).$$

E substituindo $(a_{11} + a_{22})$ por $-2H$ no polinômio obtemos a seguinte relação

$$\mathbf{k}^2 - 2H\mathbf{k} + K = 0$$

$$\mathbf{k} = \frac{2H \pm \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} \Rightarrow \mathbf{k} = H \pm \sqrt{H^2 - K},$$

com essa relação, vemos que, conhecendo-se as curvaturas média e Gaussiana podemos facilmente achar as curvaturas principais.

Vamos ver agora como Gauss introduziu o conceito de curvatura, faremos isso através de uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana em termos da aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Para isso precisamos antes de algumas definições

Definição 5.13. Uma base $\{w_1, w_2\}$ em $T_p S$ é positiva se $\{w_1, w_2, w_1 \times w_2\}$ tem a mesma orientação da base canônica em \mathbb{R}^3 , caso contrário $\{w_1, w_2\}$ é uma base negativa.

Definição 5.14. Sejam duas superfícies orientadas S e \bar{S} . Seja uma aplicação diferenciável $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$, suponhamos que para algum $p \in S$, $d\varphi_p$ não seja singular. Dizemos que φ preserva orientação em p se dada uma base positiva $\{w_1, w_2\} \in T_p S$, então $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ é uma base positiva em $T_{\varphi(p)} \bar{S}$, caso contrário, se $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ não é uma base positiva, dizemos que φ reverte a orientação em p .

Ou seja, uma vez dada uma orientação para $T_p S$ essa induz uma orientação para pequenas curvas fechadas em S , ao redor de p , quando aplicada N a essas curvas pode acontecer duas coisas:

1. Seja p um ponto elíptico em S , seja V uma vizinhança conexa de p tal que $K(q) > 0$, $\forall q \in V$ e seja $\alpha : [0, a] \rightarrow V$ uma curva fechada ao redor de p (fig 5.17). Neste caso a imagen de α por N terá a mesma orientação.

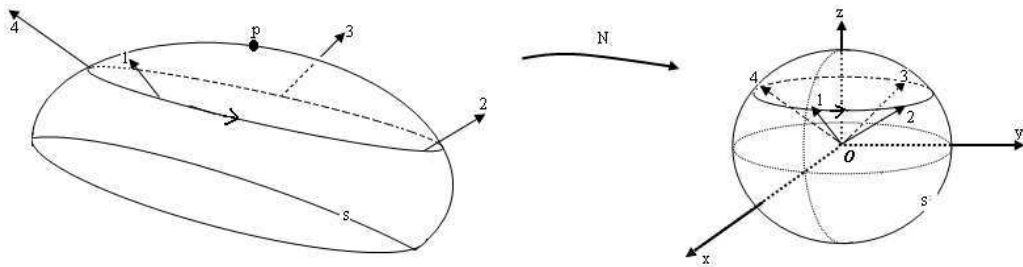


Figura 5.17. A aplicação de Gauss preserva a orientação em um ponto elíptico.

2. Seja p um ponto hiperbólico em S , seja V uma vizinhança conexa de p tal que agora $K(q) < 0$, $\forall q \in V$ e seja $\alpha : [0, a] \rightarrow V$ uma curva fechada ao redor de p (fig 5.18). Neste caso a imagen de α por N terá orientação oposta.

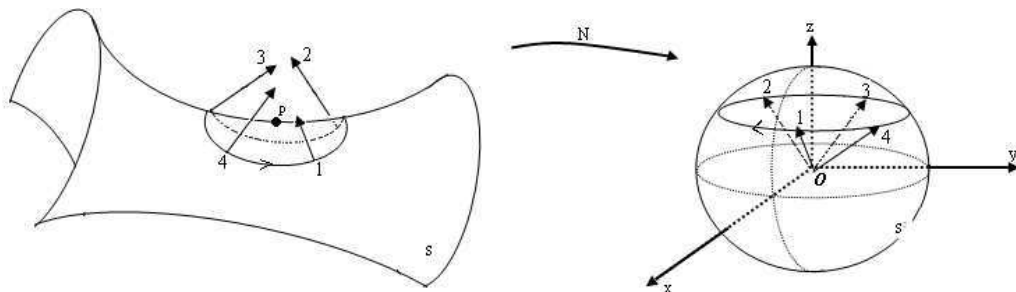


Figura 5.18. A aplicação de Gauss inverte a orientação em um ponto hiperbólico.

Finalmente vamos mostrar na próxima proposição a interpretação geométrica da curvatura Gaussiana K , antes vamos convencionar que: Seja uma vizinhança conexa $V \subset S$ de um ponto p onde $K \neq 0$, se $K > 0$ então a área de uma região $R \subset V$ e a área da imagen de V por N tem o mesmo sinal, se $K < 0$ então essas áreas tem sinais opostos.

Proposição 5.4. (Gauss). *Seja S uma superfície regular, $p \in S$ tal que a curvatura Gaussiana $K(p) \neq 0$, e seja V uma vizinhança conexa de p onde K não mude de sinal em V . Então*

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$$

onde A é a área de uma região conexa $R \subset V$ que contenha p , e A' é a área da imagen de R pela aplicação normal de Gauss.

Observação 5.2. O limite $A \rightarrow 0$ pode ser entendido como o limite da sequência $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ das áreas de regiões R_n que convergem para p , no sentido em que toda esfera centrada em p contém todos R_n , para n suficientemente grande (fig 5.19).

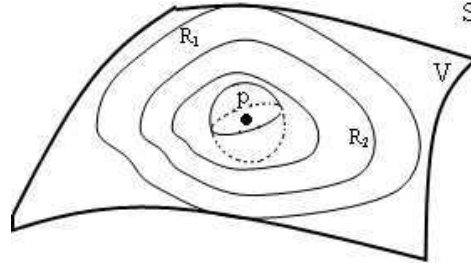


Figura 5.19. As regiões R_n convergem para p .

Demonstração. Demonstraremos a proposição (Gauss).

Seja uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tal que $p \in X(U) \subset V$. Seja $R \subset X(U)$ tal que $p \in R$, vimos na seção 3.1 (capítulo 3) que a área de R é dada por

$$A = \iint_Q \|X_u \times X_v\| dudv,$$

onde $Q = X^{-1}(R)$ é a região do plano uv correspondente a R .

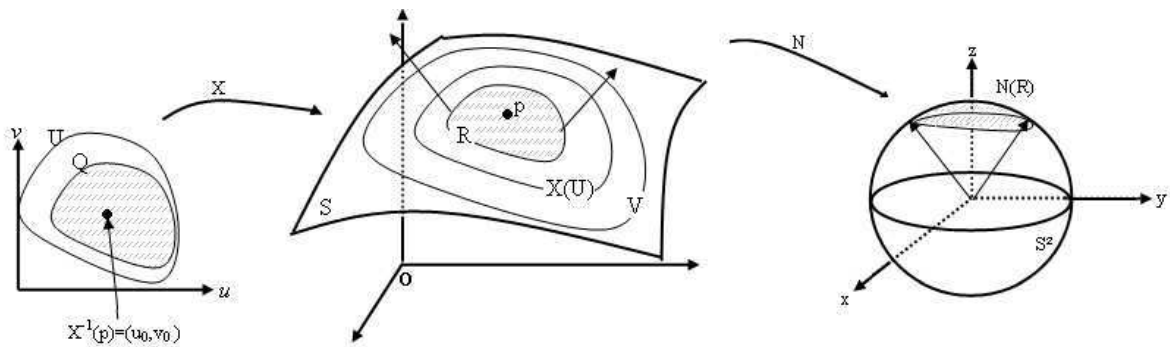


Figura 5.20. A região $N(R)$ é a imagem de R pela aplicação normal de Gauss.

A área da região $N(R)$ será dada por

$$A' = \iint_Q \|N_u \times N_v\| dvdu.$$

Utilizando o fato que, por serem N_u e N_v vetores de $T_p S$ podemos escrevê-los como $N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$ e $N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$, e utilizando a definição de K , podemos escrever a equação de A' como

$$A' = \iint_Q K \|X_u \times X_v\| dvdu,$$

então

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\iint_Q K \|X_u \times X_v\| dv du}{\iint_Q \|X_u \times X_v\| dv du},$$

Denotando pelo próprio Q a área da região Q , podemos perceber que

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\frac{A'}{Q}}{\frac{A}{Q}}$$

Vamos fazer uma avaliação destes quocientes $\frac{A'}{Q}$ e $\frac{A}{Q}$.

Sabemos que $X^{-1}(p) = (u_0, v_0) \in Q = X^{-1}(R)$.

Suponhamos que R seja fechado, então

$$\begin{aligned} \min_{(u,v) \in Q} (f(u, v)) &\leq \frac{1}{Q} \iint_Q f(u, v) dudv \leq \max_{(u,v) \in Q} (f(u, v)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{1}{Q} \iint_Q f(u, v) dudv = (f(u, v)). \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\frac{A'}{Q}}{\frac{A}{Q}} = \frac{K(p) \|X_u \times X_v\|(u_0, v_0)}{\|X_u \times X_v\|(u_0, v_0)} = K.$$

□

5.4 Exemplos

Nesta seção vamos apresentar alguns exemplos dos resultados estudados neste capítulo, mostraremos algumas superfícies e suas curvaturas, a classificação de seus pontos e as linhas de curvaturas. E também uma interpretação geométrica a indicatriz de Dupin.

Exemplo 5.7. Seja o toro \mathbb{T}^2 do exemplo 1.6 da seção 1.1, vamos calcular a curvatura Gaussiana nos pontos dessa superfície cobertos pela parametrização dada por

$$X(\theta, \varphi) = ((a + r \cos\theta) \cos\varphi, (a + r \cos\theta) \sin\varphi, r \sin\theta),$$

onde $U = \{(\theta, \varphi) / 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$.

Precisamos então dos coeficientes E, F, G, e, f, g , calculando

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, -r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\theta), \\ X_\varphi &= -(a + r \cos\theta) \operatorname{sen}\varphi, (a + r \cos\theta) \cos\varphi, 0), \\ X_{\theta\theta} &= (-r \cos\theta \cos\varphi, -r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, -r \operatorname{sen}\theta), \\ X_{\theta\varphi} &= (r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, -r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, 0), \\ X_{\varphi\varphi} &= -(a + r \cos\theta) \cos\varphi, -(a + r \cos\theta) \operatorname{sen}\varphi, 0), \end{aligned}$$

temos os coeficientes da primeira forma fundamental $E = r^2, F = 0, G = (a + r \cos\theta)^2$, onde $\sqrt{EG - F^2} = r(a + r \cos\theta)$, e os coeficientes da segunda forma fundamental

$$e = \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\theta})}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\varphi})}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\varphi\varphi})}{\sqrt{EG - F^2}}$$

de onde

$$e = r, \quad f = 0, \quad g = (a + r \cos\theta) \cos\theta,$$

logo

$$K = \frac{eg - f^2}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\cos\theta}{r(a + r \cos\theta)}.$$

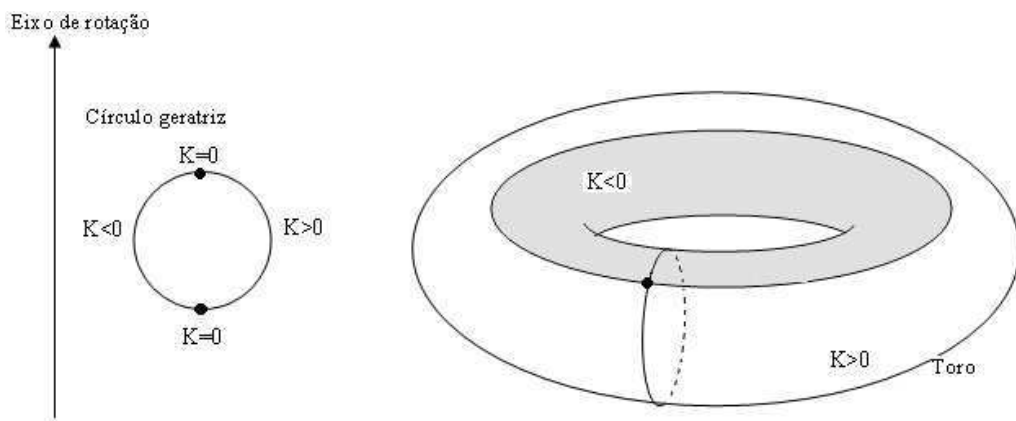


Figura 5.21. O toro e suas curvaturas.

Podemos perceber que

$$\begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \end{cases} \Rightarrow K > 0 \quad \frac{3\pi}{2} = \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow K = 0 \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow K < 0,$$

onde temos pontos elípticos, parabólicos e hiperbólicos respectivamente (fig.5.21)

A curvatura média é dada por

$$H = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = \frac{r(a + r\cos\theta)^2 + r^2(a + r\cos\theta)\cos\theta}{r^2(a + r\cos\theta)^2} = \frac{a + 2r\cos\theta}{2r(a + r\cos\theta)}$$

As curvaturas principais podem ser calculadas através da relação obtida entre a curvatura média e a Gaussiana, dada por $\mathbf{k} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{a + 2r\cos\theta}{2r(a + r\cos\theta)} \pm \sqrt{\frac{(a + 2r\cos\theta)^2}{4r^2(a + r\cos\theta)^2} - \frac{\cos\theta}{r(a + r\cos\theta)}} \\ &= \frac{a + 2r\cos\theta}{2r(a + r\cos\theta)} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 4ar\cos\theta + 4r^2\cos^2\theta - 4r\cos\theta - 4r^2\cos^2\theta}{4r^2(a + r\cos\theta)^2}} \\ &= \frac{a + 2r\cos\theta}{2r(a + r\cos\theta)} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4r^2(a + r\cos\theta)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{a + 2r\cos\theta}{2r(a + r\cos\theta)} + \frac{a}{2r(a + r\cos\theta)} \Rightarrow K_1 = \frac{2}{2r} = \frac{1}{r} \\ K_2 &= \frac{a + 2r\cos\theta}{2r(a + r\cos\theta)} + \frac{a}{2r(a + r\cos\theta)} \Rightarrow K_2 = \frac{\cos\theta}{(a + r\cos\theta)}. \end{aligned}$$

Perceba que calculando os termos a_{ij} , $i, j = 1, 2$ temos

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} = -\frac{r(a + r\cos\theta)}{r^2(a + r\cos\theta)^2} = -\frac{1}{r} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} = \frac{0}{r^2(a + r\cos\theta)^2} = 0 = \frac{eF - fE}{EG - F^2} = a_{21} \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} = -\frac{r^2(a + r\cos\theta)\cos\theta}{r^2(a + r\cos\theta)^2} = -\frac{\cos\theta}{(a + r\cos\theta)} \end{aligned}$$

e portanto a matriz relacionada a dN_p já está diagonalizada, então os autovetores que fornecem as direções principais são:

$$e_1 = \frac{X_\theta}{\|X_\theta\|} = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad e_2 = \frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0).$$

Portanto, as linhas de curvaturas são as linhas de coordenadas.

Exemplo 5.8. Vamos calcular a curvatura Gaussiana para as superfícies de revolução arestadas no primeiro capítulo, sabemos que uma parametrização é dada por

$$X(u, v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u)), \quad 0 < v < 2\pi, \quad a < u < b, \quad \varphi(u) > 0,$$

Então,

$$\begin{aligned} X_u &= (\varphi'(u)\cos v, \varphi'(u)\text{senv}, \psi'(u)) \\ X_v &= (-\varphi(u)\text{senv}, \varphi(u)\cos v, 0) \\ X_{uu} &= (\varphi''(u)\cos v, \varphi''(u)\text{senv}, \psi''(u)) \\ X_{uv} &= (-\varphi'(u)\text{senv}, \varphi'(u)\cos v, 0) \\ X_{vv} &= (-\varphi(u)\cos v, -\varphi(u)\text{senv}, 0) \end{aligned}$$

De onde temos, $E = (\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2$, $F = 0$, $G = \varphi(u)^2$, vamos supor que a curva geratriz da nossa superfície seja parametrizada por comprimento de arco (ver seção 3.1), ou seja

$$\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2} = 1 \implies (\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2 = 1 \implies E = 1$$

então $\sqrt{EG - F^2} = \varphi(u)$.

Os coeficientes da segunda forma serão

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\varphi(u)} \begin{vmatrix} \varphi'(u)\cos v & \varphi'(u)\text{senv} & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\text{senv} & \varphi(u)\cos v & 0 \\ \varphi''(u)\cos v & \varphi''(u)\text{senv} & \psi''(u) \end{vmatrix} = \frac{1}{\varphi}(\varphi(u)\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi(u)\varphi''(u)\psi'(u)) \\ &= \varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{\varphi(u)} \begin{vmatrix} \varphi'(u)\cos v & \varphi'(u)\text{senv} & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\text{senv} & \varphi(u)\cos v & 0 \\ -\varphi'(u)\text{senv} & \varphi'(u)\cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varphi}[-\varphi(u)\varphi'(u)\psi'(u)\text{senv}\cos v + \\ &\quad + \varphi(u)\varphi'(u)\psi'(u)\text{senv}\cos v] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{\varphi(u)} \begin{vmatrix} \varphi'(u)\cos v & \varphi'(u)\text{senv} & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\text{senv} & \varphi(u)\cos v & 0 \\ -\varphi(u)\cos v & -\varphi(u)\text{senv} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varphi}[\varphi^2(u)\psi'(u)\text{sen}^2 v + \varphi^2(u)\psi'(u)\cos^2 v] \\ &= \frac{1}{\varphi}(\varphi^2(u)\psi'(u)) = \varphi(u)\psi'(u), \end{aligned}$$

calculando a matriz $[a_{ij}]$ obtemos,

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} = -\frac{[\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u)]\varphi(u)^2}{(\varphi(u))^2} = \varphi''(u)\psi'(u) - \varphi'(u)\psi''(u)$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} = \frac{0}{\varphi(u)^2} = 0 = \frac{eF - fE}{EG - F^2} = a_{21}$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2} = -\frac{\varphi(u)\psi'(u)}{(\varphi(u))^2} = -\frac{\psi'(u)}{\varphi(u)}$$

Vamos calcular a curvatura de gaussiana e a curvatura média a partir dessa matriz

$$K = (\varphi''(u)\psi'(u) - \varphi'(u)\psi''(u)) \left(-\frac{\psi'(u)}{\varphi(u)} \right),$$

já que $\varphi(u)$ é maior que zero.

Diferenciando a equação $(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2 = 1$, temos

$$\begin{aligned} 2\varphi'(u)\varphi''(u) + 2\psi'(u)\psi''(u) &= 0 \\ \varphi'(u)\varphi''(u) &= -\psi'(u)\psi''(u), \end{aligned}$$

e substituindo esse último resultado na fórmula obtida para K a cima, temos

$$K = -\frac{(\varphi'(u))^2\varphi''(u) + (\psi'(u))^2\varphi''(u)}{\varphi(u)} = \frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}$$

Para o cálculo das curvaturas principais, vamos utilizar a seguinte observação

Observação 5.3. *Dada uma parametrização X de uma superfície regular, tal que, quando calculadas os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental obtivermos $F = f = 0$, então as linhas de curvaturas são as curvas coordenadas de X , e ainda as curvaturas principais são dadas por*

$$K_1 = \frac{e}{E}, \quad K_2 = \frac{g}{G},$$

de onde temos também,

$$K = \frac{eg}{EG}, \quad H = \frac{eG + gE}{2EG}.$$

Então,

$$K_1 = \varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u), \quad K_2 = \frac{\varphi(u)\psi'(u)}{(\varphi(u))^2} = \frac{\psi'(u)}{\varphi(u)}.$$

E a curvatura média é dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG + gE}{2EG} = \frac{(\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u))\varphi(u)^2 + \varphi(u)\psi'(u)}{2\varphi(u)^2} \\ &= \frac{\varphi(u)\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi(u)\varphi''(u)\psi'(u) + \psi'(u)}{2\varphi(u)}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.9. Vamos calcular a curvatura Gaussiana para as superfícies dadas pelo gráfico de uma função diferenciável (proposição 1.1, seção 1.1), sabemos que uma parametrização é dada por

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)), \quad (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2,$$

de onde temos

$$X_u = (1, 0, h_u), \quad X_v = (0, 1, h_v), \quad X_{uu} = (0, 0, h_{uu}), \quad X_{uv} = (0, 0, h_{uv}), \quad X_{vv} = (0, 0, h_{vv}).$$

Então,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (h_u)^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = h_u h_v, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + (h_v)^2$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental, e os coeficientes da segunda são

$$e = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \\ 0 & 0 & h_{uu} \end{vmatrix} = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2}},$$

$$f = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \\ 0 & 0 & h_{uv} \end{vmatrix} = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2}},$$

$$g = \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \\ 0 & 0 & h_{vv} \end{vmatrix} = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2}}.$$

A curvatura gaussiana será

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{h_{uu}h_{vv}}{1+(h_u)^2+(h_v)^2} - \frac{h_{uv}^2}{1+(h_u)^2+(h_v)^2}}{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2} = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2} = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + (h_u)^2 + (h_v)^2)^2}$$

e a curvatura média será

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{\frac{h_{uu}(1+(h_v)^2)}{\sqrt{1+(h_u)^2+(h_v)^2}} - 2\frac{h_{uv}h_uh_v}{\sqrt{1+(h_u)^2+(h_v)^2}} + \frac{h_{vv}(1+(h_u)^2)}{\sqrt{1+(h_u)^2+(h_v)^2}}}{2(1 + (h_u)^2 + (h_v)^2)} \\ &= \frac{h_{uu}(1 + (h_v)^2) - 2h_{uv}h_uh_v + h_{vv}(1 + (h_u)^2)}{\sqrt{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2} \cdot 2(1 + (h_u)^2 + (h_v)^2)} \\ &= \frac{h_{uu}(1 + (h_v)^2) - 2h_{uv}h_uh_v + h_{vv}(1 + (h_u)^2)}{2(1 + (h_u)^2 + (h_v)^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

As superfícies dadas pela proposição 1.1 (seção 1.1) são de grande importância, pois localmente conforme proposição 1.3 (seção 1.1) toda superfície é o gráfico de uma função diferenciável. E sabendo desse fato, dentro desse exemplo, vamos agora dar uma interpretação geométrica da indicatriz de Dupin apresentada na seção 5.2.

Primeiramente, considere que: Dado um ponto $p \in S$, podemos escolher os eixos coordenados de \mathbb{R}^3 , de forma que p coincida com a origem desses eixos, e ainda que o vetor normal a superfície em p esteja na direção do eixo Oz de \mathbb{R}^3 (fig 5.22).

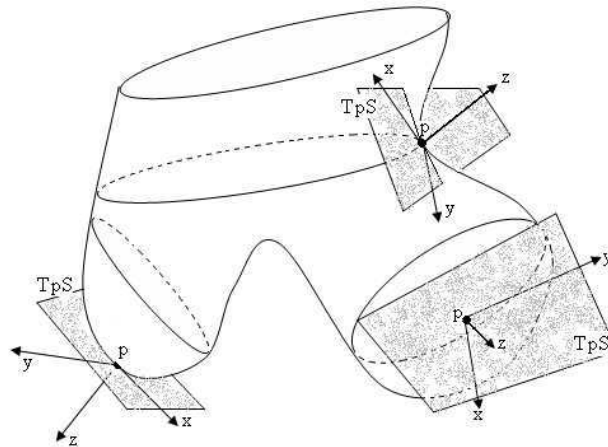


Figura 5.22. O plano xy coincide com o plano T_pS .

Pela proposição 1.3 (seção 1.1), temos que a vizinhança de $p \in S$ pode ser representada por $z = h(x, y)$, onde h é uma função diferenciável e $(x, y) \in U$ onde U é um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Como estamos considerando p sendo a origem temos $h(0, 0)$, $h_x(0, 0) = 0$ e $h_y(0, 0) = 0$.

Então, aplicando a segunda forma fundamental de S em p ao vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos:

$$h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2,$$

esta forma quadrática é conhecida como a *Hessiana* de h em $(0, 0)$ no cálculo elementar de duas variáveis.

Vamos agora a uma interpretação geométrica da indicatriz de Dupin.

Seja C uma curva regular contida em T_pS dada por

$$C = \{(x, y) \in T_pS / h(x, y) = \epsilon\}$$

onde $\epsilon > 0$ (podemos trocar a orientação de S para obter $\epsilon > 0$). Podemos mostrar que se p não é ponto planar, então a curva C é semelhante à indicatriz de Dupin de S em p (fig 5.23). Da seguinte forma: Suponhamos ainda que os eixos Ox e Oy estejam nas

direções principais, com o Ox estando na direção da curvatura principal máxima. Então $f = h_{xy}(0, 0) = 0$, e pela observação 5.3 temos que

$$K_1(p) = \frac{e}{E} = h_{xx}(0, 0), \quad K_2(p) = \frac{g}{G} = h_{yy}(0, 0).$$

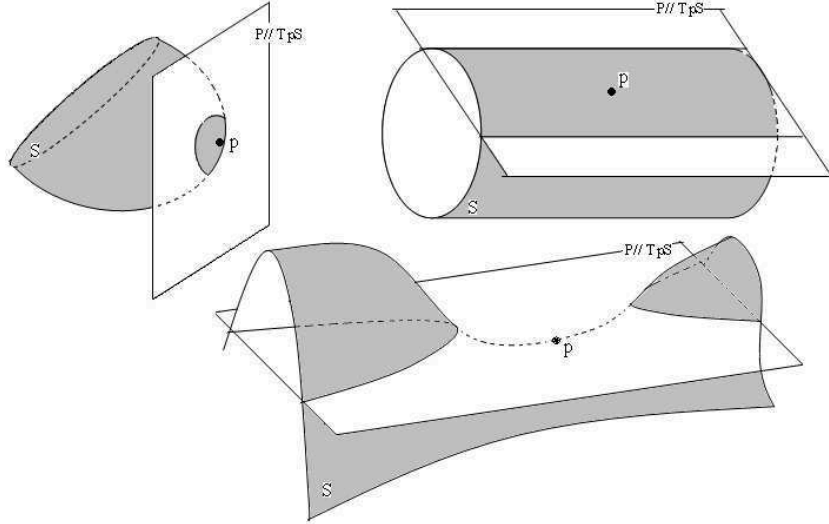


Figura 5.23. O plano $P//T_pS$ em cada figura, é um plano paralelo ao T_pS de cada figura.

Então, como $h_x(0, 0) = 0 = h_y(0, 0)$, e utilizando a expansão de Taylor para $h(x, y)$ em torno de $(0, 0)$, vamos obter que

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{2}(h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2) + R \\ &= \frac{1}{2}(K_1(p)x^2 + K_2(p)y^2) + R, \end{aligned}$$

com

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R}{x^2 + y^2} = 0.$$

Logo,

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(K_1(p)x^2 + K_2(p)y^2) + R = \epsilon \quad \implies$$

a curva C , é dada por

$$K_1(p)x^2 + K_2(p)y^2 + 2R = 2\epsilon,$$

Quando o ponto p não é um ponto planar, podemos considerar $K_1(p)x^2 + K_2(p)y^2 = 2\epsilon$, como sendo uma aproximação de primeira ordem da curva C em uma vizinhança de p . Utilizando a homotetia ²,

$$x = \bar{x}\sqrt{2\epsilon}, \quad y = \bar{y}\sqrt{2\epsilon},$$

²Homotetia significa ampliação ou redução das distâncias dos pontos de um espaço em relação a um ponto fixo.

temos que a expressão $K_1(p)x^2 + K_2(p)y^2 = 2\epsilon$ é transformada em outra curva, dada por

$$K_1(p)\bar{x}^2 + K_2(p)\bar{y}^2 = 1,$$

que como já vimos na definição 5.10 (seção 5.2) é a indicatriz de Dupin em p .

Portanto, se o ponto p é não planar, a curva interseção da superfície S com um plano próximo ao p e paralelo ao plano T_pS é, uma curva semelhante a indicatriz de Dupin em p , por uma aproximação de primeira ordem. Se p é planar, como já definimos na seção 5.2 a indicatriz é um conjunto vazio.

5.5 Considerações Finais Acerca de Curvatura (Teorema Egregium de Gauss)

Já sabemos que a geometria intrínseca de superfícies, trata de propriedades métricas internas, ou seja, aquelas propriedades que podemos estudar sem precisar mencionar o ambiente em que a superfície esta inserida. No capítulo 3 apresentamos a primeira forma fundamental, essa forma nos dá ferramentas para calcularmos conceitos métricos simples sem “sair” da superfície. Por esse motivo estes conceitos são ditos intrínsecos à superfície.

No capítulo 5 definimos curvatura através da segunda forma fundamental, e para isso usamos conceitos externos a superfície como campo de vetores normais, e deste ponto de vista, vimos curvaturas como um conceito extrínseco de superfícies.

Se continuássemos nosso estudo sobre geometria diferencial de superfícies poderíamos ver que muitas propriedades associadas à essa podem ser expressas em termos somente da primeira forma fundamental, podendo serem incluídas na categoria de intrínsecas, assim como curvatura, e é sobre esse fato que vamos falar nesta seção. Mas antes temos que tornar preciso o conceito de isometria entre superfícies.

Mencionamos na seção 3.1 que o cilindro e o plano possuem a mesma primeira forma, isso acontece, pois essas duas superfícies são localmente isométricas. E este fato implica que questões métricas intrínsecas (comprimento, área e ângulo) localmente se comportam de mesma maneira para essas superfícies, um exemplo disso é o que citamos no início deste atual capítulo, onde falamos do segmento \overline{AB} sobre a folha de papel, ou seja, imaginando a folha de papel como um plano o segmento tem um comprimento, se enrolarmos a folha formando um cilindro o segmento ainda tem o mesmo comprimento, porém as curvaturas mudam, podemos dizer aqui que este fato é descrito pelo seguinte: a primeira forma fundamental não foi alterada, mas a segunda forma foi.

Vamos definir isometria e assim vamos precisar a noção intuitiva de duas superfícies possuírem a mesma primeira forma fundamental.

Definição 5.15. *Sejam S e \bar{S} duas superfícies regulares. Uma aplicação $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é dita uma isometria e S e \bar{S} são ditas isométricas se, φ é um difeomorfismo, e para todo $p \in S$ e todos os pares w_1 e $w_2 \in T_p S$, temos*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Ou seja, podemos dizer que um difeomorfismo φ é uma isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno, logo, se φ é uma isometria, então para todo vetor $w \in T_p S$ temos que

$$I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)),$$

e a recíproca desta afirmação também é verdadeira, ou seja, se um difeomorfismo φ preserva a primeira forma fundamental, então φ é uma isometria.

Definição 5.16. *Seja $p \in S$ e $V \subset S$ vizinhança de p . Dizemos que uma aplicação $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria local, se existe uma vizinhança \bar{V} de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que, $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ é uma isometria.*

É evidente que se entre duas superfícies existe uma isometria local $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ para todo $p \in S$, onde φ é um difeomorfismo, então φ é uma isometria (global). No entanto, observando o exemplo do cilindro e do plano, podemos perceber que essas duas superfícies são localmente isométricas, mas não globalmente. Uma maneira não rigorosa de ver isso, é perceber que o cilindro não é homeomorfo a um plano, vamos apresentar o seguinte argumento: Podemos encolher de uma forma contínua qualquer curva simples fechada no plano, o que não acontece para qualquer curva simples fechada do cilindro, como um paralelo por exemplo (fig 5.24). Se houvesse um homeomorfismo essa propriedade teria que ser preservada, mas como não, eles não são globalmente homeomorfos e portanto não existe uma isometria globalmente entre eles.

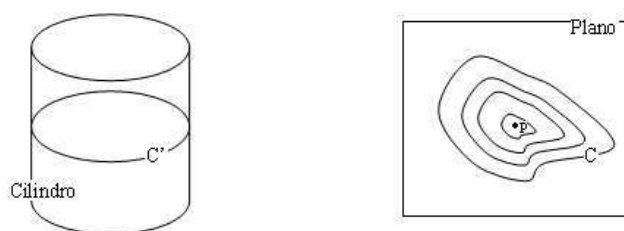


Figura 5.24. A curva C contida no plano pode ser encolhida até chegar a um ponto sem sair do plano, o mesmo não acontece com C' no cilindro.

Com a noção de isometria, voltemos agora a falar de curvaturas.

Seja S como de costume uma superfície regular orientável e orientada, e seja $X(U)$ uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p \in S$, compatível com a orientação de S . Apresentamos curvaturas na seção 5.3 num ponto da superfície estudando variações do plano tangente à superfície nesse ponto, e para isso usamos a segunda forma fundamental, tornando assim a curvatura um conceito extrínseco. Porém, Gauss apresenta um fato extraordinário onde ele mostra que a curvatura de uma superfície depende apenas da primeira forma fundamental, ou seja, podemos ver curvatura como um conceito intrínseco.

Então temos como objetivo final enunciar o importante teorema da geometria diferencial, o qual o próprio autor nomeou de Teorema Egregium (ou egrégio, que significa: muito distinto; nobre; ilustre; admirável; notável) de Gauss .

Teorema 5.4. (*Teorema Egregium de Gauss*) *A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais .*

Esta demonstração é feita estudando o triedro natural associado a cada ponto em S dado pelos vetores X_u , X_v e N . Expressando as derivadas desses vetores na base $\{X_u, X_v, N\}$, obtemos os *símbolos de Christoffel*.

Então

$$\begin{aligned}
 X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\
 X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\
 X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, & (***) \\
 X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\
 N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\
 N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v
 \end{aligned}$$

onde:

- Os a_{ij} , $i, j = 1, 2$ vem da matriz de Weingarten (seção 4.2);
- Os Γ_{jk}^i , $i, j, k = 1, 2$ são os Símbolos de Christoffel de S para parametrização X ;
- $L_1 = \langle X_{uu}, N \rangle = e$, $L_2 = \langle X_{uv}, N \rangle = f = \bar{L}_2$, $L_3 = \langle X_{vv}, N \rangle = g$;
- E como $X_{uv} = X_{vu}$, concluímos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$.

Lema 5.1. *Os símbolos de Christoffel de uma superfície S relativamente a uma parametrização X , estão relacionados com a primeira forma fundamental pelas seguintes igualdades:*

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = (\log \sqrt{EG - F^2})_u \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = (\log \sqrt{EG - F^2})_v \end{cases}$$

Demonstração. A demonstração das 6 primeiras igualdades são imediatas e utilizamos (**), então vamos mostrar para uma, as outras são de forma análoga.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_u, X_v \rangle \\ &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v, X_u \rangle \\ &= \langle X_{uu}, X_u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \|X_u\|^2 = \frac{1}{2} E_u. \end{aligned}$$

As duas últimas são consequência das 6 anteriores, vamos demonstrar a primeira delas, a outra é também feita de forma análoga,

$$\begin{aligned} (EG - F^2)_u &= EG_u + E_u G - 2FF_u \\ &= 2E(\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G) + 2G(\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F) - 2F(\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G + \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F) \\ &= 2EG\Gamma_{12}^2 + 2EG\Gamma_{11}^1 - 2F^2(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \\ &= 2(EG - F^2)(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2), \end{aligned}$$

logo

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{(EG - F^2)_u}{2(EG - F^2)} = (\log \sqrt{EG - F^2})_u$$

□

Considere agora os três primeiros sistemas do lema acima, resolvendo esses relativamente aos símbolos de Christoffel, obtemos que todos eles dependem apenas da primeira

forma fundamental e das suas derivadas. Portanto os conceitos geométricos e propriedades que forem expressas em termos destes símbolos, são invariantes por isometrias.

Podemos agora utilizar esse conceito para demonstrar o teorema egregium.

Demonstração. Teorema Egregium de Gauss. Sejam as equações obtidas em (***), e consideremos a matriz de Weingarten vista na seção 3.1, temos que,

$$\begin{aligned}
X_{uvv} &= (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N)_v \\
&= \Gamma_{11v}^1 X_u + \Gamma_{11v}^2 X_v + e_y N + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e N_y \\
&= \Gamma_{11v}^1 X_u + \Gamma_{11v}^2 X_v + e_y N + \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + f N) + \\
&\quad + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + g N) + \\
&\quad + e (a_{12} X_u + a_{22} X_v) \\
&= (\Gamma_{11v}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12}) X_u + \\
&\quad + (\Gamma_{11v}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22}) X_v + \\
&\quad + (e_y \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g) N,
\end{aligned}$$

da mesmo forma obtemos,

$$\begin{aligned}
X_{uvu} &= (\Gamma_{12u}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + f a_{11}) X_u + \\
&\quad + (\Gamma_{12v}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21}) X_v + \\
&\quad + (f_x \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f) N.
\end{aligned}$$

E como $X_{uvv} = X_{uvu}$, temos,

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21},$$

de onde tiramos que,

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = a_{22} e - a_{21} f.$$

Utilizando agora os valores a_{ij} da matriz de Weingarten, terminamos nossa demonstração,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} e - \frac{eF - fE}{EG - F^2} f \\
&= -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
&= -EK.
\end{aligned}$$

Para essa demonstração utilizamos $X_{uvv} = X_{uvu}$, mas poderíamos ter utilizado as igualdades $X_{vvu} = X_{vuv}$ e $N_{uv} = N_{vu}$, onde teríamos obtido FK e GK . E como E, F, G não

se anulam ao mesmo tempo podemos concluir que a curvatura de Gauss só depende da primeira forma fundamental, logo, invariante por isometria.

□

E com esse fato realmente extraordinário, de que a curvatura gaussiana de uma superfície, definida na seção 5.3, não dependa do ambiente em onde a superfície esta inserida, é que terminamos nosso estudo neste trabalho.

Apêndice: Álgebra Linear - Transformações Lineares

Auto-adjuntas e Formas Quadráticas

Este apêndice tem por objetivo mostrar resultados de álgebra linear, que relacionam transformações lineares auto-adjuntas com formas quadráticas, esses conceitos são necessários para nosso estudo, e servirão de suporte principalmente para o desenvolvimento dos capítulos 4 e 5.

O estudo da álgebra linear é feito através de espaços vetoriais, então, seja V um espaço vetorial, como o nome sugere, V é formado por um conjunto de vetores, onde estão definidas as operações de adição e de multiplicação por um escalar. Essas operações satisfazem alguns axiomas que não convém citar (ver [5]). Dentro desse conjunto de vetores, pode existir algum, que seja escrito a partir de outros vetores também pertencentes à esse conjunto, e desta forma, temos uma combinação linear. Se nosso espaço V tem dimensão n , e existem v_1, \dots, v_n vetores em V , tais que, nenhum deles é combinação linear de nenhum outro vetor também de V , então dizemos que v_1, \dots, v_n são vetores linearmente independentes (*L.I.*), e ainda esses n vetores *L.I.*'s formam uma base de V .

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma **transformação linear** $T : V \rightarrow W$ é um tipo particular de função onde domínio e contra-domínio são espaços vetoriais, T associa a cada vetor $v \in V$ um vetor $T(v) = w \in W$, tal que as operações de adição vetorial e de multiplicação por escalar são preservadas, ou seja

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad T(\lambda \cdot v) = \lambda T(v), \quad u, v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uma transformação linear pode ser chamada também de **aplicação linear**. Denotamos por $\mathcal{L}(V; W)$ o conjunto das transformações lineares de V em W , onde as operações de soma e produto por um número tornam $\mathcal{L}(V; W)$ um espaço vetorial, e para $T \in \mathcal{L}(V; W)$, tal que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, temos que essa transformação fica inteiramente determinada por uma matriz pertencente ao espaço das matrizes $m \times n$. Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W , como $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W , podemos escreve-los

como combinação linear dos vetores da base β' , ou seja

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m, \end{aligned}$$

temos então que a matriz relacionada a T , que denotamos por $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é dada por

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Quando β e β' são bases canônicas, temos a matriz $A = [a_{ij}] = [T]$ onde vetores colunas dessa matriz são as imagens de T aplicada aos vetores da base canônica do \mathbb{R}^n , ou seja, os $T(e_j)$, $j = 1, \dots, n$.

A toda transformação linear $T : V \rightarrow W$ estão associados dois subespaços, são eles: o núcleo de T e a imagem de T . O *núcleo* de T ou também chamado de **kernel** de T é definido por $\ker(T) = \{v \in V / T(v) = 0\}$, onde 0 é o vetor nulo de W , podemos perceber que o núcleo é um subespaço de V . A *imagem* de T é o subconjunto definido por $\text{Im}(T) = \{T(v) = w \in W / v \in V\}$, temos que $\text{Im}(T)$ é um subespaço de W .

Uma transformação linear é **injetiva** se, e somente se, leva vetores *L.I.* em vetores *L.I.*. E seu núcleo conter apenas o vetor nulo é condição suficiente para que ela seja injetiva.

Sejam U e V espaços vetoriais. Uma **forma bilinear** $B : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função $B(u, v)$ linear em cada uma das duas variáveis $u \in U$, $v \in V$, sejam $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, se B é bilinear então satisfaz

$$\begin{aligned} B(u + u', v) &= B(u, v) + B(u', v), & B(\lambda u, v) &= \lambda B(u, v), \\ B(u, v + v') &= B(u, v) + B(u, v'), & B(u, \lambda v) &= \lambda B(u, v). \end{aligned}$$

Uma forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **simétrica** quando $B(u, v) = B(v, u)$ para quaisquer vetores $v, u \in V$.

Dada uma forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, podemos associar à essa uma matriz. Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_2\}$ uma base de V , sejam v e w vetores em V , podemos escrever $v =$

$x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ e $w = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$, então

$$\begin{aligned} B(v, w) &= B(x_1v_1 + \dots + x_nv_n, y_1v_1 + \dots + y_nv_n) = \sum_{i,j}^n x_i y_j B(v_i, v_j) = \\ &= [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} B(v_1, v_1) & \dots & B(v_1, v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(v_n, v_1) & \dots & B(v_n, v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [v]_\alpha^t [B]_\alpha^\alpha [w]_\alpha \end{aligned}$$

e $[B]_\alpha^\alpha$ é a matriz procurada.

Um **produto interno** : $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica e positiva em V , que associa a cada par de vetores $u, v \in V$ um número real positivo denotado por $\langle u, v \rangle$ chamado produto interno de u por v . Ao número positivo $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ damos o nome de **norma** ou **comprimento** do vetor u . Quando $\|u\| = 1$ dizemos que u é um vetor **unitário**. Se o produto interno de dois vetores é nulo, então dizemos que esses são **ortogonais**. O conceito de produto interno enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permite a utilização de uma linguagem geométrica e destaca tipos especiais de operadores.

Observação 1. O produto interno utilizado em nosso estudo é o do espaço euclidiano \mathbb{R}^n que chamamos de **produto interno usual**, conhecido também de **cânônico** ou **normal**, onde dados os vetores $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$, temos que

$$\langle u, v \rangle = \langle (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n.$$

Seja V um espaço vetorial real e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(v) = B(v, v)$ é chamada de **forma quadrática** associada a B , Q pode ser expressa por $Q(v) = [v]_\alpha^t [B]_\alpha^\alpha [v]_\alpha$, onde $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica associada a forma bilinear.

Sejam V e W espaços vetoriais ambos finitos e com produto interno, podemos associar a cada transformação linear $T : V \rightarrow W$, uma nova transformação linear $T^* : W \rightarrow V$, chamada a adjunta de T . Definimos A adjunta de T da seguinte forma: Sejam quaisquer vetores $v \in V$ e $w \in W$, então

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle.$$

Se $A = [a_{ij}]$ é a matriz associada a transformação T então a matriz associada a transformação T^* é a matriz transposta de A , ou seja, $A^T = [a_{ji}]$.

Um **Operador linear** é uma de transformação linear em que domínio e contradomínio coincidem. Seja o operador linear $T : V \rightarrow V$, um vetor $v \neq 0 \in V$ é dito **autovetor** de

T quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, por sua vez, denomina-se um **autovalor** de T quando existe $v \neq 0 \in V$, tal que, $T(v) = \lambda v$.

Seja $M(n \times n)$ o espaço das matrizes $n \times n$, diz-se que $\lambda \in \mathbb{R}$ é *autovalor da matriz* $A \in M(n \times n)$, quando λ é um autovalor do operador $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuja a matriz na base canônica é a matriz A .

Um **operador auto-adjunto** é um operador linear em um espaço vetorial com produto interno que é adjunto de si mesmo, ou seja, quando $T = T^*$, ou ainda quando $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$.

Vamos agora estabelecer uma relação entre operadores auto-adjuntos e formas quadráticas.

A cada operador linear auto-adjunto associamos uma aplicação bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $B(v, w) = \langle T(v), w \rangle$. Além disso o fato de T ser auto-adjunta implica que $B(u, w) = B(w, v)$, ou seja, é uma forma bilinear simétrica.

Reciprocamente, se B é uma forma bilinear simétrica, então podemos definir um operador linear $T : V \rightarrow V$ relacionado a B dado por $\langle T(v), w \rangle = B(u, w)$ e o fato de B ser simétrica implica que T é auto-adjunto

E ainda, se $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica, existe uma forma quadrática associada a B em V dada por $Q(v) = B(v, v)$, $v \in V$.

Como B é simétrica, conhecendo-se Q a forma B fica inteiramente determinada, pois todos os valores $B(u, v)$ podem ser determinados a partir dos valores $B(v, v) = Q(v)$ da forma quadrática Q . Com efeito, tem-se a seguinte fórmula

$$B(u, v) = \frac{1}{2}[B(u+v, u+v) - B(u, u) - B(v, v)] = \frac{1}{2}[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)]$$

esta é conhecida como fórmula de polarização.

Desta forma, existe uma bijeção entre formas quadráticas em V e operadores auto-adjuntos.

Todos os conceitos visto até aqui neste apêndice são importantes, mas o que veremos a partir de agora é realmente o objetivo desse, onde queremos mostrar que: Dado um operador linear auto-adjunto $T : V \rightarrow V$, existe uma base ortonormal de V , tal que a matriz de T nesta base é uma matriz diagonal. E ainda, quando restringimos Q (forma quadrática relacionada a T) ao círculo unitário de V , Q possui uma máximo λ_1 e um mínimo λ_2 , tais que λ_1 e λ_2 são os elementos da diagonal da já referida matriz .

Lema 1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 e seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal em V , tal que $Q(e_1)$ seja máximo (ou mínimo) , então $B(e_1, e_2) = 0$.*

Demonstração. Seja $e_1 = (1, 0)$, e seja $v \in V$ com $\|v\| = 1$, então podemos dizer que o extremo do vetor v está sobre um círculo \mathbb{S}^1 dado por $x^2 + y^2 = 1$. Vamos parametrizar esse círculo por $x = \text{cost}$, $y = \text{sent}$, $t \in \mathbb{R}$, portanto v pode ser escrito como

$$v = (e_1 \text{cost} + e_2 \text{sent}) = (\text{cost}, \text{sent})$$

então

$$\begin{aligned} B(v, v) &= (e_1 \text{cost} + e_2 \text{sent}, e_1 \text{cost} + e_2 \text{sent}) = Q(t) \\ &= B(e_1, e_1) \cos^2 t + B(e_1, e_2) \text{costsent} + B(e_2, e_1) \text{sentcost} + B(e_2, e_2) \text{sen}^2 t \\ &= B(e_1, e_1) \cos^2 t + 2B(e_1, e_2) \text{costsent} + B(e_2, e_2) \text{sen}^2 t \end{aligned}$$

onde

$$\frac{d}{dt}Q(t) = -2B(e_1, e_2) \text{costsent} + 2B(e_1, e_2) (\cos^2 t - \text{sen}^2 t) + 2B(e_2, e_2) \text{sentcost}.$$

Por hipótese temos que $Q(e_1) = B(e_1, e_1)$ é máximo (ou mínimo), então $\frac{d}{dt}Q(e_1) = 0$, logo

$$\frac{d}{dt}Q(e_1) = 2B(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow B(e_1, e_2) = 0.$$

□

Proposição 1. *Dada a forma $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ existe uma base $\{e_1, e_2\}$ tal que $B(e_1, e_1) = \lambda_1$ (máximo) e $B(e_2, e_2) = \lambda_2$ (mínimo).*

Demonstração. Seja $e_1, e_2 \in \mathbb{S}^1 \subset V$, com $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, tal que $B(e_1, e_1)$ seja máximo e o vetor e_2 seja ortonormal a e_1 . Pelo lema 1, vimos que $B(e_1, e_2) = 0$.

Seja $v \in \mathbb{S}^1$, onde $v = (e_1 \text{cost}, e_2 \text{sent})$, então

$$\begin{aligned} B(v, v) &= B(e_1, e_1) \cos^2 t + B(e_2, e_2) \text{sen}^2 t \\ &= \lambda_1 \cos^2 t + \lambda_2 \text{sen}^2 t \end{aligned}$$

por hipótese λ_1 é máximo, então

$$\lambda_1 \cos^2 t + \lambda_2 \text{sen}^2 t \geq \lambda_2 \cos^2 t + \lambda_2 \text{sen}^2 t = (\cos^2 t + \text{sen}^2 t) \lambda_2 = \lambda_2.$$

Portanto,

$$B(v, v) \geq \lambda_2 \quad \forall v \in \mathbb{S}^2; \quad \|v\| = 1$$

então $\lambda_2 = B(e_2, e_2)$ é mínimo.

□

Teorema 1. *Seja V espaço vetorial de dimensão 2, com prouto interno, e seja $T : V \rightarrow V$ auto-adjunto, então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $T(e_1) = \lambda_1 e_1$ e $T(e_2) = \lambda_2 e_2$. Na base $\{e_1, e_2\}$ a matriz de T é diagonal e os elementos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \geq \lambda_2$ da diagonal são o máximo e o mínimo, da forma quadrática $Q = \langle T(v), v \rangle$ sobre o círculo unitário de V .*

Demonstração. Seja $Q(v)$ a forma quadrática relacionada a T , pela proposição 1 vimos que, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V , onde $Q(e_1) = \lambda_1, Q(e_2) = \lambda_2$, tal que, quando restringimos Q ao círculo unitário de V , λ_1 e λ_2 são o máximo e o mínimo de Q respectivamente. Portanto, resta mostrar que $T(e_1) = \lambda_1 e_1, T(e_2) = \lambda_2 e_2$.

Pelo lema 1 sabemos que $B(e_1, e_2) = \langle T(e_1), e_2 \rangle = 0$, e temos por hipótese que $e_1 \neq 0$, então, $T(e_1) = \alpha e_1$, como

$$Q(e_1) = \langle T(e_1), e_1 \rangle = \lambda_1 \Rightarrow \langle T(e_1), e_1 \rangle = \langle \alpha e_1, e_1 \rangle = \lambda_1$$

mas

$$\langle \alpha e_1, e_1 \rangle = \alpha \langle e_1, e_1 \rangle = \alpha,$$

logo $\alpha = \lambda_1$ e $T(e_1) = \lambda_1 e_1$.

De modo análogo, Agora usando $B(e_2, e_1) = \langle T(e_2), e_1 \rangle = 0$, obtemos $T(e_2) = \lambda_2 e_2$

□

Com a demonstração do teorema 1 atingimos o objetivo desse apêndice, porém vamos acrescentar mais alguns resultados interessantes.

Teorema 2. *Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são autovalores dois a dois diferentes do operador auto-adjunto $T : V \rightarrow V$, então os autovetores correspondentes v_1, \dots, v_m são dois a dois ortogonais.*

Demonstração. Para qualquer $i \neq j$, sabemos que $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, então:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \langle T(v_i), v_j \rangle - \langle v_i, T(v_j) \rangle,$$

mas T é auto-adjunto, então $\langle T(v_i), v_j \rangle - \langle v_i, T(v_j) \rangle = 0$, logo $(\lambda_i - \lambda_j) \langle v_i, v_j \rangle = 0$, de onde tiramos que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ e portanto ortogonais.

□

Teorema 3. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. T é auto-adjunto se, e somente se, sua matriz $A = [a_{ij}]$ relativa a uma (e por tanto qualquer) base ortonormal de V é uma matriz simétrica, ou seja, $A = A^T$.*

Demonstração. Seja $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V .

Então $\langle e_i, T(e_j) \rangle = [i\text{-ésima coordenada do vetor } T(e_j)] = [i\text{-ésimo elemento da } j\text{-ésima coluna de } A] = a_{ij} = A^T$. Portanto a matriz A é simétrica se, e somente se, $\langle e_i, T(e_j) \rangle = \langle T(e_i), e_j \rangle$ para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$. Como T é linear e o produto interno é bilinear, temos que $\langle u, T(v) \rangle = \langle T(u), v \rangle$ para quaisquer $u, v \in V$, ou seja, T é auto-adjunto. \square

Conclusão

Podemos concluir que a elaboração e confecção de um trabalho de conclusão de curso são de grande importância, pois é este trabalho que nos leva à prática constante da pesquisa, ao estudo aprofundado de algum assunto ou assuntos anteriormente não conhecidos, assim como aprimoramento de conhecimentos e relação entre conceitos adquiridos no decorrer de um curso de graduação. É neste momento que nos vemos abrigado a desenvolver um pensamento mais detalhista e formal, onde pensamos na matemática de uma forma mais sofisticada e rigorosa.

A disciplina de Geometria Diferencial não está incluída no currículo do curso de licenciatura em matemática, pelo menos não no desta universidade, conseqüentemente não é estudada por muitos alunos que optam por essa graduação. Mas, com este trabalho, onde apresentamos o estudo de uma parte da geometria diferencial (geometria diferencial de superfícies), podemos ver que, com uma boa base em conceitos de cálculo diferencial e álgebra linear, juntamente com a disposição de aprender podemos obter um bom resultado, no qual percebemos ainda o quanto essa área é vasta e fascinante.

Não vamos ver nesta folha de conclusão resultados significativos sobre a geometria diferencial de superfícies (esses estão na seção 5.5), mas podemos dizer que para definir curvaturas de uma superfície bem comportada, tivemos primeiro de entender o que é uma superfície bem comportada, ou seja, estudamos primeiramente a noção de superfície regular e conceitos importantes relacionadas a essa para depois poder definir curvaturas, alcançando assim o objetivo maior deste trabalho.

É neste trabalho onde vemos também que, com certeza existe muito ainda para abordar, estudar e aprimorar sobre este tema, aliás não só sobre geometria diferencial de superfícies, mas sobre toda a geometria diferencial e acima disso sobre toda a matemática.

E por fim, assim como grande parte dos alunos que alcançam esta etapa, esperamos que nosso estudo apresentado neste trabalho possa ser útil a outras pessoas como um material de de consulta ou de estudo.

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 1998.
- [2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2005.
- [4] DE MORAIS F., Daniel Cordeiro. **As mulheres na Matemática**. Revista do Professor de Matemática. v. 30. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, p. 2-9, 1996.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. 2006.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**, Volume 2 Funções de n Variáveis. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2006