Revista de Pedagogia

SUMÁRIO

ANO IV — VOL. IV — N.º 8 **Julho-Dezembro de 1958**

CUNHA LIMA
BIBLIOTECA
DATA: .... PREÇO: CR$
ADQUIRIDO DE:

INDICE

METODOLOGIA

O ENSINO DO CÁLCULO

ONOFRE A. PENTEADO JUNIOR
Professor-catedrático de Didática Geral e Especial, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da U.S.P.

(Continuação do número anterior)

1 — **A construção do número**. Há várias teorias a respeito de como se constroi, na mente da criança, o conceito de número. O ponto de vista racionalista admite o número como pura criação do espírito. O intuicionismo pestaloziano, como fruto do contar coisas, como uma impressão sensivel. Em nossos dias Piaget vem estudando profundamente o assunto e em sua obra "L'épistémologie génétique", edição de 1950, apresenta os resultados de anteriores pesquisas psicológicas, de grande interêsse para a didática do cálculo. A construção do número não se faz apenas empiricamente, isto é, o número não resulta da observação e comparação de objetos concretos, não é um dado fornecido a partir das coisas reais existentes no mundo exterior, e nem um produto do espírito, sem ligações com o mundo objetivo. A construção do conceito de número é o resultado da ação conjunta do espírito, da atividade mental que trabalha sôbre a realidade do mundo exterior. A concepção de Piaget se encontra resumida, na obra citada, no seu volume I, e se expressa de modo preciso em quatro itens, que passamos a analisar:

1.º) Antes de mais nada é preciso compreender, como dizia William James que a natureza nos dá, com anterioridade, os esquemas de classificações e de seleções. Os orgãos dos sentidos são selecionadores de estímulos. Os estímulos do ouvido são de natureza diferente dos estímulos da vista. Não vemos o som, como não ouvimos o gôsto. A psicologia genética procura a origem histórica e evolutiva da construção do número e verifica que o conhecimento matemático se desenvolve, na criança, a partir do sensível, do real, e atinge o nível de abstrato, para depois aplicar-se ao real. Se a natureza da matemática não depende de processos experimentais e se ela se estriba em postulados e axiomas, que são afirmações que expressam juizos necessários ou analíticos, isto é, verdades intuitivas, tais como o princípio de identidade, o de não contradição, o do terceiro excluido, os quais são descobertos pela criança, através de suas experiências rudimentares, não resta dúvida de que a matemática não dependendo do real, da experimentação, vai aplicar-se ao real. Piaget admite que tôda ação está sempre ligada a ações anteriores que, remotamente, se prendem a esquemas de atividades orgânicas, como sejam os reflexos e os demais atos hereditários. Antes que o homem classifique as coisas, a natureza já o faz, selecionando os dados do mundo exterior, através dos orgãos dos sentidos. A criança traz em si verdadeiros modos de agir que são como que técnicas naturais de que se vale para explorar o mundo ambiente: agarra, bate, sacode os objetos. Êsses esquemas de ação levam a criança a enfrentar os conjuntos de objetos existentes no mundo exterior, redistribuindo-os, reorganizando-os, dispondo-os de modo diferente. A ação ou a atividade da criança tem por finalidade incorporar o objeto a esquemas assimiladores existentes anteriormente. Êstes esquemas assimiladores, biològicamente e genèticamente falando-se, têm sua origem no próprio ser vivo em que se manifesta a atividade. A necesidade, como carência, como falta de algo que reestabeleça o equilíbrio orgânico, como se dá no caso da fome, da sêde, do frio, leva o imaturo à ação. E isso não é preciso aprender. São formas hereditárias da ação. E' imanente ao ser vivo a capacidade de agir. A criança, ao nascer, traz consigo modos inatos de ação, que se traduzem no pegar, bater, reunir, separar, agrupar, etc. A ação está relacionada a um agente, a um sujeito, do mesmo modo que o pensamento implica um ser pensante. A construção do número vai depender, ao mesmo tempo, da interrelação entre o sujeito da ação e o objeto sôbre que se dá a ação. Depende do sujeito e do objeto ao mesmo tempo. Todo objeto manipulado pela criança como que se incorpora a um esquema preexistente de ação, e a isto chama Piaget de **assimilação**. O objeto como que é atraido para o mundo da criança por intermédio das únicas técnicas que a natureza lhe deu: uma caixinha que deve ser aberta é batida, sacudida, agarrada, pois é só isso que pode fazer, nas primeiras fases de seu desenvolvimento. Por outro lado, os objetos impõem uma variação de atitudes, em face do real, e a criança tenta como que adatar-se ao objeto, a acomodar-se ao objeto. O objeto força a variação da ação. Os dois aspectos, a **assimilação** e a **acomodação** são aspectos inseparáveis da própria ação. De um lado o objeto é assimilado a esquemas anteriores da ação e de outro a ação tende a variar e a acomodar-se ao objeto, resultando um equilíbrio dinâmico a todo o momento. O equilíbrio se reconstroi continuamente.

Segundo os estudos de Piaget, o ensino do cálculo deve iniciar-se pelo contato ativo da criança com a realidade do mundo exterior. O conceito de número não é apenas criação do espírito ou mero dado empírico fornecido do mundo exterior pelos orgãos dos sentidos, o que não teria sentido. O número é uma construção que se opera genética e històricamente pela interação do espírito com a realidade, a partir de atividades senso-rio-motrizes, como primeira etapa do desenvolvimento do conhecimento matemático.

2.º) Numa segunda fase, a operação que nos levará gradativamente ao pensamento matemático, afasta-se do sensível, para ater-se à representação do objeto real. A criança que só sabia contar por meio

de objetos concretos, sementes, fichas, botões, passa a jogar com as representações das coisas. A ação que antes era efetiva ou que se realizava com coisas, passa a interiorizar-se, isto é, a realizar-se representativamente. E' interessante observar que a criança, de cinco a seis anos, é capaz de estabelecer a correspondência de objeto a objeto em duas séries, por exemplo, de seis moedas e seis botões pariados, uns em frente dos outros e cada série tendo seus elementos afastados de tal modo que haja correspondência unívoca, têrmo a têrmo, e que o comprimento de ambas seja o mesmo. Qualquer alteração nos elementos, tornando os elementos de uma série mais afastados, dando a impressão de ser mais comprida do que a outra, faz com que a criança dessa idade se perturbe. Tal se dá na primeira fase, porque não é capaz de interiorizar a ação de correspondência de objeto a objeto. Na segunda fase começa a superação do sensível. Observa que a contagem dos elementos de uma série dá o mesmo resultado a partir da direita ou da esquerda, não importando a ordem, e isso não nos é dado pela natureza em si, mas é uma primeira construção interiorizada do espírito, é uma elaboração mental. Por isso é que diz Piaget, que quando se passa da ação sensório-motriz à ação interiorizada constituida pela representação intuitiva, o equilíbrio entre a assimilação e a acomodação tende a se estabilizar sob os efeitos de determinados fatôres. O equilíbrio de que fala o psicólogo é dinâmico e não estático. "Graças ao jôgo das significações evocadas mentalmente, a assimilação cessa de ser imediata e supera a ação do momento, encaminhando-se para as grandes distâncias espaço-temporais, isto é, ela se prolonga em juízo. Por mais complexa que seja a filiação psicológica da assimilação representativa em relação à da ação, a continuidade epistemológica é evidente. Quanto à acomodação, ela se interioriza igualmente, mas sob forma de significações imaginadas: a imagem mental, símbolo do objeto, resulta de uma espécie de imitação interior que, como a imaginação em si mesma, prolonga a acomodação" (1). Nesta segunda fase o processo mental se realiza de modo interiorizado, jogando com representações de objetos que foram manuseados, em ação efetiva, pela criança. Os objetos agora são os símbolos, as imagens, as representações de coisas sensíveis, considerando-se **objeto** no sentido lógico, como tudo aquilo que preocupa nosso espírito. O objeto é real, quando sendo sensível está em determinado momento, no tempo e no espaço, como a mesa em que escrevo, que está aqui agora, neste momento e que ocupa lugar no espaço. O objeto pode estar apenas no tempo e não ocupar lugar no espaço, como a dôr de dentes que tive ontem e hoje já não tenho, como acontece com os fatos psicológicos. O objeto pode não estar no tempo e nem no espaço, como o fato matemático, que independe do tempo e não ocupa lugar no espaço: dois mais dois é

(1). — Piaget, J., "Introduction a L'Épistémologie Génétique", Tome I, (La pensée mathématique), Presses Universitaires de France, Paris, 1950, pg. 60.

igual a quatro, é uma verdade matemática que não ocupa lugar no espaço e independe do tempo, podendo-se afirmar que daqui a cem anos dois brasileiros mais dois brasileiros serão iguais a quatro brasileiros.

3.º — Em terceiro lugar Piaget estuda a ação concreta, e usa esta palavra concreta no sentido de Dewey, que não se identifica com o sensível. O concreto é o que é entendido. Uma célula vegetal, embora sensível, podendo algumas serem vistas a olho nú, é concreta para quem a viu no microscópio e analizou completamente, mas é abstrata para a criança que ainda não a conhece. A ação concreta tanto é a que se realiza efetivamente com objetos do mundo exterior ou com objetos mentais, daí dizer que as primeiras operações permanecem concretas porque ainda ligadas a manipulações efetivas ou mentais. Neste terceiro nível de desenvolvimento, porém, surgem duas coisas importantes. "Em primeiro lugar, a ação é reversível, enquanto que a ação inicial é irreversível, e tôda a psicologia da criança mostra quanto é lenta esta conquista da reversibilidade, até o momento em que a ação inversa é concebida como ligada necessàriamente à ação direta: inverter uma ordem, separar em oposição a reunir, etc. Donde o segundo caráter da operação: não se trata jamais de uma ação única, mas de ações coordenadas a outras, composição esta de ações que se torna coerente pela sua própria reversibilidade. Com efeito, esta reversibilidade e esta coordenação não são outra coisa que a expressão do equilíbrio enfim atingido entre a assimilação e a acomodação: coordenar as ações de maneira reversível, é poder simultaneamente acomodar os esquemas a tôdas as transformações e assimilar cada transformação a cada uma das outras por intermédio do esquema de ações que as provoquem" (2).

4.º — As operações anteriores concretas tornam possíveis as operações abstratas ou formais que se baseiam em afirmações e não em realidades suscetíveis de serem manipuladas. Estas operações abstratas se referem a proposições que descrevem as operações concretas, e não se realizam mais na base de objetos em si mesmos. Cada proposição constitui ainda uma ação, coordenável e reversível, mas de ordem puramente simbólica e hipotética. Significa isso que o pensamento matemático se constroi, na criança, a partir do real e genèticamente se desenvolve até atingir o nível abstrato em que ele age independentemente do suporte anterior, que é o sensível ou o real.

(Continua)

(2). — Idem, idem.

O ENSINO DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

E. P. ROSENBAUM

Continuação de uma visão geral, iniciada no último mês, das inovações na educação científica. Matemática: nos próximos anos serão possíveis importantes mudanças nos currículos do "high-school".

Se você tem um filho no "high-school" e é eventualmente chamado para auxiliá-lo na matemática, poderá não se recordar da resposta, mas reconhecerá o problema. E' a mesma velha matemática ensinada uma geração passada e mesmo duzentos anos atrás. Os métodos e a matéria estudada não mudaram. Mas uma revolução está iminente. Profundamente insatisfeitos com a maneira pela qual a matemática tem sido ensinada, vários grupos influentes de educadores começaram a experimentar métodos radicalmente novos de apresentar o assunto. Existem "high-schools" onde segundo-anistas levam para casa problemas, tais como: provar que

$$[A,B/l/] \text{ se e sòmente se } (A \notin l \text{ e } B \notin l) \text{ e } \overline{AB} \cap l = \emptyset$$

Traduzido, isto significaria: "Provar que um ponto B está entre outro ponto A e uma reta l, se e sòmente se A não pertence a l e B não pertence a l e o segmento AB não encontra l".

Existem marcantes diferenças de opinião a respeito desta inovação, se ela é realmente útil ou tornar-se-ia irrealizável. Entretanto, em um ponto quase todos estão de acôrdo: o antigo curso de matemática deve ser posto de lado. Êle não ensina aos estudantes o que é a matemática. Ele não lhes dá nenhuma real compreensão dos princípios da matéria. E' tão antiquado que deixa fora, pràticamente, tôdas as novas idéias e descobertas dos últimos 100 anos. E, acima de tudo, conseguiu tornar a matemática o mais impopular de todos os ramos do conhecimento. Mesmo homens cultos declaram sua ignorância de matemática com um ar de desafio que é quase de orgulho. Algo deve ser feito para tornar a matemática mais significativa e mais excitante. Pelo menos três tentativas importantes estão sendo realizadas. Tentarei descrever brevemente os raciocínios e táticas de sua exposição.

Seu objetivo básico é modernizar a matéria ensinada, mais ou menos (uns desejando ir mais longe do que outros). Modernizar significa principalmente duas coisas: eliminar o que é velho e introduzir algumas das novas idéias fundamentais que no último século deram mais significado e unidade a todos os tradicionais ramos da matemática.

Como exemplo do que vai ser eliminado podemos citar a considerável atenção dispensada, nos livros-textos de trigonometria, à resolução de triângulos com logaritmos. Êste foi o único método disponível aos agrimensores e navegadores há um século atrás; hoje os técnicos obtêm a resposta nas máquinas de calcular. Também para eliminar estão algumas "provas" clássicas euclideanas de geometria; elas não são realmente provas. Hoje um matemático ataca êstes problemas com o cálculo e o conceito de limite e chega a provas verdadeiramente rigorosas.

A matemática conforme é agora ensinada nas escolas elementares e mesmo nos "college" parece ser uma coletânea de assuntos separados. Cada um tem suas regras aparentemente arbitrárias, para serem decoradas. Mas, estudos dos fundamentos da matemática, no último século, mostraram que todos os seus ramos podem ser reduzidos a têrmos puramente abstratos, com propriedades comuns. Assim como os números são os elementos da álgebra, pontos e retas são os elementos "primitivos" da geometria, e podemos trabalhar com conjuntos de qualquer um dos dois da mesma maneira — na realidade com as mesmas operações. As regras da lógica matemática são universais. Acredita o modernista que estas idéias básicas e processos lógicos podem ser ensinados mesmo às crianças. Aprendendo-os, os estudantes acharão a matemática mais compreensível e mais significativa. Êles irão obter, pelo menos, alguma familiaridade com o moderno raciocínio matemático.

O "College Board Program"

O mais proeminente dos projetos para modernização do ensino da matemática no "high-school" é o da Comissão de Matemática do "College Entrance Examination Board". Êste grupo organizado em 1955 está preparando uma considerável revisão dos cursos do "high-school". Em virtude de a Comissão representar muitos pontos de vista e de esperar exercer uma influência quase imediata em tôdas as escolas do país, seu programa é relativamente conservador. Ela se propõe a mudar a apresentação e o espírito do curso de álgebra, sem alterar substancialmente o conteúdo. Está revisando consideràvelmente o curso de geometria. Pretende fazer certas modificações na trigonometria e introduzir alguns cursos inteiramente novos no currículo do "high-school".

A álgebra, como a geometria, pode ser encarada como um sistema dedutivo-abstrato. E' construída a partir de um conjunto de noções primitivas não definidas e de um certo número de axiomas. Destas noções [illegible] axiomas tôdas as outras regras e fatos podem ser dedu[illegible] "high-school" lógicos .A Comissão não se propõe a [illegible]

simplesmente um exercício de educação-abstrata, mas acredita que o estudante deve ser levado a perceber a natureza dedutiva da álgebra, a aprender o que são os axiomas e como são utilizados para provar algumas proposições elementares. As habilidades necessárias à manipulação de expressões algébricas serão mais fàcilmente aprendidas, quando as razões que estão por detrás de tais manipulações forem compreendidas. Quais as noções "primitivas" em álgebra? São as noções de número e operações, tais como adição e multiplicação. Os axiomas anàlogamente são conceitos simples, tão simples que parece quase desnecessário serem estabelecidos. Se a e b são números, então $a+b$ é um número. Se $a=b$ e $c=d$, então $a+c = b+d$ (Se iguais são somados a iguais, as somas são iguais). Então temos a propriedade "comutativa", $a+b=b+a$, $aXb = bXa$; a propriedade "associativa", $(a+b) + c = a + (b+c)$, e a propriedade "distributiva", $a\,(b+c) = ab+ac$.

Embora isto pareça trivialidade, essas propriedades formam um sistema matemático que está presente em tôdas as manipulações familiares da álgebra elementar e fornece um alicerce para demonstrações de ulteriores proposições. Consideremos o teorema: a soma de dois números pares é sempre par. Para iniciar a prova, a paridade é definida da seguinte forma: um número n é par, se e sòmente se existe outro número p, tal que $n=2p$. O problema é: dados dois números pares, a e b, provar que $a+b$ é par. Pela definição de paridade, podemos dizer que $a=2x$ e $b=2y$. Pelo axioma da adição de elementos iguais, $a+b=2x+2y$. Pela propriedade distributiva $2x+2y = 2(x+y)$. Desde que x e y são números ,então $x+y$ é também um número. Portanto $2(x+y)$ é um número par, donde $a+b$ é par.

Pode parecer ao leigo que um calouro do "high-school" não se sentirá nem atraído, nem tão pouco edificado por tal prova laboriosa de uma afirmação aparentemente evidente. Há matemáticos que sustentam o mesmo ponto de vista. Porém os proponentes argumentam que, em um curso bem apresentado, exercícios desta espécie podem tornar-se uma curiosa aventura no reino do rigor matemático.

A Teoria dos Conjuntos

Uma feição predominante que distingue a "nova" álgebra é seu uso da teoria dos conjuntos, um dos mais poderosos instrumentos da matemática moderna. Um conjunto é simplesmente um grupo ou coleção. Os livros de uma estante, as pessoas de uma sala, as letras do alfabeto, os números 1, 2, 3, 4 e 5 — cada um dêsses grupos é exemplo de um conjunto. O conjunto pode ter apenas um elemento ou nenhum (nesse caso dizemos que é um conjunto "vazio"). Ou êle pode ser infinito, por exemplo, todos os pontos dentro de um círculo ou todos os inteiros positivos. Os matemáticos comumente representam um conjunto colocando seus elementos entre "chaves", por exemplo $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ Existe também uma taquigratia convencional para afirmações acêrca de conjuntos e seus elementos. Por exemplo, a afirmação que 4 é um membro do conjunto A é escrito $4 \in A$; que 6 não é um membro do conjunto é escrito 6 $\notin$ A. Para dizer que A é um subconjunto de B, escrevemos $A \subseteq B$ O conjunto vazio é indicado pelo símbolo "ϕ". A letra U representa o conjunto "universal" (ou suporte) — aquêle que abrange todos os elementos pertencentes a uma discussão particular; por exemplo, o conjunto universal da geometria plana consiste de todos os pontos do plano.

Essa linguagem não familiar pode parecer uma carga indevida a ser dada ao principiante em matemática, mas realmente com pouca prática, cêdo torna-se fácil de ler (consideràvelmente mais fácil do que o domínio da estenografia).

Para ilustrar operações com conjuntos, mencionarei apenas três. A reunião de dois conjuntos A e B (escrito AUB) é o conjunto formado de todos os elementos pertencentes a A, a B ou a ambos. Assim, a reunião de {1, 2, 3, 4,} e {2, 3, 4, 5} é {1, 2, 3, 4, 5}. A intersecção de dois conjuntos $(A \cap B)$ é o conjunto de todos os elementos que são comuns aos dois dados. Assim, a intersecção de {1, 2, 3, 4} e {2, 3, 4, 5} é {2, 3, 4}. Finalmente, o complemento de um subconjunto A (escrito $\bar{A}$) é o conjunto de todos os elementos do conjunto universal que não estão no subconjunto; exemplo, se o conjunto universal é {1, 2, 3, 4, 5} e o sub-conjunto é {2, 3} seu complemento é {1, 4, 5}. Estas idéias podem ser representadas num gráfico por simples figuras conhecidas como diagramas de Venn (Fig. 1).

A teoria dos conjuntos ajuda a pôr a descoberto a unidade das matemáticas. Tanto a álgebra como a geometria dizem respeito a conjuntos — a álgebra a conjuntos de números, a geometria a conjuntos de pontos. As operações especificas em ambos os campos podem ser consideradas exemplos das operações gerais sôbre conjuntos, tais como, reunião, intersecção, etc.

Vamos ver como o conceito de conjunto pode ajudar a esclarecer as noções de variável e de equação em álgebra. Foi recomendado pelo grupo do "College Board" que se ensinasse, antes de tudo, ao estudante, que a álgebra trabalha com conjuntos de números e relações entre os mesmos. Aprenderiam então que uma variável é simplesmente um nome geral para elementos de um conjunto. Como tal pode ser representada por uma letra. Por exemplo, se o conjunto é o conjunto de todos os números inteiros, então x pode ser qualquer número inteiro e $x+1$, pode ser $1+1$, $2+1$ ou $3+1$, etc. Além disso ,uma equação é uma proposição que relaciona elementos de um conjunto. Ela pode ser verdadeira ou falsa: $3+2=5$ é verdadeira, $3+2=6$ é falsa mas ambas são proposições. Uma proposição contendo letra, tal como $x+2=5$, não é verdadeira nem falsa até que x seja substi-

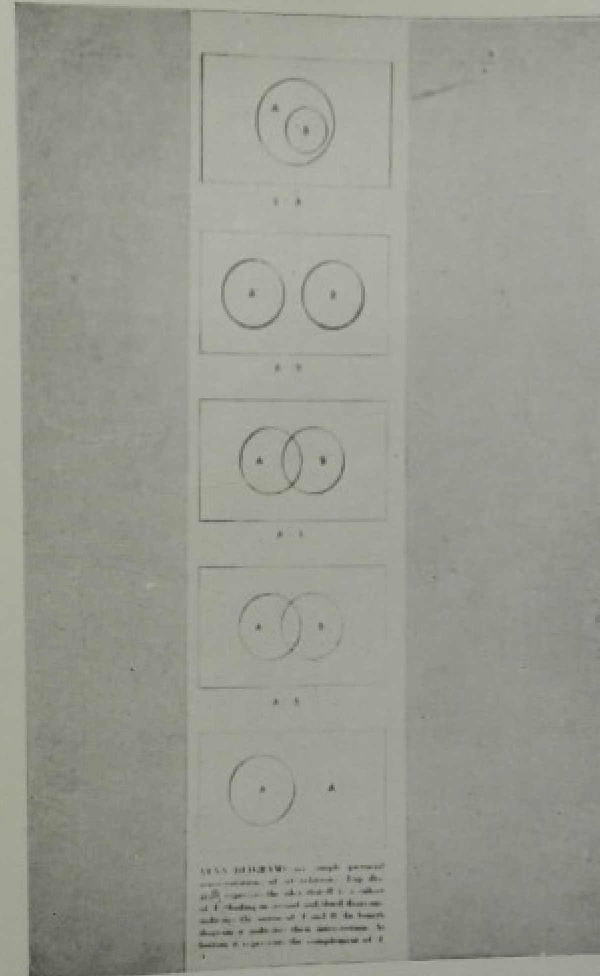

Fig. 1 — **Os Diagramas de Venn** são simples representações das relações entre conjuntos.

O primeiro exprime a idéia de que B é subconjunto de A. A parte sombreada nos segundo e terceiro diagramas indica a reunião de A e B; no quarto indica sua intersecção e, finalmente, no último diagrama representa o complemento de A, indicado por A.—

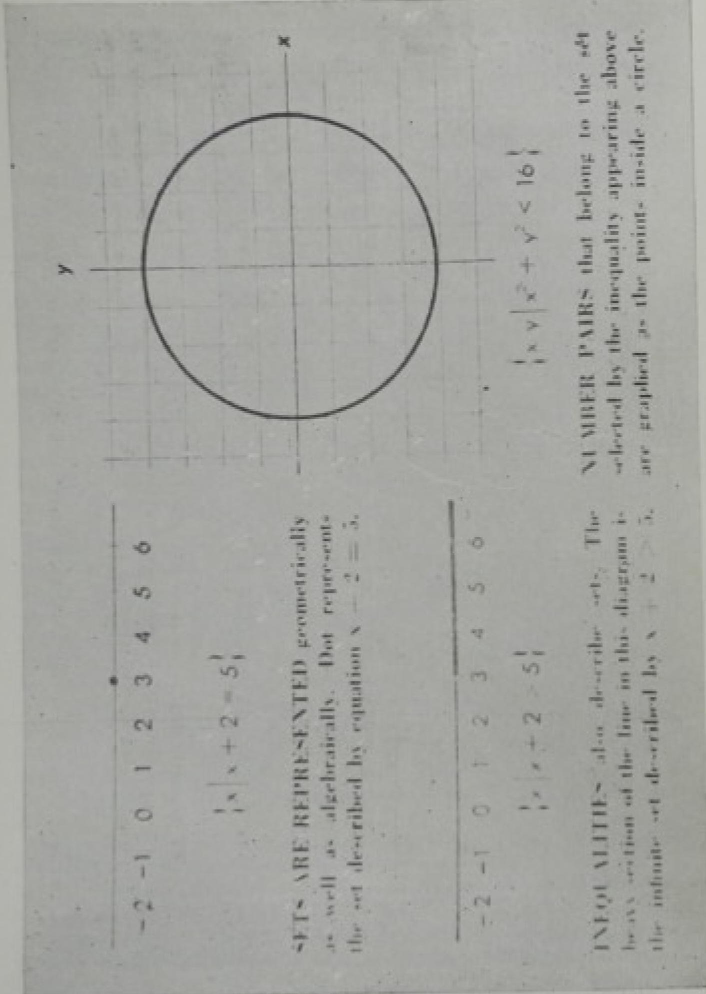

Fig. 2 — **Os conjuntos são representados Algébrica e Geomètricamente**. À esquerda, acima, o ponto representa o conjunto descrito pela equação: $x + 2 = 5$. Abaixo, a parte carregada da reta representa o conjunto infinito descrito pela desigualdade $x + 2 > 5$.
À direita, os pares de números que pertencem ao conjunto selecionado pela desigualdade indicada estão representados pelos pontos internos do círculo.

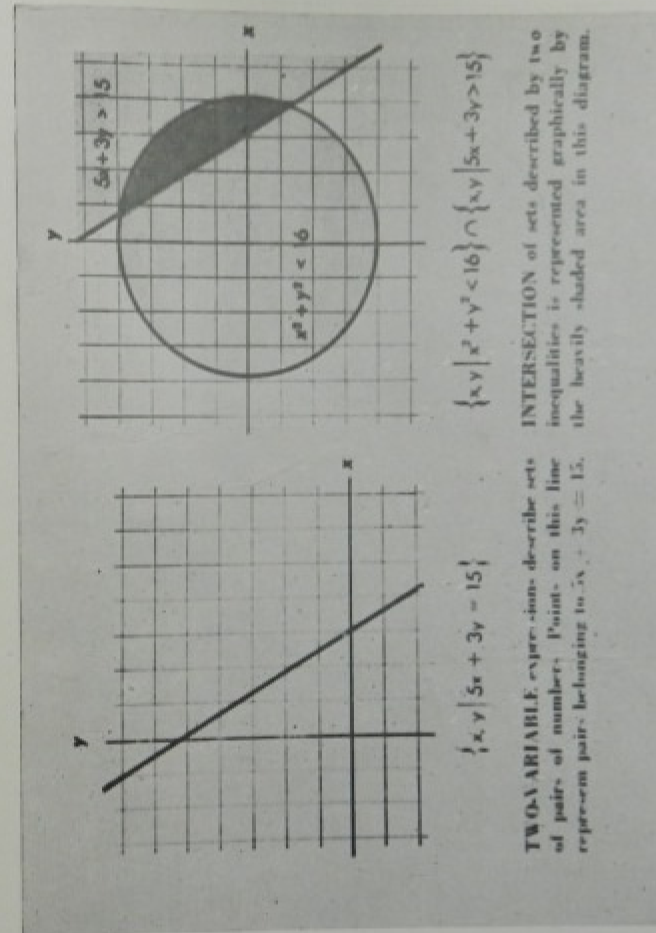

Fig. 3 — À esquerda, expressões de duas variáveis descrevem conjuntos de pares de números. Pontos nesta reta representam pares que satisfazem à equação $5X + 3Y = 15$
À direita, a intersecção dos conjuntos descritos pelas duas desigualdades é representada gràficamente pela área de sombra carregada no diagrama.

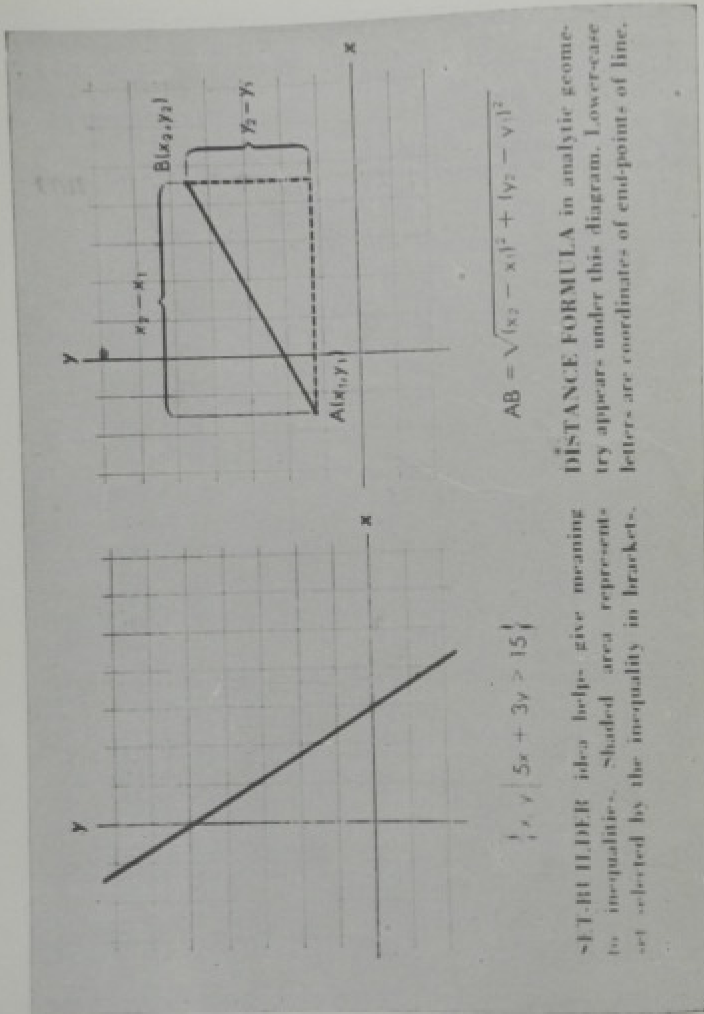

Fig. 4 — À esquerda, a idéia de SET-BUILDER ajuda a dar significado às desigualdades. A área sombreada à direita da reta que corta os eixos da abicissa e ordenada representa o conjunto selecionado pela desigualdade entre chaves.
À direita, a fórmula analítica da distância aparece no diagrama. As letras sob o radicando são as coordenadas dos pontos extremos do segmento.

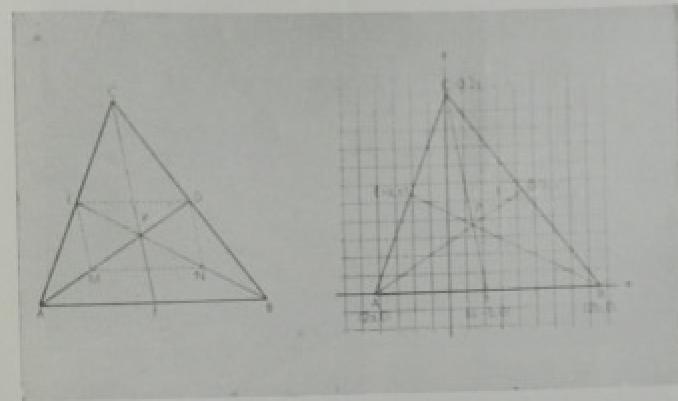

Fig. 5 — Seja P a intersecção de AD e BE.
Tomemos M e N, pontos médios de AP e BP respectivamente. ED é paralelo a AB e igual à sua metade. MN é paralelo a AB e igual à sua metade.

$\therefore$ ED é paralelo e igual a MN

$\therefore$ MP = DP e EP = NP

Mas AM = MP e BN = NP

$\therefore$ P está a 2/3 da distância que vai de A a D e da que vai de B a E.

Fazendo a mesma construção, usando AD e CF, pode-se demonstrar que sua intersecção está a 2/3 da distância de A a D.

$\therefore$ As medianas se interseptam em um ponto que as divide na razão 2 : 1.

Q.E.D.

As equações das retas AD, BE e CF são, respectivamente:

$$cx + (2a-b)y = 2ac$$
$$cx + (2b-a)y = 2bc$$
$$2cx + (a+b)y = 2ac + 2bc$$

Êste sistema de três equações tem a solução:

$$x = \frac{2}{3}(a+b), \quad y = \frac{2}{3}c$$

$\therefore$ as medianas possuem um ponto comum.

Substituindo as coordenadas na fórmula que dá a distância de dois pontos, obtemos:

AP = 2PD, BP = 2PE e CP = 2PF

Q.E.D.

A PROVA DO TEOREMA (As medianas de um triângulo se encontram em um ponto que as divide na razão 2:1) é feita pelo método euclidiano (esquerda) e pela geometria analítica (direita).

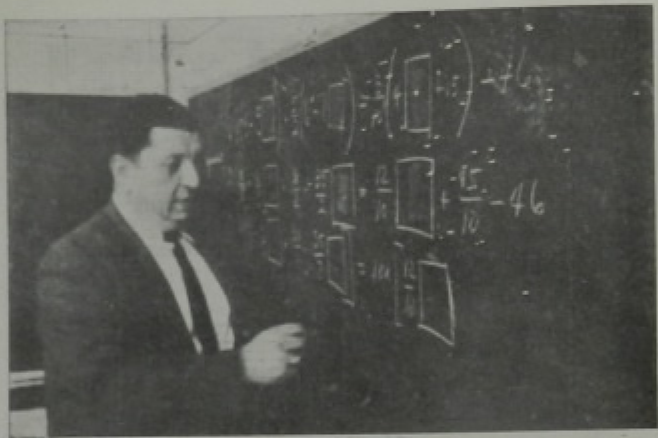

Foto 1 — O prof. Max Beberman, diretor do projeto de ILLINOIS, ensinando classe do primeiro ano do "high-school" a resolve equações. Os quadrados no quadro negro representam as incógnitas.

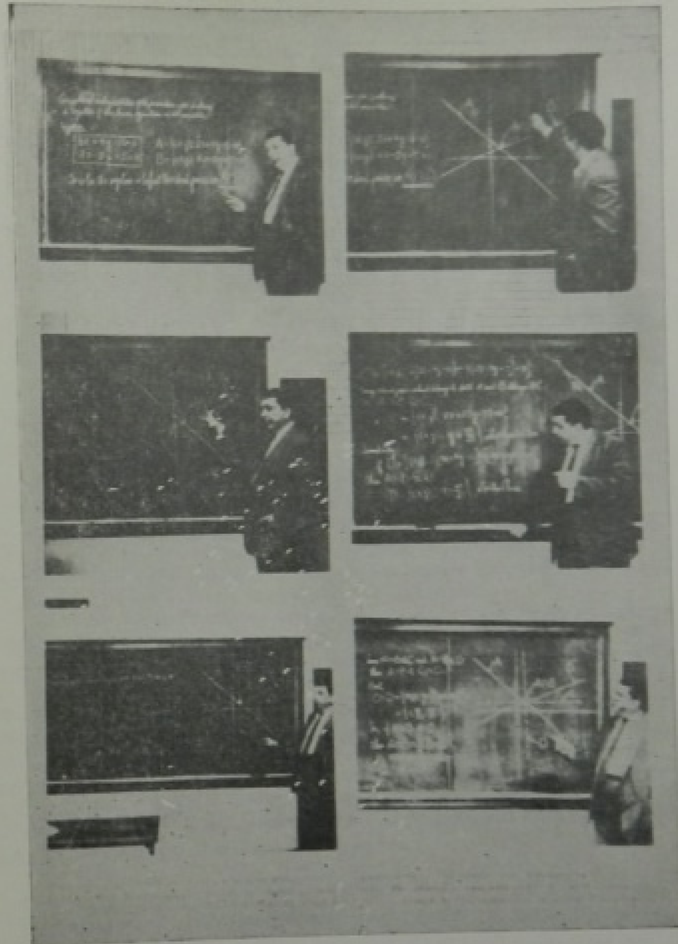

Foto 2 — **Ideias da Teoria dos Conjuntos** desempenham um papel importante no curso de ILLINOIS. Nesta sequência BEBERMAN as aplica na resolução de equações simultâneas. No material do quadro negro A e B representam os conjuntos de pares de números pertencentes às duas equações. A solução é sua intersecção. C e D (abaixo) são os conjuntos formados pela eliminação de x e y respectivamente.

tuído por um elemento do conjunto apropriado. No começo do curso os estudantes deveriam aprender também a trabalhar com desigualdades, usando os símbolos $>$ (maior do que) e $<$ (menor do que).

Qualquer relação pode ser olhada como um critério para selecionar um certo subconjunto do conjunto universal dos números em questão; na terminologia da teoria dos conjuntos êla é chamada "set builden". Assim, se o conjunto universal é formado pelos números reais, a relação $x+2=5$ seleciona o conjunto $\{3\}$, ou $x+2>5$ seleciona o conjunto de todos os números maiores do que três. O conjunto selecionado por uma relação é conhecido como seu conjunto solução.

O mesmo conceito se aplica a pares de números e à equação de duas incógnitas, convencionalmente representada por x e y. Tal equação naturalmente tem mais de uma solução. Por exemplo, o conjunto selecionado pela equação $5x+3y=15$, inclui pares, tais como: (0,5), (3,0), (1,31/3). Qualquer pessoa familiarizada com sistema de coordenadas reconhece isto imediatamente como o casamento da álgebra com a geometria: um par de variáveis numéricas (x,y) pode definir quer um ponto, quer uma reta. (ver Fig. 2 ,Fig. 3 e Fig. 4). Pensando em têrmos de conjunto, um estudante pode ver que a solução de duas equações algébricas simultâneas é uma questão de achar a intersecção dos dois conjuntos soluções. A solução é o par de números que é comum a ambos os conjuntos.

A noção de conjunto é particularmente útil no trato com desigualdades. O significado de uma expressão tal como $5x+3y>15$ fica mais claro quando ela é considerada como a seletora daqueles pares de números (ou pontos) que no gráfico jazem acima da reta $5x+3y=15$. A expressão $x^2+y^2<16$ seleciona os pontos internos ao círculo $x^2+y^2=16$. "Resolver" êste par de desigualdades simultâneamente é novamente uma questão de achar a intersecção de seus conjuntos soluções (ver Fig. 3). Todos são meros exemplos para ilustrar a maneira de apresentação do grupo de College Board na sua proposta revisão do curso de álgebra. Excessão feita à ênfase que empresta às desigualdades, ela não muda substancialmente o conteúdo do curso, porém apresenta-o sob um novo aspecto.

A Nova Geometria

Em geometria o grupo propõe mudar radicalmente o curso. Em primeiro lugar, quer eliminar a maior parte das proposições e teoremas que se pedem ao estudante para demonstrar, sob o fundamento de que os estudantes já terão adquirido algum treino do raciocínio dedutivo através do curso de álgebra e de que ainda muitas provas euclideanas podem ser mais fàcilmente demonstradas por outros métodos.

A "College Board Commission" reduziria os teoremas a serem provados a cêrca de 12, em lugar da centena que hoje aparece nos livros de geometria. Êstes 12 dariam uma amostra de como os fatos da geometria podem ser deduzidos de um conjunto de axiomas. Dêles os estudantes desenvolveriam teoremas e fatos acêrca de triângulos, retas paralelas, triângulos semelhantes e finalmente o teorema de Pitágoras (um triângulo é retângulo se e sòmente se o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos dois outros lados). A razão para se parar no teorema de Pitágoras é que êste possibilita um desvio para a geometria analítica, isto é, solução algébrica de problemas geométricos com ajuda de gráficos. O método analítico mostra o uso de conjuntos soluções na geometria (vide Fig. 5).

A comissão não se propõe a abandonar inteiramente as provas euclideanas clássicas. Alguns problemas são de fato mais fàcilmente resolviveis pelo processo euclideano do que pelo método analítico. Os estudantes seriam encorajados a descobrir e usar o meio mais eficiente para atacar o problema.

As poucas supressões recomendadas reduziriam o tempo necessário para o desenvolvimento do curso de geometria plana a menos de um ano, pelo que a Comissão propõe utilizar o tempo poupado com a inclusão de um pouco de geometria espacial. O estudante seria incentivado a pensar em três dimensões assim como em duas, e estudaria os importantes teoremas da geometria no espaço, de um ponto de vista principalmente intuitivo.

No terceiro ano, depois da álgebra e geometria elementar, o curso de matemática seria orientado para trabalhos mais avançados de álgebra e um pouco de trigonometria, principalmente quanto ao comportamento das funções trigonométricas (seno, coseno, etc.) e sua aplicação a problemas tais como estudo de vetores, no lugar de resolução de triângulos. Para o quarto ano a Comissão ofereceria aos estudantes que continuassem estudando matemática .dois semestres de curso. O primeiro chamado análise elementar, utilizaria a idéia de relação e função sob um ponto de vista mais avançado. Investigaria as propriedades dos polinômios (expressões algébricas contendo vários têrmos) e de funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas. A idéia de limite seria introduzida de uma maneira simples e os estudantes aprederiam um pouco de cálculo, isto é, como diferenciar e integrar polinômios. No segundo semestre do ano teriam um curso de probabilidade e inferência estatística. Aqui o estudante aprenderia a trabalhar com conjuntos de medições ou observações por intermédio da estatística. Ele aprenderia como a matemática é aplicada aos processos governados pelo acaso. O curso demonstraria alguns dos métodos de verificar o grau de confiança de um programa de amostra e de se avaliar o significado estatístico dos resultados. A Comissão salienta que êsse material está provàvelmente mais intimamente relacionado com a vida diária das pessoas do que qualquer outra parte da matemática. Além disso, a estatística e a probabilidade tornaram-se importantíssimas para a ciência e a indústria. Pelo fato de que muitos dos tópicos do curso de probabilidade nunca terem sido ensinados em "high-school" a Comissão preparou um

novo livro de texto para êste curso, o qual já está sendo usado em algumas escolas. O livro apresenta o assunto primeiramente de uma maneira intuitiva e depois de um mais formal ponto de vista matemático. A teoria dos conjuntos é extremamente usada no curso. Achei o texto compreensível e interessante e o material não mais difícil do que muitos dos tradicionais tópicos da matemática avançada do "high-school".

A Comissão gostaria que o "high-school" oferecesse, para os estudantes que tomam parte no "College Board's Advanced Placement Program", um curso de cálculo e geometria analítica — curso usual dado ao principiante do "College".

Tal é em resumo o programa da "College Board Comission" para reformar o ensino da matemática nos "high-school" do país. Ela está insistindo junto às escolas e professôres para que tentem tôdas ou parte destas idéias, na esperança de que as mesmas sejam testadas a fim de se verificar quais serão aproveitadas. Confia que, uma vez introduzidos os estudantes na beleza da matemática moderna, a matéria adquirirá uma nova vitalidade nas escolas.

Embora o programa da Comissão seja apenas uma proposta, òbviamente o "College Board" está em condições de exercer uma poderosa influência sôbre os "high-school" através de seus exames e sua íntima relação com colégios proeminentes. A Comissão já começou a alcançar professôres em todo o país por meio de publicações descrevendo fases de seu trabalho e irá publicar o seu relatório completo êste outono. Muito provàvelmente suas sugestões irão provocar o aparecimento de livros didáticos radicalmente novos nos próximos anos.

O Programa de Illinois

Vamos agora a uma nova apresentação — o programa da Universidade de Illinois, que atraiu alguma atenção pública pelos jornais. Os espíritos condutores dêste movimento são Max Beberman, um professor na "University High School" de Illinois, e Herbert E. Vaughan, matemático da faculdade da Universidade. Eles organizaram um programa que vai tão longe em sentido modernista que faz parecer quase antiquado o programa da "College Board Comission".

As experiências em Illinois começaram na "University High School", adjunta ao "University's College of Education", em 1952. Cresceu até um programa de quatro anos que está sendo tentado êste ano em uma dezena de "high-school's" de Illinois, Missouri e Massachusetts, e está sendo ensinado também a empregados interessados da Polaroid Corporation em Cambridge, Mass. Com o financiamento da Carnegie Corporation, o grupo de Illinois produziu uma série completa de livros didáticos e manuais de ensino e traz professôres à Universidade onde permanecem até um ano observando e doutrinando-se nos seus cursos.

A apresentação da matemática por meio de generalizações abstratas é a verdadeira pedra angular do programa de Illinois — não apenas um exercício de raciocínio ou uma amostra de alguns dos fundamentos da matemática. Alunos do nono grau começam seu estudo de álgebra com um conjunto de axiomas a partir dos quais procedem à prova de tôdas as regras que devem dominar. Os axiomas, chamados "princípios de aritmética", incluem coisas tais como definição de zero (qualquer número vêzes zero é igual à zero), e definição do número 1 (qualquer número vêzes 1 é igual a êle mesmo) e naturalmente as leis comutativa, associativa e distributiva. As crianças são conduzidas ao seu rigoroso programa por fáceis estágios, às vêzes em forma de história. Por exemplo, êles aprendem que se deve distinguir um número do símbolo usado para representá-lo, por meio de uma correspondência entre Ed Brown, um estudante em "Zabranchburg High" e Paul Moore, um amigo de correspondência no Alaska. Os dois amigos caíram no hábito singular de se escreverem acêrca de aritmética. O jovem Paul apresenta a proposição razoável de que tirando 2 de 21 resta 1. Ed Fica assombrado: isto é brincadeira ou Paul descobriu alguma coisa? O texto resolve a situação explicando que "21" é um nome para o número, ao qual não se deve apegar muito literalmente. Mostra ainda que o número 21 pode ser descrito por outros nomes como, por exemplo, "$20+1$" ou "7×3". Os alunos vão aprendendo que uma letra pode representar um número qualquer (quer dizer, é uma "variável" ou "guarda" o lugar de um número) O próprio professor se utiliza de quadrados para representar números desconhecidos em uma equação (ver fotografia n.º 1). Uma parte substancial do primeiro ano do curso é dedicada à assimilação deste ponto. O texto observa que uma letra desempenha numa afirmação matemática o mesmo papel de um pronome na linguagem ordinária. A proposição "$x+2=6$" é semelhante à sentença "Ele foi presidente dos Estados Unidos". Não é verdadeira nem falsa até que seja colocado um nome no lugar devido. O professor chama às letras da álgebra "pronúmeros", e usa êste têrmo em todo o curso.

Uma boa parte do primeiro ano é também dedicada à introdução e exploração da idéia de conjunto. Em virtude da longa introdução dos pronúmeros e cuidadoso desenvolvimento do conceito de conjunto, o curso abrange menor extensão do que o tradicional curso de "álgebra elementar".

No segundo ano o programa é vigorosamente modernizado. Este curso é nada menos do que "um desenvolvimento da geometria euclideana, que é tão rigorosa quanto, por exemplo, aquela devido a Hilbert, e entretanto é, acreditamos, acessível aos estudantes que dominaram o primeiro curso". Ele procura tornar clara a natureza da geometria como uma teoria puramente dedutiva que, em si mesmo, tem sòmente estrutura lógica e é vazia de conteúdo até que seja introduzida uma interpretação específica.

Consideremos, por exemplo, três postulados que são necessários para deduzir os teoremas da geometria euclideana. São êles: 1) toda reta é um conjunto de pontos e contém pelo menos dois pontos; 2) Existem três pontos que não pertencem à mesma reta; 3) Dois pontos quaisquer estão contidos em uma reta. O professor assinala que as palavras "ponto" e "reta" podem ser interpretadas de várias maneiras. O modêlo principal usado no curso é o plano de números, onde pontos e retas são definidos em têrmos de pares de números (x,y). Com êste modêlo o curso desenvolve todos os postulados necessários da geometria plana. Entretanto, para salientar que o sistema dedutivo pode ter várias interpretações concretas, o professor examina vários modelos, inclusive um em que "ponto" representa negociante e reta representa sociedade. Aqui os postulados se aplicam exatamente como na geometria. Suponhamos que haja três negociantes, A, B e C, cada um dos quais faz com os outros um negócio de dois participantes. Cada sociedade (AB, AC e BC) é um conjunto de negociantes e contém pelo menos dois membros (postulado1). Nenhuma das sociedades contém os três negociantes (postulado 2). Quaisquer dois negociantes estão contidos em uma sociedade (postulado 3).

Posso tornar mais claro como o professor e as crianças tratam dêsses assuntos, citando o registro de uma discussão em que se reviam sistemas de postulados, entre Beberman e uma brilhante classe.

Professor: "De onde provêm êstes postulados?"

George: "Do plano de números".

Professor: "Que você quer dizer com isso?"

George: "Eles são propriedades do plano de números"

Professor: "Se estamos falando de plano de números, quando dizemos, por exemplo, que cada reta é um conjunto de pontos e contém pelo menos dois pontos, é esta proposição verdadeira ou falsa?"

George: "Verdadeira".

Professor: "Mas suponhamos que não estejamos falando de plano de números. Então que podemos dizer dêstes postulados?"

George: "Falsos"

Côro-: "Não"

Jim: "E' necessário dar antes um significado específico à "reta" e "ponto" para depois verificar se são verdadeiros ou falsos"

Professor: "Que é "modêlo" de um sistema de postulado?"

Jane: "E' alguma coisa que tem as propriedades expressas pelos postulados ou que satisfaz aos postulados".

Professor: "Suponhamos que haja várias interpretações para os postulados. Vocês podem estar falando de plano de números, ou de negociantes e corporações, ou de presidente de classe e comitês. E então?"

George: "Bem, quando tentamos deduzir um teorema dos postulados podemos escolher um modêlo e em alguns casos descobrir que não é possível deduzí-lo porque é falso para êsse modêlo"

Com a orientação de um professor como Beberman é viva a discussão em uma classe acima da média. Um folheto publicado pelo grupo de Illinois afirma: "Os estudantes do "hig-school" têm um profundo interêsse por **idéias.** Gostam de trabalhar com abstrações. A despeito da moda corrente de assinalar a utilidade da matemática em várias profissões, a maior parte do estudantes do "high-school" não é estimulada particularmente por tal "campanha de venda". O objetivo profissional é remoto demais para chegar a interessar a um estudante do nono grau. Êle quer saber como a matemática se adapta ao seu próprio mundo. E, felizmente, êsse mundo é cheio de fantasia e abstrações. Assim os estudantes ficam interessados na matemática porque esta lhes dá rápido acesso a uma espécie de aventura que os atrai e enche de satisfação".

O curso é francamente experimental. Algum material provou exigir muito tempo ou ser demasiado pesado para ser ensinado. Presentemente o grupo de Illinois está considerando se deve transferir alguns dos desenvolvimentos rigorosos para o quarto ano. Porém Beberman parte do princípio de que não sabemos o que se pode ensinar às crianças antes de ser tentado.

E' ainda muito cêdo para dizer o que os alunos eventualmente aproveitam do curso; o primeiro grupo está apenas completando o programa de quatro anos êste trimestre. Porém, visitei a sala de aula da "University High School" e pude atestar que os estudantes parecem carregar sua carga com ânimo e mesmo entusiasmo. A questão é: como iria tal curso quando aplicado em geral? Alguns críticos estão de acôrdo em que dê resultado favorável com um professor prendado e brilhantes alunos, mas duvidam fortemente que a classe ou professor medianos obtenham êxito.

As Críticas

Há os que acreditam que tôda a apresentação dos modernistas é fundamentalmente errônea. Um dos principais críticos é Morris Kline, professor no Instituto de Ciências Matemáticas da Universidade de Nova York, escritor popular de livros sôbre o moderno desenvolvimento da matemática. Ele duvida que a apresentação abstrata torne os jovens interessados em matemática.

Kline argumenta que nós não abstraímos enquanto não soubermos do que estamos fazendo abstração. O matemático não chega a uma compreensão do aspecto geral abstrato da matemática antes de ter examinado muitos de seus ramos particulares. Por que, então, se há de esperar que um estudante o faça? Além disso, Kline acredita que não há lugar para a teoria dos conjuntos num currículo elementar: suas aplicações podem ser apenas triviais, e mesmo sua importância na matemática avançada é superestimada.

Kline e outros sustentam que a maneira de despertar maior interêsse na matemática é tornar seu ensino mais concreto ao invés de mais abstrato, de modo a relacioná-la mais vivamente com problemas da vida real. Kline introduziria idéias matemáticas por meio de simples experiências físicas e exemplos tirados de campos tais como a música e outras artes. Um defensor ativo desta espécie de apresentação é o matemático e professor inglês W. W. Sawyer, agora na Universidade de Illinois. Sawyer criou um certo número de artifícios simples que usa para ilustrar idéias matemáticas.

Parece, porém, que os anti-modernistas estão em causa perdida. Não estão organizados nem formularam um programa determinado. Enquanto isso o movimento modernista se propaga rápidamente. No nível do "College" alguns colégios adotaram um novo curso para principiantes, elaborado por um comitê da "Mathematical Association of America". O curso consiste de um semestre de cálculo e um semestre de tópicos modernos coletivamente chamados de matemática "discreta". Trata de conjuntos não contínuos (isto é, de números ou elementos discretos). Êste ramo da teoria dos conjuntos está encontrando crescente aplicação na ciência, particularmente na ciência social, que trata tipicamente com grupos de pessoas, unidades de produtos, etc. Mesmo a física é discreta ao nível atômico e a álgebra matricial, um dos tópicos da matemática discreta, é fundamental à teoria quântica. O novo curso do "College" tenciona dar aos estudantes de artes liberais uma amostra de algumas idéias matemáticas modernas e também familiarizar os alunos de ciências sociais com técnicas matemáticas. O texto, agora em bastante uso, inclui lógica simbólica, probabilidade, álgebra vetorial e matricial, a teoria dos jogos e programa linear.

Os Professôres

O ensino da matemática nos "high-school" e escolas elementares do país, naturalmente não mudará da noite para o dia. A maior parte dos professôres não está preparada para ensinar quer seja o moderno material, quer seja qualquer novo esquema. Entretanto, presentemente, a grande expansão dos cursos de verão para professôres e cursos internos financiados pela National Science Foundation, corporações privadas e outras, constitui uma oportunidade de ouro. Neste verão haverá 10 institutos universitários em matemática, todos ensinando principalmente os modernos pontos. Cêrca de 40 outras universidades estão oferecendo cursos tanto em matemática, como em ciência e a maior parte delas está impondo a moderna apresentação. Parece provável que a maior parte das "high-schools" dos EEUU terão derivado mais ou menos na direção da moderna apresentação, dentro dos próximos 5 anos aproximadamente.

Finalmente devo mencionar um novo projeto que poderá trazer, com o correr do tempo, o mais forte impacto no ensino da matemática nos EEUU do que qualquer programa discutido neste artigo. E' o "School Mathematics Study Committee", estabelecido pelo departamento de matemática da universidade de Yale e moldado de acôrdo com o "Physical Science Study Committee" no "Massachusetts Institute of Technology" descrito nesta revista do último mês. (Ver "The Teaching of Elementary Physics by Walter C. Michels, April). O novo grupo irá contar com grande número de matemáticos e professôres para examinar o ensino da matemática no "high-school" e "junior high-school", e muito provàvelmente irá apresentar um programa de elaboração de livros didáticos e outros materiais de ensino, conforme está fazendo o grupo de ciência. Este verão o Committee manterá uma conferência para rever as presentes experiências e todo o programa. O que irá resultar são meras suposições, mas pela capacidade humana e apoio financeiro poderá avançar mais do que qualquer outro grupo que procura revitalizar o ensino da matemática.

(Tradução por Dante Barbosa Bonfim, Dirceu Douglas Salvetti e Clodoaldo Pette do original em inglês "The Teaching of Elementary Mathematics", *in* "Scientific American", May, 1958. Permissão especial de tradução e publicação para a Revista de Pedagogia).