

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Luis Cesar Nunes dos Santos

**ALGUNS RESULTADOS NO ESTUDO DE FÉRMIONS E
BÓSONS EM ESPAÇOS CURVOS:
SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE DIRAC E
KLEIN-GORDON**

Florianópolis

2015

Luis Cesar Nunes dos Santos

**ALGUNS RESULTADOS NO ESTUDO DE FÉRMIONS E
BÓSONS EM ESPAÇOS CURVOS: SOLUÇÕES DAS
EQUAÇÕES DE DIRAC E KLEIN-GORDON**

Tese submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Física para a obtenção
do Grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Celso de Ca-
margo Barros Junior

Coorientador:

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Luis Cesar Nunes dos
Alguns Resultados no estudo de Férmions e Bósons em
Espaços Curvos : Soluções das Equações de Dirac e Klein-
Gordon / Luis Cesar Nunes dos Santos ; orientador, Celso
de Camargo Barros Junior - Florianópolis, SC, 2015.
154 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Equação de Dirac. 3. Equação de Klein-
Gordon. 4. Cordas Cósmicas. 5. Campo Magnético Intenso. I.
Junior, Celso de Camargo Barros. II. Universidade Federal
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

Luis Cesar Nunes dos Santos

**ALGUNS RESULTADOS NO ESTUDO DE FÉRMIONS E
BÓSONS EM ESPAÇOS CURVOS: SOLUÇÕES DAS
EQUAÇÕES DE DIRAC E KLEIN-GORDON**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 11 de Março 2015.

Prof. Luis Guilherme de Carvalho Rego
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior
Presidente

Prof. Sérgio José Barbosa Duarte

Prof. Luis Rafael Benito Castro

Prof. Sidney dos Santos Avancini

Prof. Eduardo Inacio Duzzioni

Prof. Paulo Juliano Liebgott

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos colegas de laboratório Giovanni e Franciele, pelas frutíferas discussões sobre relatividade geral e pela amizade. Agradeço aos meus pais, Luis Claudio e Eloisa, pelo apoio em minhas decisões e pela força nas horas difíceis. Ao Prof. Celso, pela orientação e pelo incentivo durante todo o trabalho. Também agradecer, de forma geral, a todos os funcionários do departamento de física que forneceram as condições para que este trabalho fosse concluído.

"Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil - e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos".

Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho efetuamos um estudo das soluções de equações de onda em espaços curvos. Abordamos a formulação das equações de Dirac e Klein-Gordon em uma geometria arbitrária. Como resultado, encontramos uma solução analítica para equação de Klein-Gordon no espaço tempo de uma corda cósmica. Na sequência resolvemos a equação de Dirac em 1+1 dimensões em um referencial acelerado para duas situações de interesse. Na primeira solução obtida, resolvemos a equação sem potencial escalar e obtemos soluções que representam energia discreta. No segundo caso, resolvemos para o potencial do tipo exponencial. Um resultado interessante foi a ocorrência de estados de energia nula em ambas soluções. Por fim estudamos a equação de Dirac no espaço-tempo de Melvin. Neste problema consideramos a métrica de um espaço que possui um campo magnético constante em uma direção. **Palavras-chave:** Equação de Dirac. Equação de Klein-Gordon. Espaços Curvos. Cordas Cósmicas. Campo Magnético Intenso

ABSTRACT

In this work, we presents solutions for the wave equations in curved space-time. We use general relativity principles to formulate quantum wave equations for bosons and fermions. We find an exact solution of the Klein-Gordon equation and determine the energy spectrum of the particle in the cosmic string space-time. In addition, we obtain two exact solutions for the 1+1 dimensional Dirac equation in Rindler space-time. In the last chapter, we consider the Dirac equation in Melvin space-time. The energy spectra are computed and we show their dependence on the magnetic field.

Keywords: Dirac Equation. Klein-Gordon Equation. Curved Space-time. Cosmic String. Strong Magnetic Field

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Sobreposição de sistemas de coordenadas	35
Figura 2	Ilustração de um plano tangente em um ponto X. [rqgravity.net]	37
Figura 3	Um vetor sendo transportado paralelamente de um ponto p até um ponto q. Note que ao final do transporte o vetor transportado pelo caminho C' é diferente do vetor transportado através do caminho C.	41
Figura 4	Um vetor V_0 no ponto p transportado até o ponto r através dos trajetos C e C'.	41
Figura 5	Construção artificial de um espaço-tempo de uma corda cósmica.	61
Figura 6	Gráfico da solução $f(y)$ para 3 valores de n, onde, por simplicidade, colocamos a constante de normalização igual a unidade.	102
Figura 7	Gráfico da solução $f(x)$ com $m=1, a=1$ e constante de normalização igual a unidade.	104
Figura 8	Gráfico da solução $f(x)$ com $m=1, a=1, k'=1$ e constante de normalização igual a unidade.	108
Figura 9	Gráfico da solução do tipo hipergeométrica para $N = 1, N = 2, N = 3$ e $N = 4$	111
Figura 10	Gráfico do espectro de energia para N variando de 2 até 8 e l variando de 2 até 8. Os valores próximos ao vermelho correspondem aos valores de energia mais elevada.	112
Figura 11	Gráfico da autofunção radial para N assumindo os valores $N = 0, N = 1, N = 2$ e $N = 3$	113
Figura 12	Potencial efetivo em função da distância r.	120
Figura 13	Espectro de energia como uma função dos números quânticos n e m . Os valores próximos do vermelho são mais intensos que aqueles próximos do azul.	122
Figura 14	Espectro de energia para três casos analisados, com um campo magnético de $B = 10^{15}$	124
Figura 15	Espectro de energia para três casos analisados, com um campo magnético de $B = 10^{13}$ gauss e número quântico n com valor máximo de 10^{20}	125
Figura 16	Espectro de energia em função do número quântico. O campo magnético assume valores , $B = 10^{17}$ G, $B = 10^{18}$ G e	

$B = 10^{19}$ G	126
Figura 17 Solução numérica para o primeiro estado excitado ($n=0$).	127
Figura 18 Solução numérica para o segundo estado excitado ($n=1$).	127
Figura 19 Solução numérica para o terceiro estado excitado ($n=2$).	128
Figura 20 Solução numérica para o quarto estado excitado ($n=3$).	129

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Energia dos estados e os números quânticos.....	78
Tabela 2	Comparação dos valores do espectro de energia para o campo magnético de diferentes corpos astronômicos.	123
Tabela 3	Comparação dos valores do espectro de energia para o campo magnético de diferentes corpos astronômicos para o espectro de energia da equação de Dirac do espaço-tempo plano.	123
Tabela 4	Comparação dos valores obtidos por cálculo numérico com os valores obtidos resolvendo analiticamente a equação de Dirac considerando a aproximação proposta na seção anterior.	126

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AB	Aharonov-Bohm	28
1+1	bi-dimensional	31
g	Determinante do tensor métrico	47
NU	metodo de Nikiforov-Uvarov	153

LISTA DE SÍMBOLOS

d	Métrica de um espaço métrico.....	33
M	Um conjunto de elementos.....	33
R	Conjunto dos Números Reais.....	33
E	energia, em geral.....	63
S	Ação.....	65

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	27
2 A MATEMÁTICA DO ESPAÇO-TEMPO CURVO	33
2.1 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS E ESPAÇOS MÉTRICOS	33
2.2 VETORES TANGENTES (VETORES CONTRAVARIANTES)	36
2.3 1-FORMAS (VETORES COVARIANTES OU VETORES COTANGENTES)	38
2.4 TENSORES	39
2.5 DERIVADA COVARIANTE E TENSOR DE RIEMANN ...	40
2.6 RELAÇÃO ENTRE O TENSOR MÉTRICO E OS SÍMBO- LOS DE CHRISTOFFEL	43
2.7 FORMALISMO DA TETRADA	44
2.8 EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN	47
2.9 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CAMPO	50
3 A MÉTRICA DA CORDA CÓSMICA	53
3.1 SOLUÇÃO EXTERNA	58
3.2 SOLUÇÃO INTERNA	58
3.3 INCLUSÃO DE CORDAS EM SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN	61
3.4 SISTEMA DE COORDENADAS NÃO INERCIAL	62
4 EQUAÇÕES DE ONDAS RELATIVÍSTICAS EM UM ESPAÇO-TEMPO PLANO	63
4.1 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON	64
4.1.1 Ação para a equação de Klein-Gordon	64
4.1.2 Solução da equação de Klein-Gordon: Partícula livre	65
4.2 EQUAÇÃO DE DIRAC	66
4.2.1 Propriedades das matrizes γ^μ	68
4.2.2 Acoplamento eletromagnético	69
4.2.3 Partícula Livre	71
4.2.4 Átomo de Hidrogênio	74
5 EQUAÇÕES DE DIRAC E KLEIN-GORDON EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO	81
5.1 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO CURVO ..	81
5.2 GRUPO DE LORENTZ E A EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇO-TEMPO CURVO	83
5.2.1 Grupo de Lorentz	83
5.2.2 Equação de Dirac em Espaço-tempo Curvo.....	87

6 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE ONDA EM ESPAÇOS CURVOS	91
6.1 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC BI-DIMENSIONAL EM UM REFERENCIAL ACELERADO (ESPAÇO-TEMPO DE RINDLER)	91
6.1.1 Derivando a equação de Dirac	92
6.1.2 Separação de variáveis	94
6.1.3 Desacoplamento das funções	95
6.1.4 Solução aproximada	96
6.1.4.1 Autovalores de Energia e autofunções	97
6.1.4.2 Estado de energia nula	103
6.1.5 Solução exata	103
6.1.5.1 Existência do estado de Energia nula	107
6.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO TEMPO DE UMA CORDA CÓSMICA	108
6.2.1 Solução exata	110
6.2.2 Espectro de Energia	110
6.2.3 Análise dos efeitos da rotação nas autofunções	112
7 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC NO ESPAÇO-TEMPO DE MELVIN	115
7.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS	121
7.2 ANÁLISE NUMÉRICA	125
8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	131
9 DIREITOS AUTORAIS	133
REFERÊNCIAS	135
APÊNDICE A – O espaço-tempo de Rindler	147
APÊNDICE B – O método NU	153

1 INTRODUÇÃO

Na escala macroscópica a teoria da relatividade geral vem obtendo significativo sucesso na descrição do comportamento físico, de planetas no sistema solar até o universo como um todo. Entretanto, a relatividade geral é uma teoria clássica, no sentido que não incorpora efeitos quânticos. Nessa ótica, podemos pensar na teoria como uma aproximação de uma formulação que leve em conta os efeitos quânticos (WALD, 1984). Como toda aproximação, deve haver um limite em que essa descrição não seja adequada. De fato, em escala atômica, os efeitos quânticos se sobrepõem aos clássicos, onde a constante de Planck surge como uma constante fundamental.

Efeitos da relatividade restrita foram incorporados em equações de ondas quânticas tais como as equações de Dirac e Klein-Gordon. Inicialmente a equação de Klein-Gordon foi interpretada como uma equação descrevendo uma partícula. Essa interpretação foi em seguida substituída devido à existência de densidades de probabilidades negativas, além de energias negativas.

A equação de Dirac apresenta densidade de probabilidade positiva definida, no entanto, ainda ocorrem energias negativas associadas a antipartículas. Por isso, a visão da equação de Dirac como equação para uma partícula deve ser substituída em uma abordagem mais realista, uma vez que ela descreve partículas e antipartículas. A interpretação como equações para *campos* é assumida tanto para a equação de Klein-Gordon quanto para a equação de Dirac (RYDER, 1996), em um contexto da teoria quântica de campos.

Apesar da necessidade da equação de Dirac ser considerada uma equação para campos, a interpretação como uma equação para partícula fornece bons resultados para o valor do momento magnético do elétron e dos níveis de energia do átomo de hidrogênio (RYDER, 1996). Isso nos motivou a estudar, em diferentes contextos, equações de ondas para partículas de spin-0 e spin- $\frac{1}{2}$ com a finalidade de calcular níveis de energia e possíveis correções nesses valores.

Quando aplicamos a equação de Dirac para resolver o problema do átomo de hidrogênio, por exemplo, estamos assumindo um espaço de Minkowski de fundo, que naturalmente não possui curvatura. A situação muda sensivelmente quando tentamos incorporar no formalismo geometrias relacionadas a espaços curvos. Para trabalhar com tais geometrias, devemos aceitar que de alguma forma a estrutura do espaço-tempo pode ser modificada. Nesta situação, estamos no terreno

da relatividade geral, que trata justamente da relação entre o espaço-tempo, matéria e energia.

Segundo a relatividade geral, a presença de matéria e energia modifica a geometria do espaço-tempo de uma maneira que pode ser relacionada em uma única equação, a chamada equação de campo de Einstein (WEINBERG, 1972), dada pela expressão¹

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Do lado esquerdo dessa equação estão os objetos matemáticos relacionados a geometria do espaço-tempo, isto é, os tensores de Ricci de curvatura $R_{\mu\nu}$, curvatura escalar R e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. No lado direito, está o tensor de energia-momento que descreve a energia e o momento de uma dada configuração de matéria no espaço-tempo.

Por outro lado, equações de onda para spin-0 e spin-1/2 no espaço-tempo plano são capazes de fornecer soluções em que as partículas estão em estados ligados. Dentre essas soluções, destacamos os resultados obtidos com o uso do potencial de Aharonov-Bohm (AB) (AHARONOV; BOHM, 1959; PESHKIN; TONOMURA, 1989), que pode ser exatamente solúvel nas equações de ondas não relativísticas e relativísticas. Possui uma rica estrutura algébrica que permite o estudo detalhado de muitos aspectos físicos das partículas (YAU; POORTERE; SHAYEGAN, 2002; ALFORD; WILCZEK, 1989). É um tipo de interação que pode ser obtida considerando um elétron viajando sob efeito de um potencial vetor A_μ , relacionado a um fluxo magnético confinado em um tubo com topologia equivalente a de um cilindro (KHALILOV, 2005). Na mecânica não relativística temos a solução da equação de Schroedinger para o oscilador harmônico, usada para modelar uma gama de sistemas físicos. No caso relativístico temos o chamado oscilador de Dirac, que foi proposto com a finalidade de quando considerarmos o limite não relativístico da equação de Dirac, termos o oscilador harmônico usual recuperado (BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; SOLANO, 2007a; BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; LUIS, 2008a; BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; SOLANO, 2007b; BERMUDEZ; MARTIN-DELGADO; LUIS, 2008b; ITÁ'; MORI; CARRIERE, 1967; JAYNES; CUMMINGS, 1963; MANDAL; VERMA, 2010a; MARTINEZ-Y-ROMERO; NUNEZ-YEPEZ; SALAS-BRITO, 1995; MOSHINSKY; SZCZEPANIAK, 1989; PACHECO; LANDIM; ALMEIDA, 2003a; QUESNE; MOSHINSKY, 1990; ROZMEJ; ARVIEU, 1999; VILLALBA, 1994). O potencial de

¹Nos próximos capítulos discutiremos detalhes da equação de Einstein. Para maiores informações procurar em: Weinberg, S. Gravitation and Cosmology John Wiley & Sons, 1972.

Coulomb, bem estudado na mecânica quântica (SCHIFF, 1968; DIRAC, 1958; LANDAU; LIFSHITZ, 1977), é outro exemplo de potencial que proporciona soluções representando estados ligados. Este potencial surge na equação de Dirac como a componente temporal do potencial vetor. Porém, acoplar a equação de Dirac com um potencial vetor não é a única maneira de uma partícula interagir com um campo externo. Considerando a conservação da corrente da equação de Dirac, podemos levar em conta os potenciais escalar, pseudoescalar, pseudovetorial e tensorial.

Em anos recentes, vem sendo dada atenção para chamado potencial escalar, que em vez de entrar como um potencial vetor, é introduzido junto a massa da partícula, com a substituição $m \rightarrow m + V(x)$. Na literatura há ainda a menção à chamada massa variável, em que a massa constante é repassada por uma massa variável² (PLASTINO; CASAS; PLASTINO, 2001; DEKAR; CHETOUANI; HAMMANN, 1999; ALHAIDARI, 2002; ROY; ROY, 2002; SOUZA; ALMEIDA, 2000; MUSTAFA; MAZHARIMOUSAVI, 2006; YU; DONG, 2004; YU; DONG; SUN, 2004; DONG et al., 2007). Neste contexto, a equação de Dirac foi resolvida para o potencial de Coulomb com a presença de uma massa variável (ALHAIDARI, 2004). Devido à ocorrência da massa variável, essa solução apresenta um espectro de energia com correções nos níveis de energia, no entanto, no limite em que a massa variável se reduz à massa constante, o espectro de energia do problema de Coulomb usual é recuperado. No contexto de um espaço-tempo de uma corda cósmica, foi efetuado um estudo das soluções da equação de Dirac com massa variável (MARQUES; BEZERRA; DONG, 2013). Neste caso, além dos efeitos da massa variável, o espectro de energia sofreu correções devido a topologia da corda cósmica.

Outro ponto de atenção da comunidade científica, são os efeitos no movimento de partículas em referenciais não inerciais na mecânica quântica. Sabe-se que o uso destes referenciais pode ocasionar efeitos mensuráveis no comportamento sistemas quânticos, dentre os quais podemos destacar o efeito Sagnac (SAGNAC, 1913a; POST, 1967; SAGNAC, 1913b), o efeito Mashhoon (MASHHOON, 1988), a existência do acoplamento entre o momento angular e a velocidade angular de um sistema de referência em rotação (HEHL; NI, 1990; PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979). Além de referenciais em rotação, referenciais com aceleração linear constante também são fonte de estudos em mecânica quântica. O espaço-tempo de Rindler, que descreve um referencial com aceleração constante, tem um interesse especial, no contexto da teoria quântica de campos, devido ao efeito Unruh (FULLING, 1973; DAVIES,

²A rigor, a massa variável pode ser interpretada como um campo escalar acoplado a massa de repouso da partícula.

1975; UNRUH, 1976). Este efeito revela que um referencial acelerado experimenta um banho térmico de partículas. Em nosso trabalho resolveremos, no contexto de equações de onda para uma partícula, a equação de Dirac para dois casos de interesse, onde a influência da aceleração no espectro de energia e nas autofunções, será calculada. Nos capítulos 6 e 7 discutiremos em detalhes esses problemas.

Ainda no contexto de referenciais não inerciais, partículas sob ação de forças gravitacionais apresentam um comportamento alterado devido à interação com campos gravitacionais. Um exemplo marcante desse fato pode ser analisado na interação de neutrinos com a gravidade (BRILL; WHEELER, 1957). Neutrinos são partículas com $\text{spin}-1/2$ e com uma massa muito pequena ou nula. Dessa forma, podem ser descritos pela equação de Dirac com a massa nula. Agora se considerarmos o efeito da gravidade, como uma alteração da geometria do espaço-tempo, a forma correta de levar em conta essa influência é trocando derivadas usuais por derivadas covariantes e o tensor métrico do espaço-tempo plano pelo tensor métrico geral.

Em relação ao átomo de hidrogênio, sob efeito da gravidade (COHEN; POWERS, 1982; BARROS, 2005, 2006), há trabalhos que estudam a influência da curvatura de um espaço-tempo arbitrário em determinados níveis de energia (PARKER, 1980b, 1980a, 1981b, 1981a; PARKER; PIMENTEL, 1982). Em especial, descobriu-se que além dos efeitos de geometria, a topologia do espaço tempo desempenha um papel importante no espectro de energia de um átomo. O espaço-tempo de uma corda cósmica, que representa um defeito topológico no espaço-tempo, apresenta algumas propriedades interessantes. Localmente esse espaço-tempo é plano, mas globalmente a coordenada angular possui um déficit angular e essa característica causa um desvio nos níveis de energia (MARQUES; BEZERRA, 2002).

Um estudo interessante, que interpreta a modificação da métrica devido unicamente aos potenciais eletromagnéticos ou nucleares, foi publicado recentemente (BARROS, 2005). Em particular foram obtidos resultados referentes a uma métrica esfericamente simétrica, em que a curvatura é associada ao potencial eletromagnético. O potencial gravitacional foi desconsiderado, pois seus efeitos em escalas atômicas são pequenos quando comparados ao potencial eletromagnético. De fato, o espectro de energia, obtido da equação de Dirac radial para o átomo de hidrogênio nessa formulação, indica uma boa concordância com os dados experimentais.

Seguindo nessa linha, estudos da métrica de Kerr com o uso do formalismo de Newman-Penrose, que é baseado em uma escolha especí-

fica da base tetrada (SUCU; ÜNAL, 2004), foram feitos para derivar a forma explícita da equação de Dirac nesse contexto (NEWMAN; PENROSE, 1962), onde a separação das coordenadas angulares das coordenadas radiais é feito com base no ansatz de Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1976).

Atualmente existem indícios da existência de campos magnéticos da ordem de 10^{15} Gauss nas proximidades da superfície de um magnetar. Uma questão de interesse é se campos dessa magnetude possam ter efeitos importantes na estrutura do espaço-tempo, e assim uma influência significativa no comportamento de partículas nas suas proximidades. O que faremos nesta tese é estudar essas questões, ou seja, o efeito da curvatura do espaço-tempo nas soluções de equações de onda. Para isso, desenvolveremos o formalismo necessário e depois mostraremos como pode ser aplicado em alguns casos de interesse.

No segundo capítulo, faremos um breve estudo da teoria de variedades, que são espaços em que o formalismo da Relatividade Geral é construído. Vetores covariantes e contravariantes irão ser definidos de forma independente de um sistema de coordenadas nessa formulação. Os símbolos de Christoffel serão relacionados ao tensor métrico, proporcionando, dessa forma, um algoritmo para computarmos as conexões com as derivadas do tensor métrico. Os tensores de Ricci e de curvatura escalar serão relacionados aos os símbolos de Christoffel através de derivadas. E por fim, a equação de Einstein será derivada usando o princípio variacional, onde será mostrado que a combinação do tensor de Ricci e curvatura escalar é proporcional ao tensor energia momento.

Na etapa seguinte, estudaremos o procedimento de resolução da equação de Einstein. Exemplificaremos o procedimento para a métrica da corda cósmica, onde derivaremos a solução interna e externa para uma corda infinita. Também examinaremos a métrica escrita em um referencial em rotação constante.

Em seguida, no quarto capítulo, abordaremos a formulação das equações de Dirac e Klein-Gordon em espaço-tempo plano (ROSE, 1961). Examinaremos a solução elementar, relacionada a partícula livre, onde a ocorrência de estados de energia negativa será constatada. A solução da equação de Dirac relacionada ao átomo de hidrogênio será estudada posteriormente.

A passagem para a equação de Dirac e Klein-Gordon em espaço curvo será feita através da promoção das derivadas convencionais a derivadas covariantes e com a substituição da métrica do espaço plano, para o tensor métrico $g_{\mu\eta}$. Em especial, a equação de onda para férmions, necessita de um estudo do comportamento de espinores

em relação a transformações de coordenadas, isso nos levará a análise do grupo de Lorentz, em que necessitaremos usar a representação espinorial. Para esse fim, faremos uso de tetradas que, em certo sentido, podem ser escolhidas de forma a obter equações mais simples.

Os capítulos 6 e 7 serão dedicados à exposição dos resultados obtidos em nosso estudo. Começaremos com a resolução da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo da corda cósmica. Nesta solução consideraremos efeitos não inerciais devido ao uso de um referencial em rotação constante. A seguir estudaremos equação de Dirac em 1+1 dimensões em um referencial acelerado³. Na primeira solução obtida, resolvemos a equação sem potencial escalar e obtemos uma solução que representa energia discreta. No segundo caso resolvemos para o potencial do tipo exponencial. Um resultado interessante foi a ocorrência de estados de energia nula. Nas duas soluções obtidas verificamos a ocorrência de tal solução. No capítulo 7 estudaremos a equação de Dirac no espaço-tempo de Melvin. Neste problema consideramos a métrica de um espaço que possui um campo magnético constante em uma direção. Por fim, finalizaremos esse trabalho com as conclusões e discutiremos perspectivas futuras.

³Consideraremos uma aceleração linear constante, diferente, portanto, da aceleração devido ao uso de um referencial em rotação.

2 A MATEMÁTICA DO ESPAÇO-TEMPO CURVO

Discutiremos nesse capítulo o aparato matemático necessário para trabalharmos com o espaço-tempo da relatividade geral (CHANDRASEKHAR, 1985; WALD, 1984). Inicialmente estudaremos algumas definições, necessárias ao entendimento de estruturas matemáticas que permeiam a teoria generalizada da relatividade.

2.1 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS E ESPAÇOS MÉTRICOS

A noção de distância é um conceito muito intuitivo, podemos pensar em distância como a separação entre dois pontos na superfície da Terra por exemplo. Na matemática o conceito de distância é capturado e escrito em uma forma muito precisa através de um objeto chamado métrica. Assim podemos definir, para um conjunto qualquer de elementos, uma métrica tendo em mente a idéia de distância.

Definição *seja M um conjunto. Uma métrica em M é uma função*

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para quaisquer $x, y, z \in M$ tenhamos:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$;
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Dessa forma uma métrica, denotada por d , é uma função que associa elementos do produto $M \times M$ a um número real. Em uma linguagem formal, dizemos que o par formado por um conjunto qualquer M e uma métrica d , ou seja, (M, d) forma um *espaço métrico*. Decorre dessa definição que a função $d(x, y) = |x - y|$, por exemplo, forma uma métrica pois satisfaz as três condições.

Tendo em mente a aplicação em física, especificamente na teoria da relatividade, a primeira condição deixa de ser válida, pois as métricas que surgem na teoria podem assumir valores negativos. Por isso são denominadas algumas vezes de pseudo-métricas.

O espaço métrico na forma em que foi definido se constitui em uma estrutura muito geral e abrangente e a função métrica, a ele associada, em uma função que nos auxilia no estudo das propriedades geométricas bem como na continuidade de funções. Uma pergunta que poderíamos fazer: Existe alguma estrutura que seria mais abrangente

que um espaço métrico? A resposta para essa pergunta é positiva, podemos definir uma classe de objetos que são estudados sem a necessidade de uma métrica, os chamados *espaços topológicos*. Em vez de um conjunto e uma métrica, um espaço topológico é caracterizado por um conjunto e uma *topologia*

Definição *Dado um conjunto X e uma família τ de subconjuntos de X diremos que τ é uma topologia em X se:*

- 1) $\emptyset, X, \in \tau$;
- 2) se $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$, onde L é um conjunto arbitrário de índices, então a reunião $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ pertence a τ ;
- 3) se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ então a interseção $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ pertence a τ .

Se juntarmos o par (X, τ) , teremos um *espaço topológico*, onde X é um conjunto arbitrário e τ é uma *topologia* em X .

Em um contexto matemático, um espaço topológico é a estrutura mais geral em que os conceitos de continuidade, conexidade e compacidade estão definidos (KÄHLKAMP, 2002).

No presente trabalho, nosso interesse está focado em uma classe de espaços topológicos, chamados de variedades. Tais espaços possuem a propriedade de parecerem Euclidianos em uma região pequena do espaço. A superfície da Terra é um exemplo, quando a olhamos do chão temos a impressão que a sua superfície é plana, no entanto, ao observarmos de certa altura, percebemos que a mesma possui forma arredondada. Em outras palavras, quando temos uma visão global da Terra percebemos sua forma esférica levemente achatada nos polos. Formalmente uma variedade deve possuir as seguintes propriedades

1) *Para cada ponto p pertencente a uma variedade M , encontra-se no mínimo um subconjunto O_α . Onde a coleção $\{O_\alpha\}$ cobre a variedade M .*

2) *Para cada a , há uma relação um-para-um no mapa $\psi_a : O_a \rightarrow U_a$, onde U_a é um conjunto aberto do \mathbb{R}^n .*

3) *Se dois conjuntos O_a e O_b se sobrepõem devemos ter $O_a \cap O_b \neq \emptyset$ então o mapa $\phi \circ \psi^{-1}$ associa pontos em $\psi_a [O_a \cap O_b] \subset O_a \subset \mathbb{R}^n$ a pontos em $\psi_b [O_a \cap O_b] \subset O_b \subset \mathbb{R}^n$.*

Os mapas ψ associados às variedades são chamados de cartas pelos matemáticos e de sistemas de coordenada pelos físicos. A terceira propriedade, ilustrada na Figura 1, indica que as funções que mapeiam as variedades devem possuir derivadas de qualquer ordem, isto é, as chamadas funções de classe C^∞ .

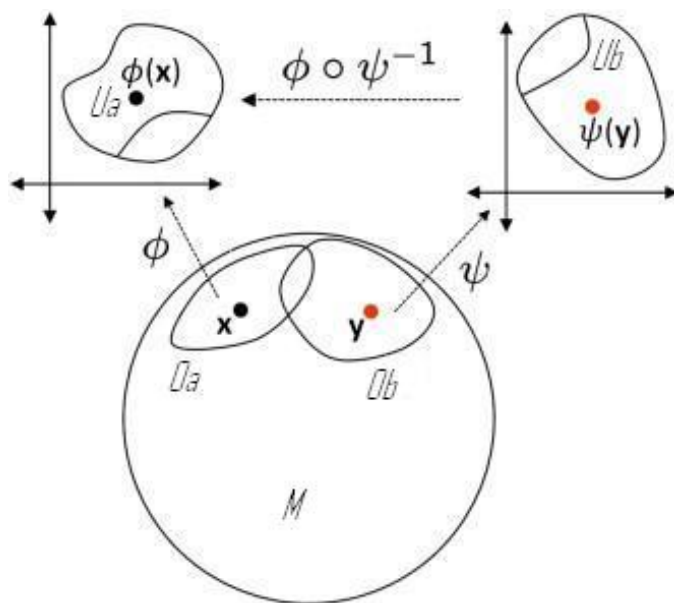


Figura 1: Sobreposição de sistemas de coordenadas

2.2 VETORES TANGENTES (VETORES CONTRAVARIANTES)

Vamos considerar a coleção de funções de classe C^∞ da variedade M , denotadas por F , que associam números reais à M . Um vetor tangente (ou vetor contravariante) é definido como um mapa $\mathbf{X} : F \rightarrow \mathbb{R}$ que é linear e obedece a regra de Leibnitz, ou seja,

- a) $(\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y})f = \alpha(\mathbf{X}f) + \beta(\mathbf{Y}f)$ onde $f \in F; \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
 b) $\mathbf{X}(fg) = f\mathbf{X}g + g\mathbf{X}f$ com $f, g \in F.$

Das condições anteriores, um vetor tangente é definido pela equação

$$\mathbf{X}f = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = X^j f_{,j}. \quad (2.1)$$

A Figura 2 ilustra como os vetores tangentes podem ser visualizados. Considerando uma variedade do tipo esférica imersa no \mathbb{R}^n , os vetores tangentes estão localizados no plano tangente a um ponto X nessa variedade, no entanto, essa forma de visualização é limitada. Tendo em vista que na física teórica um espaço-tempo não necessita estar imerso em outro espaço-tempo com dimensionalidade maior, ou seja, em muitas situações devemos determinar as características geométricas somente com propriedades intrínsecas da variedade.

O espaço dos vetores contravariantes é uma variedade n dimensional que pode ser denotada por $T_p(M)$. Se usarmos outra base de vetores podemos escrever a relação

$$e_a = \Phi_a^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (2.2)$$

ou sua forma inversa

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \Phi^b_j e_b,$$

naturalmente, os termos Φ_a^k e Φ^b_j satisfazem as relações

$$\Phi_a^k \Phi^a_j = \delta^k_j \text{ e } \Phi_a^k \Phi^b_k = \delta_a^b. \quad (2.3)$$

Dessa forma, dada uma base (e_j) , um vetor tangente pode ser escrito na forma

$$\mathbf{X} = X^j e_j.$$

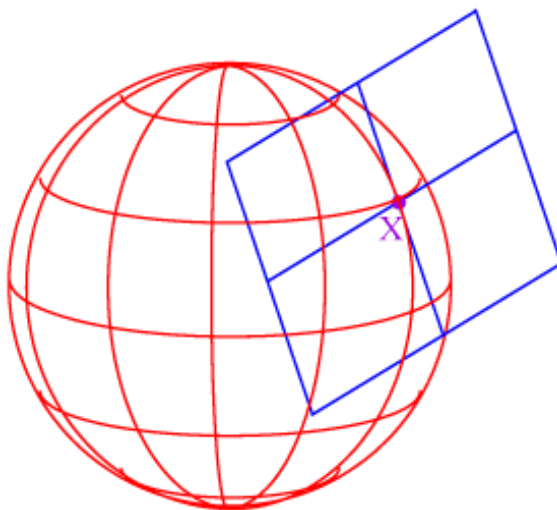


Figura 2: Ilustração de um plano tangente em um ponto X. [rqgravity.net]

2.3 1-FORMAS (VETORES COVARIANTES OU VETORES COTANGENTES)

Considerando um espaço tangente T_p , podemos associar números reais a vetores tangentes (eventualmente 1-formas podem ser associadas a números complexos e a outros objetos matemáticos) através das chamadas 1-formas, ω , ou seja,

$$\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

iremos denotar por

$$\omega(\mathbf{X}) = \langle \omega, \mathbf{X} \rangle,$$

sendo $\omega(\mathbf{X})$ um número real e \mathbf{X} um vetor contravariante. Dados dois vetores tangentes \mathbf{X} , \mathbf{Y} e dois escalares α e β a linearidade do mapa é expressa por

$$\langle \omega, \alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y} \rangle = \alpha \langle \omega, \mathbf{X} \rangle + \beta \langle \omega, \mathbf{Y} \rangle. \quad (2.4)$$

As 1-formas abrangem um espaço vetorial, denotado por T_p^* , chamado de espaço cotangente. Podemos associar 1-formas do tipo e^i com uma base de vetores contravariantes e_j através da relação

$$\begin{aligned} e^i(\mathbf{X}) &= \langle \omega, \mathbf{X} \rangle \\ &= \langle e^i, X^j e_j \rangle \\ &= X^j \langle e^i, e_j \rangle \\ &= X^j \delta^i_j = X^i. \end{aligned} \quad (2.5)$$

De modo geral, as 1-formas são escritas

$$\begin{aligned} \langle \omega, \mathbf{X} \rangle &= \langle \omega, X^j e_j \rangle \\ &= X^j \langle \omega, e_j \rangle \\ &= \omega_j X^j. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assim, temos construído até aqui um formalismo que não depende do sistema de coordenadas utilizado, uma vez que é definido de forma a não fazer menção a um sistema de coordenadas específico. Em grande parte dos livros textos é comum o uso das bases coordenadas locais. Para o espaço T_p , a base coordenada local é $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} \right\}$, que pode ser relacionada

com uma base no espaço T_p^* que desempenha uma função equivalente. Observando que a diferencial de uma função df satisfaz a definição dada anteriormente das formas diferenciais e se definirmos a ação de df em um vetor contravariante pela equação

$$\langle df, \mathbf{X} \rangle = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad (2.7)$$

então a ação da diferencial dx^i na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} \right\}$ é escrita pela relação

$$\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad (2.8)$$

assim $\{dx^i\}$ é uma base no espaço T_p^* que é dual à base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} \right\}$ do espaço T_p .

2.4 TENSORES

Tendo definido vetores tangentes e cotangentes sobre os espaços T_p e T_p^* respectivamente, podemos pensar no produto cartesiano entre r espaços T_p e s espaços T_p^* :

$$\Pi_r^s = T_p^* \times T_p^* \times \dots \times T_p^* \times T_p \times T_p \times \dots \times T_p, \quad (2.9)$$

segundo nessa linha, desejamos construir um mapa multilinear, denotado por \mathbf{T} , que associa números reais a variedade Π_r^s , isto é,

$$\mathbf{T} : \Pi_r^s \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Definindo uma operação de produto de tensores por $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'$ e dadas as bases $\{e_i\}$ e $\{e^j\}$ um tensor do tipo (r, s) é escrito como

$$\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}, \quad (2.10)$$

a quantidade $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ denota as componentes do tensor, compatível com a notação usual¹.

¹No decorrer do texto iremos manter o uso da notação de componentes para vetores e tensores.

2.5 DERIVADA COVARIANTE E TENSOR DE RIEMANN

Dado um vetor contravariante do tipo $\mathbf{X} = X^j e_j$ a derivada usual em relação a componente x^i é definida como um limite do tipo

$$\frac{\partial X^j}{\partial x^i} = \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \frac{X^j(x + \Delta x) - X^j(x)}{\Delta x^i}. \quad (2.11)$$

A expressão acima indica que estamos comparando, isto é, subtraindo vetores no numerador que estão em pontos diferentes da variedade, no entanto, em um espaço euclidiano o vetor no ponto x pode ser transportado até o ponto $x + \Delta x$ sem ser alterado implicando que a definição acima é válida para este caso. Para uma variedade curva, em geral, devemos transportar e também manter os vetores paralelos acrescentando um termo devido a curvatura (NAKAHARA, 2003). Dessa forma a derivada covariante de um vetor contravariante é escrita acrescentando um termo (conexão afim) na derivada convencional

$$X^j_{;i} = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} + X^k \Gamma^j_{ik}, \quad (2.12)$$

de forma semelhante, a derivada covariante das componentes de um vetor covariante é dada por

$$X_{j;i} = \frac{\partial X_j}{\partial x^i} - X_k \Gamma^i_{jk}. \quad (2.13)$$

Como observado anteriormente, em um espaço curvo, se transportarmos um mesmo vetor por trajetórias distintas teremos vetores diferentes, conforme ilustra a figura 3.

Assim podemos pensar em uma maneira de quantificar essa diferença entre vetores transportados por caminhos distintos. Naturalmente, acreditamos que a diferença das trajetórias está relacionada a alguma característica intrínseca da variedade tal como a curvatura. Para isso consideramos um esquema de transporte paralelo ilustrado na Figura 4. Denotando por $V_C^\mu(q)$ o vetor transportado até o ponto q pela curva C temos que sua relação com o vetor V_0^μ é obtida pela equação

$$V_C^\mu(q) = V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(p) \varepsilon^\nu, \quad (2.14)$$

enquanto que $V_C^\mu(r)$ se relaciona com o vetor $V_C^\mu(q)$ de forma similar

$$V_C^\mu(r) = V_C^\mu(q) - V_C^\kappa \Gamma^\mu_{\nu\kappa}(q) \delta^\nu, \quad (2.15)$$

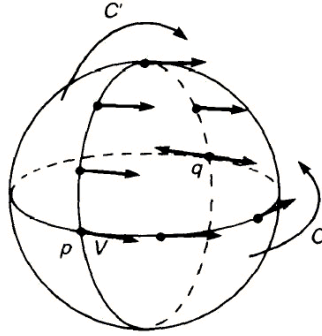


Figura 3: Um vetor sendo transportado paralelamente de um ponto p até um ponto q . Note que ao final do transporte o vetor transportado pelo caminho C' é diferente do vetor transportado através do caminho C .

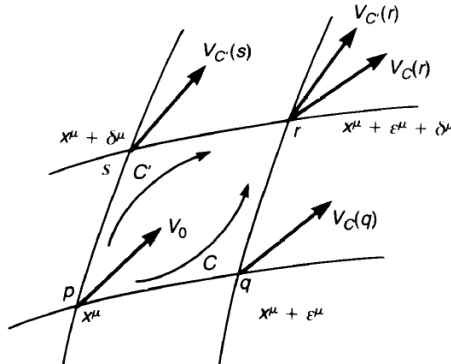


Figura 4: Um vetor V_0 no ponto p transportado até o ponto r através dos trajetos C e C' .

onde os elementos ε^ν e δ^ν quantificam a separação dos pontos q e s em relação ao ponto p respectivamente. Substituindo a equação (2.14) na equação (2.15)

$$V_C^\mu(r) = V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu - [V_0^\kappa - V_C^\rho \Gamma_{\zeta\rho}^\kappa(p) \varepsilon^\zeta] \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q) \delta^\nu \quad (2.16)$$

e, além disso, considerando $\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q) = \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) + \partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\lambda + \dots$ a equação (2.16) fica

$$\begin{aligned} V_C^\mu(r) &= V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q) \delta^\nu + V_C^\rho \Gamma_{\zeta\rho}^\kappa(p) \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q) \delta^\nu \varepsilon^\zeta \\ &= V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu - V_0^\kappa [\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) + \partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\lambda] \delta^\nu \\ &\quad + V_C^\rho \Gamma_{\zeta\rho}^\kappa(p) [\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) + \partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\lambda] \delta^\nu \varepsilon^\zeta. \end{aligned}$$

Descartando termos de segunda ordem em δ e ε

$$\begin{aligned} V_C^\mu(r) &= V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \delta^\nu - V_0^\kappa \partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\lambda \delta^\nu \\ &\quad + V_C^\rho \Gamma_{\zeta\rho}^\kappa(p) \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \delta^\nu \varepsilon^\zeta \\ &= V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \delta^\nu \\ &\quad - V_0^\kappa [\partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho(p) \Gamma_{\nu\rho}^\mu(p)] \delta^\nu \varepsilon^\lambda. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Repetindo o mesmo procedimento para o vetor transportado até o ponto p pela curva C' obtemos

$$\begin{aligned} V_{C'}^\mu(r) &= V_0^\mu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \delta^\nu - V_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu \\ &\quad - V_0^\kappa [\partial_\nu \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu(p) - \Gamma_{\nu\kappa}^\rho(p) \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(p)] \delta^\nu \varepsilon^\lambda. \end{aligned}$$

Assim usamos essas relações para quantificar a diferença entre os vetores

$$\begin{aligned} V_{C'}^\mu(r) - V_C^\mu(r) &= -V_0^\kappa [\partial_\nu \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu(p) - \Gamma_{\nu\kappa}^\rho(p) \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(p)] \delta^\nu \varepsilon^\lambda \\ &\quad + V_0^\kappa [\partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho(p) \Gamma_{\nu\rho}^\mu(p)] \delta^\nu \varepsilon^\lambda \\ &= V_0^\kappa [\partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu(p) \\ &\quad - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho(p) \Gamma_{\nu\rho}^\mu(p) + \Gamma_{\nu\kappa}^\rho(p) \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(p)] \delta^\nu \varepsilon^\lambda \\ &= V_0^\kappa R_{\kappa\lambda\nu}^\mu \delta^\nu \varepsilon^\lambda \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde definimos o chamado tensor de Riemann pela equação

$$R_{\kappa\lambda\nu}^\mu = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\nu\kappa}^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\mu, \quad (2.19)$$

que nos fornece a quantificação da curvatura. É possível mostrar que $R^\mu_{\kappa\lambda\nu}$ é o único tensor que pode ser construído a partir do tensor métrico e suas derivadas de primeira e segunda ordem, sendo linear na derivada de segunda ordem. No entanto, podemos formar outros tensores usando como base, combinações do tensor de Riemann. O chamado *tensor de Ricci* é definido como uma contração do tensor de Riemann

$$R_{\mu\kappa} = R^\lambda_{\mu\lambda\kappa}, \quad (2.20)$$

enquanto que a *curvatura escalar* é obtida pelo produto do tensor métrico com o tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (2.21)$$

Como veremos a seguir, as quantidades R e $R_{\mu\kappa}$ serão constituintes fundamentais da equação que determina o comportamento do campo gravitacional.

2.6 RELAÇÃO ENTRE O TENSOR MÉTRICO E OS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

O termo de conexão Γ^i_{jk} que aparece na derivada covariante, pode ser escrito em função do tensor métrico e suas derivadas, recebendo a designação de símbolo de Christoffel. O passo inicial é mostrar a nulidade da derivada covariante do tensor métrico. Para fazer isso, descemos o índice de uma derivada covariante $X^k_{;i}$ de um tensor qualquer

$$X_{j;i} = g_{jk} X^k_{;i}. \quad (2.22)$$

E então descendo o índice de um vetor arbitrário

$$X_j = g_{jk} X^k, \quad (2.23)$$

agora se aplicarmos a derivada covariante nesse vetor, temos

$$X_{j;i} = g_{jk} X^k_{;i} + X^k g_{jk;i}, \quad (2.24)$$

comparando essa equação com a equação (2.22) concluímos que

$$g_{jk;i} = 0. \quad (2.25)$$

Esse resultado permite aplicarmos a derivada covariante no tensor métrico e dessa forma obter a relação

$$\begin{aligned} g_{ik;l} &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - g_{mk} \Gamma_{jl}^m - g_{im} \Gamma_{kl}^m \\ &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - \Gamma_{kjl} - \Gamma_{ikl} \\ &= 0, \end{aligned}$$

agora permutamos os índices de $g_{ik;l}$, e obtemos as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} &= \Gamma_{kil} + \Gamma_{ikl}, \\ \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} &= \Gamma_{ikl} + \Gamma_{lik}, \\ -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} &= -\Gamma_{lki} - \Gamma_{kli}. \end{aligned}$$

Por fim, multiplicamos por $1/2$ e somamos todos os termos, o resultado, considerando a simetria $\Gamma_{kli} = \Gamma_{kil}$, é dado por

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right). \quad (2.26)$$

Essa expressão é muito útil pois fornece uma maneira explícita de calcularmos as conexões partindo do tensor métrico. Subindo o primeiro índice, temos uma forma alternativa dos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (2.27)$$

2.7 FORMALISMO DA TETRADA

Utilizando o chamado formalismo da tetrada ou vierbein estaremos acrescentando uma liberdade adicional na teoria até então desenvolvida. Isso irá permitir que a descrição de partículas de spin $\frac{1}{2}$, em espaço tempo-curvo, seja feita em um esquema unificado. Além disso, poderemos ter liberdade de escolher uma base tetrada apropriada que poderá implicar em uma simplificação das equações em um contexto da relatividade geral.

Em cada ponto do espaço-tempo pode ser estabelecida uma base

de quatro vetores contravariantes

$$e_{(a)}{}^i \text{ onde } (a = 1, 2, 3, 4), \quad (2.28)$$

entre parênteses² temos os índices da tetrada e na parte superior temos o índice referente ao vetor contravariante. Associada a esse vetor, temos uma tetrada de vetor covariante

$$e_{(a)i} = g_{ik} e_{(a)}{}^k, \quad (2.29)$$

e definimos a tetrada inversa $e^{(b)}{}_i$ de modo a relacionar-se com $e_{(a)}{}^i$ através da equação

$$e_{(a)}{}^i e^{(b)}{}_i = \delta^{(b)}_{(a)}. \quad (2.30)$$

Decorrem das definições anteriores as relações

$$e_{(a)}{}^i e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)}, \quad (2.31)$$

$$e_{(a)}{}^i e_{(b)j} = \delta^i_j, \quad (2.32)$$

$$e_{(a)}{}^i e_j^{(a)} = \delta^i_j, \quad (2.33)$$

$$e_{(a)i} e_j^{(a)} = g_{ij}. \quad (2.34)$$

De forma geral, dado um campo vetorial, podemos projetá-lo em um referencial de tetrada, obtendo as componentes da tetrada

$$A_{(a)} = e_{(a)j} A^j = e_{(a)}{}^j A_j, \quad (2.35)$$

$$A^{(a)} = \eta^{(a)(b)} A_{(b)} = e^{(a)}{}_j A^j = e^{(a)j} A_j, \quad (2.36)$$

onde as componentes do vetor se relacionam com as componentes da tetrada pela equação

$$A^i = e_{(a)}{}^i A^{(a)} = e^{(a)i} A_{(a)}. \quad (2.37)$$

Ainda em relação ao campo vetorial $A_{(a)}$, a derivada fornece a

²O uso do parenteses é útil para evitar confusão entre grandezas tensoriais de espaços planos e curvos.

relação

$$\begin{aligned}
 A_{(a),(b)} &= e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} A_{(a)} \\
 &= e_{(b)}^i \left[e_{(a)}^j A_{j;i} + A_k e_{(a)}^k ;i \right] \\
 &= e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i + e_{(a)k;i} e_{(b)}^i e_{(c)}^k A^{(c)}, \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

dessa relação, podemos definir

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}^k e_{(a)k;i} e_{(b)}^i, \quad (2.39)$$

e assim a equação(2.38) fica

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i + \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)}. \quad (2.40)$$

As quantidades $\gamma_{(c)(a)(b)}$, definidas na equação (2.39) são chamadas de coeficientes de rotação de Ricci, que relacionam a operação de derivação das tetradas. Para calcular essas quantidades não é necessário calcular a derivada covariante e conseqüentemente os símbolos de Christoffel. Para isso, inicialmente, definimos

$$\begin{aligned}
 \lambda_{(a)(b)(c)} &= e_{(b)i,j} \left[e_{(a)}^i e_{(c)}^j - e_{(a)}^j e_{(c)}^i \right] \\
 &= [e_{(b)i,j} - e_{(b)j,i}] e_{(a)}^i e_{(c)}^j, \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

para equações envolvendo conexões simétricas, as derivadas covariantes podem ser repassadas por derivadas convencionais, assim

$$\begin{aligned}
 \lambda_{(a)(b)(c)} &= [e_{(b)i;j} - e_{(b)j;i}] e_{(a)}^i e_{(c)}^j \\
 &= \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}, \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

que fornece o resultado

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} [\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}]. \quad (2.43)$$

Em capítulos seguintes utilizaremos os resultados dessa seção para manipularmos equações em espaço tempo curvo.

2.8 EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN

Esta tese tem como objetivo principal estudar a física de espaços curvos, desse modo, as equações de campo de Einstein possuem um papel central. Vamos dedicar esta seção ao estudo dessas equações. Na teoria da gravitação de Einstein o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ assume uma posição importante na determinação dos efeitos da gravidade. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é tratado como um campo e, desta forma, podemos derivar uma equação geral que determina a forma deste campo. A exemplo dos campos escalares e vetoriais que obedecem equações diferenciais derivadas do princípio da mínima ação, podemos derivar a equação de campo de Einstein com esse mesmo princípio. Conforme estabelece o princípio da mínima ação, a ação possui um valor estacionário para o movimento real que será percorrido no espaço de configuração (JOSÉ; SALETAN, 1998). Desta forma, nossa primeira tarefa é determinar uma ação funcional adequada para a gravitação.

O primeiro requerimento é que a ação seja escalar. Além disso, ela deve conter derivadas de $g_{\mu\nu}$, por isso, a escolha mais simples que poderíamos supor, $\int \sqrt{-g} d^4x$ ($g = \det g_{\mu\nu}$), não é adequada para a descrição da dinâmica de $g_{\mu\nu}$. Se considerarmos o espaço-tempo sem matéria, contendo somente o campo gravitacional, a ação gravitacional adequada é definida como

$$S_G \equiv \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.44)$$

onde R é o tensor de curvatura escalar e G é a constante gravitacional. Vamos assumir que o espaço possui a estrutura de uma variedade Riemanniana (g, M) e que através de uma variação do tipo

$$g_{\mu\eta} \rightarrow g_{\mu\eta} + \delta g_{\mu\eta},$$

as quantidades g , $R_{\mu\eta}$, e $g^{\mu\eta}$ sofrem variação na forma

- (a) $\delta g^{\mu\eta} = -g^{\mu\kappa} g^{\lambda\eta} \delta g_{\kappa\lambda}$;
- (b) $\delta g = g g^{\mu\eta} \delta g_{\mu\eta}$;
- (c) $\delta R_{\nu\kappa} = (\delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa})_{;\lambda} - (\delta \Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa})_{;\nu}$ (Identidade de Palatini).

Para provar o item (a) consideramos que o produto do tensor métrico covariante com o contravariante é justamente a função delta de Kronecker, isto é,

$$g_{\kappa\lambda} g^{\lambda\eta} = \delta^{\eta}_{\kappa},$$

e a variação dessa identidade fornece

$$\begin{aligned}\delta(g_{\kappa\lambda}g^{\lambda\eta}) &= \delta(\delta_{\kappa}^{\eta}) \\ &= (\delta g_{\kappa\lambda})g^{\lambda\eta} + g_{\kappa\lambda}(\delta g^{\lambda\eta}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

multiplicando essa equação por $g^{\mu\kappa}$, obtemos

$$\begin{aligned}(\delta g_{\kappa\lambda})g^{\mu\kappa}g^{\lambda\eta} + g^{\mu\kappa}g_{\kappa\lambda}(\delta g^{\lambda\eta}) &= (\delta g_{\kappa\lambda})g^{\mu\kappa}g^{\lambda\eta} + \delta_{\lambda}^{\mu}(\delta g^{\lambda\eta}) \\ &= g^{\mu\kappa}g^{\lambda\eta}\delta g_{\kappa\lambda} + \delta g^{\mu\eta} \\ &= 0,\end{aligned}$$

de onde concluimos que $\delta g^{\mu\eta} = -g^{\mu\kappa}g^{\lambda\eta}\delta g_{\kappa\lambda}$. Em relação ao item (b), iremos partir de uma identidade envolvendo matrizes, na forma

$$\ln(\det g_{\mu\eta}) = tr(\ln g_{\mu\eta}),$$

variando os dois lados da equação encontramos

$$(\delta g)g^{-1} = g^{\mu\eta}\delta g_{\mu\eta},$$

e multiplicando por g os dois lados dessa equação, chegamos ao resultado $(\delta g) = gg^{\mu\eta}\delta g_{\mu\eta}$ que pode ser colocado na forma

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\eta}\delta g_{\mu\eta}. \quad (2.45)$$

O resultado do item (c) é obtido observando que a forma explícita do tensor de Ricci, definido na equação (2.20), é dada por

$$R_{\nu\kappa} = R^{\lambda}_{\nu\lambda\kappa} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} + \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}, \quad (2.46)$$

sendo que a variação de $R_{\mu\kappa}$ fornece

$$\delta R_{\nu\kappa} = \partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa} - \delta\Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} + \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho} + \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}, \quad (2.47)$$

vamos assumir que a variação de Γ é um tensor. Junto a isso podemos considerar um sistema de coordenadas *normal* em que as conexões Γ são nulas, dessa forma temos o resultado

$$\delta R_{\nu\kappa} = \partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa}, \quad (2.48)$$

a equação acima é válida em um sistema de coordenadas específico. Mas

sabemos que para generalizar um resultado para um sistema arbitrário de coordenadas basta promover derivadas convencionais para derivadas covariantes. O resultado desse repasse é a expressão

$$\delta R_{\nu\kappa} = (\delta\Gamma^\lambda_{\nu\kappa})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa})_{;\nu}. \quad (2.49)$$

Agora podemos aplicar esses resultados na variação da ação definida na equação (2.44). Vamos considerar uma variação δS_G em que a métrica varie na forma $g_{\mu\eta} \rightarrow g_{\mu\eta} + \delta g_{\mu\eta}$, sendo que $\delta g_{\mu\eta} \rightarrow 0$, dessa forma obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_G &\equiv \frac{1}{16\pi G} \int \delta (R\sqrt{-g}) d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int [\delta (g^{\mu\eta} R_{\mu\eta} \sqrt{-g})] d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int [(\delta g^{\mu\eta}) R_{\mu\eta} \sqrt{-g} + g^{\mu\kappa} (\delta R_{\mu\kappa}) \sqrt{-g} + g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} (\delta \sqrt{-g})] d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int [(-g^{\mu\kappa} g^{\lambda\eta} \delta g_{\kappa\lambda}) R_{\mu\eta} \sqrt{-g} + g^{\mu\kappa} (\delta R_{\mu\kappa}) \sqrt{-g} + \\ &\quad + g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} (\delta \sqrt{-g})] d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int [-R^{\kappa\eta} \delta g_{\kappa\eta} \sqrt{-g} + g^{\nu\kappa} [(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\kappa})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa})_{;\nu}] \sqrt{-g} + \\ &\quad + \frac{1}{2} R g^{\mu\eta} \delta g_{\mu\eta} \sqrt{-g}] d^4x. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Para completar o cálculo, vamos provar que o segundo termo no integrando da última linha é nulo. Para ver isso, inicialmente, notamos que a derivada covariante do tensor métrico se anula, isso permite que o termo seja escrito como

$$g^{\nu\kappa} [(\delta\Gamma^\lambda_{\nu\kappa})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa})_{;\nu}] \sqrt{-g} = [(g^{\nu\kappa} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\kappa})_{;\lambda} - (g^{\nu\kappa} \delta\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa})_{;\nu}] \sqrt{-g}, \quad (2.51)$$

além disso, a divergência generalizada de um vetor V^μ , dada por

$$V^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} V^\mu,$$

permite que a equação (2.51) seja colocada na forma

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\sqrt{-g} g^{\nu\kappa} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\kappa}) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} g^{\nu\kappa} \delta\Gamma^\lambda_{\lambda\kappa})$$

esse termo pode ser integrado, fornecendo um resultado nulo (termo de superfície). Por fim, impomos a condição de nulidade da ação, isto é, $\delta S_G = 0$ tal que a única forma da equação (2.50) satisfazer essa condição é somente se

$$G^{\kappa\eta} = R^{\kappa\eta} - \frac{1}{2}g^{\kappa\eta}R = 0,$$

que é a *equação de campo de Einstein* para o vácuo. Para incorporarmos o efeito da matéria devemos definir a *ação de matéria*

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x,$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Agora o princípio da mínima ação é

$$\delta S_G + \delta S_M = 0$$

que fornece a equação de campo de Einstein em sua forma mais geral

$$G_{\kappa\eta} = G_{\kappa\eta} = 8\pi G T_{\kappa\eta}. \quad (2.52)$$

Contraindo os índices da equação de Einstein temos que a curvatura escalar pode ser relacionada ao tensor energia momento por

$$R = -8\pi G T, \quad (2.53)$$

onde $T = T^\kappa_\kappa$. Assim a equação de campo de Einstein é escrita alternativamente na forma

$$R^\kappa_\eta = 8\pi G \left(T^\kappa_\eta - \frac{1}{2} \delta^\kappa_\eta T \right). \quad (2.54)$$

2.9 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CAMPO

A utilidade da equação(2.52) pode ser vislumbrada quando encontramos uma solução para uma métrica com determinada simetria. Historicamente a primeira solução para equação (2.52) foi encontrada por Karl Schwarzschild em 1916. A métrica de Schwarzschild representa um espaço-tempo curvo, esféricamente simétrico, explicitamente, pode ser escrita como

$$ds^2 = \xi d\tau^2 - \xi^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.55)$$

e desse modo, o tensor métrico associado é

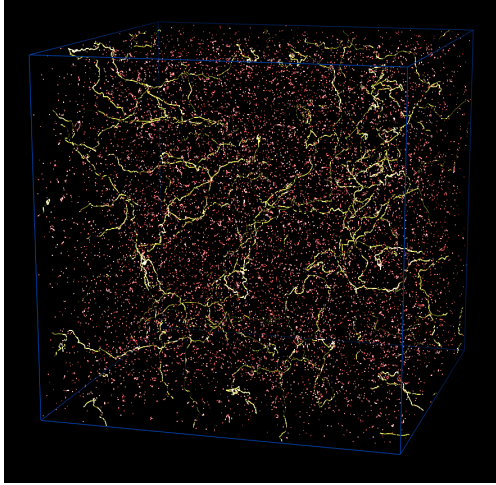
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \xi(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

onde $\xi(r) = 1 - 2GM/r$. Devido a sua simplicidade a solução de Schwarzschild é usada em grande parte dos livros textos em relatividade geral para exemplificar o procedimento de resolução da equação de Einstein. Em nosso trabalho, usaremos, como exemplo do procedimento de resolução da equação de Einstein, a solução que representa uma corda cósmica.

3 A MÉTRICA DA CORDA CÓSMICA

Se teorias de Gauge com quebra espontânea de simetria descrevem corretamente as partículas elementares, acredita-se que o universo passou por uma série de transições de fases desde a época do big bang (LINDE, 1979). Essas transições de fase deram origem a quebras de simetria enquanto o universo se resfriava. Estruturas com propriedades exóticas tais como os *defeitos topológicos*, estariam associadas às quebras de simetria no universo. Dentre estas estruturas, as *cordas cósmicas* teriam sobrevivido até os dias atuais e estariam associadas à evolução das galáxias e às lentes gravitacionais (VILENKIN, 1981a, 1981b). A formação de um defeito topológico como uma corda cósmica é algo análogo as rachaduras que se formam quando a água congela. Uma corda cósmica criada em um universo primordial poderia se expandir juntamente e ter o comprimento do próprio universo. Seriam estruturas unidimensionais de elevada densidade de massa, da ordem de 10^{21} g/cm. A espessura de uma corda cósmica é muito pequena e corresponde ao comprimento de onda de Compton, isto é, 10^{-29} cm, dessa forma, considerando as escalas astrofísicas e cosmológicas, uma corda pode ser considerada com espessura zero.

Em relação à sua forma geométrica, uma corda pode ser retilínea e ter um comprimento infinito ou formar um laço fechado. Apesar de não haver uma comprovação direta de sua existência por meio de observações, há provas indiretas de sua realidade física (POLTIS; STOJKOVIC, 2010). Observações astronômicas de quasars situados em lugares remotos do universo, revelaram uma curiosa propriedade relacionada à sua orientação espacial. Constatou-se que o jato emitido por um conjunto de quasars situados em determinada região do universo, estava alinhado de forma sistemática. Foi proposto um modelo que explicaria esse alinhamento observado. A ideia é considerar que uma corda cósmica, em formato de laço, produziria um campo magnético de fundo que interagiria com o quasar, alinhando, dessa forma, o jato emitido. Na Figura 3 temos a imagem formada por uma simulação de uma rede de cordas cósmicas em um universo primordial.



simulação de uma rede de cordas cósmicas Fonte:
<http://www.damtp.cam.ac.uk/>

Vamos agora modelar uma corda cósmica usando a teoria da relatividade geral. Iremos derivar a solução da equação de campo da corda cósmica obtida por Hiscock (HISCOCK, 1985), que é uma generalização de resultados anteriores (VILENKIN, 1981a). O elemento de linha do espaço-tempo nesse modelo possui simetria cilíndrica, sendo dado por

$$ds^2 = -A(r)^2 dt^2 + dr^2 + C(r)^2 d\phi^2 + D(r)^2 dz^2, \quad (3.1)$$

onde $t \in (-\infty, +\infty)$, $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Vamos admitir que a métrica possui invariância por *boosts* na direção z , isso indica que o termo $dz^2 - dt^2$ deve ser invariante, conforme as transformações de Lorentz. Essa condição implica que as funções $A(r)^2$ e $D(r)^2$ devem ser iguais, resultando que a métrica dada em (3.1) é escrita como

$$ds^2 = -A(r)^2 (dt^2 - dz^2) + dr^2 + C(r)^2 d\phi^2. \quad (3.2)$$

Nosso objetivo é determinar as funções $A(r)$ e $C(r)$ de forma que a métrica (3.2) satisfaça a equação de campo de Einstein. Vamos usar a equação de campo na forma mista, isto é,

$$R^\kappa_\eta = 8\pi G \left(T^\kappa_\eta - \frac{1}{2} \delta^\kappa_\eta T \right), \quad (3.3)$$

que foi derivada na seção anterior. O tensor métrico associado ao ele-

mento de linha (3.2) é identificado como

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -A(r)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A(r)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Para calcular os símbolos de Christoffel não nulos para a métrica (3.4), vamos usar a notação $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \phi$, $x^3 \equiv z$ e calcular os termos não nulos da equação

$$\Gamma_{k l}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (3.5)$$

Os resultado encontrados são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{r t}^t &= \frac{1}{A(r)} \frac{dA}{dr}, & \Gamma_{t t}^r &= A(r) \frac{dA}{dr}, \\ \Gamma_{z z}^r &= -A(r) \frac{dA}{dr}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -C(r) \frac{dC}{dr}, \\ \Gamma_{t r}^t &= \Gamma_{r t}^t, & \Gamma_{r z}^z &= A(r) \frac{dA}{dr}, \\ \Gamma_{z r}^z &= \Gamma_{r z}^z, & \Gamma_{\phi r}^\phi &= -\frac{1}{C(r)} \frac{dC}{dr}, \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Todas as outras componentes dos símbolos de Christoffel são nulas. Na próxima etapa será calculo o tensor de Ricci na forma

$$R_\nu^\alpha = g^{\alpha\mu} R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

onde as componentes não nulas são escritas como

$$\begin{aligned} R_0^0 &= - \left[\frac{1}{A(r)} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{A(r)C(r)} \frac{dA}{dr} \frac{dc}{dr} + \frac{1}{A^2(r)} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 \right], \\ R_1^1 &= - \left[\frac{2}{A(r)} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C}{dr^2} \right], \\ R_2^2 &= - \left[\frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{2}{A(r)C(r)} \frac{dA}{dr} \frac{dc}{dr} \right], \\ R_3^3 &= R_0^0, \end{aligned}$$

O tensor de Ricci é o lado esquerda da equação (3.3), que é a parte geométrica do problema. Os aspectos físicos de uma corda cósmica devem ser considerados na parte direita da equação, no tensor energia-momento. Para uma corda infinita, com uma certa densidade de massa e com tensão, a escolha do tensor é dada por

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \sigma(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma(r) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

onde $\sigma(r) = -\varepsilon$ para $r < r_0$ e $\sigma(r) = 0$ para $r > r_0$ onde r_0 é o raio da corda. Substituindo as componentes do tensor de Ricci no lado esquerdo da equação (3.3) e o tensor-energia momento no lado direito, obtemos as equações

$$\frac{1}{A(r)} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{A(r)C(r)} \frac{dA}{dr} \frac{dc}{dr} + \frac{1}{A^2(r)} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{2}{A(r)} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C}{dr^2} = 8\pi G\sigma(r), \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{2}{A(r)C(r)} \frac{dA}{dr} \frac{dc}{dr} = 8\pi G\sigma(r). \quad (3.11)$$

Se levarmos em consideração a conservação do tensor energia-momento representada pela condição $T_\nu^\mu{}_{;\mu} = 0$, temos uma condição adicional nos coeficientes da métrica. A aplicação da derivada covariante no tensor (3.8) fornece um componente não nulo que deve ser igualado a zero

$$T_\rho^\mu{}_{;\mu} = -\sigma(r) \frac{1}{A(r)} \frac{dA}{dr} = 0. \quad (3.12)$$

E a resolução dessa equação implica que $A(r) = \text{constante}$, que com uma transformação adequada, pode ser tomado $A(r) = 1$. Desta forma o sistema com 3 equações se reduz a uma única equação

$$\frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C}{dr^2} = 8\pi G \sigma(r). \quad (3.13)$$

Integrando uma vez essa equação obtemos a expressão

$$\left. \frac{dC}{dr} \right|_{r=\infty} - \left. \frac{dC}{dr} \right|_{r=0} = 8\pi G \int \sigma(r) C(r) dr, \quad (3.14)$$

e para avaliar o lado esquerdo dessa equação, impomos condições para as derivadas de forma que não haja singularidade na solução, isso pode ser feito com a escolha

$$C(0) = 0, \quad \left. \frac{dC}{dr} \right|_{r=0} = 1. \quad (3.15)$$

Agora, em vez da equação (3.14) temos a equação

$$\left. \frac{dC}{dr} \right|_{r=\infty} - 1 = 8\pi G \int \sigma(r) C(r) dr, \quad (3.16)$$

da qual o lado direito pode ser resolvido usando a definição da densidade linear de massa μ , fornecida pela integral da componente T_0^0 do tensor energia momento:

$$\begin{aligned} \mu &= - \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} (\sqrt{g} T_0^0) d\phi \\ &= -2\pi \int \sigma(r) C(r) dr \\ &= -\frac{8\pi G}{4G} \int \sigma(r) C(r) dr. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo no lado direito da equação (3.16) temos

$$\left. \frac{dC}{dr} \right|_{r=\infty} - 1 = -4G\mu. \quad (3.18)$$

3.1 SOLUÇÃO EXTERNA

O lado esquerdo da equação (3.18) contém um termo proveniente da derivada da função $C(r)$ no ponto onde r é muito grande. Nessa região (externa) temos que $r > r_0$, logo $\sigma(r) = 0$, conforme definições anteriormente. Assim podemos resolver a equação (3.11) e obter o resultado

$$\left. \frac{dC}{dr} \right|_{r=\infty} = \text{constante.}$$

Isso permite que a equação (3.18) seja escrita como

$$\frac{dC}{dr} - 1 = -4G\mu,$$

cujas a resolução fornece

$$C(r) = (1 - 4G\mu)r.$$

Com isso, obtemos a forma final da métrica da corda cósmica e em vez da equação (3.2) temos a equação

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (1 - 4G\mu)^2 r^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (3.19)$$

Essa métrica representa a solução exterior da equação de Einstein para uma corda cósmica. Quando a densidade de massa μ é nula, a métrica (3.2) se reduz à métrica de Minkowski em coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (3.20)$$

Comparando as duas métricas, notamos que a métrica (3.19) representa um espaço-tempo com um déficit de ângulo de $\delta = 8\pi G\mu$ na coordenada angular. Por isso é possível construir de forma "artificial" a métrica (3.19) retirando uma fração do ângulo da coordenada ϕ na métrica de Minkowski em coordenadas cilíndricas.

3.2 SOLUÇÃO INTERNA

Na região interna temos que $r < r_0$, logo $\sigma(r) = -\varepsilon$, conforme definido anteriormente. Para essa região vamos propor uma métrica na

forma

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\psi(r)} d\phi^2 + e^{2\lambda(r)} (dr^2 + dz^2), \quad (3.21)$$

onde $t \in (-\infty, +\infty)$, $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$. As componentes dos símbolos de Christoffel não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_{r t}^t &= \frac{d\nu}{dr}, & \Gamma_{t t}^r &= (e^{2\nu-2\lambda}) \frac{d\nu}{dr}, \\ \Gamma_{z z}^r &= -\frac{d\lambda}{dr}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -(e^{2\psi-2\lambda}) \frac{d\psi}{dr}, \\ \Gamma_{t r}^t &= \Gamma_{r t}^t, & \Gamma_{r z}^z &= \frac{d\lambda}{dr}, \\ \Gamma_{z r}^z &= \Gamma_{r z}^z, & \Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{d\psi}{dr}, \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Procedendo de forma análoga ao caso da solução externa, listamos as componentes do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_0^0 &= -e^{-2\lambda} \left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{d\nu}{dr} \frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 \right], \\ R_1^1 &= -e^{-2\lambda} \left[\frac{d^2\lambda}{dr^2} + \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 - \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\psi}{dr} \right], \\ R_2^2 &= -e^{-2\lambda} \left[\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{d\nu}{dr} \frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right], \\ R_3^3 &= -e^{-2\lambda} \left[-\frac{d^2\lambda}{dr^2} - \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\psi}{dr} \right], \end{aligned}$$

enquanto que o tensor de curvatura escalar possui a forma

$$R = -2e^{-2\lambda} \left[\frac{d^2\lambda}{dr^2} + \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 + \frac{d\nu}{dr} \frac{d\psi}{dr} \right].$$

Considerando a equação de Einstein

$$R_{\kappa\nu} - \frac{1}{2} g_{\kappa\nu} R = 8\pi G T_{\kappa\nu},$$

temos que as componentes não nulas dessa equação são dadas por

$$-8\pi\varepsilon = -e^{-2\lambda} \left[\frac{d^2\lambda}{dr^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right], \quad (3.23)$$

$$0 = -e^{-2\lambda} \left[\frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d\nu}{dr} \frac{d\psi}{dr} \right], \quad (3.24)$$

$$0 = -e^{-2\lambda} \left[\frac{d^2\lambda}{dr^2} + \frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 \right], \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} -8\pi\varepsilon = & -e^{-2\lambda} \left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] \\ & - e^{-2\lambda} \left[-\frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{d\nu}{dr} \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\psi}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Novamente, a aplicação da derivada covariante no tensor (3.8) fornece um componente não nulo que deve ser igualado a zero ($T_{\nu}{}^{\mu}{}_{;\mu} = 0$), o resultado é dado por

$$\left(\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \right) \varepsilon = 0. \quad (3.27)$$

Derivando a equação (3.27) e substituindo na equação de Einstein (3.25) concluímos que $\nu(r)$ é constante, e se usarmos esse resultado na equação (3.27) notamos que $\lambda(r)$ também deve ser constante e efetuando ainda uma mudança de escala nas coordenadas da métrica podemos escolher que λ e ν sejam nulos. Isso permite uma simplificação considerável nas equações de Einstein. Todos os termos que possuem derivadas de λ e ν se anulam e a equação (3.23) fica idêntica a (3.26) :

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 = -8\pi\varepsilon. \quad (3.28)$$

Com a substituição $R = e^{\psi(r)}$, a solução da expressão (3.28) é escrita como

$$R = A \cos(r/r_*) + B \sin(r/r_*),$$

onde $r_* = 1/\sqrt{8\pi\varepsilon}$. Usando critério de regularidade da solução no eixo da corda, Hiscock (HISCOCK, 1985) argumenta que a constante A deve ser nula e, além disso, $B = r_*$. Com os valores obtidos para as funções λ , ν e ψ podemos escrever a forma final da métrica (3.21) para a região interna:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r_*^2 \sin^2(r/r_*) d\phi^2 + dz^2. \quad (3.29)$$

A solução interna corresponde à suposição que a densidade da corda é constante o que simplifica os cálculos na determinação da solução.

3.3 INCLUSÃO DE CORDAS EM SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Soluções mais realísticas podem ser levadas em conta na modelagem do problema. É possível generalizar soluções da equação de Einstein para incluir cordas cósmicas, através da técnica de "cortar" e "colar". Se uma determinada métrica possui uma coordenada azimutal sobre um eixo de simetria que varia $0 \leq \phi < 2\pi$, então podemos recortar e tirar uma fração $2\pi(1 - 4G\mu)$ do setor angular do espaço tempo. O resultado pode ser visualizado na figura 5 (a). O próximo passo é colar continuamente as bordas do espaço-tempo, o resultado final é um espaço tempo cônico (com t e z constantes), conforme a figura 5 (b).

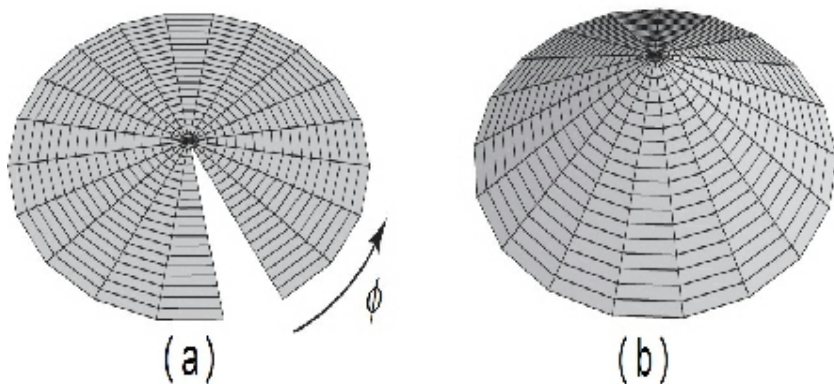


Figura 5: Construção artificial de um espaço-tempo de uma corda cósmica.

A métrica de Schwarzschild definida na equação (2.55) foi derivada para englobar uma corda cósmica (ARYAL; FORD; VILENKIN, 1986; GERMANO; BEZERRA; MELLO, 1996). O resultado da inclusão do defeito topológico na métrica de Schwarzschild é o termo adicional na coordena-

nada ϕ da métrica

$$ds^2 = \xi d\tau^2 - \xi^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \alpha^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.30)$$

onde $\alpha = 1 - 4G\mu$.

3.4 SISTEMA DE COORDENADAS NÃO INERCIAL

Um tema de estudo em nosso trabalho é o efeito que o uso de sistemas de referências não inerciais causam nos sistemas físicos. Um referencial em rotação é um exemplo clássico de um sistema de referência não inercial. Em coordenadas cilíndricas, a transformação que nos leva para um sistema de referência desse tipo é dada por

$$\begin{aligned} t &= t', \\ r &= r', \\ \phi &= \phi' + \omega t', \\ z &= z', \end{aligned} \quad (3.31)$$

e substituindo na equação (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt'^2 + dr'^2 + \alpha^2 r'^2 (d\phi' + \omega dt')^2 + dz^2 \\ &= - (1 - \alpha^2 r'^2 \omega^2) dt'^2 + 2\alpha^2 r'^2 \omega dt' d\phi' + dr'^2 + \alpha^2 r'^2 d\phi'^2 + dz'^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Essa métrica representa o espaço tempo de uma corda cósmica em um sistema de coordenadas em rotação, onde ω é a frequência de rotação do referencial e $\alpha = 1 - 4G\mu$. Nos próximos capítulos iremos analisar as soluções de equações de onda no espaço tempo descrito pela métrica (3.32).

4 EQUAÇÕES DE ONDAS RELATIVÍSTICAS EM UM ESPAÇO-TEMPO PLANO

O momento e a posição de uma partícula podem ser medidos simultaneamente com uma precisão arbitrária na mecânica clássica, não há nenhum impedimento teórico para que isso seja feito. No âmbito da mecânica quântica esse cenário não é mais possível. As partículas devem ser descritas por um formalismo diferente ao da Mecânica Clássica, de forma que a incerteza existente entre a medida de posição em momento seja levada em conta. Classicamente, uma partícula possui uma energia que é a soma da energia potencial e a energia cinética, isto é,

$$E = V(\vec{r}) + \frac{p^2}{2m}. \quad (4.1)$$

Na mecânica quântica, quantidades físicas observáveis, isto é, que podem ser medidas, devem estar associadas a operadores hermitianos. Dessa forma, podemos obter uma descrição quântica de uma partícula através do repasse das quantidades clássicas pelos seus equivalentes quânticos. No caso do momento e da energia o repasse que deve ser feito é

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}, \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Se usarmos essa substituição na equação (4.1) e atuarmos em uma função de onda, ψ obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (4.3)$$

que é a chamada equação de Schrödinger. Essa equação descreve corretamente uma partícula sem spin e com baixa velocidade. Efeitos de spin e da relatividade restrita podem ser adicionados a essa equação, no entanto, tais efeitos podem ser obtidos diretamente se equações adequadas forem utilizadas.

4.1 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Da teoria da relatividade restrita, sabemos que a energia de uma partícula E se relaciona com o quadrimomento através da equação

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2, \quad (4.4)$$

onde m_0 é a massa de repouso e c é a velocidade da luz. Um caminho natural para quantizar uma partícula relativística é através da promoção do quadrivetor momento para operador momento através do repasse

$$p_\mu \rightarrow \hat{p}^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (4.5)$$

Vamos aplicar esse operador na expressão (4.4) e a equação resultante será uma equação diferencial para uma certa função ψ , a chamada equação de Klein-Gordon

$$p^\mu p_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi, \quad (4.6)$$

que pode ser escrita em na forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (4.7)$$

Essa equação é usada na descrição de partículas com spin-0. A equação de Klein-Gordon possui a inconveniência de apresentar densidades de probabilidades negativas, fato que está relacionado à derivada de segunda ordem em relação ao tempo que aparece em sua constituição.

4.1.1 Ação para a equação de Klein-Gordon

A equação (4.7) pode ser derivada diretamente através do princípio variacional. Definindo a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right), \quad (4.8)$$

a ação associada é escrita como

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \left(\eta^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right).$$

Demandando que para uma variação em relação a ϕ tenhamos

$$\delta S = 0,$$

a equação (4.7) é obtida.

4.1.2 Solução da equação de Klein-Gordon: Partícula livre

Considerando uma partícula não interagente em uma região do espaço-tempo de Minkowski, a equação (4.7) admite uma solução na forma de onda plana. O problema é facilmente resolvido se usarmos um sistema cartesiano de coordenadas. Em um contexto mais amplo, o espaço tempo de fundo pode não ser plano. Levando em conta a geometria curva de um espaço tempo de fundo, a solução pode apresentar simetria esférica, cilíndrica, hiperbólica etc..., nestas situações a solução analítica nem sempre é possível, dessa forma devemos procurar por geometrias que permitam uma resolução analítica no caso quântico. Problema da geometria na resolução das equações de ondas quânticas fica mais evidente no caso dos férmions, onde a técnica padrão de resolução é transformar o sistema de equações diferenciais de primeira ordem em um conjunto de equações "desacopladas" de segunda ordem. Para o caso da equação de onda (4.7) vamos propor uma solução na forma

$$\psi(\vec{r}, t) = C e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (4.9)$$

que substituindo na equação (4.7) obtemos

$$\omega = \pm c^2 \sqrt{\vec{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}, \quad (4.10)$$

ou para $\omega \rightarrow E/\hbar$, $\vec{k} \rightarrow \vec{p}/\hbar$

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (4.11)$$

Dessa forma a energia de uma partícula sem spin, descrita pela equação de Klein-Gordon admite solução com energia negativa. Estas soluções associadas a anti-partículas ocorrem também na equação de Dirac, como veremos mais adiante.

4.2 EQUAÇÃO DE DIRAC

Procurando contornar o problema das densidades de probabilidade negativa, Dirac em 1928 teve a ideia de fatorar a equação de Klein-Gordon obtendo uma equação diferencial para um novo objeto matemático, o chamado espinor (ROSE, 1961).

Dirac fatorou a relação de energia relativística, dada na equação (4.4), antes de repassar o momento clássico pelo operador momento da mecânica quântica. Dessa forma obteve uma equação de onda de primeira ordem para a coordenada temporal. Para obtermos essa equação de onda, vamos proceder de forma análoga à proposta de Dirac (GRIFFITHS, 2008). Considerando a equação (4.4), escrita como

$$p^\mu p_\mu - m_0^2 c^2 = 0, \quad (4.12)$$

podemos propor uma fatoração da energia relativística na forma

$$p^\mu p_\mu - m_0^2 c^2 = (\beta^k p_k + m_0 c) (\gamma^\lambda p_\lambda - m_0 c), \quad (4.13)$$

onde β^k e γ^λ são 8 quantidades (levando em conta os 4 valores que os índices k e λ assumem) a serem determinadas. Expandindo o lado direito da equação (4.13) temos

$$(\beta^k p_k + m_0 c) (\gamma^\lambda p_\lambda - m_0 c) = \beta^k \gamma^\lambda p_\lambda p_k - m_0 c p_k (\beta^k - \gamma^k) - m_0^2 c^2, \quad (4.14)$$

e para que a equação (4.14) esteja de acordo com energia relativística dada em (4.12) concluímos que o segundo termo na equação (4.14) deve ser nulo, isto é, $\beta^k = \gamma^k$, e, além disso, devemos ter

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \beta^k \gamma^\lambda p_\lambda p_k \\ &= \gamma^k \gamma^\lambda p_\lambda p_k. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A última condição, expressa na equação (4.15), não parece ser simples de ser satisfeita, à primeira vista. Para ver isso, podemos expandir os

dois lados da equação e obter

$$\begin{aligned}
 (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 \\
 &+ (\gamma^2)^2 (p^2)^2 + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 \\
 &+ (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0) p_0 p_1 \\
 &+ (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0) p_0 p_2 \\
 &+ (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0) p_0 p_3 \\
 &+ (\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1) p_1 p_2 \\
 &+ (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1) p_1 p_3 \\
 &+ (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2) p_2 p_3, \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Para que ambos os lados da equação (4.16) estejam de acordo, devemos impor determinadas condições nas quantidades γ^μ . Se supusermos que γ^μ são números complexos na forma $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$ e $\gamma^0 = 1$ temos que

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1,$$

e a equação (4.16) é parcialmente satisfeita, mas os termos cruzados não se anulam, dessa forma essa escolha para as quantidades γ^μ deve ser abandonada. A grande ideia de Dirac foi considerar que as quantidades γ^μ não são números, mas sim matrizes. Como matrizes, em geral, não comutam, podemos achar uma representação em que os termos cruzados na equação (4.16) se anulem. Resumidamente, as propriedades que as matrizes γ^μ devem possuir são

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1,$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0 \text{ para } \mu \neq \nu,$$

ou de forma compacta

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\mathbf{I}\eta^{\mu\nu}, \quad (4.17)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor de Minkowski que representa o espaço-tempo plano da relatividade restrita e \mathbf{I} é a matriz identidade. Com isso, a fatoração da relação de energia relativística está associada ao uso de matrizes, que devem satisfazer a equação (4.17). Em geral, não há um grupo unívoco de matrizes que satisfazem essa relação por isso há uma liberdade relativa na escolha da representação. Agora, retomando a derivação da equação de Dirac, temos que os resultados obtidos até agora implicam

em uma fatoração da relação de energia relativística na forma

$$p^\mu p_\mu - m_0^2 c^2 = (\gamma^k p_k + m_0 c) (\gamma^\lambda p_\lambda - m_0 c) = 0, \quad (4.18)$$

de onde concluímos que há duas escolhas que satisfazem essa equação, a primeira é

$$(\gamma^k p_k + m_0 c) = 0, \quad (4.19)$$

a segunda escolha é dada por

$$(\gamma^\lambda p_\lambda - m_0 c) = 0. \quad (4.20)$$

Ambas escolhas são igualmente válidas, mas na literatura é comum escolher a equação (4.20). Dessa forma fazemos o repasse do momento clássico para o operador equivalente, isto é,

$$p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu,$$

e, além disso, aplicamos a equação em uma função ψ , obtendo assim a equação de Dirac na forma covariante

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0. \quad (4.21)$$

Como as quantidades γ^μ são matrizes 4×4 , então ψ deve ser uma matriz coluna na forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

assim a equação de Dirac também pode ser vista como um sistema de 4 equações acopladas. A matriz ψ é chamada de espinor de Dirac ou simplesmente espinor.

4.2.1 Propriedades das matrizes γ^μ

A escolha das matrizes γ^μ está vinculada à álgebra definida na equação (4.17), devemos escolher uma representação para as matrizes de forma que esta equação seja satisfeita. Em um espaço-tempo de 1+3 dimensões, as matrizes γ^μ são matrizes quadradas de ordem quatro e podem ser escritas em função das matrizes de Pauli. As matrizes de

Pauli são definidas na forma

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

tal que se definirmos as matrizes γ^μ no formato

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

a equação (4.17) é satisfeita. Em algumas aplicações é útil definir as matrizes β e $\vec{\alpha}$ pelas equações

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

e com essa representação para as matrizes gama, temos a identidade útil

$$\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0.$$

4.2.2 Acoplamento eletromagnético

A equação de Dirac, derivada na última seção, descreve o comportamento de uma partícula livre de spin- $\frac{1}{2}$. Em determinados sistemas físicos, os férmions podem interagir com campos externos clássicos. Por exemplo, em um átomo de hidrogênio, o elétron está sujeito a um campo elétrico, e sofre uma atração do núcleo que possui carga positiva. Em outras situações, podemos ter partículas carregadas sujeitas a campos magnéticos constantes. Estes exemplos indicam que precisamos incorporar na equação de Dirac os efeitos da interação com um campo externo, que, nesses exemplos, correspondem a manifestações do campo eletromagnético.

O primeiro passo para incorporar a interação eletromagnética é definir o chamado quadripotencial eletromagnético $A_\mu = \left(\phi, -\vec{A} \right)$, onde ϕ é o potencial elétrico e \vec{A} é o potencial magnético. Dessa forma, o campo magnético \vec{B} e o campo elétrico \vec{E} são escritos como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{e} \quad E = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi. \quad (4.26)$$

Com base no quadripotencial podemos definir um tensor de segunda ordem que engloba os campos magnéticos e elétricos, o chamado tensor

eletromagnético

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_{yz} \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Tendo em vista a incorporação da interação eletromagnética na equação de Dirac, devemos constatar que o tensor eletromagnético e as equações de Maxwell são invariantes em relação a uma transformação de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \varkappa, \quad (4.28)$$

onde \varkappa é uma função escalar. Para estudar a invariância da equação de Dirac e analisar as simetrias subjacentes relacionadas à equação de Dirac é útil estudarmos a lagrangeana associada

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi, \quad (4.29)$$

onde $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$. Pode ser constatado que variando essa lagrangeana em relação a $\bar{\psi}$ chegamos na equação de Dirac. Se impusermos uma transformação local

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha(x)} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-ie\alpha(x)} \bar{\psi}, \quad (4.30)$$

a lagrangeana se transforma como

$$\bar{\psi} (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi \rightarrow \bar{\psi} (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu + e\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x) - mc) \psi, \quad (4.31)$$

onde o termo $e\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x)$ se parece com o segundo termo no lado direito da transformação (4.28), isso sugere o repasse

$$i\hbar\partial_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (4.32)$$

de forma que no lugar da equação (4.29), temos a equação

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{e}{c} \gamma^\mu A_\mu - mc \right) \psi, \quad (4.33)$$

ou, variando a lagrangeana em relação ao campo $\bar{\psi}$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{e}{c} \gamma^\mu A_\mu - mc \right) \psi = 0,$$

que é a equação de Dirac acoplada *minimamente* ao campo eletromagnético.

4.2.3 Partícula Livre

Multiplicando a equação (4.21) por β e expandindo a soma implícita, podemos colocar essa equação na seguinte forma

$$(\beta m_0 c^2 + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (4.34)$$

A primeira solução da equação de Dirac que iremos analisar é para uma partícula livre. Naturalmente, essa solução corresponde ao caso de um potencial nulo, onde não há dependência temporal ou da posição, por isso, iremos propor uma solução onde a parte dependente da posição é separada da solução temporal na seguinte forma

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) \phi(t) = \psi(\vec{x}) \exp[-(i/\hbar) \varepsilon t], \quad (4.35)$$

onde ε será relacionado a energia da partícula. Substituindo (4.35) na equação (4.34)

$$(\beta m_0 c^2 + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \{\psi(x) \exp[-(i/\hbar) \varepsilon t]\} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \{\psi(x) \exp[-(i/\hbar) \varepsilon t]\}, \quad (4.36)$$

e multiplicando por $\frac{1}{\psi(x)\phi(t)}$,

$$i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \{\exp[-(i/\hbar) \varepsilon t]\} - \frac{1}{\psi(x)} (\beta m_0 c^2 + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \psi(x) = 0 \quad (4.37)$$

e calculando a derivada em relação ao tempo obtemos

$$(\beta m_0 c^2 + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) \psi(x) = \varepsilon \psi(x). \quad (4.38)$$

Dessa forma, separamos a solução temporal da espacial, obtendo assim uma equação somente para as coordenadas espaciais. Utilizando as equações (4.25) e (4.23), escrevemos a equação (4.38) na maneira

$$c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} \psi(x) + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \psi(x) = \varepsilon \psi(x). \quad (4.39)$$

Escrevendo a solução espacial como um espinor de quatro componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

e substituindo na equação (4.39), obtemos um sistema de duas equações diferenciais acopladas

$$c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\chi + m_0c^2\varphi = \varepsilon\varphi, \quad (4.41)$$

$$c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\varphi - m_0c^2\chi = \varepsilon\chi. \quad (4.42)$$

Considerando um estado com autovalor de momento \vec{p}_0

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp \left[\left(\frac{i}{\hbar} \right) \vec{p}_0 \cdot \vec{x} \right]$$

a atuação de \vec{p} no espinor $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ forma uma equação de autovalor do tipo

$$\hat{p} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \vec{p}_0 \exp \left[\left(\frac{i}{\hbar} \right) \vec{p}_0 \cdot \vec{x} \right],$$

logo as equações (4.41) e (4.42) são escritas no formato

$$(\varepsilon - m_0c^2) \varphi_0 - c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_0\chi_0 = 0 \quad (4.43)$$

$$-c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_0\varphi_0 + (\varepsilon + m_0c^2) \chi_0 = 0. \quad (4.44)$$

Para que as duas equações sejam compatíveis o determinante formado pelos coeficientes deve ser nulo, isto é,

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - m_0c^2) & -c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_0 \\ -c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_0 & (\varepsilon + m_0c^2) \end{vmatrix} = (\varepsilon^2 - m_0^2c^4) - c^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_0) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_0) = 0, \quad (4.45)$$

e com o uso da identidade $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \mathbf{I} + i\vec{\sigma} (\vec{A} \times \vec{B})$ a equação (4.45) é escrita de uma forma simples

$$(\varepsilon^2 - m_0^2c^4) - c^2\vec{p}_0^2 = 0. \quad (4.46)$$

Se resolvermos essa equação para ε , obtemos

$$\varepsilon = \pm E_p = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \vec{p}_0^2}, \quad (4.47)$$

que corresponde à energia de uma partícula livre. Os sinais positivos e negativos que aparecem nessa equação correspondem ao tipo de solução da equação de Dirac, ou seja, partículas com energia positiva e negativa respectivamente. Agora iremos proceder para obter a solução completa da equação de Dirac. Da equação (4.43), podemos escrever χ_0 na forma

$$\chi_0 = \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_0}{\varepsilon + m_0 c^2} \varphi_0, \quad (4.48)$$

logo a solução proposta em (4.35) é reescrita como

$$\Psi_{p\lambda}(\vec{x}, t) = N \left(\begin{array}{c} \psi_0 \\ \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_0}{\lambda E_p + m_0 c^2} \psi_0 \end{array} \right) \frac{\exp[i(\vec{p}_0 \cdot \vec{x} - \lambda E_p t / \hbar)]}{(\sqrt{2\pi})^3}, \quad (4.49)$$

onde $\lambda E_p = \varepsilon$, $\lambda = \pm 1$. Aqui N é uma constante que é obtida com a condição de normalização

$$\int d^3x \Psi_{p\lambda}^\dagger(\vec{x}, t) \Psi_{p'\lambda'}(\vec{x}, t) = \delta_{\lambda'\lambda} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (4.50)$$

Substituindo (4.49) em (4.50) e integrando a equação resultante, encontramos um valor para a constante de normalização

$$N = \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2 + c^2 \vec{p}_0^2}} = \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)}{2\lambda E_p}}. \quad (4.51)$$

Essa solução corresponde ao caso mais simples possível. Na medida que consideramos potenciais dependentes da posição ou até mesmo do tempo, podemos ter situações em que a equação de Dirac é mapeada em um problema de Sturm-Liouville. Mas dependendo a complexidade do potencial, temos situações em que a solução analítica não é facilmente encontrada.

4.2.4 Átomo de Hidrogênio

Considerando um potencial central do tipo $V(r)$, o hamiltoniano de Dirac é dado pela expressão

$$\hat{H}_D = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2 + V(r). \quad (4.52)$$

Devido à simetria esférica, o momento angular \hat{J} e operador paridade \hat{P} comutam com \hat{H}_D , isto é,

$$\left[\hat{H}_D, \hat{J} \right] = \left[\hat{H}_D, \hat{P} \right] = 0.$$

Sabemos que quando operadores comutam na mecânica quântica podemos achar autofunções em que esses operadores ocorram simultaneamente. Se a solução da equação de Dirac for escrita na forma

$$\Psi_{jlm} = \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(\vec{x}, t) \\ \chi_{j'l'm}(\vec{x}, t) \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

então podemos substituir (4.53) na equação (4.34) obtendo duas equações diferenciais

$$(E - m_0 c^2 - V) \varphi_{jlm} = (c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi_{j'l'm}, \quad (4.54)$$

$$(E + m_0 c^2 - V) \chi_{j'l'm} = (c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi_{jlm}. \quad (4.55)$$

A solução geral deve ser um produto que envolva uma parte angular e uma parte radial, dessa forma pode ser proposto um ansatz do tipo

$$\varphi_{jlm} = ig(r) \Omega_{jlm} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (4.56)$$

$$\chi_{j'l'm} = -f(r) \Omega_{j'l'm} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (4.57)$$

sendo que a solução da parte angular é obtida através dos harmônicos esféricos espinoriais

$$\Omega_{jlm} = \sum_{m' m_s} (l \ 1/2 \ j \ | \ m' m_s m) Y_{lm'} \chi_{1/2 \ m_s}, \quad (4.58)$$

onde $\chi_{1/2 \ m_s}$, para $m_s = \pm 1/2$ são escritos como matrizes coluna:

$$\chi_{1/2 \ -1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{1/2 \ 1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $(l \ 1/2 \ j \ | \ m' m_s m)$ são os c-coeficientes (ROSE, 1961). Os números quânticos são relacionados na forma

$$l' = 2j - l = \begin{cases} 2(l + 1/2) - l = l + 1 & \text{para } j = l + 1/2 \\ 2(l - 1/2) - l = l - 1 & \text{para } j = l - 1/2. \end{cases} \quad (4.59)$$

Tendo em vista a separação das coordenadas angulares e radiais, devemos reescrever o termo $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi_{jlm}$ de maneira a explicitar sua dependência em relação às coordenadas. Inicialmente consideramos a relação

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi_{jlm} = -\hbar \frac{dg}{dr} (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \Omega_{jlm} + ig (\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Omega_{jlm}), \quad (4.60)$$

e também a propriedade dos harmônicos esféricos espinoriais que relaciona os números quânticos l e l'

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \frac{\hat{r}}{r} \right) \Omega_{jlm} = -\Omega_{jl'm}. \quad (4.61)$$

Usando novamente a identidade que relaciona as matrizes de Pauli e os vetores arbitrários \vec{A} e \vec{B}

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \mathbf{I} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (4.62)$$

a equação (4.60) é escrita na forma

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi_{jlm} = -\hbar \frac{dg}{dr} (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \Omega_{jlm} - ig \left[-\frac{2i\hbar}{r} - \frac{i}{r} \vec{L} \cdot \vec{\sigma} \right] \Omega_{jl'm}, \quad (4.63)$$

onde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é o operador momento angular. Definindo o operador $\hat{k} = 2\hbar + \vec{L} \cdot \vec{\sigma}$ que satisfaz a equação de autovalor $\hat{k} \Omega_{jl'm} = -(k + 1) \Omega_{jl'm}$, a equação (4.63) se reduz:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi_{jlm} = \hbar \Omega_{jl'm} \left(\frac{dg}{dr} - \frac{k + 1}{r} g \right). \quad (4.64)$$

De forma análoga, repetimos o procedimento para o termo $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_{jlm}$ obtendo o resultado

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_{jlm} = -\hbar \Omega_{jlm} \left(\frac{df}{dr} - \frac{k - 1}{r} f \right), \quad (4.65)$$

e por fim, substituímos as equações (4.64) e (4.65) nas expressões (4.54) e (4.55) respectivamente, obtendo

$$(E - m_0c^2 - V) \varphi_{jlm} = c\hbar\Omega_{jlm} \left(\frac{df}{dr} - \frac{k-1}{r} f \right), \quad (4.66)$$

$$(E + m_0c^2 - V) \chi_{j'l'm} = -c\hbar\Omega_{j'l'm} \left(\frac{dg}{dr} - \frac{k+1}{r} g \right). \quad (4.67)$$

As relações (4.56) e (4.57) indicam que as equações anteriores se reduzem a

$$\frac{dg}{dr} - \frac{k+1}{r} g - (E + m_0c^2 - V) f = 0, \quad (4.68)$$

$$\frac{df}{dr} - \frac{k-1}{r} f + (E - m_0c^2 - V) g = 0. \quad (4.69)$$

Assim obtemos a chamada equação de Dirac radial para o átomo de hidrogênio. A forma explícita do potencial é $V(r) = \frac{-ze^2}{r}$, e a forma da equação radial sugestionam a substituição $G = rg$, $F = rf$. Com isso as equações (4.68) e (4.69) são modificadas para a forma

$$\frac{dG(r)}{dr} = -\frac{k}{r} G(r) + \left(\frac{E + m_0c^2}{c\hbar} + \frac{z\alpha}{r} \right) F(r), \quad (4.70)$$

$$\frac{dF(r)}{dr} = +\frac{k}{r} F(r) - \left(\frac{E - m_0c^2}{c\hbar} + \frac{z\alpha}{r} \right) G(r), \quad (4.71)$$

onde $\alpha = \frac{e^2}{c\hbar}$. A solução de uma equação diferencial requer informações a respeito das condições iniciais e das condições de contorno do sistema. A primeira condição que analisaremos está relacionada ao limite $r \rightarrow 0$, nesta situação os termos do tipo $1/r$ são muito maiores que os termos constantes ou que dependem de r com uma potência maior que um. Logo é natural considerar que o limite $r \rightarrow 0$ implica que as equações (4.70) e (4.71) são reduzidas à forma

$$\frac{dG(r)}{dr} + \frac{k}{r} G(r) - \frac{z\alpha}{r} F(r) = 0, \quad (4.72)$$

$$\frac{dF(r)}{dr} + \frac{k}{r} F(r) + \frac{z\alpha}{r} G(r) = 0. \quad (4.73)$$

Propondo uma solução em série de potências $y(r) = \sum_{i=0}^{\infty} r^i a_i r^i$, com exceção do primeiro termo, todos os termos da série são muito pequenos

quando $r \rightarrow 0$. Por essa razão a solução radial pode ser escrita $G(r) = ar^\gamma$, $F(r) = br^\gamma$, implicando que as equações propostas em (4.72) e (4.73) podem ser manipuladas e escritas na forma independente de r

$$\begin{aligned} a\gamma + ak - bz\alpha &= 0, \\ b\gamma + bk + az\alpha &= 0, \end{aligned}$$

cujo o determinante, por motivos de consistência entre as equações, deve ser igualado a zero

$$\begin{vmatrix} -z\alpha & \gamma + k \\ \gamma - k & z\alpha \end{vmatrix} = -\gamma^2 + k^2 - (z\alpha)^2 = 0,$$

de onde concluímos que $\gamma = \sqrt{\pm k^2 - (z\alpha)^2}$. Com a substituição $\varrho = e\lambda r = \frac{er\sqrt{m_0^2 c^4 - E^2}}{\hbar c}$ e propondo uma solução que converge no infinito

$$G(\varrho) = \sqrt{(m_0 + E)\varrho}^{-\frac{\epsilon}{2}} \left(\varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \varrho^m + \varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \varrho^m \right), \quad (4.74)$$

$$F(\varrho) = \sqrt{(m_0 - E)\varrho}^{-\frac{\epsilon}{2}} \left(\varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \varrho^m - \varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \varrho^m \right), \quad (4.75)$$

as equações (4.70) e (4.71) fornecem um par de equações para os coeficientes α_m e β_m

$$\alpha_m(m + \gamma) = \alpha_{m-1} - \frac{z\alpha E}{\hbar c\lambda} \alpha_m - \left(k + \frac{z\alpha m_0 c^2}{\hbar c\lambda} \right) \beta_m, \quad (4.76)$$

$$\beta_m(m + \gamma) = \left(-k + \frac{z\alpha m_0 c^2}{\hbar c\lambda} \right) \alpha_m + \frac{z\alpha E}{\hbar c\lambda} \beta_m. \quad (4.77)$$

Da equação (4.77), a razão entre β_m e α_m é obtida

$$\frac{\beta_m}{\alpha_m} = \frac{-k + \frac{z\alpha m_0 c^2}{\hbar c\lambda}}{m + \gamma - \frac{z\alpha E}{\hbar c\lambda}} = \frac{k - \frac{z\alpha m_0 c^2}{\hbar c\lambda}}{n' - m}, \quad (4.78)$$

onde definimos $n' \equiv \gamma - \frac{z\alpha E}{\hbar c\lambda}$. Se imaginarmos as equações para os coeficientes como um sistema de duas equações e duas incógnitas, logo podemos resolver o sistema para β_m e α_m tal que o resultado em função

de β_0 e α_0 é uma função hipergeométrica

$$\alpha_m = \frac{(n' - m)}{m(2\gamma + m)} \alpha_{m-1} = \frac{(-1)^m (n' - 1) \dots (n' - m)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0, \quad (4.79)$$

$$\beta_m = \frac{(-1)^m n' (n' - 1) \dots (n' - m + 1)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \beta_0. \quad (4.80)$$

Com isso completamos o cálculo dos coeficientes que compõem a solução proposta em (4.74) e (4.75). Agora vamos estudar o comportamento do espectro de energia. Esperamos, a exemplo da mecânica quântica não relativística, encontrar estados ligados. De fato, a equação (4.79) é uma relação de recorrência envolvendo dois coeficientes seguidos. Dentre os valores que o número m assume, é condição que exista um valor que seja o limite, isto é, um número para que função de onda seja nula. Uma forma simples de impor essa condição é zerando o segundo termo da expressão (4.79), ou seja, $n' - m = 0$, $n' = m$, assim $m' = 0, 1, 2, \dots$. Com os resultados anteriores $n' = \gamma - \frac{z\alpha E}{\hbar c \lambda}$, $\lambda = \frac{\sqrt{m_0^2 c^4 - E^2}}{\hbar c}$, e com a definição $n \equiv n' + j + \frac{1}{2}$ onde j é o momento angular. A energia é então dada pela expressão

$$E = m_0 c^2 \left[1 + \frac{(z\alpha)^2}{\left[n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - (z\alpha)^2} \right]^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.81)$$

A Tabela 1, a seguir, ilustra a energia conforme o estado quântico. Dessa

Notação	n	l	j	n'	k	E/eV
$1s_{\frac{1}{2}}$	1	0	1/2	0	-1	-13,606
$2s_{\frac{1}{2}}$	2	0	1/2	1	-1	-3,402
$2p_{\frac{1}{2}}$	2	1	1/2	1	1	-3,402
$2p_{\frac{3}{2}}$	2	1	1/2	0	-2	-3,401
$3s_{\frac{1}{2}}$	3	0	1/2	2	-1	-1,512
$3p_{\frac{1}{2}}$	3	1	1/2	2	1	-1,512

Tabela 1: Energia dos estados e os números quânticos.

forma, finalizamos o capítulo com a solução da equação de Dirac para

átomo de hidrogênio. Observamos que as soluções da equação de Dirac são, em geral, mais extensas e complexas que as soluções da equação de Schrödinger. Esse é o preço que pagamos para obtermos soluções de equações de onda que carregam os princípios da relatividade restrita. Todavia, os resultados obtidos com a equação de Dirac são excelentes, eles fornecem, de forma natural, a descrição do spin das partículas e, além disso, fornecem um resultado exato em relação à estrutura fina dos espectros. Assim é natural pensar em estender para espaços curvos a utilização das equações de onda e, dessa forma, incorporar os princípios da relatividade geral. No próximo capítulo iremos focar na derivação das equações de Klein-Gordon e Dirac em espaços curvos.

5 EQUAÇÕES DE DIRAC E KLEIN-GORDON EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO

Neste capítulo vamos iniciar o estudo de equações de onda relativísticas em um espaço-tempo arbitrário. A tarefa de generalizar a equação de Klein-Gordon para o espaço curvo é relativamente simples. Mas em relação à equação de Dirac, temos uma situação mais complicada. Devemos utilizar, para esse fim, resultados da teoria de grupos, em especial, do grupo de Lorentz. No que segue, explicaremos com detalhe o procedimento.

5.1 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO CURVO

No capítulo passado mencionamos a possibilidade de descrevermos partículas sem spin em um espaço tempo curvo. Vamos investigar, a partir deste ponto, a formulação de uma equação equivalente à equação de Klein-Gordon em um espaço tempo com curvatura. Vamos nos limitar ao estudo de geometrias oriundas da resolução da equação de Einstein. Desta forma, a descrição quântica de uma partícula pode levar em conta elementos da geometria do espaço-tempo em questão. Dos capítulos iniciais deste trabalho, estudamos a generalização das equações da relatividade restrita para a relatividade geral. O procedimento padrão para essa tarefa consiste em:

- Repassar o tensor métrico de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ pelo tensor métrico geral $g_{\alpha\beta}$.
- Repassar derivadas espaciais usuais por derivadas covariantes, isto é, $\phi_{,\mu} \rightarrow \phi_{;\mu}$.
- Repassar o elemento de volume do espaço de Minkowski $d^3x dt$ pelo elemento de volume covariante $d^4x \sqrt{-g}$.

Dessa forma a equação de Klein-Gordon no espaço de Minkowski (em unidades $c = \hbar = 1$)

$$-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + m^2 \phi = 0, \quad (5.1)$$

em um espaço-tempo arbitrário, é dada por

$$-g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + m^2 \phi = 0, \quad (5.2)$$

onde ∇_μ é a notação usada para representar a derivada covariante. Para fins computacionais convém colocarmos a equação (5.2) em uma forma simplificada. Considerando que a derivada covariante de um escalar é idêntica a derivada usual, podemos escrever a equação (5.2) na forma

$$-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\phi + m^2\phi = 0. \quad (5.3)$$

Usando a identidade

$$V^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}V^\mu),$$

e levando em conta a nulidade da derivada covariante do tensor métrico, a equação (5.2) é simplificada para a forma

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\phi) + m^2\phi = 0. \quad (5.4)$$

Devido à presença do tensor métrico geral e do seu determinante, fica claro que a equação (5.2) engloba efeitos da gravidade, mas há, no entanto, outras formas da equação de onda se acoplar com a gravidade. A maneira como o efeito da gravidade é englobado pela equação (5.2) é, algumas vezes, referido como acoplamento mínimo gravitacional.

A forma mais geral de escrever a equação de Klein-Gordon no espaço curvo é *conformalmente* acoplada ao campo gravitacional. Neste caso, a ação é dada por

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (-g)^{-1/2} [g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - (m^2 + \xi R) \phi^2], \quad (5.5)$$

onde $\xi = \frac{1}{4} [(n-2)/(n-1)]$ e n é a dimensão do espaço-tempo. A nomenclatura "*conformalmente* acoplada" em referência a equação (5.2) vem do fato que, para o caso de $m = 0$, a ação é invariante sob uma *transformação conformal* da métrica, definida como

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

onde Ω é uma função que depende das coordenadas. Em especial, iremos trabalhar com espaços *conformalmente planos*, na forma

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu},$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ representa o espaço-tempo plano da relatividade restrita. Assim, a nossa tarefa agora é procurar soluções para a equação de Klein-

Gordon utilizando o arcabouço teórico desenvolvido nessa seção. No capítulo relacionado aos resultados obtidos, resolveremos a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo da córda cósmica na presença de um potencial escalar. Na próxima seção apresentaremos a generalização da equação de Dirac.

5.2 GRUPO DE LORENTZ E A EQUAÇÃO DE DIRAC EM ESPAÇO-TEMPO CURVO

Na mecânica clássica não relativística o elemento de distância $x^2 + y^2 + z^2$ é invariante em referenciais que estão com velocidade constante. As transformações que conectam dois referenciais inerciais na mecânica clássica recebem o nome de transformações de Galileu. Quando impomos os postulados da relatividade restrita, temos um cenário diferente em relação às quantidades cinemáticas e dinâmicas. Em vez das transformações de Galileu, as transformações corretas, levando em conta a constância da velocidade da luz, são as chamadas transformações de Lorentz que são transformações que preservam a quantidade $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, e formam o chamado grupo de Lorentz. Esse grupo engloba as simetrias da Relatividade Restrita. Assim, uma maneira de garantirmos que nossas equações estejam de acordo com os conceitos da Relatividade Restrita, é impor que os constituintes da equação satisfaçam as transformações de Lorentz. Para as equações, que além de vetores e tensores, envolvem espinores, devemos usar também a chamada representação espinorial do grupo de Lorentz.

5.2.1 Grupo de Lorentz

Uma transformação de Lorentz que conecta as coordenadas do espaço-tempo x^α e as coordenadas transformadas x'^α , pode ser escrita na forma

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad (5.7)$$

onde Λ^α_β e a^α são quantidades constantes. A transformação (5.7) deve manter o elemento de distância $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$ invariante, que na forma infinitesimal, é dado por

$$\begin{aligned} ds'^2 &= dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usando a (5.7) em (5.8) temos

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\alpha\beta} (\Lambda^\alpha_\gamma dx^\gamma) (\Lambda^\beta_\delta dx^\delta) \\ &= \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta dx^\gamma dx^\delta, \end{aligned} \quad (5.9)$$

de onde concluímos que

$$ds'^2 = ds^2, \quad (5.10)$$

desde que os termos Λ^α_β satisfaçam

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta = \eta_{\gamma\delta}. \quad (5.11)$$

De forma geral, podemos representar uma transformação de Lorentz para uma quantidade ψ_n por

$$\psi'_n = \sum_m [D(\Lambda)]_{nm} \psi_m, \quad (5.12)$$

onde $D(\Lambda)$ é uma representação matricial do grupo de Lorentz. Sabemos que uma transformação de Lorentz Λ_1 seguida de uma transformação de Lorentz Λ_2 fornece $\Lambda_1\Lambda_2$, ou seja, transformações de Lorentz em sequência são equivalentes a uma única transformação de Lorentz envolvendo o produto das transformações. Dessa forma as matrizes $D(\Lambda)$ devem satisfazer a propriedade matemática

$$D(\Lambda_1) D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2). \quad (5.13)$$

Por exemplo, se a quantidade ψ_n for um vetor contravariante V^α , então $D(\Lambda)$ é dado por

$$[D(\Lambda)]^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_\beta, \quad (5.14)$$

ou seja

$$V'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta. \quad (5.15)$$

Para um tensor contravariante de segunda ordem $T^{\alpha\beta}$ a matriz $D(\Lambda)$ assume a forma

$$[D(\Lambda)]^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta, \quad (5.16)$$

fornecendo a transformação

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} T^{\gamma\delta}. \quad (5.17)$$

As equações (5.14) e (5.16) são exemplos de representação tensorial do grupo de Lorentz. A representação tensorial das transformações de Lorentz cobre grande parte das transformações relacionadas a tensores, como exemplificado na equação (5.17), no entanto, equações que descrevem partículas com spin, por exemplo, exigem um tipo diferente de representação do grupo de Lorentz. Para estudar como um espinor se transforma em relação a uma transformação de Lorentz, necessitamos de uma *representação espinorial* do grupo de Lorentz. Esse tipo de representação é construído considerando inicialmente a forma infinitesimal da transformação

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \omega_{\beta}^{\alpha}, \quad (5.18)$$

onde $|\omega_{\beta}^{\alpha}| \ll 1$. Isso significa que essa transformação é composta por um tensor δ_{β}^{α} , que preserva a forma das quantidades transformadas, mais uma quantidade infinitesimal ω_{β}^{α} , que fornece uma alteração nessas quantidades transformadas. Se a transformação definida em (5.18) for uma transformação de Lorentz, deve satisfazer a equação (5.11), dessa forma, inserindo (5.18) em (5.11) obtemos

$$\begin{aligned} \eta_{\gamma\delta} &= \eta_{\alpha\beta} \left(\delta_{\gamma}^{\alpha} + \omega_{\gamma}^{\alpha} \right) \left(\delta_{\delta}^{\beta} + \omega_{\delta}^{\beta} \right) \\ &= \eta_{\alpha\beta} \left(\delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} + \delta_{\gamma}^{\alpha} \omega_{\delta}^{\beta} + \omega_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} + \omega_{\gamma}^{\alpha} \omega_{\delta}^{\beta} \right) \\ &= \eta_{\gamma\delta} + \eta_{\gamma\beta} \omega_{\delta}^{\beta} + \eta_{\alpha\delta} \omega_{\gamma}^{\alpha} + \eta_{\alpha\beta} \omega_{\gamma}^{\alpha} \omega_{\delta}^{\beta} \\ &= \eta_{\gamma\delta} + \omega_{\gamma\delta} + \omega_{\delta\gamma} + \eta_{\alpha\beta} \omega_{\gamma}^{\alpha} \omega_{\delta}^{\beta}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Descartando os termos de alta ordem em ω concluímos que

$$\omega_{\gamma\delta} + \omega_{\delta\gamma} = 0,$$

assim

$$\omega_{\gamma\delta} = -\omega_{\delta\gamma}. \quad (5.20)$$

Portanto, o termo ω deve possuir a propriedade de ser antissimétrico. Para o mesmo tipo de transformação, a representação matricial de $D(\Lambda)$ deve possuir propriedades equivalentes. Isso significa impor que

$D(1 + \omega)$ seja expandido na forma

$$D(1 + \omega) = \mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega^{\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta}, \quad (5.21)$$

que, em virtude de (5.20), $\sigma_{\gamma\delta}$ pode ser escolhido ser antissimétrico

$$\sigma_{\gamma\delta} = -\sigma_{\delta\gamma}. \quad (5.22)$$

Além da propriedade de antissimetria, devemos observar que o termo $\sigma_{\gamma\delta}$ pode possuir mais um vínculo devido à regra de multiplicação de grupo, dada em (5.13). De fato, é usual calcular a forma explícita do termo $\sigma_{\gamma\delta}$ com base em uma equação geral derivada para $\sigma_{\gamma\delta}$. Impondo a multiplicação de grupo para a quantidade $\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}$ temos

$$D(\Lambda)D(1 + \omega)D(\Lambda^{-1}) = D(1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}), \quad (5.23)$$

e usando a forma explícita para $D(1 + \omega)$, a equação anterior é escrita como

$$D(\Lambda)\left(\mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega^{\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta}\right)D(\Lambda^{-1}) = \mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}\Lambda^{\gamma}_{\alpha}\Lambda^{\delta}_{\beta}, \quad (5.24)$$

ou, descartando termos de alta ordem,

$$D(\Lambda)\sigma_{\alpha\beta}D(\Lambda^{-1}) = \sigma_{\gamma\delta}\Lambda^{\gamma}_{\alpha}\Lambda^{\delta}_{\beta}. \quad (5.25)$$

Se fizermos $\Lambda = 1 + \omega$ e $\Lambda^{-1} = 1 - \omega$ na equação (5.25), temos a relação

$$\left(\mathbf{1} + \frac{1}{2}\omega^{\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta}\right)\sigma_{\alpha\beta}\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\omega^{\varepsilon\rho}\sigma_{\varepsilon\rho}\right) = \sigma_{\gamma\delta}(\delta^{\gamma}_{\alpha} + \omega^{\gamma}_{\alpha})(\delta^{\delta}_{\beta} + \omega^{\delta}_{\beta}), \quad (5.26)$$

que, após a expansão dos termos entre parênteses, fornece

$$\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\omega^{\gamma\delta}\sigma_{\gamma\delta}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\omega^{\varepsilon\rho}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\varepsilon\rho} = \sigma_{\gamma\delta}(\delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\delta}_{\beta} + \delta^{\gamma}_{\alpha}\omega^{\delta}_{\beta} + \omega^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\delta}_{\beta}). \quad (5.27)$$

Reescrevendo os índices da equação anterior, obtemos

$$\omega^{\gamma\delta}(\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta} - \sigma_{\gamma\delta}\sigma_{\alpha\beta}) = \omega^{\gamma\delta}(2\eta_{\gamma\delta}\sigma_{\alpha\beta} + 2\eta_{\gamma\alpha}\sigma_{\delta\beta}), \quad (5.28)$$

que pode ser escrito na forma

$$[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\delta}\sigma_{\alpha\beta} - \eta_{\gamma\alpha}\sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\sigma_{\gamma\beta}, \quad (5.29)$$

que é a relação de comutação que σ deve satisfazer. Assim o problema de encontrar uma representação do grupo de Lorentz é resumida em encontrar quantidades σ que satisfaçam a equação (5.29).

5.2.2 Equação de Dirac em Espaço-tempo Curvo

Uma característica fundamental da equação de Dirac é a invariância por transformações de Lorentz. Em espaço-tempo curvo, desejamos preservar essa característica. Uma maneira de fazer isso é utilizando as tetradas $e^{(a)}_{\mu}$, que podem ser definidas de forma a satisfazerem a equação

$$g_{\mu\nu} = e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} \eta_{(a)(b)}, \quad (5.30)$$

onde $\eta_{(a)(b)}$ é o tensor de Minkowski que representa a métrica de um espaço-tempo sem curvatura e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, que está relacionado a um espaço-tempo de geometria arbitrária. É importante observar que os índices denotados por letras gregas α, β, γ e assim por diante, referem-se às coordenadas de tensores onde o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ pode ser usado para descer ou subir índices, enquanto que os índices denotados por letras latinas entre parênteses referem-se a tensores, onde o tensor de Minkowski $\eta_{(a)(b)}$ deve ser usado para subir ou descer índices. Eventualmente, tensores com os dois tipos de índices podem ocorrer, neste caso devemos observar qual é o tensor métrico correto para o índice no qual desejamos manipular.

Através da equação da (5.30), notamos que as tetradas podem ser utilizadas para projetar vetores do espaço-tempo curvo no espaço tempo plano pela relação

$$V_{\mu} = e^{(a)}_{\mu} V_{(a)} \quad (5.31)$$

que será utilizada para relacionar a forma de um vetor em diferentes geometrias do espaço-tempo.

Inicialmente notamos que a equação de Dirac, escrita na geometria de Minkowski, possui simetria de Lorentz, isto é, ela é invariante em relação a uma transformação de Lorentz. Desejamos que equação equivalente em espaço-tempo curvo possua a mesma característica. De fato, vamos estudar o comportamento dos elementos da equação de Dirac sob transformações que preservam determinadas simetrias da relatividade restrita e, dessa forma, entender as quantidades que precisam ser adicionadas ou modificadas na equação. Notamos que um espinor

transforma-se da seguinte maneira

$$\psi \rightarrow \rho(\Lambda)\psi, \quad (5.32)$$

onde $\rho(\Lambda) = 1 + \frac{1}{2}i\varepsilon^{(a)(b)}\Sigma_{(a)(b)}$ e $\Sigma_{(a)(b)}$ é a representação espinorial dos geradores da transformação de Lorentz que são escritos em função das matrizes $\gamma^{(c)}$ definidas em, na forma $\Sigma_{(a)(b)} \equiv \frac{1}{4}i[\gamma_{(a)}, \gamma_{(b)}]$ (NAKAHARA, 2003). A idéia é construir uma derivada covariante $\nabla_{(a)}\psi$ que, localmente, é invariante de Lorentz. Isso significa que devemos impor a condição de transformação

$$\nabla_{(a)}\psi \rightarrow \rho\Lambda_{(a)}^{(b)}\nabla_{(b)}\psi. \quad (5.33)$$

A maneira usual de achar a forma do operador de derivada covariante do espinor é supondo a combinação

$$\nabla_{(a)}\psi = e_{(a)}^{\mu}(\partial_{\mu} + \Omega_{\mu})\psi, \quad (5.34)$$

e considerando a forma com a qual o operador Ω_{μ} se transforma

$$\Omega_{\mu} \rightarrow \rho\Omega_{\mu}\rho^{-1} + \partial_{\mu}\rho\rho^{-1}. \quad (5.35)$$

Se escolhermos a combinação de termos na forma

$$\Omega_{\mu} \equiv \frac{1}{2}i\Gamma_{\mu}^{(a)(b)}\Sigma_{(a)(b)} = \frac{1}{2}ie_{\nu}^{(a)}\nabla_{\mu}e^{(b)\nu}\Sigma_{(a)(b)}, \quad (5.36)$$

a equação (5.35) é satisfeita e conseqüentemente a equação (5.34) satisfaz a condição de transformação exigida em (5.33) e com isso chegamos à forma final do operador de derivada covariante

$$\nabla_{(c)}\psi = e_{(c)}^{\mu} \left(\partial_{\mu} + \frac{1}{2}ie_{\nu}^{(a)}\nabla_{\mu}e^{(b)\nu}\Sigma_{(a)(b)} \right) \psi, \quad (5.37)$$

onde os termos $\Gamma_{\mu}^{(a)(b)}$ envolvem derivadas covariantes de tensores que são obtidas com o uso dos símbolos de Christoffel que, por sua vez, envolvem derivadas do tensor métrico.

Considerando a equação de Dirac em espaço tempo plano

$$i\gamma^{(a)}\partial_{(a)}\psi - m\psi = 0, \quad (5.38)$$

e repassando o operador de derivada convencional para o operador

obtido em (5.37), chegamos na equação de Dirac em espaço curvo

$$ie_{(a)}^{\mu} \gamma^{(a)} (\partial_{\mu} + \Omega_{\mu}) \psi - m\psi = 0. \quad (5.39)$$

Se tivermos um acoplamento com o campo eletromagnético (acoplamento mínimo)

$$ie_{(a)}^{\mu} \gamma^{(a)} (\partial_{\mu} + \Omega_{\mu} + ieA_{\mu}) \psi - m\psi = 0, \quad (5.40)$$

e a ação escalar que leva a equação (5.40) é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} \left[i\gamma^{(c)} e^{\mu}_{(c)} \left(\partial_{\mu} + \frac{1}{2} ie_{\nu}^{(a)} \nabla_{\mu} e^{(b)\nu} \Sigma_{(a)(b)} + ieA_{\mu} \right) - m \right] \psi. \quad (5.41)$$

É comum definir o termo $\gamma^{\mu} = e_{(a)}^{\mu} \gamma^{(a)}$ como matrizes de Dirac em espaço tempo curvo e é fácil ver que elas satisfazem a álgebra de Clifford

$$\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = g^{\mu\nu}. \quad (5.42)$$

Com os resultados obtidos podemos agora escrever escrever equações de onda em espaços curvos para diversas situações de interesse, o que será feito no próximo capítulo.

6 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE ONDA EM ESPAÇOS CURVOS

Neste capítulo iremos derivar alguns resultados relacionados a bósons e férmions. Da parte dos autores do presente trabalho, não temos conhecimento que alguns destes resultados tenham sido publicados na literatura.

6.1 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC BI-DIMENSIONAL EM UM REFERENCIAL ACELERADO (ESPAÇO-TEMPO DE RINDLER)

Estudaremos soluções da equação de Dirac em 1+1 dimensões, em um espaço conhecido como espaço de Rindler. Em anos recentes, o estudo de sistemas quânticos com dimensões reduzidas tem recebido grande atenção da comunidade científica devido à possibilidade de servirem como modelos de sistemas físicos (COLEMAN; JACKIW; SUSSKIND, 1975; COLEMAN, 1976; CASTRO, 2003; PACHECO; LANDIM; ALMEIDA, 2003b). Em especial, o potencial de uma carga em 1+1 dimensões, acoplado à equação de Dirac através da componente temporal do potencial vetor, está associado à não existência de estados ligados devido ao paradoxo de Klein (CASTRO, 2005; CASTRO; HOTT, 2005; HO; KHALILOV, 2001). Por outro lado, há uma classe de potenciais que podem ser representados na equação de Dirac, os chamados potenciais escalares que são acoplados com a massa e que, em alguns casos, estão associados a soluções para estados ligados (CASTRO; HOTT, 2005).

No apêndice A discutiremos alguns detalhes do movimento clássico no espaço-tempo de Rindler, que é um espaço-tempo bem estudado e estabelecido na literatura, nossa contribuição é a análise da solução de equação de Dirac nesse espaço. No momento iremos focar na métrica que representa um referencial acelerado na relatividade restrita, que pode escrita na forma

$$ds^2 = (1 + a\xi)^2 d\tau^2 - d\xi^2, \quad (6.1)$$

onde ξ e τ são as coordenadas próprias do referencial acelerado. A coordenada tempo próprio τ , pode assumir os valores $-\infty < \tau < \infty$, enquanto que a coordenada da distância própria assume os valores no intervalo $1/a < \xi < \infty$. A parâmetro a é aceleração do sistema de referência.

Vamos escrever a métrica que representa o elemento de distância (6.1) na forma conformalmente plana. Para este fim, vamos efetuar a seguinte transformação

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \tau, \\ x &= \frac{1}{a} \ln(1 + a\xi),\end{aligned}\tag{6.2}$$

e diferenciando as coordenadas obtemos

$$\begin{aligned}dx &= d\left[\frac{1}{a} \ln(1 + a\xi)\right] \\ &= \frac{1}{a} \frac{a}{1 + a\xi} \\ &= \frac{d\xi}{(1 + a\xi)},\end{aligned}\tag{6.3}$$

ou, após elevarmos ao quadrado

$$dx^2 = \frac{d\xi^2}{(1 + a\xi)^2}.\tag{6.4}$$

Substituindo a equação (6.4) na equação (6.1) encontramos o elemento de distância

$$ds^2 = e^{2ax} (d\tau^2 - dx^2).\tag{6.5}$$

Além do alto grau de simetria que essa métrica possui, temos agora a vantagem que as coordenadas cobrem o intervalo $-\infty < \tau < \infty$, e $-\infty < x < \infty$, o que significa uma extensão da métrica inicialmente proposta.

Podemos ver claramente que a equação (6.5) é conformalmente plana, uma vez que temos uma função que multiplica um elemento de distância de um espaço-tempo plano. Agora, a equação (6.5), assim como métrica na equação (6.1), representam o elemento de distância de um *espaço-tempo plano*. Na realidade essas métricas são formas da métrica de Minkowski relacionadas por uma transformação de coordenadas. Em vista disso, o espaço-tempo associado as métricas (6.1) e (6.5) é plano.

6.1.1 Derivando a equação de Dirac

Nossa tarefa agora é derivar a equação de Dirac para a métrica (6.5). Recapitulando resultados anteriores, a equação de Dirac para um espaço-tempo arbitrário é escrita na forma

$$ie_{(a)}^{\mu} \gamma^{(a)} (\partial_{\mu} + \Omega_{\mu}) \psi - m\psi = 0, \quad (6.6)$$

com o termo Ω_{μ} é dado por

$$\Omega_{\mu} = \frac{1}{2} i e_{\nu}^{(a)} \nabla_{\mu} e^{(b)\nu} \Sigma_{(a)(b)}, \quad (6.7)$$

onde

$$\Sigma_{(a)(b)} \equiv \frac{1}{4} i [\gamma_{(a)}, \gamma_{(b)}], \quad (6.8)$$

são os geradores do grupo de Lorentz, e as quantidades $\gamma_{(a)}$ são as matrizes de Dirac usuais. Para métricas do tipo (6.5) podemos escolher uma base tetrada na forma

$$e_{\nu}^{(a)} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\sigma(x)}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\sigma(x)}{2}} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

$$e^{(a)\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\sigma(x)}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\sigma(x)}{2}} \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

onde $\sigma(x) \equiv 2ax$. É fácil verificar que essa base tetrada está relacionada ao tensor métrico por

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{(a)} e_{\nu}^{(b)} \eta_{(a)(b)},$$

onde $\eta_{(a)(b)}$ é o tensor de Minkowski em duas dimensões. Os cálculos para Ω_{μ} resultam em uma componente não nula

$$\Omega_0 = \frac{i\gamma^0 \cdot \gamma^1}{4} \frac{d\sigma}{dx}, \quad (6.11)$$

que, substituindo na equação de Dirac, fornece

$$\begin{aligned} 0 &= ie_{(a)}^{\mu} \gamma^{(a)} (\partial_{\mu} + \Omega_{\mu}) \psi - m\psi \\ &= \left[i\gamma^{(0)} \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\gamma^{(1)}}{4} \frac{d\sigma(x)}{dx} - me^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] \psi(t, x). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Como fora discutido anteriormente, às matrizes $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}$ são as matrizes de Dirac usuais do espaço tempo plano e estão relacionadas as matrizes de Dirac no espaço tempo-curvo, através da base tetrada pela equação $\gamma^\mu = e_{(a)}^\mu \gamma^{(a)}$. Uma escolha possível para as matrizes de Dirac em duas dimensões no espaço plano é dada por

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

dessa forma as matrizes no espaço curvo são escritas como

$$\gamma^0 = e^{-\frac{\sigma}{2}} \gamma^{(0)}, \quad \gamma^1 = e^{-\frac{\sigma}{2}} \gamma^{(1)}. \quad (6.14)$$

É fácil ver que essas matrizes satisfazem a álgebra de Clifford

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = g^{\mu\nu}.$$

6.1.2 Separação de variáveis

Tendo estabelecido todos os elementos que compõem a equação de Dirac na expressão (6.5), estamos em condições agora de proceder com a separação da parte espacial e temporal da equação. Como a equação (6.5) não depende explicitamente do tempo, podemos propor que a solução seja escrita na forma

$$\psi(t, x) = e^{-i\epsilon t} \begin{bmatrix} \bar{g}(x) \\ \bar{f}(x) \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

que, após substituição na equação (6.5), fornece

$$\left[i\gamma^{(1)} \frac{d}{dx} + \frac{i\gamma^{(1)}}{4} \frac{d\sigma(x)}{dx} - m e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] \begin{bmatrix} \bar{g}(x) \\ \bar{f}(x) \end{bmatrix} = -\gamma^{(0)} \epsilon \begin{bmatrix} \bar{g}(x) \\ \bar{f}(x) \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

ou substituindo os valores das matrizes $\gamma^{(0)}$ e $\gamma^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} - \frac{1}{4} \frac{d\sigma(x)}{dx} - m e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma(x)}{dx} - m e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g}(x) \\ \bar{f}(x) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g}(x) \\ \bar{f}(x) \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

ou ainda, de forma equivalente

$$\left[\frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma(x)}{dx} + me^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] \bar{g}(x) = \varepsilon \bar{f}(x), \quad (6.18)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} - \frac{1}{4} \frac{d\sigma(x)}{dx} + me^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] \bar{f}(x) = \varepsilon \bar{g}(x). \quad (6.19)$$

Aplicando uma transformação unitária na expressão (6.17) através da matriz

$$U(x) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{4}\sigma(x)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{4}\sigma(x)} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

a derivada de $\sigma(x)$ sai da equação e agora encontramos o sistema de equações

$$\left[\frac{d}{dx} + me^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] g(x) = \varepsilon f(x), \quad (6.21)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} + me^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] f(x) = \varepsilon g(x), \quad (6.22)$$

onde

$$\bar{\psi}(t, x) = U\psi(t, x) = U \begin{bmatrix} \bar{g}(x) \\ \bar{f}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x) \\ f(x) \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Quando há a presença de um potencial escalar $V(x)$, devemos fazer o repasse $m \rightarrow m + V(x)$, de forma que o sistema de equações formado por (6.21) e (6.22) é reescrito como

$$\left[\frac{d}{dx} + (m + V(x)) e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] g(x) = \varepsilon f(x), \quad (6.24)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} + (m + V(x)) e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] f(x) = \varepsilon g(x). \quad (6.25)$$

6.1.3 Desacoplamento das funções

A idéia é obtermos equações diferenciais que dependam somente de f ou de g , veremos que em vez de trabalharmos com equações diferenciais de primeira ordem, teremos duas equações de segunda ordem, uma para cada função. Vamos definir a função

$$z(x) = (m + V(x)) e^{\frac{1}{2}\sigma(x)}, \quad (6.26)$$

de modo que, em vez das expressões (6.24) e (6.25), temos o sistema

$$\left[\frac{d}{dx} + z(x) \right] g(x) = \varepsilon f(x), \quad (6.27)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} + z(x) \right] f(x) = \varepsilon g(x). \quad (6.28)$$

Isolando $g(x)$ na segunda equação e substituindo na primeira obtemos uma equação desacoplada para $f(x)$. Procedendo de forma análoga para obter uma equação desacoplada para $g(x)$, temos que as duas equações são dadas por

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{dz}{dx} f - z^2 f + \varepsilon^2 f = 0; \quad (6.29)$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{dz}{dx} g - z^2 g + \varepsilon^2 g = 0. \quad (6.30)$$

Podemos ainda escrever de modo unificado as duas equações

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - s \frac{dz}{dx} F - z^2 F + \varepsilon^2 F = 0, \quad (6.31)$$

de forma que quando $s = 1$ temos a equação para a função f e para $s = -1$ temos a equação para a função g .

6.1.4 Solução aproximada

Para o caso da métrica de Rindler $\sigma = 2ax$, e considerando um potencial $V(x) = 0$, então $z(x)$ pode ser escrito na forma

$$z(x) = m \exp(ax). \quad (6.32)$$

Lembrando que essa métrica, em coordenadas conformais, é representada pela expressão

$$g_{\mu\eta} = \exp(2ax) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.33)$$

onde a coordenada conformal x assume valores no intervalo de $-\infty < x < \infty$. Para tratarmos o problema de resolver a equação de Dirac nesse referencial de forma simplificada, podemos considerar inicialmente que a aceleração é pequena, logo é razoável supor que o potencial $z(x)$ é

aproximado na forma

$$z(x) = m \left(1 + \frac{ax}{2} + \dots \right).$$

Assim a aproximação anterior leva a equação (6.31) para a forma

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - s \frac{ma}{2} F - \frac{a^2 m^2}{4} \left(\frac{2}{a} + x \right)^2 F + \varepsilon^2 F = 0. \quad (6.34)$$

6.1.4.1 Autovalores de Energia e autofunções

A seguir, usaremos o método NU (Nikiforov-Uvarov) (PAHLAVANI, 2012) para determinar o espectro de energia e as autofunções do problema. Definindo a variável $y = \sqrt{\frac{am}{2}} \left(x + \frac{2}{a} \right)$, as derivadas de primeira e segunda ordem na equação (6.34) são, respectivamente

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dF}{dy} = \sqrt{\frac{am}{2}} \frac{dF}{dy}, \quad (6.35)$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dF}{dy} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \frac{d^2 F}{dy^2} = \frac{am}{2} \frac{d^2 F}{dy^2}. \quad (6.36)$$

Assim, podemos escrever a equação (6.34)

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{2\varepsilon^2}{am} F - y^2 F - sF = 0 \quad (6.37)$$

ou ainda, definindo $\eta = \frac{2\varepsilon^2}{am}$ e $V_{ef} = y^2 + s$, podemos colocar a equação (6.37) na forma de uma equação de Schrödinger

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + (\eta - V_{ef}) F = 0. \quad (6.38)$$

Observando que $V_{ef} = y^2 + s$ é um potencial do tipo oscilador harmônico, podemos obter uma solução para essa equação de forma análoga ao problema do oscilador harmônico quântico, mas aproveitaremos a oportunidade para introduzir um interessante método de resolução equações diferenciais, o chamado método NU (PAHLAVANI, 2012). Para esse fim,

iremos impor a transformação na função de onda

$$F = \exp \left[\frac{-am}{4} \left(x + \frac{2}{a} \right)^2 \right] \bar{F} = \exp \left[-\frac{y^2}{2} \right] \bar{F} \quad (6.39)$$

e em vez da equação (6.38), temos a expressão

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dy^2} - 2y \frac{d\bar{F}}{dy} + \left(\frac{2\varepsilon^2}{am} - 1 - s \right) \bar{F} = 0, \quad (6.40)$$

No apêndice B podem ser encontrados detalhes sobre método NU de resolução de equações diferenciais. Agora nos limitaremos à aplicação dos resultados discutidos no apêndice para o resolver a equação. O procedimento de resolução com as fórmulas derivadas no apêndice pode ser sistematizado com os seguintes passos:

1. Colocar a equação diferencial do problema em questão na forma da equação (B.1).
2. Comparar as equações e determinar as funções $\tilde{\tau}$, σ , e $\tilde{\sigma}$.
3. Com as funções identificadas, montar a equação polinomial com a fórmula (B.16).
4. Considerando o termo dentro da raiz (B.16) como uma equação polinomial do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, identificar os termos a , b , e c e calcular o discriminante, isto é, $\Delta = b^2 - 4ac$. O resultado será uma equação polinomial de segunda ordem para k , com as raízes denotadas por k_{\pm} .
5. Substituindo os dois valores obtidos para k na equação (B.16), o resultado será uma equação de quarta ordem fornecendo quatro valores para $\pi(s)$. Devemos escolher um dos valores que seja fisicamente válido.
6. O valor fisicamente válido será aquele em que a derivada da equação (B.7) tiver um valor negativo.
7. Igualar as equações (B.22) e (B.15) e, desta forma, obter uma equação para o espectro de energia.
8. Inserir os valores de σ e π na equação (B.5) e determinar $\phi(s)$.
9. Determinar $\rho(s)$ pela equação (B.24) e construir a função $y_n(s)$ pela relação de Rodrigues.

10. Combinar $\phi(s)$ e $y_n(s)$ para obter função de onda $\psi(s)$.

Comparando a equação (6.40) com a equação (B.1) temos as identificações:

$$\tilde{\tau} = -2y, \quad (6.41)$$

$$\sigma = 1, \quad (6.42)$$

$$\tilde{\sigma} = \left(\frac{2\varepsilon^2}{am} - 1 - s \right), \quad (6.43)$$

$$\sigma^2 = 1, \quad (6.44)$$

dessa forma podemos determinar o valor de π :

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} \\ &= y \pm \sqrt{y^2 - \left(\frac{2\varepsilon^2}{am} - 1 - s \right) + k}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

e o discriminante é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - 4.A.C \\ &= -4 \left[- \left(\frac{2\varepsilon^2}{am} - 1 - s \right) + k \right] = 0, \end{aligned} \quad (6.46)$$

ou seja,

$$k = \left(\frac{2\varepsilon^2}{am} - 1 - s \right). \quad (6.47)$$

Substituindo na equação para π temos

$$\begin{aligned} \pi &= y \pm \sqrt{y^2 - \left(\frac{2\varepsilon^2}{am} - 1 - s \right) + \left(\frac{2\varepsilon^2}{am} - 1 - s \right)} \\ &= y \pm y, \end{aligned} \quad (6.48)$$

onde devemos pegar o valor negativo para que a derivada de τ seja negativa, dessa forma temos

$$\pi_- = 0. \quad (6.49)$$

Precisamos também da quantidade

$$\begin{aligned}\tau(s) &= \tilde{\tau} + 2\pi(s) \\ &= -2y,\end{aligned}$$

e o espectro é obtido igualando as duas quantidades

$$\lambda = \pi' + k, \quad (6.50)$$

$$\lambda = -n\tau'. \quad (6.51)$$

O resultado é dado por

$$\pi' + k = -n\tau', \quad (6.52)$$

fornecendo a expressão

$$\varepsilon = \sqrt{am \left(n + \frac{1+s}{2} \right)}. \quad (6.53)$$

Assim, explicitando os valores de s , temos que o espectro é dado por

$$\varepsilon = \begin{cases} \pm \sqrt{am(n+1)} & \text{se } s = 1, \\ \pm \sqrt{amn} & \text{se } s = -1. \end{cases} \quad (6.54)$$

Através da fórmula (4.47) concluímos que a energia de férmions no espaço de Rindler, é discreta.

Agora iremos achar as autofunções pelo método NU. Para isso lembramos que no método em questão a solução é do tipo

$$\bar{F} = \phi(y) Y_n(y), \quad (6.55)$$

onde $Y(y)$ é dado pela formula de Rodrigues

$$Y_n(y) = \frac{B_n}{\rho(y)} \frac{d^n}{dy^n} [\sigma^n(y) \rho(y)], \quad (6.56)$$

B_n é uma constante de normalização, e $\rho(y)$ satisfaz

$$\frac{d}{dy} [\sigma(y) \rho(y)] = \tau(y) \rho(y),$$

que pode ser resolvida, usando os valores de τ e σ :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dy} &= -2y\rho; \\ \rho &= \exp(-y^2),\end{aligned}\tag{6.57}$$

e ϕ é dado pela fórmula

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\pi}{\sigma},\tag{6.58}$$

ou seja

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dy} &= 0, \\ \phi &= \text{cons.}\end{aligned}$$

Logo a solução fica

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \phi(y) Y_n(y) \\ &= B_n \frac{1}{\rho(y)} \frac{d^n}{dy^n} [\sigma^n(y) \rho(y)] \\ &= B_n \frac{1}{\rho(y)} \frac{d^n}{dy^n} [\rho(y)].\end{aligned}\tag{6.59}$$

Dessa forma \bar{F} é dado por

$$\begin{aligned}\bar{F} &= B_n \frac{1}{\exp(-y^2)} \frac{d^n}{dy^n} [\exp(-y^2)], \\ &= B'_n H_n(y),\end{aligned}\tag{6.60}$$

mas como a fórmula de Rodrigues para os polinômios de Hermite é dada por

$$H_n(y) = \frac{(-1)^n}{\exp(-y^2)} \frac{d^n}{dy^n} [\exp(-y^2)]$$

a equação (6.60) é escrita em função dos polinômios de Hermite

$$\bar{F} = B'_n H_n(y).$$

Por fim, usando a relação

$$F = \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \bar{F},$$

temos o resultado

$$F = \begin{pmatrix} B'_1 \exp(-y^2) \tilde{H}_{n+1}(y) \\ B'_2 \exp(-y^2) \tilde{H}_n(y) \end{pmatrix}.$$

No gráfico a seguir temos gráficos das funções de onda para o valor de $n = 0$ até $n = 3$, onde por simplicidade consideramos o valor $B'_n = 1$. Note que os zeros das funções de onda estão relacionados com valor do número quântico n , como esperado. Nas próximas seções estudaremos sistemas mais realistas, dessa forma, a aproximação feita para $z(x)$ não será usada, em vez disso estudaremos potenciais escalares que possibilitem soluções analíticas para a equação (6.31).

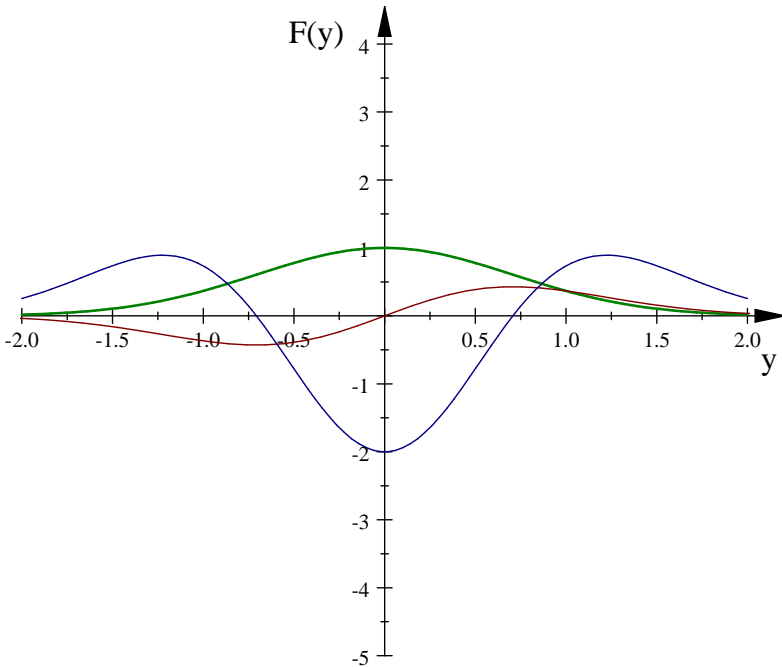


Figura 6: Gráfico da solução $f(y)$ para 3 valores de n , onde, por simplicidade, colocamos a constante de normalização igual a unidade.

6.1.4.2 Estado de energia nula

Estamos interessados nos possíveis estados com energia nula. Tais estados são recorrentes na literatura para a equação de Dirac em 1+1 dimensões com a representação das matrizes de Dirac usada neste trabalho. Agora, para o caso da equação de Dirac no espaço-tempo de Rindler, tais soluções podem ser examinadas fazendo $\varepsilon = 0$, nas equações de Dirac (6.27) e (6.28). De fato, colocando $\varepsilon = 0$ nas relações (6.27) e (6.28) obtemos o par

$$\left[\frac{d}{dx} + z(x) \right] g(x) = 0, \quad (6.61)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} + z(x) \right] f(x) = 0, \quad (6.62)$$

onde $z(x) = me^{ax} \approx m \left(1 + \frac{ax}{2} \right)$, para a pequeno. Resolvendo as equações de Dirac para $\varepsilon = 0$ encontramos o resultado

$$g(x) = c_1 e^{-\int z(x) dx} = c_1 e^{-m \int \left(1 + \frac{ax}{2} \right) dx} = c'_1 e^{-m \left(x + a \frac{x^2}{4} \right)},$$

$$f(x) = c_2 e^{\int z(x) dx} = c_2 e^{m \int \left(1 + \frac{ax}{2} \right) dx} = c'_2 e^{m \left(x + a \frac{x^2}{4} \right)}.$$

Agora devemos analisar o comportamento assintótico das soluções obtidas. Para o caso de $x \rightarrow \pm\infty$ a solução para $g(x)$ tende a zero, e a solução é aceitável. Mas para o mesmo limite, $x \rightarrow \pm\infty$, a solução $f(x)$ diverge, o que não pode ser aceitável para soluções do tipo função de onda, assim devemos fazer $c'_2 = 0$ para excluir essa solução. Dessa forma, para a energia nula, somente a solução $g(x)$ tem um comportamento adequado para a descrição de férmions, como pode ser visto no gráfico (7).

6.1.5 Solução exata

Os efeitos de trabalharmos com a equação de Dirac em um referencial não inercial podem ser percebidos com a exponencial acoplada à massa na equação (6.31). No caso em que a aceleração é nula, a equação (6.31) é reduzida para forma

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + (\varepsilon^2 - m^2) F = 0, \quad (6.63)$$

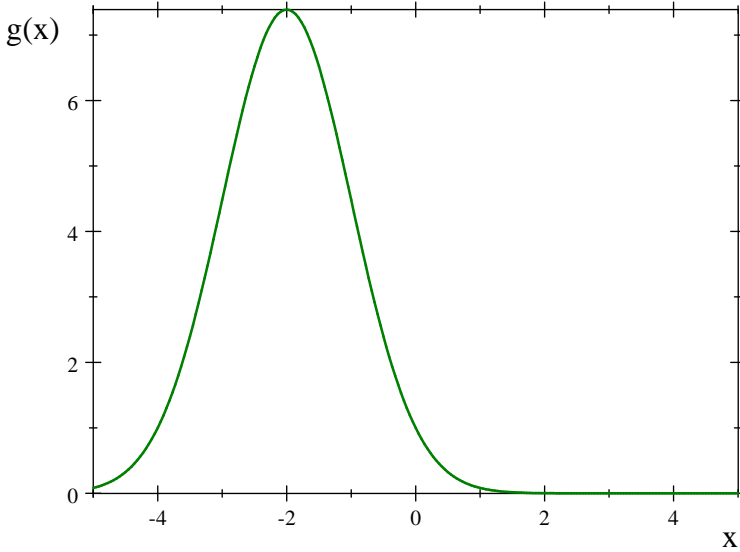


Figura 7: Gráfico da solução $f(x)$ com $m=1, a=1$ e constante de normalização igual a unidade.

que descreve uma partícula livre em uma dimensão. A presença da exponencial acoplada à massa desempenha uma função análoga à de um potencial escalar, que é acoplado à massa da partícula. Vamos agora considerar um potencial escalar diferente de zero na equação de Dirac. Dessa forma a equação de Dirac espacial é escrita agora como

$$\left[\frac{d}{dx} + (m + V(x)) e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] g(x) = \varepsilon f(x), \quad (6.64)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} + (m + V(x)) e^{\frac{1}{2}\sigma(x)} \right] f(x) = \varepsilon g(x), \quad (6.65)$$

e efetuando o mesmo procedimento da solução obtida na seção anterior, podemos desacoplar as funções g e f . O resultado é dado por

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + (\varepsilon^2 - V_{ef}) F = 0, \quad (6.66)$$

como usual. Quando $s = 1$ temos a equação para a função f e quando $s = -1$ temos a equação para a função g , sendo V_{ef} dado por

$$\begin{aligned} V_{ef} &= s \frac{dz}{dx} + z^2 \\ &= s \left[\frac{dV}{dx} + am + aV(x) \right] \exp(ax) + [m + V(x)]^2 \exp(2ax) \\ &= V_1 \exp(2ax) + V_2 \exp(ax), \end{aligned} \quad (6.67)$$

onde

$$V_2 = s \left[\frac{dV}{dx} + am + aV(x) \right], \quad (6.68)$$

$$V_1 = [m + V(x)]^2. \quad (6.69)$$

Como um exemplo, vamos considerar agora um potencial escalar na forma

$$V(x) = k \exp(-ax), \quad (6.70)$$

no contexto da equação de Dirac em 1+1, em um referencial inercial, esse potencial escalar é bem conhecido. Sabe-se que esse potencial é capaz de proporcionar soluções que representam estados ligados, uma vez que a equação efetiva tem a forma idêntica ao potencial de Morse, que é um potencial muito usado no estudo de moléculas e tem um comportamento semelhante ao potencial do oscilador harmônico (CASTRO; HOTT, 2005). Dessa forma, estamos interessados em saber qual é o efeito do potencial (6.70) nas equações de Dirac que derivamos. Para isso, vamos substituir a relação (6.70) em (6.66), usar o valor de k tal que $k = -|k'|$, onde k' é um número real, junto com uma reflexão da tipo $x \rightarrow -x$, o que fornece a relação

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + [\eta - V_{ef}] = 0, \quad (6.71)$$

onde

$$\eta = \varepsilon^2 - k'^2, \quad (6.72)$$

$$V_{ef} = V_1 \exp(-2ax) + V_2 \exp(-ax), \quad (6.73)$$

$$V_1 = m^2, \quad (6.74)$$

$$V_2 = -(2m|k'| - asm). \quad (6.75)$$

O termo V_{ef} na equação (6.71) é um potencial de tipo Morse, que é um problema bem estudado na literatura e que pode ser resolvido analiti-

amente. Para obter a solução, iremos mapear a nossa equação efetiva (6.71) na equação correspondente ao caso não relativístico para o potencial de Morse, dada por

$$\frac{d^2 F}{dx'^2} + [E - V(x')] = 0, \quad (6.76)$$

onde

$$V(x') = V'_1 \exp(2ax') + V'_2 \exp(ax'), \quad (6.77)$$

e $V'_1 > 0, V'_2 < 0$. Comparando a equação (6.71) com (6.76) temos o seguinte mapeamento

$$\begin{aligned} x' &\rightarrow x, \\ c &\rightarrow a, \\ V'_1 &\rightarrow V_1, \\ V'_2 &\rightarrow V_2, \\ V(x') &\rightarrow V_{ef}(x) \\ E &\rightarrow \eta = \varepsilon^2 - k'^2. \end{aligned} \quad (6.78)$$

O espectro de energia nesse caso (BAGROV; GITMAN, 1990)(solução não relativística) é dado por

$$E = -\frac{1}{4V_1} \left[|V_2| - c\sqrt{V_1} (2n + 1) \right]^2,$$

e para obtermos a equação para a energia para o nosso problema, devemos usar o mapa definido na equação (6.78), assim chegamos ao resultado

$$\varepsilon = \pm a \sqrt{\left[\frac{2|k'| (n+1)}{a} - (n+1)^2 \right]}, \quad s = 1, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.79)$$

$$\varepsilon = \pm a \sqrt{\left[\frac{2|k'| (n)}{a} - (n)^2 \right]}, \quad s = -1, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.80)$$

De forma análoga ao espectro de energia, as autofunções também podem ser mapeadas na solução do potencial de Morse não relativístico. Neste caso a solução é dada por

$$\psi_n(z') = z'^{\mu'} e^{-\frac{z'}{2}} L_n^{2\mu'}(z'), \quad (6.81)$$

onde $\mu' = \frac{\sqrt{|E|}}{c}$ e $z' = \frac{2\sqrt{|V_1'|}}{c} e^{-cx'}$. Desse modo, utilizando novamente o nosso mapa, obtemos as autofunções para a equação de Dirac no espaço de Rindler

$$F(z) = z^\mu e^{-\frac{z}{2}} \begin{pmatrix} N_1 L_{n+1}^{2\mu}(z) \\ N_2 L_n^{2\mu}(z) \end{pmatrix}, \quad (6.82)$$

onde $\mu = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - k'^2}}{a}$ e $z = \frac{2m}{a} e^{-ax}$, N_1 e N_2 são constantes. É importante observar que devemos interpretar o mapa definido na equação (6.78) como uma equivalência e não uma igualdade, ou seja, a resolução da equação de Dirac efetiva no espaço de Rindler, pode ser obtida usando a mesma forma de resolver a equação de Dirac para o potencial de Morse, mas com as identificações do mapa (6.78).

6.1.5.1 Existência do estado de Energia nula

Considerando a equação de Dirac no espaço-tempo de Rindler com potencial escalar, se existirem soluções com energia nula, para o caso de $V \neq 0$, elas podem ser examinadas fazendo $\varepsilon = 0$. Tomando as equações de Dirac com potencial escalar

$$\left[\frac{d}{dx} + (m + V(x)) e^{ax} \right] g(x) = \varepsilon f(x), \quad (6.83)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} + (m + V(x)) e^{ax} \right] f(x) = \varepsilon g(x), \quad (6.84)$$

e fazendo $\varepsilon = 0$ e $V(x) = ke^{-ax}$, podemos reescrever essas equações como

$$\left[\frac{d}{dx} + w(x) \right] g(x) = 0, \quad (6.85)$$

$$\left[-\frac{d}{dx} + w(x) \right] f(x) = 0, \quad (6.86)$$

onde

$$w(x) = (m + ke^{-ax}) e^{ax} = me^{ax} + k = me^{ax} - |k'|.$$

Integrando as equações (6.85) e (6.86), chegamos ao resultado

$$g(x) = c_1 e^{-\int w(x) dx} = c_1 e^{-\int (me^{ax} - |k'|) dx} = c_1' e^{-(ame^{ax} - |k'|x)},$$

$$f(x) = c_2 e^{\int w(x) dx} = c_2 e^{\int (me^{ax} - |k'|) dx} = c_2' e^{(ame^{ax} - |k'|x)}.$$

Para o caso de $x \rightarrow \pm\infty$ a solução para $g(x)$ tende a zero, e a solução é aceitável. Mas para o mesmo limite, $x \rightarrow \pm\infty$, a solução $f(x)$ diverge, o que não pode ser aceitável para soluções normalizáveis, assim devemos fazer $c_2' = 0$ para excluir essa solução.

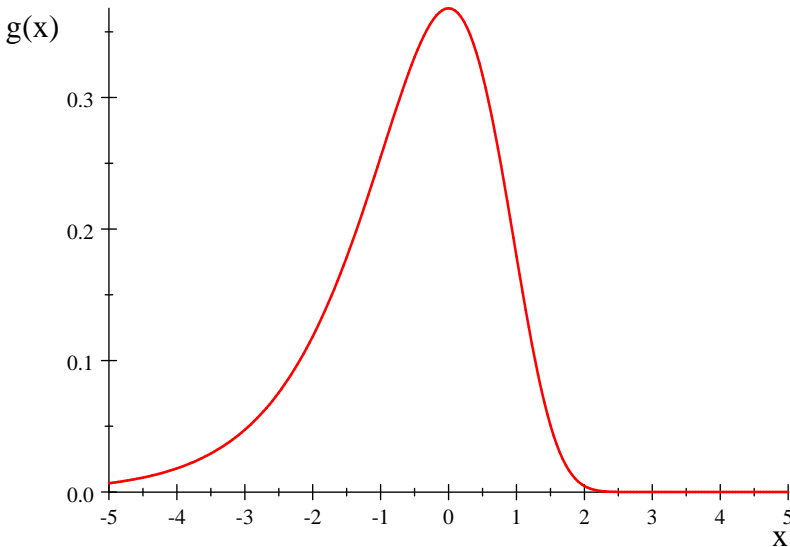


Figura 8: Gráfico da solução $f(x)$ com $m=1, a=1, k'=1$ e constante de normalização igual a unidade.

6.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO TEMPO DE UMA CORDA CÓSMICA

A presença de um defeito topológico pode influenciar o comportamento de um sistema físico, por exemplo, em (MARQUES; BEZERRA, 2002) a equação de Dirac foi resolvida na presença de potenciais

de Coulomb e escalar no espaço tempo de uma corda cósmica, onde foi mostrado que o defeito topológico do espaço tempo destrói a degenerescência de todos os níveis de energia. Além disso, referenciais em rotação estão associados a efeitos não inerciais em sistemas quânticos. O efeito Mashhoon, ligado ao acoplamento do spin com o momento angular, surge de efeitos não inerciais em fenômenos de interferência (MASHHOON, 1988). Outro resultado bem estudado é o efeito Aharonov-Carmi (A-C) (SHEN; HE; ZHUANG, 2005), que está relacionado ao deslocamento da energia dos elétrons na camada de valência devido à rotação molecular.

Posto isso, é natural estudar os efeitos não inerciais e da topologia contidos na métrica (3.32) em sistemas quânticos. Vamos considerar a equação de Klein-Gordon em um espaço tempo arbitrário

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\psi) + m^2\psi = 0, \quad (6.87)$$

agora vamos determinar a forma dessa equação para a métrica obtida na expressão (3.32), isto é,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 (d\phi + \omega dt)^2 + dz^2 \\ &= -(1 - \alpha^2 r^2 \omega^2) dt^2 + 2\alpha^2 r^2 \omega dt d\phi + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + dz^2. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Calculando o determinante do tensor métrico associado à equação (6.88) e substituindo na equação de Klein-Gordon, encontramos

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2 + 2\omega\partial_t\partial_\phi + \left(\frac{1}{\alpha^2 r^2} - \omega^2 \right) \partial_\phi^2 - (m + V)^2 \right] \psi = 0, \quad (6.89)$$

o hamiltoniano associado à essa equação não depende explicitamente das coordenadas t , z e ϕ , dessa forma vamos admitir que solução seja dada por

$$\psi(t, r, z, \phi) = e^{-i\varepsilon t} e^{il\phi} e^{ip_z z} R(r), \quad (6.90)$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, ε é a energia da partícula e p_z é o momento na direção z . Substituindo a solução proposta na equação (6.89), temos

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l^2}{\alpha^2 r^2} - (m + V)^2 + (\varepsilon + \omega l)^2 - p_z^2 \right] R(r) = 0, \quad (6.91)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem para a componente radial da equação de Klein-Gordon. Vamos estudar as possíveis soluções

dessa expressão para um potencial escalar.

6.2.1 Solução exata

Vamos considerar um potencial do tipo Coulombiano $s(r) = \eta/r$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a coordenada radial, e estudar o efeito do uso desse potencial na equação radial obtida. Dessa forma, devemos substituir o potencial na equação (6.91). O resultado encontrado é escrito a seguir como

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\beta^2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} - \delta^2 \right] R(r) = 0, \quad (6.92)$$

onde $\delta^2 = -(\varepsilon + \omega l)^2 + m^2 + p_z^2$ e $\beta^2 = l^2/\alpha^2 + \eta^2$ e $\gamma = m\eta$. Agora vamos efetuar a mudança de variável na forma $\rho = 2\delta r$, de modo tal, que no lugar da expressão (6.92), tenhamos

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} - \frac{\gamma}{\delta\rho} - \frac{1}{4} \right] R(\rho) = 0.$$

Por fim, efetuando uma transformação na forma

$$R(\rho) = \rho^\beta e^{-\frac{\rho}{2}} F(\rho),$$

encontramos a expressão

$$\rho \frac{d^2 F}{d\rho^2} + (2\beta + 1 - \rho) \frac{dF}{d\rho} + \left(-\beta - \frac{\gamma}{\delta} - \frac{1}{2} \right) F = 0.$$

Essa equação diferencial é conhecida como equação hipergeométrica confluyente ou equação de Kummer. É uma EDO bem estudada cujo a solução é denotada como

$$F(\rho) = {}_1F_1(A, B; \rho), \quad (6.93)$$

onde $A = \beta + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{2}$ e $B = 2\beta + 1$. A seguir estudaremos o espectro de energia relacionado à solução do tipo hipergeométrica confluyente.

6.2.2 Espectro de Energia

Um resultado bem conhecido na literatura é que para a função ${}_1F_1$ ser finita em todos lugares, o parametro $A = \beta + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{2}$ deve ser

igual a um número inteiro negativo, ou seja,

$$\beta + \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{2} = -N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (6.94)$$

Assim se usarmos os valores de β , γ e δ na equação 6.94 e resolvermos a expressão resultante para ε , obtemos a equação para a energia na forma

$$\varepsilon = -\omega l + \sqrt{p_z^2 + m^2 \left[1 - \frac{\eta^2}{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{l^2/\alpha^2 + \eta^2} + N \right)^2} \right]}. \quad (6.95)$$

Desse modo, a solução para valores inteiros de N pode ser visualizada na Figura 9. Em relação ao espectro de energia obtido na expressão (6.95),

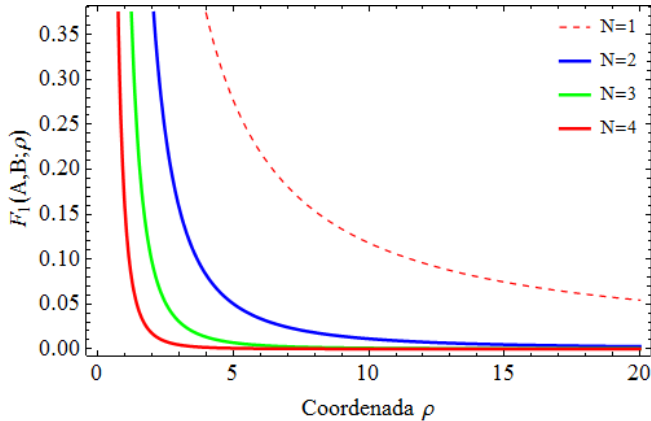


Figura 9: Gráfico da solução do tipo hipergeométrica para $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ e $N = 4$.

vemos claramente a influência da corda cósmica desviando a energia devido a presença do parâmetro α na raiz quadrada. Outro resultado interessante, presente na equação (6.95), é o acoplamento entre a velocidade de rotação do sistema de referência e o número quântico l . Este tipo de acoplamento é observado em muitos sistemas físicos e reflete os efeitos não inerciais no espectro de energia. Na Figura 10 podemos observar o espectro de energia em função dos números quânticos N e l . Nas cores próximas ao vermelho, temos os valores mais elevados da energia.

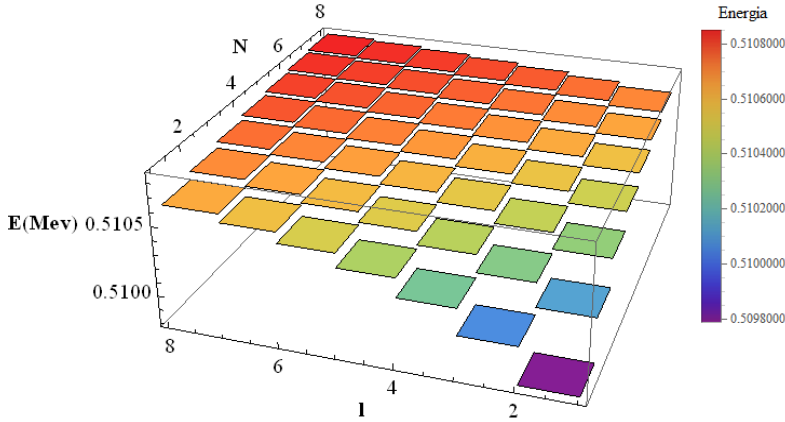


Figura 10: Gráfico do espectro de energia para N variando de 2 até 8 e l variando de 2 até 8. Os valores próximos ao vermelho correspondem aos valores de energia mais elevada.

6.2.3 Análise dos efeitos da rotação nas autofunções

Decorre do espaço tempo descrito pela métrica (6.88) uma notável condição: a coordenada r pode assumir somente os valores restritos ao intervalo

$$0 < r < 1/\alpha\omega,$$

fora desse limite podemos ter a presença de velocidades maiores que c , o que deve ser evitado para as soluções físicas. Se desejarmos que a solução da equação de Dirac obtida seja fisicamente aceitável, devemos impor que a autofunção seja nula para valores de r maiores que a quantidade $1/\alpha\omega$. Para esse fim, vamos proceder conforme (BAKKE, 2013), e considerar que a velocidade de rotação do referencial é pequena em comparação a velocidade da luz, isso implica que $1/\omega\alpha \gg 1$. Matematicamente, podemos expandir a função hipergeométrica para $\rho_0 = 1/\omega\alpha \gg 1$, o resultado é escrito na forma

$${}_1F_1(A, B; \rho_0) \rightarrow e^{-i\pi A} \frac{\Gamma(B)}{\Gamma(B-A)} + \frac{\Gamma(B)}{\Gamma(A)} \rho_0^{A-B} e^{\rho_0}. \quad (6.96)$$

A normalização da autofunção é obtida fazendo o termo $1/\Gamma(A) = 0$, que, pelas propriedades da função Γ , implica na relação

$$A = -N, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.97)$$

A equação (6.97) fornece o mesmo resultado para o espectro de energia obtido sem considerar a velocidade angular pequena. Assim, impondo que a velocidade angular do referencial não assume valores elevados, obtemos um espectro de energia discreto que concorda com a expressão 6.95 e, além disso, a função de onda possui um valor pequeno. A seguir, na Figura 11, plotamos a função de onda radial completa, em função da variável ρ para uma velocidade angular de $\omega = 0.1$ rad/s. Podemos ver que a função de onda vai a zero quando ρ tende a $1/\alpha\omega$, conforme as nossas estimativas. Dessa forma, concluímos a solução da equação

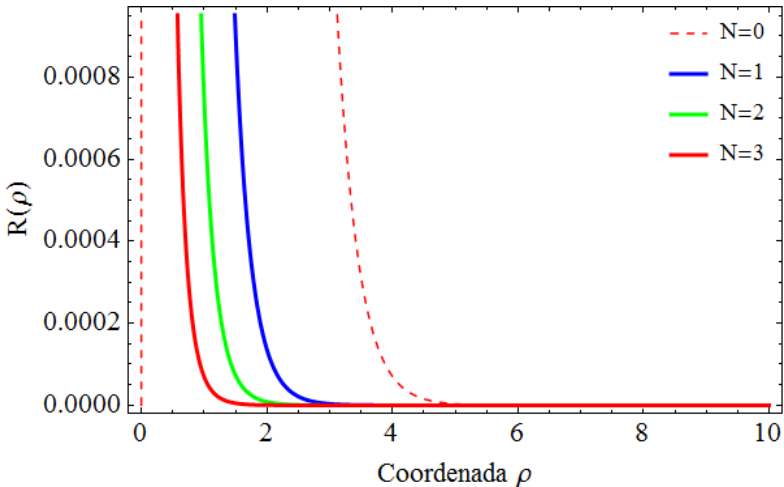


Figura 11: Gráfico da autofunção radial para N assumindo os valores $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$ e $N = 3$.

de Klein-Gordon para a corda cósmica em um referencial em rotação. Como resultado, o espectro de energia obtido depende de fatores relacionados à topologia do espaço tempo, além da velocidade angular do referencial. Na próxima seção vamos estudar a equação de Dirac em no espaço-tempo de Melvin, e desta forma, estender a análise para esse tipo de espaço-tempo.

7 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC NO ESPAÇO-TEMPO DE MELVIN

Neste capítulo, estudaremos a métrica que representa um espaço-tempo com um campo magnético. Resolveremos a equação de Dirac para esse espaço-tempo, obtendo, dessa forma, um resultado original. Em relação a equação (5.30) cabem alguns comentários antes de procurarmos soluções da equação de Dirac para um elétron. Não há maneira unívoca de escolhermos um base tetrada de forma que lado esquerdo da equação (5.30) seja satisfeito. Em geral, a escolha da base tetrada não é unívoca e podemos escolher bases tetradas diagonais ou não diagonais.

Considerando que o tensor de Minkowski, que aparece no lado direito da equação (5.30), seja dado em um sistema de coordenadas cartesiano, temos a liberdade de escolher uma base tetrada em que a condição (5.30) seja verificada. Na literatura encontramos muitas referências em relação ao uso de determinadas bases tetradas (OBUKHOV; SILENKO; TERYAEV, 2013, 2009; SCHWINGER, 1963).

No caso da métrica de Melvin (KADLECOVÁ; s, 2010; MELVIN, 1965; BONNOR, 1954), em unidades geométricas ($c = G = 1$), o elemento de distância é dado por

$$ds^2 = \Lambda(r)^2 dt^2 - \Lambda(r)^2 dr^2 - \Lambda(r)^{-2} r^2 d\phi^2 - \Lambda(r)^2 dz^2, \quad (7.1)$$

onde $\Lambda(r) = 1 + \frac{1}{4}B_0^2 r^2$, onde B_0 é o campo magnético. Essa métrica reflete a curvatura do espaço tempo devido a existência de um campo magnético na direção z .

Devido à simetria cilíndrica da métrica de Melvin é natural a escolha de uma base tetrada em que a equação de Dirac, no limite do espaço-tempo plano, esteja em coordenadas cilíndricas. De fato, no limite em que o campo magnético se anula temos $\Lambda(r) = 1$ e a equação (7.1) se reduz a

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad (7.2)$$

que é a métrica do espaço-tempo plano de Minkowski, escrita em coordenadas cilíndricas, onde o tensor de Minkowski é

$$\eta_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Podemos escolher uma base tetrada diagonal $e_{\mu}^{(a)}$ em que a equação(5.30) seja satisfeita e então obter sua forma inversa $e_{(a)}^{\mu}$:

$$e_{\mu}^{(a)} = \begin{pmatrix} \Lambda(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r\Lambda(r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda(r) \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

$$e_{(a)}^{\mu} = \begin{pmatrix} \Lambda(r)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda(r)/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda(r)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Iremos considerar que campo magnético B_0 , além de modificar a geometria de espaço-tempo, conforme indica a métrica de Melvin, esse campo irá gerar um acoplamento mínimo na equação de Dirac no espaço curvo, através de um quadripotencial eletromagnético A_{μ} . No espaço-tempo plano, um campo magnético B_0 , constante na direção z , em um sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z , é dado pelo potencial

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (0, B_0 r, 0), \quad (7.6)$$

que pode ser relacionado a um campo magnético equivalente na métrica de Melvin pela equação (5.31), fornecendo o resultado

$$A_{\phi} = e_{\phi}^{(\phi)} \frac{B_0 r}{2}. \quad (7.7)$$

Observando que o termo $\gamma^{\mu}\Omega_{\mu}$ na equação de Dirac em espaço-tempo curvo, correspondente a escolha da tetrada (7.4), é dado por

$$\gamma^{\mu}\Omega_{\mu} = \frac{\gamma^{(1)}}{2\Lambda^2} \frac{\partial\Lambda}{\partial r} + \frac{\gamma^{(1)}}{2r\Lambda}, \quad (7.8)$$

temos que a equação (5.40) fica

$$0 = \left[\frac{\gamma^{(0)}}{\Lambda} \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\gamma^{(1)}}{\Lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial\Lambda}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) + \frac{\gamma^{(2)}\Lambda}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\gamma^{(3)}}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} + iM + iq \frac{B_0 r}{2} \gamma^2 \right] \psi. \quad (7.9)$$

No limite em que a geometria torna-se plana, isto é, $\Lambda \rightarrow 1$, recuperamos

a equação

$$0 = \left[\gamma^{(0)} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \gamma^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) + \frac{\gamma^{(2)}}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \gamma^{(3)} \frac{\partial}{\partial z} + iM + iq \frac{B_0 r}{2} \gamma^{(2)} \right] \psi, \quad (7.10)$$

que é a equação de Dirac no espaço tempo plano para um elétron, em coordenadas cilíndricas, na presença de um campo magnético constante na direção z . Dessa forma podemos ver a equação (7.9) como uma generalização da equação (7.10). A equação (7.10) foi extensamente estudada na literatura em muitos contextos (MELROSE; PARLE, 1983; JOHNSON; LIPPMANN, 1949; MANDAL; VERMA, 2010b; LEE; YOON, 2007; DATTA; MISRA, 2001), e é umas das soluções mais importantes conhecidas da equação de Dirac. Estamos interessados nas possíveis correções do espectro de energia, devido à alteração da geometria do espaço-tempo determinada na equação (7.9).

Efetuada uma transformação na equação (7.9) tal que

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{r\Lambda(r)}} \Phi, \quad (7.11)$$

obtemos a forma simplificada

$$\left[\frac{\gamma^{(0)}}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma^{(1)}}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma^{(2)}\Lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\gamma^{(3)}}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} + iM + iq \frac{\gamma^{(2)} B_0 r}{2} \right] \Phi = 0. \quad (7.12)$$

Agora vamos explicitar o valor das matrizes γ , usando a seguinte representação

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

e, além disso, observando que o hamiltoniano da equação (7.9) não

depende de z, t e ϕ , vamos propor uma solução na forma

$$\Phi = R(r) \exp[-i\sigma t + ip_z z + im\phi], \quad (7.14)$$

onde σ é a energia do sistema que assume valor positivo para partículas e negativo para antipartículas, p_z é o momento e $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, tomando o cuidado de não confundir o número quântico m com a massa M do elétron. Dessa forma, a equação (7.9) é escrita em uma forma explícita

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\sigma + M + \frac{1}{4} B_0^2 M r^2 \right) R_1 + p_z R_3 \\ &\quad - i \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{1}{2} m B_0^2 r + \frac{1}{2} q B_0 r + \frac{1}{32} B_0^5 q r^5 + \frac{1}{4} B_0^3 q r^3 + \frac{1}{16} B_0^4 m r^3 \right) R_4, \\ 0 &= \left(-\sigma + M + \frac{1}{4} B_0^2 M r^2 \right) R_2 - p_z R_4 \\ &\quad - i \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{1}{2} m B_0^2 r - \frac{1}{2} q B_0 r - \frac{1}{32} B_0^5 q r^5 - \frac{1}{4} B_0^3 q r^3 - \frac{1}{16} B_0^4 m r^3 \right) R_3 \\ 0 &= \left(-\sigma - M - \frac{1}{4} B_0^2 M r^2 \right) R_3 \\ &\quad + p_z R_1 \\ &\quad - i \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{1}{2} m B_0^2 r + \frac{1}{2} q B_0 r + \frac{1}{32} B_0^5 q r^5 + \frac{1}{4} B_0^3 q r^3 + \frac{1}{16} B_0^4 m r^3 \right) R_2, \\ 0 &= \left(-\sigma - M - \frac{1}{4} B_0^2 M r^2 \right) R_4 - p_z R_2 \\ &\quad - i \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{1}{2} m B_0^2 r - \frac{1}{2} q B_0 r - \frac{1}{32} B_0^5 q r^5 - \frac{1}{4} B_0^3 q r^3 - \frac{1}{16} B_0^4 m r^3 \right) R_1. \end{aligned} \quad (7.15)$$

que é um conjunto de equações diferenciais acopladas. O resultado, desprezando termos de alta ordem em r , pode ser escrito como

um sistema de equações no mesmo formato:

$$\begin{aligned}
0 &= (-\sigma + M) R_1 + p_z R_3 \\
&\quad - i \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{1}{2} m B_0^2 r + \frac{1}{2} q B_0 r \right) R_4, \\
0 &= (-\sigma + M) R_2 - p_z R_4 \\
&\quad - i \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{1}{2} m B_0^2 r - \frac{1}{2} q B_0 r \right) R_3 \\
0 &= (-\sigma - M) R_3 \\
&\quad + p_z R_1 \\
&\quad - i \left(\frac{d}{dr} + \frac{m}{r} + \frac{1}{2} m B_0^2 r + \frac{1}{2} q B_0 r \right) R_2, \\
0 &= (-\sigma - M) R_4 - p_z R_2 \\
&\quad - i \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{1}{2} m B_0^2 r - \frac{1}{2} q B_0 r \right) R_1.
\end{aligned}$$

Esse conjunto de equações diferenciais pode ser resolvido diretamente na forma de um sistema, mas vamos optar pelo desacoplamento das função radiais seguido da resolução das equações diferenciais resultantes. Se inicialmente multiplicamos a primeira equação por $-i \left(\frac{d}{dr} - \frac{m}{r} - \frac{1}{2} m B_0^2 r - \frac{1}{2} q B_0 r \right)$ e, em seguida, usarmos a segunda e quarta equação para eliminar termos contendo os espinores R_1, R_2, R_3 , o resultado é uma equação diferencial para o espinor $R_4(r)$ na forma

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m(m+1)}{r^2} - mb + \frac{b}{2} - \frac{b^2 r^2}{4} + (\sigma^2 - M^2 - p_z^2) \right] R_4(r) = 0, \tag{7.16}$$

onde $b = mB_0^2 + qB_0$. De forma análoga, podemos derivar equações de segunda ordem para os espinores R_1, R_2, R_3 , e as equações que resultam podem ser resumidas na forma

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m(m \pm 1)}{r^2} + b \left(-m \pm \frac{1}{2} \right) - \frac{b^2 r^2}{4} + (\sigma^2 - M^2 - p_z^2) \right] R(r) = 0, \tag{7.17}$$

onde o sinal positivo refere-se a equação para os espinores $R_2(r)$ e $R_4(r)$ enquanto que o negativo refere-se a equação válida para $R_1(r)$ e $R_3(r)$. Evidentemente, a equação diferencial (7.17) é uma equação semelhante

à equação de Schrödinger, isso sugere escrevê-la no formato

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + (E - V_{ef}) R(r) = 0, \quad (7.18)$$

onde $E = \sigma^2 - M^2 - p_z^2$ e $V_{ef} = \frac{m(m \pm 1)}{r^2} - b(-m \pm \frac{1}{2}) + \frac{b^2 r^2}{4}$. Como podemos ver na Figura 12 (sem escala), o perfil do potencial efetivo associado a (7.18) é idêntico ao problema do oscilador harmônico isotrópico.

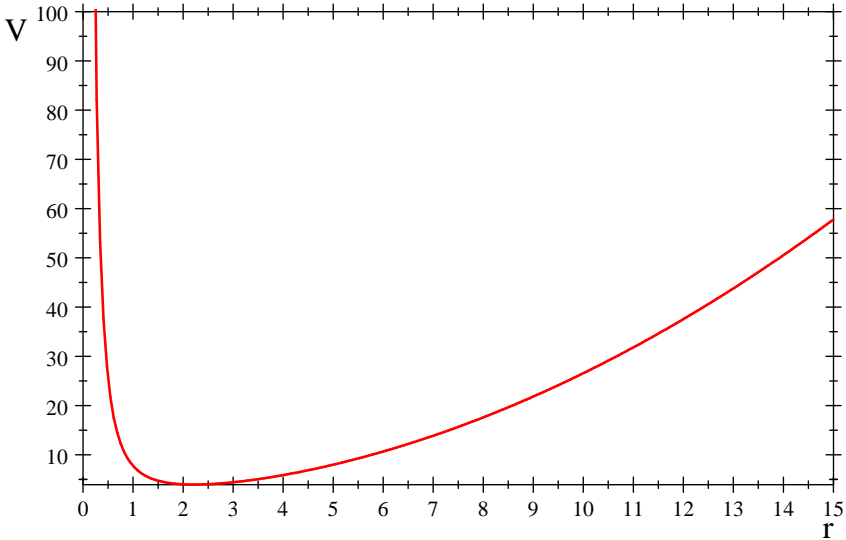


Figura 12: Potencial efetivo em função da distância r .

De fato a solução da equação (7.18) pode ser completamente mapeada em uma solução do tipo oscilador harmônico 3D em coordenadas esféricas. As soluções normalizáveis da equação (7.18) são dadas em função dos polinômios de Laguerre associados

$$R(S) = \begin{pmatrix} C_1 S^{(1/2-m/2)} e^{-\frac{S}{2}} L_n^{1/2-m} \\ C_2 S^{-m/2} e^{-\frac{S}{2}} L_n^{-1/2-m} \\ C_3 S^{(1/2-m/2)} e^{-\frac{S}{2}} L_n^{1/2-m} \\ C_4 S^{-m/2} e^{-\frac{S}{2}} L_n^{-1/2-m} \end{pmatrix},$$

onde $S = \frac{br^2}{2}$ e C_1, C_2, C_3, C_4 são constantes de normalização. O espectro de energia, associado à nossa solução, pode ser obtido com o mapeamento no problema do oscilador harmônico, fornecendo a expressão

$$E = \left(n + \frac{3}{2} \right) \frac{b}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7.19)$$

usando a definição de E dada na equação (7.18) obtemos a equação para o espectro de energia

$$\sigma = \sqrt{M^2 + p_z^2 + 2B_0q \left(n + s + \frac{1}{2} \right) + 2B_0^2m \left(n + s + \frac{1}{2} \right)}, \quad (7.20)$$

onde $s = \pm \frac{1}{2}$ é o número quântico de spin. A equação (7.20) está escrita em um sistema de unidades onde $c = G = \hbar = 1$. Alternativamente, a conversão para o sistema internacional de unidades pode ser efetuada, a equação para o espectro nesse sistema é dada na forma

$$\sigma = \sqrt{M^2c^4 + p_z^2c^2 + 2\hbar c^2 B_0q \left(n + s + \frac{1}{2} \right) + 4\pi\varepsilon_0\hbar^2 G B_0^2m \left(n + s + \frac{1}{2} \right)}. \quad (7.21)$$

onde ε_0 é constante de permissividade do vácuo.

7.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A equação (7.20), em determinados limites, recupera alguns resultados conhecidos na literatura. Quando o campo magnético e p_z tendem a zero, obtemos a expressão para a energia de repouso da partícula

$$\sigma = Mc^2. \quad (7.22)$$

Quando a interação gravitacional é desconsiderada, o último termo dentro da raiz se anula, dessa forma obtemos a expressão para o espectro

$$\sigma = \sqrt{M^2c^4 + p_z^2c^2 + 2\hbar c^2 B_0q \left(n + s + \frac{1}{2} \right)}, \quad (7.23)$$

que corresponde ao espectro da solução da equação (7.10), referente à equação de Dirac no espaço plano com potencial vetor. Isso confirma as nossas considerações iniciais da equação (7.9) como uma generalização

da equação (7.10). Também podemos analisar o caso onde somente a interação gravitacional é considerada, a energia, correspondente à essa solução, não possui o termo com a carga elétrica, ou seja,

$$\sigma = \sqrt{M^2 c^4 + p_z^2 c^2 + 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 G B_0^2 m \left(n + s + \frac{1}{2} \right)}.$$

Em relação ao termo de correção, devido à gravidade, presente na equação (7.21), notamos que a constante de Plank elevada ao quadrado, junto com outras constantes pequenas como G e ϵ_0 , fazem com que ele seja muito menor que o termo devido ao potencial vetor. No entanto essa diferença pode ser minimizada para um campo magnético muito intenso, pois o campo magnético aparece elevado ao quadrado no termo de correção gravitacional. Na Figura 13, construímos um plot discretizado

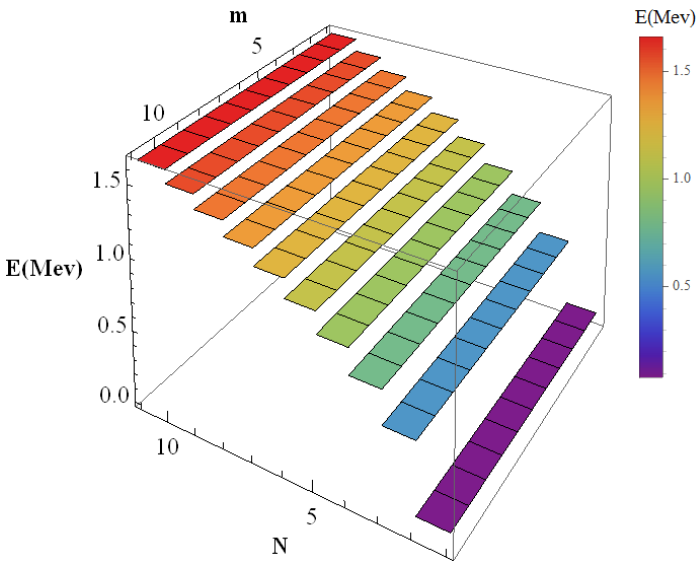


Figura 13: Espectro de energia como uma função dos números quânticos n e m . Os valores próximos do vermelho são mais intensos que aqueles próximos do azul.

para melhor representar a energia em função dos números quânticos n e m . Na Tabela 2 listamos os valores obtidos aplicando a equação (7.21) para calcular o espectro de energia de elétrons sujeitos à um campo mag-

nético. Consideramos os campos da Terra, Sol, Pulsar, Magnetar e de Íons pesados em colisões relativísticas. Conforme indica a tabela, a partir do pulsar, os efeitos do campo magnético tornam-se mais evidentes no espectro de energia.

	E_0 (TeV)	E_1 (TeV)	E_2 (TeV)	E_3 (TeV)	E_{1000} (TeV)	$E_{10^{30}}$ (TeV)
$B_{\text{Terra}} \sim 0.56$ G	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	7691.37
$B_{\text{Sol}} \sim 1.5$ G	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	13321.8
$B_{\text{Pulsar}} \sim 10^{13}$ G	5.10999×10^{-7}	0.0000344006	0.0000486472	0.0000595793	0.00108772	3.43968×10^{10}
$B_{\text{magnetar}} \sim 10^{15}$ G	5.10999×10^{-7}	0.000343969	0.000486445	0.000595771	0.0108772	3.43968×10^{11}
$B_{\text{Íons}} \sim 10^{19}$ G	5.10999×10^{-7}	0.0343968	0.0486445	0.0595771	1.08772	3.44015×10^{13}

Tabela 2: Comparação dos valores do espectro de energia para o campo magnético de diferentes corpos astronômicos.

Na Tabela 3 calculamos a energia para os mesmos valores do campo magnético, mas usamos a expressão de energia obtida da solução da equação de Dirac no espaço-tempo plano. Como pode ser visto, o único valor da energia obtido que difere da Tabela 3 é para $n = 10^{30}$ e $B = 10^{19}$ G, mas devemos levar em consideração que os resultados na tabela foram obtidos considerando 6 algarismos significativos. Para efeito de clareza, podemos trabalhar com números que possuem mais algarismos significativos. Por exemplo, se compararmos o valor de energia $E_{10^{30}}$ para o pulsar nas duas tabelas e considerarmos 15 algarismos significativos, chegamos na conclusão que os efeitos da curvatura surgem na 9ª casa decimal! Outros fatores que reduzem a diferença entre os ter-

	E_0 (TeV)	E_1 (TeV)	E_2 (TeV)	E_3 (TeV)	E_{1000} (TeV)	$E_{10^{30}}$ (TeV)
$B_{\text{Terra}} \sim 0.56$ G	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	7691.37
$B_{\text{Sol}} \sim 1.5$ G	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	5.10999×10^{-7}	13321.8
$B_{\text{Pulsar}} \sim 10^{13}$ G	5.10999×10^{-7}	0.0000344006	0.0000486472	0.0000595793	0.00108772	3.43968×10^{10}
$B_{\text{magnetar}} \sim 10^{15}$ G	5.10999×10^{-7}	0.000343969	0.000486445	0.000595771	0.0108772	3.43968×10^{11}
$B_{\text{Íons}} \sim 10^{19}$ G	5.10999×10^{-7}	0.0343968	0.0486445	0.0595771	1.08772	3.43968×10^{13}

Tabela 3: Comparação dos valores do espectro de energia para o campo magnético de diferentes corpos astronômicos para o espectro de energia da equação de Dirac do espaço-tempo plano.

mos (ou aumenta a correção), são os números quânticos n e m uma vez

que os mesmos estão multiplicando um em relação ao outro. Podemos

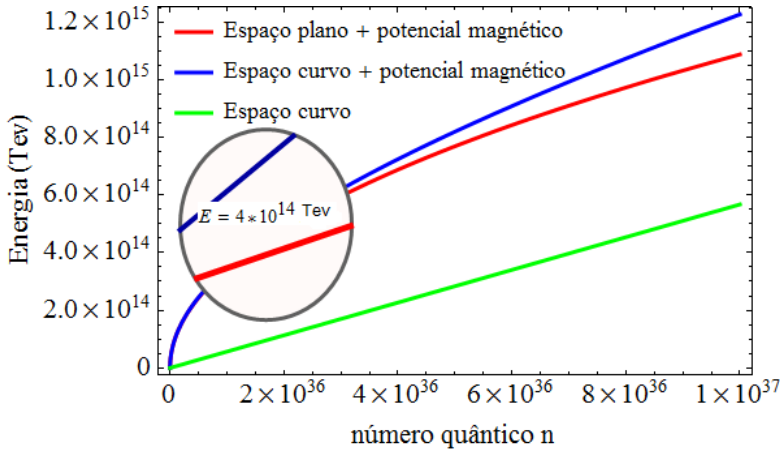


Figura 14: Espectro de energia para três casos analisados, com um campo magnético de $B = 10^{15}$

ver na Figura 14, o comportamento do espectro de energia referente aos casos discutidos, por simplicidade, desprezamos o momento na direção z . Podemos notar no gráfico, a elevada energia (em TeV) no ponto em que o termo de correção passa a ser dominante na solução. Na elaboração dos gráficos levamos em conta um campo magnético extremo de 10^{11} teslas (10^{15} gauss) que pode ser encontrado em determinadas estrelas de nêutrons.

Ainda considerando a Figura 14, a linha azul fornece os valores da energia em função do número quântico n . Essa solução representa a solução da equação de Dirac em espaço-tempo curvo com um potencial vetor. Na linha vermelha temos o espectro da solução no espaço-tempo plano, com potencial vetor. Por fim, na linha verde, o espectro corresponde à solução que considera apenas a curvatura do espaço-tempo. Nessa solução não é considerado o acoplamento mínimo na equação de Dirac.

Na Figura 15 reduzimos o valor do campo magnético para 10^{13} gauss e, além disso, limitamos o valor máximo que o número quântico n assume em 10^{20} .

No Figura 16 analisamos o comportamento da equação (7.21) para valores extremos do campo magnético em função do número quântico n . Podemos ver que a forma da curva de energia permanece inalterada.

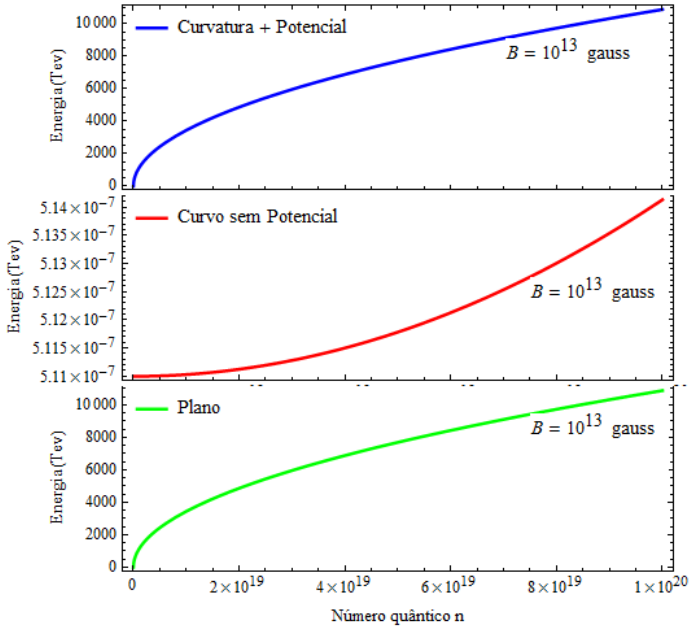


Figura 15: Espectro de energia para três casos analisados, com um campo magnético de $B = 10^{13}$ gauss e número quântico n com valor máximo de 10^{20}

terada para esses valores. Todos esses resultados indicam que campos magnéticos extremos possuem efeitos apreciáveis no espectro de energia de partículas. Dessa forma a inclusão do efeito do campo magnético nos modelos físicos que descrevem partículas sujeitas à campos magnéticos extremos é altamente recomendável à obtenção de modelos mais realistas. No que segue analisaremos a solução da forma exata da equação de Dirac por métodos numéricos.

7.2 ANÁLISE NUMÉRICA

Nesta seção analisaremos a solução exata da equação, isto é, sem desprezar os termos de alta ordem em (7.15). Os resultados obtidos para

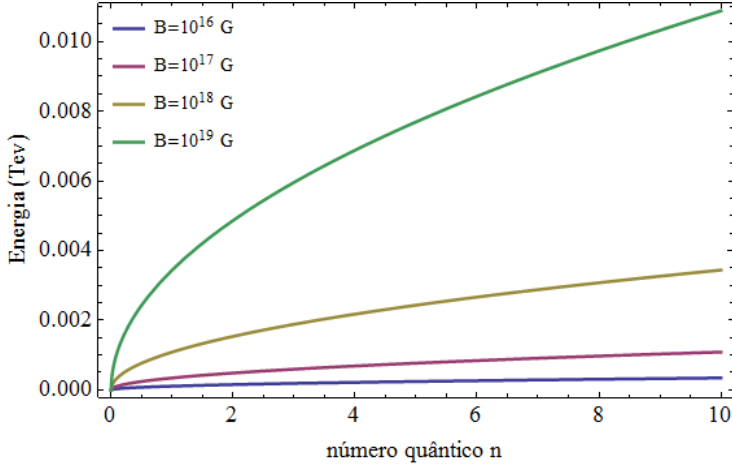


Figura 16: Espectro de energia em função do número quântico. O campo magnético assume valores , $B = 10^{17}$ G, $B = 10^{18}$ G e $B = 10^{19}$ G

o espectro de energia para os quatro primeiros valores de n indicam concordância dos resultados obtidos em nossa solução e os resultados numéricos em até pelo menos cinco casas decimais. Nossa técnica de análise numérica consiste em variar o valor da energia das partículas até atingirmos o valor nulo para a função de onda. Podemos constatar nos gráficos que seguem, que, de fato, o número de zeros da função de onda é proporcional ao número quântico n . Na Tabela 4, listamos o valor da energia σ (no S.I) obtidos da solução numérica, junto com os valores da solução analítica.

n	σ Numérico	σ Analítico
0	$8,18710 \times 10^{-14}$	$8,18711 \times 10^{-14}$
1	$55,7140 \times 10^{-14}$	$55,7146 \times 10^{-14}$
2	$78,3659 \times 10^{-14}$	$78,3659 \times 10^{-14}$
3	$95,8030 \times 10^{-14}$	$95,8034 \times 10^{-14}$

Tabela 4: Comparação dos valores obtidos por cálculo numérico com os valores obtidos resolvendo analiticamente a equação de Dirac considerando a aproximação proposta na seção anterior.

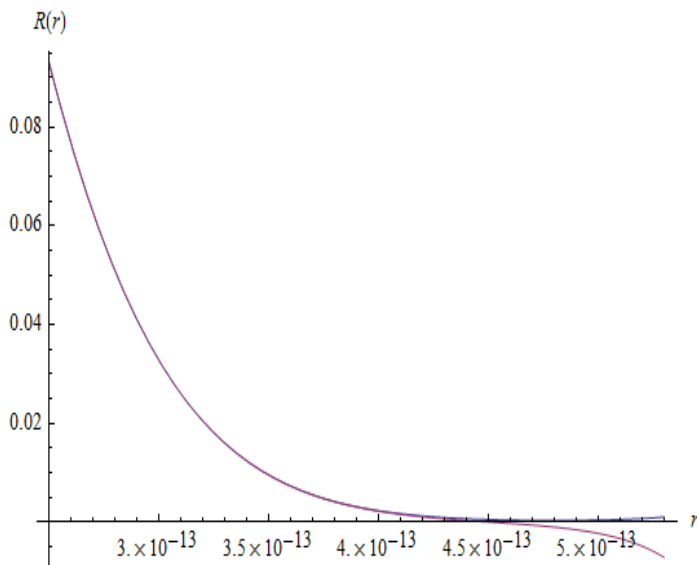


Figura 17: Solução numérica para o primeiro estado excitado ($n=0$).

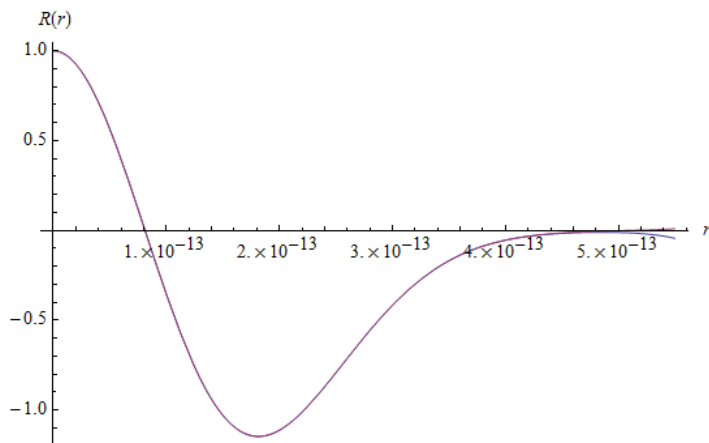


Figura 18: Solução numérica para o segundo estado excitado ($n=1$).

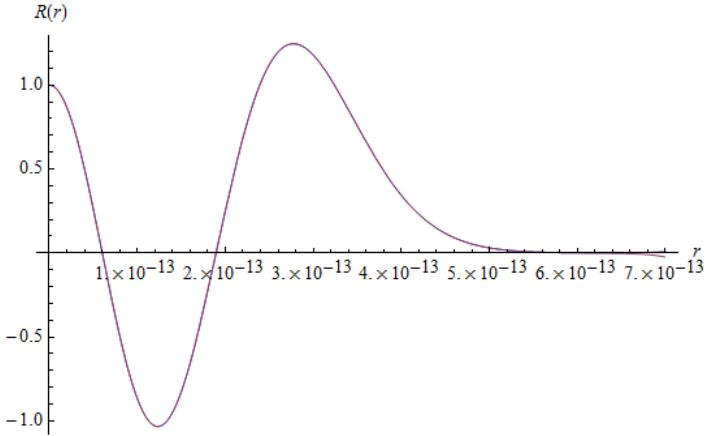


Figura 19: Solução numérica para o terceiro estado excitado ($n=2$).

Desta forma, observando os resultados obtidos nesta seção a partir de cálculo numérico, podemos constatar que as aproximações feitas anteriormente são bastante razoáveis e podemos tomar as expressões analíticas obtidas como boas estimativas para os espectros de energia.

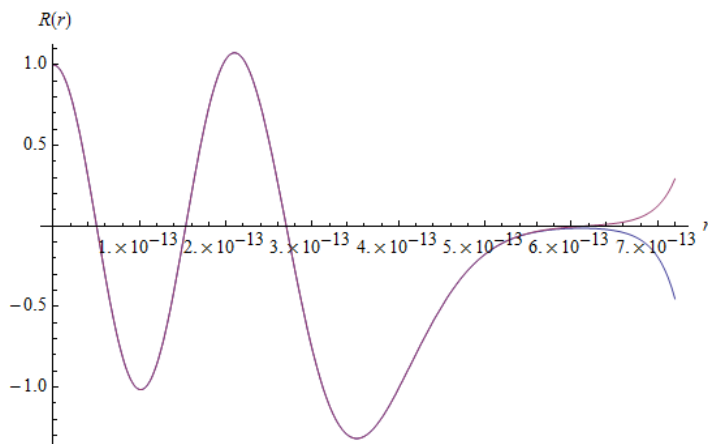


Figura 20: Solução numérica para o quarto estado excitado ($n=3$).

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

No desenvolvimento deste trabalho, efetuamos um estudo detalhado sobre a influência de campos gravitacionais em partículas descritas pelas equações de Klein-Gordon e de Dirac. Junto a isso, também analisamos o efeito do uso de referenciais acelerados. Estados ligados para esses espaços foram obtidos em soluções das equações de onda.

No segundo capítulo, efetuamos um breve estudo da teoria de variedades, que são espaços em que o formalismo da Relatividade Geral é construído. Vetores covariantes e contravariantes foram definidos de forma independente de um sistema de coordenadas nessa formulação. Os símbolos de Christoffel foram relacionados ao tensor métrico, proporcionando, dessa forma, um algoritmo para computarmos as conexões com as derivadas do tensor métrico. Os tensores de Ricci e de curvatura escalar foram relacionados aos os símbolos de Christoffel através de derivadas. E por fim, a equação de Einstein foi derivada usando o princípio variacional, onde foi mostrado que a combinação do tensor de Ricci e com a curvatura escalar é proporcional ao tensor energia momento.

Na etapa seguinte, estudamos o procedimento de resolução da equação de Einstein. Exemplificamos o procedimento para a métrica da corda cósmica, foram derivadas as soluções interna e externa para uma corda infinita. Também examinamos a métrica escrita em um referencial em rotação constante.

Em seguida, no quarto capítulo, abordamos a formulação das equações de Dirac e Klein-Gordon em espaço-tempo plano (ROSE, 1961). Examinamos a solução elementar, relacionada à partícula livre, onde a ocorrência de estados de energia negativa foi constatada. A solução da equação de Dirac relacionada ao átomo de hidrogênio foi estudada posteriormente.

A passagem para as equações de Dirac e Klein-Gordon em espaço curvo foi feita através da promoção das derivadas convencionais a derivadas covariantes e com a substituição da métrica do espaço plano, para o tensor métrico $g_{\mu\eta}$, no espírito do princípio da covariância. Em especial, a equação de onda para férmions necessitou de um estudo do comportamento de espinores em relação a transformações de coordenadas. Isso nos levou à análise do grupo de Lorentz, para qual necessitamos usar a representação espinorial. Ainda fizemos uso de tetradas, que de certa forma, podem ser escolhidas tal que as equações obtidas sejam mais simples.

Os capítulos 6 e 7 foram dedicados à exposição dos resultados obtidos em nosso estudo. Resolvemos a equação de Klein-Gordon no espaço de uma corda cósmica, onde introduzimos um termo de interação escalar análogo ao potencial de Coulomb. Constatamos que o espectro de energia derivado depende explicitamente de fatores como a velocidade de rotação do referencial não inercial, além da topologia do espaço-tempo. Na sequência focamos na resolução da equação de Dirac em 1+1 dimensões em um referencial acelerado. No primeiro estudo, resolvemos a equação sem potencial escalar e obtivemos soluções que representam energia discreta. No segundo caso, resolvemos a equação de forma exata para o potencial do tipo exponencial. Um resultado interessante foi a ocorrência de estados de energia nula. Nas duas soluções obtidas verificamos a ocorrência de tal solução.

O capítulo 7 foi dedicado à uma parte importante dessa tese. Estudamos a equação de Dirac em um espaço curvo, considerando o efeito de um campo magnético. Para isso foi utilizado o espaço de Melvin que é uma solução analítica para a equação de campo de Einstein que considera um campo magnético na direção z . Observamos seu efeito em diversos casos de interesse. Os resultados obtidos indicaram que um campo magnético com determinada intensidade pode modificar os níveis do espectro através do acoplamento eletromagnético na equação de Dirac. Em campos da ordem do campo magnético da Terra e do Sol, praticamente não constatou-se efeito significativo no espectro. Para campos iguais ou superiores ao campo de pulsares, observamos um efeito considerável nos níveis de energia. Agora os efeitos de curvatura do espaço-tempo devido ao campo magnético são muito pequenos e só aparecem para valores de n muito grandes e de campos magnéticos extremos. Assim concluímos que para uma métrica do tipo da de Melvin esses efeitos podem ser desprezados.

Por fim, observamos que todo nosso estudo até aqui, foi relacionado a equações de onda para partículas. Em estudos avançados, uma perspectiva de trabalho bastante sugestiva é analisar a métrica (3.32) no contexto de uma teoria para campos quânticos. Em estudos futuros pretendemos estudar esquemas de renormalização para calcular a energia do estado fundamental de campos de Klein-Gordon e de Dirac em espaços curvos. Resultados recentes apontam que a presença de efeitos não inerciais e topológicos modificam a energia do estado fundamental de campos quânticos. Dessa forma, a teoria de campos em espaços curvos pode ser a continuação natural do nosso trabalho.

9 DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

REFERÊNCIAS

AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, v. 115, n. 3, p. 485–491, 1959. Cited By 2546.

ALFORD, M.; WILCZEK, F. Aharonov-bohm interaction of cosmic strings with matter. *Physical Review Letters*, v. 62, n. 10, p. 1071–1074, 1989. Cited By 118.

ALHAIDARI, A. Solutions of the nonrelativistic wave equation with position-dependent effective mass. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 66, n. 4, p. 421161–421167, 2002. Cited By 147.

ALHAIDARI, A. Solution of the dirac equation with position-dependent mass in the coulomb field. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 322, n. 1-2, p. 72–77, 2004. Cited By 86.

ARYAL, M.; FORD, L. H.; VILENKIN, A. Cosmic strings and black holes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 34, p. 2263–2266, Oct 1986. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.34.2263>>.

BAGROV, V.; GITMAN, D. *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*. Springer, 1990. (Mathematics and its Applications). ISBN 9780792302155. <<http://books.google.com.br/books?id=06R3WgC84R0C>>.

BAKKE, K. Rotating effects on the Dirac oscillator in the cosmic string spacetime. *Gen.Rel.Grav.*, v. 45, p. 1847–1859, 2013.

BARROS, C. Quark confinement and curved spaces. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 45, p. 421–425, 2006.

BARROS, C. C. Quantum mechanics in curved space-time. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 42, p. 119–126, 2005. ISSN 1434-6044.

BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; LUIS, A. *Phys. Rev. A*, v. 77, 2008. Cited By 0.

BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; LUIS, A. *Phys. Rev. A*, v. 77, 2008. Cited By 0.

BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; SOLANO, E. *Phys. Rev. Lett.*, v. 99, 2007. Cited By 0.

BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; SOLANO, E. *Phys. Rev. A*, v. 76, 2007. Cited By 0.

BONNOR, W. B. Static magnetic fields in general relativity. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, v. 67, n. 3, p. 225, 1954.

BRILL, D. R.; WHEELER, J. A. Interaction of neutrinos and gravitational fields. *Rev.Mod.Phys.*, v. 29, p. 465–479, 1957.

CASTRO, A. D. Bound states by a pseudoscalar coulomb potential in one-plus-one dimensions. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 318, n. 1-2, p. 40–47, 2003. Cited By 18.

CASTRO, A. D.; HOTT, M. Exact closed-form solutions of the dirac equation with a scalar exponential potential. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 342, n. 1-2, p. 53–59, 2005. Cited By 0. <<http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-20444503977partnerID=40md5=c111c18b834965f9553a1669eb8c8689>>.

CASTRO, A. S. de. Bounded solutions of neutral fermions with a screened coulomb potential. *Annals of Physics*, v. 320, n. 1, p. 56 – 70, 2005. ISSN 0003-4916. <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491605000886>>.

CHANDRASEKHAR, S. The solution of dirac's equation in kerr geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 349, n. 1659, p. 571–575, 1976. ISSN 00804630.

CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes*. [S.l.]: Oxford University Press, 1985.

COHEN, J. M.; POWERS, R. T. The general relativistic hydrogen atom. *Communications in Mathematical Physics*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 86, p. 69–86, 1982.

COLEMAN, S. More about the massive schwinger model. *Annals of Physics*, v. 101, n. 1, p. 239–267, 1976. Cited By 363.

COLEMAN, S.; JACKIW, R.; SUSSKIND, L. Charge shielding and quark confinement in the massive schwinger model. *Annals of Physics*, v. 93, n. 1-2, p. 267–275, 1975. Cited By 245.

DATTA, S. N.; MISRA, A. Relativistic dynamics of two spin-half particles in a homogeneous magnetic field. *The Journal of Chemical Physics*, v. 114, n. 4, p. 1478–1490, 2001. <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jcp/114/4/10.1063/1.1331103>>.

DAVIES, P. C. W. Scalar production in schwarzschild and rindler metrics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 8, n. 4, p. 609, 1975. <<http://stacks.iop.org/0305-4470/8/i=4/a=022>>.

DEKAR, L.; CHETOUANI, L.; HAMMANN, T. Wave function for smooth potential and mass step. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 59, n. 1, p. 107–112, 1999. Cited By 84.

DIRAC, P. *The Principles of Quantum Mechanics*, 1958. Cited By 2725.

DONG, S.-H. et al. Algebraic approach to the position-dependent mass schrödinger equation for a singular oscillator. *Modern Physics Letters A*, v. 22, n. 14, p. 1039–1045, 2007. Cited By 13.

FULLING, S. Nonuniqueness of canonical field quantization in riemannian space-time. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 7, p. 2850–2862, May 1973. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2850>>.

GERMANO, M. G.; BEZERRA, V. B.; MELLO, E. R. B. de. Gravitational effects due to a cosmic string in schwarzschild spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, v. 13, n. 10, p. 2663, 1996. <<http://stacks.iop.org/0264-9381/13/i=10/a=006>>.

GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.]: Wiley, 2008. ISBN 9783527406012.

HEHL, F.; NI, W.-T. Inertial effects of a dirac particle. *Physical Review D*, v. 42, n. 6, p. 2045–2048, 1990. Cited By 0.

HISCOCK, W. A. Exact gravitational field of a string. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 31, p. 3288–3290, Jun 1985. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.31.3288>>.

HO, C.-L.; KHALILOV, V. Fractional fermion number in a $(1 + 1)$ -dimensional dirac equation with a scalar coulomb field. *Physical Review D*, v. 63, n. 2, 2001. Cited By 10. <<http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-0035862273partnerID=40md5=50f7c8add649440bdb720145975f23d2>>.

INFELD, L.; HULL, T. E. The factorization method. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 23, p. 21–68, 1951.

ITÁ', D.; MORI, K.; CARRIERE, E. An example of dynamical systems with linear trajectory. *Il Nuovo Cimento A Series 10*, v. 51, n. 4, p. 1119–1121, 1967. Cited By 0.

JAYNES, E.; CUMMINGS, F. *Proc. IEEE*, v. 51, p. 89–109, 1963. Cited By 0.

JOHNSON, M. H.; LIPPMANN, B. A. Motion in a constant magnetic field. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 76, p. 828–832, Sep 1949. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.76.828>>.

JOSÉ, J.; SALETAN, E. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998. ISBN 9780521636360. <<http://books.google.co.uk/books?id=EqI9dRQDgvQC>>.

KADLECOVÁ, H.; s, P. Krtou. Gyration on melvin spacetime. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 82, p. 044041, Aug 2010. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.044041>>.

KHALILOV, V. Relativistic aharonov-bohm effect in the presence of planar coulomb potentials. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 71, n. 1, 2005. Cited By 17. <<http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-18444413989partnerID=40md5=2ceb80a54e6c892b18771759d3327765>>.

KÜHLKAMP, N. *Introdução à Topologia Geral*. [S.l.]: Editora da UFSC, 2002.

LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, 1977. Cited By 3801.

LEE, H. K.; YOON, Y. Effective potential for uniform magnetic fields through pauli interaction. *Journal of High Energy Physics*, v. 2007, n. 03, p. 086, 2007.

LINDE, A. D. Phase transitions in gauge theories and cosmology. *Reports on Progress in Physics*, v. 42, n. 3, p. 389, 1979. <<http://stacks.iop.org/0034-4885/42/i=3/a=001>>.

MANDAL, B.; VERMA, S. Dirac oscillator in an external magnetic field. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 374, n. 8, p. 1021–1023, 2010. Cited By 0.

MANDAL, B. P.; VERMA, S. Dirac oscillator in an external magnetic field. *Physics Letters A*, v. 374, n. 8, p. 1021 – 1023, 2010. ISSN 0375-9601. <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037596010901603X>>.

MARQUES, G.; BEZERRA, V. Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects. *Physical Review D*, v. 66, n. 10, 2002. Cited By 0. <<http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-0242267817partnerID=40md5=f9f8c34334692b6247486472e2bd802d>>.

MARQUES, G.; BEZERRA, V.; DONG, S.-H. Solution of the dirac equation with position-dependent mass in a coulomb and scalar fields in a conical spacetime. *Modern Physics Letters A*, v. 28, n. 31, 2013. Cited By 0. <<http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84883711022partnerID=40md5=b2ef6d0a95de9f634ddb76f2a2fe9fec>>.

MARTINEZ-Y-ROMERO, R.; NUNEZ-YEPEZ, H.; SALAS-BRITO, A. Relativistic quantum mechanics of a dirac oscillator. *European Journal of Physics*, v. 16, n. 3, p. 135–141, 1995. Cited By 0.

MASHHOON, B. Neutron interferometry in a rotating frame of reference. *Physical Review Letters*, v. 61, n. 23, p. 2639–2642, 1988. Cited By 153.

MELROSE, D.; PARLE, A. QUANTUM ELECTRODYNAMICS IN STRONG MAGNETIC FIELDS. I. ELECTRON STATES. *Austral.J.Phys.*, v. 36, p. 755–774, 1983.

MELVIN, M. A. Dynamics of cylindrical electromagnetic universes. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 139, p. B225–B243, Jul 1965. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.139.B225>>.

MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics, Part I*. [S.l.]: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1953. Hardcover.

MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAK, A. The dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 22, n. 17, p. L817–L819, 1989. Cited By 0.

MUSTAFA, O.; MAZHARIMOUSAVI, S. Quantum particles trapped in a position-dependent mass barrier; a d-dimensional recipe. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 358, n. 4, p. 259–261, 2006. Cited By 33.

NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Taylor & Francis, 2003. (Graduate student series in physics). ISBN 9780750306065. <<http://books.google.com.br/books?id=cH-XQB0Ex5wC>>.

NEWMAN, E.; PENROSE, R. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 3, p. 566–578, 1962.

OBUKHOV, Y. N.; SILENKO, A. J.; TERYAEV, O. V. Spin dynamics in gravitational fields of rotating bodies and the equivalence principle. *Phys.Rev. D*, v. 80, p. 064044, 2009.

OBUKHOV, Y. N.; SILENKO, A. J.; TERYAEV, O. V. Spin in an arbitrary gravitational field. *Phys.Rev. D*, v. 88, p. 084014, 2013.

PACHECO, M.; LANDIM, R.; ALMEIDA, C. One-dimensional dirac oscillator in a thermal bath. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 311, n. 2-3, p. 93–96, 2003. Cited By 0.

PACHECO, M.; LANDIM, R.; ALMEIDA, C. One-dimensional dirac oscillator in a thermal bath. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 311, n. 2-3, p. 93–96, 2003. Cited By 33.

PAGE, L. Effect of earth's rotation in neutron interferometry. *Physical Review Letters*, v. 35, n. 8, p. 543, 1975. Cited By 0.

PAHLAVANI, M. R. *Theoretical Concepts of Quantum Mechanics*. [S.l.]: InTech 2012, 2012.

PARKER, L. One-electron atom as a probe of spacetime curvature. *Physical Review D*, v. 22, n. 8, p. 1922–1934, 1980. Cited By 84.

PARKER, L. One-electron atom in curved space-time. *Physical Review Letters*, v. 44, n. 23, p. 1559–1562, 1980. Cited By 55.

PARKER, L. The atom as a probe of curved space-time. *General Relativity and Gravitation*, v. 13, n. 4, p. 307–311, 1981. Cited By 6.

PARKER, L. Self-forces and atoms in gravitational fields. *Physical Review D*, v. 24, n. 2, p. 535–537, 1981. Cited By 11.

PARKER, L.; PIMENTEL, L. Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum. *Physical Review D*, v. 25, n. 12, p. 3180–3190, 1982. Cited By 48.

PESHKIN, M.; TONOMURA, A. *The Aharonov-Bohm Effect*, 1989. Cited By 196.

PLASTINO, A.; CASAS, M.; PLASTINO, A. Bohmian quantum theory of motion for particles with position-dependent effective mass. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 281, n. 5-6, p. 297–304, 2001. Cited By 36.

POLTIS, R.; STOJKOVIC, D. Can primordial magnetic fields seeded by electroweak strings cause an alignment of quasar axes on cosmological scales? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 105, p. 161301, Oct 2010. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.161301>>.

POST, E. Sagnac effect. *Reviews of Modern Physics*, v. 39, n. 2, p. 475–493, 1967. Cited By 0.

QUESNE, C.; MOSHINSKY, M. Symmetry lie algebra of the dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 23, n. 12, p. 2263–2272, 1990. Cited By 0.

ROSE, M. *Relativistic electron theory*. [S.l.]: Wiley, 1961.

ROY, B.; ROY, P. A lie algebraic approach to effective mass schrödinger equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 35, n. 17, p. 3961–3969, 2002. Cited By 97.

ROZMEJ, P.; ARVIEU, R. The dirac oscillator. a relativistic version of the jaynes-cummings model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 28, p. 5367–5382, 1999. Cited By 0.

RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.

SAGNAC, G. L'ether lumineux demontre par l'effet du vent relatif d'ether dans un interferometre en rotation uniforme. *C.R. Acad. Sci.*, v. 157, p. 708–710, 1913. Cited By 0.

SAGNAC, G. Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interférographe tournant. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, v. 157, 1913. Cited By 0.

Salazar-Ramirez, M. et al. An $su(1, 1)$ algebraic approach for the relativistic Kepler-Coulomb problem. *Journal of Physics A Mathematical General*, v. 43, p. 5203, 2010.

SCHIFF, L. *Quantum Mechanics*, 1968. Cited By 2959.

SCHWINGER, J. Energy and momentum density in field theory. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 130, p. 800–805, Apr 1963. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.800>>.

SHEN, J. Q.; HE, S.; ZHUANG, F. Aharonov-carmi effect and energy shift of valence electrons in rotating c60 molecules. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, EDP Sciences, v. 33, n. 1, p. 35–38, 2005. ISSN 1434-6060. <<http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2005-00027-7>>.

SOUZA, A. D. D.; ALMEIDA, C. *Almeida, Phys Lett A*, v. 275, p. 25, 2000. Cited By 1.

SUCU, Y.; ÜNAL, N. Dirac equation in euclidean newman-penrose formalism with applications to instanton metrics. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, n. 6, p. 1443, 2004.

UNRUH, W. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 14, p. 870–892, Aug 1976. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.870>>.

VILENKIN, A. Cosmic strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 24, p. 2082–2089, Oct 1981. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.24.2082>>.

VILENKIN, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 23, p. 852–857, Feb 1981. <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.852>>.

VILLALBA, V. Exact solution of the two-dimensional dirac oscillator. *Physical Review A*, v. 49, n. 1, p. 586–587, 1994. Cited By 0.

WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1984.

WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1972.

WERNER, S.; STAUDENMANN, J.-L.; COLELLA, R. Effect of earth's rotation on the quantum mechanical phase of the neutron. *Physical Review Letters*, v. 42, n. 17, p. 1103–1106, 1979. Cited By 0.

YAU, J.-B.; POORTERE, E. D.; SHAYEGAN, M. Aharonov-bohm oscillations with spin: Evidence for berry's phase. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 14, p. 146801/1–146801/4, 2002. Cited By 104.

YU, J.; DONG, S.-H. Exactly solvable potentials for the schrödinger equation with spatially dependent mass. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 325, n. 3-4, p. 194–198, 2004. Cited By 73.

YU, J.; DONG, S.-H.; SUN, G.-H. Series solutions of the schrödinger equation with position-dependent mass for the morse potential. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 322, n. 5-6, p. 290–297, 2004. Cited By 90.

APÊNDICE A – O espaço-tempo de Rindler

A.1 AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Vamos usar os resultados da relatividade restrita para derivar as equações que determinam o movimento de um referencial acelerado. Vamos denotar por (t, \mathbf{x}^0) as coordenadas do referencial inercial do laboratório e por (τ, ξ) as coordenadas do referencial acelerado. As equações do movimento na relatividade podem ser determinadas ao resolvermos a expressão

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = a^\mu, \quad (\text{A.1})$$

ou, de forma equivalente

$$\frac{d\mathbf{u}^\mu}{d\tau} = a^\mu, \quad (\text{A.2})$$

onde a^μ é a quadriaceleração, \mathbf{u}^μ é a quadrivelocidade. Elevando ao quadrado a equação (A.2), obtemos

$$\left(\frac{d\mathbf{u}^0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{u}^1}{d\tau}\right)^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2, \quad (\text{A.3})$$

assumindo que só há aceleração espacial, temos que $a^0 = 0$, e a equação é reduzida para

$$\left(\frac{d\mathbf{u}^0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{u}^1}{d\tau}\right)^2 = - (a^1)^2. \quad (\text{A.4})$$

Outro resultado padrão da relatividade restrita, o produto das quadrivelocidades $\mathbf{u}^\mu \mathbf{u}_\mu = 1$, que é constante, pode ser usado para derivarmos a equação

$$(\mathbf{u}^0)^2 - (\mathbf{u}^1)^2 = 1. \quad (\text{A.5})$$

Se isolarmos o termo $\frac{d\mathbf{u}^1}{d\tau}$ na equação (A.3) e o termo \mathbf{u}^0 na equação (A.5) encontramos o par de equações

$$\mathbf{u}^0 = \sqrt{1 + (\mathbf{u}^1)^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d\mathbf{u}^1}{d\tau} = a \sqrt{1 + (\mathbf{u}^1)^2}, \quad (\text{A.7})$$

integrando a equação (A.7) e usando o resultado na equação (A.6) obtemos as equações que descrevem a velocidade para um corpo acele-

rado (com condições iniciais $u^1(0) = 0$)

$$u^1 = \sinh(a\tau), \quad (\text{A.8})$$

$$u^0 = \cosh(a\tau). \quad (\text{A.9})$$

Por fim, integramos em relação ao tempo próprio e obtemos o deslocamento

$$x(\tau) = x_0 - 1/a + \cosh(a\tau), \quad (\text{A.10})$$

$$t(\tau) = t_0 + \frac{1}{a} \sinh(a\tau). \quad (\text{A.11})$$

A idéia é criar um referencial que tem o movimento descrito por trajetórias dadas pelas equações do movimento derivadas. Naturalmente, a relação entre as coordenadas do referencial do laboratório (t, x^0) e as coordenadas do referencial acelerado (τ, ξ) deve satisfazer as transformação de Lorentz.

Descrevendo a posição no referencial de coordenadas (τ, ξ) por uma vara rígida de comprimento ξ , o referencial do laboratório ira medir para essa barra os valores s_{lab}^0, s_{lab}^1

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_{lab}^0 \\ s_{lab}^1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^0 & u^1 \\ u^1 & u^0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u^1 \xi \\ u^0 \xi \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

dessa forma as coordenadas $t(\tau, \xi)$ e $x(\tau, \xi)$, que descrevem a ponta da vara rígida das coordenadas do laboratório, são dadas por

$$t(\tau, \xi) = x^0(\tau) + s_{lab}^0 = x^0(\tau) + u^1 \xi, \quad (\text{A.13})$$

$$x(\tau, \xi) = x^1(\tau) + s_{lab}^1 = x^1(\tau) + u^0 \xi, \quad (\text{A.14})$$

que, usando os resultados anteriores para expressar $x^0(\tau), x^1(\tau), u^0, u^1$, junto com as condições iniciais $x_0 = 1/a$ e $t_0 = a$, encontramos

$$t(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \sinh(a\tau), \quad (\text{A.15})$$

$$x(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \cosh(a\tau). \quad (\text{A.16})$$

As equações (A.15) e (A.16) descrevem as coordenadas de um referencial com aceleração constante, no âmbito da relatividade restrita, em duas dimensões. Lembrando que no espaço de Minkowski o elemento de distância é dado pela equação

$$ds^2 = dt^2 - dx^2. \quad (\text{A.17})$$

Para derivarmos a métrica para o referencial acelerado basta agora diferenciar as equações (A.15) e (A.16) e substituir o resultado na equação (A.17), resultando no elemento

$$ds^2 = (1 + a\xi)^2 d\tau^2 - d\xi^2. \quad (\text{A.18})$$

APÊNDICE B – O método NU

B.1 INTRODUÇÃO

O método de Nikiforov-Uvarov, ou simplesmente método NU, é uma forma de sistematizar a transformação de uma equação diferencial com um determinado perfil em uma equação do tipo Hipergeométrica. A importância prática do mapeamento de uma equação diferencial para uma equação hipergeométrica vem do fato que as soluções das equações hipergeométricas são muito bem estudadas no contexto da mecânica quântica. Com isso, o trabalho de resolver uma determinada equação é reduzido à tarefa de mapear a equação em questão em uma equação do tipo hipergeométrica. Uma característica interessante do método é a sistematização do processo de mapeamento. Posto isto, vamos considerar uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d^2\psi(s)}{ds^2} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \frac{d\psi(s)}{ds} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi(s) = 0. \quad (\text{B.1})$$

A limitação do método está no fato de que os coeficientes da equação (B.1) podem assumir somente formas específicas. As funções $\sigma(s)$ e $\tilde{\sigma}(s)$ devem ser polinômios de no máximo segunda ordem e $\tilde{\tau}(s)$ é um polinômio de no máximo primeira ordem. Neste ponto, aplicaremos a seguinte transformação na equação (B.1):

$$\psi(s) = \phi(s) y(s), \quad (\text{B.2})$$

o resultado é escrito na forma

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2 y(s)}{ds^2} + \left(2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \right) \frac{dy(s)}{ds} \\ & + \left(\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \right) y(s). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Definindo uma nova função $\tau(s)$ e escolhendo o coeficiente de $\frac{dy(s)}{ds}$ na forma τ/σ , temos que a equação (B.3) fornece a relação

$$\frac{\tau(s)}{\sigma(s)} = 2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}, \quad (\text{B.4})$$

que pode ser reorganizada no formato

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}, \quad (\text{B.5})$$

onde

$$\pi(s) \equiv \frac{1}{2} [\tau(s) - \tilde{\tau}(s)], \quad (\text{B.6})$$

ou

$$\tau(s) = \tilde{\tau} + 2\pi(s) \quad (\text{B.7})$$

e τ é um polinômio de grau máximo 1. Observando a identidade

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)' + \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)^2, \quad (\text{B.8})$$

se usarmos o resultado derivado na equação (B.5) na equação (B.8) obtemos a expressão:

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)' + \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \right)^2. \quad (\text{B.9})$$

Por fim, usaremos os resultados obtidos nas equações (B.5), (B.9) e (B.4) na equação (B.3) para obter a equação

$$\frac{d^2 y(s)}{ds^2} + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \frac{dy(s)}{ds} + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} y(s) = 0, \quad (\text{B.10})$$

onde

$$\bar{\sigma}(s) = \tilde{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s) [\tau(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s) \sigma(s). \quad (\text{B.11})$$

A equação (B.10) é do tipo hipergeométrica e a função $\pi(s)$ será determinada a seguir. Se o polinômio $\bar{\sigma}$ for divisível por σ então eles podem ser relacionados por

$$\bar{\sigma} = \lambda \sigma, \quad (\text{B.12})$$

onde a quantidade λ é uma constante. Com isso a equação (B.10) pode ser posta na seguinte forma:

$$\sigma(s) \frac{d^2 y(s)}{ds^2} + \tau(s) \frac{dy(s)}{ds} + \lambda y(s) = 0. \quad (\text{B.13})$$

Comporando a equação (B.12) e (B.11) derivamos o resultado

$$\pi^2 + (\tau - \sigma') \pi + (\tilde{\sigma} - k\sigma) = 0, \quad (\text{B.14})$$

com k dado por

$$k = \lambda - \pi'. \quad (\text{B.15})$$

Vemos que a expressão (B.14) é uma equação quadrática onde a solução é escrita como

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tau(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tau(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)}. \quad (\text{B.16})$$

A equação (B.10) pode ser generalizada mostrando que a derivada de qualquer ordem dessa equação também é uma equação do tipo hipergeométrica. Se derivarmos toda a equação (B.10) e em seguida definirmos as quantidades

$$\tau_1 = \tau + \sigma', \quad \mu_1 = \lambda + \tau' \text{ e } v_1 = y', \quad (\text{B.17})$$

obtemos o resultado

$$\sigma v_1'' + \tau_1 v_1' + \mu_1 v_1 = 0. \quad (\text{B.18})$$

Se efetuarmos esse procedimento n vezes, ao termino, obtemos a equação hipergeométrica

$$\sigma(s) v_n''(s) + \tau_n(s) v_n'(s) + \mu_n(s) v_n(s) = 0, \quad (\text{B.19})$$

onde

$$\tau_n(s) = \tau(s) + n\sigma'(s), \quad (\text{B.20})$$

$$\mu_n(s) = n\tau'(s) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) + \lambda. \quad (\text{B.21})$$

Um resultado de interesse é obtido quando $\mu_n = 0$, neste caso a equação (B.21) fornece

$$\lambda = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{B.22})$$

Dessa forma a equação (B.19) tem uma solução particular $v_n = y_n(s)$ que é um polinômio de grau n em que a fórmula explícita é obtida pela relação de Rodrigues

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)], \quad (\text{B.23})$$

onde o fator B_n é uma constante de normalização e a função $\rho(s)$ satisfaz

$$[\sigma(s)\rho(s)]' = \tau(s)\rho(s). \quad (\text{B.24})$$

O procedimento de resolução com as fórmulas derivadas nesse apêndice pode ser sistematizado com os seguintes passos

1. Colocar a equação diferencial do problema em questão na forma da equação **(B.1)**.
2. Comparar as equações e determinar as funções $\tilde{\tau}$, σ , e $\tilde{\sigma}$.
3. Com as funções identificadas, montar a equação polinomial com a fórmula **(B.16)**.
4. Considerando a equação **(B.16)** como as raízes de uma equação polinomial do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, identificar os termos a , b , e c e calcular o discriminante, isto é, $\Delta = b^2 - 4ac$. O resultado será uma equação polinomial de segunda ordem para k , com as raízes denotadas por k_{\pm} .
5. Substituindo os dois valores obtidos para k na equação **(B.16)**, o resultado será uma equação de quarta ordem fornecendo quatro valores para $\pi(s)$. Devemos escolher um dos valores que seja fisicamente válido.
6. O valor fisicamente válido será aquele em que a derivada da equação **(B.7)** tiver um valor negativo.
7. Igualar as equações **(B.22)** e **(B.15)** e, desta forma, obter uma equação para o espectro de energia.
8. Inserir os valores de σ e π na equação **(B.5)** e determinar $\phi(s)$.
9. Determinar $\rho(s)$ pela equação **(B.24)** e construir a função $y_n(s)$ pela relação de Rodrigues.
10. Combinar $\phi(s)$ e $y_n(s)$ para obter função de onda $\psi(s)$.

Outras formas de resolução que utilizamos no trabalho são as metodologias de resolução algébrica das equações radiais (INFELD; HULL, 1951). Trata-se da aplicação da álgebra de Lie $su(1, 1)$ na solução da equação radial (Salazar-Ramirez et al., 2010). A ideia é utilizar um formalismo alternativo em relação às soluções via séries de potência (MORSE; FESHBACH, 1953).