Vol. I NOVEMBRO DE 1927 N.º 2

EDUCAÇÃO

ÓRGÃO DA DIRECTORIA GERAL DA INSTRUCÇÃO PUBLICA
E DA SOCIEDADE DE EDUCAÇÃO, DE SÃO PAULO

SUMMARIO:

TRAV. DA BENEFICENCIA PORTUGUEZA, 1
SÃO PAULO

OPERAÇÕES SOBRE AS FRACÇÕES (*)

Prof. José Escobar,
Lente da Escola Normal
da Capital.

ADDIÇÃO, SUBTRACÇÃO E DIVISÃO DE FRACÇÕES HOMOGENEAS

E' facil ver no quadro geral das fracções ou nesta recta dividida em 10 partes:

|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|

que $\frac{6}{10}+\frac{2}{10}=\frac{8}{10}$ ou $0{,}6+0{,}2=0{,}8$

$\frac{6}{10}-\frac{2}{10}=\frac{4}{10}$ ou $0{,}6-0{,}2=0{,}4$

$\frac{6}{10}\div\frac{2}{10}=3$ ou $0{,}6\div 0{,}2=3$ (isto é, $\frac{6}{10}$ contèm $\frac{2}{10}$ 3 vezes).

Para tirar a regra da somma, comparamos o resultado $\frac{8}{10}$ com os dados $\frac{6}{10}$ e $\frac{2}{10}$: o numerador 8 foi obtido pela somma dos numeradores 6 e 2, e o denominador 10 foi obtido pela conservação do denominador 10. Do mesmo modo, o numerador 8 de 0,8 nasceu da somma dos numeradores 6 e 2 de 0,6 e 0,2; e o denominador 10 de 0,8 surgiu da conservação do denominador commum 10 de 0,6 e de 0,2.

Para a subtracção: o numerador 4 de $\frac{4}{10}$ (ou de 0,4) nasceu da subtracção dos numeradores 6 e 2 de $\frac{6}{10}$ e $\frac{2}{10}$ (ou de 0,6 e 0,2); e o denominador 10

(*) V. "Educação", vol. I, n. 1 — PARA ENTENDER AS FRACÇÕES.

de $\frac{4}{10}$ appareceu pela copia do denominador commum 10 de $\frac{6}{10}$ e $\frac{2}{10}$ (ou de 0,6 e 0,2).

Para a divisão: em $\frac{6}{10} \div \frac{2}{10} = 3$, vê-se que os numeradores 6 e 2 dos dados foram divididos e o denominador commum 10 foi abandonado. Igualmente em $0{,}6 \div 0{,}2 = 3$ os numeradores 6 e 2 foram divididos e o denominador 10 foi desprezado.

Como essas observações se repetem sem excepção em todos os casos analogos, tiramos a regra para sommar, subtrair e dividir fracções homogeneas: 1.º) sommam-se, subtraem-se e dividem-se os numeradores; 2.º) conserva-se o denominador commum, menos na divisão em que é desprezado.

Quando a divisão não é exacta, ha uma difficuldade, que assim se dissipa: façamos graphicamente a divisão de $\frac{4}{10}$ por $\frac{3}{10}$:

```
|—|—|—|—|..|..|..|..|..|..|

|—|—|—|..|..|..|..|..|..|..|
```

Vemos ahi que $\frac{4}{10}$ contém $\frac{3}{10}$ 1 vez e mais $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{10}$; mas $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$; isto é: $\frac{4}{10} \div \frac{3}{10} = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. A regra ahi tambem é verdadeira, como se vê.

Outra difficuldade: si fosse $0{,}4 \div 0{,}3$ teriamos igualmente: $0{,}4 \div 0{,}3 = 1\frac{1}{3}$ ou $\begin{array}{r|l} 4 & 3. \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ Mas si quizessemos escrever $\frac{1}{3}$ não em forma de fracção ordinaria mas com a notação das decimaes?

Como 1 = 10 decimos = 100 centesimos = 1000 millesimos, transformamos o numerador 1 (ou o resto 1) em decimos, ou centesimos, ou millesimos, etc., e continuamos a divisão, mas o quociente será agora decimos, ou centesimos, ou millesimos, etc.; para indicar estes, pomos virgula no quociente.:

$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ ou $\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline & 1,333 \end{array}$

1000 millessimos
10 "
10 "
1 "

Si os numeros forem representados por letras, é claro que a regra ainda será a mesma, então:

$$\frac{6}{m}+\frac{2}{m}=\frac{8}{m} \quad \text{e} \quad \frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$$

$$\frac{6}{m}-\frac{2}{m}=\frac{4}{m} \quad \text{e} \quad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{ab}{m}$$

$$\frac{6}{m}\div\frac{2}{m}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{e} \quad \frac{a}{m}\div\frac{b}{m}=\frac{a}{b}$$

OBSERVAÇÕES

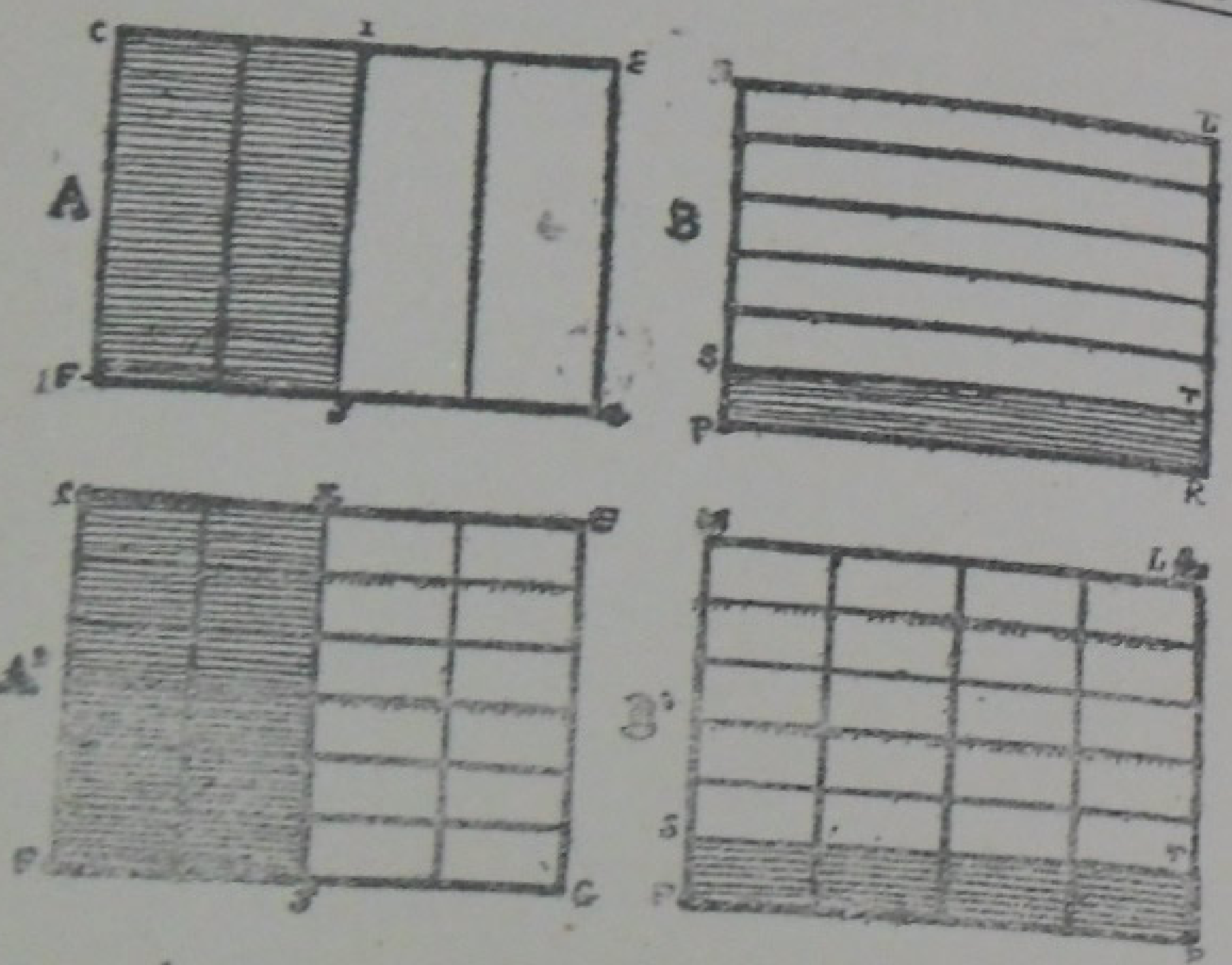
Ha um outro raciocinio muito simples: 1.º) Do mesmo modo que 6 laranjas + 2 laranjas = 8 laranjas, $\frac{6}{10}+\frac{2}{10}=\frac{8}{10}$ e $0{,}6+0{,}2=0{,}8$. 2.º) Assim como 6 livros menos 2 livros = 4 livros, tambem $\frac{6}{10}-\frac{2}{10}=\frac{4}{10}$ e $0{,}6-0{,}2=0{,}4$. 3.º) Em 6 lapis ha 2 lapis 3 vezes; analogamente, em $\frac{6}{10}$ ha $\frac{2}{10}$ 3 vezes ou em 0,6 ha 0,2 3 vezes. Por ahi se vê que o denominador é uma simples denominação.

Para o curso secundario demonstra-se a somma assim: 1.º) $\frac{a}{m}=q$; $\frac{h}{m}=q'$; 2.º) $a=mq$; $b=mq'$; 3.º) $a+b=mq+mq'$; 4.º) $a+b=m(q+q')$; 5.º) $\frac{a+b}{m}=q+q'$; 6.º) $\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$. E semelhantemente para a subtracção e a divisão.

II

ADDIÇÃO, SUBTRACÇÃO E DIVISÃO DE QUANTIDADES HETEROGENEAS

Si quizermos sommar $\frac{2}{4}$ com $\frac{1}{6}$; de $\frac{2}{4}$ tirar $\frac{1}{6}$; e ver em $\frac{2}{4}$



quantos $\frac{1}{6}$ ha, vemos nestes graphicos que não é possivel. A somma não poderá dar $\frac{3}{4}$ nem $\frac{3}{6}$, do mesmo modo que não podemos sommar sapatos com livros; as fracções são heterogeneas.

Logo, a addicção, a subtracção e a divisão de fracções (estas, quando é ver um numero quantas vezes contém outro) exigem que as fracções tenham o mesmo denominador, que sejam homogeneas.

Vejamos como essas fracções se transformam em outras, homogeneas, mas iguaes ás primeiras:

Temos no rectangulo A, $\frac{2}{4}$ e em B $\frac{1}{6}$ da mesma quantidade. O denominador é o numero de partes em que cada um está dividido e o numerador as partes escuras, que são o numero de partes tomadas.

Si dividirmos o rectangulo A em 6 partes iguaes por meio de rectas horizontaes, os $\frac{2}{4}$ ficarão no rectangulo A' $\frac{12}{24}$: isto é, o numerador

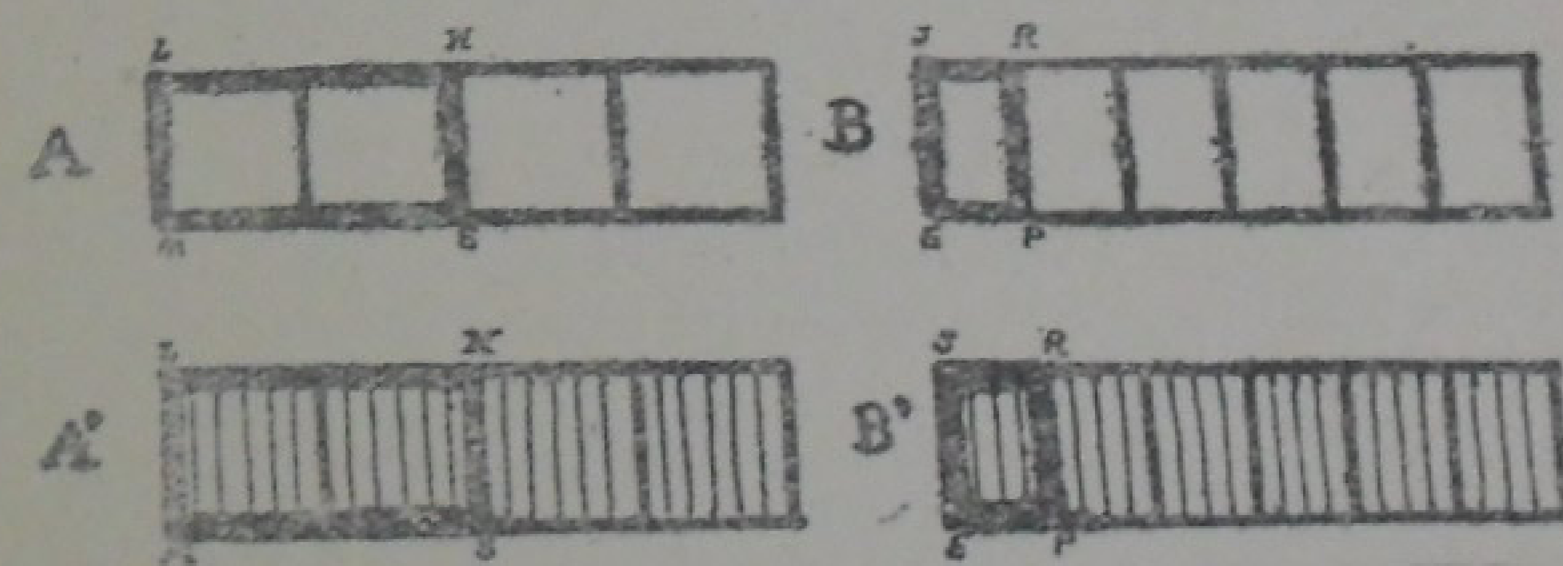
2 ficará 12, isto é, multiplicado por 6, e o denominador 4 ficará 24, tambem multiplicado por 6.

Logo, $\frac{2}{4}$ deverá ser igual a $\frac{12}{24}$, pois multiplicando-se ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero a nova fracção fica igual á primeira. Aliás o graphico mostra que ambas são exactamente iguaes.

Cortando o rectangulo B em 4 partes por linhas verticaes, $\frac{1}{6}$ fica, no rectangulo B', igual a $\frac{4}{24}$: ambos os termos de $\frac{1}{6}$ foram multiplicados por 4; logo, $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

E as fracções ficaram homogeneas: $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{6}$ ficaram $\frac{12}{24}$ e $\frac{4}{24}$.

Façamos o mesmo com um graphico differente:



Dividindo-se cada $\frac{1}{4}$ (A) em 6 partes e cada $\frac{1}{6}$ (B) em 4 partes, temos em A' e B': $\frac{12}{24}$ e $\frac{4}{24}$. Estão, assim, homogeneas.

Comparando, parte por parte, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{6}$ com os resultados $\frac{12}{24}$ e $\frac{4}{24}$, vê-se que estes foram obtidos multiplicando-se os termos da 1.ª fracção pelo denominador da 2.ª e os termos da 2.ª pelo denominador da 1.ª.

Generalizemos: $\frac{m}{x}, \frac{a}{y} = \frac{my}{xy}, \frac{ax}{xy}$.

Vamos melhorar a regra: Em vez de multiplicar os termos de uma fracção por todo o denominador da outra, decompomos primeiro os denominadores em factores primos $\frac{2}{2\times2}$, $\frac{1}{2\times3}$ e multiplicamos os termos da fracção só pelos factores primos que o denominador da outra tiver de mais: $\frac{2\times3}{2\times2\times3}$, $\frac{1\times2}{2\times3\times2}$. As fracções ahi, além de ficarem homogeneas, ficam com termos pequenos: este é o processo do minimo multiplo commum.

Adaptemos essa regra para tornar homogeneas as fracções decimaes: multiplicamos o numerador e o denominador de cada fracção pelo factor 10, ou 100, ou 1000, etc., que houver de mais na maior (o que não as altera, como já vimos); isto se consegue, pondo um ou mais zeros á direita da fracção:

$$5{,}1+0{,}017=5{,}100+0{,}017.$$

Si tivermos $2+\frac{3}{5}$, $2-\frac{3}{5}$, $2\div\frac{3}{5}$, transformaremos o inteiro 2 em uma fracção homogenea com $\frac{3}{5}$, o que já sabemos fazer. Assim:

$$2=\frac{10}{5};\ \text{e}\ 2+\frac{3}{5}=\frac{10}{5}+\frac{3}{5}.$$

Si tivermos $6\frac{2}{3}+5\frac{4}{7}$, transformaremos antes esses numeros mistos em fracções improprias e depois estas fracções em fracções homogeneas:

$$6\frac{2}{3}+5\frac{4}{7}=\frac{20}{3}+\frac{39}{7}=\frac{140}{21}+\frac{117}{21}$$

Todas as quantidades estando homogeneas, podemos agora sommal-as, subtrail-as e dividil-as:

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{6}=\frac{12}{24}+\frac{4}{24}=\frac{16}{24}\quad \text{e}\quad \frac{a}{r}+\frac{c}{p}=\frac{ap}{pr}+\frac{cr}{pr}=\frac{ap+cr}{pr}$$

$$\frac{2}{4}-\frac{1}{6}=\frac{12}{24}-\frac{4}{24}=\frac{8}{24}\quad \text{e}\quad \frac{a}{r}-\frac{c}{p}=\frac{ap}{pr}-\frac{cr}{pr}=\frac{ap-cr}{pr}$$

$$\frac{2}{4}\div\frac{1}{6}=\frac{12}{24}\div\frac{4}{24}=3\quad \text{e}\quad \frac{a}{r}\div\frac{c}{p}=\frac{ap}{pr}\div\frac{cr}{pr}=\frac{ap}{cr}$$

$$5{,}1 + 0{,}017 = 5{,}100 + 0{,}017 = 5{,}117.$$

$$5{,}1 - 0{,}017 = 5{,}100 - 0{,}017 = 5{,}083.$$

$$5{,}1 \div 0{,}017 = 5{,}100 \div 0{,}017 = 300$$

$$2+\frac{3}{5}=\frac{10}{5}+\frac{3}{5}=\frac{13}{5}\quad \text{e}\quad a+\frac{d}{z}=\frac{az}{z}+\frac{d}{z}=\frac{az+d}{z}$$

$$2-\frac{3}{5}=\frac{10}{5}-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}\quad \text{e}\quad a-\frac{d}{z}=\frac{az}{z}-\frac{d}{z}=\frac{az-d}{z}$$

$$2\div\frac{3}{5}=\frac{10}{5}\div\frac{3}{5}=\frac{10}{3}\quad \text{e}\quad a\div\frac{d}{z}=\frac{az}{z}\div\frac{dz}{z}=\frac{az}{d}$$

$$6\frac{2}{3}+5\frac{4}{7}=\frac{20}{3}+\frac{39}{7}=\frac{140}{21}+\frac{117}{21}=\frac{257}{21}$$

$$6\frac{2}{3}-5\frac{4}{7}=\frac{20}{3}-\frac{39}{7}=\frac{140}{21}-\frac{117}{21}=\frac{23}{21}$$

$$6\frac{2}{3}\div5\frac{4}{7}=\frac{20}{3}\div\frac{39}{7}=\frac{140}{21}\div\frac{117}{21}=\frac{140}{117}$$

Destes e de outros exemplos se tira a regra geral para sommar, subtrair e dividir fracções ordinarias e decimaes, ou inteiros e fracções, ou numeros mistos: tornamos as quantidades homogeneas; sommamos subtraimos e dividimos os numeradores; conservamos o denominador, menos na divisão, em que o desprezamos.

OBSERVAÇÕES

I. A regra para as decimaes póde-se dar com outras expressões, que têm o mesmo sentido:

Assim para a somma: escrevem-se as parcellas uma em baixo de outra de modo que as virgulas se correspondam, (**tornam-se homogeneas**), sommam-se como se fossem inteiros (**sommam-se os numeradores**); abaixa-se a virgula (**conserva-se o denominador**).

Para a subtracção: igualam-se as casas decimaes (**tornam-se homogeneas**); dividem-se como se fossem inteiros (**dividem-se os numeradores e despreza-se o denominador**).

II. Depois que os alumnos tiverem bem comprehendido essas regras geraes, induzidas tão facilmente dos graphicos, poderemos dar as regras abreviadas e de excepção, que faremos derivar daquellas.

Seja $\frac{4}{12} \div \frac{6}{8}$. Para tornar essas fracções homogeneas, empreguemos a 1.ª regra, multiplicar ambos os termos de uma pelo denominador da outra; depois dividamol-as; assim:

$$\frac{4}{12} \div \frac{6}{8} = \frac{32}{96} \div \frac{72}{96} = \frac{32}{72}$$

Comparando o resultado com os dados primitivos, vemos que 32 surgiu da multiplicação de 4 por 8 e 72 de 12 por 6; é como si fizessemos isto: $\frac{4}{12} \times \frac{8}{6} = \frac{32}{72}$; como isso é geral, temos outra regra para dividir fracções: multiplica-se a 1.ª fracção pela fracção divisora invertida.

A regra de casos especiaes. Seja $\frac{4}{35} \div \frac{2}{7}$. Para tornar homogeneas empregamos o processo do minimo multiplo commum; dividimos e simplificamos; assim:

$$\frac{4}{35} \div \frac{2}{7} = \frac{4}{35} \div \frac{10}{35} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Comparando o resultado com os dados, vemos que o 2 foi obtido da divisão de 4 por 2 e o 5 de 35 por 7; dahi: quando ambos os termos de uma fracção forem divisiveis por ambos os termos de outras, faz-se essa divisão.

III. Como gymnastica intellectual póde-se dar outro raciocinio, mais tarde. Assim, em $\frac{2}{4} \div \frac{3}{6}$, desprezando o 4, a fracção dividenda fica 4 vezes maior e o quociente tambem; desprezando o 6, a fracção divisora fica 6 vezes maior, mas o quociente fica 6 vezes menor; isto é, $2 \div 3 = \frac{2}{3}$, e este quociente é 4 vezes maior e 6 vezes menor do que queriamos. Portanto, é preciso tornal-o 4 vezes menor: $\frac{2}{3 \times 4}$; e 6 vezes

maior: $\frac{2 \times 6}{3 \times 4}$. (Lembremo-nos de que multiplicando o dividendo por um numero o quociente fica multiplicado, mas multiplicando o divisor, o quociente fica dividido).

O mesmo raciocicio para as decimaes.

III

MULTIPLICAÇÃO DE FRACÇÕES

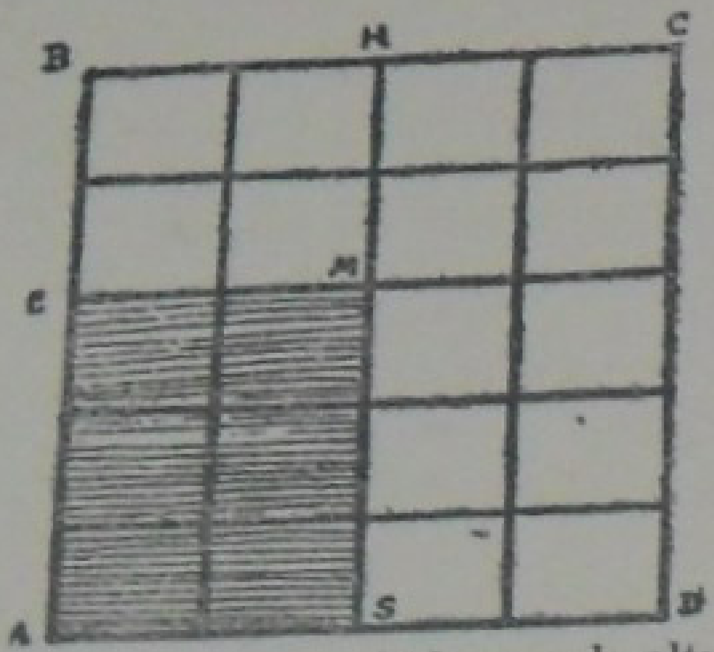
O 1.º caso é quando o multiplicador é inteiro: $\frac{3}{4} \times 2$. Multiplicar é repetir um numero tantas vezes quantas são as unidades de outro, então: $\frac{2}{4} \times 3 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4}$.

Do mesmo modo $0,3 \times 4 = 0,3 + 0,3 + 0,3 + 0,3 = 1,2$. Comparando: o numerador do resultado veiu da multiplicação do numerador da fracção dada pelo inteiro; e o denominador, da conservação do denominador da fracção dada.

Generalizando: $\frac{a}{m} \times b = \frac{ab}{m}$.

O 2.º caso é quando o multiplicador é fracção: $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5}$. Aqui, multiplicar já não é repetir $\frac{2}{4}$ tres quintos de vezes, expressão que não tem sentido.

Busquemos sua significação. Essa multiplicação se originou da procura da area de um rectangulo que tem $\frac{2}{4}$ de metro de base por $\frac{3}{5}$ de metro de altura.



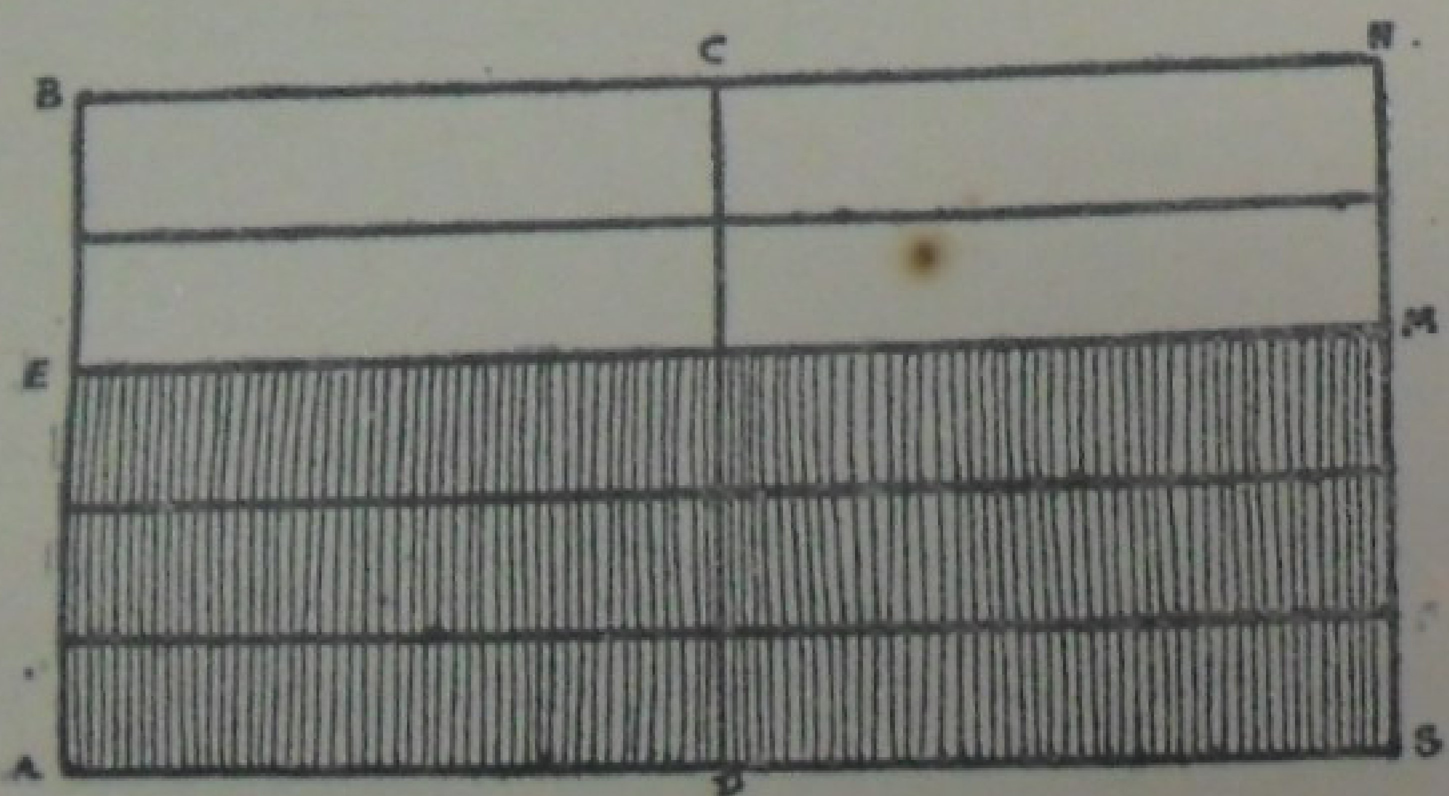
Façamos um quadrado de 1m. de base e de altura. De accordo com o problema, dividamos a base em 4 partes com linhas verticaes e separemos $\frac{2}{4}$; e a altura em 5 partes por linhas horizontaes e separemos $\frac{3}{5}$.

O rectangulo construido sobre a base de $\frac{2}{4}$ de metro e sobre a altura de $\frac{3}{5}$ de metro é AEMS.

O quadrado ABCD ficou dividido em 20 partes e o rectangulo pedido AEMS occupa $\frac{6}{20}$ do quadrado. Então; $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$. Do mesmo modo teriamos $0,4 \times 0,07 = 0,028$; e $\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$.

Comparando o resultado com os dados, vemos que para multiplicar racções, multiplicam-se os numeradores entre si e os denominadores entre **si.**

Outro exemplo do 2.º caso: $2\times\frac{3}{5}$.



Fazemos dois quadrados, cada um de 1 metro de lado. Dividindo a altura de cada um em 5 partes, e tomando $\frac{3}{5}$, temos o rectangulo de $2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$. Donde se tira a regra: multiplica-se o inteiro pelo numerador e conserva-se o denominador.

Do mesmo modo teriamos: $2\times0,7=1,4$; e $a\times\frac{b}{x}=\frac{ab}{x}$.

Para multiplicar numeros mistos, reduzimol-os primeiro a fracções improprias.

OBSERVAÇÕES

I. A multiplicação teve uma origem geometrica, como o attesta a linguagem: o termo producto é moderno, pois dizia-se "rectangulo de 3 por 4" o producto de 3 por 4; até hoje se diz quadrado e cubo o producto de um numero por si mesmo, ou uma ou duas vezes: a 4.ª potencia era quadrado-quadrado, a 5.ª quadrado-cubo; a 6.ª cubo-cubo, etc.

II. Si tivessemos de multiplicar $\frac{2}{4}$ por 1, daria (v. figura) o rectangulo ASHB, mas $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}$ dá só ASME, rectangulo que é apenas $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$: então, multiplicar $\frac{2}{4}$ por $\frac{3}{5}$ é "tomar $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$", expressão mais propria do que "multiplicar", que dá idéa de augmento (multi: muitas vezes; plicar: dobrar).

Quando o multiplicador é fracção propria, o producto é menor que o multiplicando. Por isso tambem o quadrado de uma fracção propria é menor que essa fracção: $(\frac{2}{4})^2=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{4}{16}$.

III. Quando o multiplicador é fracção, ou é a unidade, multiplicar não é repetir um numero tantas vezes quantas são as unidades de outro. Substituimos essa definição por outra, que é geral: multiplicar, é, dados dois numeros, determinar um terceiro que se forme do multiplicando, do mesmo modo que o multiplicador se forma da unidade.

Assim, em $8 \times 5 = 40$: o multiplicador sendo 5 vezes a unidade, o producto é o quintuplo do multiplicando ; em $8 \times \frac{1}{4} = 4$: o multiplicador sendo a metade da unidade, o producto é a metade do multiplicando ; em 8×1, o multiplicador sendo 1 vez a unidade, o producto é 1 vez o multiplicando.

IV. Póde-se variar o raciocinio, si a classe o desejar. Assim, para $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5}$, diremos : si em vez de $\frac{2}{4}$ fossemos multiplicar só o 2, o factor $\frac{2}{4}$ ficaria 4 vezes maior e o producto tambem ; si fosse 3, em vez de $\frac{3}{5}$, este factor ficaria 5 vezes maior e o producto tambem. Logo, o producto ficaria 4×5 vezes maior. Mas nós não queremos multiplicar 2 por 3 e sim $\frac{2}{4}$ por $\frac{3}{5}$, então o producto de 2 por 3, deverá ser dividido por 4×5, assim : $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{4 \times 5}$.

O mesmo raciocinio para $0,4 \times 0,07$ e $\frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$.