

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA E DE
ALIMENTOS**

Élton Fontana

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DA CONVECÇÃO DE
RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE ESTRATIFICADA**

Florianópolis

2014

Élton Fontana

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DA CONVECÇÃO DE
RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE ESTRATIFICADA**

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Química.

Orientadora: Profa. Dra. Selene Maria de Arruda Guelli Ulson de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Erasmo Mancusi

Coorientador: Prof. Dr. Antônio Augusto Ulson de Souza

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

É. Fontana, Éliton Fontana

Análise de Estabilidade da Convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille Estratificada / Éliton Fontana ; orientadora, Selene Maria de Arruda Guelli Ulson de Souza ; coorientador, Erasmo Mancusi ; coorientador, Antônio Augusto Ulson de Souza. - Florianópolis, SC, 2014.
235 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.

Inclui referências

1. Engenharia Química. 2. Estabilidade hidrodinâmica. 3. Convecção natural. 4. Fluidodinâmica computacional. 5. Análise linear . I. Maria Arruda Guelli Ulson de Souza, Selene. II. Mancusi, Erasmo. III Augusto Ulson de Souza, Antônio. IV. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.
V. Título.

Éliton Fontana

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DA CONVECÇÃO DE
RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE ESTRATIFICADA**

Esta Tese de Doutorado foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia Química”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.

Florianópolis, 04 de julho 2014.

Prof. Dr. Ricardo Antônio Francisco Machado
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Selene Maria de Arruda Guelli Ulson de Souza
Presidente

Prof. Dr. Reinaldo Giudici

Prof. Dr. Adriano da Silva

Prof. Dr. José Alexandre Borges Valle

Profa. Dra. Cíntia Soares

Profa. Dra. Claudia Sayer

To Claudia, for all the moments we have shared.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio e dedicação que tenho recebido ao longo de todos estes anos;

À minha orientadora, Profa. Dra. Selene Maria de Arruda Guelli Ulson de Souza, e aos co-orientadores Prof. Dr. Antônio Augusto Ulson de Souza e Prof. Dr. Erasmo Mancusi, pela oportunidade e pela liberdade de trabalho oferecidas;

À minha companheira, Claudia, por todo o carinho, atenção e amizade dedicados todos os dias;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro através do processo 143152/2011-4;

Por último, agradeço em especial a todos aqueles que de uma forma ou outra partilharam seu conhecimento e sabedoria comigo, sejam estes mestres, professores ou amigos.

RESUMO

A presença de escoamento horizontal em sistemas onde existe um gradiente vertical de temperatura que pode induzir a convecção natural pode ser vista em diversas situações, tanto em aplicações tecnológicas quanto em fenômenos naturais. Apesar disto, a influência do escoamento cisalhante sobre os limites onde a convecção natural ocorre ainda é pouco conhecida, especialmente em meios multifásicos. O objetivo do presente trabalho é avaliar a estabilidade de um sistema composto por dois fluidos imiscíveis sobrepostos sujeitos a um gradiente de pressão horizontal, que induz o escoamento nesta direção, e um gradiente de temperatura vertical que pode levar à formação de células convectivas quando a diferença de temperatura entre as paredes horizontais atingir um valor crítico. Este modelo contempla diferentes fenômenos presentes sistemas mais simples cujas características de estabilidade já são conhecidas e apresentadas na literatura, sendo por isso chamado de convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada. Duas diferentes abordagens numéricas foram empregadas para avaliar a estabilidade este sistema. Primeiramente, foi utilizada uma análise linear onde a dependência das variáveis ao longo do tempo e da direção horizontal é modelada através de modos normais associados a uma determinada perturbação. O comportamento dinâmico desta perturbação define a estabilidade do sistema: se a amplitude da perturbação diminuir com o tempo o sistema será estável, caso contrário este será instável. A segunda forma de análise foi através da simulação numérica direta das equações governantes com o uso de técnicas de fluidodinâmica computacional. Os resultados obtidos com as duas metodologias mostram-se de modo geral em acordo, indicando respostas semelhantes à variação em determinados parâmetros. Devido ao grande número de fenômenos que afetam a estabilidade deste sistema, a análise foi restrita a uma estreita faixa para os parâmetros governantes. Em especial, foram determinados os valores mínimos para o número de Rayleigh necessários para que a convecção natural ocorra e as possíveis formas que o sistema pode ser organizar neste caso. Diferentes modos de acoplamento entre as camadas foram identificados e caracterizados, bem como foram definidos os intervalos onde cada modo surge como mais instável. A competição entre diferentes modos de instabilidade pode alterar de forma significativa os perfis de velocidade e temperatura obtidos, podendo mesmo levar à casos onde o sistema continuamente oscila entre diferentes formas de

convecção natural. A indução de um escoamento paralelo, no entanto, inibe a formação destes estados oscilatórios por afetar de forma distinta os diferentes modos. A presença de uma interface separando as duas camadas representa um problema adicional, pois esta pode levar à formação de células convectivas devido unicamente ao efeito termocapilar ou pode ser deformada em função do campo de velocidades e causar variações locais nas espessuras das camadas. Além disso, os resultados obtidos com a simulação direta utilizando o método do volume de fluido mostram que quando o valor de Rayleigh é consideravelmente superior ao valor crítico e a diferença de densidade entre as camadas não for suficiente para estabilizar a interface, a aproximação em termo dos modos normais não é mais válida e estruturas muito complexas podem surgir. Apesar das dificuldades matemáticas e numéricas inerentes à modelagem desta forma de escoamento, a associação da análise linear com a simulação numérica direta mostrou-se apropriada para a análise de estabilidade da convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada e os resultados obtidos foram suficientes para esclarecer muitas das características deste problema, permitindo um melhor entendimento da origem e interação dos diversos modos de instabilidade.

Palavras-chave: Estabilidade hidrodinâmica, convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada, análise linear modal, fluidodinâmica computacional.

ABSTRACT

The presence of horizontal flow in systems where a vertical temperature gradient can lead to heat transfer by natural convection is widely observed in several technological applications, such as co-extrusion process and oil-water flows, as well as can occur in natural phenomena such as atmospheric flow and mantle convection. Despite the high relevance to both theoretical and practical applications, the influence of the shear flow on the onset of natural convection is poorly understood, particularly in multiphase systems. The main objective of the study herein reported is to investigate the stability of a system where two superposed immiscible fluids are subject to a pressure gradient inducing horizontal flow and a vertical temperature gradient that induce heat transfer by natural convection if the temperature difference between the horizontal walls reaches a critical value. This system comprehends several characteristics present in other classical flow structures, whose stability features are well known, and therefore it is named as Stratified Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection. Two different numerical approaches were used to analyze this system. The first one was a linear stability analysis where normal modes were used to express the temporal dependence and spatial distribution along the horizontal direction of the field variables. Each normal mode is related to a disturbance and the dynamic behavior of this disturbance defines the system stability. Whenever the disturbance amplitude decreases along the time and eventually disappears the system will be stable, otherwise it will be unstable. The second numerical approach used was the direct numerical simulation of the governing equation through computational fluid dynamics techniques. The results obtained with both methodologies are in good agreement, showing similar responses to the change in certain parameters. Due to the large number of phenomena governing the system stability, this study focuses in a restricted part of the parameters spectrum, selected mostly to allow the determination of the minimum value that the Rayleigh number must achieve in order for natural convection to be possible and the different ways in which the system can self-organize when this happens. Different coupling modes between the bottom and top layers were identified and characterized, as well as the intervals where each mode appears as the most unstable. Competition between different instability modes can change the velocity and temperature profiles significantly and can even lead to situations where the

system continuously oscillate between two different natural convection patterns. However, the presence of shear flow inhibits the development of oscillatory states, even at very low Reynolds numbers. This happens because the shear flow affects each instability mode in a different way and the equilibrium between the forces needed to keep the oscillatory state is broken. The existence of an interface separating the system in two layers offers an additional problem. The interface itself can induce the formation of convective cells due to the thermocapillary effect or can be deformed as a result of the velocity field, generating local changes in the layers depth. Moreover, results provided by direct numerical simulation using the volume of fluid method to capture the interface position shows that when the Rayleigh number is substantially greater than the critical value and the density difference between the layers is not enough to stabilize the interface, the approximation given by the normal modes is no more accurate and complex structures with a high interface deformation can appear. Despite the difficulties associated with the numerical and mathematical modeling of this flow structure, the approach adopted in the present study proved to be appropriate to analyze the stability of the stratified Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection and the acquired results were adequate to elucidate many of the flow stability properties, allowing a better understanding about the origin and interaction of several instability modes.

Keywords: Hydrodynamic Stability, Stratified Rayleigh-Bénard-Poiseuille Convection, Modal Linear Analysis, Computational Fluid Dynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplos de instabilidades hidrodinâmicas.	29
Figura 2	Convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille Estratificada.	31
Figura 3	Modos convectivos no escoamento de Rayleigh - Bénard - Poiseuille. Fonte: Nicolas, Luijckx e Platten (2000)	39
Figura 4	Modos convectivos para um canal com razão de aspecto infinita. Fonte: (NICOLAS; LUIJKX; PLATTEN, 2000).	40
Figura 5	Evolução temporal dos diferentes tipos de estabilidade. Fonte: (GRANDJEAN, 2008)	41
Figura 6	Ciclo periódico para $Re = 1.0$ e $Ra = 2000$. Fonte: Cheng, Lir e Lin (2002).	43
Figura 7	Transição entre diferentes padrões de escoamento. Fonte: Ouazzani, Platten e Mojtabi (1990).	44
Figura 8	Exemplo de instabilidade na interface de dois líquidos imiscíveis causada pela diferença de viscosidade. Fonte: Charru (2011).	48
Figura 9	Diferentes padrões de escoamento de um filme líquido em um plano inclinado. Fonte: Kerst, Judat e Schlünder (2000) ..	51
Figura 10	Exemplos de defeitos nos padrões de rolos na convecção de Rayleigh-Bénard.	57
Figura 11	Instabilidade devido ao efeito Marangoni. Adaptado de: (BIRIKH et al., 2005).	60
Figura 12	Formas de acoplamento entre as duas camadas. Fonte: Andereck et al. (1998)	61
Figura 13	Exemplo de um diagrama de bifurcação mostrando a presença de um estado oscilatório. Adaptado de Rasenat, Busse e Rehberg (1989)	62
Figura 14	Vista lateral (plano XY) da configuração geométrica utilizada.	65
Figura 15	Deformação da interface em coordenadas cartesianas. Adaptado de: Leal (2007)	77
Figura 16	Polinômios de Chebyshev the ordem $k = 0, \dots, 4$	82
Figura 17	Pontos de Gauss-Lobatto como projeção de pontos equidistantes em um círculo. Fonte: Trefethen (2000)	82
Figura 18	Esparsidade das matrizes dos operadores lineares.	84

Figura 19	Curvas de estabilidade para a convecção de Rayleigh-Bénard em duas camadas idênticas.	87
Figura 20	Exemplo de estado oscilatório para a convecção de Rayleigh-Bénard em duas camadas.	88
Figura 21	Influência do número de Marangoni na estabilidade da convecção RB em duas camadas.	90
Figura 22	Espectro dos autovalores da equação de Orr-Sommerfeld considerando uma e duas camadas.	91
Figura 23	Influência de Re no início da convecção natural para duas camadas idênticas para $Pr = 1$ e $\beta = 0$	93
Figura 24	Autofunções associadas ao ponto crítico para $Re = 0$ e $Pr = 1$, considerando camadas idênticas.	94
Figura 25	Autofunções associadas ao ponto crítico para $Re = 10$ e $Pr = 1$, considerando camadas idênticas.	95
Figura 26	Parâmetros críticos considerando camadas idênticas e $\beta = 0$	96
Figura 27	Taxa de crescimento máxima para $Pr = 1$	98
Figura 28	Autofunções avaliadas para $Re = 0$, $Pr = 1$ e $Ra = 1100.68$ para diferentes valores de α	99
Figura 29	Taxa de crescimento para $Re = 0$ e $Ra = Ra_c$	100
Figura 30	Taxa de crescimento para $\beta = 0$. (AT = acoplamento térmico, AV = acoplamento viscoso).	101
Figura 31	Influência de d_0 no início da convecção natural em camadas com propriedades físicas idênticas para $Pr = 1$ e $Re = 0$	102
Figura 32	Autofunções avaliadas no ponto crítico para diferentes valores de d_0 , considerando $Re = 0$ e $Pr = 1$	103
Figura 33	Parâmetros críticos em função de d_0 considerando camadas idênticas para $Pr = 1$	104
Figura 34	Efeito da espessura relativa d_0 no início do processo convectivo para $Re = 0$ e $Pr = 1$	105
Figura 35	Autofunções associadas à velocidade vertical para os três modos mais instáveis, considerando $Re = 0$ e $Pr = 1$	106
Figura 36	Autofunções associadas ao desvio da temperatura para os três modos mais instáveis, considerando $Re = 0$ e $Pr = 1$	107
Figura 37	Parâmetros críticos considerando camadas idênticas para $d_0 = 0.8$	109
Figura 38	Parâmetros críticos considerando camadas idênticas para	

$d_0 = 0.4$	109
Figura 39 Interação entre empuxo e termocapilaridade. Adaptado de Nepomnyashchy, Simanovskii e Legros (2012).....	112
Figura 40 Curvas de estabilidade para convecção de Bénard-Marangoni, considerando $Ra = Re = 0$, $Pr = 1$ e $d_0 < 1$	113
Figura 41 Autofunções associadas a Ma_c para $Ra = Re = 0$ e $Pr = 1$	114
Figura 42 Análise de estabilidade para convecção de Bénard-Marangoni, considerando $Ra = Re = 0$, $Pr = 1$ e $d_0 > 1$	115
Figura 43 Autofunções relacionadas ao comportamento oscilatório observado para $d_0 = 2$, onde T representa o período total da oscilação.	116
Figura 44 Curvas de estabilidade para diversos valores de Re , considerando $Ra = 0$ e $Pr = 1$	117
Figura 45 Influência do número de Marangoni no início da convecção natural para $Re = 0$, $Pr = 1$ e $d_0 < 1$	118
Figura 46 Influência de Ma nas autofunções para $Re = 0$, $Pr = 1$ e $d_0 = 0.8$	119
Figura 47 Influência do número de Reynolds nas curvas de estabilidade para $Ma = 0$ e $Ma = 250$, considerando $Pr = 1$ e $d_0 = 0.8$.	120
Figura 48 Curvas de estabilidade para diversos valores de Ma , considerando $Pr = 1$, $Re = 0$ e $d_0 = 1.25$	121
Figura 49 Autofunções para baixos valores de Ma , considerando $Pr = 1$, $Re = 0$ e $d_0 = 1.25$	122
Figura 50 Autofunções para $Ma = 150$, considerando $Pr = 1$, $Re = 0$ e $d_0 = 1.25$	123
Figura 51 Rayleigh crítico em função de Ma para diferentes valores de Re , considerando $d_0 = 1.25$ e $Pr = 1$	124
Figura 52 Bifurcação de Hopf observada próximo ao ponto $Ma = 114$	125
Figura 53 Rayleigh crítico em função de Ma para diferentes valores de Pr , considerando $d_0 = 1.25$ e $Re = 5$	126
Figura 54 Curvas de estabilidade para diferentes valores de Ra_ρ , considerando $Re = Ma = 0$ e $Pr = d_0 = 1$	130
Figura 55 Autofunções para $k_0 = 10$, considerando $Re = Ma = 0$ e $Pr = d_0 = 1$	131
Figura 56 Rayleigh crítico em função de Ra_ρ para diferentes valores de Re , considerando $d_0 = 1$, $Pr = 1$ e $k_0 = 2$	132

Figura 57 Número de Marangoni crítico em função de Ra_ρ para diferentes valores de Re , considerando $d_0 = 0.8$ e $Pr = 1$	134
Figura 58 Número de Marangoni crítico em função de Ra_ρ para diferentes valores de Re , considerando $d_0 = 2$ e $Pr = 1$	136
Figura 59 Curvas de estabilidade para $d_0 = 0.8$, $Re = 20$ e $Pr = 1$.	137
Figura 60 Autofunções para $Ma = 750$, $d_0 = 0.8$ e diferentes valores de Ra_ρ , considerando $Re = 20$, $Pr = 1$	137
Figura 61 Número de Rayleigh crítico em função de Ra_ρ para diferentes valores de Ma , considerando $d_0 = 1.25$ e $Pr = 1$	139
Figura 62 Efeito da deformação da interface sobre as autofunções para $d_0 = 1.25$ e diferentes valores de Ma , $Re = 20$ e $Pr = 1$	140
Figura 63 Curvas de estabilidade para o sistema 1 considerando diferentes valores de $d_0 < 1$	143
Figura 64 Autofunções para $d_0 = 1$ e $d_0 = 0.9$, considerando $Re = 0$	144
Figura 65 Autofunções para os dois primeiros modos para $d_0 = 8$ e $\alpha = 3$	145
Figura 66 Autofunções ao longo do estado oscilatório para $d_0 = 8$ e $\alpha = 2$	145
Figura 67 Curvas de estabilidade (sistema 1) para diferentes valores de Re e $d_0 = 0.7$	146
Figura 68 Autofunções para $d_0 = 0.7$ em diversas etapas do estado oscilatório.....	148
Figura 69 Autofunções para $d_0 = 0.7$ e diferentes valores de Re	148
Figura 70 Curvas de estabilidade para $Re = 0$ e diferentes valores de d_0	150
Figura 71 Autofunções para $Re = 0$ e diferentes valores de d_0	152
Figura 72 Curvas de estabilidade (sistema 2) para diferentes valores de Re e $d_0 = 0.7$	152
Figura 73 Curvas de estabilidade para números de onda próximos à bifurcação de Hopf (EO = estado oscilatório).....	153
Figura 74 Autofunções associadas ao primeiro e ao segundo modo para $\alpha = 2.5$ e $Re = 0$	154
Figura 75 Autofunções associadas ao estado oscilatório para $\alpha = 1$, $Re = 0$ e $d_0 = 0.6$	155
Figura 76 Geometria bidimensional empregada para simulação numérica direta.....	158

Figura 77 Representação da interface utilizando o esquema de reconstrução geométrica.	161
Figura 78 Comparação entre resultados obtidos com simulação numérica direta (pontos) e com análise de estabilidade linear (curva).	165
Figura 79 Exemplo de distribuição bidimensional das principais variáveis para $d_0 = 0.8$ e $Ra = 1516$	167
Figura 80 Comparação entre as autofunções obtidas com análise linear (LSA) e perfis obtidos com simulação numérica direta (DNS) para $d_0 = 0.8$	169
Figura 81 Comparação entre as autofunções obtidas com análise linear (LSA) e perfis obtidos com simulação numérica direta (DNS) para diferentes valores de d_0	170
Figura 82 Comparação entre resultados obtidos com simulação direta (pontos) e com análise linear (curva) para diferentes valores de Re	171
Figura 83 Comparação entre as autofunções obtidas com análise linear (LSA) e perfis obtidos com simulação numérica direta (DNS) para diferentes valores de Re	172
Figura 84 Comparação entre resultados obtidos com simulação direta (pontos) e com análise linear (curva). Os pontos indicados como ID representam estados instáveis com deformação da interface.	174
Figura 85 Comparação entre perfis obtidos com as diferentes formas de análise para $d_0 = 1$ e $Ra_p < 10^5$	175
Figura 86 Perfis da velocidade v em diferentes instantes de tempo para $d_0 = 1$ e $Ra = 1246$	177
Figura 87 Perfis de desvio de temperatura θ em diferentes instantes de tempo para $d_0 = 1$ e $Ra = 1246$	178
Figura 88 Evolução temporal do número de Nusselt e valores máximos de ϕ e θ para $d_0 = 1$ e $Ra = 1246$	179
Figura 89 Evolução temporal do número de Nusselt e valores máximos de ϕ e θ para $d_0 = 1$ e diferentes valores de Ra	181
Figura 90 Perfis de velocidade vertical v para $Ra \approx 1500$ e diferentes valores de d_0	183
Figura 91 Perfis de desvio de temperatura θ para $Ra \approx 1500$ e diferentes valores de d_0	184
Figura 92 Perfis de desvio da temperatura para $d_0 = 1$ e $Ra > Ra_c$	185

Figura 93	Variação no número de Nusselt local e na velocidade u na interface em função de x para $d_0 = 1$ e diferentes valores de Ra .	185
Figura 94	Influência da deformação da interface nos campos de velocidade e temperatura para $Ra_\rho = 10^3$.	187
Figura 95	Número de Nusselt máximo para diferentes valores de Ra_ρ .	189
Figura 96	Posição da interface e velocidade vertical para $Ra_\rho \approx 1700$ e $Ra \approx 4000$ mostrando o desenvolvimento de uma instabilidade semelhante à de Rayleigh-Taylor.	190
Figura 97	Variação temporal do número de Nusselt máximo e da velocidade u máxima para $Re = 5$ e diferentes valores de Ra .	193
Figura 98	Variação temporal do número de Nusselt máximo e da velocidade u máxima para $Ra \approx 1386$ e diferentes valores de Re .	194
Figura 99	Evolução temporal do número de Nusselt local para $Re = 5$ e $Ra = 1243$.	195
Figura 100	Evolução temporal do número de Nusselt local para $Re = 10$ e $Ra = 1338$.	197
Figura 101	Número de Nusselt local para $Re = 5$ e diferentes valores de Ra .	199
Figura 102	Número de Nusselt local para $Re = 10$ e diferentes valores de Ra .	200
Figura 103	Perfis de velocidade vertical para $Ra \approx 1481$.	200
Figura 104	Perfis de desvio da temperatura para $Ra \approx 1481$.	201
Figura 105	Valores máximos para Nu e velocidade horizontal em função de Ra .	202
Figura 106	Relação entre número de Rayleigh e número de Nusselt máximo.	203
Figura 107	Escoamento de dois fluidos entre placas planas.	221
Figura 108	Exemplo de escoamento base para $d_0 = 1$ e $m = 5$.	223

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros críticos para a convecção de Rayleigh-Bénard. Fonte: Pellew e Southwell (1940).....	55
Tabela 2	Número de Rayleigh crítico para convecção RBP em uma única camada para $Pr = 1$. Comparação com resultados apresentados por: [1] (MULLER, 1990), [2] (FUJIMURA; KELLY, 1988), [3] (JEROME, 2011).....	86
Tabela 3	Dependência dos parâmetros críticos com Pr para um estado com comportamento oscilatório. Comparação com os valores apresentados por: [1] (RASENAT; BUSSE; REHBERG, 1989).....	89
Tabela 4	Parâmetros críticos em função do número de onda para a equação de Orr-Sommerfeld. Comparação com resultados de: [1] (CHEN; JOSEPH, 1973).....	91
Tabela 5	Parâmetros adimensionais referentes ao sistema óleo de silicone/glicerol.....	142
Tabela 6	Parâmetros adimensionais referentes ao sistema ciclohexano/água.....	149
Tabela 7	Parâmetros adimensionais empregados para simulação numérica direta.....	163

LISTA DE ABREVIATURAS

CFD	Fluidodinâmica Computacional
CVD	Deposição Química de Vapor
DNS	Simulação Numérica Direta
LSA	Análise de Estabilidade Linear
RB	Rayleigh-Bénard
RBP	Rayleigh-Bénard-Poiseuille
RBPE	Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada
TS	Tollmien-Schlichting

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto latino

a_i	Fração volumétrica da fase i
B	Razão de aspecto
d_i	Espessura da camada i [m]
g	Aceleração da gravidade [$m s^{-2}$]
h_c	Coeficiente de troca térmica [$W m^{-2} K^{-1}$]
k	Número de onda combinado ($k^2 = \alpha^2 + \beta^2$)
k_i	Condutividade térmica do fluido i [$W m^{-1} K^{-1}$]
\mathbf{k}_i	Curvatura da interface
m	Razão entre a viscosidade dinâmica das camadas 2 e 1
Ma	Número de Marangoni
Nu	Número de Nusselt
P	Pressão [Pa]
\wp	Autofunção associada a P
Pr	Número de Prandtl
Ra	Número de Rayleigh
Ra_ρ	Número de Rayleigh baseado em ρ_0
Re	Número de Reynolds
S	Tensão interfacial adimensional
S_M	Termo fonte na equação de Navier-Stokes
t	Tempo [s]
T	Temperatura [K]
T_C	Temperatura da parede superior [K]
T_H	Temperatura da parede inferior [K]
T_k	Polinômio de Chebyshev de ordem k
u	Velocidade na direção x [$m s^{-1}$]
U_0	Velocidade da interface não perturbada na direção x [$m s^{-1}$]
\vec{v}	Vetor velocidade (u, v, w) [$m s^{-1}$]
v	Velocidade na direção y [$m s^{-1}$]
x, y, z	Coordenadas cartesianas
w	Velocidade na direção z [$m s^{-1}$]

Alfabeto Grego

α	Número de onda na direção x
β	Número de onda na direção z
β_i	Expansividade térmica do fluido i [K^{-1}]
γ	Tensão interfacial [$N m^{-1}$]
δ	Fator infinitesimal
η	Deformação da interface [m]
η_0	Autofunção associada a η
θ	Autofunção associada a T
κ_i	Difusividade térmica do fluido i [$m^2 s^{-1}$]
μ_i	Viscosidade dinâmica do fluido i [$kg m^{-1} s^{-1}$]
ν_i	Viscosidade cinemática do fluido i [$m^2 s^{-1}$]
ρ_i	Densidade do fluido i [$kg m^{-3}$]
σ	Tensão normal [Pa]
τ	Tensão de cisalhamento [Pa]
ϕ_1	Autofunção associada a u
$\phi_2 = \phi$	Autofunção associada a v
ϕ_3	Autofunção associada a z
ψ	Gradiente de temperatura estático [$K m^{-1}$]
ω	Velocidade de onda/autovalor

Subscritos

0	Razão entre o valor avaliado na camada 2 e na camada 1
1	Camada de fluido inferior
2	Camada de fluido superior
B	Estado base
c	Valor crítico
EV	Autovalor
OB	Oberbeck-Boussinesq
OS	Orr-Sommerfeld
ref	Valor de referência

Sobrescritos

\tilde{x}	Perturbação da variável x
\hat{x}	Forma adimensional de \tilde{x}
\bar{x}	Coefficientes associados à discretização de x em função de T_k

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	27
1.1 ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA	27
1.2 CONVECÇÃO DE RAYLEIGH - BÉNARD - POISEUILLE ESTRATIFICADA	31
1.3 OBJETIVOS	34
2 CONVECÇÃO MISTA E ESCOAMENTO ESTRATI- FICADO: CARACTERÍSTICAS GERAIS E ANÁLISE DE ESTABILIDADE	37
2.1 CONVECÇÃO DE RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE EM UMA ÚNICA CAMADA	37
2.2 ESCOAMENTO DE POISEUILLE ESTRATIFICADO	44
2.2.1 Instabilidade de Rayleigh-Taylor	45
2.2.2 Instabilidade de Miles	46
2.2.3 Instabilidade Induzida por Perturbações Tangenciais	47
2.2.3.1 Instabilidade Causada pela Viscosidade	47
2.2.3.2 Instabilidade Causada pela Gravidade	50
2.2.4 Instabilidade por Cisalhamento	52
2.2.5 Modo Interno	53
2.3 CONVECÇÃO DE RAYLEIGH-BÉNARD ESTRATIFICADA	54
2.3.1 Análise de Estabilidade da Convecção RB em uma Única Camada	54
2.3.2 Análise de Estabilidade da Convecção RB em Di- versas Camadas	58
3 EQUAÇÕES DE TRANSPORTE E ANÁLISE LINEAR MODAL	65
3.1 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO	66
3.2 EQUAÇÕES PERTURBADAS	69
3.3 ANÁLISE MODAL	72
3.3.1 Condição Cinemática	77
3.3.2 Condições de Contorno	79
3.4 MÉTODO PSEUDO ESPECTRAL DE CHEBYSHEV	80
4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR	85
4.1 ANÁLISE DE CASOS-LIMITE	85
4.2 CAMADAS COM PROPRIEDADES IDÊNTICAS	92
4.2.1 Taxa de Crescimento das Perturbações	97
4.2.2 Razão Entre as Espessuras das Camadas	101

4.3 EFEITOS INTERFACIAIS: INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE MARANGONI	110
4.3.1 Convecção de Bénard-Marangoni	111
4.3.2 Competição entre os Mecanismos de Instabilidade	117
4.3.2.1 Análise de Estabilidade para $d_0 > 1$	121
4.4 DEFORMAÇÃO DA INTERFACE (η)	128
4.4.1 $k_0 \neq 1$	129
4.4.2 $Ma \neq 0$	133
4.4.2.1 Convecção de Bénard-Marangoni Revista	133
4.4.2.2 Efeito da Deformação da Interface para $Ma \neq 0$	135
4.5 CAMADAS COM PROPRIEDADES DISTINTAS: ESTABILIDADE DE PARES DE FLUIDOS REAIS	140
4.5.1 Sistema 1: Óleo de Silicone/Glicerol	141
4.5.2 Sistema 2: Ciclohexano/Água	149
5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DIRETA	157
5.1 METODOLOGIA NUMÉRICA	157
5.1.1 Método do Volume de Fluido	160
5.1.2 Propriedades Físicas dos Fluidos	162
5.2 COMPARAÇÃO COM ANÁLISE DE ESTABILIDADE LÍNEAR	163
5.2.1 Razão entre Espessura das Camadas	164
5.2.2 Influência do Número de Reynolds	170
5.2.3 Deformação da Interface	173
5.3 DISTRIBUIÇÃO BIDIMENSIONAL E EVOLUÇÃO TEMPORAL	175
5.3.1 Convecção de Rayleigh-Bénard Estratificada	176
5.3.1.1 Evolução Temporal	176
5.3.1.2 Perfis Bidimensionais de Velocidade e Temperatura	182
5.3.1.3 Deformação da Interface	186
5.3.2 Convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille Estratificada	192
5.3.2.1 Evolução Temporal para $Re > 0$	192
5.3.2.2 Distribuição espacial para $Re > 0$	198
6 CONCLUSÃO	205
REFERÊNCIAS	209
ANEXO I: Obtenção do Escoamento Base	221
ANEXO II: Condições de Contorno em Função dos Modos Normais	225

1 INTRODUÇÃO

“No. 2: I suppose you’re wondering what you’re doing here.

No. 6: It had crossed my mind.”

The Prisoner, Arrival

O estudo do escoamento de fluidos ocupa um papel de destaque em muitos campos das ciências exatas desde a origem do método científico moderno. Hoje, melhor que no tempo de Newton e Bernoulli, sabemos que a dinâmica dos fluidos é responsável por definir como grande parte dos processos naturais ocorrem, desde o transporte no interior de organismos unicelulares até a formação de galáxias. No entanto, o estudo dos padrões de escoamento, mesmo em sistemas pouco complexos, não é uma tarefa simples, pois um padrão estabelecido costuma manter-se somente dentro de uma determinada faixa de valores para os parâmetros que o controlam.

Neste contexto originou-se o estudo da *estabilidade hidrodinâmica*, sendo este o ramo da mecânica dos fluidos que busca avaliar a resposta de sistemas hidrodinâmicos quando sujeitos a perturbações, ou seja, se um determinado padrão de escoamento é estável ou não. Os resultados obtidos com estes estudos são essenciais em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, engenharia, geofísica, meteorologia, oceanografia e astrofísica. Mesmo sendo as bases da análise de estabilidade hidrodinâmica conhecidas há mais de um século, a sua aplicação em problemas mais complexos só tornou-se viável nos últimos anos, pois a complexidade matemática envolvida levou à necessidade do uso de métodos computacionais mais poderosos. A seguir será apresentado um breve resumo do campo de estudo da estabilidade hidrodinâmica, bem como será descrito em detalhes o sistema avaliado neste trabalho.

1.1 ESTABILIDADE HIDRODINÂMICA

Segundo Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1961), as equações que governam um sistema hidrodinâmico muitas vezes permitem padrões de escoamento simples como soluções estacionárias, como, por exemplo, para o escoamento entre placas planas paralelas ou entre cilindros concêntricos. No entanto, mesmo que a solução satisfaça as equações de conservação, para que um escoamento seja fisicamente realizável é necessário que esta seja *estável*, isto é, seja capaz de manter-se

mesmo quando o sistema é sujeito a perturbações. Caso estas perturbações aumentem no espaço ou no tempo o sistema será *instável* e o padrão de escoamento não será mantido.

Os fundamentos da estabilidade hidrodinâmica foram reconhecidos e formulados em sua maioria no final do século XIX e início do século XX, em especial por Helmholtz, Kelvin, Rayleigh e Reynolds (DRAZIN, 2002). Estes e demais autores observaram a existência de determinadas formas de instabilidade que podem surgir em escoamentos relativamente simples, como no escoamento paralelo de fluidos sobrepostos e na convecção natural entre placas planas, podendo-se destacar os seguintes exemplos:

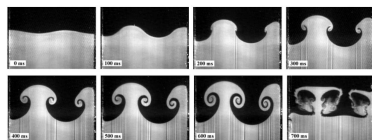
Instabilidade de Kelvin - Helmholtz: este tipo de instabilidade surge quando há uma diferença de velocidade entre duas camadas de fluidos. Dependendo das condições do escoamento, ondas com amplitude crescente podem surgir na interface entre as duas camadas (ver Figura 1(a)). Inicialmente, este sistema foi estudado por Helmholtz (1868) e Kelvin (1871) com o intuito de explicar a formação de ondas na superfície do oceano (DARIGOL, 2005), podendo, no entanto, esta instabilidade ser observada em diversas outras situações na natureza, como na formação de nuvens, na instabilidade de jatos livres, na formação da esteira de vórtices de Von-Kármán e em diversos eventos em escala planetária, como na corona solar e na atmosfera de planetas gigantes gasosos. É importante observar que a instabilidade de Kelvin - Helmholtz é uma instabilidade invíscida, ou seja, não depende de uma diferença de viscosidade entre as camadas (CHARRU, 2011).

Instabilidade de Rayleigh - Taylor: a instabilidade de Rayleigh - Taylor ocorre na interface entre dois fluidos de diferentes densidades quando um fluido é acelerado sobre o outro (CHANDRASEKHAR, 1961). Isto ocorre, por exemplo, quando em um sistema sujeito à ação da gravidade um fluido mais denso sobrepõe um fluido menos denso (ver Fig. 1(b)). Assim como a instabilidade de Kelvin - Helmholtz, a instabilidade de Rayleigh - Taylor não depende de uma diferença de viscosidade entre os fluidos, sendo dependente basicamente da diferença entre as densidades dos fluidos (usualmente mensurada através do número de Atwood, uma relação adimensional entre as densidades), da tensão superficial e da aceleração da gravidade. Conforme demonstrado por Charru (CHARRU, 2011), a tensão superficial causa um efeito estabilizador da interface, sendo que mesmo quando um fluido mais denso

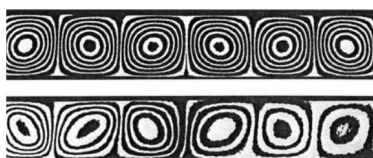
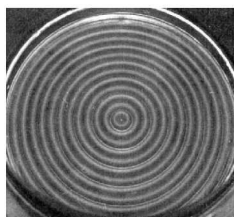
sobrepôr um menos denso pode-se obter um sistema estável, em especial para perturbações com grande número de onda. A instabilidade de Rayleigh - Taylor pode ser observada em diversas aplicações tecnológicas, por exemplo em reatores de fusão por confinamento inercial e sistema envolvendo mudança de fase e combustão (WANG; LI, 2005), bem como em fenômenos naturais, notavelmente durante a expansão de supernovas, onde uma camada interna explode formando um casca densa que se expande através do meio circum-estelar menos denso (RIBEYRE et al., 2007).



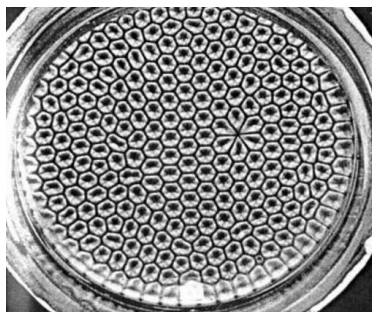
(a) Instabilidade de Kelvin - Helmholtz na interface entre dois líquidos (DYKE, 1982)



(b) Evolução temporal da instabilidade de Rayleigh - Taylor (SAMIMY et al., 2003)



(c) Instabilidade de Rayleigh - Bénard em um recipiente circular (imagem superior) e entre placas planas (DYKE, 1982)



(d) Células hexagonais formadas na instabilidade de Bénard - Marangoni (DYKE, 1982).

Figura 1: Exemplos de instabilidades hidrodinâmicas.

Instabilidade de Rayleigh - Bénard: diferentemente das instabilidades mencionadas anteriormente, que estão relacionadas somente à transferência de quantidade de movimento entre camadas de fluidos, a instabilidade de Rayleigh - Bénard está associada à va-

riação de temperatura ao longo de um meio fluido. Considere, por exemplo, um fluido confinado entre duas superfícies horizontais onde a temperatura da superfície inferior é maior que a temperatura da superfície superior. Se essa diferença de temperatura for suficientemente pequena, a transferência de calor irá ocorrer basicamente por condução, originando um perfil de temperatura linear ao longo do fluido. No entanto, devido ao coeficiente de expansão térmica, o fluido com uma maior temperatura (próximo à superfície inferior) irá possuir uma menor densidade que o fluido com menor temperatura. Quando a diferença de temperatura entre as superfícies atingir um valor crítico, o sistema irá se tornar instável e a estratificação de densidade irá originar a movimentação do fluido na forma de uma célula de convecção (ver Figura 1(c)), sendo este o fenômeno conhecido como instabilidade de Rayleigh - Bénard (CHARRU, 2011). A partir deste momento a transferência de calor irá ocorrer também por convecção. Este tipo de instabilidade é possivelmente uma das mais frequentemente encontradas na natureza, podendo ser observada, por exemplo, na convecção do manto e atmosfera terrestre, além de possuir diversas aplicações na área de engenharia, como em trocadores de calor, processos de solidificação, reatores nucleares e sistemas de armazenamento de energia solar.

Instabilidade de Bénard - Marangoni: quando uma camada de fluido delimitada por uma superfície livre e uma superfície horizontal é aquecida à partir desta superfície horizontal, uma interessante forma de instabilidade, conhecida como instabilidade de Bénard - Marangoni, pode surgir. Normalmente, células de convecção hexagonais podem ser observadas no fluido (ver Figura 1(d)). Este fenômeno, também conhecido como efeito termocapilar, foi estudado por Bénard no início do século XX e apesar de semelhante à instabilidade de Rayleigh - Bénard, possui uma origem física distinta. Enquanto que a instabilidade de Rayleigh - Bénard é resultado de ação da força de empuxo, a instabilidade de Bénard - Marangoni resulta de gradientes de tensão interfacial devido a não-uniformidades de temperatura (CHARRU, 2011). Como exemplos onde este tipo de instabilidade pode surgir, pode-se citar sistemas que envolvem a evaporação de líquidos e sistemas de polimerização contendo surfactantes, sendo que neste último caso os gradientes de tensão interfacial são gerados por variações na concentração de surfactante (WEI, 2005).

Além dos exemplos anteriormente citados, muitas outras formas de instabilidade são de grande importância no estudo de sistemas físicos, porém não serão apresentadas aqui por não estarem diretamente relacionadas com o objeto de estudo deste trabalho.

1.2 CONVECÇÃO DE RAYLEIGH - BÉNARD - POISEUILLE ESTRATIFICADA

Como pode ser observado analisando-se os exemplos de instabilidades hidrodinâmicas citados anteriormente, o surgimento de estados instáveis está relacionado com determinadas características do escoamento, como a presença de gradientes de temperatura, separação entre diferentes camadas ou variação nas propriedades físicas do fluido. Assim sendo, um mesmo padrão de escoamento pode se tornar instável à partir de diferentes modos de instabilidade. No presente trabalho será avaliada a estabilidade da convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada (RBPE), sendo que este sistema representa um modelo de convecção mista em um meio estratificado confinado entre duas placas planas. Na Figura 2 pode ser visto um esquema da convecção RBPE.

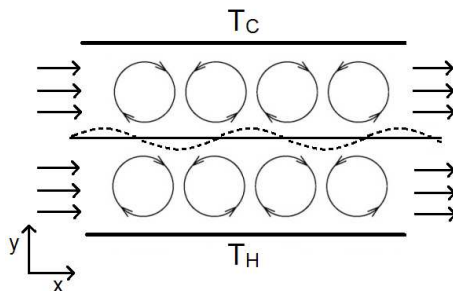


Figura 2: Convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille Estratificada.

Neste modelo de escoamento estão compreendidas diversas características comuns a outros padrões de escoamentos. Será considerado que a temperatura da placa inferior é maior que a da placa superior, configurando assim a estrutura básica da convecção de Rayleigh-Bénard. Além disso, será considerado a presença de um gradiente de pressão que induz ao deslocamento do fluido na direção horizontal, bem como no modelo de escoamento plano de Poiseuille. A presença de duas

fases imiscíveis completamente separadas por uma interface em um escoamento horizontal define o escoamento estratificado. Com isso, o sistema possui as características necessárias para apresentar todas as formas de instabilidade citadas anteriormente, dependendo dos valores utilizados para os parâmetros físicos e condições de contorno.

A convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada representa um sistema de grande interesse teórico, por relacionar várias características presentes em importantes formas de escoamento. Além disso, esta configuração pode ser observada em diversas aplicações nas áreas de engenharia e geofísica, como por exemplo:

Co-extrusão O processo de co-extrusão consiste na extrusão de diferentes polímeros simultaneamente em uma mesma matriz, de modo a se obter um produto com mais de uma camada. Os polímeros são primeiramente fundidos separadamente e, então, escoam através da matriz na forma de um escoamento estratificado. Além disso, variações na temperatura dos fluidos ocorrem devido à troca térmica com o meio externo, podendo induzir a convecção natural. Dependendo das condições do processo, a interface entre os dois fluidos pode apresentar ondulações devido à instabilidades no escoamento no interior da matriz. Essas oscilações causam irregularidades na espessura de cada camada no produto final, resultando em um produto com propriedades mecânicas e óticas alteradas (VALETTE et al., 2004; MAHDAOUI; LAURE; AGASSANT, 2013).

Reatores de Deposição Química de Vapor (CVD) Os reatores de CVD são exemplos clássicos de sistemas onde pode ser observado a convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille. A formação de recirculações induzidas por instabilidades no escoamento dos gases leva à não-uniformidade na deposição dos filmes e, portanto, deve ser evitada, sendo por isso de grande importância o estudo da estabilidade do escoamento no interior do reator para a otimização do processo (EVANS, 1993). Apesar de o escoamento estratificado não ser comum no interior de reatores de CVD, alguns modelos utilizam o conceito de diferentes camadas, definidas principalmente com base na variação da temperatura, onde as propriedades físicas e a taxa de reação variam de maneira distinta (CROON; GILING, 1990).

Escoamento de Óleos e Lubrificantes O escoamento estratificado, em especial envolvendo dois líquidos imiscíveis, tem recebido muita

atenção nas últimas décadas, principalmente devido à sua grande importância para a indústria do petróleo, onde muitas vezes é necessário transportar misturas de água e óleo por grandes distâncias em tubulações (CASTRO et al., 2012). Em muitos casos, pode-se adicionar um fluido lubrificante ao sistema para redução da pressão necessária para transportar o fluido. Conforme comentado por Gonzalez, Frigaard e Nouar (2004), existe uma tendência para que fluidos imiscíveis se arranjam de forma que o fluido com menor viscosidade se posicione em regiões com maior tensão de cisalhamento (usualmente próximo às paredes), Dessa forma, no escoamento de fluidos com alta viscosidade (por exemplo petróleo cru) é possível adicionar uma pequena quantidade de algum fluido imiscível menos viscoso que irá atuar como um lubrificante. Além disso, os fluidos envolvidos nestes processos costumam possuir comportamento não-Newtoniano, sendo a análise da variação de temperatura ao longo do escoamento muito importante na determinação das propriedades do sistema.

Escoamento Atmosférico A modelagem da atmosfera terrestre como sendo composta por uma série de camadas com densidade constante é uma aproximação utilizada com frequência, por exemplo, para o estudo do escoamento sobre montanhas íngremes. Conforme destacado por van Deldel (1992), este modo assume que: (i) o fluido é invíscido; (ii) a pressão total é igual à hidrostática; e, (iii) no interior de cada camada a densidade é constante e a velocidade varia somente na direção do escoamento. Além disso, padrões convectivos como os observados na convecção de Rayleigh-Bénard são muito comuns na atmosfera planetária (DE-CROIX; LIN; SCHOWALTER, 1997).

Convecção do Manto Terrestre Devido às altas temperaturas do núcleo terrestre e às menores temperaturas na superfície do planeta, o manto terrestre está em um contínuo movimento convectivo. Apesar de as velocidades associadas a este mecanismo serem de apenas alguns centímetros ao ano (OGAWA, 2008), os impactos sobre a formação geológica da Terra são gigantescos, causando uma série de atividades tectônicas, por exemplo, magmatismo e a tectônica de placas. Devido à complexidade da estrutura do manto terrestre e das largas escalas envolvidas, não se sabe se a convecção do manto é formada por uma única ou duas camadas sobrepostas, sendo, no entanto, o mais provável algo entre estes dois extremos (PUSTER; JORDAN, 1997). Além da força de em-

puxo gerada pela variação na densidade do manto, outras forças podem atuar sobre o movimento de convecção, como a força de Coriolis, devido ao movimento de rotação da Terra (HUGHES, 1973), e a força de Lorenz gerada pela interação com o campo magnético (JACOB, 1987).

1.3 OBJETIVOS

A estabilidade da convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille em meio estratificado está associada a um grande número de parâmetros, tanto relacionados com as propriedades físicas dos fluidos quanto com as características geométricas do sistema. Por este motivo, uma análise global da estabilidade hidrodinâmica para este caso não pode ser facilmente obtida, de modo que mesmo considerando sua importância do ponto de vista teórico e prático, este perfil de escoamento não foi alvo de praticamente nenhuma pesquisa nos últimos anos. Além do problema associado ao grande número de parâmetros, as equações governantes geram um sistema de equações diferenciais não-lineares acopladas relativamente complexo, o que limita a análise analítica do problema e exige o uso de métodos computacionais elaborados.

O objetivo do presente trabalho é avaliar a estabilidade da convecção RBP, em um meio composto por dois fluidos imiscíveis sobrepostos para diferentes valores dos parâmetros governantes. Inicialmente foi aplicada a técnica de análise linear modal, onde perturbações na forma de ondas são adicionais às equações de conservação linearizadas e a resposta do sistema é avaliada para perturbações com diversos números de onda. Esta técnica permite determinar os valores críticos para os parâmetros governantes a partir do qual as perturbações não serão mais amortecidas e um determinado escoamento base não será mais mantido. Além disso, a análise dos fenômenos associados permite delimitar quais os modos envolvidos na perda da estabilidade e qual é a influência de uma camada sobre a outra.

A presença de uma interface no interior do domínio aumenta significativamente a complexidade matemática envolvida na resolução das equações governantes, pois esta gera um acoplamento entre as equações nas duas camadas, além do que a própria posição da interface pode variar ao longo do tempo e do espaço. Espera-se que através da análise linear seja possível determinar quais parâmetros interferem no formato da interface, bem como quais os limites até onde pode-se considerar que

a interface permaneça inalterada, sendo esta uma condição desejada em diversas aplicações.

A principal vantagem da técnica de análise linear modal é que ela permite avaliar uma grande faixa de valores para os parâmetros governantes com um custo computacional relativamente baixo em comparação com as metodologias de resolução direta das equações governantes. No entanto, algumas restrições precisam ser impostas ao sistema, principalmente para que os termos não-lineares possam ser desprezados. Para avaliar alguns aspectos mais complexos do escoamento, a convecção RPBE também será examinada através de simulação numérica direta, em especial com o uso de técnicas de fluidodinâmica computacional. Esta abordagem permite resolver as equações governantes na sua forma completa, sem que as restrições da análise linear modal sejam impostas. Devido ao elevado gasto computacional associado à simulação direta, a sua aplicação será restrita a uma pequena faixa de valores para os parâmetros governantes, sendo que estes serão determinados com base nos resultados obtidos com a análise linear.

Através do uso destas duas abordagens numéricas, espera-se determinar as principais características relacionadas à convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada. A análise linear modal permite determinar os limites críticos onde o sistema permanece estável, enquanto que a simulação numérica direta permite a obtenção detalhada dos campos de velocidade e temperatura ao longo do tempo e do espaço. Em especial, será investigada a influência dos diversos parâmetros governantes no início da convecção natural, ou seja, quando as forças de empuxo geram a instabilidade.

Apesar de representar uma dificuldade para a análise de estabilidade para faixas muito grandes de condições físicas, a co-existência de diversos mecanismos de transferência de calor e quantidade de movimento gera uma excepcional oportunidade para avaliar a influência de um mecanismo sobre outro. Por exemplo, pretende-se determinar o impacto do escoamento cisalhante (quantificado pelo número de Reynolds) e do efeito termocapilar (quantificado pelo número de Marangoni) na diferença mínima de temperatura entre as paredes (associada ao número de Rayleigh) para que a transferência de calor por convecção inicie. Além disso, as características físicas do sistema em todos os casos serão investigadas, buscando-se explicar a forma como os campos de velocidade e temperatura nas duas camadas estão acoplados e como são alterados em função dos parâmetros governantes.

Quando determinados fenômenos presentes na convecção RPBE

são desconsiderados, o sistema recai em modelos de escoamento mais simples e que muitas vezes possuem as características associadas à sua estabilidade já estudadas. No presente trabalho estes sistemas são tratados como casos-limites e, sempre que possível, os resultados obtidos com o modelo proposto foram comparados com dados publicados na literatura. Os principais casos-limite obtidos são a convecção RBP em uma única camada, a convecção RB estratificada e o escoamento plano de Poiseuille estratificado. A análise de estabilidade de cada um destes casos compreende uma extensa literatura, sendo que diversos mecanismos que causam instabilidade nestes sistemas já foram elucidados. No próximo capítulo serão discutidas as principais características associadas a estes casos, buscando-se compreender quais os principais aspectos que irão influenciar na estabilidade da convecção RBPE.

2 CONVECÇÃO MISTA E ESCOAMENTO ESTRATIFICADO: CARACTERÍSTICAS GERAIS E ANÁLISE DE ESTABILIDADE

“But no doubt, there are even stranger discoveries to be made. . . some totally new phenomenon perhaps. . . Somewhere, something incredible is waiting to be known.”

Carl Sagan, 1977

Conforme destacado no capítulo anterior, a convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille em meio estratificado compreende características comuns a diversos padrões de escoamento mais simples. O entendimento destes modelos mais simples é de grande importância para a análise da convecção RPBE, pois permite estabelecer o comportamento do sistema quando a influência de algum dos mecanismos tende a zero. Nesta seção será apresentada uma breve revisão da literatura sobre os três principais casos limite que são obtidos quando algum conjunto de parâmetros do sistema é negligenciado. Primeiramente será avaliada a convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille em uma única camada, na sequência será avaliado o escoamento de Poiseuille em meio estratificado e por último será considerada a convecção de Rayleigh-Bénard em meio estratificado.

2.1 CONVECÇÃO DE RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE EM UMA ÚNICA CAMADA

A convecção mista entre duas placas paralelas com aquecimento na parte inferior, conhecida como convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP), foi alvo de diversas pesquisas nas últimas décadas devido, principalmente, a suas aplicações em reatores de CVD e no resfriamento de componentes eletrônicos. Um detalhado *review* contendo artigos publicados entre 1920 e 2001 sobre a convecção RPB é apresentado por Nicolas (NICOLAS, 2002), incluindo tanto trabalhos numéricos quanto experimentais.

Conforme comentado por Xin, Nicolas e Le Quéré (2006), na convecção RBP a combinação das células de Bénard com o escoamento de Poiseuille dá origem a estruturas bastante complexas mesmo para baixos valores dos números de Reynolds e Rayleigh. Assim como na convecção de Rayleigh-Bénard, neste caso quando o fluido na parte inferior do sistema atingir uma determinada temperatura, as forças de em-

puxo irão sobrepor as forças viscosas e células de convecção irão surgir. Dependendo da forma como estas células se arranjam, diferentes modos de convecção podem ser observados. Por exemplo, no esquema apresentado na Figura 2, considerou-se que os rolos convectivos (*convective rolls*) desenvolvem-se com o eixo perpendicular ao escoamento principal, originando assim estruturas semelhantes às células de Bénard. No entanto, conforme apresentado por Grandjean (GRANDJEAN, 2008), dependendo das condições do escoamento diferentes modos podem ser observados, sendo que os mais comuns são:

- Rolos longitudinais (R_{\parallel}): este padrão é composto por rolos helicoidais com o eixo paralelo com a direção do escoamento principal (ver Figura 3(a)). Neste caso as três componentes do vetor velocidade são não-nulas e o sistema se arranja como uma série de rolos contra-rotativos estacionários;
- Rolos transversais (R_{\perp}): neste caso os rolos tem seu eixo perpendicular à direção do escoamento (ver Figura 3(b)), sendo o sistema também formado por uma série de rolos contra-rotativos, porém neste caso os rolos são deslocados pelo escoamento paralelo. Este padrão é basicamente bidimensional, sendo a componente transversal da velocidade significativa somente próximo das bordas do sistema.

Além dos padrões longitudinal e transversal, formas de escoamento mais complexas também podem surgir, como por exemplo a superposição dos modos R_{\parallel} e R_{\perp} (CHANG; YU; LIN, 1997b; CHENG; LIR; LIN, 2002), a formação de rolos oblíquos (BARLETTA; NIELD, 2012) e a presença de rolos longitudinais com ondulações (CLEVER; BUSSE, 1991).

Conforme apresentado por Nicolas et al (NICOLAS; LUIJKX; PLATTEN, 2000), a predominância de algum dos modos convectivos irá depender principalmente de três fatores: o número de Reynolds, o número de Prandtl e a razão de aspecto B do canal (razão entre o comprimento no sentido perpendicular ao escoamento principal e a altura). Para canais com razão de aspecto finita, os rolos transversais são predominantes para baixos valores de Re , porém, a partir de um determinado valor crítico Re_c os rolos longitudinais surgem para menores valores de Ra , sendo que o aumento no valor de Pr causa uma redução no valor de (Re_c). O valor mínimo para o número de Ra a partir do qual os rolos longitudinais surgem (Ra_c) não é afetado pela variação nos números de Re e Pr .

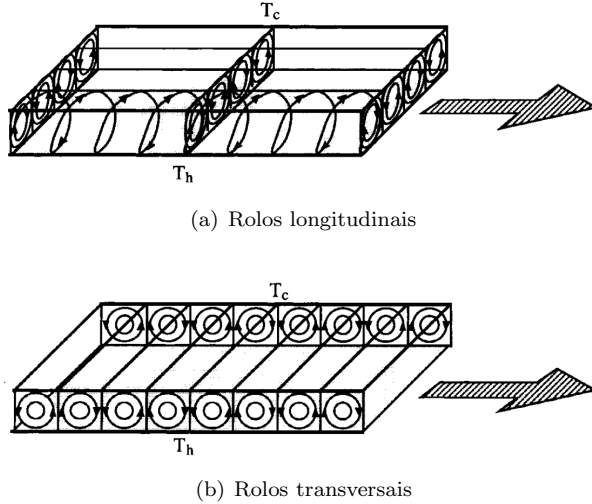


Figura 3: Modos convectivos no escoamento de Rayleigh - Bénard - Poiseuille. Fonte: Nicolas, Luijkx e Platten (2000)

Apesar de Ra_c não ser afetado por Re e Pr , diferentes estruturas associadas a modos longitudinais podem ser observadas para uma mesma razão de aspecto. Por exemplo, Xin, Nicolas e Le Quééré (2006) avaliaram a formação de rolos longitudinais em um canal com razão de aspecto $B = 10$ para $Pr = 0,71$ e $Re = 200$, onde três diferentes ramos de soluções foram encontrados. Estes ramos correspondem à diferentes números de rolos presentes, sendo observados ramos contendo 9 e 10 rolos conectados por uma bifurcação forquilha (*pitchfork*) supercrítica e um ramo isolado contendo 11 rolos. Bifurcações supercríticas associadas aos rolos longitudinais também foram encontradas por Kato e Fujimura (2000) para canais com razão de aspecto entre $B = 1.0$ e $B = 4.0$. Os autores reportam ainda bifurcações associadas a rolos transversais, sendo estas porém sub ou supercríticas, dependendo dos valores adotados para uma série de parâmetros.

Para canais com razão de aspecto infinita, como considerado neste trabalho, os modos convectivos estão associados à forma como as perturbações são avaliadas. Conforme será apresentado nas próximas seções, as perturbações possuem a forma $A(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$, onde y representa a altura do canal, x e z as direções no sentido do escoamento e perpendicular ao escoamento, respectivamente, α e β são números de

onda e ω representa a autofrequência associada à perturbação. Neste caso, como visto na Fig. 4, a análise de estabilidade linear prevê que os rolos transversais surgem quando $\beta = 0$ e os longitudinais quando $\alpha = 0$. No caso de $Re \rightarrow 0$ o sistema tende à $Ra_c = 1708$, sendo que este ponto representa o valor crítico para a convecção de Rayleigh-Bénard entre placas planas, estando associado com o $\beta_c = 3.116$.

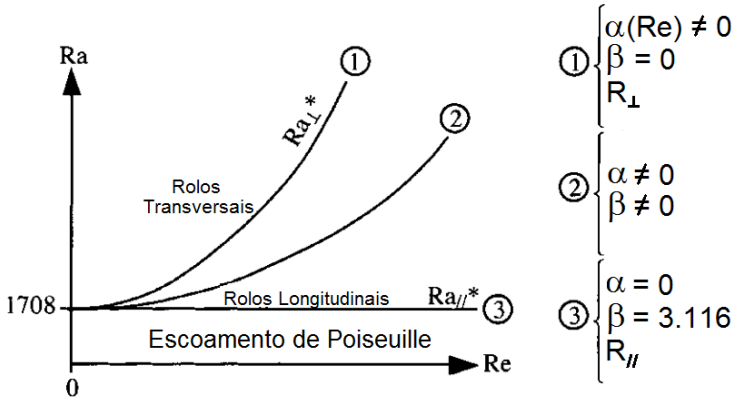


Figura 4: Modos convectivos para um canal com razão de aspecto infinita. Fonte: (NICOLAS; LUIJKX; PLATTEN, 2000).

A curva indicada como número 2 na Figura 4 está associada ao limite de estabilidade conhecido como estabilidade convectiva, sendo este um caso específico de resposta do sistema a uma perturbação. Conforme comentado por Grandjean (2008), qualquer perturbação atuando em um sistema linearmente instável irá se amplificar indefinidamente. Em um sistema fechado, esta perturbação irá crescer até eventualmente ocupar todo o sistema, sendo neste caso o sistema descrito como *absolutamente instável*. No entanto, em sistemas abertos tanto a evolução espacial quanto temporal das perturbações devem ser consideradas. Por exemplo, uma perturbação pode aumentar conforme se distancia de sua fonte inicial e eventualmente, em alguma posição fixa no espaço distante da fonte, a onda instável pode desaparecer quando a fonte de perturbação for desligada (YEO; KHOO; ZHAO, 1999), sendo este caso conhecido como *convectivamente instável*.

As diferentes respostas de um sistema a uma perturbação podem ser vistas na Figura 5. Quando todas as raízes do sistema de equações linearizado possuem sua parte real negativa, as perturbações serão amor-

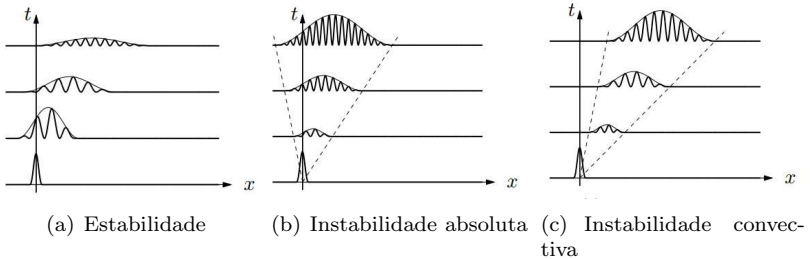


Figura 5: Evolução temporal dos diferentes tipos de estabilidade. Fonte: (GRANDJEAN, 2008)

teciadas e eventualmente irão desaparecer, caracterizando um estado estável (Figura 5(a)). Caso uma ou mais das raízes do sistema tiverem sua parte real positiva, as perturbações podem ser amplificadas originando um estado instável. Conforme comentado anteriormente, no caso de instabilidade absoluta (Figura 5(b)), a perturbação irá crescer e se propagar em todas as direções, enquanto que para a instabilidade convectiva (Figura 5(c)) a perturbação irá crescer e se propagar somente em uma determinada direção. No caso da convecção de RBP a perturbação associada à instabilidade convectiva será deslocada pelo escoamento de Poiseuille e eventualmente irá deixar o sistema (GRANDJEAN, 2008).

A transição entre o regime de instabilidade convectiva e absoluta para o escoamento de Rayleigh-Bénard-Poiseuille foi avaliada por Carrière e Monkewitz (1999) através da adição de um termo fonte nas equações linearizadas com a forma de uma função delta de Dirac. A análise da evolução temporal da função de Green associada a este termo permite determinar as regiões de estabilidade convectiva e absoluta no plano $Ra - Re$ para diferentes valores de Pr . Os resultados mostram que a transição do modo convectivo para absoluto sempre corresponde a rolos transversais, sendo que os rolos longitudinais correspondem à instabilidade convectiva para qualquer valor não-nulo de Re . Mais detalhes sobre instabilidades convectivas e absolutas aplicadas à mecânica dos fluidos podem ser vistos em Huerre e Monkewitz (1985) e Deissler (1987).

Desse modo, em resumo, os resultados da análise de estabilidade linear mostram que para valores fixos de Ra e Pr e valores não-nulos de Re , a instabilidade associada a rolos longitudinais apresenta uma taxa de crescimento maior que para os rolos transversais, sendo independente

dos valores de Re e Pr . Para o modo associado aos rolos transversais, o aumento no valor de Re tende a estabilizar o escoamento. Neste cenário, conforme destacado por Grandjean (2008), mantendo-se o valor de Re e Pr constantes e aumentando-se o valor de Ra a partir de zero, o sistema irá primeiramente deixar a região de estabilidade condutiva e entrar na região associada aos rolos longitudinais. Aumentando-se o valor de Ra além desse ponto, o sistema irá passar para a parte convectivamente instável do plano $Ra - Re$ e, aumentando-se além deste ponto, irá eventualmente atingir o limite da região absolutamente instável.

Os resultados obtidos através de análise de estabilidade linear são também suportados por uma série de trabalhos experimentais, como os desenvolvidos por Lin e co-autores avaliando a convecção RPB em um duto horizontal utilizando ar como fluido, comparando resultados obtidos numericamente com dados experimentais (LIN; KER; LIN, 1996), analisando o início do processo de convecção (LIN; LIN, 1996), a formação de rolos transversais e mistos (CHANG; YU; LIN, 1997b; CHENG; LIR; LIN, 2002; YU; CHANG; LIN, 1997; CHANG; YU; LIN, 1997a; LIR; CHANG; LIN, 2001) e a presença de obstáculos ao longo do canal (CHEN et al., 2006). Os autores avaliaram o comportamento do sistema principalmente para baixos valores de Re . Para um canal com razão de aspecto $B = 12$, os autores reportam em Chang, Yu e Lin (1997b) que para $Re < 5$ estruturas formadas por rolos transversais são estáveis e predominam em toda a extensão do canal para tempos suficientemente longos, enquanto que para $Re > 7.5$ os rolos transversais são menores e mais fracos, podendo ser observada a presença de rolos longitudinais próximos às paredes do canal durante toda a faixa de tempo investigada.

Cheng, Lir e Lin (2002) avaliaram um canal com $B = 16$ e Re igual a 1.0 e 2.0 para valores de Ra próximos ao valor crítico para o início da convecção. Os autores reportam a existência de dois padrões de escoamento não-comuns, sendo um caracterizado por rolos transversais próximos à entrada do canal e rolos longitudinais ao longo do escoamento e outro na forma de rolos mistos (com formato de U) com comportamento periódico, como pode ser visto na Figura 6. Para o caso apresentado, o valor de t_0 é de 320s. Observa-se que no instante t o sistema é composto por rolos longitudinais, sendo que conforme o tempo avança ocorre a formação de rolos com formato de U que, após determinado tempo, colapsam e originam novos rolos longitudinais, retornando ao estado inicial.

Em uma série de três artigos, Ouazzani e colaboradores avaliaram numericamente e experimentalmente a convecção RPB para baixos

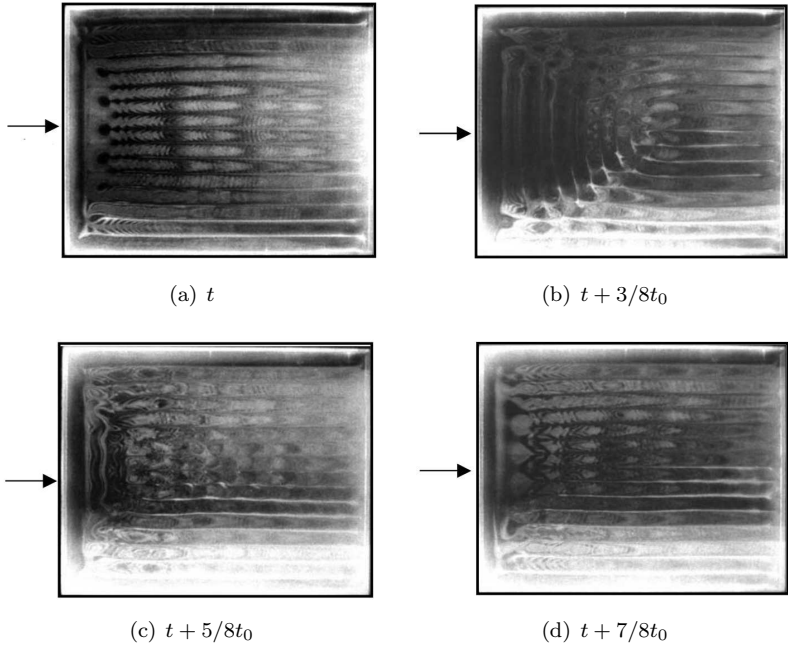


Figura 6: Ciclo periódico para $Re = 1.0$ e $Ra = 2000$. Fonte: Cheng, Lir e Lin (2002).

valores de Re . Os resultados experimentais apresentados em Ouazzani (1989) estão em acordo com a análise linear, havendo a formação de rolos transversais para baixos valores de Re e rolos longitudinais para valores maiores. Utilizando medições de velocidade obtidas com um anemômetro laser-Doppler, os autores determinaram diferentes padrões de escoamento ao longo do plano $Re - Ra$ utilizando água como fluido ($Pr \approx 7$), conforme pode ser visto na Figura 7. Nesta figura, os seguintes padrões podem ser observados: (I) escoamento de Poiseuille; (II) rolos transversais; (III) rolos longitudinais; (IV) rolos transversais ou longitudinais, dependendo da condição inicial e (V) superposição de rolos transversais e longitudinais (OUAZZANI; PLATTEN; MOJTABI, 1990; OUAZZANI; PLATTEN, 1995).

Finalmente, pode-se destacar os trabalhos de Grandjean e Monkewitz (GRANDJEAN, 2008; GRANDJEAN; MONKEWIT, 2009) avaliando experimentalmente a convecção de RBP para fluidos com $Pr = 6.5$ (água) e $Pr = 450$ (óleo mineral) em um canal com elevada razão

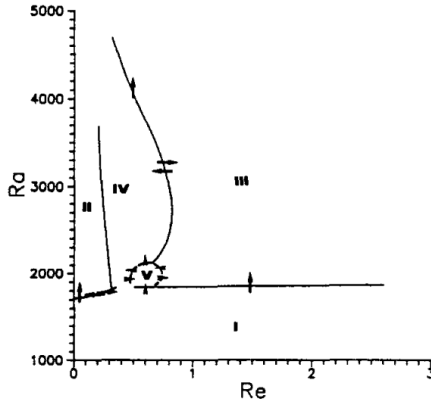


Figura 7: Transição entre diferentes padrões de escoamento. Fonte: Ouazzani, Platten e Mojtabi (1990).

de aspecto. Os autores ressaltam a dependência quadrática do valor de Ra onde o sistema torna-se absolutamente instável com o valor de Re , sendo este comportamento coerente com resultados apresentados por outros autores (CARRIÈRE; MONKEWITZ, 1999; MULLER; LUCKE; KAMPS, 1992) A transição entre o modo de instabilidade convectiva e absoluta foi avaliada através da análise da resposta do sistema a uma perturbação na forma de um impulso na temperatura em uma região próxima à parede aquecida, simulando assim o comportamento descrito pela função delta de Dirac. Os resultados obtidos com este procedimento estão em acordo com os apresentados por Carrière e Monkewitz (1999), obtidos numericamente.

2.2 ESCOAMENTO DE POISEUILLE ESTRATIFICADO

Os resultados obtidos para a convecção de RBP em uma única camada elucidam diversos pontos importantes para a análise da convecção de RBPE. No entanto, a presença de mais de uma camada de fluido altera significativamente algumas características do escoamento, em especial devido à existência de uma interface que separa as camadas. A análise do escoamento estratificado de dois ou mais fluidos é um tópico de grande importância na mecânica dos fluidos, tanto no estudo do escoamento gás-líquido quanto líquido-líquido, sendo por isso am-

plamente investigada nas últimas décadas. A seguir são apresentados alguns aspectos relacionados à análise de estabilidade do escoamento estratificado, sendo que mais detalhes sobre as características gerais desta forma de escoamento podem ser obtidos em livros-texto na área de mecânica dos fluidos (DURST, 2008; HOLLAND; BRAGG, 1995; BRENNEN, 2005).

No escoamento estratificado diferentes tipos de instabilidade podem surgir, tanto na interface quanto no interior das camadas de fluido. Boomkamp e Miesen (1996) apresentam uma classificação das instabilidades no escoamento paralelo em duas camadas. Para isso, os autores avaliaram a taxa de variação da energia cinética associada à perturbação em função de diversos parâmetros. Por definição, em um escoamento absolutamente instável a energia cinética associada à uma perturbação inicial deve aumentar com o tempo, porém a forma como a energia é transferida do escoamento principal para a perturbação pode variar. Baseando-se nisso, os autores classificaram os possíveis mecanismos de instabilidade, dividindo-os em 5 grupos. A seguir serão apresentadas as principais características associadas a cada um destes grupos, destacando-se estudos numéricos e experimentais onde estas instabilidades podem ser evidenciadas. Por conveniência, será mantida a mesma nomenclatura utilizada por Boomkamp e Miesen (1996).

2.2.1 Instabilidade de Rayleigh-Taylor

Conforme comentado na Introdução deste trabalho, a instabilidade de Rayleigh-Taylor surge quando um fluido mais denso é acelerado sobre um menos denso, ou no caso de um sistema estratificado sujeito à ação da gravidade, quando o fluido mais denso sobrepõe o menos denso. Segundo Boomkamp e Miesen (1996), para ondas suficientemente longas as forças desestabilizantes da gravidade superam as forças resultantes da ação da tensão interfacial, dando origem à instabilidade. Neste caso, a instabilidade recebe energia da componente normal da força gravitacional, sendo que parte desta energia é usada para sobrepor o efeito restaurador da tensão interfacial e parte é convertida em energia cinética.

As características da instabilidade de Rayleigh-Taylor foram amplamente estudadas nas últimas décadas, tanto com o uso de métodos de análise de estabilidade linear quanto não-linear. Uma análise detalhada da formulação da análise de estabilidade linear para este caso pode ser encontrada em Chandrasekhar (1961), capítulo X. Yiantsions

e Higgins (1989) analisaram a instabilidade de Rayleigh-Taylor em filmes estreitos utilizando tanto a abordagem linear quanto não-linear. Os resultados mostram a existência de diversas formas estacionárias que podem surgir na interface, caracterizadas pela ruptura do filme e pela presença de gotas pendentes, de modo que as forças interfaciais e gravitacionais estejam em equilíbrio.

2.2.2 Instabilidade de Miles

Esta classe de instabilidade foi originalmente proposta por J. W. Miles em uma série de 5 artigos publicados no *Journal of Fluid Mechanics* entre 1957 e 1967. Nestes trabalhos, o autor avalia a formação de ondas no escoamento cisalhante, em especial na formação de ondas de superfície na água pela ação do vento. O modelo de Miles representa uma modificação do modelo original de Kelvin-Helmholtz, compreendendo a variação na velocidade do fluido em função da distância da interface. No primeiro artigo da série, Miles (1957) apresenta o modelo empregado em seu estudo, incluindo uma série de suposições adotadas. Pode-se destacar o fato de que o autor assume que tanto o ar quanto a água possuem comportamento invíscido e incompressível e que a inércia associada com a perturbação do ar possui um efeito desprezível na magnitude da velocidade da onda formada na superfície, excluindo, assim, o mecanismo de Kelvin-Helmholtz de formação de ondas. Considerando o escoamento do ar turbulento, o perfil de velocidade do ar $U(y)$, função da direção vertical y , é caracterizado por uma subcamada limite adjacente à superfície da água, onde o perfil de velocidade é linear, e uma região turbulenta acima desta. Os resultados mostram que a taxa com a qual a energia do escoamento é transferida para uma onda com velocidade c é proporcional à razão entre a curvatura e a inclinação, $-U''(y)/U'(y)$, no ponto onde $U(y) = c$. No segundo artigo da série, Miles (1959) estende os resultados obtidos no primeiro artigo considerando diversos outros fatores, como por exemplo a influência da viscosidade dos fluidos. No entanto, os resultados obtidos com o modelo invíscido e com o modelo viscoso apresentaram pouca diferença.

Uma análise mais detalhada dos mecanismos de transferência de energia do vento para as ondas de superfície é apresentada no quarto artigo da série (MILES, 1962). O autor destaca a possibilidade de ressonância entre ondas de Tollmien-Schlichting e ondas de superfície livre. Estes mecanismos diferem significativamente dos associados à instabili-

dade de Kelvin-Helmholtz, de modo que mesmo estando ambas formas de instabilidade associadas à formação de ondas de superfície, a forma pelo qual isto ocorre é distinta. Uma comparação entre os dois mecanismos para a formação de ondas oceânicas é apresentada por Lushnikov (1998). A instabilidade de Kelvin-Helmholtz está associada ao cisalhamento de uma camada sobre a outra e ocorre quando a velocidade do vento excede um valor limite U_{cr} . Conforme comentado por Lushnikov, a instabilidade de Miles pode surgir para velocidades muito inferiores a U_{cr} , porém quando a velocidade do vento for superior a este limite a instabilidade de Kelvin-Helmholtz domina o sistema.

2.2.3 Instabilidade Induzida por Perturbações Tangenciais

Conforme apresentado por Boomkamp e Miesen (1996), a energia associada ao termo tangencial representa a taxa na qual trabalho é realizado por perturbações na velocidade e na tensão na direção do escoamento principal. Para escoamentos horizontais ou quando a densidade dos fluidos for a mesma, este termo pode ser considerado como sendo causado pela viscosidade, enquanto que para o caso de fluidos com mesma viscosidade o termo de energia tangencial está associado à ação gravitacional. Desse modo, pode-se dividir este tipo de instabilidade em duas classes, conforme apresentado a seguir.

2.2.3.1 Instabilidade Causada pela Viscosidade

Esta classe de instabilidade surge devido à diferença de viscosidade entre os fluidos, criando um salto na inclinação do perfil de velocidade do escoamento base. Smith (1990) apresenta uma detalhada análise do mecanismo pelo qual a instabilidade surge na interface de filmes líquidos, sendo estes resultados aplicados também para o caso do escoamento líquido-líquido estratificado delimitado por paredes rígidas. Segundo o autor, quando a interface de um filme é inicialmente deformada, o escoamento longitudinal tende a seguir o perfil de velocidade base definido pela viscosidade e pela distância em relação à superfície rígida. Isto faz com que a onda gerada na superfície seja deslocada no sentido do escoamento principal, sendo que conforme a perturbação se desloca, a componente normal da gravidade tende a estabilizar o escoamento. No entanto, efeitos inerciais evitam a estabilização e produzem

um escoamento com atraso de fase atrás da perturbação da interface. Como resultado, caso as forças inerciais forem maiores que o efeito estabilizador das forças normais, haverá um acúmulo de fluido abaixo da crista da perturbação, fazendo com que esta aumente ao longo do escoamento, tornando o sistema instável. Um exemplo de instabilidade causada pela diferença de viscosidade pode ser observado na Figura 8, onde um jato de água (fluido mais escuro no centro) é injetado em um óleo mais viscoso com a mesma densidade.

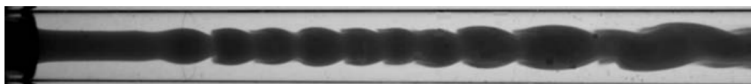


Figura 8: Exemplo de instabilidade na interface de dois líquidos imiscíveis causada pela diferença de viscosidade. Fonte: Charru (2011).

Um dos trabalhos mais significativos no estudo da estabilidade do escoamento estratificado de fluidos com diferentes viscosidades foi apresentado por Yih em 1967 (YIH, 1967), onde o autor avalia numericamente, através da análise de estabilidade linear, o escoamento de dois fluidos imiscíveis sobrepostos em duas diferentes situações: escoamento causado por um diferencial de pressão (escoamento plano de Poiseuille) e escoamento causado pelo deslocamento da parede superior (escoamento de Couette). Para resolver o conjunto de equações governantes, o autor utilizou a técnica de análise assintótica, assumindo que o número de onda associado à perturbação tende a zero e portanto limitando-se a perturbações com grande comprimento de onda. Para o caso de um único fluido, sabe-se que o escoamento de Couette é estável para qualquer valor de Re , enquanto que o escoamento de Poiseuille passa a ser instável a partir de um valor de Re crítico, no entanto os resultados obtidos por Yih mostram que para um sistema estratificado as duas formas de escoamento podem ser instáveis para qualquer número de Re , mesmo para valores muito baixos, desde que exista uma diferença de viscosidade entre as duas camadas.

O trabalho apresentado por Yih (1967) deu origem a uma série de outros trabalhos avaliando diversos outros parâmetros do escoamento. Por exemplo, Yiantsios e Higgins (1988) avaliaram a estabilidade do escoamento plano de Poiseuille de dois fluidos sobrepostos considerando perturbações com número de onda maiores que zero, estendendo os resultados de Yih para ondas curtas. Além disso, os autores consideraram fluidos com diferentes densidades, avaliaram a razão entre a espessura das duas camadas e consideraram a influência da tensão interfacial e da

gravidade, sendo estes aspectos não considerados por Yih. Os resultados obtidos por Yiantsios e Higgins (1988) mostram a existência de uma linha de estabilidade neutra para $n^2 = m$, onde n e m representam, respectivamente as razões da espessura e da viscosidade da camada superior e inferior. Quando $n^2 > m$, perturbações com grande comprimento de onda são estáveis enquanto que perturbações com pequeno comprimento de onda são instáveis. Para $n^2 < m$ o oposto é observado. Estes resultados, apesar de influenciados por fatores como a tensão interfacial e a influência da gravidade, não mostraram dependência com Re dentro da faixa avaliada pelos autores ($0 < Re < 20$).

Uma análise mais detalhada do escoamento em duas camadas com diferentes viscosidades foi apresentado por Cao, Sarkar e Prasad (2004). Os autores empregaram um método de diferenças finitas juntamente com um método de rastreamento de frente (*front tracking*) para resolver o conjunto de equações governantes. Somente uma única camada com propriedades físicas variáveis foi considerada, eliminando assim a necessidade de condições de contorno na interface. Os dados resultantes da análise linear confirmam resultados obtidos por outros autores, como a curva de estabilidade neutra para $n^2 = m$ apresentada por Yiantsios e Hoggins (1988). Além disso, Cao, Sarkar e Prasad (2004) avaliaram a evolução temporal da interface considerando o comportamento não-linear do sistema para perturbações com grande amplitude. Os resultados mostram um comportamento altamente não-linear para este tipo de perturbação, sendo que a interface apresenta estruturas complexas como regiões com curvatura acentuada e a formação de estruturas do fluido mais viscoso penetrando no fluido menos viscoso. Estes resultados estão em acordo com observações experimentais realizadas pelos autores (CAO; VENTRESCA; PRASAD, 2003).

Li (1969) apresenta uma extensão da análise feita por Yih para o caso do escoamento de Couette onde três camadas de fluido estão presentes. Neste trabalho, realizado sob orientação de Yih, é empregada a análise assintótica para avaliar a resposta do sistema à perturbações com grande comprimento de onda. Conforme apresentado pelo autor, dois modos de perturbação podem ser observados, sendo cada um deles relacionado com uma das interfaces. A taxa de crescimento ou de amortecimento em uma das interfaces apresenta uma dependência linear em relação à taxa na outra interface, sendo que a presença de uma interface adicional pode estabilizar ou desestabilizar o sistema, dependendo da razões entre as viscosidades e as espessuras das camadas.

Em 1990, Yih apresentou um trabalho avaliando a formação de ondas na camada de água líquida formada durante o degelo sobre a asas

de aviões. O autor apresenta fórmulas para a determinação da taxa de crescimento e para a velocidade de fase das ondas em função do número de onda da perturbação e de diversos parâmetros físicos do sistema. A instabilidade na interface surge em função da diferença de viscosidade entre as camadas, neste caso água e ar, assim como observado no estudo de 1967 (YIH, 1967). Conforme comentado por Boomkamp e Miesen (1996), a estratificação da viscosidade é amplamente reconhecida como uma possível causadora de instabilidade em sistemas líquido-líquido, no entanto para o caso gás-líquido muitas vezes desconsidera-se este efeito pois assume-se que um dos fluidos possui comportamento invíscido. No entanto, além da instabilidade reportada por Yih (1990), a estratificação da viscosidade é responsável, entre outras coisas, pela geração de ondas capilares e gravitacionais na interface entre os fluidos.

2.2.3.2 Instabilidade Causada pela Gravidade

Conforme destacado por Boomkamp e Miesen (1996), quando o escoamento de dois fluidos ocorre com um ângulo diferente de zero em relação ao plano vertical e houver uma diferença de densidade entre os fluidos, a componente tangencial da velocidade pode ser responsável por causar instabilidade no sistema. Isto ocorre pois neste caso a gravidade afeta o escoamento principal nas duas fases de forma diferente, causando um salto na curvatura do perfil de velocidade para o escoamento base. Esta curvatura interfere no balanço da tensão tangencial na interface (ver Boomkamp e Miesen (1996), Eq. 22 para mais detalhes), de modo que para garantir a continuidade da tensão na interface, a magnitude da tensão tangencial associada à perturbação em cada um dos lados é alterada. Este processo é responsável por transferir energia do escoamento principal para a perturbação.

Um exemplo muito comum deste tipo de instabilidade pode ser observado no escoamento de filmes em um plano inclinado, como mostrado na Figura 9. Este fenômeno foi estudado por Lin (1967), onde o autor avalia a estabilidade de um filme líquido escoando em um plano com inclinação β com respeito a formação de ondas de superfície e ondas de Tollmien-Schlichting. Segundo o autor, para perturbações com comprimento de onda infinito, o sistema se torna instável devido a formação de ondas na superfície, sendo que o valor de Re crítico associado a este ponto é diretamente proporcional à co-tangente do ângulo β . Para ondas com comprimento finito, existe um valor crítico para o comprimento de onda, dado em função da tensão superficial e do

ângulo β , onde o sistema se torna instável primeiramente devido às ondas de Tollmien-Schlichting para perturbações com comprimento de onda inferiores a este valor crítico. Quando o comprimento de onda excede o valor crítico, o filme se torna instável devido às ondas de superfície. Segundo o autor, o aumento na tensão superficial e a redução na inclinação do plano são fatores que estabilizam o sistema.

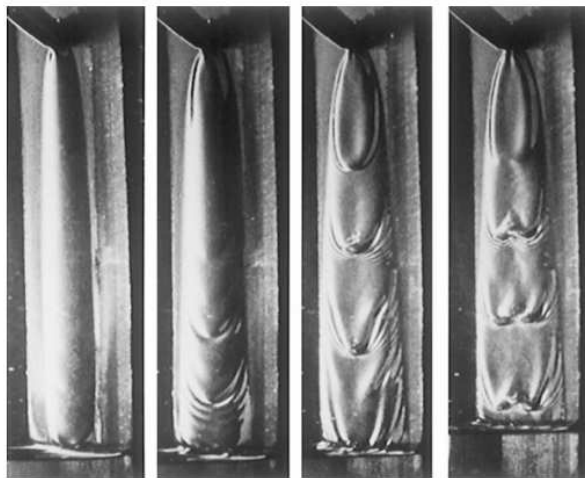


Figura 9: Diferentes padrões de escoamento de um filme líquido em um plano inclinado. Fonte: Kerst, Judat e Schlünder (2000)

Um sistema semelhante ao avaliado por Lin (1967), porém considerando a presença de duas camadas de fluido, foi estudado por Kao (1968). Neste trabalho, o autor analisa a estabilidade do escoamento estratificado de dois fluidos viscosos em um plano inclinado utilizando o mesmo método de análise assintótica apresentado por Yih (1967). Assim como observado por Lin (1967) para o caso de uma única camada de líquido, sistema compreendendo duas camadas mostrou-se instável devido à ondas de superfície. Porém, a presença de uma superfície livre e de uma interface entre os dois líquidos origina dois modos competitivos. Um destes modos, chamado pelo autor de primeiro modo, governa a instabilidade do sistema quando a razão entre as viscosidades da camada superior e inferior for menor que 1. Quando a viscosidade das camadas for a mesma, o segundo modo surge primeiramente, sendo, porém, a taxa de crescimento do primeiro modo muito superior à do

segundo modo.

2.2.4 Instabilidade por Cisalhamento

Nos modos apresentados até agora, a instabilidade está sempre associada com a diferença entre as propriedades das duas camadas (viscosidade, densidade, perfil de velocidade, etc.), o que origina uma descontinuidade na interface entre os fluidos dando origem à instabilidade. No entanto, conforme destacado por Boomkamp e Miesen (1996), sabe-se que quando o número de Re excede um determinado valor crítico, o escoamento de Poiseuille em uma única camada se torna instável. Esta instabilidade é causada por um efeito conjunto da condição de não-deslizamento nas paredes e efeitos viscosos no interior de uma camada crítica próxima à parede, levando à desestabilização do sistema através da formação de ondas de Tollmien-Schlichting (TS). Dependendo das condições do escoamento, mesmo um sistema composto por duas camadas de fluido pode perder a estabilidade primeiramente devido a este mecanismo.

Para o escoamento plano de Poiseuille o valor de Reynolds crítico, obtido através da resolução da equação de Orr-Sommerfeld, é de 5722.22, estando este valor associado a um número de onda crítico de 1.02 (ORSZAG, 1971). Assim, pode-se observar que este modo de instabilidade ocorre para valores de Re bastante elevados e para comprimentos de onda intermediários. Em relação ao escoamento de Couette, a análise de estabilidade linear prevê que para o caso de um único fluido este será estável para qualquer valor de Re . No entanto, a presença de mais de uma camada de fluido pode levar à instabilidade do escoamento de Couette, conforme mostrado por Hopper e Boyd (1986). Neste trabalho os autores encontraram três modos distintos de instabilidade para o escoamento de Couette de dois fluidos sobrepostos. Um destes modos é o mesmo descrito por Yih para o escoamento de Poiseuille (YIH, 1967), tendo origem na diferença de viscosidade entre as camadas. O segundo modo também tem origem na interface e está relacionado com a viscosidade, porém está associado a perturbações com pequenos comprimentos de onda. Este modo é descrito em detalhes em outro trabalho publicado pelos autores (HOOPER; BOYD, 1983). O terceiro modo, no entanto, ocorre devido à perturbação na vorticidade próximo à parede, sendo em natureza similar às ondas TS. A análise das formas de energia envolvidas neste processo mostra que esta instabilidade é causada pela tensão de Reynolds no fluido em contato com a parede, onde a condição

de não-deslizamento é imposta. Este resultado também foi encontrado por Boomkamp e Miesen (1996).

Kao e Park (1972) avaliaram experimentalmente a instabilidade por cisalhamento de dois fluidos imiscíveis escoando em um canal retangular. Dentro da faixa de valores para os parâmetros avaliados, os resultados mostram que a interface entre os fluidos permanece inalterada até o momento onde ondas similares às ondas TS podem ser observadas em uma das camadas de fluido. Neste caso, segundo os autores, o principal papel da interface no processo de transição do regime laminar para turbulento é introduzir e aumentar oscilações no sentido perpendicular ao escoamento principal.

2.2.5 Modo Interno

Este modo de instabilidade é caracterizado por receber energia de duas fontes distintas, sendo uma delas a contribuição tangencial induzida pela viscosidade na interface e outra a tensão de Reynolds no interior do fluido. Este modo costuma ser significativo somente em filmes finos de líquido em contato com uma corrente de gás, estando, mesmo assim, restrito à uma pequena faixa no espaço de parâmetros. A atuação deste modo de instabilidade pode ser vista como uma combinação da instabilidade causada pela diferença de viscosidade entre as camadas e da instabilidade por cisalhamento. No entanto, o modo interno é tratado como um modo próprio pois nas condições onde ele ocorre nenhum destes outros dois mecanismos é forte o suficiente para levar à instabilidade isoladamente (BOOMKAMP; MIESEN, 1996).

Em comparação com os outros modos de instabilidade descritos anteriormente, a literatura avaliando o modo interno é bastante escassa. No entanto, pode-se citar o trabalho de Miesen e Boersma (1995), onde os autores avaliam a estabilidade de um filme líquido sujeito ao cisalhamento de uma corrente gasosa. As perturbações foram restritas a valores de velocidade de fase menores que a velocidade máxima no filme líquido, restringindo assim a análise ao modo interno de instabilidade. Através da comparação dos resultados obtidos assumindo-se uma superfície livre na interface do líquido e resolvendo-se a equação de Orr-Sommerfeld para as duas camadas, os autores mostram que o modelo de superfície livre geralmente não representa corretamente a estabilidade do sistema.

2.3 CONVECÇÃO DE RAYLEIGH-BÉNARD ESTRATIFICADA

A convecção de Rayleigh-Bénard (*RB*) em uma única camada é um dos processos mais estudados na área de fenômenos de transporte, devido à sua grande aplicabilidade e ao fato de que as equações governantes são relativamente simples. Conforme comentado anteriormente, este fenômeno surge quando as forças de empuxo geradas pela expansibilidade térmica de um fluido sobrepõem as forças viscosas, dando origem ao movimento convectivo. Apesar de matematicamente simples, a convecção de Rayleigh-Bénard possui um comportamento dinâmico bastante complexo, podendo ser observado, por exemplo, a existência de múltiplos estados estacionários e estados periódicos.

A presença de mais de uma camada de fluido aumenta ainda mais a complexidade do sistema, podendo originar uma série de outros fenômenos, como por exemplo competição entre a instabilidade em diferentes camadas, controle de uma camada sobre a outra, deformações na interface e modos convectivos controlados pela tensão interfacial. Devido a isto, a convecção de Rayleigh-Bénard em múltiplas camadas é um assunto ainda pouco explorado. No entanto, Anderek et al. (1998) destacam que a existência de sistemas com estratificação causada por diferenças de densidade ou propriedades térmicas são muito comuns no estudo de sistemas geofísicos, escoamento atmosférico, astrofísica e processos industriais. A seguir é apresentada uma breve revisão sobre a convecção de Rayleigh-Bénard em uma e em várias camadas, destacando-se em especial estudos avaliando a estabilidade deste sistema.

2.3.1 Análise de Estabilidade da Convecção RB em uma Única Camada

O estudo da convecção natural causada por um gradiente de temperatura teve início com as observações experimentais realizadas por Bénard em 1900 (BÉNARD, 1900), onde o autor observou que o início da convecção ocorre quando o gradiente de temperatura atinge um valor crítico e que as estruturas formadas, chamadas de *células de convecção*, possuem um caráter estacionário. As bases teóricas para estes resultados foram apresentadas posteriormente por Lord Rayleigh (RAYLEIGH, 1916) em um clássico artigo onde o autor mostra que a estabilidade do sistema está relacionada com o parâmetro adimensional,

conhecido atualmente como *número de Rayleigh* (Ra), que representa a relação entre as forças viscosas e as forças de empuxo que atuam em um fluido.

Segundo Rayleigh, para valores de Ra inferiores ao valor crítico, Ra_c , a transferência de calor no fluido irá ocorrer basicamente por condução. Porém, quando este valor crítico for ultrapassado o sistema se torna instável e evolui para um estado diferente onde a convecção é o principal mecanismo de troca térmica. Através da análise de estabilidade linear é possível determinar qual o valor de Ra_c , bem como o número de onda crítico associado a este valor. Conforme mostrado por Pellew e Southwell (1940), para sistemas bidimensionais com fluidos Newtonianos os valores críticos dependem somente das condições de contorno impostas para a velocidade nas extremidades do sistema, que podem ser tratadas como superfícies rígidas (velocidade nula) ou superfície livre (tensão de cisalhamento nula). Os valores obtidos com as possíveis combinações destas condições de contorno podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros críticos para a convecção de Rayleigh-Bénard. Fonte: Pellew e Southwell (1940)

Contorno	Ra_c	a_c
rígido - rígido	1707.8	3.117
rígido - livre	1100.7	2.682
livre - livre	657.5	2.221

Conforme pode ser observado pelos valores apresentados na tabela, o valor de Ra_c é maior quando existe a presença de uma superfície rígida, sendo isso uma consequência direta da condição de não-deslizamento. Os valores de número de onda crítico para este caso são relativamente altos, em comparação, por exemplo, com os valores normalmente encontrados para o escoamento de Poiseuille. Grandjean (2008) comenta que perturbações com elevado número de onda dissipam uma grande quantidade de energia, enquanto que perturbações com menores números de onda movem as partículas de fluido por distâncias horizontais maiores e portanto não são eficientes para transportar a energia potencial da superfície quente para a superfície fria.

Para sistemas tridimensionais, Davis (1967) mostrou que o valor de Ra_c depende da razão entre o comprimento e/ou profundidade com a espessura considerada, porém para o caso de superfícies verticais rígidas, o valor de Ra_c decresce rapidamente para 1708 conforme a dimensão horizontal aumenta. Além disso, os resultados de Davis mos-

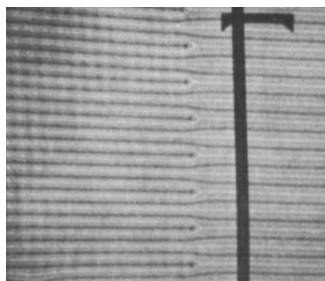
tram que sempre que a aproximação de Boussinesq for considerada, após o início da convecção a forma como o sistema irá se arranjar será sempre preferencialmente na forma de um número finito de rolos com eixos paralelos ao lado com menor dimensão. Quando a espessura for a menor das dimensões, os rolos apresentam seção transversal aproximadamente quadrada, caso contrário rolos mais estreitos podem ser observados.

Segundo Grandjean (2008), dependendo de quais simetrias forem respeitadas, outros padrões podem ser observados na convecção RB 3D. Por exemplo, quando a simetria vertical for quebrada, células hexagonais podem ser observadas. Isso ocorre, por exemplo, quando a convecção é controlada por gradientes na tensão superficial (convecção de Bénard-Marangoni) ou quando houver uma grande variação na viscosidade do fluido com a temperatura, sendo que neste caso a aproximação de Boussinesq não é mais válida. Este último caso foi estudado por Stengel, Oliver e Booker (1982), onde os autores mostram que o valor de Ra_c teórico baseado na viscosidade média aumenta conforme a razão entre a viscosidade na parede inferior e superior aumenta. Resultados experimentais utilizando um fluido com grande variação na viscosidade (glicerol) mostram a predominância de células de convecção hexagonais, enquanto que para um fluido onde a viscosidade varia pouco com a temperatura (óleo de silicone) rolos concêntricos foram observados.

Quando ocorre a formação de rolos convectivos, para valores muito próximos ao limite de estabilidade estabelecido pela análise linear normalmente observam-se estruturas bastante ordenadas e com poucas imperfeições. No entanto, dependendo de fatores como condição inicial não-homogênea, influência das fronteiras laterais do sistema e efeitos não-lineares diversos padrões desordenados podem ser observados (SIGGA; ZIPPELIUS, 1981), originando sistemas em não-equilíbrio com padrões auto-organizados. Estes defeitos nos padrões dos rolos são conhecidos como *texturas de convecção*, sendo que para a convecção de Rayleigh-Bénard os exemplos mais comuns são os de deslocação, discлинаção, fronteiras de grão e espirais (GETLING, 1998). Os defeitos nos padrões recebem estes nomes devido à similaridade com os defeitos observados em estruturas cristalinas.

A deslocação ocorre quando dois rolos são localmente comprimidos e dão origem a um único rolo, assim como pode ser visto na Figura 10(a). Conforme observado experimentalmente por Whitehead (1976), as deslocações se movem com uma velocidade específica, sendo esta velocidade menor para fluidos com alto número de Prandtl. As forças envolvidas no movimento das deslocações foram avaliadas por

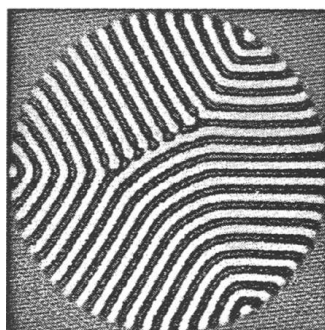
Walter, Pesch e Bodenschatz (2004), onde os autores concluem que o movimento ocorre devido à ação da força de Peach-Koehler, que descreve a tendência do sistema em desenvolver um padrão com um estado mínimo de energia, e de uma força advectiva induzida pelo escoamento principal.



(a) Deslocação (WHITEHEAD, 1976).



(b) Disclinação (MEEVASANA; AHLERS, 2002).



(c) Grãos de fronteira (PASSOT; NEWELL, 1994)



(d) Espirais (MEEVASANA; AHLERS, 2002)

Figura 10: Exemplos de defeitos nos padrões de rolos na convecção de Rayleigh-Bénard.

As disclinações ¹ representam uma classe de defeitos correspondentes à singularidades no campo vetorial que define a orientação dos rolos, como no exemplo mostrado na Figura 10(b). Pode-se ver as disclinações com sobreposições de deslocações, sendo que, conforme mostrado por Newell e Passot (1992), as deslocações podem evoluir para disclinações longe do ponto onde são criadas. As fronteiras de

¹Nome utilizado em analogia ao termo empregado no estudo de cristais líquidos.

grão representam uma linha onde dois padrões com orientações distintas coexistem, conforme pode ser observado próximo ao centro da Figura 10(c). A orientação perpendicular observada nesta figura costuma ser a mais observada, pois este arranjo representa o estado com menor nível de energia e portanto existe uma maior probabilidade de este surgir de forma espontânea a partir de uma configuração inicial aleatória (BOYER; NALS, 2002). Por sua vez, as espirais (Figura 10(d)) são padrões caóticos observados para baixos valores de Pr em sistemas com grande razão de aspecto (MORRIS et al., 1996), sendo as bases teóricas para este fenômeno ainda não totalmente compreendidas.

2.3.2 Análise de Estabilidade da Convecção RB em Diversas Camadas

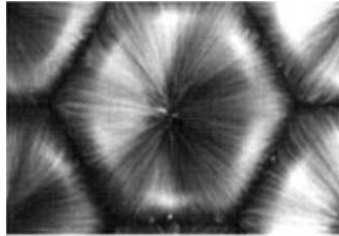
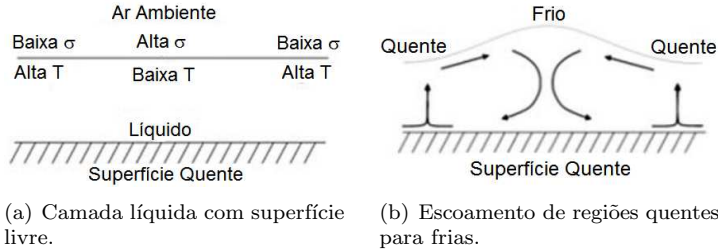
O estudo da convecção de Rayleigh-Bénard em mais de uma camada foi originalmente motivado pela hipótese de o manto terrestre ser dividido em pelo menos duas camadas, sendo isto um resultado da descontinuidade sísmica observada em uma profundidade de aproximadamente 660 km (SCHUBERT; TURCOTTE; OLSON, 2004). Diversos trabalhos analisando a convecção do manto considerando o modelo estratificado podem ser encontrados na literatura, como por exemplo o estudo apresentado por Busse (BUSSE, 1981), onde o autor avalia camadas com diferentes espessuras, e Cserepes e Rabinowicz (1985), que utilizam um modelo bidimensional para simular o comportamento das camadas considerando diferentes valores para o número de Rayleigh e diferentes razões entre as viscosidades e espessuras das camadas. Atualmente não existe um consenso a respeito da estratificação do manto terrestre, havendo indícios tanto da presença de mais de uma camada quanto de que a convecção se dá somente em uma camada (SCHUBERT; TURCOTTE; OLSON, 2004).

No entanto, a convecção natural em mais de uma camada pode ser observada em diversas outras situações, como por exemplo em crescimento de cristais (CAMPBELL; KOSTER, 1995), onde pode-se utilizar a técnica do líquido encapsulante para minimizar a evaporação de componentes voláteis e evitar defeitos cristalográficos e degradação das propriedades eletrônicas (LI et al., 2009). Outros exemplos de aplicações tecnológicas que podem ser citados são no processamento de vidros e materiais de dispersão (PRAKASH et al., 1997), reatores químicos de microcanais (FUDYM; PRADÈRE; BATSALE, 2007) e processos de revestimentos com filme (ANDEREK et al., 1998).

Em sistemas onde existe uma interface entre dois fluidos, as células convectivas podem surgir devido à ação de dois mecanismos diferentes: as forças de empuxo geradas pelos gradientes de densidade induzidos pela diferença de temperatura e as forças interfaciais causadas pela variação na tensão interfacial produzidas por gradientes de temperatura ou concentração. Conforme apresentado na Introdução deste trabalho, o primeiro caso é conhecido como convecção de Rayleigh-Bénard e o segundo como convecção de Bénard-Marangoni, sendo que os mecanismos associados com a convecção de Rayleigh-Bénard foram discutidos com detalhes na seção anterior.

A convecção de Bénard-Marangoni ocorre pela ação de forças interfaciais. Usualmente, a variação da tensão interfacial com a temperatura, $d\gamma/dT$, é negativa. Isto faz com que pontos na interface onde a temperatura é inferior à temperatura nos arredores possuam uma tensão interfacial maior. Este cenário está representado na Figura 11(a), que retrata uma camada de líquido aquecida na parte inferior e em contato com ar ambiente. O aumento na tensão interfacial na região central faz com que a superfície tenda a se contrair neste local, causando o movimento do fluido em torno, conforme apresentado na Figura 11(b). Na Figura 11(c) pode ser observada uma célula convectiva causada por este efeito. Neste caso, o fluido quente ascende em uma região onde a superfície está relativamente deprimida (centro das células) e descende em uma região onde a superfície está elevada. Conforme destacado por Birikh et al. (2005), a instabilidade causada pela presença de surfactantes possui um mecanismo de atuação similar, sendo que neste caso as regiões com alta temperatura equivalem a acúmulos locais de surfactante, o que diminui a tensão interfacial no local e causa o deslocamento de parte do fluido para regiões com maior tensão interfacial.

Zeren e Reynolds (1972) avaliaram a estabilidade de um sistema contendo dois líquidos imiscíveis (benzeno e água) aquecido pela parte inferior ou superior, sendo considerado principalmente o caso onde a instabilidade é governada pelas forças interfaciais. Os autores destacam que um modelo matemático completo da convecção natural em um sistema contendo dois fluidos imiscíveis, além de incluir os mecanismos associados à convecção de Rayleigh-Bénard e de Bénard-Marangoni, deve considerar a instabilidade nas duas camadas, permitir a deformação da interface e respeitar a continuidade da temperatura e do fluxo de calor na interface. Tanto para o caso de aquecimento pela fronteira inferior quanto pela fronteira superior, os resultados obtidos através da análise de estabilidade linear mostram três modos de resposta distintos, sendo



(c) Padrão estacionário observado.

Figura 11: Instabilidade devido ao efeito Marangoni. Adaptado de: (BIRIKH et al., 2005).

eles: (i) dominado pelo gradiente de tensão interfacial; (ii) dominado pelas forças de empuxo; e (iii) dominado pela deformação da interface. A predominância de cada modo depende basicamente da razão entre as espessuras das duas camadas. A principal limitação deste trabalho é o fato de que os autores avaliaram somente a estabilidade marginal do sistema, definindo o autovalor associado como sendo nulo. Com isso, a presença de estados oscilatórios não pode ser observada.

Um sistema semelhante ao avaliado por Zeren e Reynolds, porém considerando o limite onde as forças de empuxo são dominantes e as forças interfaciais podem ser negligenciadas foi analisado por Rase-nat, Busse e Rehberg (1989). Neste trabalho, os autores destacam a existência de duas principais formas de acoplamento entre as camadas que podem ser observadas: o acoplamento térmico e o acoplamento viscoso (ou mecânico). Conforme apresentado por Petry e Busse (2003), o acoplamento viscoso é caracterizado por um sentido de circulação oposto em cada uma das camadas, de forma que a velocidade tangencial em ambos os lados da interface possui o mesmo sinal. Neste caso, a circulação mais intensa em uma das camadas suporta a circulação na outra camada. No caso do acoplamento térmico, a força de empuxo

causada pelo gradiente de temperatura induz a convecção nas duas camadas, fazendo com que o sentido da circulação seja o mesmo. Quando a razão entre a viscosidade das camadas for próxima à 1, o acoplamento viscoso costuma ser predominante. Uma representação do acoplamento viscoso pode ser visto na Figura 12(a) e do acoplamento térmico na Figura 12(b). Nesta figura, as linhas verticais escuras representam o fluido frio descendente e as linhas verticais claras o fluido quente ascendente.

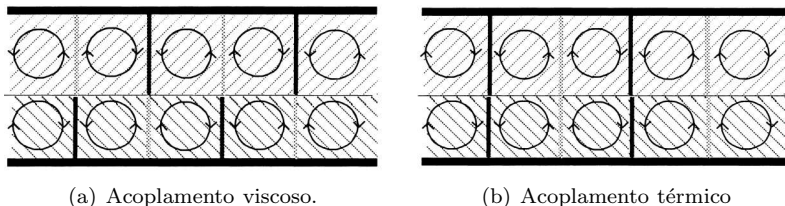


Figura 12: Formas de acoplamento entre as duas camadas. Fonte: Andreck et al. (1998)

Conforme apresentado por Rasenat, Busse e Rehberg (1989), para sistemas onde a espessura das duas camadas é similar, o acoplamento viscoso costuma aparecer para valores de Ra inferiores, no entanto, dependendo dos parâmetros utilizados, pode haver competição entre as duas formas de acoplamento, gerando um estado oscilatório. É importante ressaltar que este modo oscilatório surge mesmo quando a hipótese de interface rígida é assumida, sendo portanto um resultado direto da competição entre os modos de acoplamento. Um exemplo de diagrama de bifurcação obtido para a convecção de RB em duas camadas pode ser visto na Figura 13. Pode-se observar que para valores de número de onda (α) onde não existe estado oscilatório, o acoplamento viscoso sempre surge para menores valores de Ra . No entanto, a curva associada ao acoplamento térmico possui uma maior inclinação, fazendo com que em um determinado ponto as curvas se encontrem. Neste ponto, observa-se o surgimento de uma bifurcação de Hopf, originando um estado oscilatório. Mais detalhes sobre esta forma de comportamento são discutidos nas próximas seções.

A presença de estados oscilatórios também é discutida por Cardin, Nataf e Dewost (1991). Neste trabalho, os autores avaliaram experimentalmente e numericamente, através de análise de estabilidade linear, a convecção de RB em um sistema contendo óleo de silicone sobre glicerol. Variando a razão entre as espessuras das camadas, ob-

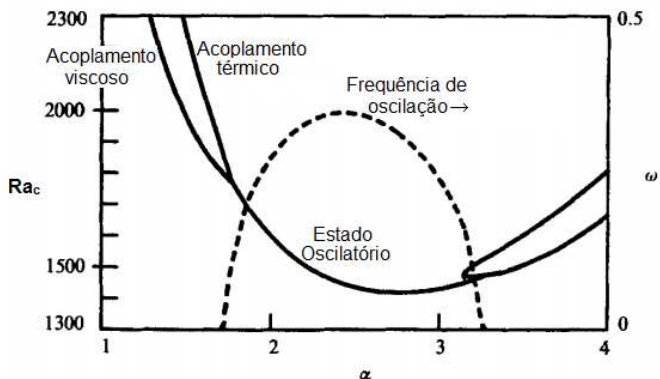


Figura 13: Exemplo de um diagrama de bifurcação mostrando a presença de um estado oscilatório. Adaptado de Rasenat, Busse e Rehberg (1989)

servaram que para o caso onde a espessura da camada superior for 0.76 vezes a espessura da camada inferior ocorre o surgimento de um estado oscilatório, mesmo desconsiderando-se a deformação da interface e gradientes de tensão interfacial. A presença destes gradientes mostra usualmente um efeito estabilizador, sendo que para $Ma = 10$ o estado oscilatório desaparece. No entanto, para o caso onde a tensão interfacial aumenta com o aumento na temperatura ($Ma < 0$), a presença de gradientes de tensão superficial expande o intervalo de números de onda onde o estado oscilatório pode ser observado, aumentando também a frequência das oscilações.

Liu et al. (2006) avaliaram a influência de forças termocapilares na presença de estados oscilatórios em sistemas contendo óleo de silicone/Fluorinert e óleo de silicone/água utilizando análise linear e simulação numérica direta. Para sistemas onde a espessura da camada superior é maior que 1.5 vezes a espessura da camada inferior, os resultados mostram que, assim como observado por Cardin, Nataf e Dewost (1991), o sistema é estabilizado para $Ma > 0$ e desestabilizado para $Ma < 0$. No entanto, para razões entre as espessuras inferiores a 1.5, os resultados mostram que o valor de Ra_c é superior quando $Ma < 0$.

Um importante aspecto avaliado por Cardin, Nataf e Dewost (1991) foi a presença de uma viscosidade interfacial, sendo este um parâmetro negligenciado na maioria dos outros estudos. Apesar disso,

este parâmetro pode ser importante em diversas situações, como por exemplo na formação de turbulência na interface, estabilidade de filmes em espumas, ruptura e coalescência de gotas em emulsões e na própria instabilidade de Bénard-Marangoni (ver Agrawal e Wasan (1979) e as referências citadas neste trabalho para mais detalhes). Cardin, Nataf e Dewost (1991) mostram que a viscosidade interfacial pode alterar significativamente o diagrama de estabilidade, gerando, por exemplo, situações onde o acoplamento térmico é observado para valores inferiores de Ra em comparação com o acoplamento viscoso. Conforme destacado pelos autores, nenhum dos outros parâmetros avaliados (razão entre as espessuras, deformação da interface e dependência da tensão interfacial com a temperatura) gerou resultados similares a este.

No entanto, Binghong, Qiusheng e Zemei (2004) relatam que resultados obtidos utilizando análise linear para um sistema contendo óleo de silicone/Fluorinert mostram que para razões entre as espessuras maior que 1.067 o acoplamento térmico é observado para menores valores de Ra . A princípio estes resultados não contradizem os apresentados por Cardin et al (CARDIN; NATAF; DEWOST, 1991), pois somente razões de aspecto menores que 1 são avaliadas por estes autores.

Finalmente, pode-se destacar o estudo experimental apresentado por Davaille (1999) avaliando a convecção térmica em um sistema contendo dois fluidos miscíveis. A estrutura experimental utilizada pela autora permitiu avaliar o sistema para valores de Ra entre 300 e 3×10^7 e razões entre as viscosidades das camadas entre 1 e 6.4×10^4 , sendo possível tanto a transferência de calor quanto de massa através da interface entre as camadas, sem no entanto haver a presença de tensão interfacial. Os resultados mostram a existência de convecção nas duas camadas, porém, devido à ausência de tensão interfacial ocorre a penetração de uma fase na outra, sendo que nestas condições nenhum estado estacionário foi observado e a temperatura na interface apresentou uma grande não-homogeneidade.

Considerações finais

Avaliando-se os trabalhos apresentados ao longo deste capítulo pode-se perceber a complexidade envolvida na convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada e o grande número de fatores que afetam a estabilidade do sistema. Pode-se, por exemplo, citar a possibilidade de formação de células de convecção hexagonais ou rolos, a forma como estes rolos se arranjam (longitudinal ou transversal), as diversas formas de instabilidade que podem surgir na interface e os diferentes modos através do qual uma camada esteja acoplada com a outra. Todos es-

tes aspectos estão relacionados com parâmetros específicos do sistema, sendo portanto crucial identificar quais são estes parâmetros e qual a resposta do sistema à variações nos valores empregados. Isto pode ser obtido através das equações que governam os fenômenos envolvidos, conforme será discutido no capítulo a seguir. Além disso, a modelagem envolvida no problema de análise de estabilidade linear será discutida, destacando-se as aproximações adotadas e as limitações da técnica de análise linear.

3 EQUAÇÕES DE TRANSPORTE E ANÁLISE LINEAR MODAL

“Never laugh at live dragon, Bilbo you fool!” he said to himself, and it became a favourite saying of his later, and passed into a proverb.

J. R. R. Tolkien, The Hobbit

Neste capítulo será apresentada a modelagem matemática empregada para descrever o comportamento do sistema de convecção R-BPE, juntamente com a análise modal utilizada para avaliar a estabilidade com relação a diferentes valores para os parâmetros físicos que controlam a transferência de calor e quantidade de movimento. Na Figura 14 é apresentado um esquema da configuração geométrica empregada neste trabalho. Apesar de a figura representar uma vista bidimensional, perturbações na direção z também são consideradas.

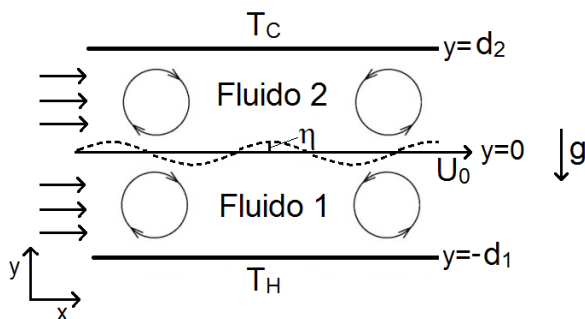


Figura 14: Vista lateral (plano XY) da configuração geométrica utilizada.

Como pode ser observado na Figura 14, a interface não-deformada entre os fluidos é posicionada em $y = 0$. A parede inferior corresponde, por definição, à posição $y = -d_1$ e a parede superior à posição $y = d_2$. O sistema é considerado irrestrito nas direções x e z . A deformação da interface será avaliada pela função $\eta = \eta(x, z, t)$, que representa o deslocamento em relação à posição $y = 0$. A velocidade na interface será considerada constante e igual à U_0 . Em relação à temperatura das paredes, será avaliada o caso onde a temperatura da parede inferior é maior ($T_H > T_C$), de modo que as forças de empuxo desestabilizam o sistema. Ambas as paredes são consideradas como fronteiras rígidas e

condições de não-deslizamento serão empregadas. A seguir são apresentadas as equações de conservação aplicadas a este sistema.

3.1 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Cada uma das camadas apresentadas na Figura 14 possui o seu próprio conjunto de equações governantes, estando elas relacionadas pelas condições de contorno impostas na interface $y = \eta$. No entanto, as mesmas simplificações são adotadas para as duas camadas, de modo que as equações de conservação da massa total do sistema, da quantidade de movimento e da energia podem ser expressas de forma generalizada. Neste trabalho é considerado que os fluidos apresentam comportamento incompressível e Newtoniano, bem como será considerado que a aproximação de Boussinesq é válida. Nestas condições, as equações de conservação citadas anteriormente podem ser expressas, respectivamente, como:

$$\nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla P_i + \nu_i \nabla^2 \vec{v}_i + \beta_i (T_i - T_{ref}) g e_y \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla T_i = \kappa_i \nabla^2 T_i \quad (3.3)$$

onde $\vec{v}_i = (u_i, v_i, w_i)$ representa o vetor velocidade, P_i a pressão e T_i a temperatura para a camada i e e_y o vetor unitário na direção y . As propriedades físicas ρ_i (densidade), ν_i (viscosidade cinemática), β_i (expansividade térmica) e κ_i (difusividade térmica) são consideradas constantes. A resolução da equação de Navier-Stokes (Eq. 3.2) e da equação da conservação da energia (Eq. 3.3) permite a obtenção dos campos de velocidade e temperatura, sendo a equação da continuidade (Eq. 3.1) utilizada como equação auxiliar para o fechamento do problema.

A seguir são listadas as condições de contorno empregadas para as componentes do vetor velocidade nas camadas $i = 1$ e $i = 2$.

1. Velocidade normal à parede: as fronteiras rígidas do sistema serão consideradas impermeáveis, de modo que a velocidade normal é

nula:

$$v_1 = 0 \text{ em } y = -d_1 \quad (3.4)$$

$$v_2 = 0 \text{ em } y = d_2 \quad (3.5)$$

2. Condição de não-deslizamento nas paredes: na interface sólido-fluido, a velocidade tangencial do fluido é considerada igual à velocidade do sólido. No presente estudo, somente o caso de paredes fixas é considerado, de modo que:

$$u_1 = w_1 = 0 \text{ em } y = -d_1 \quad (3.6)$$

$$u_2 = w_2 = 0 \text{ em } y = d_2 \quad (3.7)$$

3. Continuidade da velocidade normal à interface: na interface entre os dois fluidos, é considerado que a velocidade normal nos dois lados da interface é a mesma:

$$v_1 = v_2 \text{ em } y = \eta \quad (3.8)$$

4. Continuidade da velocidade tangencial à interface: assim como para a velocidade normal à interface, a velocidade tangencial também é considerada igual nas duas camadas:

$$u_1 = u_2 \text{ e } w_1 = w_2 \text{ em } y = \eta \quad (3.9)$$

5. Balanço da tensão de cisalhamento: para avaliar a diferença entre a tensão de cisalhamento nos dois lados da interface deve-se considerar a dependência da tensão interfacial com a variação de temperatura e a curvatura da interface (BIRIKH et al., 2005), de modo que:

$$\tau_1^{xy} - \tau_2^{xy} = \frac{d\gamma}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \psi_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \text{ em } y = \eta \quad (3.10)$$

$$\tau_1^{zy} - \tau_2^{zy} = \frac{d\gamma}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial z} - \psi_2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \text{ em } y = \eta \quad (3.11)$$

onde τ_i^{jk} representa a tensão de cisalhamento no plano jk na camada do fluido i , γ a tensão interfacial e ψ_i o valor absoluto da gradiente de temperatura estático entre a interface e as paredes do sistema. Considerando que os fluidos possuam comportamento Newtoniano, as tensões

de cisalhamento podem ser avaliadas como (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2004):

$$\tau_i^{xy} = \mu_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \quad \tau_i^{zy} = \mu_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \right) \quad (3.12)$$

6. Balanço da tensão normal à interface: assim como para a tensão de cisalhamento, a tensão normal não é contínua ao longo da interface devido às forças interfaciais. A diferença entre a tensão normal nas duas camadas é expressa por (LEAL, 2007):

$$\sigma_1^{yy} - \sigma_2^{yy} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (3.13)$$

onde σ_i^{yy} é a tensão normal à interface no fluido i e \mathbf{n} é o vetor normal definido por:

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (3.14)$$

sendo que $F = y - \eta(x, z, t)$ é uma função escalar que define o formato da interface com base na deformação $\eta(x, z, t)$. Conforme será visto nas próximas seções, os termos de alta ordem podem ser desprezados, de modo que $(\partial\eta/\partial x)^2 \ll 1$ e $(\partial\eta/\partial z)^2 \ll 1$. Com isso, o módulo do gradiente de F é aproximadamente igual a 1, o que implica que:

$$\mathbf{n} = -\left(-\frac{\partial\eta}{\partial x}, 1, -\frac{\partial\eta}{\partial z} \right) \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} \quad (3.15)$$

A tensão normal na interface, por sua vez, para o caso de dois fluidos Newtonianos sobrepostos pode ser avaliada como (YIH, 1967; FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2004):

$$\sigma_i^{yy} = \rho_i g \eta - P_i + 2\mu_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \quad (3.16)$$

Na equação anterior, o primeiro termo no lado direito representa a pressão hidrostática causada pelo deslocamento do fluido em relação à posição $y = 0$ e o segundo termo representa a pressão hidrodinâmica. Juntando as expressões acima, o balanço para a tensão normal na interface pode ser expresso como:

$$\rho_1 g \eta - P_1 + 2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \left(\rho_2 g \eta - P_2 + 2\mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = \gamma \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} \right) \quad (3.17)$$

A seguir são apresentadas as condições de contorno empregadas para a equação da conservação da energia.

7 Temperatura fixa nas paredes: nas extremidades sólidas do sistema, será considerado que a temperatura é fixa e homogênea:

$$T_1 = T_H \text{ em } y = -d_1 \quad (3.18)$$

$$T_2 = T_C \text{ em } y = d_2 \quad (3.19)$$

8 Continuidade da temperatura na interface: na interface entre os fluidos, pode-se considerar que a temperatura é contínua, de modo que:

$$T_1 = T_2 \text{ em } y = \eta \quad (3.20)$$

9 Continuidade do fluxo de calor na interface: por último, considera-se que o fluxo de calor também é contínuo através da interface:

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \text{ em } y = \eta \quad (3.21)$$

Este conjunto de condições de contorno é suficiente e necessário para a resolução do problema de análise de estabilidade, conforme apresentado a seguir.

3.2 EQUAÇÕES PERTURBADAS

Para avaliar a estabilidade do sistema de Equações (3.1) - (3.3), será adicionada uma perturbação infinitesimal em um estado base e o comportamento desta perturbação será avaliado com o passar do tempo. Caso as perturbações aumentem indefinidamente, o sistema será instável e caso as perturbações forem amortecidas o sistema será estável. Experimentalmente, estas perturbações ocorrem naturalmente em qualquer sistema devido à pequenas variações térmicas ou mecânicas causadas pela interação com sistemas externos. Considerando um fator $\delta \ll 1$, pode-se expressar as variáveis analisadas como:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{B,i} + \delta \tilde{v}_i \quad P_i = P_{B,i} + \delta \tilde{P}_i \quad T_i = T_{B,i} + \delta \tilde{T}_i \quad (3.22)$$

onde o subscrito B representa um estado base. Cabe ressaltar que a análise de estabilidade linear só permite a análise de perturbações infinitesimais, portanto a amplitude das perturbações e efeitos não-lineares relacionados não serão considerados. O parâmetro δ só é utilizado como recurso para representar a ordem de grandeza das perturbações infinitesimais, sendo que nas próximas seções a sua presença será desconsiderada.

O estado base apresentado na equação anterior representa uma solução para o sistema de equações governantes com as respectivas condições de contorno. No caso da convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille o estado base utilizado para a velocidade corresponde à solução do problema do escoamento plano de Poiseuille para dois fluidos e o estado base para a temperatura correspondente à transferência de calor unicamente por condução, de modo que os perfis obtidos para o campo de velocidades e de temperatura pode ser expresso como:

$$\frac{U_{B,1}}{U_0} = - \left(\frac{m + d_0}{d_0^2 + d_0} \right) y^2 + \left(\frac{d_0^2 - m}{d_0^2 + d_0} \right) y + 1 \quad (3.23)$$

$$\frac{U_{B,2}}{U_0} = - \frac{1}{m} \left(\frac{m + d_0}{d_0^2 + d_0} \right) y^2 + \frac{1}{m} \left(\frac{d_0^2 - m}{d_0^2 + d_0} \right) y + 1 \quad (3.24)$$

$$T_{1,B} = T_H - \psi_1(y + 1) \quad (3.25)$$

$$T_{2,B} = T_C - \psi_2(y - d_0) \quad (3.26)$$

onde $d_0 = d_2/d_1$ e $m = \mu_2/\mu_1$. Detalhes sobre a obtenção deste estado base podem ser vistos no Anexo I. Note que um estado base para a pressão ($P_{B,1}$, $P_{B,2}$) não foi especificado, pois, conforme será visto na sequência, a pressão pode ser facilmente eliminada do conjunto de equações. O estado base para a velocidade corresponde ao escoamento somente na direção x , de modo que $\vec{v}_{B,i} = (U_{B,i}, 0, 0)$

Substituindo a expressão para a velocidade perturbada (Eq. 3.22) na equação da continuidade (Eq. 3.1), tem-se que:

$$\nabla \cdot \vec{v}_{B,i} + \delta \nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_i = 0 \quad (3.27)$$

Considerando que o estado base necessariamente satisfaz a Eq. (3.1), a expressão acima se reduz à:

$$\nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_i = 0 \quad (3.28)$$

De modo semelhante, para a equação de Navier-Stokes (Eq. 3.2)

obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_{B,i}}{\partial t} + \vec{v}_{B,i} \cdot \nabla \vec{v}_{B,i} + \frac{1}{\rho_i} \nabla P_{B,i} - \nu_i \nabla^2 \vec{v}_{B,i} + \beta_i (T_{B,i} - T_0) g e_y = \\ -\delta \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \tilde{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_{B,i} + \vec{v}_{B,i} \cdot \nabla \tilde{v}_i + \frac{1}{\rho_i} \nabla \tilde{P}_i - \right. \\ \left. \nu_i \nabla^2 \tilde{v}_i - \beta_i \tilde{T}_i g e_y \right) + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (3.29)$$

O lado esquerdo desta equação representa a equação de Navier-Stokes aplicada ao estado base. Como o estado base deve ser uma solução do conjunto de equação governantes, fica claro que a soma destes termos deve necessariamente ser nula. Além disso, como $\delta \ll 1$, os termos de alta ordem serão desprezados, de modo que a dinâmica da perturbação pode ser avaliada pelo comportamento dos termos:

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \tilde{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_{B,i} + \vec{v}_{B,i} \cdot \nabla \tilde{v}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla \tilde{P}_i + \nu_i \nabla^2 \tilde{v}_i + \beta_i \tilde{T}_i g e_y \quad (3.30)$$

Para a equação da conservação da energia (Eq. 3.3) a substituição dos termos definidos na Eq. 3.22 resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{B,i}}{\partial t} + U_{B,i} \cdot \nabla T_{B,i} - \kappa_i \nabla^2 T_{B,i} = \\ -\delta \left(\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial t} + \tilde{v}_i \cdot \nabla T_{B,i} + \vec{v}_{B,i} \cdot \nabla \tilde{T}_i - \kappa_i \nabla^2 \tilde{T}_i \right) + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Novamente, considerando que o lado esquerdo da equação acima é nulo e desprezando os termos de altas ordens, tem-se que:

$$\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial t} + \tilde{v}_i \cdot \nabla T_{B,i} + \vec{v}_{B,i} \cdot \nabla \tilde{T}_i = \kappa_i \nabla^2 \tilde{T}_i \quad (3.32)$$

Para a adimensionalização das equações, são utilizadas as propriedades físicas da camada inferior (fluido 1). Desse modo, a espessura d_1 é utilizada como escala de comprimento, κ_1/d_1 como escala para a perturbação da velocidade, U_0 para a velocidade do estado base, d_1^2/κ_1 para a escala de tempo, $\psi_1 d_1$ como escala de temperatura e $\rho_1 \nu_1 \kappa_1/d_1^2$

para a pressão. Por simplicidade, a mesma nomenclatura será utilizada para as variáveis independentes, porém estas também são adimensionadas com base nas escalas citadas. Com isso, tem-se que as Equações 3.28, 3.30 e 3.32 avaliadas na camada inferior em sua forma adimensional podem ser dadas por:

$$\nabla \cdot \widehat{\vec{v}}_1 = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial t} + Re(\widehat{v}_1 \nabla \cdot \widehat{\vec{v}}_{B,1} + \widehat{\vec{v}}_{B,1} \cdot \nabla \widehat{v}_1) = -\nabla \widehat{P}_1 + \nabla^2 \widehat{v}_1 + Ra \widehat{T}_1 e_y \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \widehat{T}_1}{\partial t} + RePr \widehat{\vec{v}}_{B,1} \cdot \nabla \widehat{T}_1 - \widehat{v}_1 = \nabla^2 \widehat{T}_1 \quad (3.35)$$

onde os números de Prandtl Pr , Reynolds Re e Rayleigh Ra são dados por:

$$Pr = \frac{\nu_1}{\kappa_1} \quad Re = \frac{U_0 d_1}{\nu_1} \quad Ra = \frac{\beta_1 g \psi_1 d_1^4}{\nu_1 \kappa_1} \quad (3.36)$$

Para a camada superior (fluido 2), as equações anteriores são avaliadas como:

$$\nabla \cdot \widehat{\vec{v}}_2 = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \widehat{v}_2}{\partial t} + Re(\widehat{v}_2 \nabla \cdot \widehat{\vec{v}}_{B,2} + \widehat{\vec{v}}_{B,2} \cdot \nabla \widehat{v}_2) = -\frac{\nabla \widehat{P}_1}{\rho_0} + \nu_0 \nabla^2 \widehat{v}_2 + \beta_0 Ra \widehat{T}_2 e_y \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \widehat{T}_2}{\partial t} + RePr \widehat{\vec{v}}_{B,2} \cdot \nabla \widehat{T}_2 - \widehat{v}_2 \psi_0 = \kappa_0 \nabla^2 \widehat{T}_1 \quad (3.39)$$

onde $\rho_0 = \rho_2/\rho_1$, $\nu_0 = \nu_2/\nu_1$, $\beta_0 = \beta_2/\beta_1$, $\psi_0 = \psi_2/\psi_1$ e $\kappa_0 = \kappa_2/\kappa_1$.

3.3 ANÁLISE MODAL

Para um sistema ser considerado estável, este deve ser estável com relação a todas as perturbações infinitesimais possíveis. Conforme apresentado por Chandrasekhar (1961), uma das maneiras de avaliar a estabilidade em relação à qualquer perturbação possível é expressar

as perturbações como a superposição de certos modos básicos e analisar a estabilidade do sistema com relação à cada um desses modos. O conjunto de equações apresentadas anteriormente (Eq. 3.33 - 3.39) representa um sistema de equações diferenciais lineares e com coeficientes constantes, sendo que para um sistema sem limites nas direções x e z a solução para uma perturbação $k = k(x, y, z, t)$ qualquer pode ser expressa da forma:

$$k(x, y, z, t) = f(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (3.40)$$

onde α e β são números de onda associados às direções x (*streamwise*) e z (*spanwise*), respectivamente, e ω representa a velocidade de onda associada à perturbação. Neste trabalho será avaliado o comportamento das perturbações somente em relação ao tempo (estabilidade absoluta), de modo que α e β assumirão somente valores reais. A velocidade de onda ω , no entanto, será avaliada como $\omega = \omega_r + i\omega_i$, onde ω_r é a velocidade de fase e ω_i é a taxa de crescimento temporal da perturbação, sendo que $\omega_i < 0$ corresponde à uma perturbação amortecida, $\omega_i > 0$ a uma perturbação amplificada e $\omega_i = 0$ corresponde ao estado de *estabilidade neutra*, sendo este o limite onde o sistema deixa de ser estável. As perturbações avaliadas desta forma são chamadas de *modos normais*, devido à ortogonalidade da função exponencial (CHARRU, 2011). O principal objetivo da análise de estabilidade linear é avaliar o estado de estabilidade neutra em função dos parâmetros do sistema de equações para todas as perturbações possíveis, ou seja, para todos os valores de α e β .

Para aplicar o método de análise modal nas equações governantes para o fluido 1 (Eq. 3.33 - 3.35), por simplicidade, cada componente do vetor velocidade será avaliado individualmente. Dessa forma, o conjunto de equações pode ser reescrito como:

- Conservação da Massa:

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial t} + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial t} = 0 \quad (3.41)$$

- Velocidade na direção x :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} + Re \left(\hat{U}_{B,1} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{U}_{B,1}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial z^2} \quad (3.42)$$

- Velocidade na direção y :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial t} + Re \hat{U}_{B,1} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial z^2} + Ra \hat{T} \quad (3.43)$$

- Velocidade na direção z :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial t} + Re \hat{U}_{B,1} \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_1}{\partial z^2} \quad (3.44)$$

- Energia:

$$\frac{\partial \hat{T}_1}{\partial t} + Re Pr \hat{U}_{B,1} \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial x} - \hat{v}_1 = \frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial z^2} \quad (3.45)$$

Definindo as perturbações em termo dos modos normais:

$$\{\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{w}_1, \hat{P}_1, \hat{T}_1\}(x, y, z, t) = \{\phi_{1,1}(y), \phi_{2,1}(y), \phi_{3,1}(y), \varphi_1(y), \theta_1(y)\} e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (3.46)$$

Substituindo na equação da continuidade (Eq. 3.41), após simplificar os termos em comum, obtém-se:

$$i\alpha\phi_{1,1} + \frac{\partial\phi_{2,1}}{\partial y} + i\beta\phi_{3,1} = 0 \quad (3.47)$$

De maneira semelhante, para a velocidade na direção x :

$$-\frac{1i}{Pr}\omega\phi_{1,1} + i\alpha Re U_{B,1}\phi_{1,1} + Re\phi_{2,1}\frac{\partial\phi_{2,1}}{\partial y} = -i\alpha\varphi + \frac{\partial^2\phi_{1,1}}{\partial y^2} - k^2\phi_{1,1} \quad (3.48)$$

onde $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Para a velocidade na direção y , tem-se:

$$-\frac{1i}{Pr}\omega\phi_{2,1} + i\alpha Re U_{B,1}\phi_{2,1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2\phi_{2,1}}{\partial y^2} - k^2\phi_{2,1} + Ra\theta_1 \quad (3.49)$$

Para a velocidade na direção z , a substituição resulta em:

$$-\frac{1i}{Pr}\omega\phi_{3,1} + i\alpha Re U_{B,1}\phi_{3,1} = -i\beta\varphi_1 + \frac{\partial^2\phi_{3,1}}{\partial y^2} - k^2\phi_{3,1} \quad (3.50)$$

Finalmente, para a equação da conservação da energia:

$$-i\omega\theta + i\alpha RePrU_{B,1}\theta + \phi_{2,1}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - k^2\theta \quad (3.51)$$

Para simplificar o sistema de equações acima, pode-se fazer $i\alpha$ (Eq. 3.48) + $i\beta$ (Eq. 3.50) e utilizar a Eq. (3.47) para simplificar os termos. Derivando a expressão final em relação à y , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\omega i}{Pr} \frac{d^2\phi_1}{dy^2} - i\alpha ReU_{B,1} \frac{d^2\phi_1}{dy^2} - i\alpha Re\phi_1 \frac{d^2U_{B,1}}{dy^2} = \\ k^2 \frac{d\phi_1}{dy} - \frac{d^4\phi_1}{dy^4} + k^2 \frac{d^2\phi_1}{dy^2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde, $\phi_1 = \phi_{2,1}$ será utilizado por simplicidade. Observe que a equação acima representa uma equação diferencial ordinária em relação à variável independente y . Utilizando-se a Eq. (3.49) é possível eliminar a pressão da equação anterior. Após alguma manipulação, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega i}{Pr} \left(\frac{d^2\phi_1}{dy^2} - k^2\phi_1 \right) + i\alpha Re \left(U_{B,1} \left(\frac{d^2\phi_1}{dy^2} - k^2\phi_1 \right) - \phi_1 \frac{d^2U_{B,1}}{dy^2} \right) = \\ \frac{d^4\phi_1}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2\phi_1}{dy^2} + k^4\phi_1 - k^2 Ra\theta_1 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sendo esta a equação de Orr-Sommerfeld com a adição do termo referente ao empuxo. Alternativamente, pode-se obter esta mesma equação aplicando-se o operador rotacional duas vezes na equação de Navier-Stokes e simplificando os termos com o uso da equação da continuidade. A utilização do mesmo procedimento descrito anteriormente para a camada superior (fluido 2) permite a obtenção da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega i}{Pr} \left(\frac{d^2\phi_2}{dy^2} - k^2\phi_2 \right) + i\alpha Re \left(U_{B,2} \left(\frac{d^2\phi_2}{dy^2} - k^2\phi_2 \right) - \phi_2 \frac{d^2U_{B,2}}{dy^2} \right) = \\ \nu_0 \left(\frac{d^4\phi_2}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2\phi_2}{dy^2} + k^4\phi_2 \right) - \beta_0 k^2 Ra\theta_2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

A substituição dos modos normais na equação da perturbação para a energia (Eq. 3.51) resulta diretamente em:

$$-i\omega\theta_1 + i\alpha RePrU_{B,1}\theta_1 - \phi_1 = \frac{d^2\theta_1}{dy^2} - k^2\theta_1 \quad (3.55)$$

De forma semelhante, para a camada superior tem-se que:

$$-i\omega\theta_2 + i\alpha RePrU_{B,2}\theta_2 - \psi_0\phi_2 = \kappa_0 \left(\frac{d^2\theta_1}{dy^2} - k^2\theta_2 \right) \quad (3.56)$$

Para o caso onde $\alpha = 0$ o conjunto de equações para a velocidade vertical e para a temperatura coincide com as equações de Oberbeck-Boussinesq, utilizadas para avaliar a estabilidade linear de um fluido de Boussinesq estático.

O sistema de equações lineares (3.53) - (3.56) representa um problema de autovalor generalizado que pode ser expresso da forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \omega\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (3.57)$$

onde $\mathbf{x} = (\phi_1, \phi_2, \theta_1, \theta_2)^T$ representa o vetor das autofunções, ω o autovalor associado ao sistema e as matrizes 4x4 \mathbf{A} e \mathbf{B} são avaliadas como:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} L_{OS,1} & 0 & -k^2Ra & 0 \\ 0 & L_{OS,2} & 0 & -\beta_0k^2Ra \\ -1 & 0 & L_{OB,1} & 0 \\ 0 & -\psi_0 & 0 & L_{OB,2} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} L_{EV,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{EV,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1i \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

onde três diferentes classes de operadores lineares podem ser observados, sendo eles aqui chamados de operador de Orr-Sommerfeld (L_{OS}), operador de Oberbeck-Boussinesq (L_{OB}) e operador do autovalor (L_{EV}). Por exemplo, para a camada inferior (fluido 1), estes operadores são dados por:

$$L_{OS,1} = -i\alpha Re \left(U_{B,1} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) - \frac{d^2U_{B,1}}{dy^2} \right) + \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \quad (3.60)$$

$$L_{OB,1} = i\alpha RePrU_{B,1} - \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \quad (3.61)$$

$$L_{EV,1} = -\frac{1i}{Pr} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \quad (3.62)$$

Para a resolução deste problema de autovalor generalizado é necessário o uso das condições de contorno previamente apresentadas. No

entanto, estas condições devem também ser apresentadas em termos das variáveis de perturbações. Como visto anteriormente, as condições de contorno impostas na interface $y = \eta$ dependem diretamente da função $\eta(x, z, t)$, sendo portanto necessário avaliar esta função. Isto pode ser feito com o uso da *condição cinemática*, conforme apresentado a seguir.

3.3.1 Condição Cinemática

Quando as condições de contorno são especificadas na fronteira entre dois fluidos imiscíveis deve-se considerar a possibilidade de ocorrer deformação da interface quando os fluidos estiverem em movimento, como no caso do escoamento paralelo. No entanto, não é possível especificar o formato da interface, pois este depende das variáveis envolvidas no problema, devendo ser considerado com uma variável adicional a ser obtida como parte da solução (LEAL, 2007). Na Figura 15 é apresentado um esquema de como a deformação da interface ocorre.

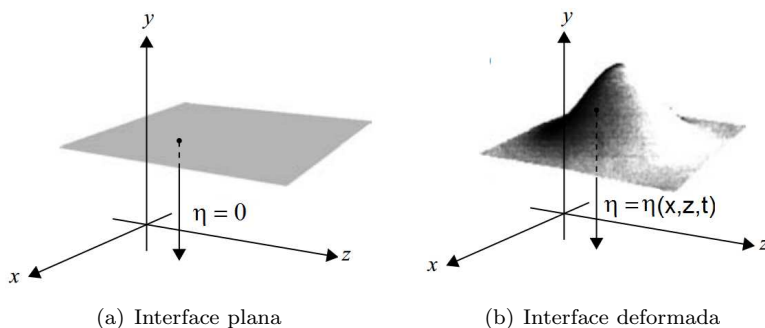


Figura 15: Deformação da interface em coordenadas cartesianas. Adaptado de: Leal (2007)

Conforme comentado anteriormente, para avaliar o formato da interface será utilizado uma função definida em coordenadas cartesianas como:

$$F(x, y, z, t) = y - \eta(x, z, t) \quad (3.63)$$

Considerando que os dois fluidos em contato são perfeitamente imiscíveis e que não ocorra mudança de fase, as partículas de fluido na interface irão sempre se manter na interface, de modo que a derivada substantiva da função escalar $F(x, y, z, t)$ deve ser igual a zero em todos

os pontos da interface (KUNDU; COHEN, 2002):

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F = 0 \quad (3.64)$$

Como na interface as três componentes da velocidade são iguais para as duas camadas, pode-se utilizar o campo de velocidade de qualquer uma das camadas nesta equação. Por simplicidade será utilizado \vec{v}_1 . A substituição da definição da função F na expressão anterior resulta em:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_1 - \vec{v}_1 \cdot \nabla \eta = 0 \quad (3.65)$$

Tomando como base a interface plana não perturbada ($\eta = 0$), pode-se substituir a definição das variáveis perturbadas (Eq. 3.22) de modo que após a adimensionalização obtém-se (utilizando a espessura d_1 como escala para a perturbação da interface η):

$$-\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} + \hat{v} - \vec{U}_{B,1} \cdot \nabla \hat{\eta} - \hat{v}_1 \cdot \nabla \hat{\eta} = 0 \quad (3.66)$$

Conforme destacado por Kundu e Cohen (2002), para perturbações infinitesimais tanto \hat{v}_1 quanto $\nabla \hat{\eta}$ são pequenos, de modo que o produto entre estes dois termos pode ser negligenciado em comparação com os outros termos. Desse modo, a equação acima pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = \hat{v}_1 - RePr \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \quad (3.67)$$

Definindo-se as variáveis presentes em termo dos modos normais:

$$\hat{v}_1 = \phi_1 e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad \hat{\eta} = \eta_0 e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (3.68)$$

e substituindo na equação anterior:

$$-i\omega\eta_0 = \phi_1 - i\alpha\eta_0 RePr \quad (3.69)$$

A equação anterior permite obter de forma explícita a deformação da interface. No entanto, a perturbação da velocidade vertical ϕ_1 é avaliada em $y = \eta$, de modo que η_0 não pode ser definido sem que o campo de velocidades seja obtido. Porém, considerando novamente que tanto a perturbação da interface quanto da velocidade são muito pequenas, pode-se transpor as condições aplicadas em $y = \eta$ para $y = 0$ utilizando-se uma expansão em série de Taylor, de modo que desprezando os termos de alta ordem $\phi_1|_{y=\eta} \approx \phi_1|_{y=0}$. Com isso, a deformação da

interface passa a ser dada por:

$$\eta_0 = \frac{\phi_1(0)}{i(\alpha RePr - \omega)} \quad (3.70)$$

Esta expressão coincide¹ com a apresentada por Yih (1967) para a deformação da interface. Conhecendo-se a expressão para η , é possível avaliar as condições de contorno em função das variáveis perturbadas e dos modos normais, conforme apresentado a seguir.

3.3.2 Condições de Contorno

A obtenção das condições de contorno em função dos modos normais segue um procedimento semelhante ao empregado para as equações. A seguir serão apresentadas as condições de contorno em sua forma final, sendo que detalhes da obtenção destas condições podem ser vistos no Anexo II.

1. *Velocidade normal à parede:*

$$\phi_1 = 0 \text{ em } y = -1 \quad \phi_2 = 0 \text{ em } y = d_0 \quad (3.71)$$

2. *Condição de não-deslizamento nas paredes:*

$$\frac{d\phi_1}{dy} = 0 \text{ em } y = -1 \quad \frac{d\phi_2}{dy} = 0 \text{ em } y = d_0 \quad (3.72)$$

3. *Continuidade da velocidade normal à interface:*

$$\phi_1 = \phi_2 \text{ em } y = 0 \quad (3.73)$$

4. *Continuidade da velocidade tangencial à interface:*

$$\frac{d\phi_2}{dy} - \frac{d\phi_1}{dy} = \frac{i\alpha\phi_1}{i(\alpha RePr - \omega)} \left(\frac{\partial \hat{U}_{B,1}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{U}_{B,2}}{\partial y} \right) RePr$$

¹Para fins de comparação, deve-se considerar que Yih utiliza uma formulação baseada na vorticidade e os modos normais são definidos de forma diferente.

$$\text{em } y = 0 \quad (3.74)$$

5. *Balanço da tensão de cisalhamento:*

$$\begin{aligned} & \left(k^2 \phi_1 + \frac{d^2 \phi_1}{dy^2} \right) - m \left(k^2 \phi_2 + \frac{d^2 \phi_2}{dy^2} \right) = \\ & -k^2 Ma \left(\theta_1 - \frac{\phi_1}{i(\alpha Re Pr - \omega)} \right) \quad \text{em } y = 0 \quad (3.75) \end{aligned}$$

6. *Balanço da tensão normal à interface:*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^3 \phi_1}{dy^3} - 3k^2 \frac{d\phi_1}{dy} - \frac{\omega}{Pr} \frac{d\phi_1}{dy} \right) - m \left(\frac{d^3 \phi_2}{dy^3} - 3k^2 \frac{d\phi_2}{dy} - \frac{\omega}{Pr\nu_0} \frac{d\phi_2}{dy} \right) \\ & - i\alpha Re \left(U_{B,1} \frac{d\phi_1}{dy} - \phi_1 \frac{dU_{B,1}}{dy} \right) + i\alpha \rho_0 Re \left(U_{B,2} \frac{d\phi_2}{dy} - \phi_2 \frac{dU_{B,2}}{dy} \right) \\ & = k^2 \frac{\phi_1}{i(\alpha Re Pr - \omega)} (Sk^2 + Ra_\rho) \quad \text{em } y = 0 \quad (3.76) \end{aligned}$$

7. *Temperatura fixa nas paredes:*

$$\theta_1 = 0 \quad \text{em } y = -1 \quad \theta_2 = 0 \quad \text{em } y = d_0 \quad (3.77)$$

8. *Continuidade da temperatura na interface:*

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\phi_1}{i(\alpha Re Pr - \omega)} (1 - \psi_0) \quad \text{em } y = 0 \quad (3.78)$$

9. *Continuidade do fluxo de calor na interface:*

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y} = k_0 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \quad \text{em } y = 0 \quad (3.79)$$

3.4 MÉTODO PSEUDO ESPECTRAL DE CHEBYSHEV

Para resolver o problema de autovalor generalizado apresentado na Eq. (3.57), é necessário transformar o sistema de operadores diferen-

ciais em um sistema de equações lineares. Para isso, será empregado um método pseudo espectral utilizando os polinômios de Chebyshev como funções de teste. Este método de resolução tem sido aplicado com sucesso em diversos problemas envolvendo fenômenos de transporte (ALESCIO, 2006; BAZÁN, 2008). A seguir será apresentado um breve resumo da aplicação do método para o problema apresentado na Eq. (3.57). Para mais detalhes sobre formulação e utilização de métodos espectrais recomenda-se os livros-texto de Canuto et al. (2006, 2007).

Segundo Gheorghiu (2007), os métodos espectrais buscam aproximar funções através do uso de séries truncadas de polinômios ortogonais, como por exemplo séries de Fourier para problemas periódicos ou polinômios de Chebyshev ou Legendre para problemas não-periódicos. Estas funções são suaves em todo o domínio de solução, sendo esta a principal diferença entre os métodos espectrais e os que utilizam funções de teste suaves por partes, como por exemplo os métodos de diferenças finitas e elementos finitos. Os métodos espectrais costumam ser divididos em três categorias (de acordo com a forma como as funções teste são escolhidas e utilizadas para computar o resíduo): métodos de Galerkin, tau e pseudo espectrais (ou de colocação).

Conforme mencionado anteriormente, neste trabalho será utilizado um método pseudo espectral utilizando como funções de teste os polinômios de Chebyshev. Desse modo, as autofunções ϕ_i e θ_i podem ser avaliadas como:

$$\phi_i(y) = \sum_{k=0}^{k=N-1} \bar{\phi}_i^k T_k(y) \quad \theta_i(y) = \sum_{k=0}^{k=N-1} \bar{\theta}_i^k T_k(y) \quad (3.80)$$

onde T_k são os polinômios de Chebyshev (de primeira espécie) de ordem k . Estes polinômios satisfazem a relação:

$$T_k(y) = \cos(k \cos^{-1} y) \quad (3.81)$$

sendo que os polinômios de ordem $k = 0, \dots, 4$ podem ser vistos na Figura 16 para o intervalo $y \in [-1, 1]$.

Na definição apresentada na Eq. (3.80), $\bar{\phi}_i^k$ e $\bar{\theta}_i^k$ são coeficientes associados aos polinômios de ordem k a serem determinados. No método pseudo espectral, utilizam-se N pontos de colocação espaciais onde esta relação deve ser satisfeita, determinados utilizando-se a

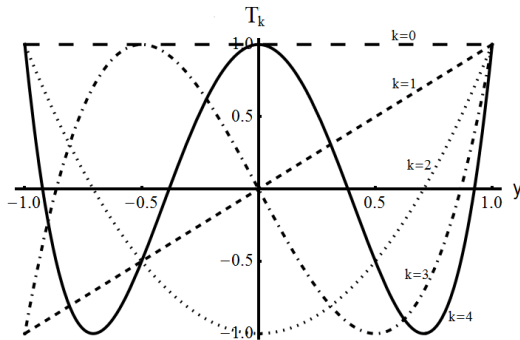


Figura 16: Polinômios de Chebyshev the ordem $k = 0, \dots, 4$.

fórmula de Chebyshev-Gauss-Lobatto:

$$y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{N-1}\right) \quad (3.82)$$

Estes pontos costumam ser chamados de *pontos de Gauss-Lobatto*. Conforme destacado por Trefethen (2000), geometricamente estes pontos representam projeções no eixo y de pontos igualmente espaçados na metade superior de um círculo unitário, conforme pode ser visto na Figura 17.

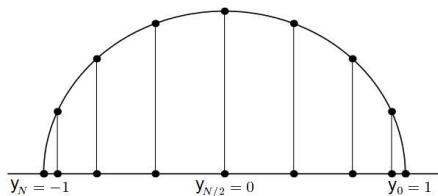


Figura 17: Pontos de Gauss-Lobatto como projeção de pontos equidistantes em um círculo. Fonte: Trefethen (2000)

O uso de pontos de colocação seguindo esta distribuição evita problemas associados ao uso de pontos igualmente espaçados, em especial o fenômeno de Runge. Além disso, observando-se a Eq. (3.82) pode-se ver que os pontos de colocação sempre definem um domínio $[-1, 1]$.

As derivadas das autofunções em relação à y podem ser obtidas simplesmente derivando-se os polinômios na Eq. (3.80). Desse modo, substituindo-se estas expressões nas Equações (3.53) - (3.56) obtém-se um sistema de equações lineares contendo $4N$ equações que devem ser satisfeitas nos pontos de colocação y_n . Por exemplo, para a equação de Orr-Sommerfeld aplicada na camada inferior (Eq. 3.53):

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^{k=N-1} \bar{\phi}_1^k \frac{d^4 T_k(y_n)}{dy^4} + (i\alpha Re U_{B,1}(y_n) + 2k^2) \sum_{k=0}^{k=N-1} \bar{\phi}_1^k \frac{d^2 T_k(y_n)}{dy^2} \\
& - \left(i\alpha Re \left(U_{B,1}(y_n) k^2 + \frac{d^2 U_{B,1}(y_n)}{dy^2} \right) + k^4 \right) \sum_{k=0}^{k=N-1} \bar{\phi}_1^k T_k(y_n) \\
& + k^2 Ra \sum_{k=0}^{k=N-1} \bar{\theta}_1^k T_k(y_n) = \\
& \frac{\omega i}{Pr} \left(\sum_{k=0}^{k=N-1} \bar{\phi}_1^k \frac{d^2 T_k(y_n)}{dy^2} - k^2 \sum_{k=0}^{k=N-1} \bar{\phi}_1^k T_k(y_n) \right) \quad (3.83)
\end{aligned}$$

De forma semelhante, as condições de contorno também são expressas em função dos polinômios de Chebyshev. Neste ponto, cabe ressaltar que para a discretização das equações utilizou-se o software Chebfun², sendo este uma extensão para Matlab que permite a discretização de funções em termo dos polinômios de Chebyshev. A aplicação deste software para a resolução de equações diferenciais apresenta excelentes resultados, conforme destacado por Trefethen e colaboradores (DRISCOLL; BORNEMANN; TREFETHEN, 2008; BATTLES; TREFETHEN, 2004). O software permite a definição de “condições de contorno” internas, ou seja, permite a especificação de condições que devem ser satisfeitas nos nós internos. Isto possibilita o uso de um único domínio $[-1, d_0]$ para as quatro equações governantes (Eq. 3.53 - 3.56), de modo que as condições de contorno na interface são tratadas como condições restritivas que devem ser satisfeitas em $y = 0$, sendo alocadas em posições internas das matrizes associadas às equações governantes. A posição exata depende da posição da interface, ou seja, do valor de d_0 . As condições de contorno aplicadas nas extremidades do sistema ($y = -1$ e $y = d_0$), por sua vez, são alocadas nas primeiras e nas últimas linhas das matrizes associadas a cada equação governante. Desse modo, o

²<http://www2.maths.ox.ac.uk/chebfun/>

problema de autovalor generalizado (Eq. 3.57) é avaliado como:

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \omega\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}} \quad (3.84)$$

onde $\bar{\mathbf{x}}$ é o vetor dos coeficientes:

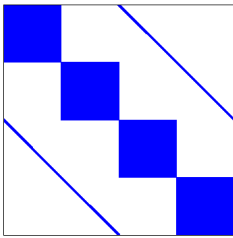
$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\phi}_1^0, \dots, \bar{\phi}_1^{N-1}, \bar{\phi}_2^0, \dots, \bar{\phi}_2^{N-1}, \bar{\theta}_1^0, \dots, \bar{\theta}_1^{N-1}, \bar{\theta}_2^0, \dots, \bar{\theta}_2^{N-1})^T \quad (3.85)$$

e $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são as matrizes dos operadores lineares discretizados:

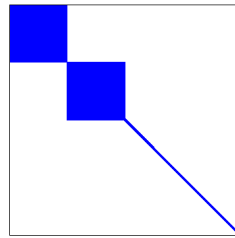
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{OS,1} & 0 & -k^2 Ra \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \bar{L}_{OS,2} & 0 & -\beta_0 k^2 Ra \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 & \bar{L}_{OB,1} & 0 \\ 0 & -\psi_0 \mathbf{I} & 0 & \bar{L}_{OB,2} \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{EV,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_{EV,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1i \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1i \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem N e os zeros representam matrizes nulas $N \times N$. A esparsidade destas matrizes, após a implementação utilizando o Chebfun, pode ser vista na Fig. 18. Após a discretização, o problema de autovalor generalizado apresentado na Eq. (3.84) pode ser resolvido utilizando-se qualquer solver para problemas de autovalor, como as rotinas Lapack utilizadas pelo Matlab.



(a) $\bar{\mathbf{A}}$



(b) $\bar{\mathbf{B}}$

Figura 18: Esparsidade das matrizes dos operadores lineares.

4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR

“Science is nothing without generalizations. Detached and ill-assorted facts are only raw material, and in the absence of a theoretical solvent, have but little nutritive value.”

Lord Rayleigh, 1884

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com o modelo matemático e a metodologia numérica descritos anteriormente. Primeiramente, serão avaliados diversos casos-limite onde determinados parâmetros são desconsiderados, permitindo assim uma comparação com resultados apresentados na literatura. Em seguida serão apresentados resultados obtidos considerando todo o conjunto de parâmetros que governam o sistema.

4.1 ANÁLISE DE CASOS-LIMITE

Conforme comentado anteriormente, a convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada pode ser vista como uma generalização que engloba diversas formas de escoamento mais simples quando determinados parâmetros assumem valores específicos. De modo geral, estes escoamentos podem ser divididos em convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille em uma única camada ($d_0 = 0$), convecção de Rayleigh-Bénard estratificada ($Re = 0$) e escoamento plano de Poiseuille estratificado ($Ra = 0$). Estes casos serão tratados no presente trabalho como casos-limite.

A análise das equações apresentadas no capítulo anterior mostra que a estabilidade da convecção RBPE depende dos seguintes números adimensionais: Pr , Re , Ra , Ma , Ra_ρ e S , além da seguinte relação entre as propriedades físicas das camadas: ν_0 , ρ_0 , β_0 , κ_0 , k_0 e d_0 , totalizando assim 12 parâmetros¹. A análise de casos-limite é importante pois permite investigar determinados efeitos isoladamente, reduzindo significativamente este número de parâmetros governantes. Nesta seção será apresentada a análise de estabilidade de determinados casos-limite, comparando-se os resultados, sempre que possível, com dados publicados na literatura. Esta comparação servirá também como um meio de validar o modelo matemático apresentado no capítulo anterior.

¹Não considerando os números de onda α e β .

Tabela 2: Número de Rayleigh crítico para convecção RBP em uma única camada para $Pr = 1$. Comparação com resultados apresentados por: [1] (MULLER, 1990), [2] (FUJIMURA; KELLY, 1988), [3] (JEROME, 2011).

Re	Ra_c [1]	Ra_c [2]	Ra_c [3]	Ra_c
1	1710.1	1710.1	1710.1	1710.1
2	1717.2	1717.2	1717.2	1717.2
3	1728.9	1728.9	1728.9	1728.9
4	1745.4	1745.4	1745.4	1745.4
5	1766.5	1766.7	1766.7	1766.7
6	1792.4	1792.8	1792.8	1792.9
7	1822.9	1823.8	1823.8	1823.8
8	1858.2	1859.6	1859.6	1859.6
9	1898.1	1900.3	1900.3	1900.2
10	1942.7	1946.1	1946.1	1946.1
20	2647.8	2695.4	2695.4	2695.4

Na Tabela 2 é apresentada uma comparação entre o valor de Ra_c obtido com o modelo empregado neste trabalho (última coluna) e o valor apresentado por diversos autores para a convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille em uma única camada, considerando diversos valores de Re . O valor de Ra_c corresponde a rolos transversais ($\beta = 0$, $\alpha \neq 0$). Como pode ser visto, os valores obtidos neste trabalho praticamente coincidem com os apresentados por Jerome (2011) e Fujimura e Kelly (1988). Para $Re > 6$ verifica-se um pequeno desvio em relação aos valores apresentados por Müller (1990), sendo porém os valores apresentados por este autor obtidos através de análise assintótica para pequenos valores de Re , de modo que desvios para altos valores de Re são esperados. No entanto, o comportamento observado em todos os casos é o mesmo: o aumento no valor de Re estabiliza o escoamento, causando um aumento significativo no valor de Ra_c . Além dos valores de Re e Ra , o escoamento RBP em uma única camada depende somente do número de Prandtl, sendo que o aumento em Pr também estabiliza o sistema.

O problema de autovalor generalizado apresentado na Eq. (3.84) admite um número infinito de autovalores ω . O objetivo da análise de estabilidade, no entanto, é obter os autovalores associados aos modos mais perigosos (ou mais instáveis), ou seja, aqueles que possuem as maiores taxas de crescimento ω_i . Os valores de Ra_c apresentados na Tabela 2 correspondem todos ao modo mais instável. Para a convecção

de Rayleigh-Bénard em duas camadas, diversos autores observaram que os dois modos mais instáveis correspondem usualmente ao acoplamento viscoso e ao acoplamento térmico (RASENAT; BUSSE; REHBERG, 1989; CARDIN; NATAF; DEWOST, 1991). A predominância de algum destes modos depende dos parâmetros utilizados, porém na maioria dos casos observa-se que o acoplamento viscoso surge para menores valores de Ra_c .

Na Figura 19 são apresentadas as curvas de estabilidade associadas a estes dois modos para o caso da convecção de Rayleigh-Bénard em duas camadas idênticas (mesmas propriedades físicas). As linhas correspondem aos valores apresentados por Rasenat, Busse e Rehberg(1989), enquanto que os pontos representam os valores obtidos nestes trabalho. Analisando o conjunto de equações e condições de contorno governantes, percebe-se que quando $Re = 0$ a estabilidade do sistema depende somente do valor de k , não havendo diferenciação entre os números de onda α e β .

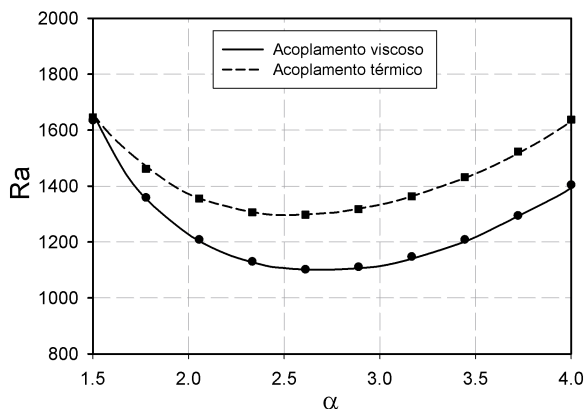


Figura 19: Curvas de estabilidade para a convecção de Rayleigh-Bénard em duas camadas idênticas.

Para manter a mesma formulação utilizada por Rasenat, Busse e Rehberg(1989), considerou-se $\beta = 0$, de modo que os resultados são apresentados na Figura 19 em função de α . Como pode ser observado, o acoplamento viscoso surge para menores valores de Ra_c dentro de toda a faixa de valores investigada. O ponto de mínimo desta curva corresponde aos valores $Ra_c = 1100.7$ e $\alpha_c = 2.68$, sendo estes os parâmetros críticos para a convecção de Rayleigh-Bénard em uma única

camada quando se considera uma superfície rígida e uma livre como condições de contorno (ver Tabela 1).

Conforme comentado anteriormente, em muitos casos as curvas associadas aos dois modos de acoplamento colapsam e dão origem a um estado oscilatório. Este processo ocorre através de uma bifurcação de Hopf, o que faz com que os dois autovalores mais instáveis passem a ser complexos conjugados. Um exemplo onde ocorre a existência de um estado oscilatório é apresentado na Figura 20, correspondendo ao caso base avaliado por Cardin, Nataf e Dewost (1991), onde $d_0 = 0.76$, $\rho_0 = 0.77$, $\nu_0 = 0.67$, $\kappa_0 = 1.27$, $k_0 = 0.54$, $\beta_0 = 1.92$, $\psi_0 = 1/k_0$ e $Ma = S = Ra_p^{-1} = 0$. Também neste caso, as linhas correspondem aos valores apresentados por Cardin, Nataf e Dewost (1991) e os pontos correspondem aos valores obtidos com o modelo matemático previamente descrito.

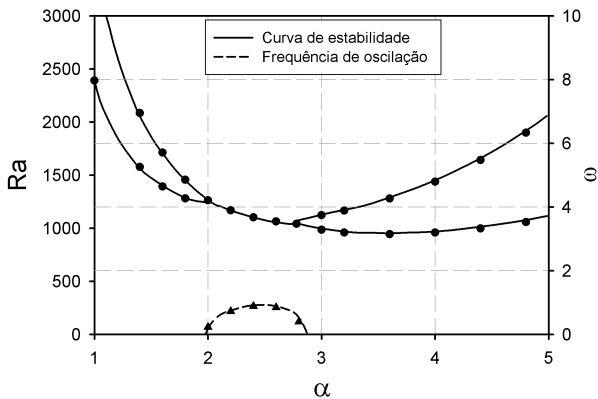


Figura 20: Exemplo de estado oscilatório para a convecção de Rayleigh-Bénard em duas camadas.

Conforme pode ser observado, os valores obtidos neste trabalho estão em acordo com os apresentados por Cardin, Nataf e Dewost (1991), tanto para a região onde as duas formas de acoplamento podem ser observadas quanto para a região onde o sistema exibe o comportamento oscilatório. Os autores avaliaram o mesmo sistema experimentalmente, porém o comportamento oscilatório não foi observado, pois, conforme destacado pelos autores, neste caso o número de Rayleigh crítico corresponde à região onde o acoplamento viscoso é primeiramente observado.

Um sistema onde Ra_c corresponde a um estado oscilatório foi

apresentado por Rasenat, Busse e Rehberg (1989), estando relacionado ao caso $d_0 = 1$, $m = 3.125$, $\kappa_0 = 0.4$ e $\beta_0 = 0.5$. Os autores apresentam os parâmetros críticos para diversos valores de Pr , sendo estes reproduzidos na Tabela 3, juntamente com os valores obtidos no presente trabalho. Como pode ser visto, para todos os valores o desvio observado é muito pequeno, obtendo-se um desvio médio de 0.0148% para o número de Rayleigh crítico, 0.756% para o número de onda crítico e 0.802% para a frequência de oscilação associada ao ponto crítico. Além disso, o aumento no número de Prandtl em 6 ordens de grandeza altera muito pouco os valores de Ra_c e α_c , possuindo um efeito significativo somente na frequência de oscilação.

Tabela 3: Dependência dos parâmetros críticos com Pr para um estado com comportamento oscilatório. Comparação com os valores apresentados por: [1] (RASENAT; BUSSE; REHBERG, 1989)

Pr	Ra_c [1]	Ra_c	α_c [1]	α_c	ω_c [1]	ω_c
0.001	1191.3	1190.87	2.61	2.655	0.0074	0.0075
0.01	1190.8	1190.19	2.70	2.650	0.072	0.070
0.1	1198.8	1189.65	2.647	2.623	0.437	0.435
1	1197.2	1197.15	2.63	2.621	1.001	0.999
10	1201.0	1200.91	2.63	2.619	1.18	1.176
100	1201.6	1201.53	2.63	2.614	1.20	1.197
1000	1201.6	1201.59	2.63	2.614	1.21	1.201

A dependência da tensão superficial com a temperatura, mensurada através do número de Marangoni, costuma ter um impacto mais significativo que o número de Prandtl na estabilidade da convecção natural em duas camadas. Na Figura 21 são apresentadas curvas de estabilidade para $Ma = 10$ e $Ma = -200$. Os demais parâmetros são os mesmos utilizados na Figura 20, sendo que também nesta figura as linhas correspondem aos resultados apresentados por Cardin, Nataf e Dewost (1991) e os pontos aos valores obtidos no presente trabalho.

O aumento no número de Marangoni tende a estabilizar o sistema, como pode ser observado nas curvas para $Ma = 10$. Neste caso, a região com comportamento oscilatório desaparece havendo a formação dos dois ramos associados aos acoplamentos viscoso e térmico. Apesar de para a maioria dos sistemas líquido-líquido o número de Marangoni ser maior que zero, existem casos onde $Ma < 0$ pode ser observado, por exemplo para o sistema óleo de silicone/glicerol, onde $Ma \approx -200$. A curva de estabilidade referente a este caso também pode ser obser-

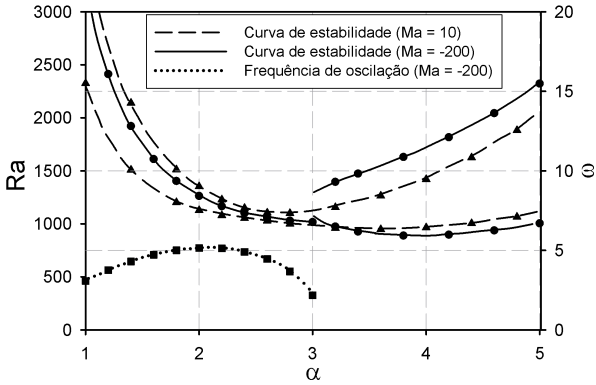


Figura 21: Influência do número de Marangoni na estabilidade da convecção RB em duas camadas.

vada na Fig. 21, onde percebe-se um significativo aumento na região de comportamento oscilatório e na frequência de oscilação em comparação com o caso $Ma = 0$. Além disso, conforme discutido por Cardin, Nataf e Dewost (1991), para números de onda elevados, ambos os ramos de solução representam casos onde o acoplamento viscoso é a forma predominante de acoplamento entre as camadas.

O presente trabalho visa avaliar a influência do escoamento cisalhante no início do processo de convecção natural, sendo por isso a análise restrita a baixos valores de Re onde os modos de instabilidade causados pelo escoamento cisalhante não são significativos. No entanto, avaliou-se também o comportamento do sistema para o caso limite onde $Ra = 0$, sendo que neste caso as equações se reduzem à equação de Orr-Sommerfeld para as duas camadas. Na Figura 22 é mostrada uma comparação entre o espectro dos autovalores obtidos com o modelo de única camada (escoamento plano de Poiseuille) e com o modelo de duas camadas. Os parâmetros utilizados correspondem ao valor crítico $Re_c = 5772.22$ e $\alpha_c = 1.021$. Os valores obtidos para o modelo de única camada coincidem com os apresentados na literatura.

Observa-se um pequeno desvio nas regiões associadas aos modos de Pekerins e Schensted, porém os modos de Airy apresentam uma excelente concordância. Como os modos de Airy são os mais instáveis neste caso, não ocorre alteração nos parâmetros críticos obtidos com os dois modelos. O desvio observado para os outros modos ocorrem possivelmente devido às condições de contorno impostas na interface, onde

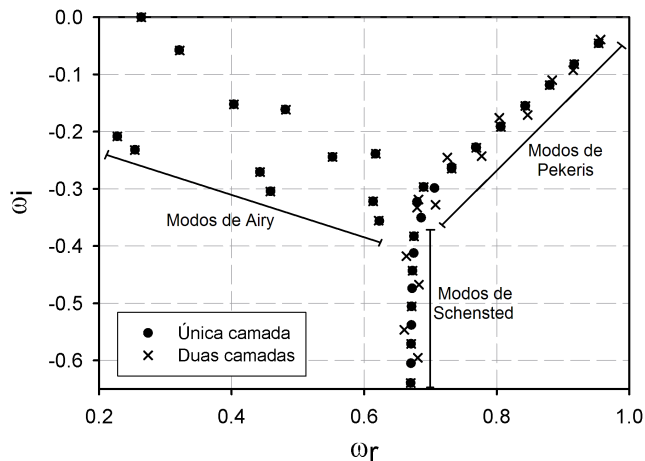


Figura 22: Espectro dos autovalores da equação de Orr-Sommerfeld considerando uma e duas camadas.

utilizou-se expansões em série de Taylor para transpor as condições de $y = \eta$ para $y = 0$, desprezando-se assim uma série de termos de alta ordem.

Tabela 4: Parâmetros críticos em função do número de onda para a equação de Orr-Sommerfeld. Comparação com resultados de: [1] (CHEN; JOSEPH, 1973)

α	\mathbf{Re}_c [1]	\mathbf{Re}_c	ω_r [1]	ω_r
0.65	22424	22424	0.1656	0.1656
0.7	16355	16354	0.1823	0.1823
0.75	12461	12459	0.1983	0.1983
0.8	9882	9881	0.2136	0.2136
0.85	8141	8141	0.2278	0.2278
0.9	6965	6965	0.2408	0.2408
0.925	6540	6541	0.2467	0.2467
0.95	6208	6208	0.2522	0.2522
1	5815	5815	0.2612	0.2612
1.021	5772	5772	0.2640	0.2640
1.05	5890	5888	0.2664	0.2664

Para avaliar o comportamento do sistema considerando a pre-

sença de duas camadas para outras situações, comparou-se os resultados para o número de Reynolds crítico Re_c e para a velocidade de fase associada à este ponto ω_r com os valores apresentados por Chen e Joseph (1973) para diversos números de onda próximos ao valor crítico $\alpha_c = 1.021$, sendo que neste trabalho os autores consideraram somente uma camada de fluido. A comparação entre os resultados pode ser vista na Tabela 4, onde percebe-se uma excelente concordância nos dados. Observa-se que o número de onda altera significativamente o valor de Re_c , sendo que o ponto de mínimo corresponde à $\alpha = \alpha_c$.

De modo geral, observa-se que o modelo matemático empregado no presente trabalho para a convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada reproduz muito bem os valores apresentados na literatura para diversos casos-limite. Dessa forma, espera-se que o modelo seja capaz de prever o comportamento do sistema também quando todos os parâmetros forem considerados, permitindo assim a determinação da estabilidade para casos mais complexos.

4.2 CAMADAS COM PROPRIEDADES IDÊNTICAS

Para determinar a influência do escoamento cisalhante induzido pelo gradiente de pressão na direção x , será primeiramente considerado o caso de duas camadas com propriedades físicas idênticas. Assim, os efeitos causados pela estratificação em alguma das propriedades, bem como os efeitos relacionados com a tensão interfacial, são desconsiderados. No entanto, na ausência de tensão interfacial, caso a densidade das duas camadas for a mesma não haverá nenhuma forma de estabilização da interface e o sistema irá eventualmente recair no caso de uma única camada. Conforme comentado por Rasenat, Busse e Rehberg (1989), a hipótese de que a diferença $\rho_1 - \rho_2$ é pequena não contradiz o fato de que o parâmetro Ra_ρ possui um valor relativamente alto em condições experimentais típicas. Desse modo, será assumida uma hipótese semelhante à hipótese de Boussinesq, que conforme destacado por Cardin, Nataf e Dewost (1991) pode ser expressa como: “a razão entre as densidades das camadas é grande o suficiente para que a interface seja estabilizada, mas é aproximadamente igual a 1 nos demais aspectos”. Por isso, a menos que seja especificado algo diferente, será considerado que $Ra_\rho^{-1} \approx 0$.

Como visto anteriormente, para a convecção de Rayleigh-Bénard em duas camadas, duas diferentes formas de acoplamento são usual-

mente observadas, estando cada uma destas formas associadas a um autovalor distinto. A influência do número de Reynolds no número de Rayleigh onde a convecção natural inicia é apresentada na Figura 23, para as duas formas de acoplamento entre as camadas, em função do comprimento de onda na direção x , considerando $Pr = 1$ e $\beta = 0$. O ponto de mínimo destas curvas corresponde ao número de Rayleigh crítico.

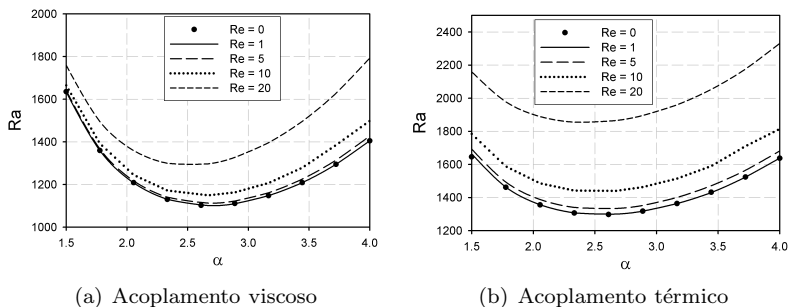


Figura 23: Influência de Re no início da convecção natural para duas camadas idênticas para $Pr = 1$ e $\beta = 0$.

Analisando as curvas apresentadas para o acoplamento viscoso (Figura 23(a)), observa-se que, assim como esperado, o aumento no número de Reynolds estabiliza o sistema. Este resultado está de acordo com os dados apresentados na Tabela 2 para a convecção RBP em uma única camada. No entanto, o valor de Ra_c observado na Figura 23(a) é consideravelmente menor que o apresentado na Tabela 2, pois o processo de convecção natural em duas camadas está mais próximo da convecção de Rayleigh-Bénard entre uma parede rígida e uma superfície livre. Para baixos valores de Reynolds ($Re < 5$), a variação no número de Rayleigh crítico é muito pequena, sendo que as curvas praticamente coincidem para todos os valores de α .

Em relação ao acoplamento térmico, como pode ser visto na Figura 23(b), o aumento no número de Rayleigh crítico em função do número de Reynolds é mais significativo, de modo que dentro da faixa de parâmetros avaliada o acoplamento viscoso surge para menores valores de Ra em todos os casos. O acoplamento térmico ocorre quando nas duas camadas a diferença de temperatura entre a parte superior e a inferior atinge um valor crítico, enquanto que no caso do acoplamento viscoso este valor é atingido primeiramente em uma das camadas e o acoplamento da velocidade na interface induz o movimento na outra

camada.

A forma de acoplamento entre as camadas é determinada analisando-se o formato das autofunções associadas à velocidade e temperatura ao longo do domínio de solução. Na Figura 24 são apresentadas as autofunções para as duas formas de acoplamento para $Re = 0$, avaliadas para os valores críticos (pontos de mínimo) das curvas apresentadas na Figura 23. Para o acoplamento viscoso, este ponto corresponde à $Ra_c = 1100.7$ e $\alpha_c = 2.68$, enquanto que para o acoplamento térmico os valores críticos são aproximadamente $Ra_c = 1296.4$ e $\alpha_c = 2.5$. Nesta e nas demais figuras onde autofunções são apresentadas, os valores são expressos em função de variáveis genéricas ϕ e θ , sendo que os valores para $y < 0$ correspondem à camada inferior (ϕ_1, θ_1) e os valores para $y > 0$ correspondem à camada superior (ϕ_2, θ_2). Além disso, as autofunções serão normalizadas com base no valor máximo para cada determinado conjunto de dados, de modo que a função resultante esteja dentro do intervalo $[-1,1]$.

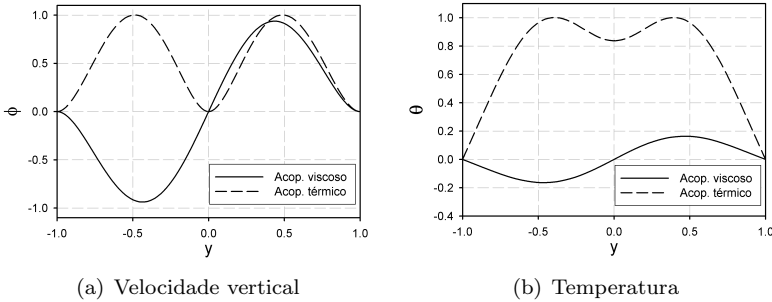


Figura 24: Autofunções associadas ao ponto crítico para $Re = 0$ e $Pr = 1$, considerando camadas idênticas.

As autofunções associadas à velocidade vertical avaliadas nas duas camadas apresentam um comportamento simétrico para o acoplamento térmico e um comportamento anti-simétrico para o acoplamento viscoso, como pode ser visto na Figura 24(a). Neste caso, o sinal da autofunção representa o sentido da recirculação formada, de modo que no acoplamento térmico as recirculações tem o mesmo sentido e no acoplamento viscoso tem sentido contrário, conforme comentado anteriormente. Como a forma de acoplamento está relacionada com o sentido de rotação das recirculações, pode-se também utilizar a vorticidade avaliada nas duas camadas para definir o sistema: para o acoplamento térmico as duas camadas possuem vorticidade com o mesmo

sinhal, enquanto que no acoplamento viscoso a vorticidade possui sinais diferentes. A intensidade das recirculações nas duas camadas é a mesma, sendo isso uma consequência do fato de que o número de Rayleigh avaliado nas duas camadas é idêntico. Em ambos os casos, observa-se que a autofunção na interface ($y = 0$) é igual a zero, sendo esta uma condição para que a deformação da interface η possa ser negligenciada.

A forma de acoplamento entre as camadas também reflete no formato das autofunções associadas à perturbação da temperatura, como visto na Figura 24(b). Também neste caso, as autofunções apresentam uma distribuição simétrica para o acoplamento térmico e anti-simétrica para o acoplamento viscoso. Para o acoplamento térmico, observa-se que $\theta(0) \neq 0$, o que indica que há um desvio em relação ao estado base na interface. Porém, isto não implica na deformação da interface.

Para baixos valores do número de Reynolds, não ocorrem alterações significativas no formato das autofunções, como pode ser visto na Figura 25, onde são apresentadas as curvas para $Re = 10$. Também neste caso, as autofunções são avaliadas nos pontos críticos referentes às duas formas de acoplamento, sendo estes pontos $\alpha_c = 2.633$ e $Ra_c = 1149.922$ para o acoplamento viscoso e $\alpha_c = 2.5075$ e $Ra_c = 1434.99$ para o acoplamento térmico.

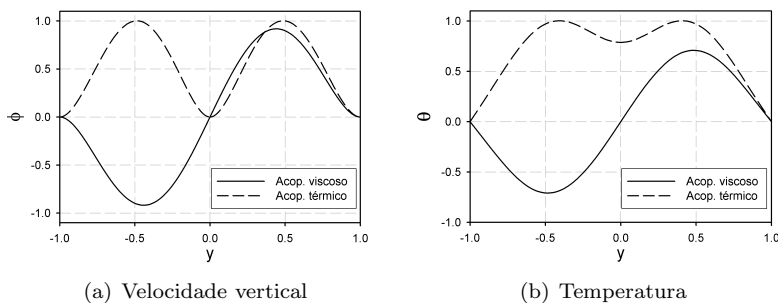


Figura 25: Autofunções associadas ao ponto crítico para $Re = 10$ e $Pr = 1$, considerando camadas idênticas.

As autofunções referentes à velocidade vertical para $Re = 10$ são praticamente idênticas às apresentadas para $Re = 0$. Deve-se lembrar que estas autofunções estão associadas com perturbações do estado base, portanto, mesmo sendo o estado base profundamente alterado pela variação no número de Reynolds, as perturbações resultantes apresentam o mesmo comportamento. As autofunções para a tempe-

ratura também são muito similares, como pode ser visto na Figura 25(b), sendo no entanto a diferença entre as amplitudes associada ao acoplamento viscoso e térmico menor que a observada para $Re = 0$.

Com base nos resultados mostrados anteriormente, pode-se perceber que os valores críticos tanto para o número de Rayleigh quanto para o número de onda dependem do valor de Re . Na Figura 26 são apresentadas as curvas que relacionam os parâmetros críticos com o número de Reynolds, para diferentes valores do número de Prandtl. Os pontos destas curvas representam os pontos de mínimo das curvas que relacionam α com o valor de Ra onde a convecção inicia, como por exemplo as curvas apresentadas na Figura 23(a) para $Pr = 1$.

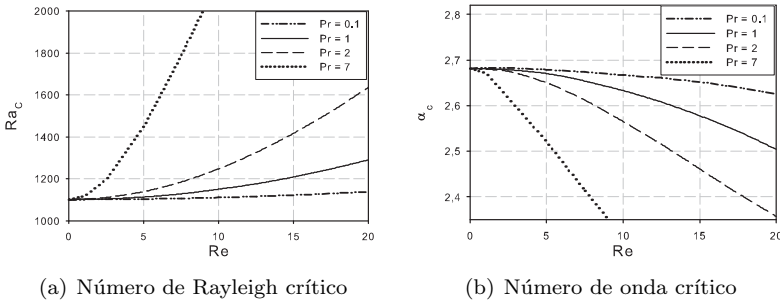


Figura 26: Parâmetros críticos considerando camadas idênticas e $\beta = 0$.

Para todos os valores de Prandtl, as curvas originam-se no mesmo ponto para $Re = 0$ ($Ra_c = 1100.7$, $\alpha_c = 2.68$), visto que os parâmetros críticos para a estabilidade do processo de convecção natural não dependem do valor de Pr . Além disso, o aumento no valor de Ra_c com o aumento no número de Reynolds ocorre para todos os valores de Pr , conforme visto na Figura 26(a), porém com uma dependência de Ra_c em função de Re muito mais significativa para maiores valores de Pr , ou seja, o aumento na difusividade de momento em relação à difusividade térmica estabiliza consideravelmente o sistema.

O número de onda crítico, apresentado na Figura 26(b), também mostra uma grande dependência com o número de Prandtl. Para todos os valores de Pr observa-se uma diminuição no valor de α_c com o acréscimo no número de Reynolds, indicando que o aumento na intensidade do escoamento cisalhante faz com que o sistema perca a estabilidade primeiramente pela ação de perturbações com maior comprimento de onda (ou menor número de onda). Também neste caso, a

dependência de α_c com Re cresce rapidamente conforme o valor de Pr aumenta.

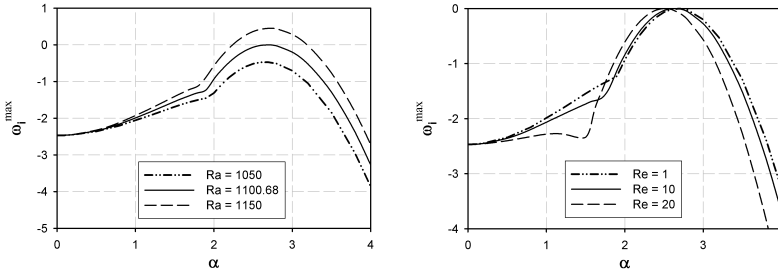
Em todas as figuras apresentadas anteriormente, considerou-se que $\beta = 0$, ou seja, as perturbações tem um caráter basicamente bi-dimensional possuindo um comprimento de onda infinito na direção z . Através da análise das equações governantes, pode-se constatar que quando $\alpha = 0$ e $k = \beta \neq 0$ o sistema recai nas equações que governam a estabilidade da convecção de Rayleigh-Bénard, já que todos os termos que contém o número de Reynolds desaparecem e, portanto, nesta condição o comportamento do sistema independe de Re e as taxas de crescimento para as perturbações coincidem com as obtidas para $Re = 0$. A importância em avaliar o comportamento do sistema em função de α reside no fato de que este parâmetro determina a *estabilidade absoluta* do sistema (ver Figura 4 e a discussão sobre esta figura para mais detalhes), sendo que mesmo sendo os modos associados a $\beta \neq 0$ mais instáveis para $Re > 0$, estes modos podem estar associados à *instabilidades convectivas*. Para os demais resultados apresentados neste trabalho, será considerado que $\beta = 0$ e $k = \alpha \neq 0$, porém deve-se sempre considerar que os resultados apresentados para $Re = 0$ equivalem ao caso $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. Portanto, não importa o quão grande for o valor de Re , sempre haverá um modo convectivamente instável associado ao Ra_c obtido para $Re = 0$.

4.2.1 Taxa de Crescimento das Perturbações

Conforme apresentado anteriormente, quando as perturbações são expressas em função dos modos normais, a taxa de crescimento é dada pela parte imaginária dos autovalores relacionados com a perturbação, ω_i . Para cada número de onda existem associados infinitos autovalores, sendo que quando um ou mais destes possuir a parte imaginária positiva, o sistema será instável. Os parâmetros críticos apresentados anteriormente representam o conjunto onde se observa a instabilidade para o menor valor de Ra possível, ou seja, representam a diferença de temperatura mínima entre as paredes para que a instabilidade ocorra, considerando que os demais parâmetros sejam fixados.

A dependência da taxa de crescimento com o número de onda, especialmente para a taxa associada ao autovalor mais perigoso, é uma importante informação a ser avaliada, pois define a forma como cada perturbação se comporta ao longo do tempo. Na Figura 27 são apresentadas as curvas que relacionam a taxa de crescimento com o número de

onda da perturbação para o autovalor mais instável, sendo na Figura 27(a) considerados diferentes valores de Ra para $Re = 0$ e na Figura 27(b) diferentes valores de Re e $Ra = Ra_c$.



(a) Taxa de crescimento para $Re = 0$. (b) Taxa de crescimento avaliada no ponto crítico.

Figura 27: Taxa de crescimento máxima para $Pr = 1$.

Conforme visto na Figura 27(a), as curvas para $Re = 0$ mostram um comportamento semelhante para todos os valores de Ra , sendo que conforme $\alpha \rightarrow 0$ a taxa de crescimento tende para o ponto $\omega_i \approx -2.467$. Pode-se observar que a curva associada com $Ra = Ra_c = 1100.68$ tem seu ponto de máximo em $w_i^{max} = 0$, sendo por isso este o valor crítico para este caso. O número de onda está relacionado com o comportamento espacial da perturbação, sendo que um menor valor de α implica em uma perturbação com maior comprimento de onda na direção x , enquanto que a taxa de crescimento ω_i está relacionada com o comportamento temporal da perturbação, quanto menor o valor de ω_i mais rapidamente a perturbação será amortecida (considerando que ω_i seja < 0). Conforme α tende a zero, o comprimento de onda associado à perturbação tende ao infinito, sendo que neste limite a dinâmica da perturbação não é afetada pelas condições de contorno impostas, sendo que como pode ser visto na Figura 27, a mudança nos números de Re ou Ra não afeta a taxa de crescimento conforme $\alpha \rightarrow 0$. A mesma conclusão pode ser obtida analisando-se as equações governantes, onde pode ser visto que os parâmetros Ra e Re sempre aparecem multiplicados pelos números de onda.

Apesar de todas as curvas mostradas na Figura 27 possuírem um ponto de máximo em $\alpha \approx 2.7$, a taxa de variação apresenta um mudança de inclinação repentina em um ponto próximo a $\alpha = 1.85$. Uma análise do espectro de autovalores mostra que neste ponto ocorre uma mudança no modo que possui a maior parte imaginária. De fato,

como pode ser visto na Figura 28, para valores de α avaliados na primeira parte da curva o sistema apresenta acoplamento térmico entre as duas camadas, enquanto que a parte parabólica da curva representa o acoplamento viscoso. O comportamento das autofunções neste caso é bastante similar às autofunções avaliadas nos pontos críticos, apresentadas anteriormente.

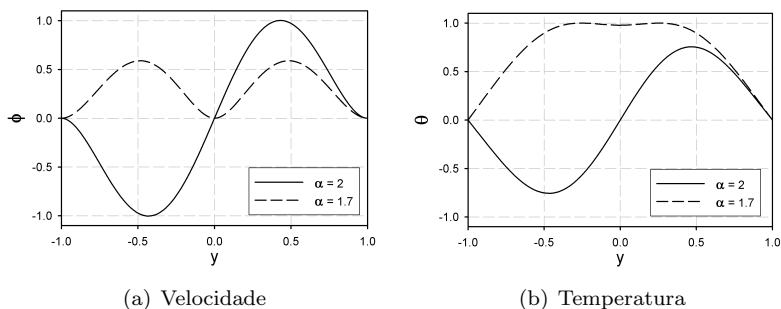


Figura 28: Autofunções avaliadas para $Re = 0$, $Pr = 1$ e $Ra = 1100.68$ para diferentes valores de α .

Conforme observado na Figura 27(b), o aumento no número de Reynolds altera de modo mais significativo a taxa de crescimento associada ao acoplamento térmico, estando este resultado em acordo com os observados na Figura 23. Em relação ao acoplamento viscoso, ocorre uma pequena diminuição no número de onda crítico conforme o número de Reynolds aumenta.

Apesar de a taxa de crescimento nos casos anteriores não depender de Ra e Re conforme $\alpha \rightarrow 0$, pode-se observar pelo conjunto de equações governantes que os termos associados com o número de Prandtl não desaparecem neste limite. Na Figura 29 são mostradas as taxas de crescimento para diferentes valores de Pr avaliadas no ponto crítico, mantendo-se $Re = 0$. Em todos estes casos, pequenas variações em Ra e Re não afetam significativamente o formato das curvas.

Para valores de Pr relativamente altos, pode-se ver na Figura 29(a) que não ocorrem mudanças expressivas em comparação com os resultados apresentados anteriormente para $Pr = 1$. No entanto, a redução no valor de Pr diminui a concavidade da curva associada ao acoplamento viscoso, sem afetar de forma significativa a curva associada ao acoplamento térmico conforme $\alpha \rightarrow 0$. Neste cenário, para baixos valores de Pr a taxa de crescimento relacionada ao acoplamento viscoso passa a ser maior que a taxa relacionada ao acoplamento térmico mesmo

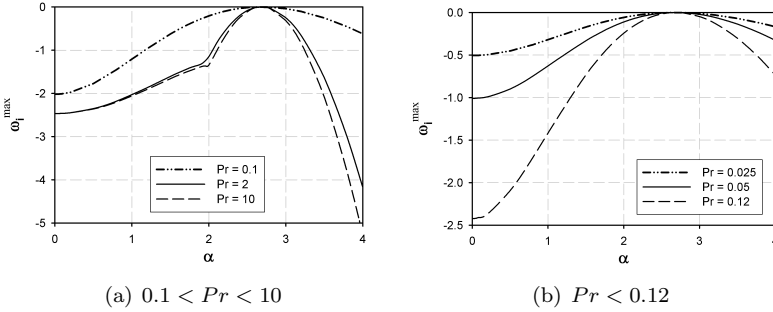


Figura 29: Taxa de crescimento para $Re = 0$ e $Ra = Ra_c$

para valores de α próximos a zero. Na Figura 29(b) são mostradas as taxas de crescimento para $Pr < 0.12$, onde observa-se que conforme $Pr \rightarrow 0$ a curva tende à condição $\omega_i^{\max}(\alpha) = 0 \forall \alpha$. O valor a partir do qual o acoplamento viscoso passa a ter uma maior taxa de crescimento para $\alpha \rightarrow 0$ neste caso é $Pr \approx 0.12$. A variação no número de Pr não afeta, no entanto, os parâmetros críticos para $Re = 0$, conforme discutido anteriormente.

O aumento na taxa de crescimento associada ao acoplamento viscoso em função da redução no número de Prandtl é resultado do decréscimo na resistência ao movimento imposta pela viscosidade do fluido em relação à capacidade de transferência de calor. Assim, a diminuição no número de Pr facilita o início do processo convectivo e reduz a resistência que precisa ser vencida para que o movimento em uma das camadas induza o movimento na outra. Para que o acoplamento térmico ocorra, no entanto, é necessário que o gradiente de temperatura nas duas camadas atinja um valor crítico, sendo esse processo relacionado com a transferência de calor ao longo das camadas durante o estágio inicial, onde a transferência ocorre principalmente por condução e por isso depende basicamente da condutividade térmica do fluido e não da relação entre as difusividades de momento e térmica.

Na Figura 30(a) são mostradas as taxas de crescimento para as duas formas de acoplamento, dentro do intervalo $0 < \alpha < 5$, no ponto onde a curva associada ao acoplamento térmico atinge o seu valor crítico. Nesta figura fica clara a existência dos dois modos, bem como o ponto onde o acoplamento viscoso passa a ter uma maior taxa de crescimento. De forma semelhante, na Figura 30(b) são apresentadas as taxas de crescimento para baixos valores de Pr e $Re = 10$, onde nota-se que a diminuição do número de Prandtl altera de maneira mais

intensa as curvas relacionadas ao acoplamento viscoso.

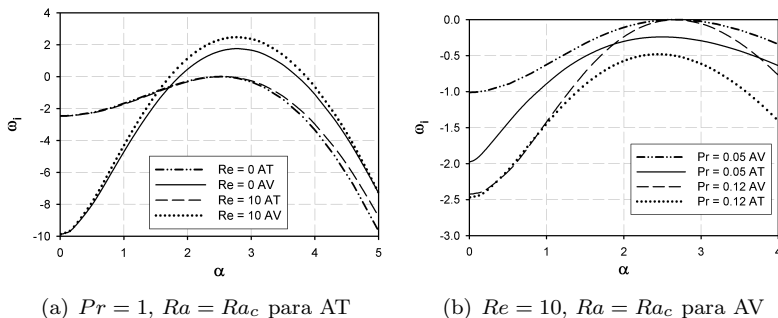


Figura 30: Taxa de crescimento para $\beta = 0$. (AT = acoplamento térmico, AV = acoplamento viscoso)

4.2.2 Razão Entre as Espessuras das Camadas

O emprego de um modelo de escoamento estratificado contendo dois fluidos idênticos diferencia de um modelo em única camada pela existência de uma interface onde determinadas condições de contorno são especificadas, como por exemplo os balanços de tensão de cisalhamento e normal. Quando não existe um salto nas propriedades físicas ou nos perfis do escoamento base e as tensões de cisalhamento e normal são contínuas ao longo da interface, a influência de uma camada sobre a outra ocorre basicamente na forma de uma resistência ao processo de transferência de calor entre uma camada e a parede em contato com a outra camada, além da resistência ao escoamento imposta pela viscosidade na interface, visto que esta não pode ser tratada simplesmente como uma superfície livre. Essas duas formas de resistência estão relacionadas à espessura das camadas, de modo que a razão entre as espessuras $d_0 = d_2/d_1$ é um parâmetro de grande importância na estabilidade do sistema. Nesta seção será avaliada a influência deste parâmetro, considerando ainda que as duas camadas são compostas por fluidos idênticos.

Para melhor entender o impacto da redução da espessura relativa de uma das camadas, é conveniente definir um número de Rayleigh

baseado nas propriedades da camada superior:

$$Ra_2 = \frac{\beta_2 g \psi_2 d_2^4}{\nu_2 \kappa_2} \quad (4.1)$$

de modo que a razão entre os números de Rayleigh avaliados nas duas camadas pode ser expressa como:

$$Ra^* = \frac{Ra_2}{Ra} = \frac{\beta_0 \psi_0 d_0^4}{\nu_0 \kappa_0} \quad (4.2)$$

Conforme destacado por Rasenat, Busse e Rehberg (1989), quando a razão Ra^* é significativamente diferente da unidade, o início da convecção ocorre primeiramente em uma camada enquanto que a outra apresenta um comportamento passivo. No entanto, para valores de $Ra^* \approx 1$ a instabilidade pode ocorrer simultaneamente nas duas camadas. Considerando que as propriedades físicas das duas camadas sejam as mesmas, a relação anterior se reduz a $Ra^* = d_0^4$, de modo que o valor de Ra^* varia rapidamente conforme d_0 se distancia do valor unitário. As curvas de estabilidade obtidas para diferentes valores de d_0 são apresentadas na Figura 31 para $Re = 0$ e $Pr = 1$.

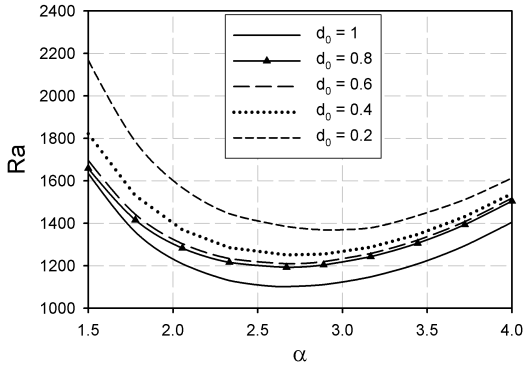


Figura 31: Influência de d_0 no início da convecção natural em camadas com propriedades físicas idênticas para $Pr = 1$ e $Re = 0$.

A redução no valor de d_0 causa a estabilização do sistema, aumentando o valor de Ra onde a convecção tem início para toda a faixa de números de onda investigada. Esta estabilização, no entanto, não ocorre de forma homogênea. No intervalo $0.4 < d_0 < 0.8$ uma pequena variação nas curvas pode ser vista, enquanto que para $d_0 = 0.2$

uma mudança mais significativa ocorre. Conforme comentado anteriormente, a influência da redução em d_0 afeta dois aspectos do sistema, relacionados à transferência de calor ao longo das camadas e ao efeito da viscosidade na interface. Na formulação empregada neste trabalho, o número de Ra é definido com base na diferença de temperatura entre a parede inferior e a interface, de modo que mesmo que uma redução na espessura da camada superior diminua a resistência à transferência de calor através desta camada, as curvas de estabilidade definidas em função de Ra não são diretamente afetadas. Em relação à influência da viscosidade, a redução na espessura da camada superior faz com que a resistência imposta pelo fluido aumente, visto que condições de não-deslizamento são aplicadas nas paredes.

A diferença no valor de Ra avaliado nas duas camadas causa o surgimento de uma forma de acoplamento entre as camadas distinta das discutidas anteriormente, sendo essa demonstrada nas autofunções apresentadas na Figura 32 para diferentes valores de d_0 . Neste caso, o movimento na camada superior é diretamente induzido pelo arraste provocado pela camada inferior. Esta forma de acoplamento será chamada de acoplamento por arraste em analogia ao termo empregado por Honda (1982). No entanto, este processo é bastante similar ao acoplamento viscoso, sendo modificado principalmente pela não-simetria entre as camadas, ou seja, ocorre quando a recirculação em uma das camadas é muito mais intensa que na outra camada.

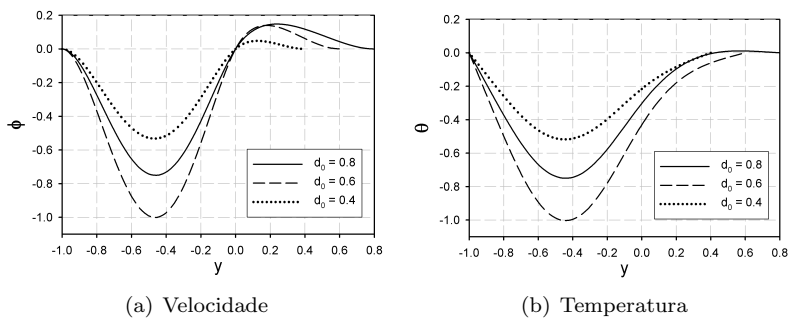


Figura 32: Autofunções avaliadas no ponto crítico para diferentes valores de d_0 , considerando $Re = 0$ e $Pr = 1$.

O acoplamento por arraste surge rapidamente como a forma mais instável conforme d_0 se afasta de 1. A variação nos parâmetros críticos em função da razão entre as espessuras das camadas é apresentada na Figura 33, para diferentes valores de Re . Observa-se na Figura

33(a) que o valor de Ra_c possui um rápido aumento no intervalo $1 > d_0 > 0.9$, sendo que neste intervalo a taxa de crescimento associada ao acoplamento por arraste passa a ser superior que a taxa associada ao acoplamento viscoso.

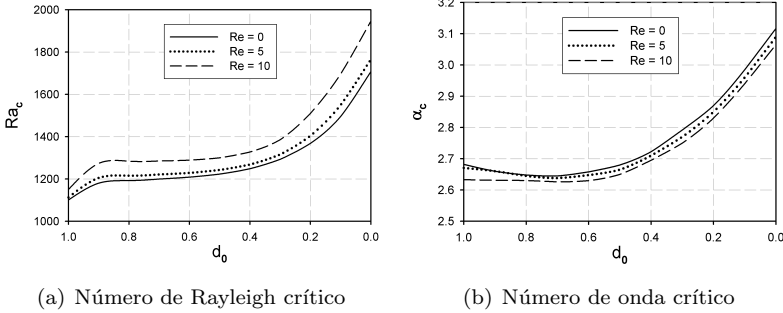


Figura 33: Parâmetros críticos em função de d_0 considerando camadas idênticas para $Pr = 1$.

Para todos os valores de Re analisados, dentro do intervalo $0.4 < d_0 < 0.9$ somente uma pequena variação é observada para os parâmetros críticos, enquanto que para $d_0 < 0.4$ esta variação é muito mais significativa. A variação acentuada para baixos valores de d_0 pode ser vista como uma consequência da condição de não-deslizamento imposta na parede superior na interface entre os dois fluidos. A proximidade entre a interface e a parede faz com que os efeitos relacionados à viscosidade dificultem o início do movimento convectivo, de modo que a interface entre os dois fluidos se distancia do modelo de superfície livre e se aproxima do modelo de superfície rígida. Anteriormente observou-se que para $d_0 = 1$ e $Re = 0$ os resultados de Ra_c se aproximam dos valores obtidos para a convecção de Rayleigh-Bénard considerando uma superfície rígida e uma livre. Da mesma forma, conforme d_0 se aproxima a zero, o sistema se aproxima da configuração equivalente à convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille em uma única camada. De fato, como visto na Figura 33(a), os valores encontrados para $d_0 = 0$ coincidem com os apresentados na Tabela 2.

Para valores de $d_0 \neq 1$ diferentes formas além do acoplamento por arraste existem, porém estas surgem para valores de Ra superiores ao valor crítico associado ao acoplamento por arraste, estando vinculadas a autovalores menos instáveis. Na Figura 34 são mostradas curvas de estabilidade para diferentes valores de d_0 , onde podem ser vistos os

limites para os três primeiros modos de instabilidade. As curvas associadas ao primeiro modo, em todos os casos, são as mesmas apresentadas na Figura 31.

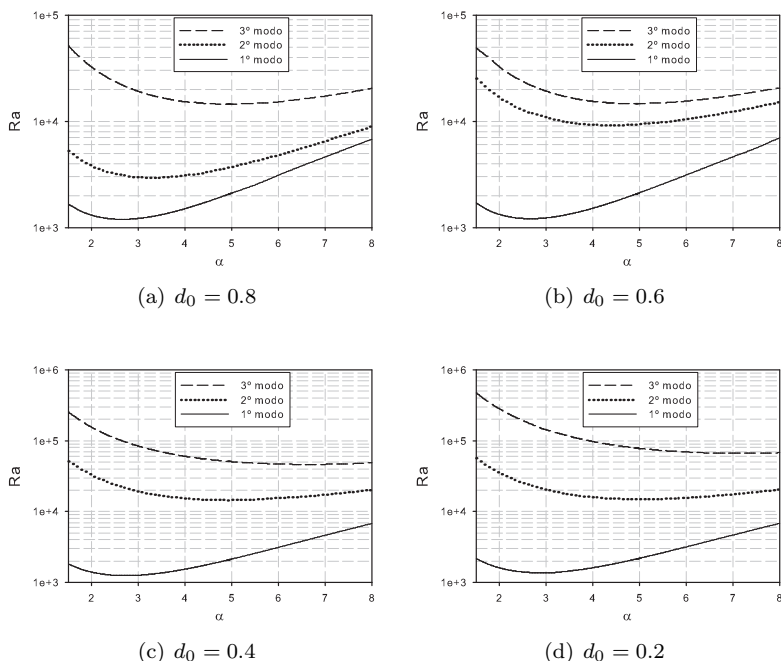


Figura 34: Efeito da espessura relativa d_0 no início do processo convectivo para $Re = 0$ e $Pr = 1$.

Para todos os valores de d_0 , pode-se observar a existência de uma curva com início em aproximadamente 4×10^4 para $\alpha = 1.5$, sendo esta identificada como o terceiro modo para $d_0 = 0.8$ e $d_0 = 0.6$ e o segundo modo para $d_0 = 0.4$ e $d_0 = 0.2$. A redução no valor da espessura da camada superior praticamente não altera esta curva. No entanto, a curva relacionada ao segundo modo para $d_0 = 0.8$ e $d_0 = 0.6$ e ao terceiro modo para $d_0 = 0.4$ e $d_0 = 0.2$ varia significativamente em função de d_0 , havendo uma estabilização deste modo conforme a espessura da camada superior diminui. Além disso, apesar de todas as curvas possuírem um formato similar, o número de onda crítico associado a este modo aumenta conforme d_0 diminui.

Para analisar o comportamento relacionado a cada um dos mo-

dos, determinou-se as autofunções associadas à velocidade vertical e à temperatura para os valores de d_0 considerados na figura anterior. Os resultados podem ser vistos na Figura 35 para a velocidade vertical e na Figura 36 para a temperatura. Em todos os casos as autofunções foram avaliadas em valores de α e Ra próximos ao ponto crítico para cada um dos modos apresentados na Figura 34. Também nestas figuras os valores são normalizadas com base no valor máximo dentro do intervalo.

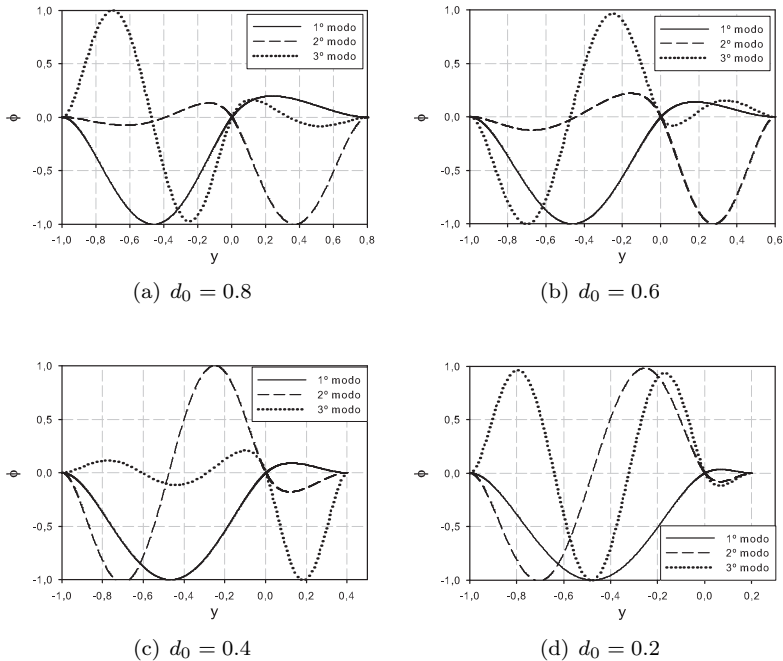


Figura 35: Autofunções associadas à velocidade vertical para os três modos mais instáveis, considerando $Re = 0$ e $Pr = 1$.

Conforme pode ser observado nas Figuras 35(a) e 35(b), o primeiro modo corresponde ao acoplamento por arraste onde a instabilidade surge na camada inferior e a recirculação mais intensa nesta camada arrasta o fluido da camada superior. Em relação ao segundo modo, duas recirculações menores surgem na camada inferior e uma mais intensa na camada superior. Neste caso, a instabilidade na camada superior induz um arraste na camada inferior. Analisando-se

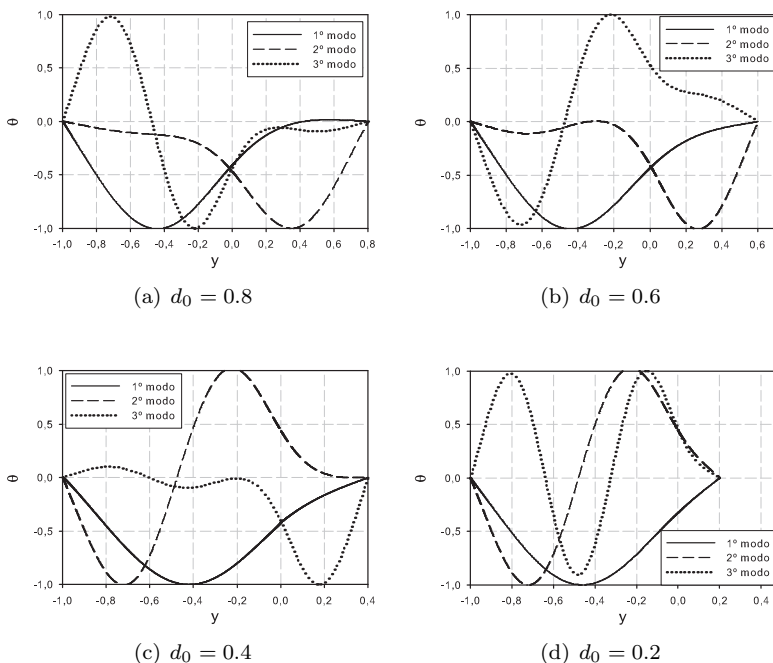


Figura 36: Autofunções associadas ao desvio da temperatura para os três modos mais instáveis, considerando $Re = 0$ e $Pr = 1$.

o comportamento das curvas apresentadas na Figura 34 referentes a este modo, percebe-se que conforme d_0 tende a 1 as curvas associadas ao primeiro e ao segundo modo nas Figuras 35(a) e 35(b) tendem a se encontrarem, originando o acoplamento viscoso discutido anteriormente. Desse modo, o acoplamento viscoso origina dois diferentes modos quando $d_0 \neq 1$, sendo cada um destes modos controlados pela instabilidade em uma das camadas que causa um significativo arraste do fluido na outra camada. Este comportamento anti-simétrico para estes dois modos também pode ser observado nas autofunções relacionadas a temperatura, conforme visto nas Figuras 36(a) e 36(b).

Para $d_0 = 0.4$ e $d_0 = 0.2$ os modos derivados do acoplamento viscoso são o primeiro e o terceiro modos apresentados nas Figuras 34(c) e 34(d), sendo as autofunções para a velocidade vertical relacionadas a estes modos mostradas nas Figuras 35(c) e 35(d). O primeiro modo apresenta um comportamento similar ao observado para maiores valo-

res de d_0 , com a recirculação na camada inferior definindo o formato das autofunções. O terceiro modo, no entanto, apresenta um comportamento distinto, onde podem ser observadas três recirculações na camada inferior e uma na camada superior, indicando assim uma relação entre a dimensão das recirculações na camada inferior e a espessura da camada superior. Além disso, redução em d_0 causa uma redução na amplitude da autofunção na camada superior em comparação com a camada inferior, como pode ser observado na Figura 35(d). Em relação à temperatura, as Figuras 36(c) e 36(d) mostram que para o primeiro modo as autofunções são definidas basicamente pelo comportamento da camada inferior, apresentando um formato praticamente parabólico. O terceiro modo, no entanto, possui um comportamento similar ao das autofunções associadas à velocidade, com três recirculações observadas na camada inferior.

Com relação ao modo estacionário observado na Figura 34, as autofunções mostram um comportamento simétrico em relação à formação de recirculações nas duas camadas para $d_0 = 0.8$ e $d_0 = 0.6$, como visto nas Figuras 35(a) e 35(b) para a velocidade vertical, sendo isto também visto nas Figuras 36(a) e 36(b) para a temperatura. Apesar da intensidade das recirculações não ser a mesma, a simetria entre as autofunções indica que este modo deriva do acoplamento térmico discutido anteriormente. Para menores valores de d_0 , o número de recirculações observadas nas duas camadas não é mais o mesmo, pois a redução na espessura da camada superior não permite a formação de mais de uma recirculação nesta camada.

As autofunções apresentadas nas Figuras 35 e 36 foram avaliadas para $Re = 0$. Assim como para o caso de $d_0 = 1$, não são observadas alterações profundas nas autofunções para baixos valores de Re . No entanto, os parâmetros críticos são alterados de maneira significativa pelo aumento no número de Reynolds. Nas Figuras 37 e 38 são apresentados os parâmetros críticos em função de Re para $d_0 = 0.8$ e $d_0 = 0.4$, respectivamente, para diversos valores do número de Prandtl. O comportamento das curvas em relação aos diferentes valores de d_0 é bastante similar, havendo um gradativo aumento no valor de Rayleigh crítico e uma diminuição no valor do número de onda crítico conforme o valor de Re aumenta, sendo este também o comportamento observado para $d_0 = 1$ e apresentado na Figura 26.

A variação dos parâmetros críticos com Re mostra uma dependência quadrática para todos os valores de Pr , sendo que uma análise de regressão dos pontos mostra que os dados se ajustam muito bem a um polinômio de segunda ordem (com coeficiente de deter-

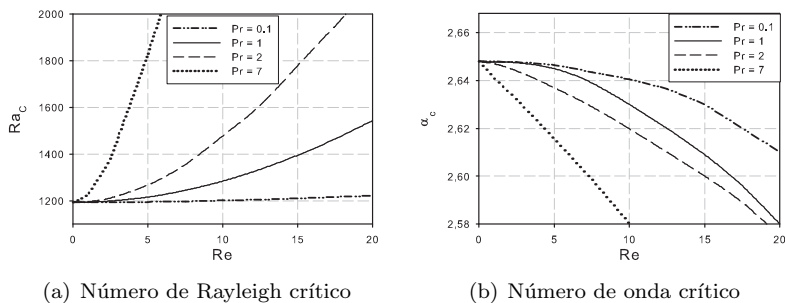


Figura 37: Parâmetros críticos considerando camadas idênticas para $d_0 = 0.8$.

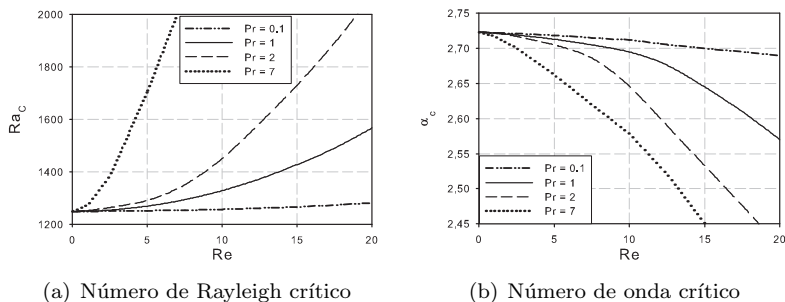


Figura 38: Parâmetros críticos considerando camadas idênticas para $d_0 = 0.4$.

minação $R^2 > 0.99$ para todos os casos). Conforme comentado anteriormente, esta dependência também é observada para a convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille em uma única camada. Para a faixa de valores apresentados nas Figuras 37 e 38, o coeficiente associado ao termo de segunda ordem (curvatura) das parábolas que relacionam Ra_c com Re apresenta uma dependência aproximadamente linear com o valor de Pr , sendo que a inclinação desta reta é sempre positiva e tende a diminuir conforme a espessura da camada superior (d_0) diminui.

Considerações finais

Na presente seção foram avaliados alguns aspectos básicos da convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada, como as principais formas de acoplamento que podem surgir entre as camadas e

mudanças que ocorrem conforme a razão entre os números de Rayleigh avaliados nas duas camadas se distancia do valor unitário. O emprego de camadas de fluidos com propriedades idênticas permite isolar a influência de outros parâmetros sobre a estabilidade, como os números de Reynolds e Prandtl.

O conhecimento dos diferentes modos de instabilidade, bem como das taxas de crescimento associadas a cada um destes modos, é uma importante informação pois permite identificar quais as possíveis configurações em que o sistema pode se arranjar, visto que todos estes modos satisfazem as equações governantes e as condições de contorno. No entanto, em um sistema físico espera-se que somente o modo mais instável (com maior taxa de crescimento) seja observado. Devido a isto, nas próximas seções serão apresentados resultados relacionados principalmente a este modo mais instável.

Através da análise das autofunções obtidas pode-se inferir sobre as alterações nos campos de velocidade e temperatura causadas pela instabilidade. Apesar de as recirculações serem formadas em um plano bidimensional xy , os perfis para a velocidade na direção y (v) são similares ao longo de toda a direção x , havendo somente uma mudança na magnitude das variáveis. O mesmo comportamento é observado para o desvio da temperatura em relação ao estado base. Por isso, as autofunções são apresentadas de forma normalizada para o intervalo $[-1,1]$. Mais detalhes sobre a distribuição bidimensional das variáveis serão analisados no próximo capítulo, onde técnicas de simulação numérica direta serão empregadas.

Os resultados apresentados até o momento desconsideram a influência da dinâmica da interface no sistema, sendo que as duas camadas são consideradas fixas e a interface atua somente como um ponto onde ocorre transferência de calor e momento de uma camada para outra. A seguir será analisada a importância do efeito termocapilar na estabilidade do sistema.

4.3 EFEITOS INTERFACIAIS: INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE MARANGONI

Nos resultados apresentados anteriormente não foram considerados os efeitos relacionados à variação na tensão interfacial com a temperatura (efeito Marangoni), bem como considerou-se que $Ra_\rho^{-1} \rightarrow 0$, de modo que a diferença na tensão normal nas duas camadas garantisse a estabilidade e não-deformação da interface. No entanto, sabe-se que em

determinadas circunstâncias estes fenômenos podem ser importantes, podendo interferir de maneira significativa na estabilidade do sistema ou mesmo individualmente induzir alguma forma de instabilidade. Para determinar os limites onde o efeito termocapilar isoladamente desestabiliza o sistema, a seguir será apresentado um breve estudo da estabilidade da convecção de Bénard-Marangoni em duas camadas. Assim como na seção anterior, aqui também será considerado que os fluidos em ambas camadas possuem propriedades físicas idênticas.

4.3.1 Convecção de Bénard-Marangoni

Para o caso da convecção de Rayleigh-Bénard, a instabilidade associada ao empuxo origina-se no interior das camadas de fluido, sendo proporcional ao número de Rayleigh em cada uma das camadas. Anteriormente considerou-se somente casos onde $0 < d_0 < 1$, sendo que para valores de $d_0 > 1$ espera-se um comportamento aproximadamente simétrico ao observado para $d_0 < 1$ (por exemplo, o comportamento para $d_0 = 2$ é semelhante ao observado para $d_0 = 0.5$). No entanto, o mesmo não pode ser esperado para a convecção de Bénard-Marangoni. A instabilidade originada pela convecção de Marangoni surge quando ocorre a formação de um gradiente local de temperatura na interface. Para o caso da convecção entre placas planas com diferentes temperaturas, isto pode ocorrer quando uma massa de fluido mais quente for impulsionada de uma região próxima à parede inferior (quente) até a interface ou quando uma massa de fluido mais frio for impulsionado da parede superior até a interface, ou seja, quando há formação de células convectivas no interior do fluido.

Com isso, existe uma significativa influência do termo associado ao empuxo no termo associado à termocapilaridade. Conforme apresentado por Nepomnyashchy, Simanovskii e Legros (2012), três diferentes cenários podem emergir desta configuração, dependendo da relação entre o número de Rayleigh nas duas camadas. Quando o valor de Ra na camada inferior for superior ($Ra^* < 1$) a convecção devido ao empuxo ocorre principalmente nesta camada. Conforme apresentado na Figura 39(a), isto gera um aumento local de temperatura na interface, o que por sua vez (considerando $d\gamma/dT < 0$), gera uma tensão tangencial na mesma direção das células convectivas. Neste caso a contribuição do termo termocapilar causa uma redução no valor do Ra mínimo para que a convecção ocorra.

Quando $Ra^* > 1$ as forças tangenciais geradas devido ao empuxo

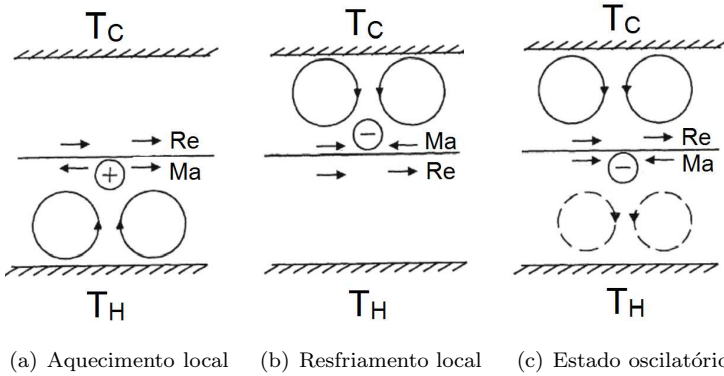


Figura 39: Interação entre empuxo e termocapilaridade. Adaptado de Nepomnyashchy, Simanovskii e Legros (2012).

e ao efeito termocapilar atuam em direções opostas (ver Figura 39(b)), sendo neste caso observado um aumento no valor de Ra mínimo. Além destes dois modos convectivos, um terceiro modo pode surgir devido à competição entre os diferentes mecanismos de instabilidade, conforme representado na Figura 39(c). Este modo ocorre quando o valor de Ra na camada superior for levemente maior que na camada inferior, de modo que o empuxo gerado na camada inferior também contribua para o balanço de tensão na interface. Esta condição de sobre-estabilidade pode levar a um estado oscilatório.

Conforme comentado anteriormente, variações pontuais na tensão interfacial também podem induzir ao movimento convectivo devido ao efeito termocapilar, estando a estabilidade neste caso relacionada a um valor mínimo para o número de Marangoni. A seguir será apresentada uma breve análise do caso onde $Ra = 0$ para que possam ser determinados os limites onde o efeito termocapilar individualmente leva à instabilidade. Cabe ressaltar que como tanto Ra quanto Ma dependem da existência de uma diferença de temperatura entre as paredes, o caso onde $Ra = 0$ e $Ma \neq 0$ só costuma ser fisicamente observado em condições de microgravidade. Na Figura 40 são apresentadas as curvas de estabilidade para a convecção induzida unicamente pelo efeito Marangoni ($Ra = Re = 0$) para $d_0 < 1$. Neste caso, o sistema pode deixar de ser instável tanto quando o aquecimento for realizado pela parte inferior quanto quando for realizado pela parte superior. Para manter a mesma configuração apresentada anteriormente, será considerado somente o caso de aquecimento pela parte inferior.

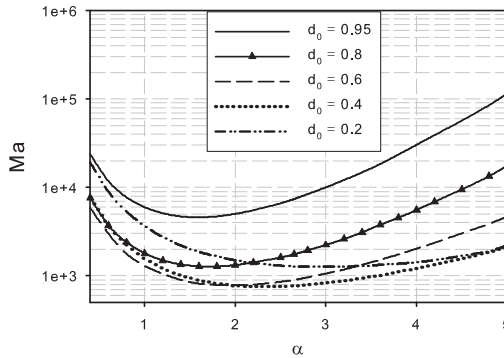


Figura 40: Curvas de estabilidade para convecção de Bénard-Marangoni, considerando $Ra = Re = 0$, $Pr = 1$ e $d_0 < 1$.

Pode-se observar que neste caso o número de Marangoni crítico possui um mínimo para um valor intermediário de $d_0 \approx 0.4$. Este comportamento está em acordo com o observado por outros autores (ZEREN; REYNOLDS, 1972; SMITH, 1966). O número de onda crítico, no entanto, claramente aumenta com a diminuição no valor de d_0 , indicando que o sistema passa a ser instável com relação a perturbações com menor comprimento de onda conforme a espessura da camada superior diminui.

Conforme discutido por Zeren e Reynolds (1972), para determinados valores de d_0 a instabilidade surge primeiramente pela ação de um mecanismo que recebe energia tanto do termo associado à tensão interfacial quanto do termo associado ao empuxo, não sendo este modo observado quando $Ra = 0$. Para o sistema com camadas idênticas avaliados neste trabalho, não foi encontrado um valor de Ma_c para o caso de camadas com igual espessura ($d_0 = 1$). Avaliando-se as condições de contorno de balanço de tensão de cisalhamento (Eq. 3.75), percebe-se que o efeito termocapilar surge devido à diferença na tensão de cisalhamento nas duas faces da interface, sendo esta diferença dependente do número de Marangoni e dos desvios das variáveis perturbadas (temperatura e velocidade vertical). No entanto, para o caso onde $d_0 = 1$ observa-se que $\theta(0) = \phi(0) = 0$ e portanto não ocorre desequilíbrio entre as tensões de cisalhamento nas duas camadas. Isto ocorre pois a simetria observada quando $Ra^* = 1$ proíbe a existência de gradientes locais de temperatura ou velocidade através da interface quando esta é

considerada sem deformações.

Autofunções associadas à velocidade vertical e à temperatura para o caso da convecção de Bénard-Marangoni são apresentadas na Figura 41, sendo estas avaliadas próximas aos pontos críticos para $d_0 = 0.8$ e $d_0 = 0.4$. De modo geral, as autofunções apresentam um formato semelhante ao observado quando ocorre o acoplamento viscoso na convecção de Rayleigh-Bénard. Como visto na Figura 41(a), as autofunções relacionadas à velocidade na camada inferior ($y < 0$) permanecem praticamente inalteradas com a variação no valor de d_0 , indicando uma não-dependência da velocidade nesta camada com a espessura da camada superior. As autofunções avaliadas na camada superior também apresentam o mesmo comportamento, havendo no entanto uma esperada diminuição na intensidade da recirculação para $d_0 = 0.4$ devido à redução no espaço onde a recirculação se desenvolve. Pode-se também observar que próximo à interface, aonde surgem as instabilidades, as autofunções para a velocidade vertical coincidem.

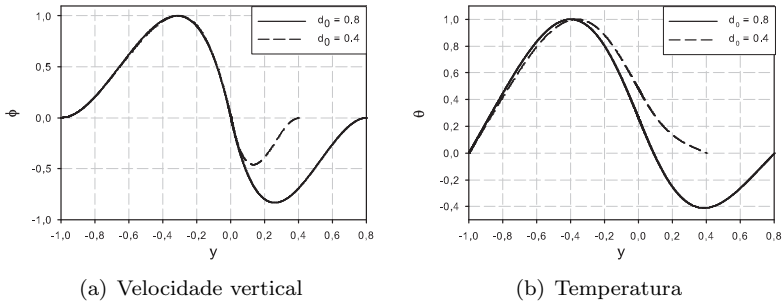


Figura 41: Autofunções associadas a Ma_c para $Ra = Re = 0$ e $Pr = 1$.

A mudança no formato das autofunções com a variação em d_0 é mais expressiva para a temperatura, como visto na Figura 41(b). Novamente na camada inferior as duas curvas apresentam um comportamento muito semelhante, sendo que a pequena diferença observada na inclinação resulta do fato de que o valor de Ma_c não é o mesmo para os dois valores de d_0 . Para $d_0 = 0.8$ a curva na camada superior apresenta o mesmo comportamento observado para o acoplamento viscoso, enquanto que para $d_0 = 0.4$ a distribuição de temperatura é governada pela influência da camada inferior.

Curvas de estabilidade relacionadas com valores de $d_0 > 1$ são mostradas na Figura 42(a). Para todos os casos apresentados nessa

figura, observou-se que o estado mais instável corresponde a um estado oscilatório, sendo que a frequência de oscilação associada a cada valor de d_0 é mostrada na Figura 42(b). Neste caso, o aumento no valor de d_0 causa a desestabilização do sistema, sendo no entanto os valores obtidos para $d_0 = 2$ bastante similares aos obtidos para $d_0 = 5$, em especial para altos números de onda. Além disso, apesar de o sistema perder a estabilidade para menores valores de Ma conforme d_0 aumenta, a frequência de oscilação diminui.

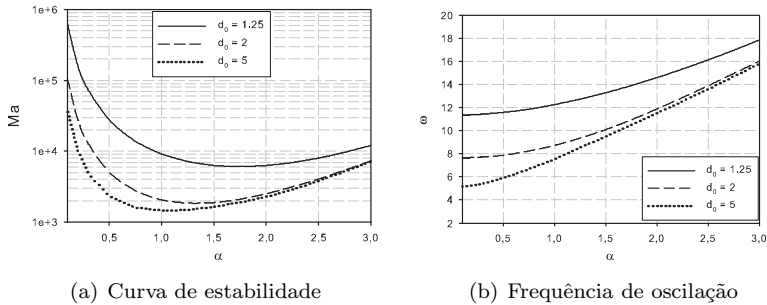
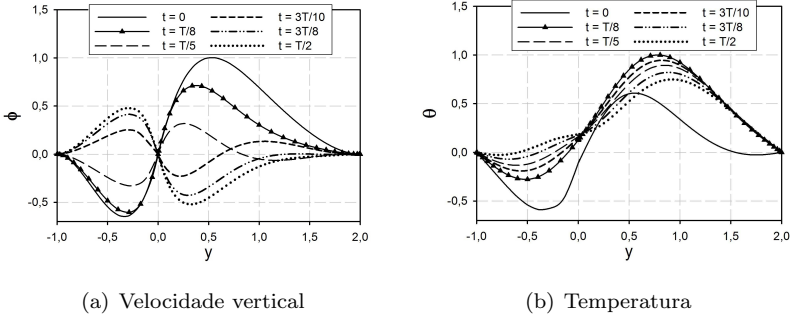


Figura 42: Análise de estabilidade para convecção de Bénard-Marangoni, considerando $Ra = Re = 0$, $Pr = 1$ e $d_0 > 1$.

O comportamento periódico do sistema pode ser visualizado através das autofunções mostradas na Figura 43, onde são apresentadas as curvas para diversos instantes ao longo do período de oscilação T . Os valores exibidos nesta figura correspondem a $d_0 = 2$ e um valor de Ma próximo ao ponto crítico. A evolução temporal das autofunções representando a velocidade vertical, apresentada na Figura 43(a), mostra uma mudança no sentido da recirculação nas duas camadas. Este padrão oscilatório é comum para o caso da convecção de Marangoni, sendo consistente com resultados experimentais obtidos em microgravidade por diversos autores, como por exemplo os apresentados por Schwabe (2005), obtidos em um foguete de pesquisa (*sounding rocket*), e os apresentados por Kawamura et al (2012), obtidos a bordo da Estação Espacial Internacional.

A origem do estado oscilatório para $d_0 > 1$ ocorre através de uma bifurcação de Hopf, sendo um comportamento semelhante observado por Bekezhanova (2011). Neste caso, o sistema oscila entre os valores relacionados ao par conjugado de autovalores mais instável ($t = 0$ e $t = T/2$). Através das curvas apresentadas na Figura 43(a) pode-se ver



(a) Velocidade vertical

(b) Temperatura

Figura 43: Autofunções relacionadas ao comportamento oscilatório observado para $d_0 = 2$, onde T representa o período total da oscilação.

que ocorre a formação de uma recirculação predominante em cada uma das camadas para os dois extremos do ciclo, indicando que a dinâmica das duas camadas influencia a estabilidade do sistema. O acoplamento entre as camadas sempre ocorre na forma de um acoplamento viscoso, sendo que a ordem de grandeza das recirculações nas duas camadas é similar durante todo o ciclo.

Em relação à temperatura, as autofunções apresentadas na Figura 43(b) mostram um comportamento mais distinto entre os dois extremos do ciclo. Para $t = 0$ o sistema exibe a configuração típica do acoplamento viscoso, com distribuição aproximadamente antisimétrica com mesma ordem de grandeza nas duas camadas. Porém, neste caso o sistema evolui para um estado onde a distribuição de temperatura é definida basicamente pelo comportamento da camada superior. Isto mostra uma diferença clara da dinâmica de distribuição de temperatura e quantidade de movimento, mesmo para o caso onde a difusividade de energia e de quantidade de movimento são idênticas.

A influência do número de Reynolds nas curvas de estabilidade para a convecção de Bénard-Marangoni é apresentada na Figura 44. Para o caso onde $d_0 = 0.8$ (Figura 44(a)) pode-se observar que para perturbações com baixo número de onda, o aumento no valor de Re estabiliza o sistema, fazendo com que dentro da faixa de valores investigada o valor de Ma_c aumente em função do aumento em Re . No entanto, para perturbações com elevado número de onda um comportamento oposto é observado, sendo o sistema desestabilizado pelo aumento no escoamento cisalhante. Isto indica a existência de mais de um modo governante para a estabilidade deste sistema, estando isto

também em acordo com os resultados encontrados pelos autores citados anteriormente. Analisando o esquema apresentado na Figura 39(a), fica claro que a força causada pelo escoamento cisalhante na interface em parte favorece e em parte se opõe ao movimento gerado pelo efeito termocapilar.

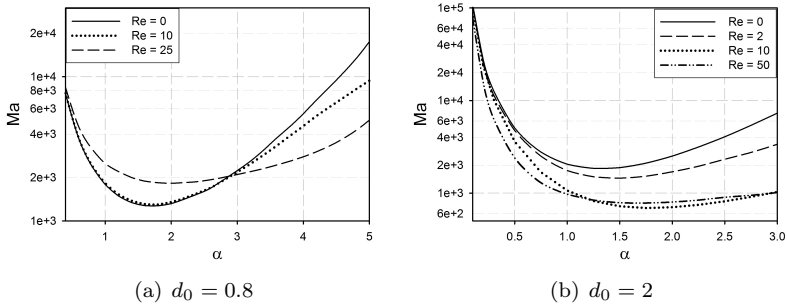


Figura 44: Curvas de estabilidade para diversos valores de Re , considerando $Ra = 0$ e $Pr = 1$.

Para $d_0 = 2$ os resultados apresentados na Figura 44(b) mostram uma tendência distinta. Primeiramente, o estado oscilatório observado para $Re = 0$ desaparece quando $Re > 0$, sendo este um resultado do desequilíbrio das forças na interface gerado pelo escoamento cisalhante (ver Figura 39(c)). De modo geral, observa-se que o aumento no valor de Re tende a desestabilizar o sistema, exceto para uma faixa de números de onda próximas ao valor crítico onde os resultados para $Re = 50$ mostram-se mais estáveis que os para $Re = 10$.

Considerando os resultados para a dependência do número de Marangoni associado à instabilidade com o número de Reynolds, pode-se ver que existe uma relação não-trivial entre o mecanismo de instabilidade termocapilar e o escoamento cisalhante. No presente trabalho não será aprofundado o estudo da interação entre estes mecanismos, sendo no entanto recomendado ao leitor o trabalho de Napolitano (1980) sobre o assunto.

4.3.2 Competição entre os Mecanismos de Instabilidade

Analisando os resultados apresentados até o momento, pode-se perceber que tanto o número de Rayleigh quanto o número de

Marangoni podem levar o sistema à instabilidade quando atingirem um determinado valor crítico. No limite onde as instabilidades devido ao cisalhamento são desconsideradas, estes são basicamente os parâmetros que controlam a estabilidade para o caso de fluidos com propriedades idênticas. Porém, os valores críticos para estes parâmetros são funções dos demais números adimensionais considerados, ou seja, $Ra_c = Ra_c(Re, Ra_\rho, S, Pr, d_0, Ma)$ e $Ma_c = Ma_c(Re, Ra_\rho, S, Pr, d_0, Ra)$.

Na presente seção será considerado o caso onde os dois mecanismos que levam à instabilidade estão presentes ($Ra \neq 0$ e $Ma \neq 0$), buscando-se principalmente avaliar qual a influência do número de Marangoni sobre o valor de Ra onde a convecção inicia e qual a relação destes com os demais parâmetros governantes. Nos resultados apresentados a seguir será considerando ainda que a deformação da interface é negligenciável, de modo que $S = Ra_\rho^{-1} = 0$. Curvas de estabilidade mostrando o valor mínimo para Ra onde a instabilidade é observada são apresentadas na Figura 45 para diversos valores de Ma , considerando casos onde $d_0 < 1$.

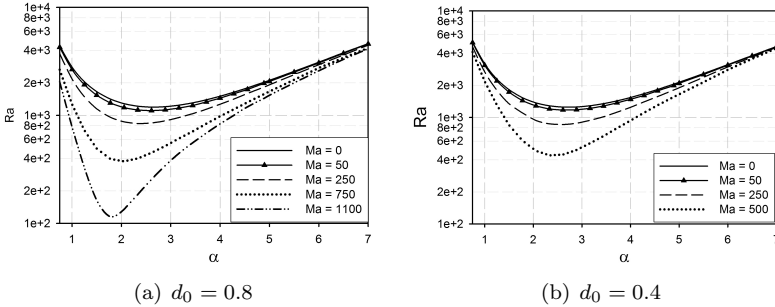


Figura 45: Influência do número de Marangoni no início da convecção natural para $Re = 0$, $Pr = 1$ e $d_0 < 1$.

Para os dois valores de d_0 avaliados o aumento no valor de Ma desestabiliza o sistema, causando uma redução em Ra_c conforme o número de Marangoni se aproxima do seu valor crítico. Esta redução no entanto só é significativa para a faixa de números de onda próximos ao valor crítico, sendo que para valores muito elevados ou baixos todas as curvas tendem para o mesmo ponto. Além disso, comparando-se os valores obtidos para $d_0 = 0.8$ e $d_0 = 0.4$ pode-se observar que a taxa de variação de Ra em função do aumento em Ma é aproximadamente a mesma para os dois casos, sendo que, por exemplo, os resultados

para $Ma = 250$ são muito próximos para os dois casos, especialmente para elevados números de onda. Curvas para $d_0 = 0.4$ e valores de $Ma > 500$ não são apresentadas pois neste caso o sistema passa a ser instável unicamente pela ação das forças termocapilares. A diminuição no valor crítico de Ra em função do aumento em Ma para $d_0 < 1$ já era esperada com base nos mecanismos discutidos na Figura 39.

Autofunções obtidas para diferentes valores do número de Marangoni e $d_0 = 0.8$ são apresentadas na Figura 46. Estas autofunções foram avaliadas próximas ao ponto crítico associado a cada valor de Ma . Conforme Ma aumenta, observa-se também um aumento relativo na intensidade da recirculação na camada superior, fazendo com que esta deixe de apresentar um comportamento prioritariamente passivo, onde a distribuição de velocidade e temperatura é controlada basicamente pelo movimento convectivo na camada inferior, e passe a ter um comportamento similar ao observado quando a instabilidade ocorre com a mesma intensidade nas duas camadas, mesmo sendo para este caso $Ra^* \approx 0.5$. Isto mostra que o efeito termocapilar atuando na interface, além de facilitar o surgimento do movimento convectivo, também favorece o acoplamento entre as duas camadas e o surgimento de recirculações. De fato, apesar de o número de Rayleigh crítico diminuir consideravelmente com o aumento de Ma , pode-se ver que de modo geral a intensidade das recirculações é maior para altos valores de Ma .

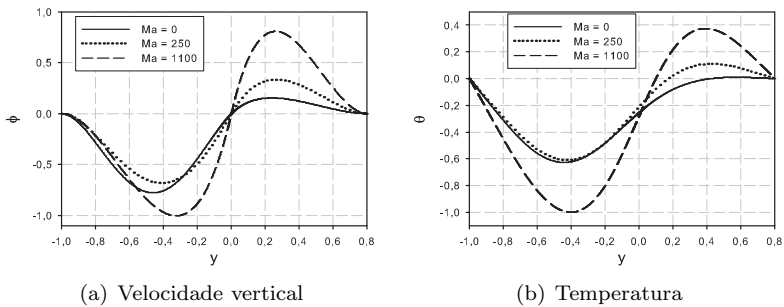
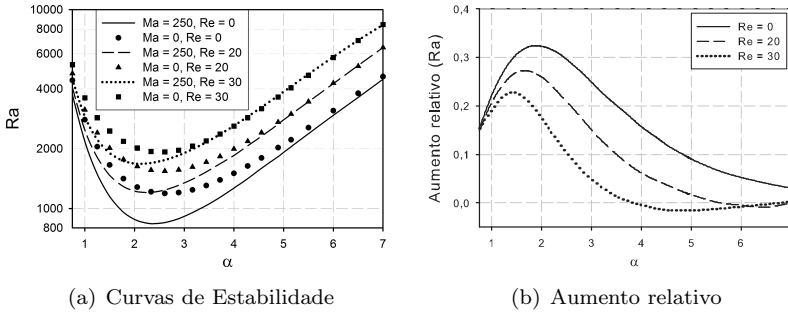


Figura 46: Influência de Ma nas autofunções para $Re = 0$, $Pr = 1$ e $d_0 = 0.8$.

As forças geradas pelo efeito termocapilar atuam no mesmo sentido da recirculação para $d_0 < 1$, por isso pode-se sempre esperar uma redução em Ra_c em função do aumento em Ma . As forças geradas pelo escoamento cisalhante, por sua vez, podem estabilizar ou desestabili-

zar o sistema, conforme discutido anteriormente. Na Figura 47(a) são apresentadas as curvas de estabilidade para dois valores do número de Marangoni, $Ma = 0$ e $Ma = 250$, considerando diferentes valores para o número de Reynolds e $d_0 = 0.8$.



(a) Curvas de Estabilidade

(b) Aumento relativo

Figura 47: Influência do número de Reynolds nas curvas de estabilidade para $Ma = 0$ e $Ma = 250$, considerando $Pr = 1$ e $d_0 = 0.8$.

Para melhor apresentar a diferença entre as curvas, na Figura 47(b) é mostrado o aumento relativo no valor de Ra obtido para $Ma = 0$ em comparação com o valor obtido para $Ma = 250$. Esta diferença pode ser entendida como a redução na estabilidade devido à variação no número de Marangoni de 0 para 250, sendo que este valor tende a diminuir conforme o número de Reynolds aumenta, especialmente próximo aos valores críticos. Isto mostra que o efeito termocapilar possui um menor impacto conforme a intensidade do escoamento cisalhante aumenta. Para todos os valores de Reynolds, as curvas de estabilidade mostram um acréscimo no valor de Ra onde a convecção inicia para números de onda intermediários ($1 \lesssim \alpha \lesssim 3$). No entanto, conforme visto na Figura 47(b), este aumento possui um ponto de máximo para um número de onda pouco abaixo do valor crítico e a partir deste ponto tende a diminuir, sendo que para $Re = 20$ e $Re = 30$ existe uma faixa de valores de α com aumento relativo negativo, ou seja, neste caso a combinação do efeito termocapilar com escoamento cisalhante levemente estabiliza o sistema.

4.3.2.1 Análise de Estabilidade para $d_0 > 1$

As alterações causadas pela presença do efeito termocapilar possuem um comportamento ainda mais complexo quando $d_0 > 1$, conforme visto anteriormente. A seguir serão discutidos alguns aspectos relacionados à influência do número de Marangoni no início do processo convectivo causado pelas forças de empuxo para determinados valores de $d_0 > 1$, considerando também a influência do escoamento cisalhante.

As curvas de estabilidade associadas a $d_0 = 1.25$ para diferentes valores de Ma são apresentadas na Figura 48(a). A curva referente a $Ma = 0$ é equivalente à apresentada anteriormente para $d_0 = 1/1.25 = 0.8$, com a diferença de que neste caso a instabilidade surge primeiramente na camada superior, de modo que o valor do número de Rayleigh apresentado na figura (avaliado na camada inferior) é corrigido por uma escala de 0.8^4 .

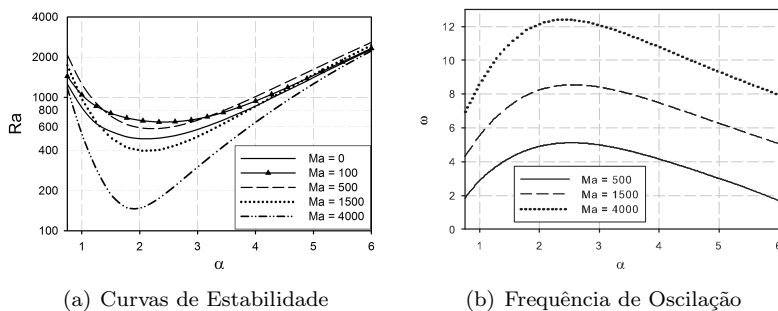


Figura 48: Curvas de estabilidade para diversos valores de Ma , considerando $Pr = 1$, $Re = 0$ e $d_0 = 1.25$

Para baixos valores do número de Marangoni ocorre uma estabilização do sistema, em virtude do balanço de forças atuando na interface (ver Figura 39), onde o efeito termocapilar contrapõe a recirculação originada pelo empuxo. No entanto, a partir de um determinado valor de Ma o sistema atinge um estado oscilatório e a partir deste ponto o aumento no valor de Ma passa a reduzir valor de Ra_c , indicando que neste caso o efeito termocapilar auxilia o mecanismo que gera a instabilidade para menores valores de Ra .

Na Figura 48(b) são apresentadas as frequências de oscilação associadas aos casos apresentados na Figura 48(a), sendo que para

$Ma < 100$ nenhum estado oscilatório foi observado. Os limites para o número de Marangoni onde o estado oscilatório surge serão discutidos na sequência. Pelas curvas apresentadas na Figura 48(b) pode-se ver que para todos os valores de Ma o sistema apresenta uma frequência de oscilação máxima para um número de onda aproximadamente igual, ao contrário do valor crítico, que diminui conforme o valor de Ma aumenta. O comportamento parabólico das curvas indica que o estado oscilatório está restrito a uma determinada faixa de número de ondas, o que de fato é observado quando se analisa valores de α superiores aos apresentados nas figuras.

Além das alterações observadas no número de Rayleigh crítico, a presença do efeito termocapilar afeta de modo considerável o formato das autofunções, mesmo para valores de Ma onde nenhum estado oscilatório é observado. Isto pode ser visto na Figura 49, onde são apresentadas as autofunções para $Ma < 100$ e $d_0 = 1.25$. As curvas para $Ma = 0$ são apresentadas para referência, porém estas são equivalentes às anteriormente apresentadas para $d_0 = 0.8$.

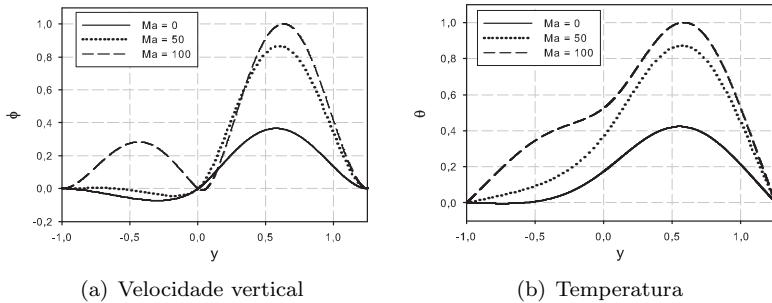


Figura 49: Autofunções para baixos valores de Ma , considerando $Pr = 1$, $Re = 0$ e $d_0 = 1.25$

O aumento no valor de Ma de 0 para 100 faz com que o sistema deixe de apresentar um comportamento semelhante ao acoplamento viscoso, com recirculações em direções opostas, e passe a apresentar um comportamento mais semelhante ao acoplamento térmico, com as recirculações nas duas camadas ocorrendo no mesmo sentido, conforme visto na Figura 49(a). Isto indica que a recirculação na camada inferior deixa de ser gerada somente pela atuação das forças de empuxo e passa a ser gerada pelo efeito termocapilar na superfície, de forma similar ao esquema apresentado na Figura 39(c). Apesar da semelhança com o

acoplamento térmico descrito anteriormente, nas curvas apresentadas na Figura 49 a recirculação na camada inferior é induzida pela ação conjunta das forças de empuxo e do efeito termocapilar, sendo por isso esta forma de acoplamento observada mesmo quando Ra^* é consideravelmente superior a 1.

As autofunções relacionadas à temperatura, apresentadas na Figura 49(b), também são alteradas pela variação no valor de Ma , sendo que o aumento em Ma faz com que a distribuição de temperatura na camada inferior deixe de ser basicamente uma função do arrasto causado pela camada superior e passe a ter um formato definido pela recirculação que ocorre na própria camada inferior.

Quando o número de Marangoni atinge um determinado valor crítico o sistema passa a exibir um comportamento oscilatório, conforme comentado anteriormente. Para o caso onde $d_0 = 1.25$ o limite no valor de Ma onde este comportamento começa a ser observado é $Ma_c \approx 114$. Para valores acima deste limite o aumento no efeito termocapilar diminui a estabilidade do sistema. Na Figura 50 são mostradas as autofunções associadas a um estado oscilatório ($Ma = 150$), onde pode-se ver que os limites de oscilação correspondem às duas formas de acoplamento observadas anteriormente. Observe que as autofunções associadas a $t = T/2$ apresentam um comportamento praticamente simétrico em relação a um plano $y = 0.125$, sendo este o ponto médio relacionado à altura total das camadas.

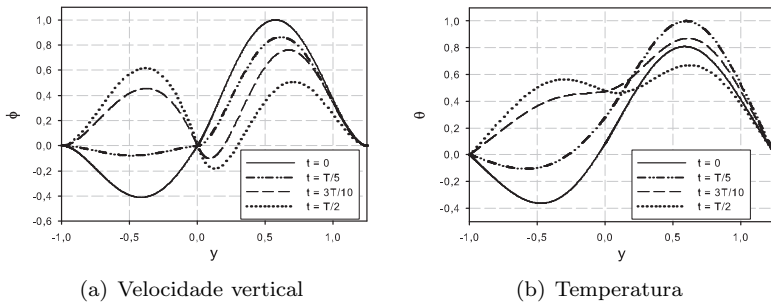


Figura 50: Autofunções para $Ma = 150$, considerando $Pr = 1$, $Re = 0$ e $d_0 = 1.25$

A variação no número de Rayleigh crítico em função do número de Marangoni é apresentada na Figura 51 para diversos valores de Reynolds. A curva para $Re = 0$ mostra claramente a mudança que ocorre

na resposta do sistema para $Ma \approx 114$. Uma análise do espectro dos autovalores nas redondezas deste ponto revela a existência de uma bifurcação de Hopf, sendo esta mostrada com mais detalhes na Figura 52. Nesta figura, as linhas sólidas correspondem aos dois primeiros modos estacionários, enquanto que os pontos indicam o número de Rayleigh crítico relacionado aos ciclos limite. Através da análise linear não é possível determinar a ligação entre as duas curvas no intervalo $115 < Ma < 122.5$, porém espera-se que um ramo instável de solução exista neste intervalo, sendo que este se origina na bifurcação de Hopf e torna-se um ramo estável em $Ma \approx 122.5$ devido a uma nova bifurcação.

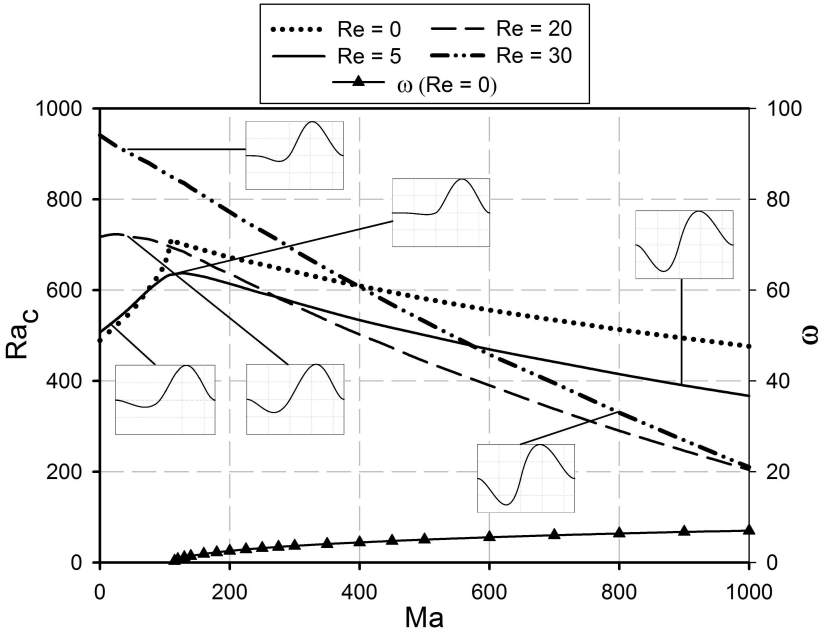


Figura 51: Rayleigh crítico em função de Ma para diferentes valores de Re , considerando $d_0 = 1.25$ e $Pr = 1$.

A influência do número de Reynolds no valor de Ra_c mostra um comportamento bastante complexo, conforme pode ser visto nas curvas apresentadas na Figura 51. A atuação das forças cisalhantes na interface mostrou-se muito significativa, sendo que valores de Reynolds da ordem de 10^{-3} já são suficientes para eliminar a existência de estados

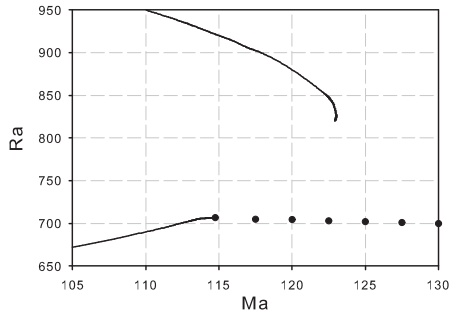


Figura 52: Bifurcação de Hopf observada próximo ao ponto $Ma = 114$.

oscilatórios. Para baixos valores de Reynolds, o aumento em Ma inicialmente estabiliza o sistema, de maneira semelhante ao observado para $Re = 0$. No entanto, este efeito estabilizador desaparece para altos valores de Re . Conforme Re aumenta, a inclinação da curva que relaciona Ra_c com Ma também tem um aumento significativo, indicando que o escoamento cisalhante e o efeito termocapilar atuam de forma cooperativa para reduzir a estabilidade, ou seja, o aumento no valor de Re facilita o surgimento do desequilíbrio de forças necessário para que a convecção inicie. Isto faz com que em determinados pontos as curvas relacionadas a diferentes valores de Re se cruzem e portanto para altos valores de Ma o aumento no valor de Re passa a desestabilizar o sistema.

Em alguns pontos específicos das curvas mostradas na Figura 51 são representadas as autofunções associadas a velocidade vertical nestes pontos. Para baixos valores de Ma as autofunções para todos os valores de Re mostram um comportamento semelhante, onde o movimento convectivo na camada superior induz ao arraste na camada inferior. Este modo é bastante similar ao observado quando o efeito termocapilar é desprezado ($Ma = 0$). Conforme o número de Marangoni aumenta o sistema passa a exibir um perfil mais semelhante ao acoplamento viscoso, podendo-se observar que a ação conjunta do efeito termocapilar e do escoamento cisalhante favorece esta forma de acoplamento. Dentro da faixa de valores avaliadas para o número de Marangoni, não foi observado nenhum caso onde o acoplamento térmico surge para menores valores de Ra quando $Re \geq 5$.

A forma de acoplamento das camadas está diretamente relacionada com a facilidade de transferência de informação de um ponto para

outro, ou seja, com a capacidade de difusão das variáveis que definem o sistema. Na Figura 53 são apresentadas as curvas de Ra_c em função de Ma para diferentes valores do número de Prandtl, mantendo-se $Re = 5$. Assim como na Figura 51, são apresentadas as autofunções para a velocidade vertical para pontos específicos ao longo das curvas. De maneira geral, pode-se observar que o aumento no valor de Pr possui um efeito similar ao aumento no valor de Re , com um acréscimo na estabilidade para baixos valores de Ma e uma proporcional redução para elevados valores de Ma .

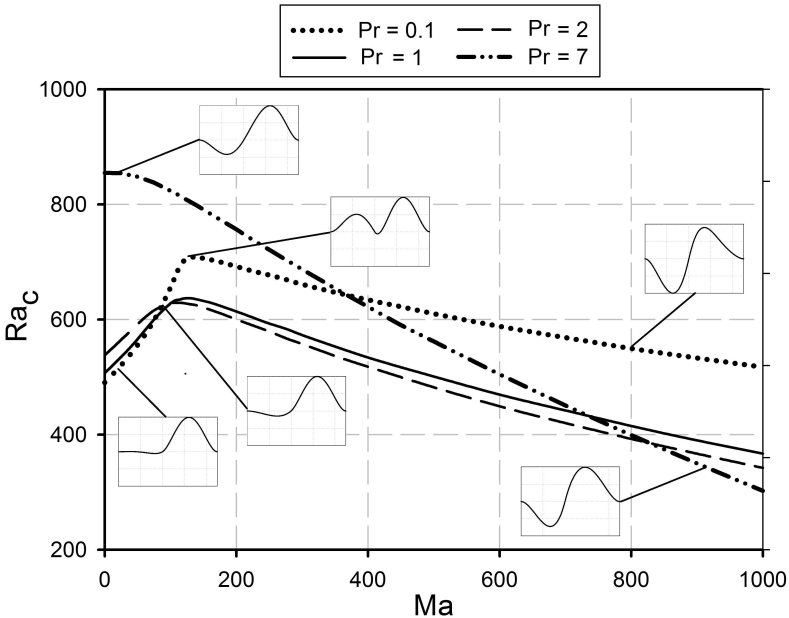


Figura 53: Rayleigh crítico em função de Ma para diferentes valores de Pr , considerando $d_0 = 1.25$ e $Re = 5$.

Analisando as autofunções inseridas na curva associada a $Pr = 0.1$ pode-se ver que para valores de Ma próximos a zero a recirculação na camada superior é muito mais intensa que na camada inferior, ocorrendo assim o acoplamento por arraste discutido anteriormente. Conforme o valor de Ma aumenta a recirculação na camada inferior também aumenta, e para valores de $Ma \approx 100$ pode-se observar a existência do acoplamento térmico entre as camadas. No entanto, assim como para

outros casos, a partir de um determinado ponto o modo mais instável passa a ser o associado ao acoplamento viscoso, sendo este predominante para altos valores de Ma . Para valores de $Pr \geq 1$ ocorre de maneira semelhante a formação de um acoplamento por arraste para baixos valores de Ma e do acoplamento viscoso para altos valores de Ma , sem no entanto ser observada nenhuma faixa de valores onde o acoplamento térmico corresponde ao modo mais instável.

Considerações finais

Na presente seção foi avaliada a influência do efeito termocapilar (efeito Marangoni) sobre a estabilidade do sistema. Os resultados obtidos mostram que a instabilidade gerada unicamente pela ação das forças termocapilares só é possível para $d_0 \neq 1$. A ação conjunta das forças de empuxo, termocapilares e cisalhantes gera um sistema bastante complexo, em especial para valores de $Ra^* > 1$, onde estados oscilatórios mostraram-se bastante comuns para $Re = 0$. No entanto, a presença do escoamento cisalhante inibe a formação destes estados oscilatórios, sendo este um importante resultado visto que em diversas situações práticas a oscilação do sistema deve ser evitada, o que pode ser conseguido simplesmente impondo alguma forma de convecção forçada.

Apesar de inibirem a formação de estados oscilatórios, as forças cisalhantes nem sempre atuam em favor da estabilidade do sistema. Para valores do número de Marangoni relativamente altos (porém inferiores ao valor crítico) o aumento no valor do número de Reynolds diminui significativamente o valor de Ra_c , favorecendo a formação de células convectivas. Este comportamento também é acentuado conforme a difusividade de quantidade de movimento se torna maior que a difusividade térmica, ou seja, conforme o número de Prandtl aumenta. Neste caso, pode-se observar que $Ra_c^{-1} \propto Re, Pr, Ma$. No entanto, para baixos valores de Ma , Re e Pr , onde a estabilidade é definida principalmente pelas forças de empuxo, a presença do escoamento cisalhante estabiliza o sistema. Estes resultados estão em acordo com os observados anteriormente quando o efeito termocapilar é desconsiderado. Portanto, pode-se concluir que a atuação do efeito termocapilar é amplificada pelo escoamento cisalhante, sendo este aumento proporcional ao número de Prandtl. Finalmente, pode-se destacar o fato de que para determinada faixa de valores para os parâmetros Ma , Re e Pr o acoplamento térmico entre as camadas mostrou-se como o modo mais instável para $d_0 = 1.25$.

Nos resultados apresentados até o momento considerou-se que a diferença na tensão normal nas duas camadas é muito grande ($Ra_\rho^{-1} \approx$

0), o que estabiliza a interface e evita a sua deformação. Na próxima seção será discutido o impacto desta aproximação, bem como serão avaliados os limites onde esta suposição pode ser considerada.

4.4 DEFORMAÇÃO DA INTERFACE (η)

A hipótese adotada de que $Ra_\rho^{-1} \approx 0$ facilita a análise do problema de estabilidade por eliminar a deformação da interface e com isso simplificar muitas das condições de contorno. Este parâmetro, obtido anteriormente, é definido como:

$$Ra_\rho = \frac{gd_1^3}{\nu_1 \kappa_1} (1 - \rho_0) = \frac{Ra}{d_1 \psi_1 \beta_1} (1 - \rho_0)$$

onde pode-se observar que conforme a razão entre a densidade dos fluidos ρ_0 tende a 1 o valor de Ra_ρ tende a zero. A expressão obtida para o balanço de tensão normal na interface mostra que a diferença entre a tensão nas duas camadas é, de fato, proporcional ao termo $Sk^2 + Ra_\rho$, onde S é um parâmetro adimensional para quantificar a tensão interfacial, ou seja, tanto a tensão interfacial quanto a diferença de densidade atuam em favor de estabilizar a interface. Por simplicidade, será também considerado nesta seção que $S = 0$ e somente o valor de Ra_ρ será alterado. Como ambos os termos surgem unicamente no balanço da tensão normal na interface, esta hipótese não altera a análise do problema. Além disso, será considerado somente casos onde $\rho_0 < 1$, pois na ausência de tensão interfacial ($S = 0$) a imposição de $\rho_0 > 1$ implica que o sistema será instável devido à atuação da instabilidade de Rayleigh-Taylor.

A deformação da interface afeta quatro das condições de contorno impostas na interface, sendo três destas relacionadas à equação de conservação de quantidade de movimento e a outra relacionada à conservação de energia. A deformação da interface, η , surge nestas condições de contorno quando a continuidade de alguma grandeza é transposta da posição real da interface para o plano $y = 0$, sendo que além de dependerem explicitamente de η estas condições são funções de outros parâmetros.

Em relação à continuidade da velocidade tangencial na interface (Eq. 3.74), a influência da deformação da interface depende do produto $RePr$ bem como da diferença entre a inclinação do perfil de velocidade base avaliado nas duas camadas em $y = 0$. Esta diferença de inclinação

só ocorre quando $m \neq 1$, porém este caso não será considerado nesta seção e portanto a influência de η sobre esta condição de contorno pode ser desprezada. Em relação ao balanço da tensão de cisalhamento, para que ocorra a deformação da interface é necessária a existência de uma força tangencial atuando na interface, sendo que no problema avaliado no presente trabalho esta força pode ser gerada pelo efeito termocapilar. Por isso, conforme pode ser visto na Eq. 3.75 a deformação da interface só afeta o balanço de tensão de cisalhamento quando $Ma \neq 0$.

A continuidade da temperatura na interface, por sua vez, só é afetada pela deformação da interface quando ocorre uma mudança na inclinação do perfil de temperatura do estado base, ou seja, quando $\psi_0 \neq 1$. Conforme mostrado na obtenção do perfil de temperatura base, esta condição pode também ser expressa em termos da condutividade térmica do fluido nas duas camadas ($k_0 \neq 1$), visto que $\psi_0 = k_0^{-1}$.

Por último, a deformação da interface está diretamente relacionada com o balanço de tensão normal na interface, como comentado anteriormente. De fato, pode-se dizer que enquanto as outras condições de contorno são afetadas pela deformação da interface, o balanço de tensão normal origina esta deformação. A imposição de que a tensão na camada inferior é muito maior que na camada superior garante a estabilidade da interface, pois a deformação só pode surgir quando as forças normais atuando na interface possuem magnitudes semelhantes. Cabe lembrar que, conforme comentado anteriormente, caso a tensão normal for maior na camada superior a ação da gravidade faz com que o sistema recaia na instabilidade de Rayleigh-Taylor.

Portanto, para que a deformação da interface seja significativa temos que a condição $(k^2 S + Ra_\rho)^{-1} > 0$ deve ser respeitada. Além disso, para que a estabilidade do sistema seja afetada por essa deformação uma das condições $m \neq 1$, $k_0 \neq 1$ ou $Ma \neq 0$ também deve ser satisfeita. O caso onde $m \neq 1$ afeta diversos outros fatores associadas à estabilidade do sistema e portanto não será considerado nesta seção. Os demais casos serão discutidos a seguir.

4.4.1 $k_0 \neq 1$

Primeiramente será considerado o caso onde a condutividade térmica das duas camadas é distinta, originando uma variação na inclinação do perfil de temperatura base na interface. Por simplicidade serão apresentados somente resultados para $k_0 > 1$ ($\psi_0 < 1$), sendo que, assim como observado quando o valor de d_0 é variado, a resposta

do sistema é simétrica em relação à $k_0 = 1$ para $d_0 = 1$, sendo a estabilidade determinada unicamente pela razão entre as condutividades nas duas camadas, independentemente de qual camada possuir o maior valor. Além disso, mesmo havendo variação em k_0 será considerado que a difusividade térmica nas duas camadas permanece a mesma, de modo que a razão entre o número de Rayleigh avaliado nas duas camadas possa ser dada por $Ra^* = k_0^{-1}$.

Na Figura 54 são apresentadas as curvas de estabilidade para diversos valores de Ra_ρ e diferentes valores de k_0 , considerando camadas com a mesma espessura e $Re = Ma = 0$. Para valores de $Ra_\rho > 10^5$ nenhuma diferença observável foi encontrada nas curvas, podendo-se portanto considerar este valor como sendo suficiente para evitar que os efeitos associados à deformação da interface sejam importantes. A ordem de grandeza deste valor está de acordo com os valores encontrados por outros autores para casos semelhantes (CARDIN; NATAF; DEWOST, 1991). Conforme Ra_ρ diminui o sistema se torna menos estável, sendo que para $Ra_\rho = 10^3$ já pode-se observar uma alteração significativa no valor de Ra onde a convecção inicia. Apesar disso, o formato das curvas para todos os casos é semelhante, havendo somente uma pequena redução no valor de α_c .

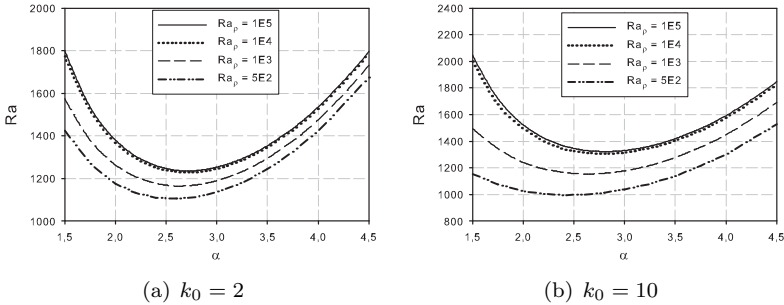


Figura 54: Curvas de estabilidade para diferentes valores de Ra_ρ , considerando $Re = Ma = 0$ e $Pr = d_0 = 1$.

As autofunções obtidas para $k_0 = 10$ e diferentes valores de Ra_ρ são apresentadas na Figura 55, sendo estas autofunções avaliadas próximas aos pontos críticos referentes a cada valor de Ra_ρ . As autofunções para velocidade vertical apresentam o comportamento característico do acoplamento por arraste, havendo uma considerável redução na intensidade da autofunção na camada superior como con-

seqüência da diferença no número de Rayleigh avaliado nas duas camadas (neste caso $Ra^* = 0.1$). Apesar das alterações nas autofunções, o deslocamento da posição da interface em relação a $y = 0$ não é muito significativo, conforme pode ser observado no detalhe apresentado na Figura 55(a). Para baixos valores de Ra_ρ a condição $\phi(0) \neq 0$ ocorre e portanto a interface é deformada, no entanto pode-se perceber que $\eta \ll d_1$.

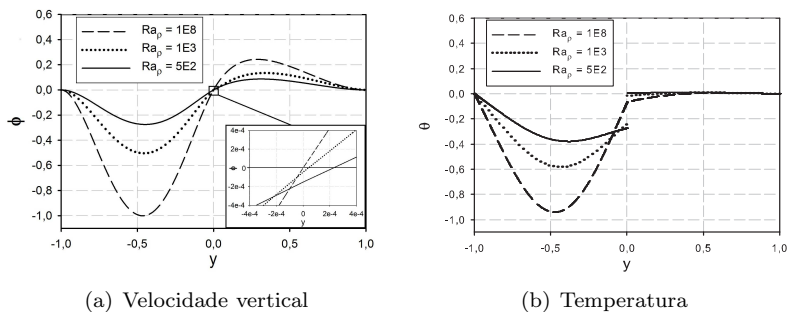


Figura 55: Autofunções para $k_0 = 10$, considerando $Re = Ma = 0$ e $Pr = d_0 = 1$.

A influência da deformação da interface também é visível nas autofunções associadas à temperatura, como visto na Figura 55(b). Neste caso, para baixos valores de Ra_ρ ocorre um salto em $y = 0$, sendo este salto proporcional tanto a $\phi(0)$ quanto a $(1 - \psi_0)$. Cabe lembrar que esta descontinuidade na autofunção associada ao desvio da temperatura em relação ao estado base é uma condição necessária para que a temperatura seja contínua através da interface, sendo a descontinuidade um resultado da linearização realizada em torno da interface não-perturbada. Além disso, pode-se ver que na camada superior θ assume valores muito menores que os da camada inferior, podendo-se até mesmo assumir que $\theta \approx 0$ para baixos valores de Ra_ρ . Novamente, esta diferença está relacionada com a diferença na condutividade térmica nas duas camadas, sendo que o aumento relativo de k na camada superior faz com que o regime de transferência de calor por condução (estado base) seja predominante mesmo para maiores gradientes de temperatura e portanto a perturbação do estado base (transferência de calor por convecção) tende a zero.

A variação do número de Rayleigh crítico em função de Ra_ρ é apresentada na Figura 56 para diversos valores de Reynolds consi-

derando $k_0 = 2$. Pode-se observar que todas as curvas apresentam um comportamento semelhante, havendo uma rápida diminuição na inclinação conforme o valor de Ra_ρ aumenta. Para todos os números de Reynolds avaliados não ocorrem mudanças significativas para valores mais elevados de Ra_ρ , de modo que o limite de $Ra_\rho > 10^5$ para que os efeitos relacionados à deformação da interface sejam desprezíveis pode ser adotado mesmo para baixos valores de Re . Para casos onde a deformação da interface é muito intensa ($Ra_\rho < 500$) o sistema torna-se rapidamente instável, resultando em uma grande inclinação nas curvas.

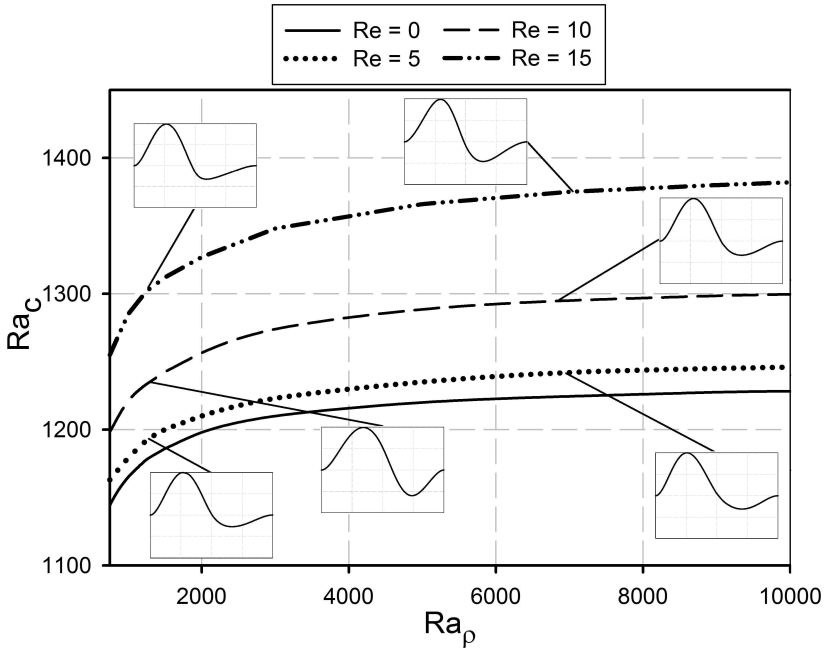


Figura 56: Rayleigh crítico em função de Ra_ρ para diferentes valores de Re , considerando $d_0 = 1$, $Pr = 1$ e $k_0 = 2$.

As autofunções inseridas na Figura 56 representam a velocidade vertical para diversos pontos selecionados ao longo das curvas. Pode-se ver que a intensidade da circulação na camada inferior é maior que na camada superior, sendo que esta diferença é causada pela diferença no gradiente de temperatura estático nas duas camadas. Além disso, para altos valores de Re os valores de $\phi(0)$ (velocidade vertical na interface) são muito maiores que os observados para $Re = 0$. No entanto deve-se

considerar a tendência de que conforme o número de Reynolds aumenta, a parte real do autovalor ω_r também aumenta, sendo que por isso a diferença entre a deformação da interface para $Re = 0$ e $Re > 0$ não é diretamente proporcional à diferença no valor de $\phi(0)$ para estes dois casos. Para valores mais elevados de Ra_ρ o valor de $\phi(0)$ rapidamente diminui.

Conforme Ra_ρ tende a zero o sistema passa a se comportar como se somente uma das camadas estivesse presente, sendo o número de Rayleigh crítico equivalente ao obtido para uma única camada. Este comportamento também é reportado por outros autores, como por exemplo Cardin, Nataf e Dewost (1991). A influência do número de Pr é semelhante ao observado para os demais casos, ou seja, o aumento no valor de Pr tende a estabilizar o sistema da mesma forma que o aumento em Re , portanto o impacto deste parâmetro não será discutido para este caso.

4.4.2 $Ma \neq 0$

O segundo caso avaliado onde espera-se que a deformação da interface afete a estabilidade do sistema é o caso onde o efeito termocapilar é considerado. Nos resultados apresentados anteriormente para $Ma \neq 0$ onde a deformação da interface não foi considerada, para que o efeito termocapilar seja significativo a condição $\theta \neq 0$ deve ser satisfeita. Porém, a condição de contorno para o balanço da tensão de cisalhamento na interface (Eq. 3.75) mostra que a influência do efeito termocapilar é proporcional à diferença $\theta - \eta_0$ avaliada em $y = 0$, por isso caso houver deformação da interface o efeito termocapilar pode ser significativo mesmo quando $\theta(0) = 0$. A seguir será apresentada uma breve revisão da configuração onde $Ra = 0$ e a instabilidade é governada somente pelo efeito termocapilar, possibilitando a deformação da interface. Após isto será considerado o caso onde tanto as forças de empuxo quanto o efeito termocapilar estão presentes.

4.4.2.1 Convecção de Bénard-Marangoni Revista

Antes de analisar o efeito da deformação da interface sobre o valor de Ra onde a convecção inicia, será brevemente revisto o caso da convecção de Bénard-Marangoni (obtido quando $Ra = 0$) e avaliado o

impacto da variação de Ra_ρ em Ma_c . Conforme visto anteriormente, a resposta do sistema à variação no número de Marangoni é visivelmente diferente quando $d_0 < 1$ em comparação com $d_0 > 1$, por isso os dois casos serão abordados separadamente.

Na Figura 57 são apresentadas as curvas para o número de Marangoni crítico em função do parâmetro Ra_ρ para $d_0 = 0.8$. Nesta figura também são apresentadas autofunções para a velocidade vertical avaliadas em pontos específicos ao longo das curvas. Para facilitar a visualização, uma linha vertical posicionada em $y = 0$ foi inserida juntamente com as autofunções.

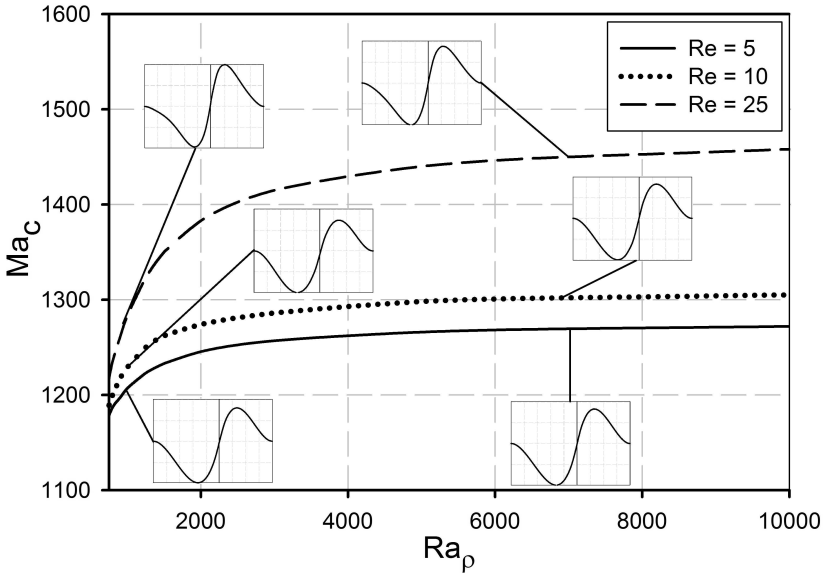


Figura 57: Número de Marangoni crítico em função de Ra_ρ para diferentes valores de Re , considerando $d_0 = 0.8$ e $Pr = 1$.

Pode-se ver que não existe uma curva associada com $Re = 0$, pois neste caso nenhuma mudança significativa foi observada em função da diminuição de Ra_ρ dentro da faixa de valores analisada. De forma semelhante ao observado para $k_0 \neq 1$, quando $Re = 0$ a perturbação da velocidade na interface, $\phi(0)$ é relativamente pequena, de modo que $\theta(0) \gg \phi(0)$, o que faz com que $\theta(0) - \eta(0) \approx \theta(0)$. Conforme o número de Reynolds aumenta, no entanto, a perturbação da velocidade passa a ser mais significativa e o efeito da variação de Ra_ρ não pode mais

ser desprezado, como pode ser observado nas curvas apresentadas na figura.

O comportamento das curvas de Ma_c em função de Ra_ρ é bastante similar ao observado para as curvas de Ra_c apresentadas anteriormente, havendo um rápido decréscimo no valor de Ma_c conforme o valor de Ra_ρ é reduzido para valores abaixo de 10^3 . Também neste caso, para valores de $Ra_\rho > 10^4$ nenhuma mudança significativa ocorre no valor de Ma_c . Assim como observado anteriormente, o aumento no número de Reynolds estabiliza o sistema, sendo isto válido para toda a faixa de Ra_ρ apresentada. O formato das autofunções não é muito afetado pela variação em Ra_ρ ou em Re , apesar de uma análise mais detalhada mostrar que $\phi(0)$ aumenta com a diminuição em Ra_ρ e com o aumento em Re . No entanto, estes valores ainda são significativamente menores que os observados para $k_0 = 2$, por exemplo.

Para $d_0 > 1$ o formato das curvas é alterado dependendo do número de Reynolds, como pode ser visto na Figura 58 onde as curvas de Ma_c em função de Ra_ρ são apresentadas para $d_0 = 2$. Para baixos valores de Reynolds o formato das curvas é basicamente o mesmo observado para $d_0 < 1$, com a diminuição no valor de Ra_ρ desestabilizando o sistema. No entanto, para valores moderados de Reynolds ($Re > 7$) um comportamento oposto é observado, com o número de Marangoni crítico aumentando conforme Ra_ρ diminui. Como visto anteriormente, a influência do efeito termocapilar é proporcional à diferença $\theta(0) - \eta(0)$, sendo que ambos valores podem ser positivos ou negativos dependendo das condições impostas. Por isso, o aumento na deformação da interface pode efetivamente estabilizar o sistema dependendo do sinal destes termos. Além disso, pode-se ver que para $d_0 = 2$ a influência da diminuição de Ra_ρ é muito mais significativa que para $d_0 = 0.8$ (observe que a escala do eixo x na Figura 58 é 10 vezes maior que na Figura 57), porém a condição de que para $Ra_\rho > 10^5$ os valores críticos permanecem praticamente constantes continua sendo válida.

4.4.2.2 Efeito da Deformação da Interface para $Ma \neq 0$

Como discutido na seção anterior, a variação no parâmetro Ra_ρ altera o impacto do efeito termocapilar na estabilidade do sistema, por isso espera-se que este parâmetro também possua influência no valor do número de Rayleigh onde a convecção inicia quando $Ma \neq 0$. Na presente seção será analisada esta influência somente para alguns casos específicos, pois neste cenário, o número de parâmetros que afeta

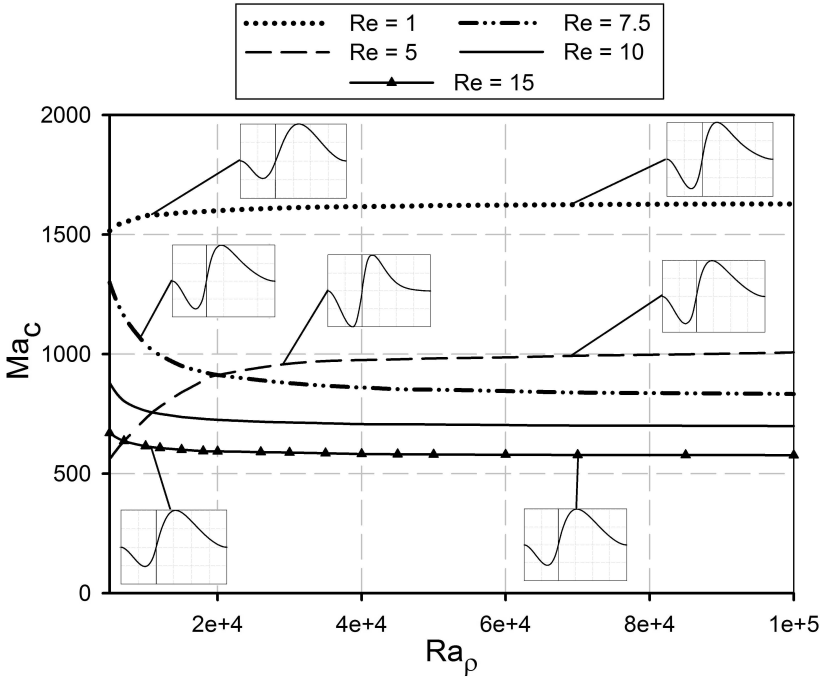


Figura 58: Número de Marangoni crítico em função de Ra_ρ para diferentes valores de Re , considerando $d_0 = 2$ e $Pr = 1$.

significativamente o valor de Ra onde a convecção inicia é muito elevado (Ma , Re , Pr , Ra_ρ , α e d_0), sendo por isso necessário que diversos destes parâmetros sejam fixados para que a análise de estabilidade seja viável.

Na Figura 59 são apresentadas as curvas de estabilidade para diversos valores de Ra_ρ , considerando $d_0 = 0.8$ e $Re = 20$. Os resultados para $Ma = 250$ (Figura 59(a)) e $Ma = 750$ (Figura 59(b)) mostram um comportamento similar, havendo uma redução no valor de Ra onde a convecção inicia conforme a deformação da interface se torna mais intensa. Em ambos os casos, esta variação passa a ser significativa somente quando $Ra_\rho < 10^4$. De modo geral, estes resultados são semelhantes aos obtidos anteriormente para outros parâmetros.

A influência da variação de Ra_ρ sobre as autofunções pode ser vista na Figura 60, onde são apresentadas autofunções avaliadas próximas ao ponto crítico para $Ma = 750$, mantendo os demais parâ-

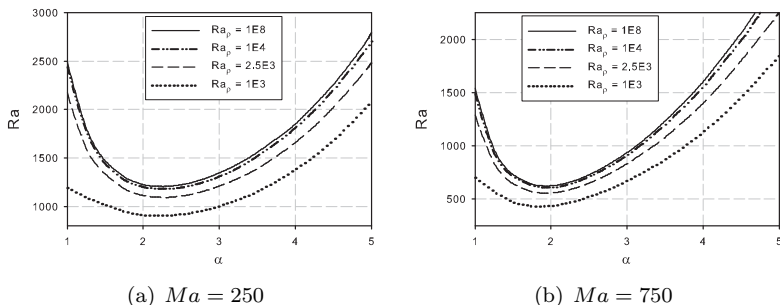


Figura 59: Curvas de estabilidade para $d_0 = 0.8$, $Re = 20$ e $Pr = 1$.

metros idênticos aos empregados na Figura 59. As autofunções para $Ra_\rho = 10^8$ se assemelham às obtidas para $Ra_\rho = 10^4$ e portanto não são apresentadas na figura.

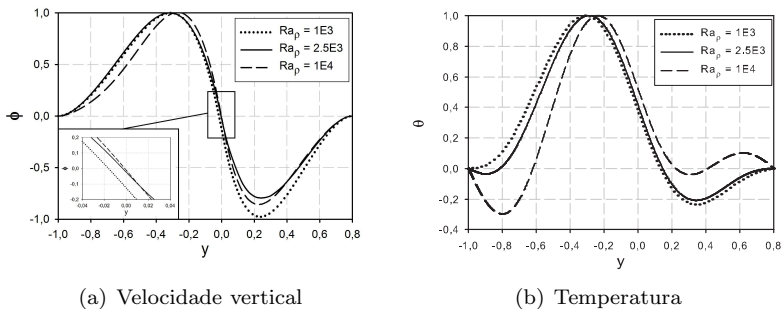


Figura 60: Autofunções para $Ma = 750$, $d_0 = 0.8$ e diferentes valores de Ra_ρ , considerando $Re = 20$, $Pr = 1$.

As autofunções para a velocidade vertical, apresentadas na Figura 60(a), mostram que o valor de $\phi(0)$ para $Ra_\rho < 10^4$ atinge valores significativamente diferentes de zero, como por exemplo $\phi(0) \approx -0.12$ para $Ra_\rho = 10^3$. Este comportamento é semelhante ao observado para $k_0 \neq 1$, sendo que como visto anteriormente a magnitude de $\phi(0)$ está relacionada com o valor de Re . Apesar desta mudança na interface, o formato das curvas é similar para todos os valores de Ra_ρ avaliados, não havendo mudanças significativas na forma de acoplamento ou na quantidade de recirculações observada.

As autofunções para a temperatura (Figura 60(b)) sofrem uma alteração mais apreciável. Para $Ra_\rho = 10^4$ pode-se observar uma disposição simétrica em relação às duas camadas, com a curva apresentando um ponto de máximo e um de mínimo em cada camada. Conforme o valor de Ra_ρ diminui, ocorre a formação de estruturas com tendência anti-simétrica, com a curva apresentando um ponto de máximo em uma camada e um ponto de mínimo em outra. Isto reflete o comportamento discutido anteriormente de que conforme Ra_ρ diminui o sistema passa a se comportar como se somente uma camada estivesse presente.

Para $d_0 > 1$ a estabilidade do sistema na presença do efeito termocapilar apresenta um comportamento bastante complexo mesmo para altos valores de Ra_ρ , conforme visto anteriormente. As curvas de estabilidade obtidas para diferentes valores de d_0 , Re e Ma podem ser significativamente distintas, dificultando a obtenção de uma tendência global que possa ser aplicada dentro uma faixa relativamente ampla para estes parâmetros. A seguir será brevemente discutida a influência de Ra_ρ no número de Rayleigh crítico para $d_0 = 1.25$ (mesmo valor empregado em diversas figuras apresentadas anteriormente) para alguns casos selecionados. Porém, deve-se considerar que a alteração no valor de Re , Ma ou Pr pode mudar de maneira significativa o formato das curvas.

A variação no número de Rayleigh crítico em função de Ra_ρ para $d_0 = 1.25$ e diferentes valores de Ma é apresentada na Figura 61, sendo estes resultados obtidos para $Re = 20$ e $Pr = 1$. Assim como observado em alguns casos para o número de Marangoni crítico, a redução no valor de Ra_ρ inicialmente estabiliza o sistema, havendo um significativo aumento no valor de Ra_c para todos os valores de Ma . Este aumento é primeiramente observado para elevados valores de Ma . No entanto, como pode ser visto na figura, as curvas apresentam um ponto de máximo e a partir deste ponto o valor de Ra_c decai rapidamente com a diminuição no valor de Ra_ρ .

Esta redução acentuada para baixos valores de Ra_ρ se deve principalmente aos modos associados à instabilidade de Rayleigh-Taylor, conforme discutido anteriormente. De fato, pode-se observar nas curvas mostradas na Figura 61 que não são apresentados dados de Ra_c para valores muito baixos de Ra_ρ (próximos a 10^3), pois neste limite ocorrem bifurcações e ramos de solução altamente instáveis surgem. No entanto, a convergência das equações associadas à análise de estabilidade *linear* a partir deste ponto torna-se bastante comprometida, por isso não são apresentados resultados para estes ramos de solução.

As autofunções para a velocidade vertical e para a temperatura

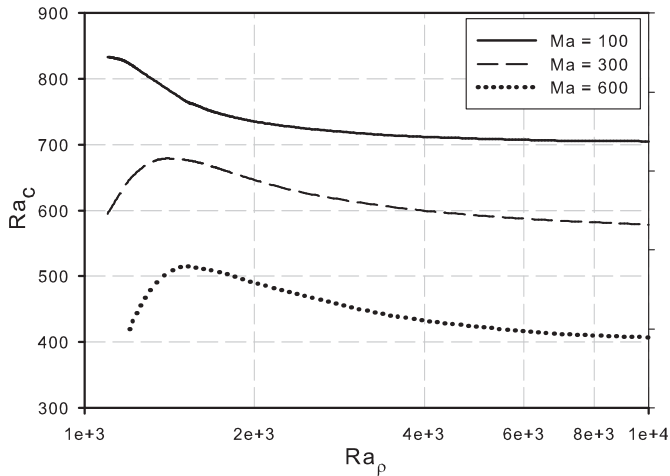


Figura 61: Número de Rayleigh crítico em função de Ra_ρ para diferentes valores de Ma , considerando $d_0 = 1.25$ e $Pr = 1$.

avaliadas próximas aos pontos de máximo das curvas apresentadas na Figura 61 podem ser vistas na Figura 62. Para todos os valores de Ma percebe-se uma grande deformação da interface, causando alterações significativas no formato das autofunções. Para $Ma = 600$, as recirculações apresentam intensidades semelhantes nas duas camadas, apesar de Ra^* ser consideravelmente diferente de 1. Para menores valores de Ma , o efeito termocapilar não é suficiente para balancear a diferença nas forças de empuxo nas duas camadas e as autofunções apresentam um comportamento semelhante ao acoplamento por arraste, com a recirculação na camada superior sendo predominante.

Considerações finais

Nesta seção avaliou-se o impacto da deformação da interface sobre a estabilidade da convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada. Através de uma análise das equações governantes e das condições de contorno pôde-se determinar que a deformação da interface é função do parâmetro Ra_ρ , sendo por sua vez a influência desta deformação sobre a estabilidade do sistema associada principalmente a três parâmetros: a razão entre as viscosidades (m) e as condutividades térmicas (k_0) nas duas camadas e o número de Marangoni.

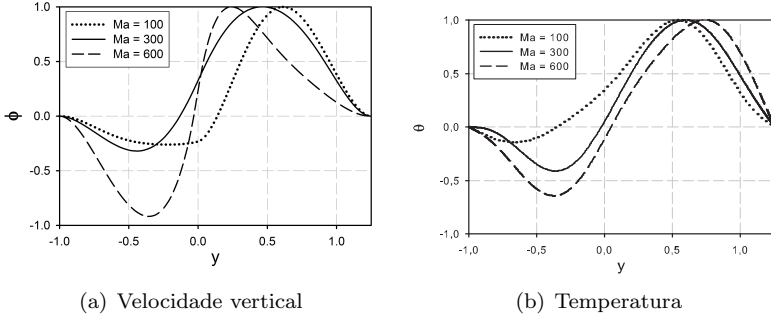


Figura 62: Efeito da deformação da interface sobre as autofunções para $d_0 = 1.25$ e diferentes valores de Ma , $Re = 20$ e $Pr = 1$.

A influência da condutividade térmica está relacionada com a alteração na inclinação do perfil de temperatura base, sendo relevante somente quando $k_0 \neq 1$. Neste caso, a diminuição no valor de Ra_ρ reduziu a estabilidade do sistema dentro do conjunto de parâmetros avaliados. Em relação ao efeito termocapilar, mensurado através do número de Marangoni, a influência da deformação da interface é mais complexa, podendo mesmo haver um aumento na estabilidade com a redução de Ra_ρ dentro de uma determinada faixa de valores. No entanto, conforme a densidade das camadas torna-se muito próxima ($Ra_\rho \rightarrow 0$) diversos modos altamente instáveis surgem, até o ponto onde, na ausência de forças interfaciais, no limite onde $\rho_0 = 1$ (Ra_ρ) o sistema passa a ser instável unicamente pela ação da instabilidade de Rayleigh-Taylor, não sendo necessário a imposição de um gradiente de temperatura ou a presença do escoamento cisalhante.

Conforme a diferença entre as densidades nas camadas passa a ser suficiente para estabilizar a interface, a resposta do sistema passa a ser independente do valor de Ra_ρ . Para todos os casos avaliados nesta seção pode-se considerar que para $Ra_\rho > 10^5$ nenhuma alteração significativa foi observada.

4.5 CAMADAS COM PROPRIEDADES DISTINTAS: ESTABILIDADE DE PARES DE FLUIDOS REAIS

Os resultados apresentados até o momento foram obtidos considerando que as propriedades físicas dos fluidos nas duas camadas

são idênticas (com exceção da variação na condutividade térmica avaliada anteriormente), sendo a estabilidade governada por parâmetros adimensionais que relacionam as diferentes forças atuando no sistema. Estes parâmetros adimensionais podem assumir uma grande faixa de valores dependendo das características geométricas e das condições de contorno impostas, porém, pode-se restringir a faixa de valores avaliada de acordo com os fenômenos físicos que se deseja considerar ou desconsiderar. Em relação às propriedades físicas dos fluidos, entretanto, não existe um critério para seleção dos valores utilizados, sendo que a princípio a razão entre as propriedades físicas nas duas camadas pode assumir qualquer valor finito.

No entanto, a quantidade de pares de fluidos reais que satisfazem condições necessárias para permitir um estudo experimental da convecção RBPE não é grande o suficiente para justificar uma análise em um espectro contínuo de valores para as razões entre as propriedades físicas. Nesta seção serão considerados alguns pares de fluidos reais que satisfazem estas condições e que podem ser estudados experimentalmente de maneira relativamente simples.

4.5.1 Sistema 1: Óleo de Silicone/Glicerol

O primeiro caso avaliado consiste no sistema composto por óleo de silicone (Rhodorsil 47V500) sobre glicerol, sendo a convecção natural neste par de fluidos avaliada experimentalmente e numericamente por Cardin, Nataf e Dewost (1991). Estes fluidos diferem consideravelmente dos casos avaliados até o momento principalmente por possuírem um elevado número de Prandtl. Na Tabela 5 são apresentadas as razões entre as propriedades físicas nas duas camadas, bem como os números adimensionais fixos para este caso. Todos estes valores são fornecidos por Cardin, Nataf e Dewost no trabalho anteriormente citado. Como o óleo de silicone é menos denso que o glicerol, considera-se que o fluido 1 neste caso é o glicerol e o fluido 2 o óleo de silicone.

Pelos valores apresentados na Tabela 5, pode-se observar que as razões entre as propriedades física nas duas camadas estão dentro de uma estreita faixa entre 0.5 e 2, portanto não se distanciando demasiadamente da unidade. De fato, ambos os fluidos são líquidos com alto Pr em condições ambientes, apresentando características físicas bastante semelhantes.

Os valores apresentados na Tabela 5 para Ma , Sc e Ra_ρ foram avaliados com base nas condições dos experimentos realizados por Car-

Tabela 5: Parâmetros adimensionais referentes ao sistema óleo de silicone/glicerol.

Parâmetro	Valor utilizado
Condutividade térmica (k_0)	0.54
Densidade (ρ_0)	0.77
Difusividade térmica (κ_0)	1.27
Viscosidade cinemática (ν_0)	0.67
Expansividade térmica (β_0)	1.92
Número de Marangoni (Ma)	-40
Tensão interfacial adimensional (S)	5×10^4
Número de Prandtl (Pr)	8400
Número de Rayleigh baseado na densidade (Ra_ρ)	1.4×10^9

din, Nataf e Dewost (1991), e serão mantidos aqui por conveniência. Desse modo, dos doze parâmetros que governam a estabilidade da convecção RBPE nove são fixados, restando três parâmetros que devem ser avaliados, sendo eles a razão entre as espessuras das camadas (d_0 - função da geometria do sistema) e os números de Rayleigh (Ra) e Reynolds (Re), ambas funções das condições de contorno impostas, além é claro dos números de onda que governam as perturbações.

Inicialmente será considerado que $Re = 0$. Na Figura 63 são mostradas as curvas de estabilidade para diferentes valores de $d_0 \leq 1$, juntamente com a frequência de oscilação para os casos onde o estado oscilatório é observado.

De modo geral verifica-se um aumento no valor de Ra_c conforme a razão d_0 diminui, sendo isto consistente com os resultados obtidos anteriormente. Para valores de d_0 próximos a 1, as curvas de estabilidade apresentam um comportamento semelhante às obtidas quando fluidos idênticos são utilizados, com a diferença de que neste caso o movimento convectivo surge para menores valores de Rayleigh. No entanto, conforme o valor de d_0 é reduzido ocorre o surgimento de estados oscilatórios, como pode ser visto para $d_0 = 0.8$ e $d_0 = 0.7$. É interessante observar que estes estados surgem para diferentes faixas do número de onda dependendo do valor de d_0 , indicando uma relação entre o comprimento de onda da perturbação e a espessura das camadas para que o estado oscilatório ocorra. Conforme d_0 é reduzido ainda mais, a presença de estados oscilatórios não é mais observada, como pode ser visto na curva para $d_0 = 0.6$. Além disso, o valor de Ra_c encontrado para $d_0 = 0.6$ é levemente inferior ao encontrado para $d_0 = 0.7$, indicando

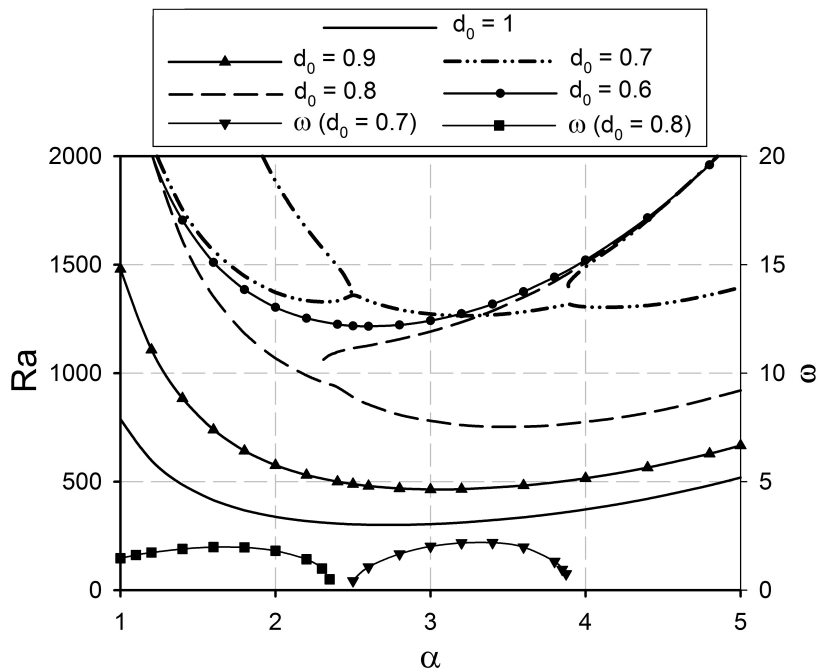


Figura 63: Curvas de estabilidade para o sistema 1 considerando diferentes valores de $d_0 < 1$.

que a existência das regiões oscilatórias estabilizam o estado base.

A presença de estados oscilatórios para este sistema também é reportada por Cardin, Nataf e Dewost (1991), como discutido na seção de Análise de Casos-Limite (Figuras 20 e 21), onde são apresentadas as curvas de estabilidade para $d_0 = 0.76$. Assim como para os casos apresentados por estes autores, os estados oscilatórios vistos na Figura 63 surgem como consequência de bifurcações de Hopf para determinados valores de α .

O surgimento de um estado oscilatório indica a existência de diferentes formas de instabilidade com taxas de crescimento equivalentes, sendo que a competição entre estes modos faz com o sistema oscile entre dois diferentes estados. Para avaliar as características destes estados pode-se analisar as autofunções associadas. Primeiramente, na Figura 64 são mostradas as autofunções para valores de d_0 próximos a 1 onde o estado oscilatório não é observado.

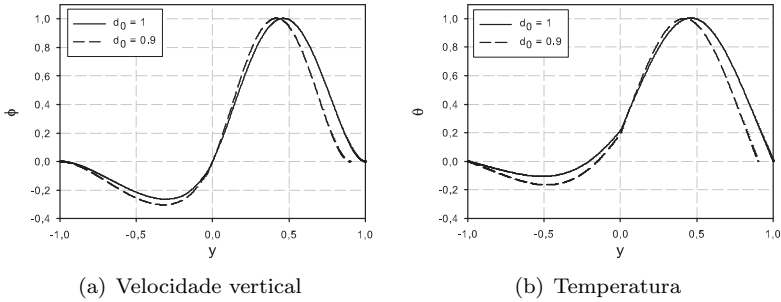


Figura 64: Autofunções para $d_0 = 1$ e $d_0 = 0.9$, considerando $Re = 0$.

O comportamento das autofunções para $d_0 = 0.9$ praticamente não é alterado quando comparado com $d_0 = 1$, ficando claro que neste caso ocorre um acoplamento semelhante ao acoplamento por arraste discutido em seções anteriores, com a diferença de que mesmo para $d_0 = 0.9$ a circulação é mais intensa na camada superior. Este comportamento pode ser facilmente entendido considerando que a relação entre o número de Rayleigh neste caso é dada por $Ra^*(d_0) = 4.179d_0^4$ (o que implica em $Ra^*(0.9) \approx 2.75$), ou seja, para valores de d_0 próximos a 1 as forças de empuxo atuam de forma mais significativa na camada superior, fazendo com que a camada inferior desempenhe um papel majoritariamente passivo. No entanto, fica claro que conforme o valor de d_0 é reduzido, a razão Ra^* diminui rapidamente e em algum ponto as instabilidades nas duas camadas terão taxas de crescimento semelhantes.

Na Figura 65 são mostradas as autofunções para os dois modos mais instáveis para $d_0 = 0.8$ ($Ra^* = 1.71$) avaliadas em $\alpha = 3$. Repare que para este número de onda o sistema ainda apresenta dois modos distintos. O primeiro modo é o mesmo observado para maiores valores de d_0 , onde o movimento convectivo é significativamente mais intenso na camada superior. O segundo modo, entretanto, é governado pela recirculação na camada inferior, o que causa o arraste do fluido na camada superior. O comportamento para estes modos está em acordo com o discutido anteriormente para camadas idênticas (ver Figura 35).

A competição entre os modos governados pelas recirculações em cada uma das camadas origina o estado oscilatório. Na Figura 66 são mostradas diversas autofunções avaliadas em diferentes instantes da oscilação, onde pode-se claramente perceber que nos limites da oscilação

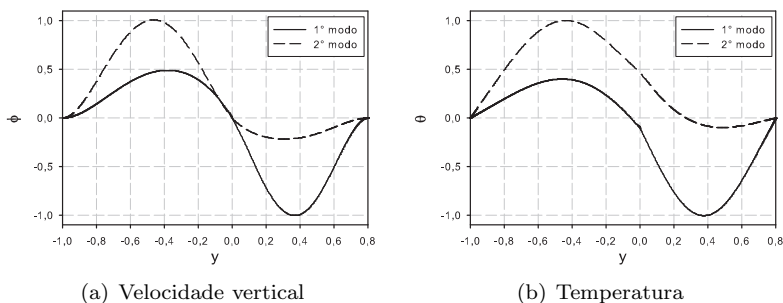


Figura 65: Autofunções para os dois primeiros modos para $d_0 = 8$ e $\alpha = 3$.

($t = 0$ e $t = T/2$) as autofunções representam estes dois modos. Apesar de nestes limites as autofunções corresponderem ao acoplamento por arraste, durante a oscilação o sistema passa por diferentes configurações, podendo-se até mesmo observar a presença do acoplamento térmico para $t = 3T/10$.

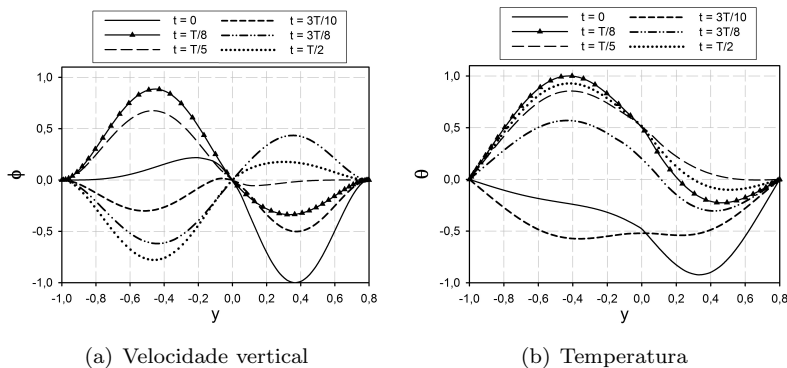


Figura 66: Autofunções ao longo do estado oscilatório para $d_0 = 8$ e $\alpha = 2$.

Finalmente, para valores de d_0 consideravelmente menores que 1 a presença de estados oscilatórios deixa de ser observada, como por exemplo para o ramo equivalente a $d_0 = 0.6$ apresentado na Figura 63. Isto ocorre pois neste caso a razão Ra^* é significativamente menor que 1, o que faz com que a atuação das forças de empuxo seja muito mais

relevante na camada inferior. Por simplicidade as autofunções para este caso não serão apresentadas, porém estas são em essência muito semelhantes ao segundo modo apresentado na Figura 65.

Para analisar o impacto do número de Reynolds nas curvas de estabilidade será considerado o caso $d_0 = 0.7$. Esta razão entre as espessuras é particularmente interessante pois corresponde à $Ra^* = 1.00$, ou seja, neste caso a influência das forças de empuxo é praticamente idêntica nas duas camadas. Na Figura 67 são apresentadas curvas de estabilidade para diferentes valores de Reynolds. Pode-se ver que os valores de Re adotados são consideravelmente inferiores aos utilizados anteriormente, pois como comentado na Seção 4.2 a dependência de Ra_c com Re é proporcional ao número de Prandtl (ver Figura 26, por exemplo), de modo que para este caso ($Pr = 8400$) pequenas variações em Re afetam profundamente a estabilidade do sistema.

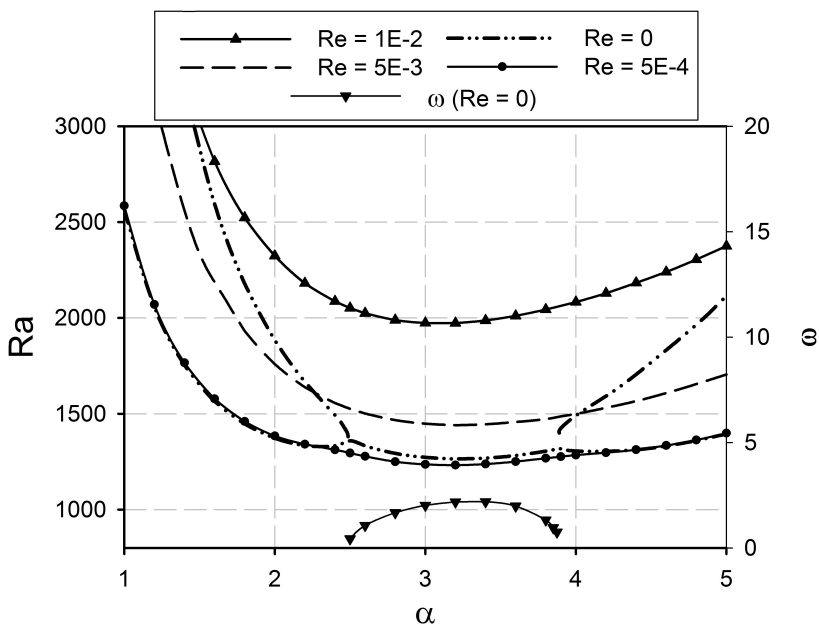


Figura 67: Curvas de estabilidade (sistema 1) para diferentes valores de Re e $d_0 = 0.7$.

O primeiro aspecto a ser observado neste caso são as instabilidades induzidas por perturbações tangenciais, já que existe uma es-

tratificação na viscosidade dos fluidos ($m \neq 1$). No anteriormente comentado trabalho de Yih (1967), o autor mostra que quando há estratificação da viscosidade, o sistema pode ser instável a perturbações tangenciais para qualquer valor de $Re > 0$, desde que as razões entre as viscosidades e as espessuras das duas camadas estejam dentro de certa faixa de valores. Para o sistema glicerol/óleo de silicone não observou-se a existência destes modos instáveis, porém, deve-se considerar que estes modos surgem para comprimentos de onda muito altos e as autofunções associadas são muito distintas das originadas pela instabilidade devido à ação do empuxo ou do efeito termocapilar. Em todo caso, pode-se esperar um pequena influência destes modos tangenciais sobre os modos associados à instabilidade causada pelas forças de empuxo ou termocapilares analisados até o momento.

Como visto na Figura 67, a presença de um estado oscilatório só é observada para $Re = 0$. Para $Re = 5 \times 10^{-4}$ a curva de estabilidade praticamente coincide com o primeiro modo para $Re = 0$, com exceção da parte onde ocorre o estado oscilatório. Isto faz com que o valor de Ra_c seja levemente inferior para $Re = 5 \times 10^{-4}$. Para maiores valores de Re , no entanto, ocorre uma estabilização do sistema, de forma semelhante ao observado quando camadas idênticas são consideradas.

A influência do número de Reynolds nas autofunções, porém, é mais evidente para este caso do que para os avaliados anteriormente. Na Figura 68 são apresentadas primeiramente as autofunções para $Re = 0$ avaliadas próximas ao ponto crítico, sendo este ponto correspondente a um estado oscilatório. Assim como para $d_0 = 0.8$, o sistema oscila entre estados governados pela instabilidade em cada uma das camadas, podendo também neste caso ser observado um instante onde ocorre o acoplamento térmico entre as camadas ($t = 3T/10$).

As autofunções para valores de $Re > 0$ são apresentadas na Figura 69, sendo estas avaliadas próximas ao ponto crítico para cada valor de Re . Para $Re = 5 \times 10^{-4}$ o acoplamento térmico surge como modo mais instável. Como visto anteriormente, a razão entre os números de Rayleigh nas duas camadas é muito próxima a 1. Além disso, assim como realizado para o número de Rayleigh, pode-se definir uma razão entre os números de Reynolds avaliados nas duas camadas:

$$Re^* = \frac{Re_2}{Re} = \frac{d_2 \nu_1}{d_1 \nu_2} = \frac{d_0}{\nu_0} \quad (4.3)$$

Para o sistema 1, esta razão avaliada para $d_0 = 0.7$ é de $Re^* \approx 1.07$, ou seja, a influência das forças de cisalhamento é semelhante nas duas camadas. Esta similaridade torna possível o surgimento simultâneo da

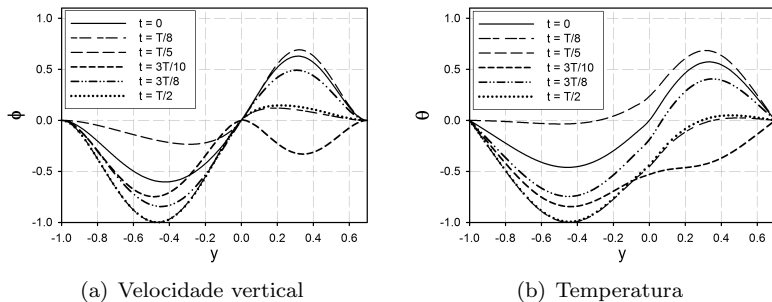


Figura 68: Autofunções para $d_0 = 0.7$ em diversas etapas do estado oscilatório.

instabilidade, originando o acoplamento térmico.

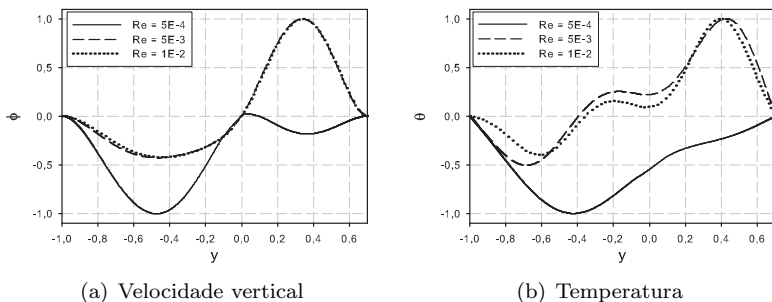


Figura 69: Autofunções para $d_0 = 0.7$ e diferentes valores de Re .

Conforme o valor de Re aumenta as autofunções passam a apresentar o formato característico do acoplamento viscoso, sendo as curvas para $Re = 5 \times 10^{-3}$ e $Re = 1 \times 10^{-2}$ praticamente coincidentes, especialmente para a velocidade. Apesar de o valor máximo para ϕ ocorrer na camada superior, a área abaixo das curvas para $y < 0$ e $y > 0$ é equivalente podendo-se dizer que a intensidade das recirculações é semelhante nas duas camadas.

Em comparação com os resultados apresentados anteriormente para um sistema com camadas compostas por fluidos idênticos, o sistema óleo de silicone/glicerol exibe um comportamento distinto somente próximo à região onde ocorre a formação de um estado osci-

latório, onde pode ser percebida uma pequena estabilização devido ao aumento no número de Reynolds ou mesmo na razão entre as espessuras das camadas, dependendo dos valores para os demais parâmetros. Entretanto, de forma geral os resultados são qualitativamente similares aos discutidos nas outras seções, com o formato das autofunções e as características de estabilidade dependentes principalmente da razão entre os números de Rayleigh avaliados nas duas camadas.

4.5.2 Sistema 2: Ciclohexano/Água

O segundo caso a ser considerado é o sistema de fluidos composto por ciclohexano sobre água. A principal motivação para a escolha deste par de fluidos está relacionada com a elevada razão entre os números de Rayleigh avaliados nas duas camadas que é obtida quando camadas com espessuras semelhantes são consideradas. Como visto anteriormente, a razão Ra^* é um dos principais fatores que determinam a forma como o acoplamento entre as camadas ocorre. Na Tabela 6 são mostradas as razões entre as propriedades físicas dos fluidos bem como os números adimensionais adotados como constantes. Neste caso, o ciclohexano é o fluido menos denso, portanto os dados correspondem à razão entre as propriedades do ciclohexano (fluido 2) em relação às propriedades da água (fluido 1).

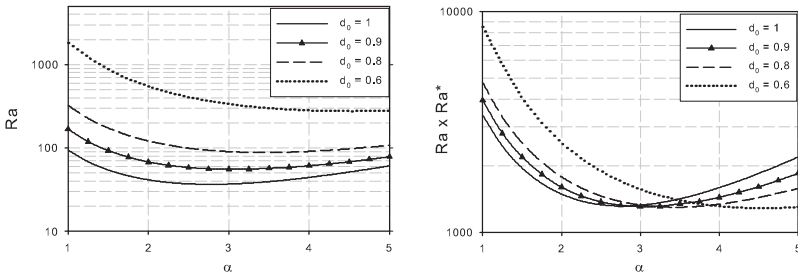
Tabela 6: Parâmetros adimensionais referentes ao sistema ciclohexano/água.

Parâmetro	Valor utilizado
Condutividade térmica (k_0)	0.2097
Densidade (ρ_0)	0.7801
Difusividade térmica (κ_0)	0.6361
Viscosidade cinemática (ν_0)	1.221
Expansividade térmica (β_0)	5.862
Número de Marangoni (Ma)	4.96
Tensão interfacial adimensional (S)	9.24×10^6
Número de Prandtl (Pr)	7.001
Número de Rayleigh baseado na densidade (Ra_ρ)	2.394×10^8

As propriedades físicas dos fluidos puros foram avaliadas a $20^\circ C$, sendo os valores extraídos da biblioteca do software Engineering Equa-

tion Solver (F-CHART SOFTWARE, 2003). Os dados relacionados à tensão interfacial entre as fases (valor à 20°C e dependência com a temperatura) utilizados para o cálculo do números de Marangoni da tensão interfacial adimensional foram retirados de Alpbaz, Bilgesu e Tutkun (1988). Estes números adimensionais, assim como o número de Rayleigh baseado na densidade, dependem também da espessura absoluta da camada inferior. Para determinar os valores apresentados na Tabela 6, considerou-se um sistema com uma altura total de 5 cm, sendo esta uma dimensão típica utilizada em ensaios experimentais. No entanto cabe destacar que os valores de Ra_{ρ} e Sc são grandes o suficiente para que os efeitos relacionados à deformação da interface possam ser desconsiderados e que os resultados obtidos para $Ma = 4.96$ não diferem significativamente dos obtidos para $Ma = 0$.

Com base nos valores apresentados na Tabela 6 é possível determinar que a razão entre o número de Rayleigh avaliado na camada superior em relação ao valor na camada inferior é $Ra^* = 35.92d_0^4$, ou seja, a ação das forças de empuxo é muito mais significativa na camada superior. Assim, para valores de d_0 próximos à unidade espera-se que a instabilidade surja inicialmente nesta camada. Como o número de Rayleigh é definido com base na camada inferior, os valores de Ra_c neste caso são bastante inferiores aos obtidos anteriormente, conforme pode ser observado na Figura 70(a) onde são mostradas as curvas de estabilidade para o sistema 2 considerando $Re = 0$ e valores de $d_0 \geq 0.6$.



(a) Curvas de estabilidade baseadas na camada inferior

(b) Curvas de estabilidade baseadas na camada superior

Figura 70: Curvas de estabilidade para $Re = 0$ e diferentes valores de d_0 .

Apesar de os valores absolutos serem menores, a resposta do sistema à redução no valor de d_0 é semelhante ao observado anteri-

ormente, ou seja, ocorre um aumento no valor de Ra_c conforme d_0 diminui. Considerando que adotou-se a camada inferior como base, a redução em d_0 pode ser vista como uma diminuição na espessura da camada superior mantendo-se a espessura da camada inferior constante. Como para este sistema de fluidos a instabilidade surge primeiramente na camada superior (para os valores de d_0 considerados na Figura 70), o significativo aumento no valor de Ra_c observado já era esperado, sendo esta uma condição necessária para que o número de Rayleigh avaliado na camada superior atinja o valor mínimo para que a instabilidade ocorra. Isto pode ser visto na Figura 70(b), onde são apresentadas as curvas de estabilidade em função do número de Rayleigh corrigido pela razão Ra^* . Apesar de haver um deslocamento das curvas em relação ao número de onda da perturbação, o valor de Rayleigh crítico permanece praticamente constante para todos os valores de d_0 , indicando que de fato a influência da camada inferior no início da instabilidade neste caso é muito pequena. Para $d_0 = 0.6$ ocorre o surgimento de um estado oscilatório para $\alpha \approx 1$, sendo que mais detalhes sobre este fenômeno serão discutidos posteriormente.

O surgimento da instabilidade na camada superior reflete também no formato das autofunções obtidas, sendo estas apresentadas para diversos valores de d_0 na Figura 71. Para todas as razões entre as espessuras, a camada inferior desempenha um papel passivo em relação à perturbação nos campos de velocidade e temperatura. O acoplamento por arraste fica evidente analisando-se as curvas para a velocidade vertical (Figura 71(a)), sendo a perturbação na camada inferior provocada pelo arraste induzido pela circulação na camada superior. O valor de Ra_p neste caso é grande o suficiente para impedir a deformação da interface, de modo que para todos os valores de d_0 a condição de $\phi(0) = 0$ pode se assumir.

Curvas de estabilidade para diferentes valores de Reynolds são apresentadas na Figura 72 para $d_0 = 0.7$. As autofunções inseridas na figura correspondem à velocidade vertical nos valores de número de onda indicados.

Também neste caso a influência do número de Reynolds é similar ao observado quando fluidos idênticos são considerados, ou seja, o aumento em Re estabiliza o sistema dentro de toda a faixa de números de onda considerada. O formato das autofunções também não é significativamente alterado pelo aumento em Re , sendo a recirculação na camada superior visivelmente mais intensa em todos os casos. Diferenças mais perceptíveis podem ser observadas para $Re = 7.5$, onde autofunções avaliadas em diferentes valores de α são apresentadas. Para

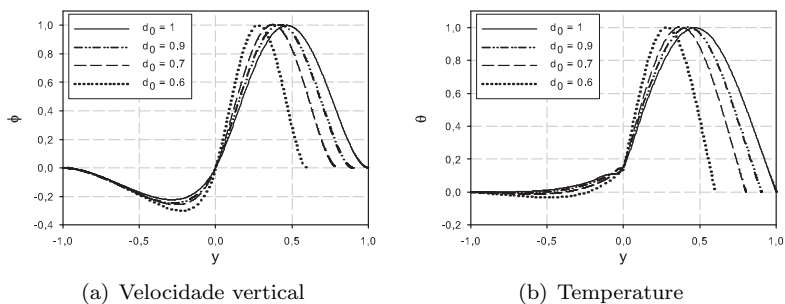


Figura 71: Autofunções para $Re = 0$ e diferentes valores de d_0 .

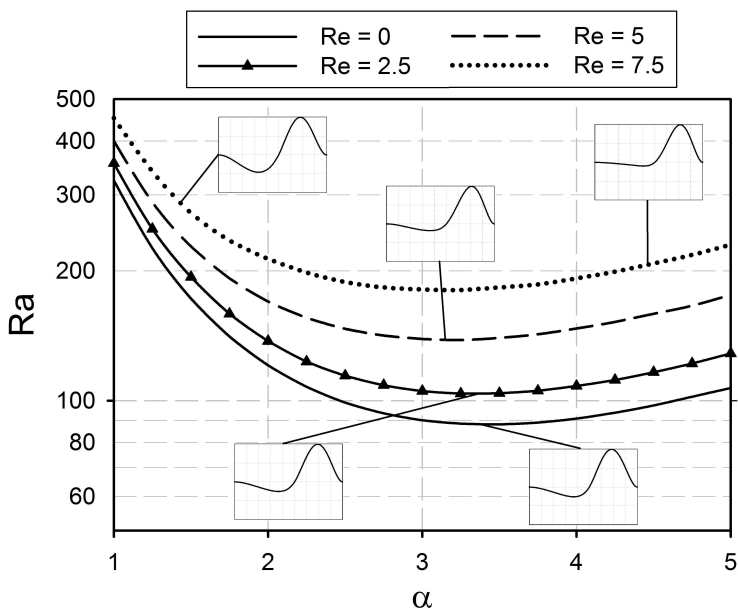


Figura 72: Curvas de estabilidade (sistema 2) para diferentes valores de Re e $d_0 = 0.7$.

$\alpha = 1.5$ observa-se um aumento relativo na recirculação na camada inferior em comparação com a autofunção para $\alpha = 4.5$, sugerindo que perturbações com grande comprimento de onda mais facilmente induzem a recirculação na camada inferior.

Como comentado anteriormente, para $Re = 0$ e $d_0 = 0.6$ observou-se o surgimento de um estado oscilatório para perturbações com número de onda próximos a 1. Na Figura 73 as curvas de estabilidade próxima a este ponto são apresentadas com mais detalhes, bem como as curvas referentes a $d_0 = 0.55$, onde o surgimento do estado oscilatório também é observado.

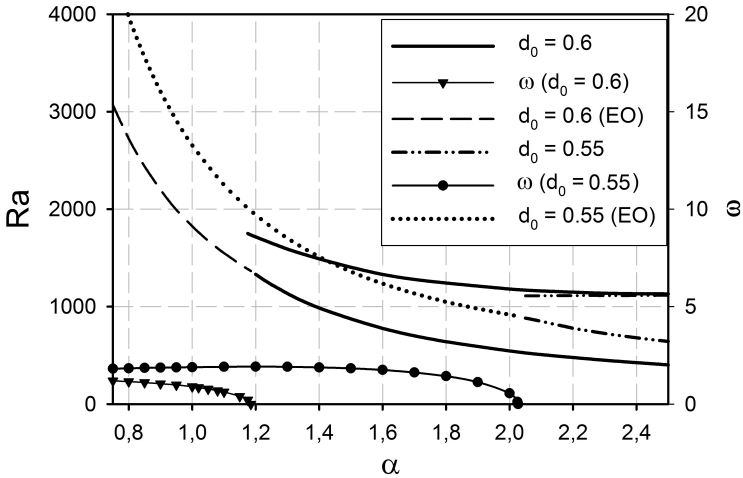


Figura 73: Curvas de estabilidade para números de onda próximos à bifurcação de Hopf (EO = estado oscilatório).

A redução no valor de d_0 de 0.6 para 0.55 faz com que o estado oscilatório ocorra para perturbações com números de onda consideravelmente maiores, indicando que a redução na espessura da camada superior (ou ainda, a redução no valor de Ra^*) faz com que os modos associados ao estado oscilatório sejam obtidos em função de perturbações com menor comprimento de onda. O estado oscilatório se estende para uma grande faixa de valores de $\alpha < 1$, porém como o número de Rayleigh rapidamente aumenta conforme $\alpha \rightarrow 0$ os resultados para menores números de onda não são apresentados na figura. Em ambos os casos o estado oscilatório surge devido a uma bifurcação de Hopf, semelhante ao apresentado na Figura 52

Para os dois valores de d_0 considerados, as curvas relacionadas com o modo menos instável (segundo modo) praticamente coincidem na região onde não ocorre o estado oscilatório, sugerindo que este modo

está associado à instabilidade na camada inferior, sendo que o valor de Ra avaliado unicamente nesta camada não é alterado pela variação em d_0 . Isto pode ser confirmando analisando-se as autofunções referentes aos dois modos, conforme apresentado na Figura 74.

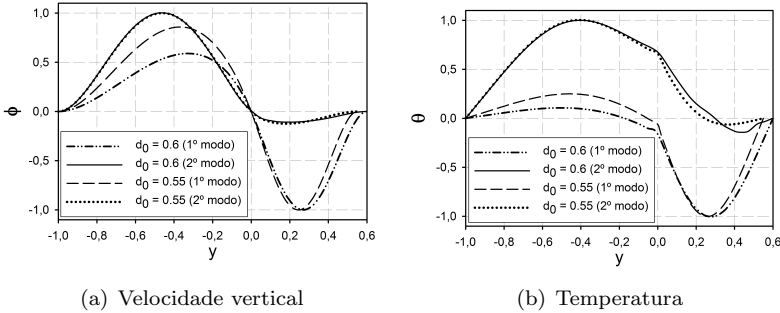


Figura 74: Autofunções associadas ao primeiro e ao segundo modo para $\alpha = 2.5$ e $Re = 0$.

Conforme esperado, as autofunções para o segundo modo são muito semelhantes para ambos os valores de d_0 , com a recirculação na camada inferior sendo muito mais intensa e a camada superior desempenhando um papel passivo, apesar da significativa diferença no número de Rayleigh. Mesmo em relação ao primeiro modo, a recirculação na camada inferior é mais significativa do que nas autofunções apresentadas anteriormente para perturbações com maior número de onda.

As similaridades apresentadas por estes dois modos convectivos governados pela instabilidade em cada uma das camadas levam eventualmente ao estado oscilatório devido à bifurcação de Hopf, onde o sistema oscila entre estes dois modos. As autofunções para $d_0 = 0.6$ e $\alpha = 1$ avaliadas em diferentes instantes da oscilação são apresentadas na Figura 75.

Durante todo o intervalo de oscilação as autofunções apresentam um comportamento similar. Nos instantes iniciais, a intensidade da recirculação é levemente maior na camada superior, sendo o oposto observado para os instantes próximos a $t = T/2$. No entanto, durante todo o ciclo a intensidade da recirculação é equivalente nas duas camadas. Em relação à temperatura, apesar de o desvio em comparação com estado base ser maior na camada superior, o mesmo comportamento é observado durante todo o intervalo de oscilação.

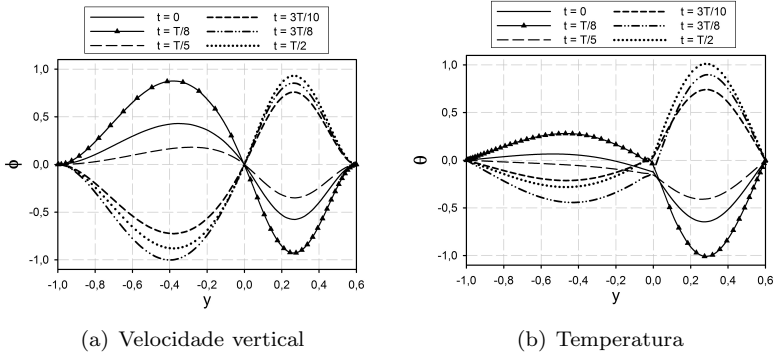


Figura 75: Autofunções associadas ao estado oscilatório para $\alpha = 1$, $Re = 0$ e $d_0 = 0.6$

Assim como verificado para o sistema óleo de silicone/glicerol, os resultados para o sistema ciclohexano/água são muito semelhantes aos obtidos quando fluidos idênticos são considerados, com exceção da região onde ocorre o surgimento de um estado oscilatório. Além disso, as principais diferenças entre os resultados podem ser explicadas através de um único parâmetro: a razão entre os números de Rayleigh avaliados nas duas camadas (Ra^*). Isto mostra que muito dos resultados apresentados anteriormente para camadas idênticas, especialmente em relação à dependência com o número de Reynolds, podem ser aplicados para pares de fluidos reais, principalmente próximos ao número de onda crítico e quando Ra^* diferencia significativamente de 1.

5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DIRETA

“When you follow two separate chains of thought, Watson, you will find some point of intersection which should approximate the truth.”

– Sherlock Holmes, The disappearance of Lady Francis Carfax
Sir Arthur Conan Doyle

A análise linear empregada neste trabalho é capaz de prover importantes informações sobre a estabilidade do sistema, principalmente em relação à resposta em função da variação em determinados parâmetros. No entanto, sabe-se que a aplicação desta metodologia é limitada, especialmente por considerar somente perturbações infinitesimais e desconsiderar os termos não-lineares. No presente capítulo serão comparados os resultados obtidos através da análise de estabilidade linear com resultados obtidos através da simulação numérica direta das equações governantes da convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada.

Apesar de os resultados obtidos com a simulação numérica direta serem em geral mais precisos, devido ao elevado gasto computacional envolvido a sua aplicação fica restrita a uma pequena faixa de parâmetros. Por isso, os resultados previamente apresentados serão utilizados para auxiliar na determinação dos valores para os parâmetros empregados na simulação numérica direta. Como o objetivo deste trabalho é avaliar a estabilidade do sistema, os parâmetros serão escolhidos de modo a estarem próximos das regiões onde ocorre uma mudança na estabilidade do sistema. A seguir são apresentados detalhes sobre a formulação e a resolução das equações governantes através do uso de técnicas de fluidodinâmica computacional (CFD).

5.1 METODOLOGIA NUMÉRICA

A simulação numérica direta da convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada foi realizada considerando uma estrutura plana bidimensional composta por duas camadas. Um esquema da geometria empregada pode ser visto na Figura 76. Nos resultados apresentados a seguir considerou-se na maioria dos casos que $L = 10h = 10(h_1 + h_2)$, sendo a geometria representada na figura correspondente ao caso $d_0 =$

$h_2/h_1 = 1$. Conforme será discutido adiante, alguns casos exigem o uso de uma malha com maior razão de aspecto.

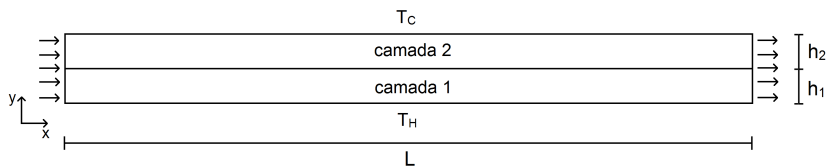


Figura 76: Geometria bidimensional empregada para simulação numérica direta.

As equações governantes consideradas nesta etapa são as mesmas apresentadas anteriormente, sendo elas as equações de Navier-Stokes para a conservação da quantidade de movimento (Eq. 3.2), a equação da conservação da energia (Eq. 3.3) e a equação para a conservação da massa total do sistema (Eq. 3.1), considerando novamente escoamento incompressível e fluidos Newtonianos. Cabe ressaltar que para determinar o termo associado ao empuxo, a hipótese de Boussinesq também será utilizada na simulação direta. Conforme será discutido com mais detalhes adiante, para a modelagem da interface utilizou-se o método do volume de fluido (VOF), sendo que o emprego deste método permite o uso de um único campo de velocidades e temperatura compartilhado pelas duas fases, por isso não há necessidade de especificar equações distintas para cada uma das fases.

O emprego do método VOF também elimina a necessidade de prescrever condições de contorno para a interface, pois esta surge naturalmente no limite entre as duas fases, com a sua posição e formato determinados como função do campo de velocidades. As condições de contorno impostas nas paredes superior e inferior são as mesmas empregadas anteriormente, ou seja, condições de não-deslizamento e não-penetração para a velocidade e de temperatura fixa para a conservação da energia. Para valores de $Re > 0$, o escoamento base foi utilizado como condição de contorno em $x = 0$ e na saída do sistema ($x = L$) condições padrão de saída ($d/dx = 0$) foram empregadas. Para a análise da convecção de Rayleigh-Bénard ($Re = 0$), onde não existe uma entrada e saída contínua de fluidos, utilizou-se condições de simetria em $x = 0$ e $x = L$, representando assim um sistema não-delimitado na direção x . Para todos os casos avaliados, considerou-se que o sistema permanece no regime laminar e que o escoamento é incompressível durante todo o intervalo de tempo simulado.

O software ANSYS Fluent foi utilizado para a discretização e resolução das equações governantes. Neste software, as equações diferenciais são discretizadas através do método de volumes finitos podendo-se optar pelos esquemas de interpolação mais adequados para cada caso. No presente trabalho, para resolver o acoplamento pressão-velocidade empregou-se o esquema PISO (*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*). Este esquema permite maiores valores para os fatores de sobre-relaxação em comparação com os esquemas SIMPLE e SIMPLEC, agilizando o processo de solução sem perda de estabilidade. Como função de interpolação para as equações de conservação, utilizou-se o esquema QUICK, sendo este uma média ponderada entre as formulações de diferenças centrais e upwind de segunda ordem. O termo transiente foi discretizado com um método implícito de primeira ordem. Para acelerar a convergência da solução um método multigrid algébrico foi aplicado, sendo o ciclo-F com um critério de terminação de 10^{-3} utilizado para todas as variáveis. Fatores de sobre-relaxação adequados foram definidos para todas as variáveis de modo a manter a solução estável. Considerou-se a solução convergida quando o erro associado a cada variável foi menor que 10^{-6} para cada passo de tempo.

Os valores empregados para o passo de tempo foram determinados com base no número de Courant, sendo um valor de $Co = 1$ definido como máximo. Por representar um problema envolvendo diferentes formas de transporte, as escalas de tempo associadas aos diversos estágios da solução podem variar significativamente. Por exemplo, quando o processo de convecção inicia em um sistema onde somente a condução estava presente, ocorre uma grande redução na escala de tempo associada ao sistema, sendo necessário o uso de passos de tempo muito menores para captar todas as informações necessárias. Por isso, limites adequados para os passos de tempo físicos também foram especificados, evitando assim uma redução ou um aumento muito acentuado no passo de tempo empregado.

A malha numérica foi construída com base na geometria apresentada na Figura 76. Por representar uma geometria bastante simples, utilizou-se uma malha estruturada com elementos não-uniformes, havendo uma maior concentração de elementos próximo à interface e às paredes, onde espera-se um maior gradiente nas variáveis do problema. Este tipo de malha usualmente requer um menor gasto computacional para armazenar as variáveis e também necessita de um menor número de iterações para atingir a convergência desejada em comparação com malhas não-estruturadas. Diferentes tamanhos de malha foram testados e determinou-se que uma malha com 140 elementos na direção y

(70 em cada camada para $d_0 = 1$) e 700 elementos na direção x (totalizando 98.000 elementos) é suficiente para obter-se a convergência desejada. Para malhas onde $L > 10h$ a mesma proporção de elementos é mantida.

Apesar de o problema ser resolvido em uma geometria simples e em uma malha estruturada, a presença da interface entre as duas fases torna a análise numérica da convecção RBPE bastante complexa, especialmente quando a deformação da interface é permitida. Para obter de forma precisa a posição da interface em função das demais variáveis será empregado o método do volume de fluido, sendo este um método amplamente utilizado na modelagem de sistemas multifásicos onde o formato da interface deve ser obtido como parte da solução. A seguir serão apresentados alguns detalhes relacionados ao uso deste método, bem como as equações utilizadas para determinar a posição da interface.

5.1.1 Método do Volume de Fluido

O método do volume de fluido é empregado para modelar o comportamento de dois ou mais fluidos imiscíveis através da resolução de um único conjunto de equações governantes. Neste método, a fração volumétrica de cada fase i (a_i) é calculada para cada elemento da malha, e com base nisso a posição da interface pode ser determinada. Com isso pode-se definir diferentes situações para a fração volumétrica da fase i :

$$a_i(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{(elemento não contém a fase } i) \\ 1 & \text{(elemento completo com a fase } i) \\ 0 < a_i < 1 & \text{(mais de uma fase presente)} \end{cases} \quad (5.1)$$

As propriedades físicas médias em cada volume de controle são computadas como uma média ponderada das propriedades de cada fase. Desse modo, uma propriedade média qualquer f é avaliada como:

$$f = \sum_i a_i f_i \quad (5.2)$$

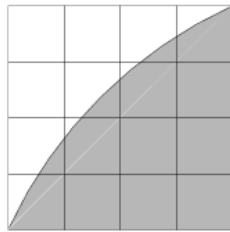
Para determinar as frações volumétricas de cada fase ao longo do domínio, uma equação de conservação adicional é empregada. Considerando que não ocorra nenhuma forma de transferência de massa

entre as duas fases, esta equação pode ser expressa para a fase i como:

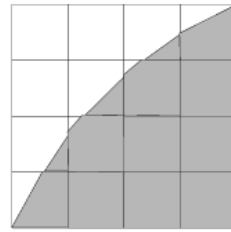
$$\frac{\partial a_i \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (a_i \rho_i \vec{v}) = 0 \quad (5.3)$$

Como o sistema avaliado neste trabalho possui somente duas fases, a equação acima precisa ser resolvida somente para uma fase, visto que a condição $\sum a_i = 1$ pode ser aplicada para determinar a fração da outra fase.

Nos volumes de controle onde $0 < a_i < 1$ a posição da interface entre as fases é determinada através de um esquema de reconstrução geométrica, onde a interface é representada por seções lineares em cada volume de controle. A aplicação deste método consiste em uma série de etapas onde a posição da interface é atualizada com base na fração volumétrica de cada fase no interior do volume e nos fluxos de massa através das fronteiras do elemento. Este procedimento permite determinar a posição da interface ao longo do domínio para cada instante de tempo. Na Figura 77 pode ser vista uma representação de uma interface utilizando o esquema de reconstrução geométrica.



(a) Interface real



(b) Interface representada

Figura 77: Representação da interface utilizando o esquema de reconstrução geométrica.

Como comentando anteriormente, somente um conjunto de equações governantes é resolvido, de modo que o campo de temperatura também é compartilhado pelas fases. Neste caso, a temperatura em cada elemento é relacionada com a temperatura de cada fase através de uma média ponderada com a massa de cada fase:

$$T = \frac{\sum_i a_i \rho_i T_i}{\sum_i a_i \rho_i} \quad (5.4)$$

Quando a presença da tensão interfacial é considerada, um termo fonte adicional na equação de conservação de quantidade de movimento precisa ser avaliado. Para o caso onde somente duas fases estão presentes ($i = 1, 2$), este termo pode ser expresso como:

$$S_M = \gamma \frac{\mathbf{k}_i \nabla a_i}{0.5(\rho_1 + \rho_2)} \quad (5.5)$$

onde \mathbf{k}_i representa a curvatura da interface, podendo ser relacionada com o vetor normal à interface como:

$$\mathbf{k}_i = \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (5.6)$$

sendo que:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla a_i}{|\nabla a_i|} \quad (5.7)$$

Considerando que para o escoamento de somente duas fases $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ e $\nabla a_1 = -\nabla a_2$ as equações acima podem ser aplicadas para qualquer uma das fases, permitindo a determinação da curvatura local da interface ao longo de todo o domínio. Mais detalhes sobre as equações apresentadas anteriormente, bem como sobre as características do método do volume de fluido, podem ser encontrados na documentação do software empregado (ANSYS, 2011).

5.1.2 Propriedades Físicas dos Fluidos

As razões entre as propriedades físicas dos fluidos nas duas camadas são importantes parâmetros governantes para a convecção RPBE, definindo diversas características do sistema. Conforme discutido no final do capítulo anterior, o impacto da diferença nas propriedades físicas dos fluidos está relacionado principalmente com a alteração no número de Rayleigh associado a cada uma das camadas, o que pode levar a diferentes formas de acoplamento. Além disso, a deformação da interface também está diretamente relacionada com a diferença nas propriedades físicas das camadas, especialmente a densidade.

Para a simulação numérica direta é necessário especificar os valores de cada uma das propriedades físicas de ambos os fluidos. Por simplicidade, optou-se por considerar camadas aproximadamente idênticas e avaliar a influência de Ra^* através da variação na espessura das camadas. O emprego de fluidos exatamente iguais não é possível pois

neste caso pequenas perturbações da interface levam à instabilidade pelos modos de Rayleigh-Taylor. Por isso, definiu-se o valor de ρ_0 de modo que a condição $Ra_\rho \geq 10^5$ seja válida para $d_0 = 1$ (para menores valores de d_0 este parâmetro é ainda maior), sendo este valor limite obtido anteriormente para que a deformação da interface possa ser negligenciada.

Nos resultados apresentados a seguir o efeito Marangoni não foi considerado, pois o tempo de processamento necessário para que o software empregado computasse as características associada a este efeito mostrou-se muito alto. Desse modo, a condição $d\gamma/dT = 0$ é imposta. As demais propriedades foram determinadas de modo que $Ra^* = 1$ para $d_0 = 1$ e $Pr = 1$, além de garantir que a diferença de temperatura entre a interface e as paredes seja suficientemente grande para que os erros numéricos possam ser desprezados na determinação do número de Rayleigh. Com os valores empregados, esta diferença permaneceu no intervalo de $10^0 - 10^2$ para todos os casos avaliados. Os valores finais para as razões entre as propriedades físicas (camada superior/camada inferior), bem como os números adimensionais relevantes (considerando $d_0 = 1$), são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7: Parâmetros adimensionais empregados para simulação numérica direta.

Parâmetro	Valor utilizado
Condutividade térmica (k_0)	1
Densidade (ρ_0)	0.98
Difusividade térmica (κ_0)	1.0241
Viscosidade cinemática (ν_0)	1.0204
Expansividade térmica (β_0)	1.04123
Número de Marangoni (Ma)	0
Tensão interfacial adimensional (S)	0
Número de Prandtl (Pr)	1
Número de Rayleigh baseado na densidade (Ra_ρ)	1×10^5

5.2 COMPARAÇÃO COM ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR

Como comentado anteriormente, a simulação numérica direta permite avaliar características do escoamento que foram negligenciadas

na análise de estabilidade linear, principalmente em função dos termos não-lineares presentes. No entanto, a análise da estabilidade do sistema empregado as técnicas de simulação direta é bastante restrita, mesmo considerando o maior nível de detalhes avaliados. Os resultados apresentados no capítulo anterior representam a resposta do sistema à uma perturbação com um determinado número de onda α definido. Na simulação numérica direta as perturbações não são incorporadas diretamente nas equações governantes e portanto os resultados obtidos com a metodologia descrita anteriormente não representam a resposta à perturbação de um estado base.

Como esperado, isto gera alguns desvios nos valores críticos obtidos com a simulação direta, podendo este variar em função da condição inicial imposta, por exemplo. Assim como ocorre em condições experimentais, na simulação direta o estado inicial sofre perturbações devido à pequenas variações nos campos de velocidade e temperatura, ou mesmo devido à flutuações numéricas durante a convergência da solução. Por isso, durante a realização de ensaios experimentais costuma-se adicionar uma fonte externa de perturbação, como por exemplo a vibração de uma das paredes. Nos experimentos realizados por Cardin, Nataf e Dewost (1991), os autores posicionaram dois cilindros metálicos no interior da camada inferior, sendo a rotação destes cilindros responsável por induzir o movimento convectivo.

Apesar das diferentes abordagens empregadas pelas duas metodologias de análise, como será visto adiante os limites de estabilidade obtidos nos dois casos são próximos, especialmente quando não ocorre o deslocamento das células convectivas pelo escoamento paralelo (ou seja, para $Re = 0$). A seguir será apresentada uma comparação entre os resultados obtidos com os dois métodos, primeiramente para a convecção de Rayleigh-Bénard considerando diferentes razões entre as espessuras das camadas e posteriormente para a convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille para camadas com a mesma espessura.

5.2.1 Razão entre Espessura das Camadas

O primeiro caso avaliado será a convecção de Rayleigh-Bénard em duas camadas. Como comentado anteriormente, as propriedades físicas dos fluidos foram escolhidas de modo que $Ra^* = 1$ para $d_0 = 1$. Desse modo, a redução em d_0 implica em uma redução proporcional em Ra^* , lembrando que a dependência entre os dois parâmetros é da forma $Ra^* = Ra^*(d_0^4)$. Para todos os resultados apresentados nesta

seção, considerou-se como condição inicial o estado base definido anteriormente. Como neste caso $Re = 0$, o estado base corresponde a $u = v = 0$ e ao perfil de temperatura linear unicamente devido à condução.

Na Figura 78 é apresentada a curva de Ra_c em função de d_0 obtida através da análise de estabilidade linear para o sistema composto pelos fluidos descritos na Tabela 7. Além disso, pontos referentes a simulações diretas para diversos valores de d_0 também são apresentados na Figura 78, sendo classificados em estáveis e instáveis de acordo com a presença ou não de movimento convectivo.

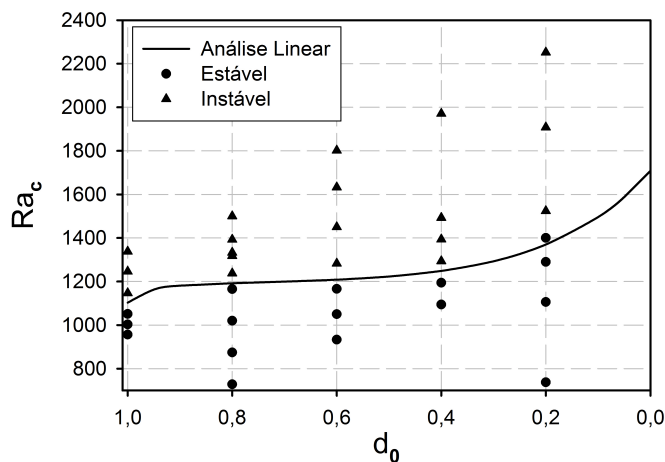


Figura 78: Comparação entre resultados obtidos com simulação numérica direta (pontos) e com análise de estabilidade linear (curva).

Em relação à análise linear, o critério de estabilidade é bem definido em função dos autovalores associados, isto é, o sistema será instável assim que algum dos autovalores possuir sua parte imaginária maior que zero. No entanto, não pode-se especificar um limite de estabilidade para as simulações numéricas diretas tão preciso, pois as soluções obtidas para as equações governantes são *soluções aproximadas*. Na maioria dos casos o desvio em relação à solução exata gerado por estas aproximações não é significativo, em especial quando o sistema está distante do ponto crítico. Neste ponto, quando o movimento convectivo inicia, espera-se que as variações das componentes da velocidade

e da temperatura em relação ao estado base não possuem uma grande magnitude, podendo isto gerar uma situação onde os erros numéricos, inerentes à solução das equações diferenciais por meios discretos, influenciem o limite de estabilidade determinado pela simulação numérica direta. Nos pontos apresentados na Figura 78, considerou-se que o sistema passa a ser instável quando ocorre um aumento mensurável no coeficiente de troca térmica em relação ao valor obtido para o estado base. Mais detalhes sobre a escolha deste critério serão discutidos nas próximas seções.

Apesar de a determinação da posição exata do ponto crítico não ser facilmente obtida, os resultados da simulação numérica direta estão em excelente acordo com o limite de estabilidade definido pela análise linear, havendo somente um ponto (para $d_0 = 0.2$) onde um sistema estável foi encontrado na região instável definida pela estabilidade linear. Este desvio está possivelmente relacionado à dificuldade em determinar o movimento convectivo próximo ao ponto crítico, como comentado anteriormente.

O número de Rayleigh é definido com base na diferença de temperatura entre a interface e a parede inferior, no entanto, as condições de contorno utilizadas na simulação direta impõem somente as temperaturas nas paredes inferior e superior, sendo a temperatura na interface obtida como parte da solução. Isto explica o aparente caráter aleatório dos pontos apresentados na Figura 78, visto que o número de Rayleigh não pode ser previamente definido com exatidão. Quando a transferência de calor ocorre somente por condução, a temperatura ao longo da interface (ou de qualquer outra linha horizontal) é constante. Porém, a presença do movimento convectivo altera o perfil de temperatura linear e variações na temperatura ao longo da interface surgem, gerando conseqüentemente variações no número de Rayleigh ao longo do eixo x . Os pontos apresentados na Figura 78 foram determinados com base no valor mínimo da temperatura na interface, ou seja, correspondem ao maior valor de Ra ao longo do eixo x . Este procedimento será adotado ao longo de todo o presente trabalho, sempre que necessário.

A possibilidade de obter a distribuição bidimensional dos campos de velocidade e temperatura é uma importante vantagem da simulação numérica direta, pois não há uma restrição em termos de modos normais conforme imposto para a análise linear. Os aspectos referentes ao perfil bidimensional das variáveis serão discutidos com mais detalhes na próxima seção, porém, para auxiliar na comparação dos perfis obtidos na simulação direta com as autofunções obtidas na análise li-

near, na Figura 79 são apresentados exemplos típicos de distribuição das variáveis de interesse para um sistema instável (com convecção presente) considerando $Ra = 1516$ e $Re = 0$. Os resultados são apresentados em função de uma escala de cinza genérica, onde as regiões mais claras correspondem a menores valores e as regiões mais escuras a maiores valores. A razão entre as espessuras das camadas na geometria empregada representa o caso $d_0 = 0.8$.

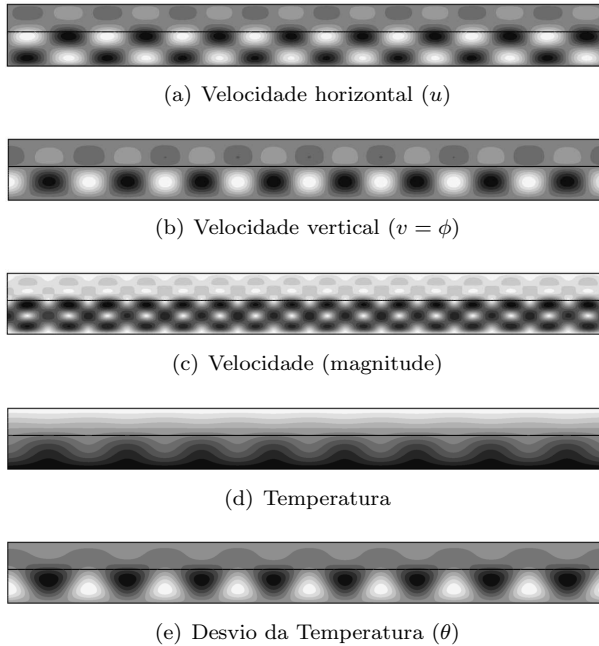


Figura 79: Exemplo de distribuição bidimensional das principais variáveis para $d_0 = 0.8$ e $Ra = 1516$.

O campo de velocidades, apresentado nas Figuras 79(a) e 79(b), representa o perfil padrão gerado pela formação de células convectivas, com a velocidade u possuindo uma maior magnitude nas partes inferior e superior das células e a velocidade v apresentando uma maior magnitude entre as células. O sistema é formado por células contra-rotativas, o que gera o padrão simétrico periódico observado para as variáveis. A diferença na espessura das camadas, e conseqüentemente a diferença no número de Rayleigh, faz com que a intensidade da recirculação seja menos significativa na camada superior. Mesmo assim, pode-se clara-

mente observar que a continuidade da velocidade u na interface induz a formação de recirculações na camada superior e portanto ocorre o acoplamento viscoso (ou por arraste) entre as camadas. Isto também pode ser observado avaliando-se a velocidade v , onde ocorre uma alteração no sentido da velocidade quando se passa de uma camada para outra.

A distribuição espacial das células convectivas pode ser mais facilmente observada na Figura 79(c), que representa a magnitude total da velocidade ao longo do domínio. Os pontos mais claros no centro da camada inferior correspondem à regiões de estagnação, ou seja, ao centro das células. Assim como normalmente observado neste tipo de sistema, as recirculações possuem um diâmetro aproximadamente constante, o que faz com que o número de células presente seja função da razão de aspecto (comprimento/altura) da geometria avaliada.

Na Figura 79(d) é apresentado o campo real de temperatura obtido, enquanto que na Figura 79(e) é apresentado o desvio da temperatura em relação ao estado base ($T - T_B$). A dependência do desvio da temperatura com as componentes da velocidade, em especial da velocidade vertical, fica bastante clara quando se analisa a Figura 79(e), onde se constata a formação de estruturas semelhantes às observadas na Figura 79(b). Estas estruturas, porém, possuem um formato mais triangular do que as estruturas relacionadas à velocidade v , sendo isto ocasionado pelo transporte de energia causado pela componente horizontal da velocidade. Por isso, a “base” dos triângulos está sempre posicionada em um local onde ocorre a separação das recirculações. Isto faz com que o desvio da temperatura neste caso não possua um caráter tão simétrico quanto observado para as componentes da velocidade.

É importante destacar que este comportamento só é observado quando o sistema não está muito próximo ao ponto crítico e portanto realmente espera-se que efeitos não considerados na análise linear possuam influência significativa. Para valores de Ra próximos ao crítico o perfil para o desvio da temperatura apresenta um formato mais simétrico, como será melhor discutido adiante. Os dados apresentados na Figura 79 foram obtidos para $Ra = 1516$, sendo que o valor crítico para $d_0 = 0.8$ é de aproximadamente $Ra_c = 1192$.

A distribuição simétrica da velocidade vertical e do desvio da temperatura permite uma comparação direta destas variáveis com as autofunções obtidas pela análise de estabilidade linear. Os perfis de ϕ e θ ao longo da altura y obtidos pela simulação direta possuem o mesmo formato para qualquer valor de x considerado, havendo somente uma mudança na magnitude das variáveis. Por esse motivo, optou-se por apresentar todas as autofunções normalizadas com base no valor

máximo obtido para cada conjunto de parâmetros, sendo que nesta forma normalizada a dependência com relação à direção x é eliminada. Apesar de os perfis obtidos com a simulação numérica representarem desvios em relação ao estado base e não autofunções, a nomenclatura ϕ (desvio da velocidade) e θ (desvio da temperatura) será empregada devido à analogia com as autofunções obtidas com a análise linear. Um exemplo de comparação entre os perfis obtidos com as duas abordagens numéricas é apresentado na Figura 80 para $d_0 = 0.8$ e valores de Ra próximos suficientemente ao valor crítico para que o desvio da temperatura possa ser considerado simétrico.

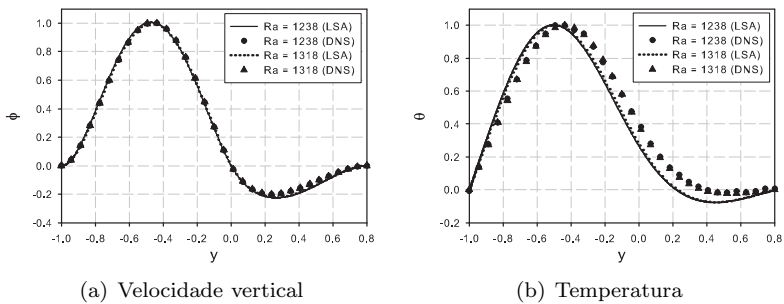


Figura 80: Comparação entre as autofunções obtidas com análise linear (LSA) e perfis obtidos com simulação numérica direta (DNS) para $d_0 = 0.8$.

Como pode ser visto, os resultados obtidos através das duas metodologias apresentam uma excelente concordância, principalmente em relação ao campo de velocidades. Em ambos os casos as curvas praticamente não sofreram alterações devido à variação no número de Rayleigh. O perfil de desvio da temperatura em relação ao estado base obtido com a simulação numérica direta apresenta um pequeno deslocamento em relação à autofunção, porém o comportamento geral do sistema ainda assim é muito bem representado. Cabe ressaltar que para valores de Ra muito maiores que Ra_c os perfis de $\theta(y)$ obtidos na simulação direta variam ao longo da direção x e, portanto, a comparação com as autofunções obtidas pela análise linear não pode mais ser realizada.

As curvas obtidas através das duas formas de análise para diferentes valores de d_0 podem ser vistas na Figura 81. Os valores de Ra adotados para cada valor de d_0 correspondem ao ponto instável mais

próximo ao valor crítico apresentado na Figura 78. Também neste caso a concordância entre as curvas fica bastante evidente ao longo de todo o domínio de solução. Estes resultados mostram que a análise linear, apesar de possuir uma série de hipóteses e aproximações, consegue descrever satisfatoriamente os aspectos relacionados à convecção natural em duas camadas. Na próxima seção serão avaliados casos onde $Re \neq 0$, incluindo portanto os efeitos do escoamento cisalhante nos perfis de velocidade e temperatura obtidos.

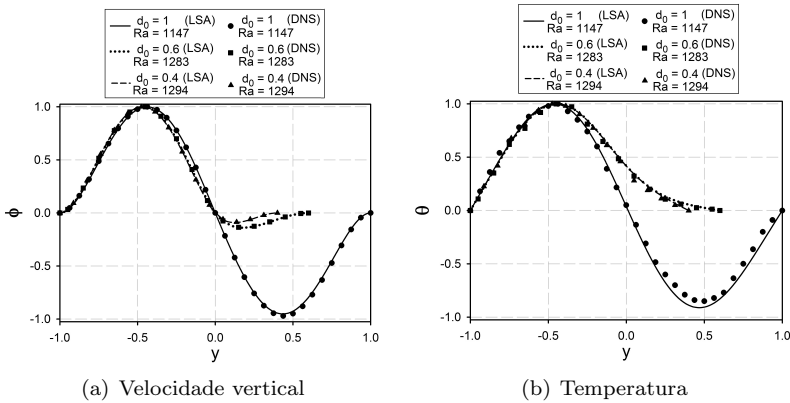


Figura 81: Comparação entre as autofunções obtidas com análise linear (LSA) e perfis obtidos com simulação numérica direta (DNS) para diferentes valores de d_0 .

5.2.2 Influência do Número de Reynolds

Quando os perfis bidimensionais de temperatura e velocidade são analisados, a influência do escoamento paralelo é mais evidente do que na condição onde somente a variação ao longo de y é considerada. Neste caso, as células convectivas são deslocadas ao longo da direção x , havendo uma contínua formação e remoção de células ao longo do tempo. Uma das hipóteses adotadas para a análise de estabilidade linear é de que o sistema é ilimitado na direção x , sendo que por razões óbvias esta condição não pode ser satisfeita para a simulação numérica direta. Nos resultados para $Re = 0$ considerou-se condições de simetria nas fronteiras laterais do sistema, sendo esta uma boa aproximação

para um sistema ilimitado. No entanto, para valores de $Re > 0$ é necessária a existência de uma região de entrada e outra de saída de massa e portanto as condições de simetria não podem ser aplicadas.

Como será melhor discutido nas próximas seções, observou-se a existência de uma distância mínima para que as células convectivas se formassem, sendo esta distância proporcional ao número de Reynolds e inversamente proporcional à diferença $Ra - Ra_c$. Conforme o sistema se aproxima do ponto crítico, uma distância infinita na direção x passa a ser necessária para que o movimento convectivo seja observado, o que dificulta ainda mais a determinação dos pontos críticos através da simulação direta. Na Figura 82 é apresentada a curva de estabilidade obtida através da análise linear modal juntamente com pontos obtidos com a simulação numérica empregando uma malha onde $L = 30h$ para a maioria dos casos e $L = 60h$ para alguns pontos mais próximos ao valor crítico.

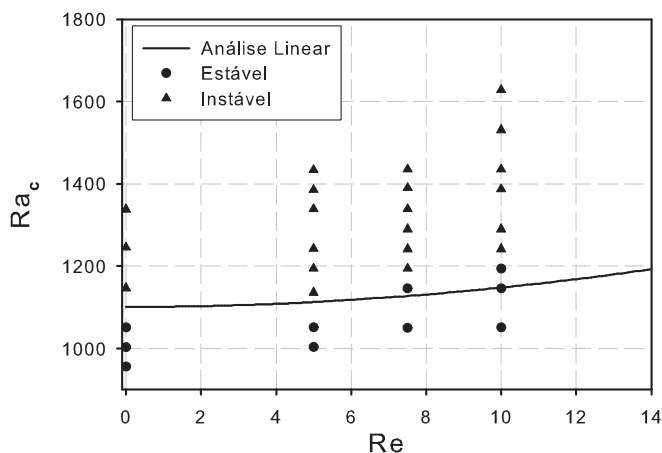


Figura 82: Comparação entre resultados obtidos com simulação direta (pontos) e com análise linear (curva) para diferentes valores de Re .

Os resultados obtidos através da simulação numérica direta tendem a apresentar um comportamento mais estável que os obtidos com a análise linear, especialmente para maiores valores de Re . No entanto, para valores de Ra muito próximos a Ra_c a análise por simulação direta é bastante complexa e fatores com as dimensões da malha e a presença de perturbações específicas que levam à instabilidade podem

afetar os resultados de alguma forma. Além disso, como será discutido nas próximas seções, para elevados valores de Re o sistema apresenta um comportamento semelhante à instabilidade convectiva, com a perturbação sendo deslocada pelo escoamento paralelo e eventualmente deixando o sistema. Apesar disto, os limites de estabilidade definidos pelas duas metodologias estão próximos, indicando que as aproximações adotadas na análise linear são adequadas mesmo quando existe escoamento paralelo.

A aproximação das variáveis em termo dos modos normais assume que campos de velocidade e temperatura estejam totalmente desenvolvidos. Conforme comentado anteriormente, para $Re > 0$ existe uma região de entrada onde as células convectivas não estão completamente formadas. No entanto, para uma distância suficientemente grande da região de entrada, o comportamento das variáveis é semelhante ao observado para $Re = 0$. Na Figura 83 são comparadas as autofunções obtidas com a análise linear com os perfis de velocidade e desvio da temperatura para $Re = 5$ e $Re = 10$, sendo estes valores avaliados após a região de entrada. Os valores de Ra representam pontos instáveis próximos ao ponto crítico, sendo que pequenas variações em Ra não alteram o formato das curvas.

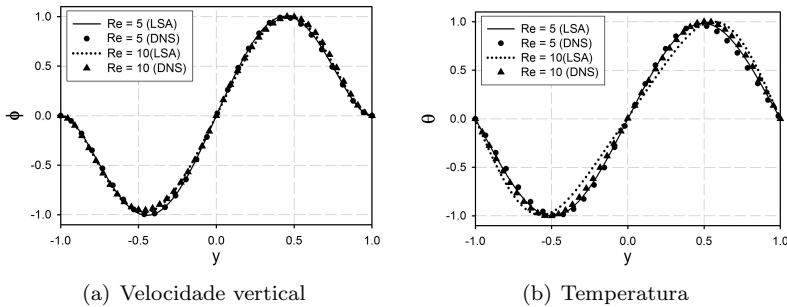


Figura 83: Comparação entre as autofunções obtidas com análise linear (LSA) e perfis obtidos com simulação numérica direta (DNS) para diferentes valores de Re .

Conforme visto na figura, para $Re > 0$ também existe uma excelente concordância entre os perfis obtidos com as duas abordagens numéricas. O maior desvio é observado para a temperatura quando $Re = 10$, no entanto este é muito pequeno em comparação com a magnitude das variáveis. Como discutido no capítulo anterior, a variação

em Re não altera de maneira significativa o formato das autofunções, sendo este comportamento também obtido com a simulação direta.

Pelos resultados apresentados nesta seção pode-se perceber que a análise de estabilidade da convecção RPBE em um meio ilimitado na direção x utilizando técnicas de simulação numérica direta é bastante restrita, em especial devido à dificuldade em representar a formação de células convectivas para valores próximos a Ra_c . Apesar destas limitações inerentes à forma de análise, a comparação com os resultados obtidos com a análise linear é satisfatória. A seguir será considerada a possibilidade de deformação da interface, sendo este um fenômeno que pode ser reproduzido de maneira mais precisa pela simulação numérica direta.

5.2.3 Deformação da Interface

A principal vantagem do uso do método do volume de fluido para avaliar o acoplamento entre as camadas é que ele permite determinar a posição da interface ao longo do tempo e do espaço como parte da resolução do problema. Como discutido no capítulo anterior, esta é uma das principais dificuldades da análise linear através de modos normais, pois o modelo desenvolvido só é válido quando a deformação da interface for muito pequena. Como esta depende diretamente da velocidade vertical avaliada em $y = 0$ e esta velocidade torna-se maior com o aumento no número de Rayleigh, espera-se que quanto maior for a diferença $Ra - Ra_c$, menos precisa será a representação linearizada da dinâmica real do sistema.

Nesta seção serão comparados alguns resultados obtidos através da simulação numérica direta com resultados da análise linear para diferentes valores de Ra_ρ . Como discutido no capítulo anterior, a deformação da interface é importante quando k_0 ou m são diferentes de 1 ou quando o efeito termocapilar é considerado. Nesta seção será considerado que $k_0 = 2$, porém o valor da capacidade térmica também é alterado de modo que a relação $\kappa_0 = 1$ continue sendo válida. Os demais parâmetros são os mesmos apresentados na Tabela 7. Cabe destacar que a razão entre as densidades dos fluidos nas duas camadas permanece a mesma, havendo somente uma alteração no número adimensional Ra_ρ .

Com base nos resultados apresentados anteriormente, pode-se concluir que de modo geral a deformação da interface faz com que o estado base perca a estabilidade para menores valores de Ra , sendo que

para todos os casos avaliados nenhuma mudança significativa ocorre para $Ra_\rho > 10^5$. Na Figura 84 é apresentada a curva de estabilidade para o sistema avaliado, obtida através da análise linear, em função do número adimensional Ra_ρ . Na mesma figura são mostrados diversos pontos, obtidos através da simulação numérica direta, para $Ra_\rho = 10^4$, 5×10^3 e 10^3 . Os pontos são classificados em instáveis ou estáveis de acordo com a presença ou não de transferência de calor por convecção. Além disso, são destacados pontos onde observou-se deformação significativa da interface.

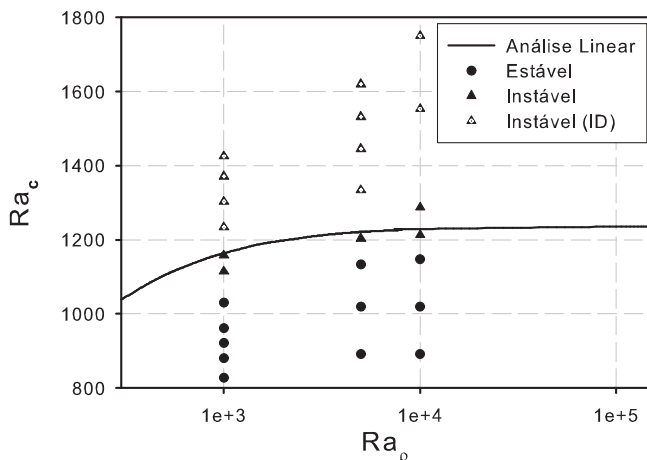


Figura 84: Comparação entre resultados obtidos com simulação direta (pontos) e com análise linear (curva). Os pontos indicados como *ID* representam estados instáveis com deformação da interface.

Os valores de Ra_c obtidos com a análise de estabilidade linear tendem a subestimar a presença de transferência de calor por convecção, especialmente para baixos valores de Ra_ρ . Possivelmente isto está relacionado com os termos não-lineares desconsiderados na análise linear, pois uma deformação muito significativa da interface faz com que a aproximação em série de Taylor truncada não represente bem as condições de contorno na interface. Conforme mostrado na Figura 84, para baixos valores de Ra_ρ ocorre uma grande deformação da interface para valores de Ra pouco acima do valor crítico. Apesar disto, a curva de estabilidade obtida com a análise linear é consistente com os resultados obtidos com a simulação direta, representando bem o com-

portamento do sistema em relação à variação em Ra_ρ .

Os resultados obtidos com a análise linear modal para os perfis de velocidade e temperatura também estão em acordo com os perfis encontrados com o emprego da simulação numérica direta, como pode ser visto na Figura 85, onde são apresentados resultados para $Ra_\rho = 5 \times 10^3$ e $Ra_\rho = 10^3$ e valores de $Ra \gtrsim Ra_c$ obtidos com as duas formas de análise.

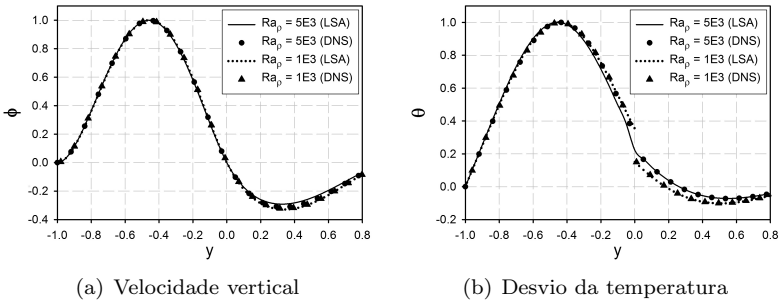


Figura 85: Comparação entre perfis obtidos com as diferentes formas de análise para $d_0 = 1$ e $Ra_\rho < 10^5$.

Os perfis obtidos para os dois valores de Ra_ρ são muito semelhantes, especialmente em relação à velocidade vertical. Como consequência da variação na inclinação do perfil de temperatura base, para $Ra_\rho = 10^3$ ocorre um salto no desvio da temperatura na interface, assim como observado nas autofunções apresentadas na Figura 55. Apesar de este salto estar relacionado com a forma como as condições de contorno são expressas e linearizadas em torno da posição original da interface, os dados obtidos com a simulação numérica direta reproduzem muito bem este comportamento, não sendo observado nenhum desvio significativo com relação às autofunções obtidas através da análise linear. Mais detalhes sobre a influência da deformação da interface nos campos de velocidade e temperatura serão abordados na próxima seção.

5.3 DISTRIBUIÇÃO BIDIMENSIONAL E EVOLUÇÃO TEMPORAL

O modelo matemático utilizado para a análise de estabilidade linear emprega o uso de modos normais para representar a dependência

da velocidade vertical, pressão, desvio da temperatura e deformação da interface em função do tempo e das coordenadas x e z . Como visto na seção anterior, esta representação é capaz de prescrever as principais características que influenciam na estabilidade do sistema. Porém, algumas informações são perdidas neste processo. Na presente seção serão apresentados alguns resultados relacionados à distribuição espacial das variáveis ao longo das duas dimensões, bem como a dependência desta distribuição com o tempo. Além disso, aspectos relacionados à transferência de calor entre os fluidos e as paredes serão considerados.

5.3.1 Convecção de Rayleigh-Bénard Estratificada

Primeiramente serão apresentados resultados obtidos quando $Re = 0$. A influência do escoamento cisalhante, especialmente para baixos valores de Reynolds, pode ser vista como uma deformação em relação aos perfis obtidos para a convecção natural, de modo que estes resultados devem ser primeiramente avaliados. Os perfis associados a um sistema estável correspondem ao estado base para todo o intervalo de tempo avaliado, considerando que este estado é também adotado como condição inicial. Portanto, os resultados apresentados a seguir para os perfis bidimensionais correspondem somente a sistemas onde o movimento convectivo é observado em alguma escala.

5.3.1.1 Evolução Temporal

Perfis bidimensionais para a velocidade vertical v são apresentados na Figura 86 para diferentes passos de tempo, considerando $d_0 = 1$ e $Ra = 1246$. O número de Rayleigh crítico para esta razão entre as espessuras é de $Ra_c = 1102.8$, portanto espera-se uma significativa influência convectiva nos perfis obtidos. De forma semelhante, na Figura 87 são apresentados os perfis para o desvio da temperatura em relação ao estado base para os mesmos instantes apresentados na Figura 86. Nos dois casos, para os instantes iniciais os valores obtidos foram multiplicados por um fator (indicado nas figuras) para que a mesma escala pudesse ser aplicada para todos os instantes. Os valores foram normalizados com base no valor máximo encontrado para cada variável dentro do conjunto de passos de tempo considerados. Os resultados apresentados nestas figuras, bem como os demais resultados mostrados

na seqüência para diferentes instantes de tempo, são apresentados em função do tempo adimensional $t^* = \hat{t}$, lembrando que a razão d_1^2/κ_1 é utilizada como escala de tempo.

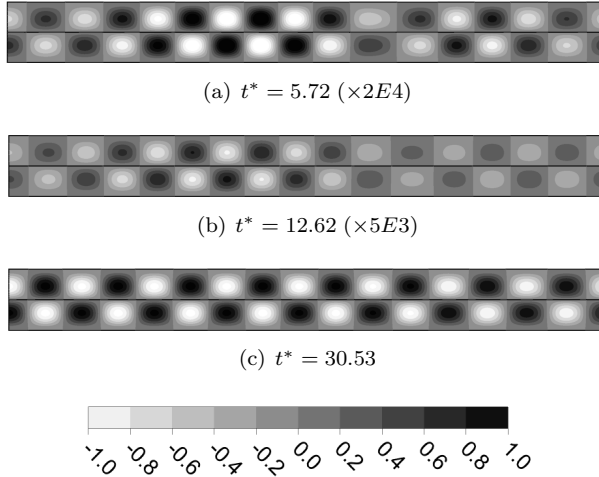


Figura 86: Perfis da velocidade v em diferentes instantes de tempo para $d_0 = 1$ e $Ra = 1246$.

Os perfis para a velocidade vertical apresentados na Figura 86 mostram que para os instantes iniciais a formação das células de convecção não ocorre de forma homogênea ao longo de todo o domínio, podendo-se até mesmo observar células com diferentes razões de aspecto (razão entre comprimento e altura). Este comportamento reflete diretamente no desvio da temperatura, sendo os perfis obtidos para os instantes de tempo iniciais praticamente idênticos aos perfis de velocidade vertical, como pode ser visto na Figura 87.

Para as duas variáveis apresentadas, ocorre uma grande diferença na magnitude para maiores intervalos de tempo. Como visto nas figuras, para os instantes iniciais os resultados são multiplicados por fatores da ordem de 10^4 e 10^3 , ou seja, ocorre um aumento de pelo menos 1000 vezes na magnitude das variáveis conforme o tempo avaliado aumenta. A seguir serão apresentados mais detalhes sobre este comportamento. Para o instante de tempo apresentado na Figura 87(c) a deformação no formato do perfil pela ação da velocidade horizontal pode ser claramente observada, sendo que esta deformação não ocorre para os menores instantes de tempo.

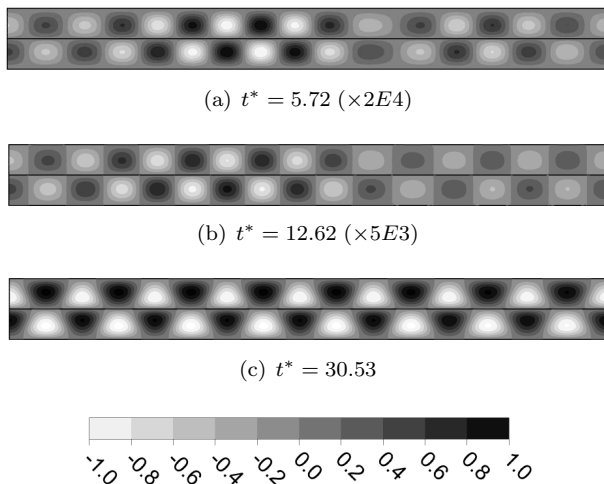


Figura 87: Perfis de desvio de temperatura θ em diferentes instantes de tempo para $d_0 = 1$ e $Ra = 1246$.

O conhecimento da distribuição das variáveis ao longo das duas dimensões e do tempo permite determinar com mais detalhes como ocorre a transferência de calor entre as paredes com temperaturas fixas e o fluido. Este é um importante fator a ser considerado pois sabe-se que o coeficiente de troca térmica varia significativamente quando o sistema passa do estado onde somente condução ocorre para um estado onde a convecção é significativa. Para avaliar a relação entre as duas formas de transferência de calor, pode-se utilizar o número de Nusselt, definido como:

$$Nu(x) = \frac{h_c d_1}{k_1} \quad (5.8)$$

Repare que o número adimensional é expresso como uma função de x , pois o coeficiente de troca térmica h_c pode variar ao longo desta direção. Uma maneira mais conveniente é expressar uma média deste valor ao longo de toda a direção x :

$$Nu^* = \frac{1}{L} \int_0^L Nu(x) dx \quad (5.9)$$

onde Nu^* é o número de Nusselt médio, sendo esta uma quantidade que depende somente do tempo. Como os parâmetros d_1 e k_1 são

considerados constantes, o número de Nusselt varia de acordo com a mudança no coeficiente de troca térmica. Por isso, o aumento no valor de Nu é utilizado como critério para determinar o início da convecção. Quando a transferência de calor ocorre somente por condução, o número de Nusselt não depende de Ra , sendo equivalente ao valor associado ao estado base. Caso o valor de $Nu(x)$ for superior a este valor base em algum ponto do domínio, considera-se que o sistema é instável.

A variação de Nu^* com o tempo para o caso $d_0 = 1$ e $Ra = 1246$ é apresentado na Figura 88, juntamente com o valor máximo para $Nu(x)$ obtido para cada instante de tempo. Além disso, são apresentados os perfis para os valores máximos de ϕ e θ ao longo do tempo, sendo estes valores adimensionalizados com base no valor máximo encontrado. Os valores apresentados no eixo das ordenadas são válidos para todas as curvas.

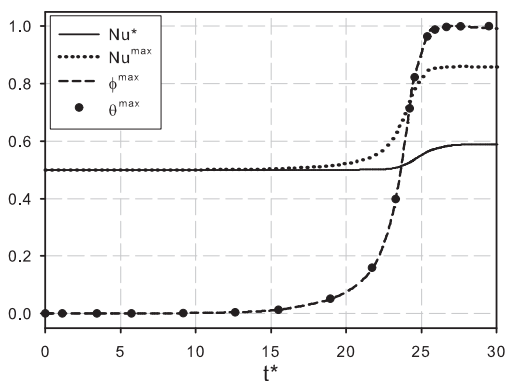


Figura 88: Evolução temporal do número de Nusselt e valores máximos de ϕ e θ para $d_0 = 1$ e $Ra = 1246$.

Para os instantes iniciais, o valor do número de Nusselt é constante ao longo de todo o domínio e igual a 0.5. Este valor surge pois como escala de comprimento adotou-se a dimensão da camada inferior d_1 . Considerando que $d_0 = 1$, caso a altura total de fluido fosse utilizada, a condição $Nu(x) = 1$ seria obtida, sendo este o valor teórico esperado quando não ocorre convecção natural.

O comportamento observado para as quatro curvas apresentadas na Figura 88 é muito semelhante, havendo um rápido aumento nos parâmetros entre $15 < t^* < 25$ e um comportamento basicamente cons-

tante fora deste intervalo. Isto mostra que a convecção não ocorre de forma significativa no início do processo, porém, em um determinado instante o sistema atinge um ponto crítico e desencadeia o início da convecção. Após algum tempo, a convecção atinge um estado estacionário e nenhuma mudança relevante ocorre após este instante.

A diferença observada entre o valor médio e o valor máximo do número de Nusselt é um indicativo da variação da troca térmica ao longo da direção x . Como visto na Figura 88, quando a convecção atinge o valor estacionário, a diferença entre as duas quantidades é considerável, portanto pode-se esperar uma grande oscilação em $Nu(x)$ ao longo do sistema. Em relação à velocidade vertical e ao desvio da temperatura máximos, observa-se que as duas curvas coincidem para todo o intervalo de tempo analisado, indicando a dependência da transferência de calor por convecção com o deslocamento vertical do fluido. Isto ocorre pois os fluidos considerados possuem $Pr = 1$, ou seja, a escala de tempo associada à difusividade térmica é a mesma associada à difusividade de momento.

Considerando que como condição inicial são utilizados os perfis de temperatura e velocidade equivalentes ao estado estacionário quando ocorre somente transferência de calor por condução, o sistema está em um estado instável para qualquer valor de $t^* > 0$, mesmo não havendo movimentação induzida pela convecção ou desvio significativo em relação ao estado base. O atraso observado para que a convecção inicie está relacionado ao tempo necessário para que os campos de velocidade e temperatura sejam afetados pela instabilidade. De forma equivalente, podemos associar este atraso com a parte imaginária dos autovalores obtidos através da análise linear. Quanto maior este valor, mais rapidamente a presença da convecção pode ser observada. Isto significa que no ponto crítico, onde $\omega_i = 0$, o sistema levaria um tempo infinito para que a instabilidade causasse a alteração dos campos de velocidade e temperatura. Por este motivo, a análise de pontos muito próximos ao ponto crítico através da simulação numérica direta, mesmo para $Re = 0$, é impraticável.

No capítulo anterior, mostrou-se que de modo geral o valor de ω_i aumenta conforme o número de Rayleigh aumenta, por isso espera-se que para maiores valores de Ra a influência da convecção seja mais rapidamente observada. Na Figura 89 são apresentadas as curvas mostrando a variação no número de Nusselt médio e máximo e os valores máximos de θ e ϕ em função do tempo para diversos valores de Ra , onde pode-se, de fato, constatar que para maiores valores de Ra a convecção é primeiramente observada.

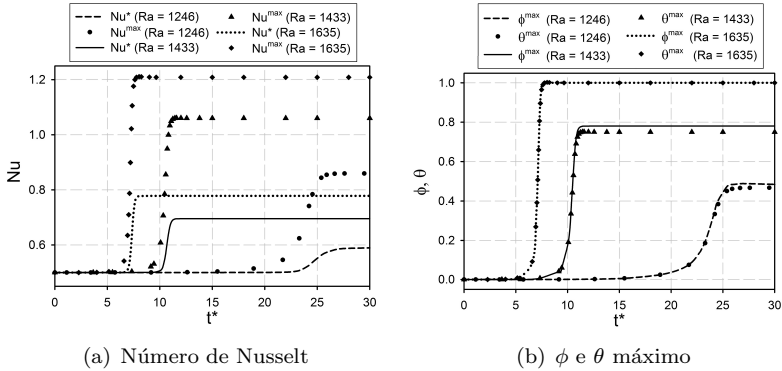


Figura 89: Evolução temporal do número de Nusselt e valores máximos de ϕ e θ para $d_0 = 1$ e diferentes valores de Ra .

Analisando-se a Figura 89(a) pode-se ver que para todos os valores de Ra existe uma significativa diferença entre o número de Nusselt médio e máximo a partir do momento em que a convecção inicia. Esta diferença aumenta conforme o valor de Ra aumenta, correspondendo a aproximadamente 46% para $Ra = 1246$, 52.45% para $Ra = 1433$ e 55.31% para $Ra = 1635$. Isto mostra que o número de Rayleigh também afeta a oscilação das variáveis ao longo da direção x . Apesar de os três valores de Ra considerados estarem separados por um intervalo semelhante, a diferença no tempo onde a convecção inicia é muito maior para os dois menores valores do que para os dois maiores, sendo este um indicativo da dependência exponencial com o tempo já utilizada na análise modal.

Em relação aos valores máximos para θ e ϕ , as curvas mostram a mesma tendência observada para o número de Nusselt. Os valores apresentados na Figura 89(b) foram normalizados com base no valor máximo para $Ra = 1635$, sendo que a pequena diferença entre as curvas de ϕ^{max} e θ^{max} para os demais valores de Ra se deve à mudança na escala empregada. Quando normalizadas com base no valor máximo para cada Ra , as curvas para as duas variáveis coincidem.

5.3.1.2 Perfis Bidimensionais de Velocidade e Temperatura

A análise linear modal empregada neste trabalho aproxima a dependência das perturbações com a coordenada x na forma de um comportamento periódico $e^{i\alpha x}$ (ou ainda, empregado a fórmula de Euler, $\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)$). Esta aproximação mostra-se bastante plausível para valores de Ra próximos ao ponto crítico, onde os desvios em relação ao estado base são pequenos e os termos não-lineares podem ser negligenciados. No entanto, conforme se afasta do ponto crítico, o comportamento espacial passa a apresentar características mais complexas.

Como o valor de Ra_c depende de uma série de parâmetros, os perfis espaciais não dependem somente do número de Rayleigh. Na Figura 90 são apresentados os perfis de velocidade vertical para diversos valores de d_0 , considerando em todos os casos $Ra \approx 1500$. De forma semelhante, na Figura 91 são mostrados os perfis para o desvio da temperatura para os mesmos casos. Para possibilitar a utilização da mesma escala, os valores para $d_0 < 1$ foram multiplicados por um fator > 1 , conforme indicado nas figuras, sendo todos os valores normalizados com base no valor máximo obtido para $d_0 = 1$.

Os perfis para a velocidade vertical vistos na Figura 90 apresentam para todos os casos um comportamento semelhante ao descrito pelas autofunções obtidas com a análise linear, ficando clara a redução relativa na recirculação na camada superior conforme d_0 diminui. A razão entre as dimensões das células convectivas geradas na camada inferior também é semelhante para todos os casos, havendo uma consequente redução no número de células conforme a espessura relativa da camada inferior aumenta.

Para o desvio da temperatura em relação ao estado base (Figura 91), as diferenças em relação às autofunções obtidas com a análise linear são mais evidentes. Para $d_0 = 1$ ocorre uma forte distorção das estruturas formadas em função da velocidade horizontal, conforme discutido anteriormente. A influência diminui conforme d_0 é reduzido, no entanto mesmo para $d_0 = 0.2$ ocorrem variações significativas nos perfis verticais ao longo da direção x . Esta redução relativa da influência da velocidade u ocorre devido ao aumento no valor de Ra_c conforme d_0 diminui, ou seja, a diferença entre o número de Rayleigh real e o número de Rayleigh crítico é menor para os menores valores de d_0 .

A mudança nos perfis do desvio da temperatura conforme o sistema se distancia do ponto crítico pode ser vista na Figura 92, onde são apresentados os perfis para $d_0 = 1$ e diferentes valores de $Ra > Ra_c$.

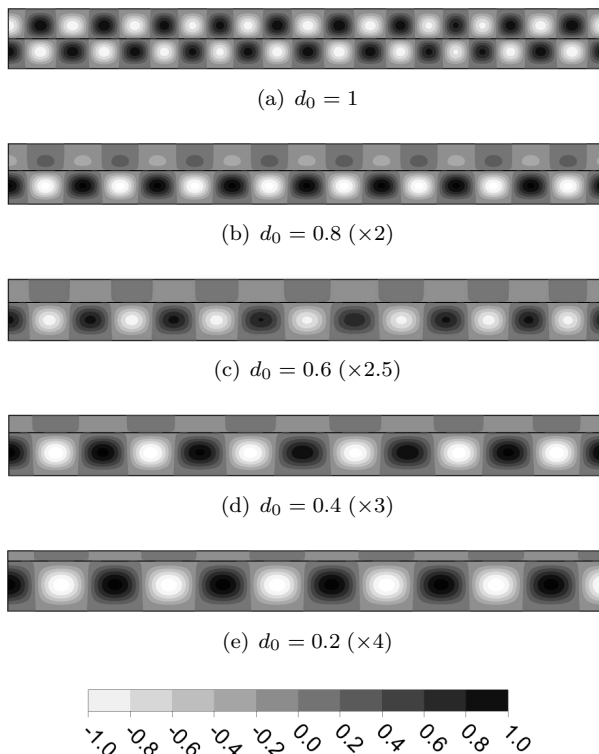


Figura 90: Perfis de velocidade vertical v para $Ra \approx 1500$ e diferentes valores de d_0 .

Conforme esperado, o desvio na temperatura para valores de Ra mais próximos ao ponto crítico são consideravelmente menores, por isso neste caso os valores para $Ra < 1634$ também foram multiplicados por um fator para permitir o uso da mesma escala.

Para altos valores do número de Rayleigh os perfis são fortemente distorcidos pelas recirculações no fluido, apresentando um formato com características triangulares acentuadas. No entanto, esta distorção é claramente reduzida conforme Ra diminui, sendo que para $Ra = 1147$ os perfis já apresentam uma estrutura predominantemente circular. Conforme comentado anteriormente, isto mostra que a aproximação em termos de modos normais para $Ra \approx Ra_c$ é bastante coerente e que neste limite os perfis de desvio de temperatura possuem o formato descrito pelas autofunções $\theta(y)$.

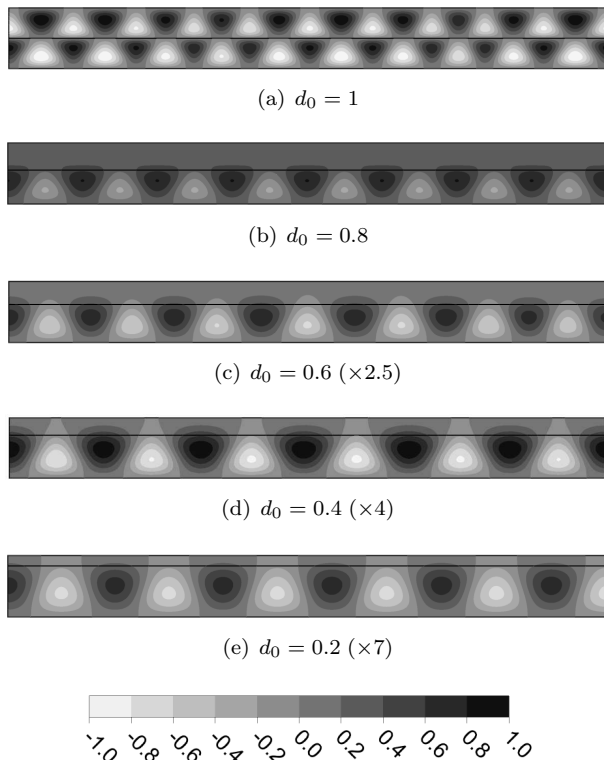


Figura 91: Perfis de desvio de temperatura θ para $Ra \approx 1500$ e diferentes valores de d_0 .

Para $Re = 0$ o comportamento periódico em relação à direção x facilita a análise do problema através de simulação numérica direta pois permite restringir o domínio de solução à uma pequena área representativa, lembrando que condições de simetria são empregadas nos contornos $x = 0$ e $x = L$. Na Figura 93 é apresentada a variação do número de Nusselt local e da velocidade horizontal na interface ($u(x, y)$ avaliado em $y = 0$) ao longo da direção x para $d_0 = 1$ e diversos valores de Ra . Os valores são apresentados em função de uma distância adimensional definida como $x^* = x/L$. Para facilitar a visualização dos resultados as curvas são mostradas no intervalo $0 < x^* < 0.5$, porém o comportamento oscilatório pode ser observado ao longo de toda a extensão do domínio.

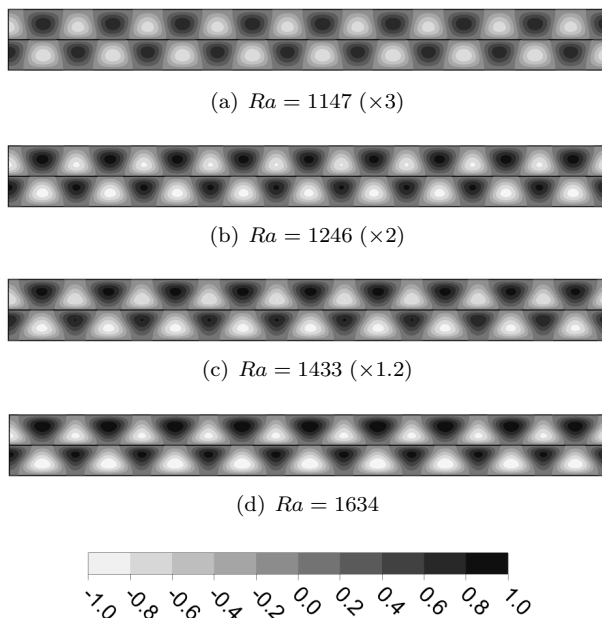


Figura 92: Perfis de desvio da temperatura para $d_0 = 1$ e $Ra > Ra_c$.

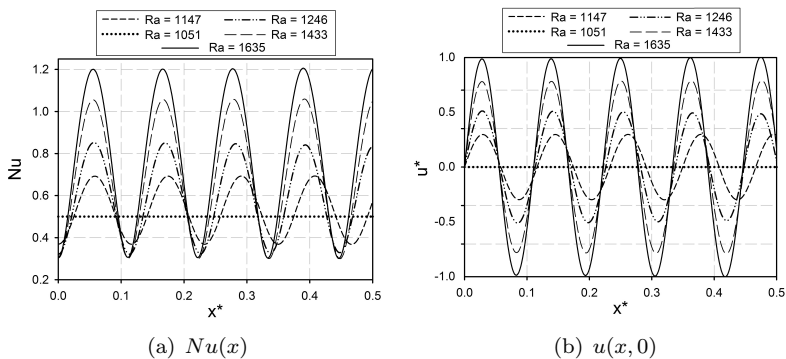


Figura 93: Variação no número de Nusselt local e na velocidade u na interface em função de x para $d_0 = 1$ e diferentes valores de Ra .

Para o sistema considerado na Figura 93, o número de Rayleigh crítico é de $Ra_c = 1102.8$, ou seja, a curva associada a $Ra = 1051$ representa valores obtidos em um estado onde não ocorre convecção.

Comparando com as curvas apresentadas na Figura 89 pode-se ver que o número de Nusselt corresponde ao mesmo valor obtido nos instantes iniciais para maiores valores de Ra . Conforme o número de Rayleigh aumenta, o número de Nusselt local começa a oscilar ao longo de x . Para valores de Ra próximos ao valor crítico o valor de Nu oscila próximo ao valor associado ao estado base, porém à medida que Ra aumenta a amplitude da oscilação também aumenta e a curva passa a oscilar em torno de um valor médio superior, causando o aumento no valor de Nu^* observado anteriormente (ver Figura 89, por exemplo). A frequência de oscilação é semelhante em todos os casos, porém um pequeno aumento pode ser observado conforme Ra aumenta, indicando a formação de um maior número de células de convecção para elevados valores de Ra .

As curvas para a velocidade horizontal na interface, apresentadas na Figura 93(b), refletem o mesmo comportamento observado para as curvas de Nu . Para $Ra < Ra_c$ o sistema encontra-se no estado base e portanto $u = v = 0$. Conforme a convecção inicia ocorre a formação das células de convecção e a velocidade na interface passa a oscilar em torno de $u = 0$. Neste caso, para que não ocorra deslocamento das células convectivas, os perfis de velocidade devem ser exatamente anti-simétricos.

Os pontos onde $u = 0$ correspondem diretamente à separação entre as células de convecção vizinhas. Comparando-se com as curvas para Nu (Figura 93(a)), observa-se que os pontos onde $u(x, 0) = 0$ e $du^*/dx^* < 0$ correspondem aos pontos de máximo para Nu e os pontos onde $u(x, 0) = 0$ e $du^*/dx^* > 0$ correspondem aos pontos de mínimo. O primeiro caso ($du^*/dx^* < 0$) representa o valor de x^* onde o fluido frio descende ($v < 0$) e portanto o aumento no gradiente de temperatura causa o aumento local no número de Nusselt. O contrário é observado no segundo caso ($du^*/dx^* > 0$), que representa a região onde o fluido quente ascende ($v > 0$) e portanto ocorre uma redução do fluxo de calor na parede.

5.3.1.3 Deformação da Interface

A deformação da interface é uma das características mais complexas a serem investigadas na convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada. O emprego de métodos detalhados, como o método de volume de fluido, apesar de fornecer bons resultados, exige um grande gasto computacional e restringe a análise a uma pequena faixa de

parâmetros. Como será visto a seguir, para valores de Ra próximos ao valor crítico a deformação da interface não costuma ser muito grande, porém conforme a intensidade do movimento convectivo aumenta, o comportamento dinâmico da interface altera significativamente os campos de velocidade e temperatura. A seguir serão apresentados alguns resultados avaliando o impacto da deformação da interface, sendo em todos os casos considerado que $d_0 = 1$ e $k_0 = 2$.

Os perfis obtidos para a velocidade vertical e para o desvio da temperatura para $Ra_\rho = 10^3$ e diferentes valores de $Ra > Ra_c$ são apresentados na Figura 94, juntamente com o formato da interface associado a cada caso. Para facilitar a visualização dos resultados, são apresentados os perfis para um intervalo de x menor que L , porém assim como para os resultados apresentados anteriormente, os perfis são periódicos e o mesmo comportamento é observado no resto do domínio.

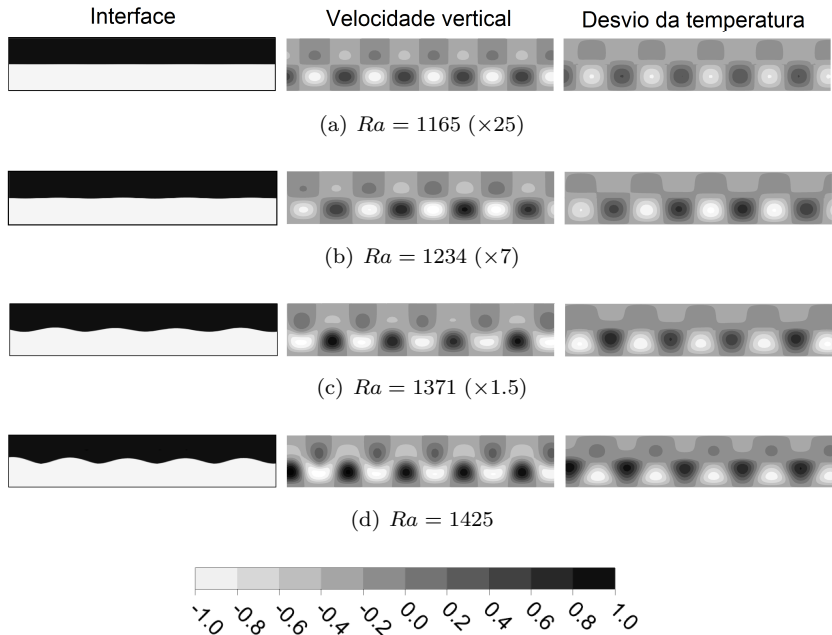


Figura 94: Influência da deformação da interface nos campos de velocidade e temperatura para $Ra_\rho = 10^3$.

Para o caso $Ra_\rho = 10^3$ o número de Rayleigh crítico é $Ra_c \approx 1163$, de modo que os perfis apresentados na Figura 94(a) estão muito

próximos ao ponto crítico. Neste caso, a deformação da interface pode ser negligenciada e os perfis obtidos são similares aos obtidos para maiores valores de Ra_ρ . Nesta figura pode-se observar a descontinuidade no desvio da temperatura na interface causada pela mudança na inclinação do perfil base. Para $Ra = 1234$ ocorre uma pequena deformação da interface, porém a condição $\eta \ll d_1$ ainda é válida e os perfis de velocidade e temperatura apresentam o mesmo comportamento visto para $Ra = 1165$.

No entanto, conforme o número de Rayleigh aumenta a deformação da interface passa a ser mais evidente. Para $Ra = 1425$ o perfil de velocidade é significativamente alterado, havendo uma distorção das células convectivas formadas. A deformação da interface possui um formato oscilatório, sendo que os pontos de máximo (cristas) correspondem à região onde a velocidade v na camada inferior é positiva, ou seja, à região onde o fluido quente ascende, enquanto que a região onde $v < 0$ está associada aos pontos de mínimo (vales) da interface. Para este valor de Ra o formato tanto dos perfis de velocidade quanto dos perfis de desvio de temperatura em função de y variam ao longo de x , sendo que a aproximação em termo dos modos normais não descreve bem o comportamento das variáveis.

A deformação da interface afeta também o coeficiente de troca térmica entre as superfícies sólidas e o fluido, causando a redução no número de Rayleigh crítico discutida anteriormente. Na Figura 95 são apresentados os valores encontrados para o número de Nusselt máximo em função de Ra para diferentes Ra_ρ . Para $Ra < Ra_c$ o número de Nusselt é o mesmo para todos os casos, sendo igual a $2/3$. Novamente, este valor é diferente de 1 devido à escolha das propriedades da camada inferior na definição dos números adimensionais. Caso a altura total h e uma condutividade térmica média fossem empregadas, a condição natural $Nu(x) = 1$ seria obtida.

A partir do ponto onde $Ra = Ra_c$, o número de Nusselt aumenta rapidamente, com os pontos mostrados na figura apresentando um crescimento aproximadamente linear¹. A inclinação desta reta varia em função de Ra_ρ , sendo que para menores valores de Ra_ρ a inclinação é mais acentuada. Além disso, o valor de Ra_c é menor neste caso, conforme discutido anteriormente. A deformação da interface, por alterar localmente as espessuras das camadas, altera também o próprio número de Rayleigh. Os valores apresentados nas figuras anteriores

¹Para a convecção de Rayleigh-Bénard, sabe-se que o crescimento de Nu^* com Ra é proporcional a $((Ra - Ra_c)/Ra_c)^\gamma$, porém a aproximação linear para valores de $Ra \approx Ra_c$ próximos a 1 é válida.

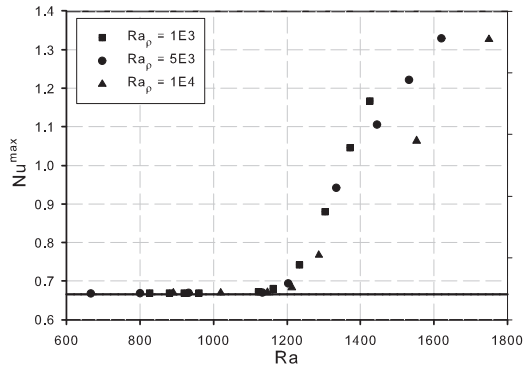


Figura 95: Número de Nusselt máximo para diferentes valores de Ra_ρ .

correspondem ao valor médio, porém as oscilações que surgem ao longo de x fazem que localmente o valor de Ra seja superior ao valor crítico e a convecção tem origem nestes pontos.

Conforme o número de Rayleigh se distancia do valor crítico, a deformação da interface recebe mais energia e padrões de escoamento extremamente complexos podem surgir, fazendo com que eventualmente o sistema recaia em um escoamento turbulento. Mesmo quando o regime laminar ainda está presente, modos de instabilidade distintos podem atuar na interface e alterar profundamente os campos de velocidade e temperatura. Por exemplo, na Figura 96 é mostrada a presença de uma instabilidade similar à de Rayleigh-Taylor, porém induzida inicialmente pelo movimento convectivo. Os resultados apresentados nesta figura correspondem ao par de fluidos descrito na Tabela 7 (considerando inclusive $k_0 = 1$), para um estado onde $Ra_\rho \approx 1700$ e o número de Rayleigh, avaliado para o estado inicial, é de $Ra \approx 4000$.

Apesar de a análise de estabilidade linear não prever nenhuma alteração no valor de Ra_c em função de Ra_ρ para o caso onde $k_0 = 1$, pode-se observar que a deformação da interface pode ser muito significativa quando a convecção está presente. Inicialmente, o campo de velocidades apresentado na Figura 96(a) mostra a existência de um acoplamento térmico entre as duas camadas, o que é possível neste caso visto que para $k_0 = d_0 = 1$ a condição $Ra^* = 1$ é válida. Esta forma de acoplamento faz com que as forças normais nas duas camadas atuem no sentido de desestabilizar a interface, causando uma grande deformação logo nos instantes iniciais.

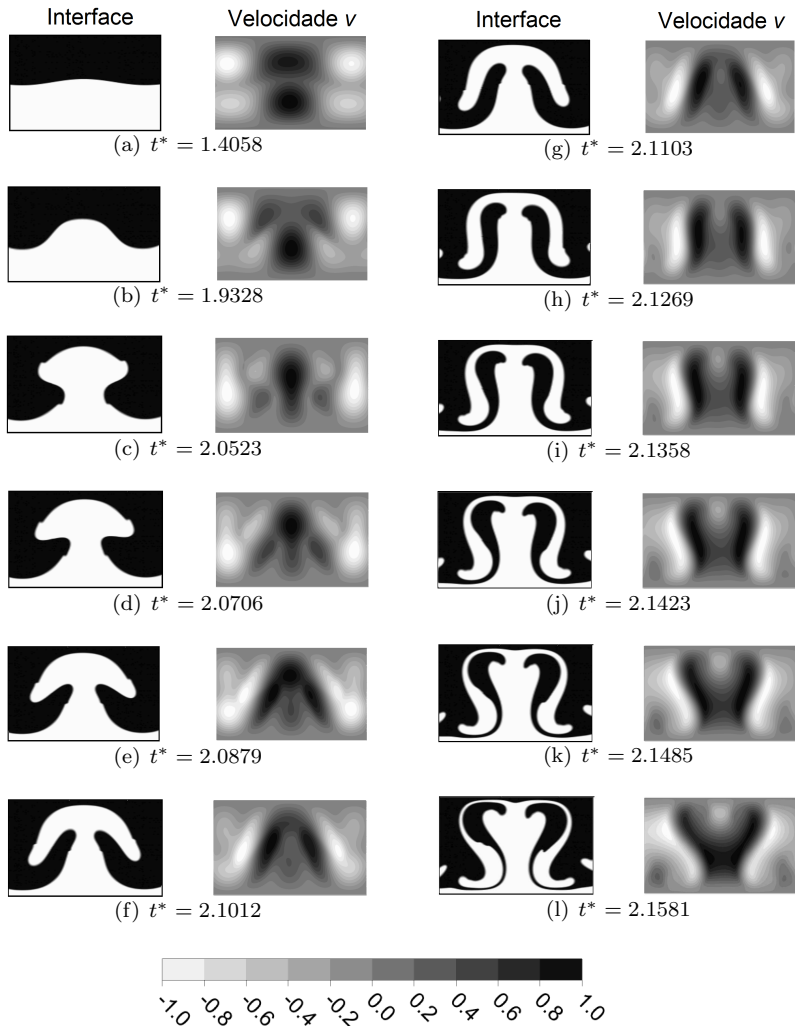


Figura 96: Posição da interface e velocidade vertical para $Ra_\rho \approx 1700$ e $Ra \approx 4000$ mostrando o desenvolvimento de uma instabilidade semelhante à de Rayleigh-Taylor.

Conforme a interface é deformada, a estrutura de duas células convectivas sobrepostas (uma em cada camada) desaparece e uma estrutura mais complexa surge, formada por células que ocupam uma

região maior que a espessura original das camadas (ver Figuras 96(b) e 96(c)). Estas células surgem pois a recirculação em uma das camadas desaparece e a recirculação na outra camada passa a ocupar este espaço, sendo que na região onde $v > 0$ a recirculação na camada superior desaparece e onde $v < 0$ a recirculação na camada inferior desaparece. Durante a formação destas novas células, recirculações menores surgem entre as células adjacentes e induzem o movimento horizontal do fluido, fazendo com que a interface assuma um formato de cogumelo. Cabe lembrar que esta penetração de uma camada na outra, apesar de muito semelhante à estrutura básica observada na instabilidade de Rayleigh-Taylor, não é causada pela diferença de densidade e sim pela própria deformação da interface em função das forças de empuxo.

No entanto, após a formação da estrutura em cogumelo, originam-se regiões onde o fluido mais denso (fluido claro) sobrepõe o fluido menos denso (fluido escuro). A partir deste ponto os modos associados à instabilidade de Rayleigh-Taylor também passam a ser significativos, fazendo com que o fluido mais denso retorne para a parte inferior do sistema, como pode ser observado a partir da Figura 96(e). O fluido descende pela parte lateral da estrutura em cogumelo, pois na região central as forças de empuxo continuam impulsionando o fluido para cima. Conforme mais fluido é deslocado para a parte lateral do cogumelo, o escoamento causado pela diferença de densidade passa a ser mais intenso, como pode ser visto nos perfis de velocidade apresentados na Figura 96(f).

A partir deste momento ocorre uma rápida movimentação descendente de fluido mais denso pelas laterais do sistema acompanhada de uma movimentação ascendente do fluido menos denso na parte central, sendo este movimento causado tanto pelo modo de Rayleigh-Taylor quanto pelo modo de Rayleigh-Bénard. Os instantes de tempo mostrados na segunda coluna (entre as Figuras 96(g) e 96(l)) compreendem uma estreita faixa de tempo, mesmo assim significativas mudanças induzidas por este fenômeno são observadas. Conforme o fluido mais denso se aproxima da parte inferior (mais quente) do sistema, este é aquecido e as forças de empuxo voltam a induzir o movimento ascendente, podendo-se observar o início de novas estruturas em cogumelos próximo a parede inferior para os últimos instantes. O contrário ocorre com o fluido menos denso conforme este se aproxima da parede superior.

Durante a maioria dos instantes apresentados na Figura 96 pode-se ver pequenas oscilações na interface entre os dois fluidos. Estas oscilações são, possivelmente, fruto de alguma instabilidade semelhante à

de Kelvin-Helmholtz, sendo esta condição bastante comum neste tipo de sistema. O comportamento complexo observado nesta figura, resultante da ação conjunta de diversas formas de instabilidade, é um exemplo das estruturas que podem surgir quando a interface é desestabilizada.

Com a exceção de casos onde a deformação da interface é muito grande, os perfis obtidos para a convecção de Rayleigh-Bénard apresentam um comportamento periódico dentro do domínio analisado, justificando o uso das condições de simetria nas extremidades laterais. A seguir serão apresentados resultados para a evolução temporal e distribuição bidimensional para valores de $Re > 0$, onde condições de entrada e saída substituem as condições de simetria.

5.3.2 Convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille Estratificada

A indução de um escoamento paralelo no meio fluido altera a dinâmica de formação das células convectivas, fazendo com que estas sejam deslocadas ao longo da direção x . Anteriormente destacou-se a existência de duas formas principais de arranjo na convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille, os rolos longitudinais e os rolos transversais. Os resultados utilizando a simulação numérica direta empregam uma malha bidimensional, fazendo com que a formação de rolos longitudinais não possa ser avaliada. No entanto, a influência do escoamento paralelo na determinação dos parâmetros críticos para baixos valores de Reynolds não é profundamente alterada pela forma de arranjo das células convectivas. A seguir é apresentada uma análise das características que são alteradas pela presença do escoamento paralelo, sendo primeiramente destacadas as influências sobre o comportamento dinâmico do sistema e em seguida sobre a distribuição espacial das variáveis.

5.3.2.1 Evolução Temporal para $Re > 0$

Assim como para os resultados apresentados anteriormente, as condições iniciais empregadas para a simulação da convecção RBPE correspondem ao estado base, sendo estas condições impostas também na entrada do sistema, ou seja, considera-se que o fluido que entra já possui os perfis de temperatura e velocidade base desenvolvidos. Além

de alterar a distribuição espacial das variáveis, pode-se esperar que a contínua entrada e saída de fluido afete também a evolução temporal do sistema. Na Figura 97 é mostrada a variação temporal do número de Nusselt máximo e da velocidade horizontal u máxima ao longo do tempo para $Re = 5$ e diferentes valores de Ra . Conforme será discutido a seguir, para $Re > 0$ existe uma região de entrada onde não ocorre a formação de células convectivas, o que faz com que o número de Nusselt médio (avaliado ao longo de toda a direção x) não represente bem o comportamento do sistema, sendo por isso o valor máximo empregado. Os valores apresentados na Figura 97(b) para a velocidade máxima são normalizados com base no valor máximo obtido para $Ra = 1386$.

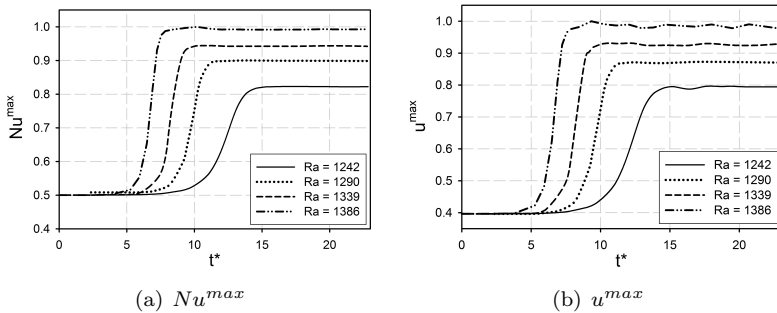


Figura 97: Variação temporal do número de Nusselt máximo e da velocidade u máxima para $Re = 5$ e diferentes valores de Ra .

A evolução temporal do número de Nusselt máximo (Fig. 97(a)) é semelhante ao encontrado para $Re = 0$, sendo necessário um determinado tempo para que a convecção inicie e se desenvolva, a partir do qual o sistema permanece estacionário. Este comportamento também é visto nos campos de velocidade e temperatura, conforme ilustrado na Figura 97(b) para a velocidade horizontal máxima. Repare que o valor inicial para esta variável é diferente de zero, pois corresponde ao valor associado a $Re = 5$ na ausência do movimento convectivo. Nesta figura também fica claro que, especialmente para altos valores de Ra , após ser atingido o estado onde a convecção está completamente desenvolvida, os valores máximos para as variáveis oscilam em torno de um valor médio. Este comportamento periódico ocorre devido à contínua formação e remoção das células convectivas. Apesar de não ser visível na Figura 97(a) devido à escala empregada, o número de Nusselt máximo também oscila em torno de um valor médio para

tempos elevados.

A amplitude desta oscilação não varia significativamente com o número de Reynolds, como pode ser visto na Figura 98. A presença do escoamento cisalhante, no entanto, influencia dois importantes aspectos das curvas. Primeiramente, ocorre uma diminuição no número de Nusselt máximo conforme o número de Reynolds aumenta (ver Figura 98(a)), sendo esta uma consequência da estabilização do escoamento provocada pelo escoamento paralelo, ou seja, para elevados valores de Re o sistema encontra-se mais próximo ao ponto crítico. A diminuição na intensidade do movimento convectivo também faz com que o aumento na velocidade vertical máxima induzido pela convecção natural seja menor. Apesar disso, conforme observado na Figura 98(b), o valor de u^{max} é superior conforme for maior o número de Reynolds, pois a redução na intensidade da recirculação causada pelo aumento em Re é muito pequena em comparação com a velocidade associada ao escoamento base.

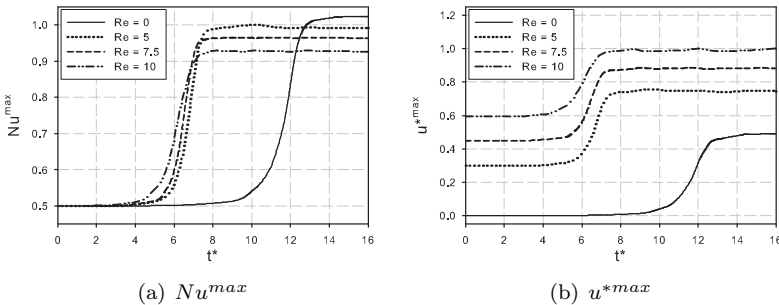


Figura 98: Variação temporal do número de Nusselt máximo e da velocidade u máxima para $Ra \approx 1386$ e diferentes valores de Re .

A segunda característica das curvas alterada pelo valor de Re é o tempo onde a convecção natural inicia, ocorrendo de forma geral uma redução conforme Re aumenta. Porém, para todos os valores de $Re > 0$ este tempo é muito próximo, enquanto que para $Re = 0$ ocorre um significativo aumento. O motivo pelo qual isto ocorre está provavelmente relacionado com a presença de perturbações no escoamento para $Re > 0$ que não existem quando o escoamento paralelo é desconsiderado. Conforme comentado anteriormente, para que ocorra a formação das células convectivas (instabilidade), é necessário que uma determinada perturbação cresça e leve o sistema a um outro estado. Além de

adicionar novas formas de perturbação, o aumento na intensidade do escoamento paralelo faz com que estas perturbações aumentem mais rapidamente e, como consequência, a instabilidade é mais facilmente atingida.

Devido à existência do escoamento paralelo, para que as perturbações permaneçam no interior do sistema pelo tempo necessário para que a instabilidade se desenvolva, é preciso que o domínio avaliado possua um determinado comprimento mínimo. Conforme será melhor discutido adiante, este comprimento é função tanto de Re quanto de Ra . Na Figura 99 é mostrada a evolução temporal do número de Nusselt local para $Re = 5$ e $Ra = 1243$, onde pode ser acompanhado o surgimento e o crescimento da perturbação que leva o sistema à instabilidade. Para as simulações envolvendo $Re > 0$, caso não seja mencionado o contrário, empregou-se uma malha numérica com um comprimento 30 vezes maior que a altura ($L = 30h$), porém para manter os mesmos parâmetros adimensionais empregados para $Re = 0$ os resultados são apresentados em função da mesma distância $x^* = x/(10h)$.

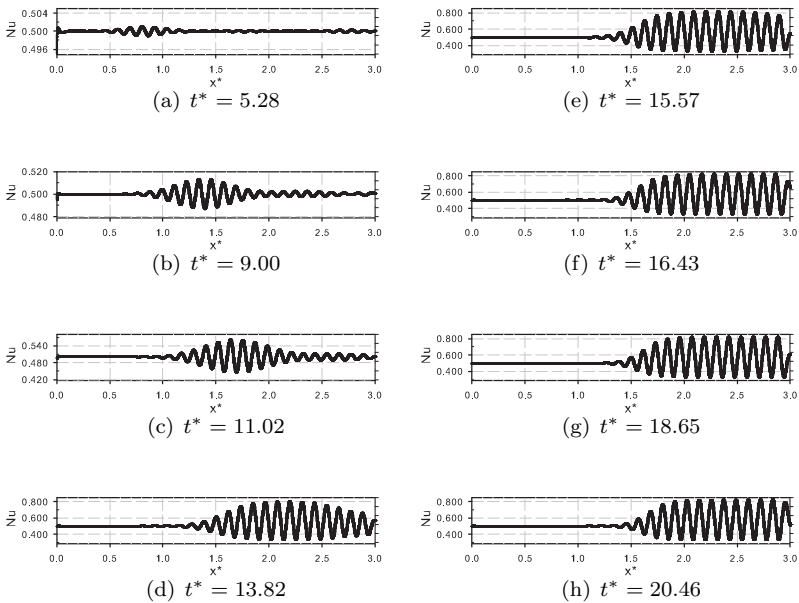


Figura 99: Evolução temporal do número de Nusselt local para $Re = 5$ e $Ra = 1243$.

Para os instantes de tempo iniciais, pequenas perturbações surgem ao longo do sistema, conforme pode ser visto na Figura 99(a). Estas perturbações ocorrem em diversos pontos do domínio, porém através da análise de diversos casos pode-se concluir que existe uma tendência de as perturbações surgirem mais próximas à entrada conforme o número de Rayleigh aumenta e o número de Reynolds diminui. À medida que a perturbação inicial cresce o escoamento paralelo faz com que esta seja deslocada ao longo da direção x , como pode ser observado nas Figuras 99(b) e 99(c). Isto faz com que a perturbação fique restrita à uma região $x^* > x_c$, onde x_c representa o ponto onde surge a perturbação. Para a curva apresentada na Figura 99(a), $x_c \approx 0.5$.

Quando a perturbação se propaga por uma determinada distância, esta atinge uma amplitude máxima e a partir deste ponto permanece constante ao longo de todo o domínio. O processo de formação e remoção das células convectivas é intermitente, por isso as curvas continuam a se deslocar ao longo do tempo, porém o ponto de formação e a taxa de crescimento das recirculações não é alterado. Apesar de não ser observado na Figura 99 devido à diferença nas escalas associadas, conforme o tempo avança o valor de x_c aumenta gradativamente, ou seja, as perturbações passam a surgir para maiores valores de x^* . No entanto, para o caso apresentado nesta figura, a intensidade das recirculações formadas é suficiente para auto-sustentar a formação de células convectivas, fazendo com que o sistema atinja um estado estacionário onde a convecção natural é relevante.

Como visto na figura anterior, existe uma distância necessária para que a perturbação se desenvolva e as células convectivas formadas atinjam um estado permanente. Conforme o número de Rayleigh se aproxima do valor crítico esta distância rapidamente aumenta, fazendo com que para $Ra = Ra_c$ seja necessário avaliar o comportamento da perturbação através de uma distância infinita. Este paradoxo faz com que para valores de Ra próximos ao valor crítico e elevados valores de Re um comportamento distinto ocorra, sendo esse representado na Figura 100 onde são mostradas as curvas do número de Nusselt local para diversos tempos considerando $Re = 10$ e $Ra = 1338$. Os limites onde este comportamento é observado serão discutidos na sequência. Para estes casos, utilizou-se uma malha com comprimento 60 vezes maior que a altura.

Para os instantes de tempo iniciais (Figura 100(a)), o comportamento é semelhante ao observado anteriormente, havendo o surgimento de pequenas perturbações ao longo do sistema. Neste caso, o domínio avaliado é duas vezes maior que o considerado na Figura 99, podendo-

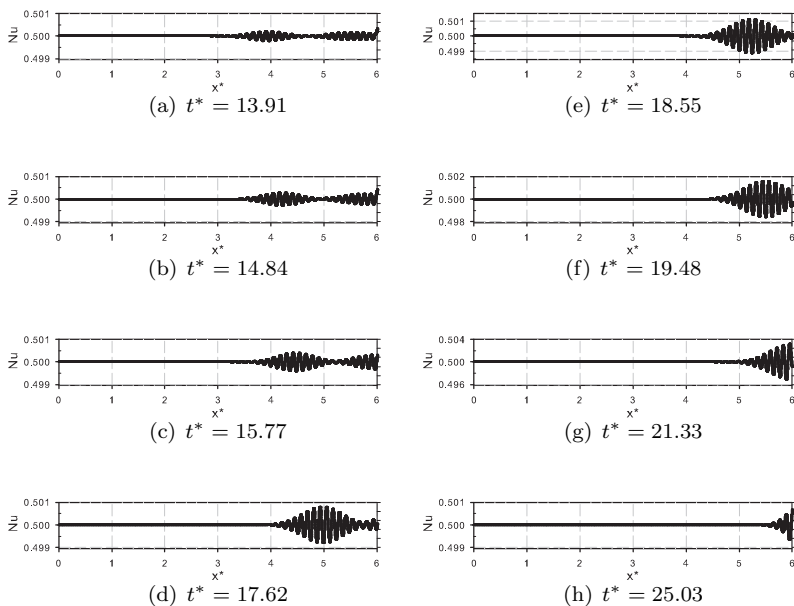


Figura 100: Evolução temporal do número de Nusselt local para $Re = 10$ e $Ra = 1338$.

se ver que as perturbações surgem inicialmente para valores de $x^* > 3$, justificando a necessidade de avaliar uma maior distância. Também como no caso anterior, com o avanço do tempo a amplitude das perturbações aumenta ao longo de x^* , havendo também um deslocamento no ponto crítico x_c devido ao escoamento paralelo.

Apesar de haver um aumento na amplitude, dentro do domínio avaliado não observou-se a formação de um regime permanente como no caso anterior. Conforme as perturbações deixam o sistema, o ponto x_c eventualmente atinge a extremidade do domínio e a partir deste instante nenhuma perturbação é observada no interior do sistema. Caso uma perturbação externa for forçada (uma variação nas condições de contorno, por exemplo), a instabilidade volta a ser formar em algum ponto, sendo posteriormente removida da mesma forma como visto na Figura 100. Testes realizados em malhas com maior razão de aspecto (até $L = 120h$) exibem uma evolução temporal semelhante.

Este comportamento é similar ao descrito anteriormente como instabilidade convectiva, onde a instabilidade fica restrita a uma região

do espaço que é eventualmente removida pelo escoamento paralelo. No entanto, não pode-se garantir que este caso corresponda a esta forma de instabilidade pois para isso seria necessário avaliar todas as perturbações possíveis em um sistema infinitamente longo. A seguir serão apresentados resultados para a distribuição espacial em regime permanente para diversos valores de Re e Ra , onde será visto que o comportamento semelhante à instabilidade convectiva é restrito a uma pequena faixa de valores próximos ao ponto crítico, onde, como visto, a simulação numérica direta não apresenta bons resultados.

5.3.2.2 Distribuição espacial para $Re > 0$

Além de alterar a dinâmica de formação e crescimento das perturbações, a presença do escoamento paralelo também afeta os perfis obtidos para o regime permanente. A principal diferença na distribuição espacial das variáveis para $Re > 0$ em comparação com $Re = 0$ é a existência de uma região próxima à entrada onde o escoamento base não é alterado pela presença de perturbações. A variação no tamanho desta região em função do número de Rayleigh pode ser facilmente observada na Figura 101, onde são apresentadas as curvas do número de Nusselt local para $Re = 5$ e diversos valores de Ra . Estas curvas correspondem ao estado permanente obtido após o desenvolvimento completo das perturbações.

O número de Rayleigh crítico obtido através da análise de estabilidade linear para $Re = 5$ é de $Ra_c = 1112.7$, de modo que a curva apresentada na Figura 101(a) já está consideravelmente acima do ponto crítico. Mesmo assim, pode-se ver que conforme o sistema se distancia do ponto crítico ocorre uma rápida redução na região próxima à entrada onde o estado base é mantido, ou seja, ocorre uma redução no valor de x_c . Para elevados valores de Ra , como visto na Figura 101(f), a perturbação ocorre praticamente na entrada do sistema ($x_c \approx 0$). Além da alteração no valor de x_c , o aumento no número de Rayleigh, como esperado, causa um gradativo incremento no valor de Nu devido ao aumento na intensidade da convecção.

Além do número de Rayleigh, o valor de Re também afeta a dimensão da região onde o estado base é mantido. Na Figura 102 são mostradas curvas de Nusselt local para $Re = 10$ e diferentes valores de Ra . Observe que os valores de Ra apresentados na primeira coluna da Figura 102 correspondem aos mesmos valores apresentados na segunda coluna da Figura 101 para $Re = 5$. Comparando-se estas curvas fica

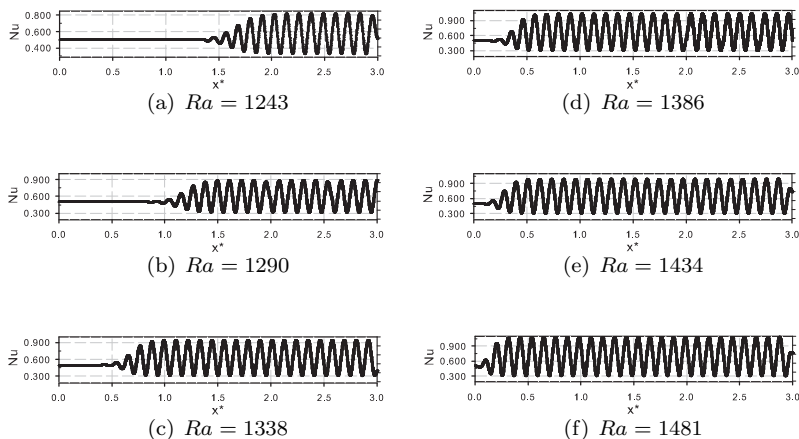


Figura 101: Número de Nusselt local para $Re = 5$ e diferentes valores de Ra .

claro que o aumento no valor de Re causa uma grande mudança no formato das curvas, havendo um aumento no valor de x_c . Os resultados para $Re = 7.5$ apresentam um valor de x_c intermediário, mostrando que esta alteração é diretamente proporcional ao número de Reynolds. Para maiores valores de Ra a diminuição em x_c continua ocorrendo, porém mesmo para $Ra = 1626$ ainda existe uma significativa região onde o escoamento base é mantido.

Nos resultados apresentados anteriormente foi utilizada a variação no número de Nusselt local para exemplificar a influência dos números de Rayleigh e Reynolds no desenvolvimento e distribuição das instabilidades ao longo do domínio. Entretanto, as demais variáveis também são alteradas, com os perfis na região onde a convecção já está completamente desenvolvida semelhantes aos obtidos para $Re = 0$. Isto pode ser visto nas Figuras 103 e 104, onde são apresentados os perfis bidimensionais para a velocidade vertical e para o desvio da temperatura, respectivamente, para diferentes valores de Re . Estes resultados foram obtidos em uma malha onde $L = 30h$, no entanto para facilitar a visualização os perfis foram redimensionalizados em uma escala 1:2 (x:y).

Os perfis de velocidade vertical para $Re = 5$ (Figura 103(a)) são muito parecidos com os perfis para $Re = 0$, havendo somente uma pequena região na entrada onde as recirculações não estão completamente

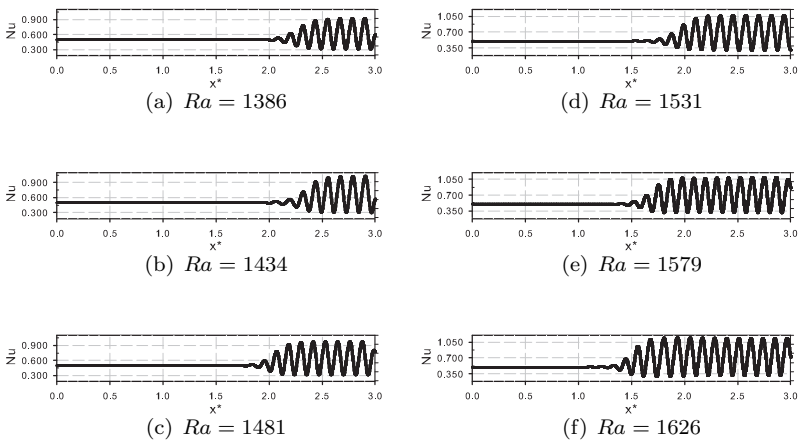


Figura 102: Número de Nusselt local para $Re = 10$ e diferentes valores de Ra .

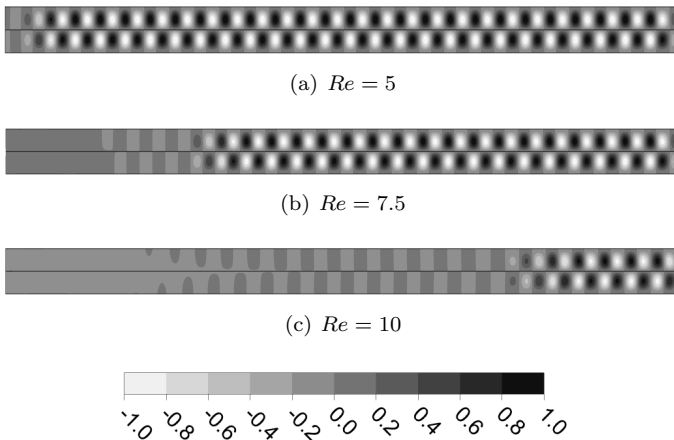


Figura 103: Perfis de velocidade vertical para $Ra \approx 1481$.

desenvolvidas. Com o acréscimo no número de Reynolds esta região aumenta, sendo que para $Re = 7.5$ e $Re = 10$ existem três regiões distintas: uma região próxima à entrada onde o escoamento base é mantido, uma região intermediária onde as perturbações aumentam e uma região onde as recirculações estão desenvolvidas. Estes perfis estão

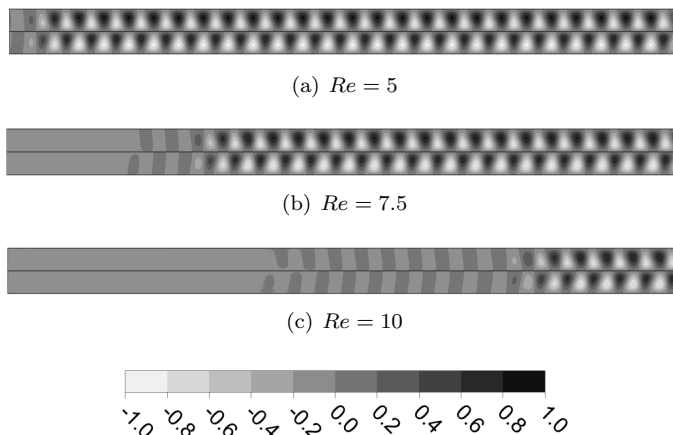


Figura 104: Perfis de desvio da temperatura para $Ra \approx 1481$.

em acordo com discutido anteriormente com base no número de Nusselt local. Apesar das diferenças nos perfis em função do valor de Re , a magnitude da velocidade para os três casos é semelhante.

O desvio da temperatura em relação ao estado base está diretamente relacionado com a existência de uma velocidade vertical, de modo que os perfis apresentados na Figura 104 apresentam as mesmas características gerais que os apresentados na Figura 103. Para elevados valores de Re os perfis para o desvio da temperatura mostram uma pequena distorção em comparação com os obtidos para $Re = 0$. Como discutido anteriormente, a velocidade horizontal u causa a variação destes perfis ao longo da direção x . Considerando que no interior do domínio assume-se um perfil parabólico para u , a velocidade do escoamento base na interface é superior, o que causa um maior deslocamento nesta região.

A maioria das características das curvas mostradas anteriormente diferenciam-se dos perfis para $Re = 0$ devido à malha numérica avaliada possuir uma dimensão finita. No entanto, mesmo quando somente a região completamente desenvolvida é avaliada, importantes atributos do sistema são alterados pela presença do escoamento paralelo. Na Figura 105 é mostrada a dependência do número de Nusselt máximo e da velocidade horizontal máxima em função do número de Rayleigh para diversos valores de Reynolds.

Para baixos valores de Ra , onde ocorre transferência de calor somente por condução, o número de Nusselt máximo (Figura 105(a))

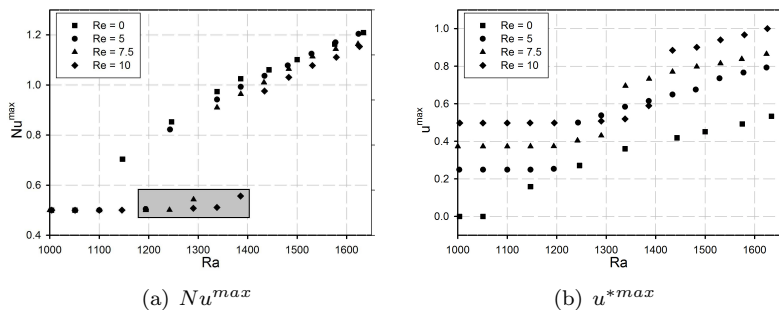


Figura 105: Valores máximos para Nu e velocidade horizontal em função de Ra .

para todos os valores de Re é igual a 0.5, sendo este o valor correspondente ao estado base. Para $Re = 0$, após o valor crítico ($Ra_c \approx 1102.8$) ser atingido, o valor de Nu^{max} gradativamente aumenta conforme o valor de Ra aumenta. A região destacada em cinza representa os pontos onde convecção ocorre de forma semelhante à instabilidade convectiva, conforme descrito anteriormente. Pode-se ver que o valor de Nu^{max} para estes pontos, apesar de serem superiores ao valor associado ao estado base, são muito inferiores aos obtidos para maiores valores de Ra .

Na região onde as células convectivas estão completamente desenvolvidas (pontos onde $Nu^{max} > 0.6$), a dependência do valor de Nusselt com Ra não é exatamente linear. De modo geral, a transferência de calor por convecção é mais intensa para menores valores de Re , no entanto existem pontos onde Nu^{max} para $Re = 5$ é superior ao valor obtido para $Re = 0$. Para os pontos apresentados na Figura 105(a), a seguinte relação representa satisfatoriamente a dependência dos valores:

$$Nu^{max} - Nu^{cond} \approx \left(\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \right)^{1/2} \quad (5.10)$$

onde Nu^{cond} representa o número de Nusselt associada à condução (= 0.5 neste caso) e o valor utilizado para Ra_c é função do número de Reynolds e poder ser obtido através da análise linear. Esta relação mostrou-se válida para todos os valores de Re , desde que sejam considerados somente os pontos onde as células convectivas estão completamente desenvolvidas. Na Figura 106 são apresentados os valores

obtidos com esta relação para os pontos mostrados na Figura 105(a). A reta $x = y$ é incluída no gráfico para referência. Pode-se ver que os pontos se adequam bem à equação.

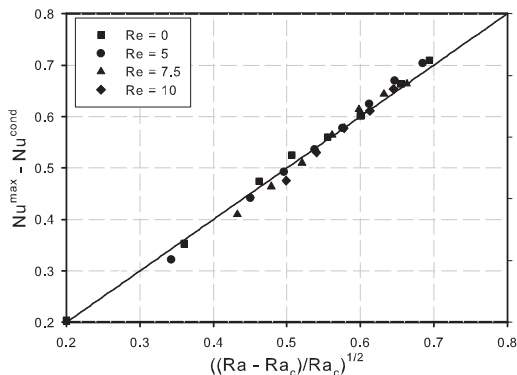


Figura 106: Relação entre número de Rayleigh e número de Nusselt máximo.

Os pontos para a variação da velocidade horizontal máxima em função de Ra , mostrados na Figura 105(b), apresentam um comportamento semelhante ao número de Nusselt máximo. Para baixos valores de Ra a velocidade corresponde à velocidade máxima do estado base e conforme a convecção se torna mais intensa a velocidade máxima gradativamente aumenta. A presença da convecção semelhante à instabilidade convectiva também pode ser observada neste gráfico, sendo que para $Re > 0$ alguns pontos onde a velocidade máxima é levemente superior ao valor do estado base podem ser vistos. A presença de pontos onde a velocidade horizontal é maior que a velocidade do estado base é necessária para a existência de células convectivas. Como consequência, regiões onde u é menor que o valor do estado base também ocorrem. Para elevados valores de Ra , a velocidade induzida pela convecção natural pode ser suficiente até mesmo para gerar pontos onde $u^* < 0$.

Considerações finais

No presente capítulo foram avaliados resultados obtidos através da simulação numérica direta das equações governantes através de técnicas de fluidodinâmica computacional. Esta abordagem permite avaliar a convecção RBPE sem a necessidade de impor restrições nos ter-

mos não-lineares ou na dependência das variáveis com a direção x em termos de modos normais. Além disso, a utilização do método do volume de fluido permite obter o formato da interface como parte da solução do problema, possibilitando a análise de casos onde a deformação da interface é significativa.

No entanto, a utilização da simulação direta para a determinação dos pontos críticos onde a convecção inicia não mostrou-se viável. Devido à forma como as perturbações surgem e se propagam no tempo e no espaço, inconsistências surgem próximas ao valor crítico. Por exemplo, mesmo quando somente a convecção natural é considerada ($Re = 0$), seria necessário avaliar o sistema por um tempo infinito para que o regime permanente fosse alcançado. Para $Re > 0$ as dimensões da geometria avaliada também afetam o sistema, havendo casos onde as perturbações são removidas antes de desenvolverem células convectivas estacionárias.

Apesar das dificuldades associadas à esta forma de análise, a comparação entre os resultados obtidos com a análise linear e com a simulação direta apresentam uma excelente concordância, tanto em relação aos limites de estabilidade quanto em relação aos perfis de velocidade e temperatura. Esta concordância obtida com duas formas de análise distintas incrementa a confiabilidade dos resultados, mostrando que apesar das restrições presentes a análise linear é capaz de representar o comportamento do sistema, sendo até mesmo mais adequada para determinar os limites de estabilidade do que a simulação direta.

6 CONCLUSÃO

*“S’io avessi, lettor, più lungo spazio
da scrivere, i’ pur cantere’ in parte
lo dolce ber che mai non m’avria sazio...”*

Dante Alighieri, Divina Commedia, Purgatorio XXXIII, 136-138

A convecção de natural entre placas horizontais com diferentes temperaturas, também conhecida como convecção de Rayleigh-Bénard, é um dos processos mais importantes e estudados na área da transferência de calor. Apesar disto, a influência do escoamento paralelo sobre este processo ainda é pouco entendida, principalmente quando existem mais de uma fase no sistema. No presente trabalho foram avaliadas as principais características da estabilidade da convecção natural em um meio composto por dois fluidos imiscíveis sobrepostos na presença de um gradiente de pressão que induz o escoamento horizontal. Devido às diferentes características englobadas, este sistema é chamado de convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada (RBPE).

O principal aspecto analisado foi o número de Rayleigh crítico necessário para que a convecção natural inicie, sendo isto investigado através de duas abordagens numéricas distintas. Primeiramente, utilizou-se métodos de análise linear onde modos normais são empregados para representar a dependência das variáveis ao longo do tempo e da posição horizontal. A utilização deste método para a análise da estabilidade de escoamentos é uma prática muito empregada, tendo sido consolidada devido principalmente aos trabalhos de Chandrasekhar (1961) e outros autores. O segundo método utilizado foi a simulação numérica direta das equações governantes através de técnicas de fluidodinâmica computacional. Esta metodologia tem sido largamente empregada na análise de escoamentos nas últimas décadas devido a sua versatilidade e capacidade de gerar resultados em acordo com observações experimentais.

De modo geral a análise linear mostrou-se mais adequada para determinar os pontos críticos onde a convecção inicia, enquanto que a simulação direta é capaz de fornecer melhores resultados para casos onde a convecção natural ocorre de forma mais intensa e portanto os termos não-lineares desprezados na análise linear são mais significativos. Apesar disto, os resultados obtidos com as duas formas de análise são similares, sendo ambas adequadas para determinar a dependência da estabilidade com diversos parâmetros físicos.

A principal dificuldade na análise da estabilidade da convecção RBPE é, de fato, o grande número de parâmetros físicos que governam o sistema. Através da modelagem matemática empregada foram identificados 12 parâmetros, sendo 6 destes relações entre as propriedades físicas dos fluidos nas duas camadas e os outros 6 números adimensionais relacionados com as condições de contorno adotadas e com as propriedades da interface. Dependendo das condições aplicadas, estes números adimensionais podem definir sistemas onde a instabilidade é governada por modos muito distintos, como por exemplo os modos de cisalhamento para altos valores de Re , os gerados por gradiente de tensão interfacial para altos Ma ou os associados ao empuxo para elevados valores de Ra . Devido à dificuldade em avaliar a influência das demais propriedades sobre todos estes modos, restringiu-se a análise a uma pequena faixa no espectro dos parâmetros, em especial para baixos valores de Re e valores de Ra e Ma próximos ao valor crítico.

Em relação às propriedades físicas dos fluidos, apesar de haverem 6 propriedades que afetam diretamente a estabilidade, os resultados mostram que as principais alterações na forma como a convecção natural inicia estão relacionadas com a razão entre os números de Rayleigh avaliados em cada uma das camadas. Quando esta razão for muito próxima ao valor unitário, a instabilidade pode surgir simultaneamente nas duas camadas na forma de células com o mesmo sentido de recirculação, sendo este arranjo conhecido como acoplamento térmico. No entanto, quando a razão entre os valores de Ra for consideravelmente diferente de 1, a instabilidade surge primeiramente em uma camada e esta auxilia a formação da recirculação na camada adjacente, originando um sistema com células contra-rotativas. Este arranjo é conhecido como acoplamento viscoso. Em casos onde os valores de Ra forem muito distintos, a recirculação em uma das camadas pode ser totalmente induzida pelo arraste causado pela outra camada, caracterizando o acoplamento por arraste.

As perturbações associadas a cada um destes modos possuem taxas de crescimento distintas, de modo que dependendo dos valores adotados para determinados parâmetros, cenários onde ocorre uma alteração no modo mais instável podem surgir. Usualmente isto origina um sistema oscilatório para uma faixa de perturbações específicas, sendo a transição causada por uma bifurcação de Hopf. A existência de estados oscilatórios para a convecção de Rayleigh-Bénard é um resultado bem conhecido, porém, para todos os casos avaliados no presente trabalho, os estados oscilatórios desaparecem para qualquer valor de $Re > 0$. Este resultado mostra que o surgimento de estados osci-

latórios depende de um sensível equilíbrio entre diferentes modos de estabilidade, e este equilíbrio é alterado pela presença do escoamento paralelo. Por exemplo, o aumento no valor de Re estabiliza de forma mais intensa o acoplamento térmico do que o viscoso.

De modo geral, o aumento em Re atua no sentido de estabilizar o sistema, com uma notável exceção surgindo para perturbações com baixo comprimento de onda em sistemas onde o efeito termocapilar é intenso. A presença deste efeito, mensurada através do número de Marangoni, aumenta de forma considerável a complexidade do problema por introduzir um segundo meio de formação de células convectivas. Além disso, a interação do efeito termocapilar com as forças de empuxo afeta a taxa de crescimento dos modos mais instáveis, com o aumento em Ma causando na maioria dos casos uma redução acentuada no valor crítico do número de Rayleigh. Também neste caso, uma distinta exceção surge quando a espessura da camada superior é maior que da camada inferior, onde para baixos valores de Re a presença do efeito termocapilar inicialmente estabiliza o modo mais instável, causando, no entanto, uma perda de estabilidade para elevados valores de Ma para qualquer Re .

Por alterar o balanço de forças na interface, o efeito termocapilar também pode levar à deformação da interface, dependendo da intensidade das forças restauradoras (relacionadas com a diferença de densidade e tensão interfacial). Além do efeito termocapilar, mudanças na inclinação dos perfis de velocidade e temperatura base também podem causar a deformação. A existência de uma diferença de densidade entre as camadas, sendo a densidade da camada inferior maior, é necessária para evitar a instabilidade pelos modos de Rayleigh-Taylor. Mesmo quando esta condição for válida, na ausência de tensão interfacial, conforme a densidade das camadas se aproxima do mesmo valor a interface passa a perder a estabilidade e deformações significativas podem ocorrer. O formato da interface pode ser muito bem captado com as técnicas de simulação numérica direta, onde o método do volume de fluido foi utilizado. Os resultados mostram que conforme a diferença $Ra - Ra_c$ aumenta, a deformação da interface passa a ser mais intensa e a aproximação linear em termo dos modos normais não é mais válida, apesar desta representar bem o formato da interface próximo ao ponto crítico.

Finalmente, fica evidente a grande variedade de estados que podem surgir na convecção de Rayleigh-Bénard-Poiseuille estratificada. A complexidade matemática e o grande número de parâmetros físicos envolvidos dificultam a formulação de modelos que representem o sis-

tema para qualquer situação, limitando a análise a uma determinada faixa de valores para os parâmetros governantes. No presente trabalho, alguns dos aspectos mais relevantes à estabilidade deste sistema foram esclarecidos, em especial em relação aos valores críticos para o início da convecção natural e o arranjo adotado pelo sistema quando isto ocorre.

REFERÊNCIAS

AGRAWAL, S. K.; WASAN, D. T. The effect of interfacial viscosities on the motion of drops and bubbles. *Chem. Engineering Journal*, v. 18, p. 215 – 223, 1979.

ALESCIO, G. *Chebyshev spectral method for incompressible viscous flow with boundary layer control via suction or blowing*. Tese (PhD Thesis) — Massachusetts Institute of Technology, 2006.

ALPBAZ, M.; BILGESU, A.; TUTKUN, O. The measurement of interfacial tension by drop-weight method. *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara*, v. 34, p. 103–112, 1988.

ANDEREK, C. D.; COLOVAS, P. W.; DEGEN, M. M.; RENARDY, Y. Y. Instabilities in two layer Rayleigh-Bénard convection: Overview and outlook. *Int. J. of Engineering Science*, v. 36, p. 1451 – 1470, 1998.

ANSYS. *ANSYS Fluent Documentation*. [S.l.], 2011.

BARLETTA, A.; NIELD, D. A. On the Rayleigh-Bénard-Poiseuille problem with internal heat generation. *Int. J. of Thermal Sciences*, v. 57, p. 1 – 16, 2012.

BATTLES, Z.; TREFETHEN, L. N. An extension of matlab to continuous functions and operators. *SIAM J. of Sci. Computation*, v. 25, n. 5, p. 1743 – 1770, 2004.

BAZÁN, F. S. V. Chebyshev pseudospectral method for computing numerical solution of convection-diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, v. 200, p. 537 – 546, 2008.

BEKEZHANOVA, V. B. Convective instability of Marangoni-Poiseuille flow under a longitudinal temperature gradient. *J. of Appl. Mechanics and Technical Physics*, v. 52, n. 1, p. 74 –81, 2011.

BÉNARD, H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. Gén. Sci. Pures et Appl.*, v. 11, p. 254 – 266, 1900.

BINGHONG, Z.; QIUSHENG, L.; ZEMEI, T. Rayleigh-Marangoni-Bénard instability in two-layer fluid system. *Acta Mechanica Sinica*, v. 20, n. 4, p. 366 – 373, 2004.

BIRIKH, R. V.; BRISKMAN, V. A.; VELARDE, M. G.; LEGROS, J. C. *Liquid Interfacial Systems: Oscillations and Instability*. New York: Marcel Dekker, 2005.

BOOMKAMP, P. A. M.; MIESEN, R. H. M. Classification of instabilities in parallel two-phase flow. *Int. J. of Multiphase Flow*, v. 22, p. 67 – 88, 1996.

BOYER, D.; NALS, J. V. Grain boundary pinning and glassy dynamics in stripe phases. *Physical Review E*, v. 65, p. 046119, 2002.

BRENNEN, C. E. *Fundamentals of Multiphase Flow*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

BUSSE, F. H. On the aspect ratios of two-layer mantle convection. *Physics of the Earth and Planetary Interior*, v. 24, p. 320 – 324, 1981.

CAMPBELL, T. A.; KOSTER, J. N. Modeling of liquid encapsulated galium melts. *Acta Astronautica*, v. 35, n. 12, p. 913 – 922, 1995.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. [S.l.]: Springer, 2006.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. *Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer, 2007.

CAO, Q.; SARKAR, K.; PRASAD, A. J. Direct numerical simulations of two-layer viscosity-stratified flow. *Int. J. of Multiphase Flow*, v. 30, p. 1485 – 1508, 2004.

CAO, Q.; VENTRESCA, A. L.; PRASAD, K. R. S. A. K. Instability due to viscosity stratification downstream of a centerline injector. *Canadian J. of Chemical Engineering*, v. 81, p. 913 – 922, 2003.

CARDIN, P.; NATAF, H. C.; DEWOST, P. Thermal coupling in layered convection: evidence for an interface viscosity control for mechanical experiments and marginal stability analysis. *J. of Physics II*, v. 1, p. 599 – 622, 1991.

CARRIÈRE, P.; MONKEWITZ, P. A. Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection. *J. of Fluid Mechanics*, v. 384, p. 243 – 262, 1999.

CASTRO, M. S.; PEREIRA, C. C.; SANTOS, J. N.; RODRIGUEZ, O. M. H. Geometrical and kinematic properties of interfacial waves in stratified oil–water flow in inclined pipe. *Experimental Thermal and Fluid Science* 3, v. 37, p. 171 – 178, 2012.

CHANDRASEKHAR, S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. [S.l.]: Clarendon Press, 1961.

CHANG, M.; YU, C.; LIN, T. Changes of longitudinal vortex roll structure in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: an experimental study. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 40, n. 2, p. 347 – 363, 1997.

CHANG, M.; YU, C.; LIN, T. Flow visualization and numerical simulation of transverse and mixed vortex roll formation in mixed convection of air in a horizontal flat duct. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 40, n. 8, p. 1907 – 1922, 1997.

CHARRU, F. *Hydrodynamic Instabilities*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.

CHEN, S. W.; SHU, D. S.; LIR, J. T.; LIN, T. F. Buoyancy driven vortex flow and its stability in mixed convection of air through a blocked horizontal flat duct heated from below. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 49, p. 3655 – 3669, 2006.

CHEN, T. S.; JOSEPH, D. D. Subcritical bifurcation of plane Poiseuille flow. *J. of Fluid Mechanics*, v. 58, p. 337–351, 1973.

CHENG, T. C.; LIR, J. T.; LIN, T. F. Stationary transverse rolls and U-rolls in limiting low Reynolds number mixed convective air flow near the convective threshold in a horizontal flat duct. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 45, p. 1211 – 1227, 2002.

CLEVER, R. M.; BUSSE, F. Instabilities of longitudinal rolls in the presence of Poiseuille flow. *J. of Fluid Mechanics*, v. 229, p. 517 – 529, 1991.

CROON, M. H. J. M. de; GILING, L. J. Chemical boundary layers in CVD. *J. Electrochemical Society*, v. 137, n. 9, p. 2867 – 2876, 1990.

CSEREPES, L.; RABINOWICZ, R. Gravity and convection in a two-layer mantle. *Earth and Planetary Science Letters*, v. 76, p. 193 – 207, 1985.

DARIGOL, O. *Worlds of Flow—A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. [S.l.]: Oxford University Press, 2005.

DAVILLE, A. Two-layer thermal convection in miscible viscous fluids. *J. of Fluid Mechanics*, v. 379, p. 223 – 253, 1999.

DAVIS, S. H. Convection in a box: linear theory. *J. of Fluid Mechanics*, v. 30, p. 465 – 478, 1967.

DECROIX, D. S.; LIN, Y. L.; SCHOWALTER, D. G. Cellular convection embedded in the convective planetary boundary layer surface layer. *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 67, p. 378 – 401, 1997.

DEISSLER, R. J. The convective nature of instability in plane Poiseuille flow. *Physics of Fluids*, v. 30, p. 2303 – 2305, 1987.

DRAZIN, P. G. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics).

DRISCOLL, T. A.; BORNEMANN, F.; TREFETHEN, L. N. The Chebop system for automatic solution of differential equations. *BIT Numerical Mathematics*, v. 48, p. 701 – 723, 2008.

DURST, F. *Fluid Mechanics: An Introduction to the Theory of Fluid Flows*. [S.l.]: Springer, 2008.

DYKE, M. van. *An Album of Fluid Motion*. [S.l.]: Parabolic Press, 1982.

EVANS, G. Thermally unstable convection with applications to chemical vapor deposition channel reactors. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 36, n. 11, p. 2769 – 2781, 1993.

F-CHART SOFTWARE. *Engineering Equation Solver library*. 6.883. ed. [S.l.], 2003.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introduction to Fluid Mechanics*. 6th. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2004.

FUDYM, O.; PRADÈRE, C.; BATSALE, J. C. An analytical two-temperature model for convection–diffusion in multilayered systems: Application to the thermal characterization of microchannel reactors. *Chem. Engineering Science*, v. 62, p. 4054 – 4064, 2007.

FUJIMURA, K.; KELLY, R. E. Stability of unstably stratified shear flow between parallel plates. *Fluid Dynamics Research*, p. 281 – 292, 1988.

GETLING, A. V. *Rayleigh-Bénard Convection: Structures and Dynamics*. [S.l.]: World Cientific Publishing, 1998. (Advanced Series in Nonlinear Dynamics, v. 11).

GHEORGHIU, C. I. *Spectral Methods for Differential Problems*. Cluj-Napoca: "T. Popoviciu" Institute of Numerical Analysis, 2007.

GONZALEZ, M. A. M.; FRIGAARD, I. A.; NOUAR, C. Nonlinear stability of a visco-plastically lubricated viscous shear flow. *J. of Fluid Mechanics*, v. 506, p. 117 – 146, 2004.

GRANDJEAN, E. *Experimental Investigation into Localized Instabilities of Mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille Convection*. Tese (Doutorado) — École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2008.

GRANDJEAN, E.; MONKEWIT, P. A. Experimental investigation into localized instabilities of mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection. *J. of Fluid Mechanics*, v. 640, p. 401 – 419, 2009.

HOLLAND, F. A.; BRAGG, R. *Fluid Flow for Chemical Engineers*. 2^a. ed. London: Arnold, 1995.

HONDA, S. Numerical analysis of layered convection - marginal stability and finite amplitude analyses. *Bull. of the Earthquake Research Institute*, v. 57, p. 273 – 302, 1982.

HOOPER, A. P.; BOYD, W. G. C. Shear-flow instability at the interface between two viscous fluids. *J. of Fluid Mechanics*, v. 128, p. 507 – 528, 1983.

HOOPER, A. P.; BOYD, W. G. C. Shear-flow instability due to a wall and a viscosity discontinuity at the interface. *J. of Fluid Mechanics*, v. 179, p. 201 – 225, 1987.

HUERRE, P.; MONKEWITZ, P. A. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. of Fluid Mechanics*, v. 159, p. 151 – 168, 1985.

HUGHES, T. Coriolis perturbation of mantle convection related to a two-phase convection model. *Tectonophysics*, v. 18, p. 215 – 230, 1973.

JACOB, J. A. *The earth's core*. 2nd. ed. [S.l.]: Academic Press, 1987. (International Geophysics Series).

JEROME, J. J. S. *Transient growth in Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette flows*. Tese (PhD Thesis) — École Polytechnique, Paris, 2011.

KAO, T. W. Role of viscosity stratification in the stability of two-layer flow down an incline. *J. of Fluid Mechanics*, v. 33, p. 561 – 572, 1968.

KAO, T. W.; PARK, C. Experimental investigations of the stability of channel flows. Part 2. Two-layered co-current flow in a rectangular channel. *J. of Fluid Mechanics*, v. 52, p. 401 – 423, 1972.

KATO, Y.; FUJIMURA, K. Prediction of pattern selection due to an interaction between longitudinal rolls and transverse modes in a flow through a rectangular channel heated from below. *Physical Review E*, v. 62, n. 1, p. 601 – 611, 2000.

KAWAMURA, H.; NISHINO, K.; MATSUMOTO, S.; UENO, I. Report on microgravity experiments of Marangoni convection aboard International Space Station. *J. of Heat Transfer*, v. 134, n. 3, p. 031005, 2012.

KERST, A. W.; JUDAT, B.; SCHLUNDER, E. U. Flow regimes of free jets and falling films at high ambient pressure. *Chem. Engineering Science*, v. 55, p. 4189 – 4208, 2000.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. *Fluid Mechanics*. 2^a. ed. [S.l.]: Academic Press, 2002.

LEAL, L. G. *Advanced Transport Phenomena*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. (Cambridge Series in Chemical Engineering).

LI, C. H. Instability of three-layer viscous stratified flow. *Physics of Fluids*, v. 12, n. 12, p. 2473 – 2481, 1969.

LI, Y. R.; WANG, S. C.; WU, S. Y.; PENG, L. Asymptotic solution of thermocapillary convection in thin annular two-layer system with upper free surface. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 52, p. 4769 – 4777, 2009.

LIN, S. P. Instability of a liquid film flowing down an inclined plane. *Physics of Fluids*, v. 10, n. 2, p. 308 – 313, 1967.

- LIN, W. L.; KER, Y. T.; LIN, T. F. Experimental observation and conjugated heat transfer analysis of vortex flow development in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 39, p. 3667 – 3683, 1996.
- LIN, W. L.; LIN, T. F. Experimental study of unstable mixed convection of air in a bottom heated horizontal rectangular duct. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 39, n. 8, p. 1649 – 1663, 1996.
- LIR, J. T.; CHANG, M. Y.; LIN, T. F. Vortex flow patterns near critical state for onset of convection in air flow through a bottom heated horizontal flat duct. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 44, n. 4, p. 705 – 719, 2001.
- LIU, Q. S.; ZHOU, B. H.; LIU, R.; THI, H. N.; BILLIA, B. Oscillatory instabilities of two-layer rayleigh–marangoni–benard convection. *Acta Astronautica*, v. 59, p. 40 – 55, 2006.
- LUSHNIKOV, P. M. Two mechanisms of surface wave generation: Kelvin-Helmholtz and Miles instabilities. *Atmospheric and Oceanic Physics*, v. 34, n. 3, p. 370 – 377, 1998.
- MAHDAOUI, O.; LAURE, P.; AGASSANT, J. F. Numerical investigations of polyester coextrusion instabilities. *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 195, p. 67 – 76, 2013.
- MEEVASANA, W.; AHLERS, G. Rayleigh-Bénard convection in elliptic and stadium-shaped containers. *Physical Review E*, v. 66, p. 046308, 2002.
- MIESEN, R.; BOERSMAN, B. J. Hydrodynamic stability of a sheared liquid film. *J. of Fluid Mechanics*, v. 301, p. 175 – 202, 1995.
- MILES, J. W. On the generation of surface waves by shear flows. *J. of Fluid Mechanics*, v. 3, p. 185 – 204, 1957.
- MILES, J. W. On the generation of surface waves by shear flows. Part 2. *J. of Fluid Mechanics*, v. 6, p. 568 – 582, 1959.
- MILES, J. W. On the generation of surface waves by shear flows. Part 4. *J. of Fluid Mechanics*, v. 13, p. 433 – 448, 1962.
- MORRIS, S.; BODENSCHATZ, E.; CANNEL, D. S.; AHLERS, G. The spatio-temporal structure of spiral-defect chaos. *Physica D*, v. 97, p. 164, 1996.

- MULLER, H. W. *Thermische Konvektion in Horizontaler Scherströmung*. Tese (PhD Thesis) — Universität des Saarlandes, Saarlandes, 1990.
- MULLER, H. W.; LUCKE, M.; KAMPS, M. Transversal convection patterns in horizontal shear flow. *Physical Review A*, v. 45, p. 3714 – 3726, 1992.
- NAKAYAMA, Y. *Introduction to Fluid Mechanics*. [S.l.]: Butterworth Heinemann, 1999.
- NAPOLITANO, L. G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluid. *Acta Astronautica*, v. 7, p. 461 – 478, 1980.
- NEPOMNYASHCHY, A.; SIMANOVSKII, I.; LEGROS, J. C. *Interfacial Convection in Multilayer Systems*. 2^a. ed. [S.l.]: Springer, 2012. (Applied Mathematical Sciences).
- NEWELL, A. C.; PASSOT, T. Instabilities of dislocations in fluid patterns. *Physical Review Letters*, v. 68, p. 1846 – 1849, 1992.
- NICOLAS, X. Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille–Rayleigh–Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas. *Int. J. of Thermal Sciences*, v. 41, p. 961 – 1016, 2002.
- NICOLAS, X.; LUIJKX, J. M.; PLATTEN, J. K. Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 43, p. 589 – 610, 2000.
- OGAWA, M. Mantle convection: A review. *Fluid Dynamics Research*, v. 40, p. 379 – 398, 2008.
- ORSZAG, S. A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. of Fluid Mechanics*, v. 50, p. 689 – 703, 1971.
- OUAZZANI, M. T.; CALTAGIRONE, J. P.; MEYER, G.; MOJTABI, A. Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 32, n. 2, p. 261 – 269, 1989.
- OUAZZANI, M. T.; PLATTEN, J. K. Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes - III. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 38, n. 5, p. 875 – 886, 1995.

- OUAZZANI, M. T.; PLATTEN, J. K.; MOJTABI, A. Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes - II. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 33, n. 7, p. 1417 – 1427, 1990.
- PASSOT, T.; NEWELL, A. C. Towards a universal theory for natural patterns. *Physica D*, v. 74, p. 301 – 352, 1994.
- PELLEW, A.; SOUTHWELL, R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. *Proc. of the Royal Society*, v. 176, n. 966, p. 312 – 342, 1940.
- PETRY, M.; BUSSE, F. H. Theoretical study of flow coupling mechanisms in two-layer Rayleigh-Bénard convection. *Physical Review E*, v. 68, p. 016305, 2003.
- PRAKASH, A.; YASUDA, K.; OTSUBO, F.; KUWAHARA, K.; DOI, T. Flow coupling mechanisms in two-layer Rayleigh-Bénard convection. *Experiments in Fluids*, v. 23, p. 252 – 261, 1997.
- PUSTER, P.; JORDAN, T. H. How stratified is mantle convection? *J. of Geophysical Research*, v. 102, p. 7625 – 7646, 1997.
- RASENAT, S.; BUSSE, F. H.; REHBERG, I. A theoretical and experimental study of double-layer convection. *J. of Fluid Mechanics*, v. 199, p. 519 – 540, 1989.
- RAYLEIGH, L. On the convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 32, p. 529 – 546, 1916.
- RIBEYRE, X.; HALLO, L.; TIKHONCHUK, T.; BOUQUET, S.; SANZA, J. Nonstationary Rayleigh-Taylor instability in supernova ejecta. *Physics of Plasmas*, v. 14, p. 112902, 2007.
- SAMIMY, M.; BREUER, K. S.; LEAL, L. G.; STEEN, P. H. *A Gallery of Fluid Motion*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- SCHUBERT, G.; TURCOTTE, D. L.; OLSON, P. *Mantle Convection in the Earth and Planets*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- SCHWABE, D. Hydrodynamic instabilities under microgravity in a differentially heated long liquid bridge with aspect ratio near the Rayleigh-limit: Experimental results. *Advance in Space Research*, v. 36, p. 36 – 42, 2005.

- SIGGA, E. D.; ZIPPELIUS, A. Dynamics of defects in Rayleigh-Bénard convection. *Physical Review A*, v. 24, n. 2, p. 469 – 485, 1981.
- SMITH, K. A. On convective instability induced by surface tension gradients. *J. of Fluid Mechanics*, v. 24, p. 401 – 414, 1966.
- SMITH, M. K. The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. *J. of Fluid Mechanics*, v. 217, p. 469 – 485, 1990.
- STENGEL, K. C.; OLIVER, D. S.; BOOKER, J. R. Onset of convection in a variable-viscosity fluid. *J. of Fluid Mechanics*, v. 120, p. 411 – 431, 1982.
- TREFETHEN, L. N. *Spectral Methods in Matlab*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- VALETTE, R.; LAURE, P.; DEMAY, Y.; AGASSANT, J. F. Convective linear stability analysis of two-layer coextrusion flow for molten polymers. *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 121, p. 41 – 53, 2004.
- WALTER, T.; PESCH, W.; BODENSCHATZ, E. Dislocation dynamics in Rayleigh-Bénard convection. *Chaos*, v. 14, n. 3, p. 933 – 939, 2004.
- WANG, L.; LI, J. Fluid mixing due to Rayleigh-Taylor instability in a time-dependent acceleration field. *Commun. in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 10, p. 571 – 577, 2005.
- WEI, H. H. On the flow-induced Marangoni instability due to the presence of surfactant. *J. of Fluid Mechanics*, v. 544, p. 173 – 200, 2005.
- WHITEHEAD, J. A. The propagation of dislocations in Rayleigh-Bénard rolls and bimodal flow. *J. of Fluid Mechanics*, v. 75, p. 715 – 720, 1976.
- XIN, S.; NICOLAS, X.; QUÉRÉ, P. L. Stability analyses of longitudinal rolls of Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows in air-filled channels of finite transversal extension. *Numerical Heat Transfer, Part A*, v. 50, p. 467 – 490, 2006.
- YEO, K. S.; KHOO, B. C.; ZHAO, H. Z. The convective and absolute instability of a fluid flow over viscoelastic compliant layers. *Journal of Sound and Vibration*, v. 233, p. 379 – 398, 1999.

YIANTSIOS, S. G.; HIGGINS, B. G. Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids. *Physics of Fluids*, v. 11, p. 3225 – 3238, 1988.

YIANTSIOS, S. G.; HIGGINS, B. G. Rayleigh-Taylor instability in thin viscous films. *Physics of Fluids A*, v. 9, n. 1, p. 3225 – 3238, 1989.

YIH, C. S. Instability due to viscosity stratification. *J. of Fluid Mechanics*, v. 27, p. 337 – 352, 1967.

YIH, C. S. Wave formation on a liquid layer for de-icing airplane wings. *J. of Fluid Mechanics*, v. 212, p. 41 – 53, 1990.

YU, C. H.; CHANG, M. Y.; LIN, T. F. Structures of moving transverse and mixed rolls in mixed convection of air. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, v. 40, n. 2, p. 333 – 346, 1997.

ZEREN, R. W.; REYNOLDS, W. C. Thermal instabilities in two-fluid horizontal layers. *J. of Fluid Mechanics*, v. 53, p. 305 – 327, 1972.

ANEXO I: OBTENÇÃO DO ESCOAMENTO BASE

Considere o esquema apresentado na Figura 107, representando o escoamento de dois fluidos Newtonianos imiscíveis e incompressíveis entre duas placas planas causado por um gradiente de pressão dP/dx na direção x . Será considerado que a velocidade na interface é constante e igual à U_0 . O escoamento ocorre somente na direção x , de forma permanente e completamente desenvolvida.

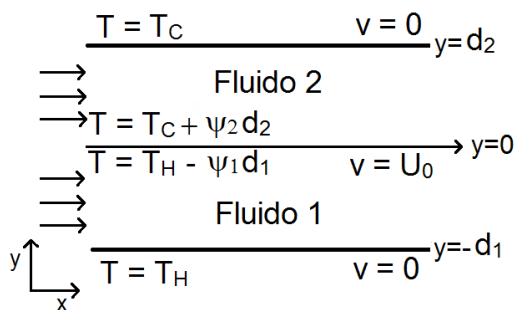


Figura 107: Escoamento de dois fluidos entre placas planas.

Nestas condições, a equação de Navier-Stokes (Eq. 3.2) nas duas camadas pode ser avaliada como:

$$\mu_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2} = \frac{dP}{dx} = K \quad (1)$$

$$\mu_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} = \frac{dP}{dx} = K \quad (2)$$

A obtenção destas equações pode ser encontrada em qualquer livro-texto na área de mecânica dos fluidos, por exemplo (NAKAYAMA, 1999), Eq. 6.19. Observe que ambas equações foram igualadas a uma constante K , sendo isto válido visto que a única forma de a igualdade ser verdadeira é se tanto o termo diferencial em y quanto o termo em x forem ambos constantes. Além disso, o gradiente de pressão dp/dx é o mesmo para as duas camadas.

As equações acima podem ser facilmente resolvida por integração:

$$u_1 = \frac{1}{2\mu_1}Ky^2 + C_1^1y + C_2^1 \quad (3)$$

$$u_2 = \frac{1}{2\mu_2}Ky^2 + C_1^2y + C_2^2 \quad (4)$$

Para a determinação das constantes de integração, pode-se utilizar as condições de contorno conhecidas. Na interface, ocorre a igualdade da velocidade tangencial e da tensão de cisalhamento:

$$u_1 = u_2 = U_0 \text{ em } y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2^1 = C_2^2 = U_0 \quad (5)$$

$$\mu_1 \frac{du_1}{dy} = \mu_2 \frac{du_2}{dy} \text{ em } y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1^1 = mC_1^2 \quad (6)$$

onde $m = \mu_2/\mu_1$ é a relação entre a viscosidade das camadas. Na parede inferior, a condição de não-deslizamento é válida, de modo que:

$$u_1 = 0 \text{ em } y = -d_1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2\mu_1}{d_1^2}(C_1^1d_1 - U_0) \quad (7)$$

A mesma condição pode ser aplicada na parede superior:

$$\begin{aligned} u_2 = 0 \text{ em } y = d_2 \quad \Rightarrow \quad C_1^2 &= -\frac{U_0(m - d_0^2)}{m(d_0^2 + d_0)} \\ \Rightarrow \quad C_1^1 &= -\frac{U_0(m - d_0^2)}{(d_0^2 + d_0)} \end{aligned} \quad (8)$$

onde a definição $d_0 = d_2/d_1$ é utilizada para simplificar a expressão.

Desse modo, o perfil de escoamento base nas duas camadas, $U_{B,1} = u_1$ e $U_{B,2} = u_2$ pode ser expresso por:

$$\frac{U_{B,1}(y)}{U_0} = -\left(\frac{m + d_0}{d_0^2 + d_0}\right)y^2 + \left(\frac{m - d_0^2}{d_0^2 + d_0}\right)y + 1 \quad (9)$$

$$\frac{U_{B,2}(y)}{U_0} = -\frac{1}{m}\left(\frac{m + d_0}{d_0^2 + d_0}\right)y^2 + \frac{1}{m}\left(\frac{m - d_0^2}{d_0^2 + d_0}\right)y + 1 \quad (10)$$

A equação da conservação da energia (Eq. 3.3), considerando somente a troca térmica por condução na direção y , pode ser retomada

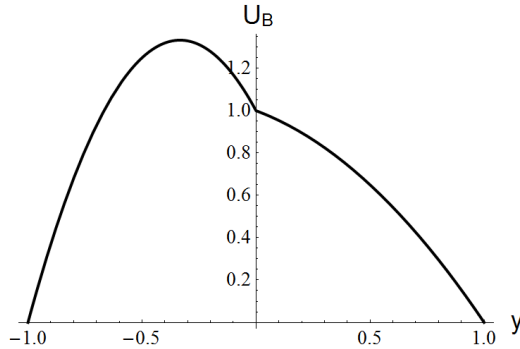


Figura 108: Exemplo de escoamento base para $d_0 = 1$ e $m = 5$.

simplesmente como:

$$\frac{d^2 T_{1,B}}{dy^2} = 0 \quad \frac{d^2 T_{2,B}}{dy^2} = 0 \quad (11)$$

Utilizando as condições de contorno especificadas para cada camada mostradas na Figura 107, obtém-se que:

$$T_{1,B} = T_H - \psi_1(y + 1) \quad T_{2,B} = T_C - \psi_2(y - d_0) \quad (12)$$

onde pode-se observar que quatro constantes são especificadas, sendo que os gradientes de temperatura estáticos ψ_1 e ψ_2 são empregados para facilitar a manipulação das equações. No entanto, considerando que o perfil de temperatura base deve respeitar as condições de continuidade da temperatura e do fluxo de calor na interface $y = 0$, pode-se facilmente relacionar estes gradientes com as temperaturas fixas nas paredes:

$$\psi_1 = \frac{T_H - T_C}{1 + 1/k_0} \quad \psi_2 = \frac{T_H - T_C}{1 + k_0} \quad (13)$$

de onde se obtém que:

$$\psi_0 = \frac{1}{k_0} \quad (14)$$

ANEXO II: CONDIÇÕES DE CONTORNO EM FUNÇÃO DOS MODOS NORMAIS

Neste anexo será apresentado o tratamento matemático aplicado às condições de contorno para expressá-las em termo dos modos normais. Para simplificar, será apresentado cada condição de contorno individualmente.

1. Velocidade normal à parede:

$$v_1 = 0 \text{ em } y = -d_1 \quad v_2 = 0 \text{ em } y = d_2 \quad (1)$$

Neste caso, pode-se diretamente substituir a velocidade vertical v_i pela velocidade vertical perturbada \tilde{v}_i , visto que a velocidade base na direção vertical é nula. Além disso, adimensionalizando-se as velocidades com base na escala κ_1/d_1 e as posições com base em d_1 , após substituir a definição em termos dos modos normais (Eq. 3.46) obtém-se diretamente que:

$$\phi_1 = 0 \text{ em } y = -1 \quad \phi_2 = 0 \text{ em } y = d_0 \quad (2)$$

2. Condição de não-deslizamento nas paredes:

$$u_1 = w_1 = 0 \text{ em } y = -d_1 \quad (3)$$

De forma semelhante ao apresentado para a condição anterior, pode-se diretamente substituir as velocidades na forma perturbada, lembrando que o escoamento base avaliado em $y = -d_1$ obedece à condição de não deslizamento e portanto $U_{B,1}(-d_1) = 0$. Adimensionalizando a expressão obtida e substituindo a definição em termos dos modos normais:

$$i\alpha\phi_{1,1} = i\beta\phi_{3,1} = 0 \text{ em } y = -1 \quad (4)$$

Da Equação 3.47 tem-se que:

$$i\alpha\phi_{1,1} + \frac{\partial\phi_{2,1}}{\partial y} + i\beta\phi_{3,1} = 0 \quad (5)$$

de modo que, lembrando que $\phi_{2,1} = \phi_1$:

$$\frac{d\phi_1}{dy} = 0 \text{ em } y = -1 \quad (6)$$

De modo semelhante, para a camada superior:

$$u_2 = w_2 = 0 \text{ em } y = d_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi_2}{dy} = 0 \text{ em } y = d_0 \quad (7)$$

3. Continuidade da velocidade normal à interface:

$$v_1 = v_2 \text{ em } y = \eta \quad (8)$$

Assim como realizado para a primeira condição de contorno apresentada, pode-se facilmente transformar a velocidade vertical v_i na variável ϕ_i , o que implica em:

$$\phi_1 = \phi_2 \text{ em } y = \eta \quad (9)$$

No entanto, conforme discutido na seção sobre a condição cinemática, a posição da interface não é conhecida antes de o campo de velocidades ser obtido. Expandindo a condição anterior em série de Taylor em torno do ponto $y = 0$ tem-se que:

$$\phi_1(0) + \eta \frac{d\phi_1}{dy} \Big|_{y=0} + O(\eta^2) = \phi_2(0) + \eta \frac{d\phi_2}{dy} \Big|_{y=0} + O(\eta^2) \text{ em } y = \eta \quad (10)$$

Considerando que tanto a perturbação da interface η quanto os termos $d\phi_i/dy$ são pequenos, o produto entre eles pode ser desprezado, bem como os termos de alta ordem. Assim:

$$\phi_1 = \phi_2 \text{ em } y = 0 \quad (11)$$

4. Continuidade da velocidade tangencial à interface:

$$u_1 = u_2 \text{ e } w_1 = w_2 \text{ em } y = \eta \quad (12)$$

A igualdade da velocidade na direção x pode ser expressa, em função das variáveis perturbadas, como:

$$\tilde{u}_1(\eta) + U_{B,1}(\eta) = \tilde{u}_2(\eta) + U_{B,2}(\eta) \quad (13)$$

Expandindo os termos em série de Taylor e desconsiderando os termos $O(\eta^2)$:

$$\tilde{u}_1(0) - \tilde{u}_2(0) + \eta \left(\frac{d\tilde{u}_1}{dy} \Big|_{y=0} - \frac{d\tilde{u}_2}{dy} \Big|_{y=0} \right) + U_{B,1}(0) - U_{B,2}(0) = \quad (14)$$

$$\eta \left(\frac{U_{B,1}}{dy} \Big|_{y=0} - \frac{U_{B,2}}{dy} \Big|_{y=0} \right) \quad (15)$$

Novamente, desprezando o produto entre os termos η e $d\tilde{u}_i/dy$, e considerando que $U_{B,1}(0) = U_{B,2}(0)$ o segundo e o terceiro termos no lado esquerdo da equação acima podem ser desprezados. Adimensionalizando os termos restantes, lembrando que κ_1/d_1 é utilizado como escala para a velocidade perturbada e U_0 para o escoamento base, tem-se que:

$$\hat{u}_1(0) - \hat{u}_2(0) = \hat{\eta} \left(\frac{\hat{U}_{B,1}}{dy} \Big|_{y=0} - \frac{\hat{U}_{B,2}}{dy} \Big|_{y=0} \right) RePr \quad (16)$$

Aplicando o mesmo procedimento para a condição $w_1(\eta) = w_2(\eta)$, obtém-se:

$$\hat{w}_1(0) = \hat{w}_2(0) \quad (17)$$

Fazendo $\partial(\text{Eq. 16})/\partial x + \partial(\text{Eq. 17})/\partial z$:

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial z} - \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{U}_{B,1}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{U}_{B,2}}{\partial y} \right) RePr \quad (18)$$

onde todos os termos da expressão acima são avaliados em $y = 0$. Da equação da continuidade, obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial z} = -\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y} \quad (19)$$

Substituindo esta relação na expressão anterior, obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y} - \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{U}_{B,1}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{U}_{B,2}}{\partial y} \right) RePr \quad (20)$$

A substituição da definição de \hat{v}_i e $\hat{\eta}$ em termos dos modos nor-

mais resulta em:

$$\frac{d\phi_2}{dy} - \frac{d\phi_1}{dy} = i\alpha\eta_0 \left(\frac{\partial \hat{U}_{B,1}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{U}_{B,2}}{\partial y} \right) RePr \quad (21)$$

Finalmente, considerando a expressão obtida para η_0 com o uso da condição cinemática (Eq. 3.70):

$$\frac{d\phi_2}{dy} - \frac{d\phi_1}{dy} = \frac{i\alpha\phi_1}{i(\alpha RePr - \omega)} \left(\frac{\partial \hat{U}_{B,1}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{U}_{B,2}}{\partial y} \right) RePr$$

em $y = 0$ (22)

5. Balanço da tensão de cisalhamento:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \mu_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \frac{d\gamma}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \psi_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (23)$$

$$\mu_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) - \mu_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) = \frac{d\gamma}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial z} - \psi_2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \quad (24)$$

em $y = \eta$

Definindo a Eq. 23 em termos da perturbação da velocidade, da temperatura e da deformação da interface, obtém-se:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y} + \frac{\partial U_{B,1}}{\partial y} \right) - \mu_2 \left(\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} + \frac{\partial U_{B,2}}{\partial y} \right) =$$

$$\frac{d\gamma}{dT} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - \psi_1 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \right) \quad (25)$$

Adimensionalizando a equação acima:

$$\left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} + \frac{U_0 d_1}{\kappa_1} \frac{\partial \hat{U}_{B,1}}{\partial y} \right) - m \left(\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} + \frac{U_0 d_1}{\kappa_1} \frac{\partial \hat{U}_{B,2}}{\partial y} \right)$$

$$= -Ma \left(\frac{\partial \hat{T}_1}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) \quad (26)$$

onde $m = \mu_2/\mu_1$ e Ma é o número adimensional de Marangoni, definido

como:

$$Ma = -\frac{d\gamma}{dT} \frac{\psi_1 d_1^2}{\nu_1 \rho_1 \kappa_1} \quad (27)$$

Aplicando o mesmo procedimento para a Eq. 24, obtém-se

$$\left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial y} \right) - m \left(\frac{\partial \hat{v}_2}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial y} \right) = -Ma \left(\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial z} - \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial z} \right) \quad (28)$$

Fazendo $\partial(\text{Eq.26})/\partial x + \partial(\text{Eq.28})/\partial z$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial z} \right) \right) - \\ & m \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial z} \right) \right) = \\ & -Ma \left(\frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \hat{\eta}_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{\eta}_2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Utilizando a equação da continuidade, pode-se simplificar a equação acima eliminando a dependência com as componentes \hat{u}_i e \hat{w}_i , resultando em:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial y^2} \right) - m \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \hat{v}_2}{\partial y^2} \right) \\ & -Ma \left(\frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \hat{\eta}_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{\eta}_2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Através da definição dos modos normais (Eq. 3.46) para as variáveis nesta equação, tem-se que:

$$\left(-k^2 \phi_1 - \frac{d^2 \phi_1}{dy^2} \right) - m \left(-k^2 \phi_2 - \frac{d^2 \phi_2}{dy^2} \right) = -Ma(k^2 \eta_0 - k^2 \theta_1) \quad (31)$$

onde θ_1 é utilizado levando-se em conta que na interface $\theta_1 = \theta_2$, conforme será mostrado a seguir. As variáveis presentes nesta equação são avaliadas em $y = \eta$, no entanto, conforme discutido anteriormente, pode-se facilmente utilizar uma expansão em série de Taylor de modo a ser possível avaliar as variáveis em $y = 0$. Com isso, e utilizando a expressão obtida para a deformação da interface, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left(k^2 \phi_1 + \frac{d^2 \phi_1}{dy^2} \right) - m \left(k^2 \phi_2 + \frac{d^2 \phi_2}{dy^2} \right) = \\ & -k^2 Ma \left(\theta_1 - \frac{\phi_1}{i(\alpha RePr - \omega)} \right) \quad \text{em } y = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

6. Balanço da tensão normal à interface:

$$\begin{aligned} & \rho_1 g \eta - P_1 + 2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \left(\rho_2 g \eta - P_2 + 2\mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = \\ & \gamma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \quad \text{em } y = \eta \end{aligned} \quad (33)$$

Considerando que no escoamento base a velocidade vertical é nula e que a pressão é contínua na interface ($P_{B,1}(\eta) = P_{B,2}(\eta)$), pode-se expressar a equação acima em termos das variáveis perturbadas como:

$$\begin{aligned} & \rho_1 g \tilde{\eta} - \tilde{P}_1 + 2\mu_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} - \left(\rho_2 g \tilde{\eta} - \tilde{P}_2 + 2\mu_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right) = \\ & \gamma \left(\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Adimensionalizando as variáveis presentes nesta expressão e multiplicando ambos os lados por $d_1^2/(\rho_1 \nu_2 \kappa_1)$:

$$\frac{gd_1^3}{\nu \kappa_1} \hat{\eta} - \rho_0 \frac{gd_1^3}{\nu \kappa_1} \hat{\eta} - \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \frac{2\mu_1}{\rho_1 \nu_1} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial y} - \frac{2\mu_2}{\rho_1 \nu_1} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y} = \frac{\gamma d_1}{\rho_1 \nu_1 \kappa_1} \left(\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial z^2} \right) \quad (35)$$

Considerando que $\rho_1 \nu_1 = \mu_1$, pode-se reescrever a equação acima como:

$$Ra_\rho \hat{\eta} - \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + 2 \left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial y} - m \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial z^2} \right) \quad (36)$$

onde dois parâmetros adimensionais podem ser observados, sendo S uma forma do número de Schmidt baseada na tensão interfacial e Ra_ρ um número de Rayleigh baseado na diferença de densidade entre as camadas. Estes parâmetros são definidos como:

$$Ra_\rho = \frac{gd_1^3}{\nu_1 \kappa_1} (1 - \rho_0) = \frac{Ra}{d_1 \psi_1 \beta_1} (1 - \rho_0) \quad S = \frac{\gamma d_1}{\rho_1 d_1 \kappa_1} \quad (37)$$

Considerando a definição em termos dos modos normais, obtém-se:

$$\wp_1 - \wp_2 + 2 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} - m \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) = -Sk^2 \eta_0 - Ra_\rho \eta_0 \quad (38)$$

Para eliminar a dependência com a pressão \wp_1 na equação acima, pode-se utilizar as Equações 3.48 e 3.50. Fazendo $i\alpha$ (Eq. 3.48) + $i\beta$ (Eq. 3.50) e considerando que a equação da continuidade pode ser expressa como:

$$i\alpha \frac{d^2 \phi_{1,1}}{dy^2} + i\beta \frac{d^2 \phi_{3,1}}{dy^2} = -\frac{d^3 \phi_{2,1}}{dy^3} \quad (39)$$

a pressão \wp_1 pode ser avaliada como:

$$k^2 \wp_1 = \frac{d^3 \phi_1}{dy^3} + k^2 \frac{d\phi_1}{dy} - \frac{\omega}{Pr} \frac{d\phi_1}{dy} - i\alpha Re U_{B,1} \frac{d\phi_1}{dy} + i\alpha Re \phi_1 \frac{dU_{B,1}}{dy} \quad (40)$$

De forma semelhante, a pressão na camada superior \wp_2 é dada por:

$$k^2 \wp_2 = \rho_0 \nu_0 \left(\frac{d^3 \phi_2}{dy^3} + k^2 \frac{d\phi_2}{dy} \right) - \frac{\omega \rho_0}{Pr} \frac{d\phi_1}{dy} - i\alpha \rho_0 Re U_{B,1} \frac{d\phi_1}{dy} + i\alpha \rho_0 Re \phi_1 \frac{dU_{B,1}}{dy} \quad (41)$$

Fazendo k^2 (Eq.38), substituindo as expressões acima e considerando a expressão anteriormente obtida para a deformação da interface, pode-se expressar o balanço de tensão normal em sua forma final:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^3 \phi_1}{dy^3} - 3k^2 \frac{d\phi_1}{dy} - \frac{\omega}{Pr} \frac{d\phi_1}{dy} \right) - m \left(\frac{d^3 \phi_2}{dy^3} - 3k^2 \frac{d\phi_2}{dy} - \frac{\omega}{Pr\nu_0} \frac{d\phi_2}{dy} \right) \\ & - i\alpha Re \left(U_{B,1} \frac{d\phi_1}{dy} - \phi_1 \frac{dU_{B,1}}{dy} \right) + i\alpha \rho_0 Re \left(U_{B,2} \frac{d\phi_2}{dy} - \phi_2 \frac{dU_{B,2}}{dy} \right) \quad (42) \\ & = k^2 \frac{\phi_1}{i(\alpha Re Pr - \omega)} (Sk^2 + Ra_\rho) \text{ em } y = 0 \end{aligned}$$

onde, de forma semelhante ao realizado para as outras condições avaliadas na interface, pode-se transpor as condições em $y = \eta$ para $y = 0$ utilizando-se da expansão em série de Taylor.

7 Temperatura fixa nas paredes:

$$T_1 = T_H \text{ em } y = -d_1 \quad (43)$$

$$T_2 = T_C \text{ em } y = d_2 \quad (44)$$

Utilizando a definição das variáveis em função do estado base e da perturbação, tem-se:

$$T_{B,1}(-d_1) + \tilde{T}_1(-d_1) = T_H \quad T_{B,2}(d_2) + \tilde{T}_2(d_2) = T_C \quad (45)$$

Considerando que $T_{B,1}(-d_1) = T_H$ e $T_{B,2}(d_2) = T_C$:

$$\tilde{T}_1(-d_1) = 0 \quad \tilde{T}_2(d_2) = 0 \quad (46)$$

Adimensionalizando e expressando em termos dos modos normais, isto implica que:

$$\theta_1 = 0 \text{ em } y = -1 \quad \theta_2 = 0 \text{ em } y = d_0 \quad (47)$$

8 Continuidade da temperatura na interface:

$$T_1 = T_2 \text{ em } y = \eta \quad (48)$$

Substituindo a temperatura T_i pela definição em função do estado base e da perturbação da temperatura:

$$T_{B,1} + \tilde{T}_1 = T_{B,2} + \tilde{T}_2 \text{ em } y = \eta \quad (49)$$

Utilizando a expansão em série de Taylor para transpor a condição acima para $y = 0$, lembrando que o perfil de temperatura base obedece a condição de continuidade da temperatura na interface e desprezando os termos de alta ordem, obtém-se:

$$\eta \frac{dT_{B,1}}{dy} + \tilde{T}_1 = \eta \frac{dT_{B,2}}{dy} + \tilde{T}_2 \text{ em } y = 0 \quad (50)$$

Considerando o perfil de temperatura base obtido anteriormente, adimensionalizando as temperaturas com base na escada $\phi_1 d_1$ e empregando a definição em termos dos modos normais, tem-se que:

$$\theta_1 - \theta_2 = \eta_0(1 - \psi_0) \text{ em } y = 0 \quad (51)$$

Por último, pode-se utilizar a definição obtida para η_0 , de modo

que:

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\phi_1}{i(\alpha RePr - \omega)}(1 - \psi_0) \text{ em } y = 0 \quad (52)$$

9 Continuidade do fluxo de calor na interface:

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \text{ em } y = \eta \quad (53)$$

Utilizando a expansão em série de Taylor para passar a condição acima para $y = 0$ e desprezando os termos $\eta d^2\theta/dy^2$, obtém-se que:

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \text{ em } y = 0 \quad (54)$$

Considerando que o perfil de temperatura base obedece a condição de igualdade de fluxo na interface ($dT_{B,1}/dy = k_0 dT_{B,2}/dy$) pode-se substituir a temperatura T_i pela perturbação da temperatura \hat{T}_i e adimensionalizar a expressão resultante, de modo que:

$$\frac{\partial \hat{T}_1}{\partial y} = k_0 \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial y} \text{ em } y = 0 \quad (55)$$

Utilizando a definição dos modos normais, isto resulta em:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y} = k_0 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \text{ em } y = 0 \quad (56)$$