Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Equivariantização de categorias k-lineares

Luis Augusto Uliana
Orientadora: Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Março de 2015

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Equivariantização de categorias k-lineares

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Luis Augusto Uliana
Florianópolis
Março de 2015

Equivariantização de categorias k-lineares

por

Luis Augusto Uliana[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues
(Orientadora - UFSC)

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Prof. Dr. Juan Martín Mombelli
(Universidad Nacional de Córdoba - UNC)

Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira
(Universidade de São Paulo - USP)

Florianópolis, Fevereiro de 2015.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Iesus dixit, “si quis vult post
me sequi, deneget se ipsum et
tollat crucem suam et sequatur me.”
Mc 8,34

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por ter me feito enxergar por meio de Nossa Senhora e Santa Bernadette a verdadeira beleza do mundo.

Agradeço à minha família, minha mãe, irmã, meu tio Harry e minha tia Vera por terem ajudado durante esse período.

Agradeço à minha orientadora por ter tido muita dedicação no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos professores da banca por terem aceito o convite de participar e por terem feito correções para deixar este trabalho melhor.

Agradeço também aos professores que fizeram parte dessa minha formação direta ou indiretamente.

Agradeço à Elisa, secretária da pós, por ter me ajudado nos períodos de matrícula e com toda a parte burocrática durante esses dois anos.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudos fornecida, sem a qual não seria possível escrever esta dissertação.

Resumo

A teoria de categorias é apresentada pela primeira vez em 1945, no trabalho entitulado *General Theory of Natural Equivalences*. Na publicação de 1950, entitulada *Duality for Groups*, MacLane introduz por meio axiomático a noção de categoria abeliana.

O objetivo desse trabalho é estudar algumas construções feitas em categorias k-lineares (que são abelianas). Passamos por todas as definições e resultados necessários na teoria de categorias para podermos definir ação de um grupo finito G em uma categoria k-linear e, em seguida, definir a equivariantização de uma categoria k-linear.

Como principal resultado, mostramos que a equivariantização de uma categoria k-linear é, também, k-linear. Para esse estudo, utilizamos como referência principal, as notas de aula *Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones* do prof. Dr. Martín Mombelli.

Abstract

The category theory is introduced for the first time in 1945 in a research entitulated *General Theory of Natural Equivalences*. In 1950 in a publication called *Duality for Groups*, MacLane introduce trough axioms the notion of abelian category.

The purpose of this research is studying some contructions done in k-linear categories (which are abelians). We have studied all necessary definitions and results in the categories theory so we can define the action of a finite group G in a k-linear category and after that we can define the equivariantization of a k-linear category.

As the main result we have shown the equivariantization of a k-linear category is, also, k-linear. We study as the main reference the class notes *Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones* of the prof. Dr. Martín Mombelli.

Sumário

Introdução

Em meados de 1940 Saunders MacLane e Samuel Eilenberg trabalharam conjuntamente, nesse período publicaram o trabalho [3] no qual utilizavam o termo "isomorfismo natural" para designar certos tipos de isomorfismos, cujos autores referem como sendo um "fenômeno" que ocorria em vários contextos da matemática.

A teoria de categorias é apresentada pela primeira vez em 1945, no trabalho [4] entitulado *General Theory of Natural Equivalences*. No entanto, é observado que a teoria de categorias surge da necessidade de trabalhar e tornar precisa a noção de transformação natural. Inicialmente a teoria chega a ser chamada de "abstração sem sentido", como observado em [6], no entanto, depois do trabalho de Grothendieck, Daniel Kan e outros a teoria ganha um espaço e respeito dentro de toda a matemática.

O objetivo deste trabalho é estudar parte das notas de aula [16] escritas pelo Prof. Dr. Martín Mombelli, seguimos basicamente a mesma organização e ordem dos assuntos dessa referência. O primeiro capítulo faz uma apresentação de conceitos básicos da teoria de categorias, que são utilizados nos capítulos subsequentes. Como referências adicionais citamos [14], [1] e [10].

No segundo capítulo, apresentamos o conceito de funtor e transformação natural. A noção de funtor aparece formalmente pela primeira vez em [3] no contexto de grupos e é observado que tal noção poderia facilmente ser generalizada para outros "contextos". Em [3], curiosamente encontramos como exemplo de isomorfismo natural, o isomorfismo $Hom(-, Hom(-,-)) \simeq Hom(- \otimes -, -)$, que relaciona os funtores Hom e $\otimes$, sem fazer referência à noção de adjunção.

Podemos citar o Lema de Yoneda como um dos resultados principais do segundo capítulo, este que é um dos resultados mais conhecidos da teoria de categorias. Curiosamente, o lema não foi provado no artigo de Yoneda, observamos o que diz Peter Freyd em ([7], p.14)

> The Yoneda Lemma turns out not to be in Yoneda's paper. When, some time after both printings of the book appeared, this was brought to my (much chagrined) attention, I brought it the attention of the person who had told me that it was the Yoneda Lemma. He consulted his notes and discovered that it appeared in a lecture that MacLane gave on Yoneda's treatment of the higher Ext functors. The name "Yoneda Lemma" was not doomed to be replaced.

Em 1958, Daniel Kan em seu artigo [11] entitulado *Adjoint Functors* introduz a noção de adjunção, utilizando como motivação o isomorfismo natural do artigo de 1942 citado acima. No capítulo dois, mostramos alguns exemplos concretos de adjunção e provamos alguns resultados pertinentes. Para esse capítulo, utilizamos como base [16], [14] e [1].

Em ([15], p. 338) Saunders MacLane escreve

> The next step in the development of category theory was the introduction of categories with structure. About 1947, I notice that the Eilenberg Steenrod axiomatic homology theory concerned functors from a category of topological spaces to various categories with an "additive" structure - categories of abelian groups, or of R-modules for various rings R. I consequently set about to describe axiomatically these abelian categories.

Na publicação [13] de 1950, entitulada *Duality for Groups*, MacLane introduz por meio axiomático a noção de categoria abeliana. Nesse artigo de 1950, MacLane observa a dualidade (das demonstrações) existente entre certas noções como produto e coproduto, núcleo e conúcleo.

No terceiro capítulo, procuramos falar sobre categorias aditivas e abelianas e provar os resultados necessários para o capítulo seguinte. Um resultado que provamos, mostra a relação e a dependência existente entre as noções de produto e coproduto em categorias aditivas.

No último capítulo, definimos a ação de um grupo G em uma categoria k-linear $\mathcal{C}$. A estrutura de aditividade da categoria e a aditividade dos funtores são necessários e fazem um paralelo com a noção de ação de grupo em conjuntos.

Terminamos definindo uma nova categoria, denotada $\mathcal{C}^G$, chamada equivariantização. Para construir essa nova categoria, tudo o que foi feito no trabalho é utilizado. Provamos a equivalência entre as categorias $({}_A\mathfrak{m})^G$ e ${}_{A\otimes_k kG}\mathfrak{m}$, que ilustra um fato observado em [6], de que para toda categoria k-linear finita $\mathcal{D}$, existe uma álgebra A tal que $\mathcal{D}$ é equivalente a uma categoria de A-módulos de dimensão finita sobre um corpo k. Como resultado principal, provamos que, caso $\mathcal{C}$ seja k-linear, então $\mathcal{C}^G$ é k-linear.

Informamos ao leitor que o estudo de equivariantização de categorias por um grupo pode ser ampliado para outras categorias como, por exemplo, categorias tensoriais finitas que é a ordem cronológica de [16]. Esse estudo é aplicado na teoria de representação de categorias tensoriais.

O Apêndice A contém todas as notações e resultados necessários para que pudéssemos falar dos funtores $\mathfrak{U} : Lie_k \to Alg_k$ e $\mathfrak{L} : Alg_k \to Lie_k$. Utilizamos tal apêndice como base para provar, por exemplo, que tais funtores são adjuntos.

Os Apêndices B e C contêm a construção e a definição dos complexos de cadeia e do grupo de tranças, respectivamente. Durante este trabalho, foram feitos seminários semanais nos quais foi apresentada toda a construção do grupo de tranças para o entendimento geométrico do mesmo e isso justifica o Apêndice C.

Capítulo 1

Categorias

Nesse capítulo falamos sobre teoria de categorias, conceitos fundamentais e toda a nomeclatura necessária para os capítulos subsequentes. Iniciamos com a definição de categoria e damos alguns exemplos. Depois partimos para algumas noções como: núcleo, produto e seus respectivos duais. Todas as definições e noções podem ser encontradas em [14].

1.1 Definições e exemplos

Definição 1.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de*

(i) *uma coleção de objetos $Ob(\mathcal{C})$;*

(ii) *para todo par (U, V) de objetos em $\mathcal{C}$ há uma coleção $Hom_{\mathcal{C}}(U, V)$ de morfismos de U para V;*

(iii) *para qualquer objeto W em $Ob(\mathcal{C})$ existe um morfismo I_W em $Hom_{\mathcal{C}}(W, W)$ chamado morfismo identidade;*

(iv) *para quaisquer U, V e W objetos em $Ob(\mathcal{C})$ existe uma função*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(U, V) \times Hom_{\mathcal{C}}(V, W) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(U, W) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

chamada composição de morfismos, que satisfaz os seguintes axiomas:

(a) *para quaisquer objetos* U *e* V *em* $Ob(\mathcal{C})$, *o morfismo identidade* I_U *em* $Hom_{\mathcal{C}}(U,U)$ *é tal que* $f \circ I_U = f$ *e* $I_U \circ g = g$, *para quaisquer* f *em* $Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$ *e* g *em* $Hom_{\mathcal{C}}(V,U)$;

(b) *dados objetos* U, V, W *e* Z *em* $Ob(\mathcal{C})$ *e morfismos* f *em* $Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$, g *em* $Hom_{\mathcal{C}}(V,W)$ *e* h *em* $Hom_{\mathcal{C}}(W,Z)$ *a composição é associativa, i.e.,* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Denotamos um morfismo f em $Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$ por $f : U \to V$ ou $U \xrightarrow{f} V$. Além disso, U é chamado *domínio* do morfismo f e V é chamado *codomínio* de f.

Observamos que, como cada objeto pode ser associado ao morfismo identidade, é tecnicamente possível trabalhar com uma definição de categoria que tenha apenas morfismos como é observado em [14]. No entanto, é mais cômodo trabalhar usando essa definição com objetos. A seguir, alguns exemplos de categorias.

Exemplo 1.2 A categoria Set é a categoria cujos objetos são os conjuntos e os morfismos entre dois conjuntos são as funções entre tais conjuntos.

De fato, seja X em $Ob(Set)$. Consideramos a função identidade I_X em $Hom_{Set}(X,X)$ como sendo o morfismo identidade. A composição de funções é associativa e portanto, Set é uma categoria.

Exemplo 1.3 A categoria Grp como sendo a categoria cujos objetos são os grupos e os morfismos entre objetos são os morfismos de grupos.

Exemplo 1.4 A categoria Ab é a categoria cujos objetos são os grupos abelianos e cujos morfismos entre objetos são os morfismos de grupo.

Exemplo 1.5 A categoria $Ring$ é a categoria cujos objetos são os anéis e os morfismos entre objetos são os morfismos de anéis.

Exemplo 1.6 Seja k um corpo. Denotamos por $Vect_k$ a categoria cujos objetos são os espaços vetoriais e os morfismos são as transformações lineares.

Denotamos $vect_k$ a categoria cujos objetos são os espaços vetoriais de dimensão finita e os morfismos as transformações lineares.

Exemplo 1.7 Seja k um corpo. Definimos Alg_k como sendo a categoria cujos objetos são as k-álgebras e os morfismos são os morfismos de k-álgebras.

Exemplo 1.8 Seja R um anel. Denotamos por ${}_R\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_R$) a categoria cujos objetos são os R-módulos à esquerda (à direita). Os morfismos são os morfismos de R-módulos à esquerda (à direita).

Exemplo 1.9 Seja A uma k-álgebra. Denotamos por ${}_A\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_A$) a categoria cujos objetos são os k-espaços vetoriais munidos de uma ação que os torna A-módulos à esquerda (à direita). Os morfismos são os morfismos de k-espaços vetoriais e de A-módulos à esquerda (à direita).

Exemplo 1.10 A categoria Top é aquela cujos objetos são os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas.

Exemplo 1.11 Seja A uma álgebra associativa com unidade. A categoria $\underline{A}$ é a categoria com um único objeto, a saber a álgebra A, e os morfismos são os elementos de A. A composição é o produto de A.

Exemplo 1.12 Seja k um corpo. Denotamos por Lie_k a categoria das álgebras de Lie sobre o corpo k. Os morfismos dessa categoria, são os morfismos de Álgebras de Lie, ou seja, aplicações k-lineares que preservam o colchete de Lie. Para mais detalhes, citamos o Apêndice A.

Exemplo 1.13 Seja R um anel comutativo com unidade. Denotamos por $\mathfrak{C}h(R)$ a categoria cujos objetos são os complexos de cadeia sobre o anel R, i.e., pares (C, d) em que C é um R-módulo $\mathbb{Z}$-graduado e d é um endomorfismo de grau 1 tal que $d^2 = 0$. A composição definida entre dois morfismos satisfaz os axiomas de categoria. Esse exemplo é apresentado de forma mais detalhada no Apêndice B.

Exemplo 1.14 De maneira mais geral que no exemplo anterior, podemos considerar $\mathfrak{C}h_N(R)$ para um $N \in \mathbb{N}$ com $N \geqslant 2$ a categoria dos N-complexos de cadeia, onde os objetos são pares (C, d) como na categoria anterior com a ressalva de que $d^N = 0$.

Um dos exemplos interessantes de uma estrutura algébrica que pode ser visto como uma categoria é o chamado grupo de tranças. Todas as notações, a prova da existência e as referências são citadas e feitas no Apêndice C. Aqui, apresentamos sua estrutura algébrica e sempre que for feita alguma observação geométrica, fazemos referência ao modelo construído nesse apêndice.

Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Definimos o grupo de n-tranças, denotado por $\mathbb{B}_n$, via relações sobre geradores como abaixo.

Definição 1.15 *O grupo $\mathbb{B}_n$ é o grupo gerado por $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ sujeitos às relações:*

(i) *Sempre que $3 \leq n$ e $1 \leq i, j \leq n-1$ com $|\, i-j \,| > 1$ temos*

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i.$$

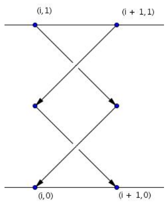
(ii) *Também é válido que*

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

para todo $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

É interessante observarmos que o grupo de tranças, de certa maneira, generaliza o grupo de permutações. Podemos definir o grupo de permutações de n elementos S_n via relações sobre geradores em que $\sigma_i = (i, i+1)$ são os geradores, as chamadas transposições, que satisfazem não somente as relações de trança (i) e (ii) mas também a condição $\sigma_i^2 = 1$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Isso não ocorre no grupo de tranças para $n > 1$ e, nesse sentido, o grupo de tranças é mais geral.

Também existe uma interpretação geométrica do que ocorre no produto σ_i^2. Seguindo a notação adotada no Apêndice C podemos representar σ_i^2 pelo diagrama



O que ocorre nesse produto é que ao invés de voltar para a configuração inicial como no caso das permutações, quando fazemos σ_i^2 obtemos uma trança no sentido comum da palavra, imaginando que os arcos poligonais são "cordas". Se continuarmos o processo e fizermos, por exemplo σ_i^3, obtemos mais uma volta, um "nó" entre as poligonais e assim sucessivamente. Seguindo esse raciocínio podemos concluir também que o grupo de n-tranças para $n > 1$ tem uma infinidade de elementos enquanto o grupo de permutações é finito.

Exemplo 1.16 Denotamos por $\mathbb{B}$ a categoria de tranças. Essa categoria tem como objetos os números naturais e dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que

$$Hom_{\mathbb{B}}(m,n) \quad = \quad \begin{cases} \emptyset, \text{ se } m \neq n \\ \mathbb{B}_n, \text{ se } m = n. \end{cases}$$

Para esse conjunto de morfismos definimos a composição como o produto do grupo. Para o caso em que $m = n$ segue, do fato de $\mathbb{B}_n$ ser grupo, que a composição de morfismos é associativa e existe um morfismo identidade 1_n. Para o caso $m \neq n$ o resultado segue por vacuidade.

Observamos que o exemplo acima poderia ter sido construído utilizando qualquer coleção de grupos indexada pelo conjunto dos naturais. Justificamos a utilização do grupo de tranças, pois durante o desenvolvimento do trabalho, foi dada uma atenção especial à construção desse grupo e foram apresentados seminários semanais que deram origem ao Apêndice C.

Definição 1.17 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{D}$ é uma categoria tal que todo objeto de $\mathcal{D}$ é objeto de $\mathcal{C}$ e, para quaisquer U e V em $Ob(\mathcal{C})$, os morfismos de U para V em $\mathcal{D}$ são morfismos de U para V em $\mathcal{C}$. A composição de morfismos em $\mathcal{D}$ é a mesma composição de morfismos que em $\mathcal{C}$.*

Definição 1.18 *Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{D}$ é uma subcategoria tal que $Hom_{\mathcal{D}}(U,V) = Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$ para quaisquer U e V em $Ob(\mathcal{D})$.*

Exemplo 1.19 A categoria Ab é uma subcategoria plena da categoria Grp e $vect_k$ é uma subcategoria plena da categoria $Vect_k$.

Exemplo 1.20 Consideremos a categoria $ring$ dos anéis com unidade, cujos morfismos são os morfismos de anéis que preservam a unidade. Essa é uma subcategoria de $Ring$ que não é plena. De fato, definimos o morfismo de anéis

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tal morfismo pertence a categoria $Ring$ mas não pertence à categoria $ring$ pois não preserva unidade.

Definição 1.21 *Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é pequena se a coleção dos seus objetos for um conjunto e se para qualquer par de objetos a coleção dos morfismos entre esses objetos também é um conjunto.*

Definição 1.22 *Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é localmente pequena se dados X e Y em $\mathcal{C}$ tivermos que $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é um conjunto.*

Para a maior parte dos resultados que vamos mostrar nesse trabalho, é suficiente que a categoria seja localmente pequena. Em detrimento disso, trabalhamos com essas categorias em todo o trabalho. Escrevemos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$ para designar qualquer morfismo de U para V e, por abuso de notação, escrevemos "$U \in Ob(\mathcal{C})$" para designar um objeto em $Ob(\mathcal{C})$, mesmo que a coleção dos objetos não seja um conjunto.

A seguir, apresentamos algumas contruções importantes utilizadas mais adiante.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Denotamos por $\mathcal{C}^{op}$ a categoria tal que $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$ e que para quaisquer $X, Y \in Ob(\mathcal{C}^{op})$, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

Assim, dados $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z)$, definimos a composição

$$g \circ^{op} f = f \circ g$$

que é associativa. De fato, sejam f e g como acima e $h \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Z,W)$. Então

$$\begin{aligned} h \circ^{op} (g \circ^{op} f) &= (g \circ^{op} f) \circ h \\ &= (f \circ g) \circ h \\ &= f \circ (g \circ h) \\ &= (g \circ h) \circ^{op} f \\ &= (h \circ^{op} g) \circ^{op} f. \end{aligned}$$

O morfismo identidade da categoria $\mathcal{C}$ é o morfismo identidade na categoria $\mathcal{C}^{op}$. A categoria $\mathcal{C}^{op}$ é chamada *categoria oposta* de $\mathcal{C}$.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Denotamos por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ a categoria cujos objetos são os pares (X,Y) com $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})$. Para cada par de objetos $(X,Y),(U,V) \in Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ temos

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),(U,V)) = (Hom_{\mathcal{C}}(X,U), Hom_{\mathcal{D}}(Y,V)).$$

Então é possível definir a seguinte operação:

$$(Hom_{\mathcal{C}}(X,U), Hom_{\mathcal{D}}(Y,V)) \times (Hom_{\mathcal{C}}(U,Z), Hom_{\mathcal{D}}(V,W))$$
$$((f,g),(r,s))$$

por $(f,g)\circ(r,s) = (r\circ f, s\circ g) \in (Hom_{\mathcal{C}}(X,Z), Hom_{\mathcal{D}}(Y,W))$. Tal operação é associativa. De fato,

$$\begin{aligned}
((f,g)\circ(r,s))\circ(u,v) &= (r\circ f, s\circ g)\circ(u,v)\\
&= (u\circ(r\circ f), v\circ(s\circ g))\\
&= ((u\circ r)\circ f, (v\circ s)\circ g)\\
&= (f,g)\circ(u\circ r, v\circ s)\\
&= (f,g)\circ((r,s)\circ(u,v)).
\end{aligned}$$

Dado um objeto (X,Y) o morfismo (I_X, I_Y) é o de morfismo identidade nessa categoria.

Essa construção nos permite obter novas categorias a partir de categorias já conhecidas.

1.2 Núcleos e conúcleos

Definição 1.23 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $Z \in Ob(\mathcal{C})$ chama-se objeto zero (ou objeto nulo) se para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ existem únicos morfismos $\phi_X : X \to Z$ e $\psi_X : Z \to X$, ou seja, $Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) = \{\phi_X\}$ e $Hom_{\mathcal{C}}(Z,X) = \{\psi_X\}$.*

Antes de enunciarmos a observação seguinte, recomendamos ao leitor que tome ciência da Definição 1.37, a qual encontra-se na próxima seção.

Proposição 1.24 *O objeto zero é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração: De fato, suponhamos que Z e W sejam objetos zeros. Então existem únicos $\phi_W : W \to Z$ e $\psi_W : Z \to W$ e portanto $\phi_W \circ \psi_W \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,Z) = \{I_Z\}$. Analogamente concluímos que $\psi_W \circ \phi_W = I_W$. Logo, $Z \simeq W$. ■

Exemplo 1.25 Na categoria *Grp*, o grupo trivial $\{e\}$ é um objeto zero.

Exemplo 1.26 A categoria *Set* não possui objeto zero. Suponhamos por absurdo que Z seja um objeto zero em *Set*. Se a cardinalidade de Z é maior ou igual do que 2, então dado o conjunto unitário $\{\emptyset\}$, podemos definir, pelo menos, duas funções distintas desse conjunto em Z e temos um absurdo. Se Z é unitário então, para qualquer conjunto com dois elementos, podemos tomar duas funções distintas de Z nesse conjunto e temos assim um absurdo. No caso em que $Z = \emptyset$ não temos função com contradomínio Z.

Definição 1.27 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero Z. Para quaisquer $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ definimos o morfismo nulo $0_Y^X : X \to Y$ como sendo o morfismo que comuta o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "0_Y^X"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & & Y \\
& Z. \arrow[ur, "\psi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Utilizamos sempre a notação acima para nos referirmos aos únicos morfismos em relação a um objeto zero considerado na categoria, sem mencionar tal objeto, ficando portanto implícito.

Proposição 1.28 *O morfismo nulo definido acima não depende do objeto zero da categoria.*

Demonstração: Consideremos dois objetos X e Y em $\mathcal{C}$. Sejam Z e Z' dois objetos zeros. Segue da observação acima que $Z \simeq Z'$ e denotamos por $\phi : Z \to Z'$ tal isomorfismo. Seja $0_Y^X : X \to Y$ morfismo nulo obtido em relação ao objeto zero Z, ou seja, $0_Y^X = \psi_Y \circ \phi_X$.

Verifiquemos que $0_Y^X = \psi_Y^{'} \circ \phi_X^{'}$ em que $\psi_Y^{'} : Z' \to Y$ e $\phi_X^{'} : X \to Z'$. De fato,

$$\begin{aligned}
\psi_Y \circ \phi_X &= \psi_Y^{'} \circ \phi \circ \phi_X \\
&= \psi_Y^{'} \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \phi_X^{'} \\
&= \psi_Y^{'} \circ \phi_X^{'}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.29 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero, $X, Y, Z, W \in Ob(\mathcal{C})$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Então $f \circ 0_Y^X = 0_Z^X$ e $0_W^Z \circ f = 0_W^Y$.*

Demonstração: Por definição temos que $f \circ 0_Y^X = f \circ \psi_Y \circ \phi_X$. Além disso, $\psi_Z = f \circ \psi_Y$. Portanto,

$$\begin{aligned}
f \circ 0_Y^X &= f \circ \psi_Y \circ \phi_X \\
&= \psi_Z \circ \phi_X \\
&= 0_Z^X.
\end{aligned}$$

De maneira análoga obtemos a outra igualdade. ■

Proposição 1.30 *Se X não é um objeto zero então $0_X^X \neq I_X$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $0_X^X = I_X$ e seja Y um objeto qualquer em $\mathcal{C}$. Mostremos que $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{0_Y^X\}$ e que $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X) = \{0_X^Y\}$. Seja $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Então

$$\begin{aligned} f &= f \circ I_X \\ &= f \circ 0_X^X \\ &= 0_Y^X, \end{aligned}$$

a última igualdade segue da proposição acima. Analogamente, vamos ter $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X) = \{0_X^Y\}$. Portanto, X é um objeto zero, o que contradiz a hipótese. Logo, $0_X^X \neq I_X$. ∎

Definição 1.31 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Um núcleo de f é um par $(Ker(f), k)$ em que $Ker(f) \in Ob(\mathcal{C})$ e $k : Ker(f) \to X$ é um morfismo tal que $f \circ k = 0_Y^{Ker(f)}$. Além disso, para qualquer outro par (K', k') com $k' : K' \to X$ tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, existe um único morfismo $u : K' \to Ker(f)$ tal que $k \circ u = k'$, i.e., o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[dr, "k'"] \arrow[drr, bend left, "0_Y^{K'}"] \arrow[dd, dotted, "u"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"] & Y \\
Ker(f). \arrow[ur, "k"] \arrow[urr, bend right, "0_Y^{Ker(f)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.32 *Se um morfismo admite núcleo, este é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Sejam (K, k) e (K', k') dois núcleos de f. Pela definição, existem únicos morfismos $u : K' \to K$ e $v : K \to K'$ tais que $k \circ u = k'$ e $k' \circ v = k$. Segue da unicidade que $u \circ v = I_K$ e $v \circ u = I_{K'}$. Portanto, $K \simeq K'$. ∎

Definição 1.33 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Um conúcleo de f é um par $(CoKer(f), q)$ em que $CoKer(f) \in Ob(\mathcal{C})$ e $q : Y \to CoKer(f)$ é um morfismo tal que $q \circ f = 0_{CoKer(f)}^X$. Além disso, para qualquer outro par (Q, q') com $q' : Y \to Q$ tal que $q' \circ f = 0_Q^X$, existe um único morfismo $u : CoKer(f) \to Q$ tal* *que $q' = u \circ q$, i.e., o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd}
Q & & \\
& X \arrow[ul, "0_Q^X"'] \arrow[dl, "0^X_{CoKer(f)}"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[ull, bend right, "q'"'] \arrow[dll, bend left, "q"] \\
CoKer(f). \arrow[uu, dotted, "u"] & &
\end{tikzcd}$$

Como acima, se um morfismo possui conúcleo, este é único salvo isomorfismo.

Exemplo 1.34 Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e sejam $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Então, um núcleo para o morfismo 0_Y^X é o par (X, I_X) e um conúcleo para 0_Y^X é o par (Y, I_Y).

De fato, é claro que $0_Y^X \circ I_X = 0_Y^X$ e dado qualquer outro par (K, ϕ) em que $\phi : K \to X$ e $0_Y^X \circ \phi = 0_Y^K$ então claramente ϕ comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "\phi"] \arrow[drr, bend left, "0_Y^K"] \arrow[dd, dotted, "\phi"'] & & \\
& X \arrow[r, "0_Y^X"] & Y \\
X \arrow[ur, "I_X"] \arrow[urr, bend right, "0_Y^X"'] & &
\end{tikzcd}$$

pois $I_X \circ \phi = \phi$ e ϕ é o único que o faz. Notemos que se $\psi : K \to X$ é tal que $I_X \circ \psi = \phi$ então, necessariamente, $\psi = \phi$.

Exemplo 1.35 Em categorias como por exemplo ${}_R\mathcal{M}$ a noção de núcleo e conúcleo algébrico satisfazem as condições das definições 1.31 e 1.33 respectivamente, ou seja, dado um morfismo de R-módulos $f : X \to Y$ o par $(Ker(f), i)$ em que $Ker(f) = \{m \in X : f(m) = 0\}$ e $i : Ker(f) \to X$ é a aplicação inclusão é um núcleo de f e o par $(Coker(f), \pi)$ em que $Coker(f) = Y/Im(f)$ e $\pi : Y \to Y/Im(f)$ é a projeção canônica é um conúcleo de f.

1.3 Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

Para essa seção, caso o leitor queira aprofundar, citamos como referência [9].

Definição 1.36 *Seja a categoria Set. Dada uma função f entre conjuntos X e Y. Dizemos que*
(i) *f é injetora, se existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = I_X$.*
(ii) *f é sobrejetora, se existe uma função $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = I_Y$.*

Estamos interessados em dar noções mais gerais, no contexto de categorias, que se aproximem da ideia de injetividade e sobrejetividade.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Definição 1.37 *f é dito um isomorfismo se existe $g : Y \to X$ morfismo tal que $f \circ g = I_Y$ e $g \circ f = I_X$. Os objetos X, Y são ditos isomorfos e denotamos por $X \simeq Y$, se existir um isomorfismo $f : X \to Y$.*

Definição 1.38 *f é dito um monomorfismo se para todo par de morfismos $g, h : Z \to X$ tais que $f \circ g = f \circ h$ então $g = h$.*

Definição 1.39 *f é dito um epimorfismo se para todo par de morfismos $g, h : Y \to Z$ tais que $g \circ f = h \circ f$ então $g = h$.*

Proposição 1.40 *Seja $(Ker(f), k)$ um núcleo para f. Então k é um monomorfismo.*

Demonstração: Sejam $g, h : U \to Ker(f)$ morfismos tais que $k \circ h = k \circ g$. Observemos que $f \circ (k \circ g) = 0_Y^{Ker(f)} \circ g = 0_Y^U$. Portanto, existe um único morfismo $u : U \to Ker(f)$ tal que $k \circ u = k \circ g = k \circ h$ e assim, $u = g = h$. ∎

Exemplo 1.41 Considere a categoria *Ring*. Então o morfismo inclusão $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ é um epimorfismo que não é sobrejetor.

De fato, sejam R um anel e $g, h : \mathbb{Q} \to R$ morfismos de anéis tais que $g \circ i = h \circ i$. Seja $z \in \mathbb{Z}$ não-nulo. Então

$$\begin{aligned} h(1) &= g(1) \\ &= g(\tfrac{z}{z}) \\ &= g(z)g(\tfrac{1}{z}) \\ &= h(z)g(\tfrac{1}{z}). \end{aligned}$$

Multiplicando a última igualdade por $h(\frac{1}{z})$ obtemos

$$\begin{aligned} h(\tfrac{1}{z}) &= h(\tfrac{1}{z})h(1) \\ &= h(\tfrac{1}{z})h(z)g(\tfrac{1}{z}) \\ &= h(1)g(\tfrac{1}{z}) \\ &= g(1)g(\tfrac{1}{z}) \\ &= g(\tfrac{1}{z}). \end{aligned}$$

Assim, dado $q \in \mathbb{Q}$ podemos escrever $q = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Daí $g(q) = g(\frac{a}{b}) = g(a)g(\frac{1}{b}) = h(a)h(\frac{1}{b}) = h(q)$ $\forall q \in \mathbb{Q}$. Logo, $g = h$.

Em ([9], Chapter X, p.481), há um exemplo onde é considerada a categoria de grupos abelianos divisíveis, no qual é exibido um monomorfismo que não é injetor.

Aqui, surgem questões naturais como, por exemplo, há alguma categoria em que as noções de monomorfismo e injetividade coincidem? A mesma pergunta para as noções de epimorfismo e sobrejetividade. A seguir, um exemplo de categoria onde as noções coincidem.

Proposição 1.42 *Seja R um anel. Um morfismo f em ${}_R\mathcal{M}$ é monomorfismo (respectivamente epimorfismo) se, e somente se, f é injetor (respectivamente sobrejetor).*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Consideremos $f : X \to Y$ um morfismo na categoria ${}_R\mathcal{M}$. Suponhamos f injetor e sejam $g, h : Z \to X$ morfismos de R-módulos tais que $f \circ g = f \circ h$. Temos que existe uma função $k : Y \to X$ tal que $k \circ f = I_X$. Assim, $k \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ h)$ o que implica $g = h$.

Suponhamos f sobrejetor e sejam $g, h : Y \to Z$ morfismos de R-módulos tais que $g \circ f = h \circ f$. Temos que existe uma função $k : Y \to X$ tal que $f \circ k = I_Y$ e portanto, $g = h$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que f não seja injetor, i.e. $Ker(f) \neq \{0\}$. Consideremos a inclusão $i : Ker(f) \to X$. Então $f \circ i : Ker(f) \to Y$ é um morfismo. Agora, consideremos o morfismo $h : Ker(f) \to X$ definido por $h(x) = 0$ para todo $x \in Ker(f)$. Observamos que $f \circ i = f \circ h$ e, no entanto, $i \neq h$, ou seja, f não é um monomorfismo.

Suponhamos agora que f não seja sobrejetor. Como $Im(f)$ é um R-submódulo de Y, podemos considerar o módulo quociente $Y/Im(f)$ que, nesse caso, é diferente do módulo nulo.

Usando a projeção canônica $\pi : Y \to Y/Im(f)$ definida por $\pi(y) = y + Im(f)$ e o morfismo $h : Y \to Y/Im(f)$ definido por $h(y) = 0 + Im(f)$ temos $\pi \circ f = h \circ f$. No entanto, $\pi \neq h$ e portanto, f não é um epimorfismo. ■

1.4 Produtos e coprodutos

A noção de produto pode ser vista como uma generalização do produto cartesiano de conjuntos. Esse é possivelmente um dos primeiros exemplos do uso de teoria de categorias para definir uma noção matemática, sendo que o termo "definir" aqui significa uma caracterização por meio de morfismos entre objetos.

Definição 1.43 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Um produto de X e Y é uma tripla (P, π_X, π_Y) tal que $P \in Ob(\mathcal{C})$, $\pi_X : P \to X$ e $\pi_Y : P \to Y$ são morfismos nessa categoria. Além disso, se existirem outro objeto Q e morfismos $q_X : Q \to X$ e $q_Y : Q \to Y$ em $\mathcal{C}$ então existe um único morfismo $\phi : Q \to P$ tal que $\pi_X \circ \phi = q_X$ e $\pi_Y \circ \phi = q_Y$.*

Essa definição pode ser visualizada através do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
Q \arrow[r, dotted, "\phi"] \arrow[urr, bend left, "q_X"] \arrow[drr, bend right, "q_Y"'] & P \arrow[ur, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
 & & Y.
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.44 *O produto de dois objetos X e Y em uma categoria $\mathcal{C}$, se existe, é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Sejam (P, π_X, π_Y) e (Q, q_X, q_Y) dois produtos de X e Y em $\mathcal{C}$. Como (P, π_X, π_Y) é produto, existe um único morfismo $\phi : Q \to P$ tal que $\pi_X \circ \phi = q_X$ e $\pi_Y \circ \phi = q_Y$.

Também, do fato de (Q, q_X, q_Y) ser produto, existe um único morfismo $\psi : P \to Q$ tal que $q_X \circ \psi = \pi_X$ e $q_Y \circ \psi = \pi_Y$. Notemos que $\psi \circ \phi : Q \to Q$ e $\phi \circ \psi : P \to P$ são morfismos tais que $q_X \circ (\psi \circ \phi) = \pi_X \circ \phi = q_X$, $q_Y \circ (\psi \circ \phi) = \pi_Y \circ \phi = q_Y$, $\pi_X \circ (\phi \circ \psi) = q_X \circ \psi = \pi_X$ e $\pi_Y \circ (\phi \circ \psi) = q_Y \circ \psi = \pi_Y$. Pela unicidade dos morfismos segue que $\psi \circ \phi = I_Q$ e $\phi \circ \psi = I_P$. ∎

Exemplo 1.45 O produto de dois conjuntos A e B na categoria *Set* é a tripla $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, ou seja, o produto cartesiano com as respectivas projeções canônicas. De fato, seja (D, P_A, P_B) outra tripla. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, bend right, "P_A"'] \arrow[d, dotted, "\phi"] \arrow[dr, bend left, "P_B"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B
\end{tikzcd}$$

em que definimos $\phi : D \to A \times B$ por $\phi(d) = (P_A(d), P_B(d))$ para todo $d \in D$. Nesse caso, a comutatividade do diagrama é clara e a unicidade de ϕ também.

Exemplo 1.46 Dados dois grupos G e H na categoria Grp, o produto desses objetos é a tripla $(G \times H, \pi_G, \pi_H)$ tal que $(G \times H, \cdot)$ é um grupo em que $G \times H$ é o produto cartesiano dos conjuntos e $\cdot$ é uma operação definida por $\cdot((g, h), (r, s)) = (gr, hs)$. As projeções são morfismos de grupo e a verificação é análoga ao exemplo anterior.

Definição 1.47 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Um coproduto de X e Y é uma tripla (Q, i_X, i_Y) tal que $Q \in Ob(\mathcal{C})$, $i_X : X \to Q$ e $i_Y : Y \to Q$ são morfismos nessa categoria. Além disso, se existirem outro objeto Q' e morfismos $j_X : X \to Q'$ e $j_Y : Y \to Q'$ em $\mathcal{C}$ então existe um único morfismo $\psi : Q \to Q'$ tal que $\psi \circ i_X = j_X$ e $\psi \circ i_Y = j_Y$.*

Podemos visualizar essa definição via o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, bend right, "j_X"'] \arrow[dl, bend left, "i_X"] \\
Q' & Q \arrow[l, dotted, "\psi"'] & \\
 & & Y. \arrow[ull, bend left, "j_Y"] \arrow[ul, bend right, "i_Y"']
\end{tikzcd}$$

Observação 1.48 O coproduto é único a menos de isomorfismo. A demonstração desse fato pode ser feita de maneira análoga ao caso do produto. Por outro lado, observamos que o coproduto de X e Y na categoria $\mathcal{C}$ é o produto de X e Y na categoria $\mathcal{C}^{op}$.

De fato, a propriedade universal implica na existência de um morfismo $\psi : Q \to Q'$, ou seja, $\psi \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Q', Q)$ tal que $\psi \circ i_X = j_X$ e $\psi \circ i_Y = j_Y$, i. e., $i_X \circ^{op} \psi = j_X$ e $i_Y \circ^{op} \psi = j_Y$. Podemos portanto dizer que a noção de coproduto é dual a noção de produto, no sentido categórico.

Exemplo 1.49 O coproduto na categoria Set de dois conjuntos A e B é a união disjunta destes com as respectivas inclusões.

De fato, denotamos por $A \sqcup B$ a união disjunta de A e B. Verifiquemos que a tripla $(A \sqcup B, i_A, i_B)$ é de fato o coproduto. Seja (Q, j_A, j_B) outra tripla. Definimos $\psi : A \sqcup B \to Q$ por $\psi(a) = j_A(a)$ se $a \in A$ e $\psi(b) = j_B(b)$ se $b \in B$. É imediato que $\psi \circ i_A = j_A$ e $\psi \circ i_B = j_B$ e claramente ψ é única.

Observação 1.50 Essas noções de produto e coproduto podem ser generalizadas. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de objetos em $\mathcal{C}$. Dizemos que $(X, \{\pi_i\}_{i \in I})$ é o produto da família $\{X_i\}_{i \in I}$ se $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $\{\pi_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ é uma família de morfismos nessa categoria tal que para qualquer outro objeto Y e família de morfismos $\{q_i\}_{i \in I}$ existe um único morfismo $f : Y \to X$ tal que $\pi_i \circ f = q_i$ para todo $i \in I$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ Y \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "q_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

para todo $i \in I$. De maneira dual, podemos definir o coproduto generalizado.

Exemplo 1.51 Consideremos a categoria ${}_R\mathcal{M}$. Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de R-módulos, então $\prod\limits_{i \in I} M_i$ o produto direto de módulos juntamente com as projeções $\{\pi_i\}_{i \in I}$ é o produto dessa categoria. Da mesma maneira, $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ a soma direta interna de módulos juntamente com as inclusões $\{i_j\}_{j \in I}$ é o coproduto nessa categoria.

Capítulo 2

Funtores

2.1 Funtores e transformações naturais

Nesse capítulo apresentamos as noções de funtores, transformações naturais e adjunções. Historicamente, o estudo de certas transformações naturais deu origem à noção de funtor que, por sua vez, deu origem à noção de categoria. As adjunções são um tipo específico de isomorfismo natural que estabelecem uma certa simetria que está presente em muitas estruturas matemáticas. Um resultado famoso apresentado nesse capítulo é o Lema de Yoneda.

Definição 2.1 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor (covariante) F consiste de duas aplicações:*

(i) *uma aplicação $F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ que associa a cada objeto X em $\mathcal{C}$ um objeto $F(X)$ em $\mathcal{D}$;*

(ii) *uma aplicação $F : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ que associa a cada morfismo $f : X \to Y$ em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ em $Hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ tal que se verificam as seguintes igualdades*

$$F(I_X) = I_{F(X)} \quad e \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

em que X é um objeto qualquer em $\mathcal{C}$ e f,g são morfismos em $\mathcal{C}$ (possíveis de se compor).

Observação 2.2 Um funtor F é chamado *contravariante* se inverte flechas, i.e., para todo morfismo $f : X \to Y$ temos $F(f) : F(Y) \to F(X)$ e $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Observação 2.3 Pensando em diagramas comutativos, a ideia de um funtor é levar diagramas comutativos uma categoria em diagramas comutativos de outra categoria. Sejam $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$, $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Então o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f \circ g"] \arrow[d, "g"] & Z \\ Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

é levado por um funtor F covariante (respectivamente contravariante) no diagrama à esquerda (respectivamente à direta)

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f \circ g)"] \arrow[d, "F(g)"] & F(Z) \\ F(Y) \arrow[ur, "F(f)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) & F(Z) \arrow[l, "F(f \circ g)"'] \arrow[dl, "F(f)"] \\ F(Y). \arrow[u, "F(g)"] & \end{tikzcd}$$

Observação 2.4 Dado um funtor contravariante F definimos um novo funtor $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ por $F^{op}(X) = F(X)$ e $F^{op}(f) = F(f)$ para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ e todo morfismo f em $\mathcal{C}$. Nesse caso, F^{op} é um funtor covariante, pois $F^{op}(g \circ^{op} f) = F^{op}(f \circ g) = F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) = F^{op}(g) \circ F^{op}(f)$.

Daqui por diante, utilizamos o termo funtor para designar funtores covariantes, caso nada seja dito ao contrário. Vejamos alguns exemplos de funtores.

Exemplo 2.5 Dado uma categoria $\mathcal{C}$, existe um funtor chamado funtor identidade $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido por $Id_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ e todo morfismo f em $\mathcal{C}$.

Exemplo 2.6 Seja $F : Grp \to Set$ tal que $F(G) = G$ e $F(f) = f$. Tal funtor é chamado funtor *esquecimento*, pois em Set é esquecida a estrutura de grupo dos objetos de Grp. Assim como os morfismos de grupos são considerados apenas como função entre conjuntos.

O funtor esquecimento aparece em várias outras categorias e é possível dar muitos exemplos similares ao exemplo acima.

Exemplo 2.7 Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena e $X \in Ob(\mathcal{C})$. Definimos funtores $F_X : \mathcal{C} \to Set$ e $G_X : \mathcal{C}^{op} \to Set$ tais que, para qualquer $Y \in Ob(\mathcal{C})$, definimos $F_X(Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $G_X(Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$ e se $f : Y \to Z$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, então

$$\begin{array}{rccl} F_X(f): & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & \alpha & \mapsto & F_X(f)(\alpha) = f \circ \alpha \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} G_X(f): & Hom_{\mathcal{C}}(Z,X) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \\ & \alpha & \mapsto & G_X(f)(\alpha) = \alpha \circ f \end{array}$$

são funtores. De fato,

$$\begin{aligned} F_X(Id_Y)(\alpha) &= Id_Y \circ \alpha \\ &= \alpha \\ &= Id_{F_X(Y)}(\alpha). \end{aligned}$$

Sejam $f : Y \to Z$ e $g : Z \to W$ morfismos em $\mathcal{C}$. Então

$$\begin{aligned} F_X(g \circ f)(\alpha) &= (g \circ f) \circ \alpha \\ &= g \circ (f \circ \alpha) \\ &= g \circ (F_X(f)(\alpha)) \\ &= F_X(g)(F_X(f)(\alpha)) \\ &= (F_X(g) \circ F_X(f))(\alpha). \end{aligned}$$

A verificação de que G_X é um funtor é análoga.

Na construção da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie existem alguns funtores que estão implícitos, como veremos nos próximos exemplos. Referimos aqui o Apêndice A.

Exemplo 2.8 Seja k um corpo. Consideremos a categoria Lie_k cujos objetos são álgebras de Lie sobre k e os morfismos são morfismos de álgebras de Lie.

O funtor $\mathfrak{U} : Lie_k \to Alg_k$ é definido como $\mathfrak{U}(L)$ a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie L.

Sejam $L, L' \in Ob(Lie_k)$ e $f : L \to L'$ um morfismo em Lie_k. Da definição da álgebra envolvente universal, segue que (uma vez que $\phi = \iota_{L'} \circ f$ é um morfismo em Lie_k) existe um único morfismo de k-álgebras $\psi : \mathfrak{U}(L) \to \mathfrak{U}(L')$ que induz um morfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathcal{L}(\mathfrak{U}(L)) \to \mathcal{L}(\mathfrak{U}(L'))$ que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{L}(\mathfrak{U}(L)) \arrow[d, "\psi"] \\ L' \arrow[r, "\iota_{L'}"'] & \mathcal{L}(\mathfrak{U}(L')), \end{tikzcd}$$

isto é, $\iota_{L'} \circ f = \psi \circ \iota_L$. Definimos $\mathfrak{U}(f) = \psi$.

A unicidade nos garante que no caso em que $L = L'$, $\mathfrak{U}(I_L) = I_{\mathfrak{U}(L)}$. Sejam $f : L \to L'$ e $g : L' \to L''$ morfismos de álgebras de Lie. Então $\mathfrak{U}(f) : \mathfrak{U}(L) \to \mathfrak{U}(L')$ e $\mathfrak{U}(g) : \mathfrak{U}(L') \to \mathfrak{U}(L'')$ são morfismos de k-álgebras tais que $\mathfrak{U}(f) \circ \iota_L = \iota_{L'} \circ f$ e $\mathfrak{U}(g) \circ \iota_{L'} = \iota_{L''} \circ g$.

Compondo f em ambos os lados da última igualdade, resulta que $\mathfrak{U}(g) \circ \iota_{L'} \circ f = \iota_{L''} \circ g \circ f$, ou seja, $\mathfrak{U}(g) \circ \mathfrak{U}(f) \circ \iota_L = \iota_{L''} \circ g \circ f$. Segue da unicidade que $\mathfrak{U}(g \circ f) = \mathfrak{U}(g) \circ \mathfrak{U}(f)$.

Exemplo 2.9 Seja $\mathcal{L} : Alg_k \to Lie_k$ o funtor que leva toda k-álgebra na álgebra de Lie cujo colchete de Lie é o comutador. Dado um morfismo de k-álgebras $f : A \to B$, este induz um morfismo de álgebra de Lie $\mathcal{L}(f) : \mathcal{L}(A) \to \mathcal{L}(B)$. Veja Exemplo A.3 do Apêndice A.

Esses dois últimos funtores estão, de certa forma, relacionados como veremos mais adiante.

Exemplo 2.10 Seja k um corpo. $Hopf_k$ é a categoria cujos objetos são álgebras de Hopf e cujos morfismos são homomorfismos de álgebras de Hopf.

Consideremos $\mathcal{P} : Hopf_k \to Lie_k$ o funtor que toma primitivos. Seja H uma álgebra de Hopf. Definimos

$$\mathcal{P}(H) = \{x \in H : \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}.$$

Segue do fato de que Δ é k-linear que $\mathcal{P}(H)$ é um k-espaço vetorial. Podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathcal{P}(H)$ considerando $[x, y] = xy - yx$ como colchete de Lie, para quaisquer $x, y \in \mathcal{P}(H)$. Todo morfismo de álgebras de Hopf $f : H \to W$ induz um morfismo de álgebras de Lie $f' : \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(W)$ fazendo $f'(x) = f(x)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta(f(x)) &\overset{(*)}{=} (f \otimes f)(\Delta(x)) \\
&= (f \otimes f)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&\overset{(**)}{=} f(x) \otimes 1 + 1 \otimes f(x) \in \mathcal{P}(W).
\end{aligned}$$

As igualdades (*) e (**) seguem do fato de f ser um morfismo de álgebras de Hopf (e portanto, de coálgebras e de álgebras). Naturalmente, do fato de f ser morfismo de álgebras segue que f' induzida é um morfismo de álgebras de Lie.

Um funtor conhecido da álgebra linear é aquele que toma o duplo dual de um espaço vetorial.

Exemplo 2.11 Chamamos de $D : Vect_k \to Vect_k$ o funtor definido por $D(V) = V^{**}$ para todo espaço vetorial V. Toda transformação linear $f : V \to W$ induz uma transformação linear chamada dupla transposta

$$\begin{array}{rccc} D(f): & V^{**} & \to & W^{**} \\ & T & \mapsto & T \circ f^* \end{array}$$

em que $f^* : W^* \to V^*$ é a aplicação transposta de f, definida por $f^*(g) = g \circ f$, para todo $g \in W^*$.

Nem sempre o que parece intuitivamente um funtor é de fato um funtor, o próximo exemplo mostra uma tentativa falha de criar um funtor.

Exemplo 2.12 Mostremos que não existe um funtor $F : Grp \to Ab$ tal que $F(G) = Z(G)$, em que $Z(G)$ é o centro do grupo G.

Consideremos os grupos de permutações S_2 e S_3. Sabemos que $Z(S_2) = S_2$ e que $Z(S_3) = \{e_{S_3}\}$. Sejam $f : S_2 \to S_3$ e $g : S_3 \to S_2$ morfismos de grupo. O morfismo f é definido por $e_{S_2} \mapsto e_{S_3}$, $(12) \mapsto (12)$ e g por $e_{S_3}, (123), (132) \mapsto e_{S_2}$, $(12), (23), (13) \mapsto (12)$. Nesse caso, $g \circ f = I_{S_2}$. Caso existisse um funtor F tal que $F(G) = Z(G)$, o mesmo deveria satisfazer $F(g \circ f) = F(I_{S_2}) = I_{F(S_2)} = I_{S_2}$.

Entretanto, $F(f) : S_2 \to \{e_{S_3}\}$ é o homomorfismo nulo. Assim, $F(g) \circ F(f) : S_2 \to S_2$ é o homomorfismo nulo. Logo, $F(g \circ f) \neq F(g) \circ F(f)$.

Definição 2.13 *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural $\mu : F \to G$ é uma coleção de morfismos $\{\mu_X : F(X) \to G(X) : X \in Ob(\mathcal{C})\}$ tal que para todo par de objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ e para cada morfismo $f : X \to Y$ o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y). \end{tikzcd}$$

Uma transformação natural $\mu : F \to G$ é dita um isomorfismo natural se, para todo objeto X, o morfismo $\mu_X : F(X) \to G(X)$ é um isomorfismo. Nesse caso, diremos que F é equivalente a G e denotamos isso por $F \sim G$.

Uma maneira de interpretar uma transformação natural é como uma coleção de morfismos que leva diagramas comutativos da “imagem de um funtor” em diagramas comutativos da “imagem de outro funtor”, ou seja, é como se a transformação natural transladasse os diagramas de um funtor para outro. Isso pode ser visto pelos diagramas a seguir, considerando $\mu : F \to G$ uma transformação natural, ou seja,

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
& Y \arrow[dl, "g"] \\
Z &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rrr, "\mu_X"] \arrow[dr, "F(f)"] \arrow[dd, "F(h)"'] & & & G(X) \arrow[dr, "G(f)"] \arrow[dd, "G(h)" near start] & \\
& F(Y) \arrow[rrr, dotted, "\mu_Y" near start] \arrow[dl, "F(g)"] & & & G(Y) \arrow[dl, "G(g)"] \\
F(Z) \arrow[rrr, "\mu_Z"] & & & G(Z) &
\end{tikzcd}
$$

em que X, Y e Z são objetos quaisquer em $\mathcal{C}$ e f, g e h são morfismos que comutam o diagrama à esquerda.

Exemplo 2.14 Consideremos os funtores $F : Ab \to Grp$ funtor esquecimento e $U : Grp \to Ab$ o funtor definido por $U(G) = G/[G, G]$, em que $[G, G]$ é o comutador do grupo G.

O funtor U está bem definido, pois $[G, G]$ goza da propriedade que $G/[G, G]$ é um grupo abeliano. Dado um morfismo de grupos $f : G \to H$ induzimos um morfismo de grupos abelianos como segue

$$
\begin{array}{rccc}
U(f): & G/[G,G] & \to & H/[H,H] \\
& g[G,G] & \mapsto & f(g)[H,H]
\end{array}
$$

o qual está bem definido. Além disso, temos $U(I_G) = I_{U(G)}$, para todo grupo G. Dados morfismos de grupos $f : G \to H$ e $h : H \to W$ temos que

$$
\begin{array}{rcl}
U(h \circ f)(g[G,G]) & = & (h \circ f)(g)[W,W] \\
& = & h(f(g))[W,W] \\
& = & U(h)(f(g)[H,H]) \\
& = & U(h)(U(f)(g[G,G])) \\
& = & (U(h) \circ U(f))(g[G,G]),
\end{array}
$$

para todo $g \in G$. Portanto, $U(h \circ f) = U(h) \circ U(f)$.

A coleção de morfismos projeção

$$P = \{P_G : G \to G/[G,G] : G \in Ob(Grp)\}$$

é uma transformação natural entre os funtores Id_{Grp} e $F \circ U$. De fato, sejam $G, H \in Ob(Grp)$ e $f : G \to H$ um morfismo em Grp. Então o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "P_G"] \arrow[d, "f"'] & G/[G,G] \arrow[d, "(F\circ U)(f)"] \\
H \arrow[r, "P_H"'] & H/[H,H],
\end{tikzcd}$$

pois

$$\begin{aligned}
(P_H \circ f)(g) &= P_H(f(g)) \\
&= f(g)[H,H] \\
&= U(f)(g[G,G]) \\
&= F(U(f))(g[G,G]) \\
&= (F \circ U)(f)(g[G,G]) \\
&= (F \circ U)(f)(P_G(g)) \\
&= ((F \circ U)(f) \circ P_G)(g),
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Logo, $P_H \circ f = (F \circ U)(f) \circ P_G$.

Definição 2.15 *Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$. Denotamos a equivalência entre categorias por $\mathcal{C} \sim \mathcal{D}$.*

Existe uma noção mais forte que é o isomorfismo entre categorias, como é dado pela definição a seguir.

Definição 2.16 *Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ditas isomorfas se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$. Denotamos o isomorfismo entre categorias por $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.*

Todo isomorfismo entre categorias é claramente uma equivalência entre categorias, no entanto, a recíproca não é verdadeira. Trabalhamos apenas com equivalência entre categorias, englobando os casos em que são isomorfismos. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.17 Esse exemplo pode ser encontrado em $([2], \text{p.}72-77)$. Dada uma coálgebra C, consideramos a categoria $Rat({}_{C^*}\mathcal{M})$ como aquela cujos objetos são os C^*-módulos à esquerda racionais, ou seja, C^*-módulos à esquerda cuja ação é dada por

$$c^* \cdot m = \sum_{i\in I} c^*(c_i)m_i,$$

para famílias finitas $(c_i)_{i\in I} \subseteq C$ e $(m_i)_{i\in I} \subseteq M$ (I é um conjunto finito), $\forall m \in M$ e $\forall c^* \in C^*$. Os morfismos em $Rat({}_{C^*}\mathcal{M})$ são morfismos de C^*-módulos à esquerda. Então as categorias $\mathcal{M}^c$ e $Rat(_{C^*}\mathcal{M})$ são isomorfas, em que $\mathcal{M}^c$ é a categoria dos C-comódulos à direita.

Exemplo 2.18 O funtor $D : Vect_k \to Vect_k$ do Exemplo 2.11 é equivalente ao funtor Id_{Vect_k}. De fato, para cada espaço vetorial V, definimos

$$\begin{array}{rcccccc} \mu_V : & V & \to & V^{**} & & & \\ & v & \mapsto & \mu_V(v) : & V^* & \to & k \\ & & & & f & \mapsto & f(v). \end{array}$$

Sabemos que μ_V é um isomorfismo de espaços vetoriais. Provemos que dados espaços vetoriais V, W e um morfismo $f : V \to W$, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mu_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "D(f)"] \\ W \arrow[r, "\mu_W"'] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

Sejam $v \in V$ e $g \in W^*$. Então

$$\begin{array}{rcl} ((D(f) \circ \mu_V)(v))(g) & = & (D(f)(\mu_V(v)))(g) \\ & = & (\mu_V(v) \circ f^*)(g) \\ & = & \mu_V(v)(f^*(g)) \\ & = & (\mu_V(v))(g \circ f) \\ & = & (g \circ f)(v) \\ & = & (\mu_W(f(v)))(g) \\ & = & ((\mu_W \circ f)(v))(g), \end{array}$$

em que $f^* : W^* \to V^*$ é a aplicação dual de f. Portanto, $D(f) \circ \mu_V = \mu_W \circ f$.

Definição 2.19 *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito*

(i) *Fiel, se para todo par de objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ a aplicação subjacente $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é injetora.*

(ii) *Pleno, se para todo par de objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ a aplicação subjacente $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é sobrejetora.*

(iii) *Denso, se para todo objeto $Z \in Ob(\mathcal{D})$ existir um objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ tal que $F(X) \simeq Z$.*

Teorema 2.20 *Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se, e somente se, existir um funtor pleno, fiel e denso $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Como $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$. Sejam $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Então

Afirmação 1: $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é injetora.

Primeiro observamos que para todo $h \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "h"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(h)"] \\ Y \arrow[r, "\mu_Y"'] & (G \circ F)(Y), \end{tikzcd}$$

pois $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to (G \circ F)$ é um isomorfismo natural. Sejam $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tais que $F(f) = F(g)$. Então $G(F(f)) = G(F(g))$ e isso implica que

$$(G \circ F)(f) \circ \mu_X = (G \circ F)(g) \circ \mu_X.$$

Pela comutatividade do diagrama anterior (fazendo $h = f$ e $h = g$),

$$\mu_Y \circ f = (G \circ F)(f) \circ \mu_X = (G \circ F)(g) \circ \mu_X = \mu_Y \circ g$$

e isso resulta que $f = g$, pois μ_Y é um isomorfismo. De maneira análoga, mostramos que G é fiel.

Afirmação 2: A aplicação $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ é sobrejetora.

Seja $g : F(X) \to F(Y)$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Mostremos que existe um morfismo $h : X \to Y$ tal que $F(h) = g$.

Consideramos $h = \mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_X : X \to Y$, segue que h é um morfismo em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Pela comutatividade do diagrama acima temos que

$$(G \circ F)(h) \circ \mu_X = \mu_Y \circ h, \forall h \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Em particular, para $h = \mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_X$, segue que

$$(G \circ F)(\mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_X) \circ \mu_X = \mu_Y \circ \mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_X = G(g) \circ \mu_X.$$

Logo, $G(F(\mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_X)) = (G \circ F)(\mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_X) = G(g)$ e como G é fiel, segue que $F(h) = F(\mu_Y^{-1} \circ G(g) \circ \mu_Y) = g$. Portanto, F é pleno.

Afirmação 3: F é denso.

De fato, seja $Z \in Ob(\mathcal{D})$. É claro que $G(Z) \in Ob(\mathcal{C})$. Por hipótese, existe um isomorfismo $\mu_Z : Z \to (F \circ G)(Z)$, ou seja, $F(G(Z)) \simeq Z$.

($\Leftarrow$) Sabemos que existe um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleno, fiel e denso. Mostremos que existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$.

Para cada objeto $Z \in Ob(\mathcal{D})$, existe um objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ tal que $F(X) \simeq Z$, pois F é denso.

Definimos $G(Z) = X$. Decorre disso que $\mu_Z : Z \to (F \circ G)(Z)$ e $\mu_W : W \to (F \circ G)(W)$ são isomorfismos, para quaisquer $Z, W \in Ob(\mathcal{D})$ (em que $F(Y) \simeq W$, para algum $Y \in Ob(\mathcal{C})$).

Seja $f \in Hom_{\mathcal{D}}(Z, W)$, precisamos definir $G(f)$. Como F é fiel e pleno, a aplicação

$$Hom_{\mathcal{C}}(G(Z), G(W)) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(G(Z)), F(G(W)))$$

é bijetora. Considerando o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\mu_Z"] \arrow[d, "f"'] & (F \circ G)(Z) \arrow[d, dotted] \\ W \arrow[r, "\mu_W"'] & (F \circ G)(W). \end{tikzcd}$$

O morfismo pontilhado pode ser definido como

$$\mu_W \circ f \circ \mu_Z^{-1} \in Hom_{\mathcal{D}}(F(G(Z)), F(G(W)))$$

e, pelo dito acima, existe um único $h \in Hom_{\mathcal{C}}(G(Z), G(W))$ tal que $F(h) = \mu_W \circ f \circ \mu_Z^{-1}$. Assim, definimos $G(f) = h$.

Verifiquemos que G é de fato um funtor. Mostremos que $G(I_Z) = I_{G(Z)}$ para todo objeto $Z \in Ob(\mathcal{D})$. Segundo o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\mu_Z"] \arrow[d, "I_Z"'] & (F \circ G)(Z) \arrow[d, dotted] \\ Z \arrow[r, "\mu_Z"'] & (F \circ G)(Z), \end{tikzcd}$$

o morfismo pontilhado pode ser definido por $\mu_Z \circ I_Z \circ \mu_Z^{-1} = I_{F(G(Z))}$ e sabendo que F é fiel e pleno, existe um único $\iota \in Hom_{\mathcal{C}}(G(Z), G(Z))$ tal que $F(\iota) = I_{F(G(Z))}$. Como F é funtor, segue que $F(I_{G(Z)}) = I_{F(G(Z))}$. Daí, $F(\iota) = F(I_{G(Z)})$ e assim, $\iota = I_{G(Z)}$, pois F é fiel. Por definição, $G(I_Z) = \iota = I_{G(Z)}$.

Agora, sejam $f : Z \to W$ e $g : W \to K$ morfismos em $\mathcal{D}$. Então sabemos que existem únicos h, h' em $Hom_{\mathcal{C}}(G(Z), G(W))$ e em $Hom_{\mathcal{C}}(G(W), G(K))$, respectivamente, tais que $F(h) = \mu_W \circ f \circ \mu_Z^{-1}$ e $F(h') = \mu_K \circ g \circ \mu_W^{-1}$. Portanto,

$$\begin{array}{rcl} F(h' \circ h) & = & F(h') \circ F(h) \\ & = & (\mu_K \circ g \circ \mu_W^{-1}) \circ (\mu_W \circ f \circ \mu_Z^{-1}) \\ & = & \mu_K \circ (g \circ f) \circ \mu_Z^{-1} \end{array}$$

e, por definição, $G(g \circ f) = h' \circ h = G(g) \circ G(f)$. Donde, G é um funtor.

Para finalizar, devemos provar que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$. Para mostrarmos que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$, notamos que $\forall\, Z \in Ob(\mathcal{D})$, $\mu_Z : Z \to (F \circ G)(Z)$ é um isomorfismo. Seja $f \in Hom_{\mathcal{D}}(Z, W)$. Resta-nos mostrar que o diagrama abaixo comuta para garantirmos que μ é um isomorfismo natural

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\mu_Z"] \arrow[d, "Id_{\mathcal{D}}(f)"'] & (F \circ G)(Z) \arrow[d, "(F \circ G)(f)"] \\ W \arrow[r, "\mu_W"'] & (F \circ G)(W). \end{tikzcd}$$

Pelo que desenvolvemos anteriormente, $(F \circ G)(f) = \mu_W \circ f \circ \mu_Z^{-1}$ e isso implica que $(F \circ G)(f) \circ \mu_Z = \mu_W \circ f$.

Mostremos agora que $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$. Seja $X \in Ob(\mathcal{C})$. Então $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$ e assim, existe $X' \in Ob(\mathcal{C})$ tal que $F(X') \simeq F(X)$ (F é denso).

Daí, $G(F(X)) = X'$ e portanto, $F(X) \simeq F(X') = F(G(F(X))) = (F \circ G)(F(X))$.

Logo, $\mu_{F(X)} : F(X) \to (F \circ G)(F(X))$ é um isomorfismo. Como F é pleno, existe um morfismo $\alpha_X : X \to (G \circ F)(X)$ tal que $F(\alpha_X) = \mu_{F(X)}$.

Mostremos que α_X é um isomorfismo. De fato, como $\mu_{F(X)}$ é isomorfismo, existe $\mu'_{F(X)} : (F \circ G)(F(X)) \to F(X)$ tal que $\mu_{F(X)} \circ \mu'_{F(X)} = I_{(F \circ G)(F(X))}$ e $\mu'_{F(X)} \circ \mu_{F(X)} = I_{F(X)}$. Novamente por ser F pleno, existe $\alpha'_X : (G \circ F)(X) \to X$ tal que $F(\alpha'_X) = \mu'_{F(X)}$. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} F(\alpha_X \circ \alpha'_X) & = & F(\alpha_X) \circ F(\alpha'_X) \\ & = & \mu_{F(X)} \circ \mu'_{F(X)} \\ & = & I_{(F \circ G)(F(X))} \\ & = & I_{F(G(F(X)))} \\ & = & F(I_{(G \circ F)(X)}) \end{array}$$

e isso implica que $\alpha_X \circ \alpha'_X = I_{(G\circ F)(X)}$, pois F é fiel. Analogamente, é possível mostrarmos que $\alpha'_X \circ \alpha_X = I_X$.

Finalmente, resta-nos mostrar que a coleção de morfismos

$$\alpha = \{\alpha_X : X \to (G \circ F)(X) : X \in Ob(\mathcal{C})\}$$

é um isomorfismo natural. Sejam $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Mostremos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "Id_{\mathcal{C}}(f)"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\ Y \arrow[r, "\alpha_Y"'] & (G \circ F)(Y). \end{tikzcd}$$

De fato, sabemos que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e isso implica que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_{F(X)}"] \arrow[d, "F(f)"'] & (F \circ G)(F(X)) \arrow[d, "(F\circ G)(F(f))"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_{F(Y)}"'] & (F \circ G)(F(Y)) \end{tikzcd}$$

comuta. Portanto, $\mu_{F(Y)} \circ F(f) = (F \circ G)(F(f)) \circ \mu_{F(X)}$ o que implica $F(\alpha_Y) \circ F(f) = (F \circ G)(F(f)) \circ F(\alpha_X)$ e assim,

$$F(\alpha_Y \circ f) = F((G \circ F)(f) \circ \alpha_X).$$

Como F é fiel, segue que $\alpha_Y \circ f = (G \circ F)(f) \circ \alpha_X$. $\blacksquare$

Proposição 2.21 *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ uma equivalência de categorias. Um morfismo $f : X \to Y$ é um monomorfismo em $\mathcal{C}$ (epimorfismo em $\mathcal{C}$) se, e somente se, $F(f)$ é um monomorfismo em $\mathcal{D}$ (epimorfismo em $\mathcal{D}$).*

Demonstração: Como F é uma equivalência, existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$. Mostremos o caso do monomorfismo, pois o do epimorfismo é análogo.

($\Rightarrow$) Suponhamos $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ um isomorfismo natural. Assim, para quaisquer $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ e qualquer morfismo $f : X \to Y$, μ_X e μ_Y são isomorfismos e vale a comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\ Y \arrow[r, "\mu_Y"'] & (G \circ F)(Y). \end{tikzcd}$$

Sejam $i, j : Z \to F(X)$ morfismos em $\mathcal{D}$ tais que $F(f) \circ i = F(f) \circ j$. Então $G(F(f) \circ i) = G(F(f) \circ j)$. Mas

$$\begin{array}{rcl}
G(F(f) \circ i) & = & (G \circ F)(f) \circ G(i) \\
& = & ((G \circ F)(f) \circ \mu_X) \circ \mu_X^{-1} \circ G(i) \\
& = & \mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \circ G(i).
\end{array}$$

De maneira inteiramente análoga, segue que $G(F(f) \circ j) = \mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \circ G(j)$. Logo,

$$\mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \circ G(i) = \mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \circ G(j),$$

o que implica, $f \circ \mu_X^{-1} \circ G(i) = f \circ \mu_X^{-1} \circ G(j)$ e como f é monomorfismo, segue que $\mu_X^{-1} \circ G(i) = \mu_X^{-1} \circ G(j)$. Portanto, $G(i) = G(j)$. Como G é fiel, pois temos uma equivalência entre categorias, segue que $i = j$. Logo, $F(f)$ é um monomorfismo.

($\Leftarrow$) Sejam $g, h : W \to X$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Então $F(f \circ g) = F(f \circ h)$. Portanto, $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$ e sendo $F(f)$ um monomorfismo, $F(g) = F(h)$. Como F é fiel, pois temos uma equivalência entre categorias, segue que $g = h$. Logo, f é um monomorfismo. $\blacksquare$

Definimos agora dois tipos de composição entre transformações naturais.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $\mu : F \to G$ e $\lambda : G \to H$ transformações naturais. A transformação natural $\lambda \circ \mu : F \to H$ dada por $(\lambda \circ \mu)_X = \lambda_X \circ \mu_X$ para todo objeto X em $\mathcal{C}$ é chamada *composição vertical* das transformações naturais μ e λ. Tal composição pode ser visualizada como

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F", ""{name=U, below}] \arrow[r, "G" description, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=60, "H"', ""{name=L, above}] & \mathcal{D}
\arrow[from=U, to=M, "\mu"] \arrow[from=M, to=L, "\lambda"]
\end{tikzcd}.$$

Verifiquemos que essa composição é uma transformação natural. Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Mostremos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\lambda_X \circ \mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\lambda_Y \circ \mu_Y"'] & H(Y).
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{array}{rcl}
(\lambda \circ \mu)_Y \circ F(f) & = & \lambda_Y \circ \mu_Y \circ F(f) \\
& \stackrel{(*)}{=} & \lambda_Y \circ G(f) \circ \mu_X \\
& \stackrel{(**)}{=} & H(f) \circ \lambda_X \circ \mu_X \\
& = & H(f) \circ (\lambda \circ \mu)_X,
\end{array}$$

em (*) e em (**) utilizamos as naturalidades de μ e λ, respectivamente.

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $J, H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores e $\mu : F \to G$ e $\lambda : J \to H$ transformações naturais. A *composição horizontal* $\lambda \circ \mu : J \circ F \to H \circ G$ é definida por $(\lambda \circ \mu)_X = \lambda_{G(X)} \circ J(\mu_X)$ para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$.

Tal composição pode ser visualizada como

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, shift left=3, "F"] \arrow[r, shift right=3, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu"] & \mathcal{D} \arrow[r, shift left=3, "J"] \arrow[r, shift right=3, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \lambda"] & \mathcal{E}.
\end{tikzcd}$$

Mostremos que essa composição é uma transformação natural. Seja $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Então o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
(J \circ F)(X) \arrow[r, "(\lambda \circ \mu)_X"] \arrow[d, "(J \circ F)(f)"'] & (H \circ G)(X) \arrow[d, "(H \circ G)(f)"] \\
(J \circ F)(Y) \arrow[r, "(\lambda \circ \mu)_Y"'] & (H \circ G)(Y)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, consideremos os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} (J\circ G)(X) \arrow[r, "\lambda_{G(X)}"] \arrow[d, "(J\circ G)(f)"'] & (H\circ G)(X) \arrow[d, "(H\circ G)(f)"] \\ (J\circ G)(Y) \arrow[r, "\lambda_{G(Y)}"'] & (H\circ G)(Y). \end{tikzcd}$$

Temos que $G(f) \circ \mu_X = \mu_Y \circ F(f)$ e isso implica $J(G(f) \circ \mu_X) = J(\mu_Y \circ F(f))$, ou seja, $J(G(f)) \circ J(\mu_X) = J(\mu_Y) \circ J(F(f))$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} (\lambda \circ \mu)_Y \circ (J \circ F)(f) & = & \lambda_{G(Y)} \circ J(\mu_Y) \circ J(F(f)) \\ & = & \lambda_{G(Y)} \circ J(G(f)) \circ J(\mu_X) \\ & \overset{(*)}{=} & H(G(f)) \circ \lambda_{G(X)} \circ J(\mu_X) \\ & = & (H \circ G)(f) \circ (\lambda \circ \mu)_X. \end{array}$$

A igualdade (*) segue da comutatividade do segundo diagrama. Agora, consideremos mais um exemplo de categoria.

Exemplo 2.22 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias pequenas. Denotamos por $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a categoria cujos objetos são funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Dados funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, chamamos $Nat(F, G)$ o conjunto das transformações naturais $\mu : F \to G$.

Provamos agora um dos importantes resultados da teoria de categorias, o Lema de Yoneda.

Seja X um objeto fixo em $\mathcal{C}$. Definimos o funtor $L_X : \mathcal{C} \to Set$ por $L_X(Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\forall\, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Além disso, para cada morfismo $\alpha : Y \to Z$ definimos $L_X(\alpha)(f) = \alpha \circ f$, para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Dizemos que o funtor L_X é representado pelo objeto X. Um funtor diz-se *representável* se o mesmo é equivalente a um funtor representado por algum objeto.

Lema 2.23 (Lema de Yoneda) Sejam $F : \mathcal{C} \to Set$ um funtor e $X \in Ob(\mathcal{C})$. Então o conjunto das transformações naturais $Nat(L_X, F)$ está em bijeção com o conjunto $F(X)$ pela função

$$\begin{array}{rccl} \phi : & Nat(L_X, F) & \to & F(X) \\ & \mu & \mapsto & \mu_X(I_X). \end{array}$$

Demonstração: Sejam $\mu \in Nat(L_X, F)$, $Y \in Ob(\mathcal{C})$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Então o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L_X(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "L_X(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ L_X(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

ou seja, $\mu_Y \circ L_X(f) = F(f) \circ \mu_X$. Observamos que $L_X(f)(I_X) = f \circ I_X = f$ e portanto,

$$\begin{aligned} \mu_Y(f) &= \mu_Y(L_X(f)(I_X)) \\ &= (\mu_Y \circ L_X(f))(I_X) \\ &= (F(f) \circ \mu_X)(I_X). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definimos

$$\begin{array}{rccl} \psi : & F(X) & \to & Nat(L_X, F) \\ & x & \mapsto & \psi(x) : L_X \to F \end{array}$$

tal que para cada $Y \in Ob(\mathcal{C})$ e cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

$$(\psi(x))_Y : L_X(Y) \to F(Y)$$

é definida por $(\psi(x))_Y(f) = F(f)(x)$. Mostremos que ψ é a função inversa de ϕ.

É necessário provarmos primeiramente que, para cada $x \in F(X)$, $\psi(x) : L_X \to F$ é uma transformação natural. Sejam $Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ e $f : Y \to Z$ um morfismo. Vejamos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L_X(Y) \arrow[r, "(\psi(x))_Y"] \arrow[d, "L_X(f)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] \\ L_X(Z) \arrow[r, "(\psi(x))_Z"'] & F(Z). \end{tikzcd}$$

Seja $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Então

$$\begin{aligned} (F(f) \circ (\psi(x))_Y)(g) &= F(f)((\psi(x))_Y(g)) \\ &= F(f)(F(g)(x)) \\ &= (F(f) \circ F(g))(x) \\ &= F(f \circ g)(x) \\ &= (\psi(x))_Z(f \circ g) \\ &= (\psi(x))_Z(L_X(f)(g)) \\ &= ((\psi(x))_Z \circ L_X(f))(g). \end{aligned}$$

Finalmente, verifiquemos que $\psi\circ\phi = I_{Nat(L_X,F)}$. Seja $\mu \in Nat(L_X, F)$. Então, para todo $f : X \to Y$, temos

$$\begin{array}{rcl} (\psi \circ \phi)(\mu) & = & \psi(\phi(\mu)) \\ & = & \psi(\mu_X(I_X)) \end{array}$$

e assim,

$$\begin{array}{rcl} ((\psi \circ \phi)(\mu))_Y(f) & = & (\psi(\mu_X(I_X)))_Y(f) \\ & = & F(f)(\mu_X(I_X)) \\ & = & (F(f) \circ \mu_X)(I_X) \\ & \overset{(2.1)}{=} & \mu_Y(f) \\ & = & (I_{Nat(L_X,F)}(\mu))_Y(f). \end{array}$$

Como f é arbitrário, segue que $((\psi \circ \phi)(\mu))_Y = (I_{Nat(L_X,F)}(\mu))_Y$ para todo objeto Y e isso implica que as transformações naturais são iguais, i.e., $(\psi \circ \phi)(\mu) = I_{Nat(L_X,F)}(\mu)$. Por outro lado, para todo $x \in F(X)$

$$\begin{array}{rcl} (\phi \circ \psi)(x) & = & \phi(\psi(x)) \\ & = & (\psi(x))_X(I_X) \\ & = & F(I_X)(x) \\ & = & I_{F(X)}(x). \end{array}$$

■

Proposição 2.24 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X, Y objetos em $\mathcal{C}$. Então $L_X \sim L_Y$ se, e somente se, $X \simeq Y$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $\mu : L_X \to L_Y$ um isomorfismo natural. Consideremos o morfismo $\mu_X(I_X) : Y \to X$. Do fato de $\mu_Y : L_X(Y) \to L_Y(Y)$ ser isomorfismo, segue que existe um morfismo $f : X \to Y$ tal que $\mu_Y(f) = I_Y$. Pela naturalidade de μ, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L_X(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "L_X(f)"'] & L_Y(X) \arrow[d, "L_Y(f)"] \\ L_X(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & L_Y(Y). \end{tikzcd}$$

Temos que $(L_Y(f) \circ \mu_X)(I_X) = L_Y(f)(\mu_X(I_X)) = f \circ \mu_X(I_X)$. Daí, pela comutatividade do diagrama, segue que

$$\begin{aligned}
f \circ \mu_X(I_X) &= (L_Y(f) \circ \mu_X)(I_X)\\
&= (\mu_Y \circ L_X(f))(I_X)\\
&= \mu_Y(L_X(f)(I_X))\\
&= \mu_Y(f)\\
&= I_Y.
\end{aligned}$$

Analogamente, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
L_X(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[d, "L_X(\mu_X(I_X))"'] & L_Y(Y) \arrow[d, "L_Y(\mu_X(I_X))"] \\
L_X(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & L_Y(X).
\end{tikzcd}$$

Comutando esse diagrama, para $f \in L_X(Y)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\mu_X(I_X) \circ f &= L_X(\mu_X(I_X))(f)\\
&= \mu_X^{-1} \circ (\mu_X \circ L_X(\mu_X(I_X)))(f)\\
&= \mu_X^{-1} \circ (L_Y(\mu_X(I_X)) \circ \mu_Y)(f)\\
&= \mu_X^{-1} \circ (\mu_X(I_X) \circ \mu_Y(f))\\
&= \mu_X^{-1} \circ (\mu_X(I_X) \circ I_Y)\\
&= I_X.
\end{aligned}$$

Logo, f é um isomorfismo e portanto, $X \simeq Y$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que exista um isomorfismo $f : Y \to X$. Definimos $\mu : L_X \to L_Y$ fazendo, para cada $Z \in Ob(\mathcal{C})$,

$$\begin{array}{rccc}
\mu_Z : & L_X(Z) & \to & L_Y(Z)\\
& g & \mapsto & g \circ f.
\end{array}$$

O fato de que, para todo $Z \in Ob(\mathcal{C})$, μ_Z é isomorfismo é imediato, visto que f é um isomorfismo. Verifiquemos que μ é uma transformação natural. Para isso, mostremos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
L_X(Z) \arrow[r, "\mu_Z"] \arrow[d, "L_X(g)"'] & L_Y(Z) \arrow[d, "L_Y(g)"] \\
L_X(W) \arrow[r, "\mu_W"'] & L_Y(W),
\end{tikzcd}$$

para quaisquer objetos Z e W e morfismo $g : Z \to W$. Seja $\alpha : X \to Z$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Então

$$\begin{array}{rcl} (\mu_W \circ L_X(g))(\alpha) & = & \mu_W(g \circ \alpha) \\ & = & (g \circ \alpha) \circ f \\ & = & g \circ (\alpha \circ f) \\ & = & L_Y(g)((\alpha \circ f)) \\ & = & L_Y(g)(\mu_Z(\alpha)) \\ & = & (L_Y(g) \circ \mu_Z)(\alpha). \end{array}$$

$\blacksquare$

Proposição 2.25 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. O coproduto de X e Y existe se, e somente se, o funtor $F : \mathcal{C} \to Set$ definido por $F(Z) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ para todo $Z \in Ob(\mathcal{C})$ é representável.*

Demonstração: Observamos que, dado um morfismo $f : Z \to W$ em $\mathcal{C}$, temos

$$\begin{array}{rccc} F(f): & Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X, W) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, W) \\ & (g, h) & \mapsto & (f \circ g, f \circ h). \end{array}$$

($\Rightarrow$) Por hipótese, existe o coproduto de X e Y, que denotamos pela tripla $(X \sqcup Y, i_X, i_Y)$. Afirmamos que o funtor F é equivalente ao funtor $L_{X \sqcup Y}$. Para isso, definimos $\mu : L_{X \sqcup Y} \to F$ tal que, para cada $A \in Ob(\mathcal{C})$,

$$\begin{array}{rccc} \mu_A: & Hom_{\mathcal{C}}(X \sqcup Y, A) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X, A) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, A) \\ & \phi & \mapsto & (\phi \circ i_X, \phi \circ i_Y). \end{array}$$

Seja $(g, h) \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, A)$. Nesse caso,

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, bend right, "g"'] \arrow[dl, "i_X"] \\
A & X \sqcup Y \arrow[l, dotted, "\alpha"'] & \\
 & & Y \arrow[ull, bend left, "h"] \arrow[ul, "i_Y"']
\end{tikzcd}$$

existe um único morfismo $\alpha : X \sqcup Y \to A$ tal que $g = \alpha \circ i_X$ e $h = \alpha \circ i_Y$. Assim, $\mu_A(\alpha) = (\alpha \circ i_X, \alpha \circ i_Y) = (g, h)$, ou seja, μ_A é sobrejetora.

Sejam agora $\alpha_1, \alpha_2 : X \sqcup Y \to A$ tais que $\mu_A(\alpha_1) = \mu_A(\alpha_2)$, ou seja, $\alpha_1 \circ i_X = \alpha_2 \circ i_X$ e $\alpha_1 \circ i_Y = \alpha_2 \circ i_Y$ e segue da unicidade que $\alpha_1 = \alpha_2$. Portanto, μ_A é injetora.

Falta verificarmos a naturalidade de μ. Provemos que o seguinte diagrama comuta para um morfismo $\alpha : A \to B$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(X \sqcup Y, A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "L_{X \sqcup Y}(\alpha)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, A) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, A) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(X \sqcup Y, B) \arrow[r, "\mu_B"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, B).
\end{tikzcd}$$

De fato, dado $f : X \sqcup Y \to A$, temos

$$\begin{aligned}
(F(\alpha) \circ \mu_A)(f) &= F(\alpha)(\mu_A(f)) \\
&= F(\alpha)(f \circ i_X, f \circ i_Y) \\
&= (\alpha \circ (f \circ i_X), \alpha \circ (f \circ i_Y)) \\
&= ((\alpha \circ f) \circ i_X, (\alpha \circ f) \circ i_Y) \\
&= \mu_B(\alpha \circ f) \\
&= \mu_B(L_{X \sqcup Y}(\alpha)(f)) \\
&= (\mu_B \circ L_{X \sqcup Y}(\alpha))(f).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Por hipótese, $F : \mathcal{C} \to Set$ é representável e daí, existe $C \in Ob(\mathcal{C})$ tal que $F \sim L_C$ através do isomorfismo natural $\mu : F \to L_C$. Particularmente, μ_C é um isomorfismo, então existe $(i_X, i_Y) \in Hom_{\mathcal{C}}(X, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, C)$ tal que $\mu_C(i_X, i_Y) = I_C$.

Afirmação: A tripla (C, i_X, i_Y) é um coproduto de X e Y. De fato, seja (D, j_X, j_Y) outra tripla com $j_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, D)$ e $j_Y \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, D)$. Como μ_D é um isomorfismo, existe um único $\phi \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ tal que $\mu_D(j_X, j_Y) = \phi$.

Agora, utilizamos a naturalidade de μ com o morfismo ϕ e o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(X, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(C, C) \arrow[d, "L_C(\phi)"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(X, D) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, D) \arrow[r, "\mu_D"'] & Hom_{\mathcal{C}}(C, D).
\end{tikzcd}$$

Observamos que $L_C(\phi)(I_C) = \phi \circ I_C = \phi$. Daí,

$$\begin{array}{rcl}\phi & = & L_C(\phi)(I_C) \\ & = & L_C(\phi)(\mu_C(i_X, i_Y)) \\ & = & (L_C(\phi) \circ \mu_C)(i_X, i_Y) \\ & = & (\mu_D \circ F(\phi))(i_X, i_Y) \\ & = & \mu_D(F(\phi)(i_X, i_Y)) \\ & = & \mu_D(\phi \circ i_X, \phi \circ i_Y).\end{array}$$

Portanto, $(j_X, j_Y) = \mu_D^{-1} \circ \phi = (\phi \circ i_X, \phi \circ i_Y)$. Assim, $\phi \circ i_X = j_X$ e $\phi \circ i_Y = j_Y$. ∎

2.2 Funtores adjuntos

Definição 2.26 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Uma adjunção de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é uma tripla (F, G, ϕ), em que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ são funtores e $\{\phi_{X,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) : X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})\}$ é uma família de isomorfismos naturais.*

Na definição acima, estamos considerando os funtores

$$Hom_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}}) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{D} \to Set$$

e

$$Hom_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to Set,$$

tais que, para cada morfismo $(f, g) \in (Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, U), Hom_{\mathcal{D}}(Y, V))$ (ou $(f, g) \in (Hom_{\mathcal{C}}(U, X), Hom_{\mathcal{D}}(Y, V))$), temos

$$(Hom_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}}))(f, g) = Hom_{\mathcal{D}}(F(f), g),$$

em que

$$\begin{array}{rccc} Hom_{\mathcal{D}}(F(f), g) : & Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & \to & Hom_{\mathcal{D}}(F(U), V) \\ & \alpha & \mapsto & g \circ \alpha \circ F(f) \end{array}$$

e

$$(Hom_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G))(f, g) = Hom_{\mathcal{C}}(f, G(g)),$$

em que

$$\begin{array}{rccc} Hom_{\mathcal{C}}(f, G(g)) : & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(U, G(V)) \\ & \beta & \mapsto & G(g) \circ \beta \circ f. \end{array}$$

Finalmente,

$$\phi : Hom_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}}) \to Hom_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G)$$

é um isomorfismo natural e sua naturalidade é expressa pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(f),g)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(f,G(g))"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(F(U),V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(U,G(V)).
\end{tikzcd}$$

Na tripla (F, G, ϕ) o funtor F é chamado de adjunto à esquerda de G e o funtor G é chamado de adjunto à direita de F.

Observação 2.27 O termo adjunção se deve a simetria dos símbolos no isomorfismo, pois para objetos $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})$ temos o isomorfismo $Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ que é comparável à definição de operadores adjuntos em um espaço de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, se $T : H \to H$ e $L : H \to H$ são operadores adjuntos então vale a igualdade $\langle T(x), y\rangle = \langle x, L(y)\rangle$ para quaisquer $x, y \in H$.

Teorema 2.28 ([1], Proposition 9.4, 9.5) Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) (F, G, ϕ) é uma adjunção.

(ii) Existem transformações naturais $e : F \circ G \to Id_{\mathcal{D}}$ e $c : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ tais que, para quaisquer $Y \in Ob(\mathcal{D})$ e $X \in Ob(\mathcal{C})$, valem as igualdades:

$$I_{G(Y)} = G(e_Y) \circ c_{G(Y)} \tag{2.2}$$

e

$$I_{F(X)} = e_{F(X)} \circ F(c_X). \tag{2.3}$$

(iii) Existe uma transformação natural $c : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ com a propriedade que, para quaisquer $X \in Ob(\mathcal{C})$, $Y \in Ob(\mathcal{D})$ e qualquer morfismo $f : X \to G(Y)$ em $\mathcal{C}$ existe um único morfismo $g : F(X) \to Y$ em $\mathcal{D}$ tal que $f = G(g) \circ c_X$, ou seja, temos o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "c_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(g)"] & F(X) \arrow[d, dotted, "g"] \\
 & G(Y) & Y.
\end{tikzcd}$$

(iv) Existe uma transformação natural $e : F \circ G \to Id_{\mathcal{D}}$ com a propriedade que, para quaisquer $X \in Ob(\mathcal{C})$, $Y \in Ob(\mathcal{D})$ e qualquer morfismo $g : F(X) \to Y$ em $\mathcal{D}$ existe um único morfismo $f : X \to G(Y)$ em $\mathcal{C}$ tal que $g = e_Y \circ F(f)$. Tal propriedade é representada pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "F(f)"] & & X \arrow[d, dotted, "f"] \\ Y & F(G(Y)) \arrow[l, "e_Y"] & & G(Y). \end{tikzcd}$$

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sejam $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})$, definimos $e_Y = \phi^{-1}_{G(Y),Y}(I_{G(Y)})$ e $c_X = \phi_{X,F(X)}(I_{F(X)})$. Consideremos $g : F(X) \to Y$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Da naturalidade de ϕ obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\phi_{X,F(X)}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(I_X),g)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(F(X))) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(I_X,G(g))"] \\ Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)). \end{tikzcd}$$

Temos que

$$(Hom_{\mathcal{C}}(I_X, G(g)) \circ \phi_{X,F(X)})(I_{F(X)}) = (\phi_{X,Y} \circ Hom_{\mathcal{D}}(F(I_X), g))(I_{F(X)})$$

que é equivalente a

$$Hom_{\mathcal{C}}(I_X, G(g))(\phi_{X,F(X)}(I_{F(X)})) = \phi_{X,Y}(g \circ I_{F(X)} \circ F(I_X)),$$

ou seja,

$$G(g) \circ \phi_{X,F(X)}(I_{F(X)}) = \phi_{X,Y}(g).$$

Fazendo $g = e_Y$ segue, da última igualdade, que $G(e_Y) \circ c_X = \phi_{X,Y}(e_Y)$ e para $X = G(Y)$, $G(e_Y) \circ c_{G(Y)} = \phi_{G(Y),Y}(e_Y) = I_{G(Y)}$, isto é, $G(e_Y) \circ c_{G(Y)} = I_{G(Y)}$. A outra igualdade é obtida de maneira similar.

Finalmente, provemos que c é uma transformação natural. Sejam $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ e $f : X \to Y$. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "c_X"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\
Y \arrow[r, "c_Y"'] & (G \circ F)(Y).
\end{tikzcd}$$

Para provarmos a comutatividade do diagrama acima, utilizamos a naturalidade de ϕ que comuta os seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\phi_{X,F(X)}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(I_X), F(f))"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(F(X))) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(I_X, G(F(f)))"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \arrow[r, "\phi_{X,F(Y)}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(F(Y)))
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(F(Y), F(Y)) \arrow[r, "\phi_{Y,F(Y)}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(f), F(I_Y))"'] & Hom_{\mathcal{C}}(Y, G(F(Y))) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(f, G(F(I_Y)))"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \arrow[r, "\phi_{X,F(Y)}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(F(Y))).
\end{tikzcd}$$

Do primeiro diagrama vem que

$$(Hom_{\mathcal{C}}(I_X, G(F(f))) \circ \phi_{X,F(X)})(I_{F(X)}) = (\phi_{X,F(Y)} \circ Hom_{\mathcal{D}}(F(I_X), F(f)))(I_{F(X)}$$

ou seja,

$$G(F(f)) \circ \phi_{X,F(X)}(I_{F(X)}) \circ I_X = \phi_{X,F(Y)} \circ (F(f) \circ I_{F(X)} \circ F(I_X))$$

que é

$$G(F(f)) \circ \phi_{X,F(X)}(I_{F(X)}) = \phi_{X,F(Y)} \circ F(f).$$

Do segundo diagrama temos

$$(Hom_{\mathcal{C}}(f, G(F(I_Y))) \circ \phi_{Y,F(Y)})(I_{F(Y)}) = (\phi_{X,F(Y)} \circ Hom_{\mathcal{D}}(F(f), F(I_Y)))(I_{F(Y)}),$$

ou seja,

$$G(I_{F(Y)}) \circ \phi_{Y,F(Y)}(I_{F(Y)}) \circ f = \phi_{X,F(Y)} \circ (F(I_Y) \circ I_{F(Y)} \circ F(f))$$

que é
$$\phi_{Y,F(Y)}(I_{F(Y)}) \circ f = \phi_{X,F(Y)} \circ F(f).$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl} (G \circ F)(f) \circ c_X & = & (G \circ F)(f) \circ \phi_{X,F(X)}(I_{F(X)}) \\ & = & \phi_{X,F(Y)}(F(f)) \\ & = & \phi_{Y,F(Y)}(I_{F(Y)}) \circ f \\ & = & c_Y \circ f. \end{array}$$

A naturalidade de e se mostra de maneira similar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Para quaisquer $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})$ definimos as aplicações:

$$\begin{array}{rccc} \phi_{X,Y}: & Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ & \alpha & \mapsto & G(\alpha) \circ c_X \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \psi_{X,Y}: & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) & \to & Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \\ & \beta & \mapsto & e_Y \circ F(\beta). \end{array}$$

Mostremos que ϕ é transformação natural em ambas variáveis. Sejam $f: U \to X$ e $g: Y \to V$ morfismos em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(f),g)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(f,G(g))"] \\ Hom_{\mathcal{D}}(F(U), V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(U, G(V)). \end{tikzcd}$$

Provemos que o mesmo comuta e disso, segue a naturalidade de ϕ. Temos, para $\alpha: F(X) \to Y$ um morfismo qualquer em $\mathcal{D}$, que

$$\begin{array}{rcl} (Hom_{\mathcal{C}}(f, G(g)) \circ \phi_{X,Y})(\alpha) & = & Hom_{\mathcal{C}}(f, G(g))(G(\alpha) \circ c_X) \\ & = & G(g) \circ (G(\alpha) \circ c_X) \circ f \\ & = & G(g) \circ G(\alpha) \circ c_X \circ f \\ & = & G(g \circ \alpha) \circ c_X \circ f \\ & \overset{(*)}{=} & G(g \circ \alpha) \circ G(F(f)) \circ c_U \\ & = & G(g \circ \alpha \circ F(f)) \circ c_U \\ & = & \phi_{U,V}(g \circ \alpha \circ F(f)) \\ & = & (\phi_{U,V} \circ Hom_{\mathcal{D}}(F(f), g))(\alpha), \end{array}$$

em que a igualdade (*) segue da naturalidade de c, isto é, vale a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "c_U"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(U) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\ X \arrow[r, "c_X"'] & (G \circ F)(X). \end{tikzcd}$$

Notemos ainda que ψ é também uma transformação natural. Verifiquemos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(f,G(g))"'] & Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(f),g)"] \\ Hom_{\mathcal{C}}(U, G(V)) \arrow[r, "\psi_{U,V}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(F(U), V), \end{tikzcd}$$

comuta. De fato, para $\beta : X \to G(Y)$ um morfismo qualquer em $\mathcal{C}$, temos

$$\begin{array}{rcl} (Hom_{\mathcal{D}}(F(f), g) \circ \psi_{X,Y})(\beta) & = & Hom_{\mathcal{D}}(F(f), g)(e_Y \circ F(\beta)) \\ & = & g \circ (e_Y \circ F(\beta)) \circ F(f) \\ & = & g \circ e_Y \circ F(\beta) \circ F(f) \\ & = & g \circ e_Y \circ F(\beta \circ f) \\ & \overset{(*)}{=} & e_V \circ F(G(g)) \circ F(\beta \circ f) \\ & = & e_V \circ F(G(g) \circ \beta \circ f) \\ & = & \psi_{U,V}(G(g) \circ \beta \circ f) \\ & = & (\psi_{U,V} \circ Hom_{\mathcal{C}}(f, G(g)))(\beta), \end{array}$$

em que a igualdade (*) segue da naturalidade de e, isto é, vale a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} (F \circ G)(Y) \arrow[r, "e_Y"] \arrow[d, "(F\circ G)(g)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ (F \circ G)(V) \arrow[r, "e_V"'] & V. \end{tikzcd}$$

Finalmente, mostremos que ψ é inversa de ϕ para cada par de objetos e daí, ϕ é um isomorfismo natural.

Seja $g : F(X) \to Y$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
(\psi_{X,Y} \circ \phi_{X,Y})(g) & = & \psi_{X,Y}(G(g) \circ c_X) \\
& = & e_Y \circ F(G(g) \circ c_X) \\
& = & e_Y \circ F(G(g)) \circ F(c_X) \\
& \overset{(*)}{=} & g \circ e_{F(X)} \circ F(c_X) \\
& \overset{(**)}{=} & g \circ I_{F(X)} \\
& = & g,
\end{array}$$

em (**) utilizamos a igualdade (2.3) e em (*) utilizamos a naturalidade de e para comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(F \circ G)(F(X)) \arrow[r, "e_{F(X)}"] \arrow[d, "(F\circ G)(g)"'] & F(X) \arrow[d, "g"] \\
(F \circ G)(Y) \arrow[r, "e_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, dado $h : X \to G(Y)$ um morfismo em $\mathcal{C}$, temos que

$$\begin{array}{rcl}
(\phi_{X,Y} \circ \psi_{X,Y})(h) & = & \phi_{X,Y}(e_Y \circ F(h)) \\
& = & G(e_Y \circ F(h)) \circ c_X \\
& = & G(e_Y) \circ G(F(h)) \circ c_X \\
& \overset{(*)}{=} & G(e_Y) \circ c_{G(Y)} \circ h \\
& \overset{(**)}{=} & I_{G(Y)} \circ h \\
& = & h,
\end{array}$$

em (**) utilizamos a igualdade (2.2) e em (*) utilizamos a naturalidade de c para comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "c_X"] \arrow[d, "h"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(h)"] \\
G(Y) \arrow[r, "c_{G(Y)}"'] & (G \circ F)(G(Y)).
\end{tikzcd}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sejam $X \in Ob(\mathcal{C})$, $Y \in Ob(\mathcal{D})$ e $f : X \to G(Y)$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Da equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii), existe uma transformação natural $c : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ tal que $\phi_{X,Y}(h) = G(h) \circ c_X$, para qualquer morfismo $h : F(X) \to Y$ em $\mathcal{D}$.

Sendo $\phi_{X,Y}$ um isomorfismo, existe um único morfismo $g : F(X) \to Y$ tal que $\phi_{X,Y}(g) = f$. Portanto,

$$f = \phi_{X,Y}(g) = G(g) \circ c_X.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \phi_{X,Y}: & Hom_{\mathcal{D}}(F(X),Y) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \\ & \alpha & \mapsto & G(\alpha)\circ c_X, \end{array}$$

em que $c: Id_{\mathcal{C}} \rightarrow G\circ F$ é a transformação natural dada em (iii).

Mostremos que $\phi_{X,Y}$ é um isomorfismo. De fato, seja o morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,G(Y))$. Por hipótese, existe um único morfismo $g \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X),Y)$ tal que $f = G(g)\circ c_X = \phi_{X,Y}(g)$. Portanto, $\phi_{X,Y}$ é sobrejetora.

A injetividade segue da unicidade dada em (iii). A demonstração de que $\phi_{X,Y}$ é uma transformação natural é inteiramente análoga à feita em (ii) $\Rightarrow$ (i).

A equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (iv) é feita de maneira similar à equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (iii). ■

As transformações naturais c e e são chamadas *unidade* e *counidade* da adjunção, respectivamente. Vejamos alguns exemplos de adjunção.

Exemplo 2.29 Os funtores $U: Grp \rightarrow Ab$ e $F: Ab \rightarrow Grp$ do Exemplo 2.14 é uma adjunção. Mostremos que F é adjunto à direita de U. Para isso, provemos o item (iii) do Teorema 2.28. Estamos considerando $\mathcal{C} = Grp$, $\mathcal{D} = Ab$, $F = U$ e $G = F$.

De fato, sejam $G \in Ob(Grp)$, $H \in Ob(Ab)$ e $f: G \rightarrow F(H)$ um morfismo em Grp. Definimos $g: U(G) \rightarrow H$, ou seja,

$$\begin{array}{rccc} g: & G/[G,G] & \rightarrow & H \\ & x[G,G] & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Vejamos que g está bem definida. Sejam $x, y \in G$ tais que $x[G,G] = y[G,G]$. Então $x^{-1}y \in [G,G]$. Daí,

$$x^{-1}y = \prod_{j=1}^{n} a_j^{-1}b_j^{-1}a_jb_j \text{ para } a,b \in G.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} f(x^{-1}y) & = & f(\prod_{j=1}^{n} a_j^{-1}b_j^{-1}a_jb_j) \\ & = & \prod_{j=1}^{n} f(a_j)^{-1}f(b_j)^{-1}f(a_j)f(b_j) \\ & = & e_H, \end{array}$$

isto pois $F(H) = H$ e H é abeliano. Portanto, $f(x) = f(y)$.

Observamos que $f = F(g) \circ P_G$ e que se $g' : G/[G,G] \to H$ é um morfismo tal que $f = F(g') \circ P_G$ então $g = g'$. Logo, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "P_G"] \arrow[dr, "f"'] & F(G/[G,G]) = G/[G,G] \arrow[d, "F(g)"] & G/[G,G] \arrow[d, dotted, "g"] \\ & F(H) & H. \end{tikzcd}$$

Portanto, F é adjunto à direita de U.

Exemplo 2.30 Consideremos os funtores $\mathfrak{U} : Lie_k \to Alg_k$ e $\mathcal{L} : Alg_k \to Lie_k$ dos Exemplos 2.8 e 2.9. Para cada álgebra de Lie L, consideremos $(\mathfrak{U}(L), \iota_L)$ sua álgebra envolvente universal, como descrita no Apêndice A.

Sejam $L, L' \in Ob(Lie_k)$ e $f : L \to L'$ um morfismo de álgebras de Lie. Pela construção do funtor $\mathfrak{U}$, existe único morfismo de álgebras $\mathfrak{U}(f) : \mathfrak{U}(L) \to \mathfrak{U}(L')$ que induz um morfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{U}(f) : \mathcal{L}(\mathfrak{U}(L)) \to \mathcal{L}(\mathfrak{U}(L'))$ tal que $\mathfrak{U}(f) \circ i_L = i_{L'} \circ f$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{L}(\mathfrak{U}(L)) \arrow[d, "\mathfrak{U}(f)"] \\ L' \arrow[r, "\iota_{L'}"'] & \mathcal{L}(\mathfrak{U}(L')). \end{tikzcd}$$

Portanto, a coleção

$$\iota = \{\iota_L : L \to \mathfrak{L}(\mathfrak{U}(L)) : L \in Ob(Lie_k)\}$$

é uma trasformação natural entre Id_{Lie_k} e $\mathcal{L} \circ \mathfrak{U}$. Provemos que $\mathfrak{U}$ é adjunto à esquerda de $\mathcal{L}$ utilizando o item (iii) do Teorema 2.28.

Sejam $L \in Ob(Lie_k)$, $A \in Ob(Alg_k)$ e $f : L \to \mathfrak{L}(A)$ um morfismo de álgebras de Lie. Como $(\mathfrak{U}(L), \iota_L)$ é a álgebra envolvente universal de L, segue que existe um único morfismo de álgebras $g : \mathfrak{U}(L) \to A$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[dr, "f"'] & \mathfrak{L}(\mathfrak{U}(L)) \arrow[d, "\mathfrak{L}(g)"] & \mathfrak{U}(L) \arrow[d, dotted, "g"] \\ & \mathfrak{L}(A) & A. \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.31 Seja R um anel com unidade 1_R. Consideremos o funtor esquecimento $F : {}_R\mathcal{M} \to Ab$ e o funtor $L : Ab \to {}_R\mathcal{M}$ definido por $L(G) = R \otimes_{\mathbb{Z}} G$, para cada objeto $G \in Ob(Ab)$. Seja $f : G \to H$ um morfismo em Ab. Então

$$\begin{array}{rccc} L(f): & R \otimes_{\mathbb{Z}} G & \to & R \otimes_{\mathbb{Z}} H \\ & r \otimes g & \mapsto & r \otimes f(g). \end{array}$$

A coleção de morfismos

$$\{u_G : G \to F(R \otimes_{\mathbb{Z}} G) : u_G(g) = 1_R \otimes g\}$$

é uma transformação natural. De fato, consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u_G"] \arrow[d, "h"'] & F(R \otimes_{\mathbb{Z}} G) \arrow[d, "F(L(h))"] \\ H \arrow[r, "u_H"'] & R \otimes_{\mathbb{Z}} H, \end{tikzcd}$$

em que $h : G \to H$ é um morfismo em Ab. Temos que

$$\begin{aligned} (F(L(h)) \circ u_G)(g) &= F(L(h))(u_G(g)) \\ &= F(L(h))(1_R \otimes g) \\ &= 1_R \otimes h(g) \\ &= u_H(h(g)) \\ &= (u_H \circ h)(g), \end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

Finalmente, sejam $G \in Ob(Ab)$, $M \in Ob({}_R\mathcal{M})$ e $f : G \to F(M)$ um morfismo em Ab. Definimos $t : R \otimes_{\mathbb{Z}} G \to M$ por $t(r \otimes g) = rf(g)$, que é claramente um morfismo de R-módulos.

Observamos que $F(t) \circ u_G(g) = f(g)$, para todo $g \in G$. A unicidade de t segue do fato de que, dado outro morfismo $t' : R \otimes_{\mathbb{Z}} G \to M$ em ${}_R\mathcal{M}$ tal que $F(t') \circ u_G(g) = f(g)$, para todo $g \in G$, então $t'(1_R \otimes g) = F(t')(1_R \otimes g) = f(g) = t(1_R \otimes g)$. Logo,

$$\begin{aligned} t'(r \otimes g) &= t'(r(1_R \otimes g)) \\ &= rt'(1_R \otimes g) \\ &= rt(1_R \otimes g) \\ &= t(r \otimes g) \end{aligned}$$

e assim, $t' = t$.

A próxima proposição nos diz que o funtor adjunto à direita de um funtor é único, a menos de uma equivalência.

Proposição 2.32 *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Se (F, G, ϕ) e (F, H, ψ) são adjunções então $G \sim H$.*

Demonstração: Por hipótese, ϕ e ψ são isomorfismos naturais, ou seja, para quaisquer $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})$, seguem os isomorfismos

$$\phi_{X,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

e

$$\psi_{X,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, H(Y)).$$

Assim, podemos definir os isomorfismos

$$\alpha_{X,Y} = \psi_{X,Y} \circ \phi^{-1}_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, H(Y)).$$

Notamos que α é transformação natural. De fato,

$$\alpha : Hom_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G) \to Hom_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times H)$$

em que os funtores

$$Hom_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set$$

e

$$Hom_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times H) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set.$$

Claramente, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X,Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(f, G(g))"'] & Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(f), g)"] & Hom_{\mathcal{C}}(X, H(Y)) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(f, H(g))"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(U, G(V)) \arrow[r, "\phi^{-1}_{U,V}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(F(U), V) \arrow[r, "\psi_{U,V}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(U, H(V))
\end{tikzcd}$$

para quaisquer morfismos $f : U \to X$ e $g : Y \to V$ em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. Sendo $\alpha_{X,Y}$ isomorfismo, para quaisquer $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $Y \in Ob(\mathcal{D})$, segue que α é um isomorfismo natural.

Consideremos $\lambda_Y = \alpha_{G(Y),Y}(I_{G(Y)}) : G(Y) \to H(Y)$ morfismo em $\mathcal{C}$. Provemos que λ é um isomorfismo natural. Para verificarmos a naturalidade, basta que o seguinte diagrama comute

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\lambda_Y"] \arrow[d, "G(g)"'] & H(Y) \arrow[d, "H(g)"] \\
G(W) \arrow[r, "\lambda_W"'] & H(W)
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $W, Y \in Ob(\mathcal{D})$ e morfismo $g : Y \to W$ em $\mathcal{D}$. Isso segue do fato de α ser natural. De fato, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \arrow[r, "\alpha_{G(Y),Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(I_{G(Y)}, G(g))"'] & Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), H(Y)) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(I_{G(Y)}, H(g))"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), G(W)) \arrow[r, "\alpha_{G(Y),W}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), H(W)).
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$(Hom_{\mathcal{C}}(I_{G(Y)}, H(g)) \circ \alpha_{G(Y),Y})(I_{G(Y)}) = (\alpha_{G(Y),W} \circ Hom_{\mathcal{C}}(I_{G(Y)}, G(g)))(I_{G(Y)}),$$

ou seja,

$$H(g) \circ \lambda_Y = \alpha_{G(Y),W} \circ G(g).$$

Analogamente, o próximo diagrama também comuta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(G(W), G(W)) \arrow[r, "\alpha_{G(W),W}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(G(g), G(I_W))"'] & Hom_{\mathcal{C}}(G(W), H(W)) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(G(g), H(I_W))"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), G(W)) \arrow[r, "\alpha_{G(Y),W}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), H(W)).
\end{tikzcd}$$

Portanto,

$$(Hom_{\mathcal{C}}(G(g), H(I_W)) \circ \alpha_{G(W),W})(I_{G(W)}) = (\alpha_{G(Y),W} \circ Hom_{\mathcal{C}}(G(g), G(I_W)))(I_{G(W)})$$

que equivale a

$$\alpha_{G(W),W}(I_{G(W)}) \circ G(g) = \alpha_{G(Y),W} \circ G(g),$$

ou seja, $\lambda_W \circ G(g) = \alpha_{G(Y),W} \circ G(g) = H(g) \circ \lambda_Y$ e segue a comutatividade do diagrama.

Agora, consideremos $\sigma_Y = \alpha^{-1}_{H(Y),Y}(I_{H(Y)}) : H(Y) \to G(Y)$ morfismo em $\mathcal{C}$. Mostremos que $\sigma_Y = \lambda_Y^{-1}$. Da naturalidade de α segue a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \arrow[r, "\alpha_{G(Y),Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(\sigma_Y, G(I_Y))"'] & Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), H(Y)) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(\sigma_Y, H(I_Y))"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(H(Y), G(Y)) \arrow[r, "\alpha_{H(Y),Y}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(H(Y), H(Y)).
\end{tikzcd}$$

Temos

$$(Hom_{\mathcal{C}}(\sigma_Y, H(I_Y))\circ\alpha_{G(Y),Y})(I_{G(Y)}) = (\alpha_{H(Y),Y}\circ Hom_{\mathcal{C}}(\sigma_Y, G(I_Y)))(I_{G(Y)}),$$

que equivale a

$$Hom_{\mathcal{C}}(\sigma_Y, H(I_Y))(\lambda_Y) = \alpha_{H(Y),Y}(\sigma_Y),$$

ou seja,

$$\lambda_Y \circ \sigma_Y = I_{H(Y)}.$$

Da naturalidade de $\alpha^{-1} = \{\alpha^{-1}_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X, H(Y)) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) : X \in Ob(\mathcal{C}) \text{ e } Y \in Ob(\mathcal{D})\}$, segue a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(H(Y), H(Y)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{H(Y),Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(\lambda_Y, H(I_Y))"'] & Hom_{\mathcal{C}}(H(Y), G(Y)) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(\lambda_Y, G(I_Y))"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), H(Y)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{G(Y),Y}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)).
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$(Hom_{\mathcal{C}}(\lambda_Y, G(I_Y))\circ\alpha^{-1}_{H(Y),Y})(I_{H(Y)}) = (\alpha^{-1}_{G(Y),Y}\circ Hom_{\mathcal{C}}(\lambda_Y, H(I_Y)))(I_{H(Y)}),$$

que equivale a

$$Hom_{\mathcal{C}}(\lambda_Y, G(I_Y))(\sigma_Y) = \alpha^{-1}_{G(Y),Y}(\lambda_Y),$$

ou seja,

$$\sigma_Y \circ \lambda_Y = I_{G(Y)}.$$

Portanto, $G \sim H$. ∎

Capítulo 3

Categorias abelianas

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar categorias com uma estrutura adicional de aditividade entre morfismos. Iniciamos com categorias aditivas e ao final, definimos categorias k-lineares (abelianas) que são necessárias para as construções do capítulo seguinte, que trata essencialmente de categorias k-lineares. Tal estrutura de aditividade nessas categorias abelianas cria uma certa simetria (dualidade), como é observado por MacLane em [15], entre seus objetos. Os resultados, definições e exemplos podem ser encontrados em [16], [14], [5] e [7].

Definição 3.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita pré-aditiva se*

(i) $\mathcal{C}$ *possui objeto zero;*

(ii) *para quaisquer $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um grupo abeliano;*

(iii) *a composição de morfismos é bilinear, ou seja, para quaisquer morfismos $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ valem*

$$\begin{aligned} g \circ (f + f') &= g \circ f + g \circ f' \\ (g + g') \circ f &= g \circ f + g' \circ f. \end{aligned}$$

Definição 3.2 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita aditiva se*

(i) $\mathcal{C}$ *é pré-aditiva;*

(ii) *para quaisquer* $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, *existe o produto* $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ *de* X *e* Y.

Alertamos o leitor que, para algumas demonstrações que faremos aqui, é útil relembrar alguns resultados envolvendo o objeto zero, por exemplo, a Proposição 1.29.

Lema 3.3 *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria aditiva e* $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. *Seja* $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ *o produto de* X *e* Y. *Se* $\phi, \psi : Z \to X \times Y$ *são morfismos tais que* $\pi_X \circ \phi = \pi_X \circ \psi$ *e* $\pi_Y \circ \phi = \pi_Y \circ \psi$, *então* $\phi = \psi$.

Demonstração: Como $\pi_X \circ \phi = \pi_X \circ \psi$ e $\pi_Y \circ \phi = \pi_Y \circ \psi$, segue que $\pi_X \circ (\phi - \psi) = 0_X^Z$ e $\pi_Y \circ (\phi - \psi) = 0_Y^Z$. Mas o morfismo $0_{X \times Y}^Z : Z \to X \times Y$ é o único tal que $\pi_X \circ 0_{X \times Y}^Z = 0_X^Z$ e $\pi_Y \circ 0_{X \times Y}^Z = 0_Y^Z$ (definição de produto). Logo, $\phi - \psi = 0_{X \times Y}^Z$, ou seja, $\phi = \psi$. ∎

Exemplo 3.4 A categoria ${}_R\mathcal{M}$ é aditiva. De fato, o módulo trivial $\{e\}$ é o objeto zero nessa categoria e o produto (direto) de módulos existe para quaisquer dois módulos.

Exemplo 3.5 A categoria *Ab* é aditiva. O produto (direto) nessa categoria é o definido no Exemplo 1.46 para a categoria *Grp*.

Definição 3.6 *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria pré-aditiva. Dados objetos* $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, *uma soma direta de* X *e* Y *é uma quíntupla* $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, i_X, i_Y)$, *em que* $\pi_X : X \oplus Y \to X$, $\pi_Y : X \oplus Y \to Y$, $i_X : X \to X \oplus Y$ *e* $i_Y : Y \to X \oplus Y$ *são morfismos que satisfazem as seguintes igualdades*

(i) $\pi_X \circ i_X = I_X$ e $\pi_Y \circ i_Y = I_Y$;

(ii) $i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y = I_{X \oplus Y}$.

Observação 3.7 Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pré-aditiva então segue, da propriedade (ii) acima, que $\pi_X \circ i_Y = 0_X^Y$ e $\pi_Y \circ i_X = 0_Y^X$. De fato,

$$\begin{aligned}
\pi_X &= \pi_X \circ I_{X \oplus Y} \\
&= \pi_X \circ (i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y) \\
&= \pi_X \circ (i_X \circ \pi_X) + \pi_X \circ (i_Y \circ \pi_Y) \\
&= (\pi_X \circ i_X) \circ \pi_X + (\pi_X \circ i_Y) \circ \pi_Y \\
&= \pi_X + (\pi_X \circ i_Y) \circ \pi_Y.
\end{aligned}$$

Assim, $0_X^{X \oplus Y} = (\pi_X \circ i_Y) \circ \pi_Y$ e isto implica que $0_X^{X \oplus Y} \circ i_Y = (\pi_X \circ i_Y) \circ \pi_Y \circ i_Y$, ou seja, $0_X^Y = \pi_X \circ i_Y$. Analogamente, $\pi_Y \circ i_X = 0_Y^X$.

Proposição 3.8 *Se* $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, i_X, i_Y)$ *é uma soma direta de* X *e* Y*, então* $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ *é um produto e* $(X \oplus Y, i_X, i_Y)$ *é um coproduto de* X *e* Y*.*

Demonstração: Verifiquemos que $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ é um produto de X e Y. A verificação de que $(X \oplus Y, i_X, i_Y)$ é um coproduto de X e Y é similar.

Seja (Z, p_X, p_Y) uma tripla em que $p_X : Z \to X$ e $p_Y : Z \to Y$ são morfismos em $\mathcal{C}$. Definimos

$$\phi = i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y : Z \to X \oplus Y.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \pi_X \circ \phi &= \pi_X \circ (i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y) \\ &= \pi_X \circ (i_X \circ p_X) + \pi_X \circ (i_Y \circ p_Y) \\ &= (\pi_X \circ i_X) \circ p_X + (\pi_X \circ i_Y) \circ p_Y \\ &= p_X. \end{aligned}$$

Analogamente, $\pi_Y \circ \phi = p_Y$. Para verificarmos a unicidade de ϕ, suponhamos que exista um morfismo $\psi : Z \to X \oplus Y$ tal que $\pi_X \circ \psi = p_X$ e $\pi_Y \circ \psi = p_Y$. Aplicando i_X e i_Y nas respectivas igualdades, obtemos $i_X \circ (\pi_X \circ \psi) = i_X \circ p_X$ e $i_Y \circ (\pi_Y \circ \psi) = i_Y \circ p_Y$. Somando as igualdades membro a membro, segue que $i_X \circ (\pi_X \circ \psi) + i_Y \circ (\pi_Y \circ \psi) = i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y$. Portanto,

$$\begin{aligned} \phi &= i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y \\ &= i_X \circ (\pi_X \circ \psi) + i_Y \circ (\pi_Y \circ \psi) \\ &= (i_X \circ \pi_X) \circ \psi + (i_Y \circ \pi_Y) \circ \psi \\ &= (i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y) \circ \psi \\ &= \psi. \end{aligned}$$

■

Em vista dessa proposição, a soma direta é também chamada *biproduto*. Segue da unicidade do produto e coproduto que a soma direta é única, a menos de isomorfismo.

Exemplo 3.9 Consideremos a categoria ${}_R\mathcal{M}$. Sejam M e N R-módulos. Então a quíntupla $(M \oplus N, \pi_M, \pi_N, i_M, i_N)$, em que π_M e π_N são as projeções canônicas e i_M e i_N são as inclusões canônicas, é a soma direta de M e N.

Proposição 3.10 ([14], Theorem 2, p. 190) *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria pré-aditiva e* $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$*. Então são equivalentes:*

(i) *existe produto de X e Y;*

(ii) *existe coproduto de X e Y;*

(iii) *existe soma direta de X e Y.*

Demonstração: As implicações (iii) $\Rightarrow$ (ii) e (iii) $\Rightarrow$ (i) seguem diretamente da Proposição 3.8.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Por hipótese, existe o produto $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ de X e Y e assim podemos considerar os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} & & X \\ X \arrow[r, dotted, "i_X"] \arrow[urr, bend left, "I_X"] \arrow[drr, bend right, "0_Y^X"'] & X \times Y \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & X \\ Y \arrow[r, dotted, "i_Y"] \arrow[urr, bend left, "0_X^Y"] \arrow[drr, bend right, "I_Y"'] & X \times Y \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

que, imediatamente, nos dão que $\pi_X \circ i_X = I_X$, $\pi_Y \circ i_Y = I_Y$, $\pi_Y \circ i_X = 0_Y^X$ e $\pi_X \circ i_Y = 0_X^Y$. Basta verificarmos que a quíntupla $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y, i_X, i_Y)$ satisfaz a condição (ii) da definição de soma direta. Observamos que

$$\begin{aligned} \pi_X \circ (i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y) &= \pi_X \circ (i_X \circ \pi_X) + \pi_X \circ (i_Y \circ \pi_Y) \\ &= (\pi_X \circ i_X) \circ \pi_X + (\pi_X \circ i_Y) \circ \pi_Y \\ &= \pi_X. \end{aligned}$$

Analogamente, $\pi_Y \circ (i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y) = \pi_Y$. Por outro lado, $\pi_X \circ I_{X \times Y} = \pi_X$ e $\pi_Y \circ I_{X \times Y} = \pi_Y$. Segue, da unicidade, que $i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y = I_{X \times Y}$. A implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) é similar. ∎

Devido à proposição acima, em se tratando de soma direta, produto ou coproduto de quaisquer objetos X e Y numa categoria aditiva, usamos a notação $X \oplus Y$ para designar qualquer um dos três mencionados.

Agora, sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ o funtor tal que $\oplus(X, Y) = X \oplus Y$ para objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Dados morfismos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X', Y')$, consideremos somas diretas $(X \oplus X', \pi_X, \pi_{X'}, i_X, i_{X'})$ e $(Y \oplus Y', p_Y, p_{Y'}, j_Y, j_{Y'})$.

Definição 3.11 ([14], p. 191) *Define-se* $f \oplus g : X \oplus X' \to Y \oplus Y'$ *como sendo o único morfismo que comuta o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& X \oplus X' \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_{X'}"] \arrow[d, dotted, "f\oplus g"] & \\
X \arrow[dd, "f"'] & Y \oplus Y' \arrow[dl, "p_Y"'] \arrow[dr, "p_{Y'}"] & X' \arrow[dd, "g"] \\
Y & & Y'
\end{tikzcd}$$

ou seja, $p_Y \circ (f \oplus g) = f \circ \pi_X$ *e* $p_{Y'} \circ (f \oplus g) = g \circ \pi_{X'}$.

Antes de passarmos à próxima observação, notemos que o morfismo $f \oplus g$ existe e é único. Como temos uma soma direta de Y e Y', a tripla $(Y \oplus Y', p_Y, p_{Y'})$ é um produto e assim, por definição (de produto), existe e é único tal morfismo.

Observação 3.12 Notemos que, relativo à estrutura de coproduto embutida na estrutura de soma direta, temos a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "i_X"] & & X' \arrow[dd, "g"] \arrow[dl, "i_{X'}"'] \\
& X \oplus X' \arrow[dd, "f\oplus g"] & \\
Y \arrow[dr, "j_Y"'] & & Y' \arrow[dl, "j_{Y'}"] \\
& Y \oplus Y', &
\end{tikzcd}$$

ou seja, $(f \oplus g) \circ i_X = j_Y \circ f$ e $(f \oplus g) \circ i_{X'} = j_{Y'} \circ g$. De fato, como $p_Y \circ (f \oplus g) = f \circ \pi_X$, segue que

$$\begin{aligned}
p_Y \circ ((f \oplus g) \circ i_X) &= (p_Y \circ (f \oplus g)) \circ i_X \\
&= (f \circ \pi_X) \circ i_X \\
&= f \circ (\pi_X \circ i_X) \\
&= f \\
&= (p_Y \circ j_Y) \circ f \\
&= p_Y \circ (j_Y \circ f).
\end{aligned}$$

Ainda, $p_{Y'} \circ (f \oplus g) = g \circ \pi_{X'}$, segue que

$$\begin{array}{rcl} p_{Y'} \circ ((f \oplus g) \circ i_X) & = & (p_{Y'} \circ (f \oplus g)) \circ i_X \\ & = & (g \circ \pi_{X'}) \circ i_X \\ & = & g \circ (\pi_{X'} \circ i_X) \\ & = & 0_{Y'}^{X}, \\ & = & (p_{Y'} \circ j_Y) \circ f \\ & = & p_{Y'} \circ (j_Y \circ f). \end{array}$$

Portanto, pelo Lema 3.3 (fazendo $\phi = (f \oplus g) \circ i_X$ e $\psi = j_Y \circ f$), resulta que $(f \oplus g) \circ i_X = j_Y \circ f$. Analogamente, $(f \oplus g) \circ i_{X'} = j_{Y'} \circ g$.

Definição 3.13 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $X \in Ob(\mathcal{C})$. Definimos os morfismos*

(i) *diagonal de X, denotado por $\Delta_X : X \to X \oplus X$, que comuta o diagrama abaixo*

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
X \arrow[urr, bend left, "I_X"] \arrow[drr, bend right, "I_X"'] \arrow[r, dotted, "\Delta_X"] & X \oplus X \arrow[ur, "\pi_X^1"'] \arrow[dr, "\pi_X^2"] & \\
 & & X,
\end{tikzcd}$$

(ii) *codiagonal de X, denotado por $\delta_X : X \oplus X \to X$, que comuta o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, bend right, "I_X"'] \arrow[dl, "i_X"] \\
X & X \oplus X \arrow[l, dotted, "\delta_X"'] & \\
 & & X. \arrow[ull, bend left, "I_X"] \arrow[ul, "i_X"']
\end{tikzcd}$$

Decorre das definições de produto e coproduto, respectivamente, que Δ_X e δ_X, para qualquer $X \in Ob(\mathcal{C})$, são os únicos morfismos que comutam os respectivos diagramas. Com a notação acima, enunciamos o próximo resultado.

Lema 3.14 ([14], Proposition 3, p.192) *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e morfismos $f, f' : X \to Y$. Então $f + f' = \delta_Y \circ (f \oplus f') \circ \Delta_X$, em que são consideradas as somas diretas $(X \oplus X, \pi_X^1, \pi_X^2, i_X^1, i_X^2)$ e $(Y \oplus Y, p_Y^1, p_Y^2, j_y^1, j_Y^2)$.*

Demonstração: Notemos que

$$\begin{aligned}
\delta_Y \circ (f \oplus f') \circ \Delta_X &= \delta_Y \circ (f \oplus f') \circ (i_X^1 \circ \pi_X^1 + i_X^2 \circ \pi_X^2) \circ \Delta_X \\
&= \delta_Y \circ (f \oplus f') \circ (i_X^1 \circ \pi_X^1 \circ \Delta_X + i_X^2 \circ \pi_X^2 \circ \Delta_X) \\
&= \delta_Y \circ (f \oplus f') \circ (i_X^1 + i_X^2) \\
&= \delta_Y \circ ((f \oplus f') \circ i_Y^1 + (f \oplus f') \circ i_Y^2) \\
&= \delta_Y \circ (j_Y^1 \circ f + j_Y^2 \circ f') \\
&= \delta_Y \circ j_Y^1 \circ f + \delta_Y \circ j_Y^2 \circ f' \\
&= f + f'.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.15 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $Z \in Ob(\mathcal{C})$. Então Z é um objeto zero se, e somente se, $\Delta_Z : Z \to Z \oplus Z$ é um isomorfismo, em que $(Z \oplus Z, \pi_Z^1, \pi_Z^2)$ é um produto de Z.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Como Δ_Z é um isomorfismo e $\pi_Z^i \circ \Delta_Z = I_Z$ para $i = 1, 2$, então $\Delta_Z \circ \pi_Z^i = I_{Z \oplus Z}$, para $i = 1, 2$, e isso nos diz que $\pi_Z^1 = \pi_Z^2 = \Delta_Z^{-1}$.

Sejam $Y \in Ob(\mathcal{C})$ e morfismos $f, g : Y \to Z$. Então (pela definição de produto) existe um único morfismo $\phi : Y \to Z \times Z$ tal que $g = \pi_Z^1 \circ \phi = \pi_Z^2 \circ \phi = f$. Em particular, podemos considerar $Y = Z$, $f = I_Z$ e $g = 0_Z^Z$ e assim, $I_Z = 0_Z^Z$. Logo, Z é um objeto zero, veja Proposição 1.30.

$(\Rightarrow)$ Como Z é um objeto zero, segue que $\pi_Z^1 = \pi_Z^2$. Sendo Δ_Z o morfismo diagonal, então $\pi_Z^1 \circ \Delta_Z = I_Z$. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Z \oplus Z \arrow[d, "\pi_Z^1"] \arrow[dddl, bend right, "\pi_Z^1"'] \arrow[dddr, bend left, "\pi_Z^1"] & \\
& Z \arrow[d, "\Delta_Z"] & \\
& Z \oplus Z \arrow[dl, "\pi_Z^1"'] \arrow[dr, "\pi_Z^1"] & \\
Z & & Z.
\end{tikzcd}$$

Tal diagrama comuta, pois

$$\begin{aligned}\pi_Z^1 \circ (\Delta_Z \circ \pi_Z^1) &= (\pi_Z^1 \circ \Delta_Z) \circ \pi_Z^1 \\ &= I_Z \circ \pi_Z^1 \\ &= \pi_Z^1.\end{aligned}$$

Mas $\pi_Z^1 \circ I_{Z\oplus Z} = \pi_Z^1$. Portanto, $\Delta_Z \circ \pi_Z^1 = I_{Z\oplus Z}$ e isso segue do Lema 3.3 (fazendo $\phi = \Delta_Z \circ \pi_Z^1$ e $\psi = I_{Z\oplus Z}$, uma vez que $\pi_Z^1 = \pi_Z^2$).
■

O objetivo da próxima definição é, sobretudo, simplificar os enunciados dos próximos resultados.

Definição 3.16 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias aditivas e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Sejam $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Dizemos que*

(i) *F preserva soma direta se $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, i_X, i_Y)$ é uma soma direta de X e Y, então $(F(X \oplus Y), F(\pi_X), F(\pi_Y), F(i_X), F(i_Y))$ é uma soma direta $F(X)$ e $F(Y)$;*

(ii) *F preserva produto se $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ é um produto de X e Y, então $(F(X \oplus Y), F(\pi_X), F(\pi_Y))$ é um produto de $F(X)$ e $F(Y)$;*

(iii) *F preserva coproduto se $(X \oplus Y, i_X, i_Y)$ é um coproduto de X e Y, então $(F(X \oplus Y), F(i_X), F(i_Y))$ é um coproduto de $F(X)$ e $F(Y)$.*

Lema 3.17 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias aditivas e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor que preserva produtos. Então são válidas as afirmações seguintes.*

(i) *Se Z é um objeto zero em $\mathcal{C}$ então $F(Z)$ é um objeto zero em $\mathcal{D}$.*

(ii) *Se $0_Y^X : X \to Y$ é um morfismo nulo em $\mathcal{C}$ então $F(0_Y^X) = 0_{F(Y)}^{F(X)}$ é um morfismo nulo em $\mathcal{D}$.*

Demonstração: (i) Seja $(F(Z) \oplus F(Z), \pi_{F(Z)}^1, \pi_{F(Z)}^2)$ um produto de $F(Z)$. Por hipótese, a tripla $(F(Z \oplus Z), F(\pi_Z^1), F(\pi_Z^2))$ é um produto de $F(Z)$.

Segue, da definição do produto, que existe um único morfismo $f_Z : F(Z \oplus Z) \to F(Z) \oplus F(Z)$ tal que $\pi_{F(Z)}^1 \circ f_Z = F(\pi_Z^1)$ e $\pi_{F(Z)}^2 \circ f_Z = F(\pi_Z^2)$. O morfismo f_Z é um isomorfismo e isso segue da unicidade do produto. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F(Z) \arrow[d, "F(\Delta_Z)"'] \arrow[dddl, bend right, "I_{F(Z)}"'] \arrow[dddr, bend left, "I_{F(Z)}"] & \\
& F(Z \oplus Z) \arrow[d, "f_Z"'] & \\
& F(Z) \oplus F(Z) \arrow[dl, "\pi^1_{F(Z)}"'] \arrow[dr, "\pi^2_{F(Z)}"] & \\
F(Z) & & F(Z).
\end{tikzcd}$$

Tal diagrama comuta, pois

$$\begin{array}{rcl}
\pi^1_{F(Z)} \circ (f_Z \circ F(\Delta_Z)) & = & (\pi^1_{F(Z)} \circ f_Z) \circ F(\Delta_Z) \\
& = & F(\pi^1_Z) \circ F(\Delta_Z) \\
& = & F(\pi^1_Z \circ \Delta_Z) \\
& = & F(I_Z) \\
& = & I_{F(Z)}.
\end{array}$$

Analogamente, $\pi^2_{F(Z)} \circ (f_Z \circ F(\Delta_Z)) = I_{F(Z)}$. Segue, da unicidade do morfismo diagonal, que $\Delta_{F(Z)} = f_Z \circ F(\Delta_Z)$. Como Z é um objeto zero, resulta do lema anterior que Δ_Z é um isomorfismo e assim, $F(\Delta_Z)$ também o é. Portanto, $\Delta_{F(Z)}$ é um isomorfismo. Novamente, pelo lema anterior, $F(Z)$ é um objeto zero em $\mathcal{D}$.

(ii) Dados $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, se $0^X_Y : X \to Y$ é um morfismo nulo em $\mathcal{C}$ então $F(0^X_Y) = 0^{F(X)}_{F(Y)}$ e isso segue diretamente do item (i). ■

Definição 3.18 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias pré-aditivas. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito aditivo se, para quaisquer $f, g : X \to Y$ morfismos em $\mathcal{C}$, então*

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Proposição 3.19 ([14], Proposition 4, p. 193) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias aditivas e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Sejam $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Então são equivalentes*

(i) *F é aditivo;*

(ii) *F preserva soma direta;*

(iii) *F preserva produto;*

(iv) *F preserva coproduto.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, i_X, i_Y)$ uma soma direta de X e Y. Mostremos que $(F(X \oplus Y), F(\pi_X), F(\pi_Y), F(i_X), F(i_Y))$ é uma soma direta de $F(X)$ e $F(Y)$. De fato, como $\pi_X \circ i_X = I_X$, segue que

$$\begin{aligned} I_{F(X)} &= F(I_X) \\ &= F(\pi_X \circ i_X) \\ &= F(\pi_X) \circ F(i_X). \end{aligned}$$

Analogamente, $F(\pi_Y) \circ F(i_Y) = I_{F(Y)}$ e sendo $i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y = I_{X \oplus Y}$, segue que

$$\begin{aligned} I_{F(X \oplus Y)} &= F(I_{X \oplus Y}) \\ &= F(i_X \circ \pi_X + i_Y \circ \pi_Y) \\ &= F(i_X \circ \pi_X) + F(i_Y \circ \pi_Y) \text{F é aditivo} \\ &= F(i_X) \circ F(\pi_X) + F(i_Y) \circ F(\pi_Y). \end{aligned}$$

Portanto, a quíntupla $(F(X \oplus Y), F(\pi_X), F(\pi_Y), F(i_X), F(i_Y))$ é uma soma direta de $F(X)$ e $F(Y)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $X \in Ob(\mathcal{C})$ e $(X \oplus X, \pi_X^1, \pi_X^2, i_X^1, i_X^2)$ uma soma direta de X. Por (ii), $(F(X \oplus X), F(\pi_X^1), F(\pi_X^2), F(i_X^1), F(i_X^2))$ é uma soma direta de $F(X)$ e isso nos dá $(F(X \oplus X), F(\pi_X^1), F(\pi_X^2))$ é um produto de $F(X)$.

Por outro lado, $(F(X) \oplus F(X), \pi_{F(X)}^1, \pi_{F(X)}^2, i_{F(X)}^1, i_{F(X)}^2)$ é também uma soma direta de $F(X)$ e portanto, $(F(X) \oplus F(X), \pi_{F(X)}^1, \pi_{F(X)}^2)$ é também um produto de $F(X)$. Assim, existe um único isomorfismo $f_X : F(X \oplus X) \to F(X) \oplus F(X)$ tal que $\pi_{F(X)}^1 \circ f_X = F(\pi_X^1)$ e $\pi_{F(X)}^2 \circ f_X = F(\pi_X^2)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \pi_{F(X)}^1 \circ (f_X \circ F(i_X^1)) &= (\pi_{F(X)}^1 \circ f_X) \circ F(i_X^1) \\ &= F(\pi_X^1) \circ F(i_X^1) \\ &= F(\pi_X^1 \circ i_X^1) \\ &= F(I_X) \\ &= I_{F(X)} \\ &= \pi_{F(X)}^1 \circ i_{F(X)}^1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{rcl}
\pi^2_{F(X)} \circ (f_X \circ F(i^1_X)) & = & (\pi^2_{F(X)} \circ f_X) \circ F(i^1_X) \\
& = & F(\pi^2_X) \circ F(i^1_X) \\
& = & F(\pi^2_X \circ i^1_X) \\
& = & F(0^X_X) \\
& \overset{(*)}{=} & 0^{F(X)}_{F(X)} \\
& = & \pi^2_{F(X)} \circ i^1_{F(X)}.
\end{array}$$

Como F preserva soma direta, F preserva produto (para comodidade do leitor, veja implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) mais a frente) e assim, aplicamos o Lema 3.17 (ii) para obtermos a igualdade (*). Finalmente, pelo Lema 3.3, $f_X \circ F(i^1_X) = i^1_{F(X)}$ e $f_X \circ F(i^2_X) = i^2_{F(X)}$. Essas igualdades são usadas mais abaixo. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F(X) \arrow[ddl, bend right, "I_{F(X)}"'] \arrow[d, "F(\Delta_X)"] \arrow[ddr, bend left, "I_{F(X)}"] & \\
& F(X \oplus X) \arrow[d, "f_X"] & \\
F(X) & F(X) \oplus F(X) \arrow[l, "\pi^1_{F(X)}"'] \arrow[r, "\pi^2_{F(X)}"] & F(X).
\end{tikzcd}$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcl}
\pi^1_{F(X)} \circ (f_X \circ F(\Delta_X)) & = & (\pi^1_{F(X)} \circ f_X) \circ F(\Delta_X) \\
& = & F(\pi^1_X) \circ F(\Delta_X) \\
& = & F(\pi^1_X \circ \Delta_X) \\
& = & F(I_X) \\
& = & I_{F(X)}.
\end{array}$$

Analogamente, $\pi^2_{F(X)} \circ (f_X \circ F(\Delta_X)) = I_{F(X)}$. Pela unicidade do morfismo diagonal, temos que $\Delta_{F(X)} = f_X \circ F(\Delta_X)$. Agora, outro diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) & \\
 & F(X \oplus X) \arrow[u, "F(\delta_X)"'] & \\
 & F(X) \oplus F(X) \arrow[u, "f_X^{-1}"'] & \\
F(X) \arrow[uuur, bend left=10, "I_{F(X)}"] \arrow[ur, "i^2_{F(X)}"'] & & F(X). \arrow[uuul, bend right=10, "I_{F(X)}"'] \arrow[ul, "i^1_{F(X)}"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcl}
(F(\delta_X) \circ f_X^{-1}) \circ i^1_{F(X)} & = & F(\delta_X) \circ (f_X^{-1} \circ i^1_{F(X)}) \\
& = & F(\delta_X) \circ F(i^1_X) \\
& = & F(\delta_X \circ i^1_X) \\
& = & F(I_X) \\
& = & I_{F(X)}.
\end{array}$$

Analogamente, $(F(\delta_X) \circ f_X^{-1}) \circ i^2_{F(X)} = I_{F(X)}$. Da unicidade do morfismo codiagonal, segue que $\delta_{F(X)} = F(\delta_X) \circ f_X^{-1}$.

Finalmente, seja $Y \in Ob(\mathcal{C})$ outro objeto. Consideremos a soma direta $(Y \oplus Y, \pi^1_Y, \pi^2_Y, i^1_Y, i^2_Y)$. Da mesma forma que para o objeto X, existe um único isomorfismo $f_Y : F(Y \oplus Y) \to F(Y) \oplus F(Y)$ com as propriedades descritas acima.

Sejam $f, f' : X \to Y$ morfismos. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) \oplus F(X) \arrow[dl, "\pi^1_{F(X)}"'] \arrow[d, "f_X^{-1}"] \arrow[dr, "\pi^2_{F(X)}"] & \\
F(X) \arrow[dddd, "F(f)"'] & F(X \oplus X) \arrow[d, "F(f \oplus f')"] & F(X) \arrow[dddd, "F(f')"] \\
 & F(Y \oplus Y) \arrow[d, "f_Y"] & \\
 & F(Y) \oplus F(Y) \arrow[ddl, "\pi^1_{F(Y)}"'] \arrow[ddr, "\pi^2_{F(Y)}"] & \\
 & & \\
F(Y) & & F(Y).
\end{tikzcd}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\pi^1_{F(Y)} \circ (f_Y \circ F(f \oplus f') \circ f_X^{-1}) &= (\pi^1_{F(Y)} \circ f_Y) \circ F(f \oplus f') \circ f_X^{-1} \\
&= F(\pi^1_Y) \circ F(f \oplus f') \circ f_X^{-1} \\
&= F(\pi^1_Y \circ (f \oplus f')) \circ f_X^{-1} \\
&\overset{(\triangle)}{=} F(f \circ \pi^1_X) \circ f_X^{-1} \\
&= F(f) \circ F(\pi^1_X) \circ f_X^{-1} \\
&= F(f) \circ \pi^1_{F(X)} \circ f_X \circ f_X^{-1} \\
&= F(f) \circ \pi^1_{F(X)}.
\end{aligned}$$

A igualdade $(\triangle)$ resulta de (1) da Definição 3.11. Analogamente, $\pi^2_{F(Y)} \circ (f_Y \circ F(f \oplus f') \circ f_X^{-1}) = F(f') \circ \pi^2_{F(X)}$. Pela unicidade do morfismo $F(f) \oplus F(f')$, segue que $F(f) \oplus F(f') = f_Y \circ F(f \oplus f') \circ f_X^{-1}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
F(f + f') &\overset{(*)}{=} F(\delta_Y \circ (f \oplus f') \circ \Delta_X) \\
&= F(\delta_Y) \circ F(f \oplus f') \circ F(\Delta_X) \\
&\overset{(**)}{=} (\delta_{F(Y)} \circ f_Y) \circ (f_Y^{-1} \circ (F(f) \oplus F(f')) \circ f_X) \circ (f_X^{-1} \circ \Delta_{F(X)}) \\
&= \delta_{F(Y)} \circ (F(f) \oplus F(f')) \circ \Delta_{F(X)} \\
&\overset{(***)}{=} F(f) + F(f'),
\end{aligned}$$

em (*) e (***) utilizamos o Lema 3.14 e em (**) utilizamos que $\Delta_{F(X)} = f_X \circ F(\Delta_X)$, $\delta_{F(Y)} = F(\delta_Y) \circ f_Y^{-1}$ e $F(f) \oplus F(f') = f_Y \circ F(f \oplus f') \circ f_X^{-1}$. Portanto, $F(f + f') = F(f) + F(f')$ e F é aditivo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ um produto de X e Y. Então, pela Proposição 3.10, $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, i_X, i_Y)$ é uma soma direta de X e Y (i_X e i_Y são morfismos como na prova da Proposição 3.10). Por (ii), $(F(X \oplus Y), F(\pi_X), F(\pi_Y), F(i_X), F(i_Y))$ é uma soma direta e, pela Proposição 3.8, $(F(X \oplus Y), F(\pi_X), F(\pi_Y))$ é um produto de $F(X)$ e $F(Y)$. Logo, F preserva produto. A implicação (ii) $\Rightarrow$ (iv) é análoga.

Agora provemos a implicação (iii) $\Rightarrow$ (ii), a implicação (iv) $\Rightarrow$ (ii) é feita de maneira similar.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Seja $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, i_X, i_Y)$ uma soma direta de X e Y. Pela Proposição 3.8, $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ é um produto de X e Y.

Por (iii), $(F(X \oplus Y), F(\pi_X), F(\pi_Y))$ é um produto de $F(X)$ e $F(Y)$. Por outro lado, $(F(X) \oplus F(Y), \pi_{F(X)}, \pi_{F(Y)})$ é também um produto de $F(X)$ e $F(Y)$.

Assim, existe um único isomorfismo $f_{X,Y} : F(X \oplus Y) \to F(X) \oplus F(Y)$ tal que $\pi_{F(X)} \circ f_{X,Y} = F(\pi_X)$ e $\pi_{F(Y)} \circ f_{X,Y} = F(\pi_Y)$.

Mostremos que $(F(X \oplus Y), F(\pi_X), F(\pi_Y), F(i_X), F(i_Y))$ é uma soma direta de $F(X)$ e $F(Y)$. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) \arrow[d, "F(i_X)"] \arrow[ddl, "I_{F(X)}"'] \arrow[ddr, "0^{F(X)}_{F(Y)}"] & \\
 & F(X \oplus Y) \arrow[d, "f_{X,Y}"] & \\
F(X) & F(X) \oplus F(Y) \arrow[l, "\pi_{F(X)}"] \arrow[r, "\pi_{F(Y)}"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\pi_{F(X)} \circ f_{X,Y} \circ F(i_X) &= F(\pi_X) \circ F(i_X) \\
&= F(\pi_X \circ i_X) \\
&= F(I_X) \\
&= I_{F(X)}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{array}{rcl}\pi_{F(Y)} \circ f_{X,Y} \circ F(i_X) & = & F(\pi_Y) \circ F(i_X) \\ & = & F(\pi_Y \circ i_X) \\ & = & F(0_Y^X) \\ & \overset{(*)}{=} & 0_{F(Y)}^{F(X)},\end{array}$$

em (*) utilizamos o Lema 3.17. Sabemos, da Proposição 3.10, que o morfismo $i_{F(X)} : F(X) \to F(X) \oplus F(Y)$ é o único que comuta tal diagrama. Assim, $i_{F(X)} = f_{X,Y} \circ F(i_X)$. Com raciocínio inteiramente análogo, resulta que $i_{F(Y)} = f_{X,Y} \circ F(i_Y)$.

Portanto, $\pi_{F(X)} \circ i_{F(X)} = \pi_{F(X)} \circ f_{X,Y} \circ F(i_X) = I_{F(X)}$ e da mesma forma $\pi_{F(Y)} \circ i_{F(Y)} = I_{F(Y)}$.

Agora observamos que como $(F(X) \oplus F(Y), \pi_{F(X)}, \pi_{F(Y)})$ é um produto de $F(X)$ e $F(Y)$ segue, pela Proposição 3.10, que $(F(X) \oplus F(Y), \pi_{F(X)}, \pi_{F(Y)}, i_{F(X)}, i_{F(Y)})$ é uma soma direta de $F(X)$ e $F(Y)$. Daí, $I_{F(X) \oplus F(Y)} = i_{F(X)} \circ \pi_{F(X)} + i_{F(Y)} \circ \pi_{F(Y)}$. Assim,

$$\begin{array}{rcl}I_{F(X \oplus Y)} & = & f_{X,Y}^{-1} \circ I_{F(X) \oplus F(Y)} \circ f_{X,Y} \\ & = & f_{X,Y}^{-1} \circ (i_{F(X)} \circ \pi_{F(X)} + i_{F(Y)} \circ \pi_{F(Y)}) \circ f_{X,Y} \\ & = & f_{X,Y}^{-1} \circ i_{F(X)} \circ \pi_{F(X)} \circ f_{X,Y} + f_{X,Y}^{-1} \circ i_{F(Y)} \circ \pi_{F(Y)} \circ f_{X,Y} \\ & = & F(i_X) \circ F(\pi_X) + F(i_Y) \circ F(\pi_Y).\end{array}$$

■

Teorema 3.20 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias aditivas, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores tais que (F, G, α) seja uma adjunção de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$. Então F e G são funtores aditivos.*

Demonstração: Provemos que G é aditivo. Para isso, utilizamos a proposição anterior, mostrando que G preserva produtos. Seja $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ um produto de X e Y objetos em $\mathcal{D}$. Precisamos mostrar que $(G(X \oplus Y), G(\pi_X), G(\pi_Y))$ é um produto de $G(X)$ e $G(Y)$.

Seja $(W, p_{G(X)}, p_{G(Y)})$ uma tripla tal que $p_{G(X)} : W \to G(X)$ e $p_{G(Y)} : W \to G(Y)$ sejam morfismos em $\mathcal{C}$. Consideremos os isomorfismos naturais

$$\alpha_{W,X} : Hom_{\mathcal{D}}(F(W), X) \to Hom_{\mathcal{C}}(W, G(X))$$

$$\alpha_{W,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(F(W), Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(W, G(Y))$$

e portanto, existem únicos morfismos $q_X : F(W) \to X$ e $q_Y : F(W) \to Y$ tais que

$$\alpha_{W,X}(q_X) = p_{G(X)} \text{ e } \alpha_{W,Y}(q_Y) = p_{G(Y)}.$$

Como $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ é um produto, existe um único morfismo $\phi : F(W) \to X \oplus Y$ tal que $q_X = \pi_X \circ \phi$ e $q_Y = \pi_Y \circ \phi$. Consideremos também o isomorfismo natural

$$\alpha_{W,X\oplus Y} : Hom_{\mathcal{D}}(F(W), X \oplus Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(W, G(X \oplus Y)).$$

Relativo ao morfismo ϕ, existe um único morfismo $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(W, G(X \oplus Y))$ tal que $\psi = \alpha_{W,X\oplus Y}(\phi)$. Como α é uma transformação natural, vale a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(F(W), X \oplus Y) \arrow[r, "\alpha_{W,X\oplus Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(I_W),\pi_X)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(W, G(X \oplus Y)) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(I_W,G(\pi_X))"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(F(W), X) \arrow[r, "\alpha_{W,X}"'] & Hom_{\mathcal{C}}(W, G(X)).
\end{tikzcd}$$

Notemos que

$$(\alpha_{W,X} \circ Hom_{\mathcal{D}}(F(I_W), \pi_X))(\phi) = \alpha_{W,X}(\pi_X \circ \phi) = \alpha_{W,X}(q_X) = p_{G(X)}$$

e

$$(Hom_{\mathcal{C}}(I_W, G(\pi_X)) \circ \alpha_{W,X\oplus Y})(\phi) = Hom_{\mathcal{C}}(I_W, G(\pi_X))(\psi) = G(\pi_X) \circ \psi.$$

Pela comutividade do diagrama, segue que $p_{G(X)} = G(\pi_X) \circ \psi$. De maneira análoga, obtemos $p_{G(Y)} = G(\pi_Y) \circ \psi$.

Provemos que ψ é única. Suponhamos que exista $\psi' : W \to G(X \oplus Y)$ tal que $p_{G(X)} = G(\pi_X) \circ \psi'$ e $p_{G(Y)} = G(\pi_Y) \circ \psi'$. Como $\alpha_{W,X\oplus Y}$ é isomorfismo, existe um único morfismo $\phi' : F(W) \to X \oplus Y$ tal que $\alpha_{W,X\oplus Y}(\phi') = \psi'$. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(W, G(X \oplus Y)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{W,X\oplus Y}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(I_W,G(\pi_X))"'] & Hom_{\mathcal{D}}(F(W), X \oplus Y) \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(F(I_W),\pi_X)"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(W, G(X)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{W,X}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(F(W), X).
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(Hom_{\mathcal{D}}(F(I_W), \pi_X) \circ \alpha^{-1}_{W,X\oplus Y})(\psi') &= Hom_{\mathcal{D}}(F(I_W), \pi_X)(\alpha^{-1}_{W,X\oplus Y}(\psi')) \\
&= Hom_{\mathcal{D}}(F(I_W), \pi_X)(\phi') \\
&= \pi_X \circ \phi',
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\alpha_{W,X}^{-1} \circ Hom_{\mathcal{C}}(I_W, G(\pi_X)))(\psi') &= \alpha_{W,X}^{-1}(Hom_{\mathcal{C}}(I_W, G(\pi_X))(\psi')) \\
&= \alpha_{W,X}^{-1}(G(\pi_X) \circ \psi') \\
&= \alpha_{W,X}^{-1}(p_{G(X)}) \\
&= q_X.
\end{aligned}$$

Logo, $\pi_X \circ \phi' = q_X$. Analogamente, $\pi_Y \circ \phi' = q_Y$. Portanto, da unicidade de ϕ segue que $\phi' = \phi$. Assim, $\psi' = \psi$. Logo, $(G(X \oplus Y), G(\pi_X), G(\pi_Y))$ é um produto de $G(X)$ e $G(Y)$. Para mostrar que F é aditivo, a prova é similar. ■

Definição 3.21 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita abeliana se*

(i) $\mathcal{C}$ *é aditiva;*

(ii) *todo morfismo em $\mathcal{C}$ possui núcleo e conúcleo;*

(iii) *todo monomorfismo é um núcleo e todo epimorfismo é um conúcleo.*

Exemplo 3.22 Seja R um anel. A categoria ${}_R\mathcal{M}$ é abeliana. De fato, pois a mesma é claramente aditiva. Dado um morfismo de R-módulos $f : X \to Y$, seu núcleo é o par $(Ker(f), i)$, em que $Ker(f) = \{m \in X : f(m) = 0\}$ e $i : Ker(f) \to X$ é a inclusão canônica.

O conúcleo de f é o par $(Y/Im(f), \pi)$, em que $Y/Im(f)$ é o quociente do R-módulo Y pela $Im(f)$ e $\pi : Y \to Y/Im(f)$ é a projeção canônica.

Dado um monomorfismo $f : Z \to W$, este é núcleo do morfismo $p : W \to W/f(Z)$ (projeção canônica) e, para um epimorfismo qualquer, $g : W \to Z$, este é conúcleo do morfismo $j : Ker(g) \to W$ (inclusão canônica).

Lema 3.23 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Então todo monomorfismo em $\mathcal{C}$ é um núcleo de seu conúcleo. Dualmente, todo epimorfismo em $\mathcal{C}$ é um conúcleo de seu núcleo.*

Demonstração: Sejam $f : X \to Y$ um epimorfismo em $\mathcal{C}$ e $(Ker(f), k)$ um núcleo de f. Como $\mathcal{C}$ é abeliana, por (iii) da definição acima, existe um morfismo $g : Z \to X$ tal que o par (Y, f) é um conúcleo de g. Assim, $f \circ g = 0_Y^Z$.

Como $(Ker(f), k)$ é um núcleo de f, existe um único morfismo $u : Z \to Ker(f)$ tal que $k \circ u = g$. Mostremos que o par (Y, f) é um conúcleo de k. Sabemos que $f \circ k = 0_Y^{Ker(f)}$. Seja (W, h), $h : X \to W$, um outro par tal que $h \circ k = 0_W^{Ker(f)}$. Então

$$\begin{aligned}
h \circ g &= h \circ (k \circ u) \\
&= (h \circ k) \circ u \\
&= 0_W^{Ker(f)} \circ u \\
&= 0_W^Z.
\end{aligned}$$

Como (Y, f) é um conúcleo de g, existe um único morfismo $u' : Y \to W$ tal que $u' \circ f = h$ e segue o desejado. O outro caso é similar. ■

Definição 3.24 *Seja k um corpo. Uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ é dita k-linear se, para quaisquer objetos $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um k-espaço vetorial e a composição de morfismos é k-bilinear.*

Exemplo 3.25 A categoria $Vect_k$ é claramente uma categoria k-linear, em que o produto por escalar no conjunto dos morfismos é definido ponto a ponto, para cada morfismo.

Definição 3.26 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias k-lineares. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é k-linear se F é aditivo e $F(rf) = rF(f)$, para todo $r \in k$ e todo morfismo f em $\mathcal{C}$.*

Exemplo 3.27 O funtor $D : Vect_k \to Vect_k$ do Exemplo 2.11 é k-linear.

Sejam V e W k-espaços vetoriais. Observamos que, para quaisquer $f, g \in Hom_{Vect_k}(V, W)$ e $r \in k$, temos

$$\begin{aligned}
((f + rg)^*(h))(v) &= (h \circ (f + rg))(v) \\
&= h((f + rg)(v)) \\
&= h(f(v) + rg(v)) \\
&= h(f(v)) + rh(g(v)) \\
&= f^*(h)(v) + rg^*(h)(v) \\
&= (f^* + rg^*)(h)(v),
\end{aligned}$$

para quaisquer $h \in W^*$ e $v \in V$. Portanto, $(f + rg)^* = f^* + rg^*$. Assim,

$$\begin{aligned}
D(f + rg) &= (f + rg)^{**} \\
&= (f^* + rg^*)^* \\
&= f^{**} + rg^{**} \\
&= D(f) + rD(g).
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Equivariantização de categorias k-lineares

O objetivo desse capítulo é definir uma nova categoria, chamada *equivariantização*, a partir de uma categoria k-linear dada. Para isso, necessitamos da noção de ação de um grupo em uma categoria k-linear. Como motivação para essa construção, observamos que para uma categoria k-linear finita (que não nos convém definir agora) existe um resultado, que pode ser encontrado em [6], que nos garante que ela será equivalente a uma categoria de A-módulos de dimensão finita sobre um corpo k, sendo A uma álgebra finito dimensional. Isso origina uma relação com a teoria de representações, que deu origem à construção da equivariantização.

Seja G um grupo, denotamos por 1_G o elemento neutro de G.

Definição 4.1 *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria k-linear. Uma ação de G em $\mathcal{C}$ é uma coleção de funtores k-lineares $\{F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\}_{g\in G}$ munida de isomorfismos naturais*

$$\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh} \text{ } e \text{ } \gamma_0 : Id_{\mathcal{C}} \to F_{1_G},$$

tais que, para quaisquer $f, g, h \in G$ e $X \in Ob(\mathcal{C})$, valem as igualdades

$$(\gamma_{gh,f})_X \circ (\gamma_{g,h})_{F_f(X)} = (\gamma_{g,hf})_X \circ F_g((\gamma_{h,f})_X) \tag{4.1}$$

$$(\gamma_{g,1_G})_X \circ F_g((\gamma_0)_X) = (\gamma_{1_G,g})_X \circ (\gamma_0)_{F_g(X)}, \tag{4.2}$$

ou seja, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_h \circ F_f)(X) \arrow[r, "F_g((\gamma_{h,f})_X)"] \arrow[d, "(\gamma_{g,h})_{F_f(X)}"'] & (F_g \circ F_{hf})(X) \arrow[d, "(\gamma_{g,hf})_X"] \\
(F_{gh} \circ F_f)(X) \arrow[r, "(\gamma_{gh,f})_X"'] & F_{ghf}(X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F_g(X) \arrow[r, "(\gamma_0)_{F_g(X)}"] \arrow[d, "F_g((\gamma_0)_X)"'] & (F_{1_G} \circ F_g)(X) \arrow[d, "(\gamma_{1_G,g})_X"] \\
(F_g \circ F_{1_G})(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,1_G})_X"'] & F_g(X).
\end{tikzcd}$$

Intuitivamente, o primeiro diagrama nos diz que essa ação é “associativa nos funtores” e o segundo diagrama nos diz que F_{1_G} é como uma espécie de “unidade”.

Lema 4.2 *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria k-linear tal que G age em $\mathcal{C}$. Para cada $g \in G$, o funtor $F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é uma equivalência.*

Demonstração: Seja $g \in G$. Consideremos os funtores $F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e $F_{g^{-1}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Mostremos que $F_g \circ F_{g^{-1}} \sim Id_{\mathcal{C}}$. Por hipótese existem isomorfismos naturais

$$\gamma_{g,g^{-1}} : F_g \circ F_{g^{-1}} \to F_{gg^{-1}} = F_{1_G} \quad \text{e} \quad \gamma_0 : Id_{\mathcal{C}} \to F_{1_G}.$$

A composição

$$\mu = (\gamma_0)^{-1} \circ \gamma_{g,g^{-1}} : F_g \circ F_{g^{-1}} \to Id_{\mathcal{C}}$$

é um isomorfismo natural, pois μ_X é claramente um isomorfismo para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ e o seguinte diagrama comuta (ambos diagramas menores comutam)

$$\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_{g^{-1}})(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,g^{-1}})_X"] \arrow[d, "(F_g \circ F_{g^{-1}})(f)"] & F_{1_G}(X) \arrow[r, "((\gamma_0)^{-1})_X"] \arrow[d, "F_{1_G}(f)"] & X \arrow[d, "f"] \\
(F_g \circ F_{g^{-1}})(Y) \arrow[r, "(\gamma_{g,g^{-1}})_Y"'] & F_{1_G}(Y) \arrow[r, "((\gamma_0)^{-1})_Y"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Analogamente, $F_{g^{-1}} \circ F_g \sim Id_{\mathcal{C}}$. ■

Exemplo 4.3 Sejam G um grupo e A uma k-álgebra de dimensão finita. Consideremos que, para quaisquer $g, h \in G$, existam morfismos de álgebras $g_* : A \to A$ e elementos $\theta_{g,h} \in U(A)$ (conjunto dos elementos invertíveis de A) tais que, para todo $a \in A$ e para quaisquer $g, h, f \in G$, tenhamos

$$(1_G)_* = I_A, \tag{4.3}$$
$$\theta_{g,h} h_*(g_*(a)) = (gh)_*(a)\theta_{g,h}, \tag{4.4}$$
$$\theta_{gh,f} f_*(\theta_{g,h}) = \theta_{g,hf}\theta_{h,f}. \tag{4.5}$$

Observamos que de (4.3) e (4.4), fazendo $h = g = 1_G$, obtemos que

$$\theta_{1_G,1_G} a = a\theta_{1_G,1_G}, \tag{4.6}$$

para todo $a \in A$, isso nos diz que $\theta_{1_G,1_G}$ está no centro da álgebra A. Utilizando (4.5), com $h = f = 1_G$, obtemos $\theta_{g,1_G} 1_{G*}(\theta_{g,1_G}) = \theta_{g,1_G}\theta_{1_G,1_G}$, ou seja, $\theta_{g,1_G}\theta_{g,1_G} = \theta_{g,1_G}\theta_{1_G,1_G}$ e portanto, para qualquer $g \in G$,

$$\theta_{g,1_G} = \theta_{1_G,1_G}. \tag{4.7}$$

Utilizando (4.5), com $h = g = 1_G$, obtemos $\theta_{1_G,f} f_*(\theta_{1_G,1_G}) = \theta_{1_G,f}\theta_{1_G,f}$, ou seja,

$$f_*(\theta_{1_G,1_G}) = \theta_{1_G,f}, \tag{4.8}$$

para todo $f \in G$.

Consideremos a categoria ${}_A\mathfrak{m}$ dos A-módulos à esquerda de dimensão finita sobre k, cujos morfismos são morfismos de k-espaços vetoriais e de A-módulos à esquerda. É claro que ${}_A\mathfrak{m}$ é uma categoria k-linear. O objetivo desse exemplo é mostrarmos que temos uma ação de G em ${}_A\mathfrak{m}$.

Seja $g \in G$. Definimos o funtor $F_g : {}_A\mathfrak{m} \to {}_A\mathfrak{m}$, fazendo para cada $M \in Ob({}_A\mathfrak{m})$, $F_g(M) = M$ (igualdade como conjuntos) com a ação dada por $a \cdot_g m = g_*(a)m$, para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$. Dado um morfismo $f : M \to N$ em ${}_A\mathfrak{m}$, definimos $F_g(f) = f$. Disso segue que F_g é um funtor k-linear, para todo $g \in G$.

Sejam $g, h \in G$, $M \in Ob({}_A\mathfrak{m})$ e $m \in M$. Definimos $\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh}$ por $(\gamma_{g,h})_M(m) = \theta_{g,h}m$.

Agora escrevemos a ação de A em $(F_g \circ F_h)(M) = F_g(F_h(M))$. Primeiramente, $F_h(M) = (M, \cdot_h)$, isto é, $a \cdot_h m = h_*(a)m$ e portanto, $F_g(F_h(M)) = F_g(M, \cdot_h)$ e a ação de A em $F_g(M, \cdot_h)$ é dada por $a \cdot_g^{'} m = g_*(a) \cdot_h m = h_*(g_*(a))m$.

Verifiquemos que $(\gamma_{g,h})_M : (F_g \circ F_h)(M) \to F_{gh}(M)$ é um isomorfismo de A-módulos à esquerda. De fato,

$$\begin{array}{rcl}
(\gamma_{g,h})_M(a \cdot_g m) & = & \theta_{g,h}(a \cdot_g m) \\
& = & \theta_{g,h}(g_*(a) \cdot_h m) \\
& = & \theta_{g,h}((h_*(g_*(a))m) \\
& = & (\theta_{g,h}(h_*(g_*(a))))m \\
& \overset{(4.4)}{=} & ((gh)_*(a)\theta_{g,h})m \\
& = & (gh)_*(a)(\theta_{g,h}m) \\
& = & a \cdot_{gh} (\theta_{g,h}m) \\
& = & a \cdot_{gh} (\gamma_{g,h})_M(m).
\end{array}$$

Além disso, $\gamma_{g,h}$ é uma transformação natural. Sejam $M, N \in Ob({}_A\mathfrak{m})$ e $f : M \to N$ um morfismo em ${}_A\mathfrak{m}$. Verifiquemos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_h)(M) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_M"] \arrow[d, "(F_g\circ F_h)(f)"'] & F_{gh}(M) \arrow[d, "F_{gh}(f)"] \\
(F_g \circ F_h)(N) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_N"'] & F_{gh}(M).
\end{tikzcd}$$

De fato, seja $m \in (F_g \circ F_h)(M)$. Então

$$\begin{array}{rcl}
(F_{gh}(f) \circ (\gamma_{g,h})_M)(m) & = & (f \circ (\gamma_{g,h})_M)(m) \\
& = & f((\gamma_{g,h})_M(m)) \\
& = & f(\theta_{g,h}m) \\
& = & \theta_{g,h}f(m) \\
& = & (\gamma_{g,h})_N(f(m)) \\
& = & (\gamma_{g,h})_N((F_g \circ F_h)(f)(m)) \\
& = & ((\gamma_{g,h})_N \circ (F_g \circ F_h)(f))(m).
\end{array}$$

Para cada $M \in Ob({}_A\mathfrak{m})$, $(\gamma_{g,h})_M$ é um isomorfismo. Basta definirmos $(\gamma_{g,h})^{-1}_M(m) = \theta^{-1}_{g,h}m$, para quaisquer $m \in M$ e $g, h \in G$.

Seja $M \in Ob({}_A\mathfrak{m})$. Definindo $\gamma_0 : Id_{{}_A\mathfrak{m}} \to F_{1_G}$ por $(\gamma_0)_M(m) = \theta^{-1}_{1_G,1_G}m$ para todo $m \in M$, segue que $(\gamma_0)_M$ é um isomorfismo de A-módulos à esquerda. Logo, γ_0 é um isomorfismo natural.

Finalmente, verifiquemos as igualdades (4.1) e (4.2) para concluirmos que temos uma ação de G em ${}_A\mathfrak{m}$. Sejam $g, h, f \in G$, $M \in Ob({}_A\mathfrak{m})$

e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned}
((\gamma_{g,hf})_M \circ F_g((\gamma_{h,f})_M))(m) &= (\gamma_{g,hf})_M(F_g((\gamma_{h,f})_M)(m)) \\
&= (\gamma_{g,hf})_M((\gamma_{h,f})_M(m)) \\
&= (\gamma_{g,hf})_M(\theta_{h,f}m) \\
&= (\theta_{g,hf}\theta_{h,f})m \\
&\overset{(4.5)}{=} \theta_{gh,f}f_*(\theta_{g,h})m \\
&= (\gamma_{gh,f})_M(f_*(\theta_{g,h})m) \\
&= (\gamma_{gh,f})_M(\theta_{g,h} \cdot_f m) \\
&= (\gamma_{gh,f})_M((\gamma_{g,h})_{F_f(M)}(m)) \\
&= ((\gamma_{gh,f})_M \circ (\gamma_{g,h})_{F_f(M)})(m).
\end{aligned}$$

Seja $m \in F_g(M)$. Então

$$\begin{aligned}
((\gamma_{1_G,g})_M \circ (\gamma_0)_{F_g(M)})(m) &= (\gamma_{1_G,g})_M((\gamma_0)_{F_g(M)}(m)) \\
&= (\gamma_{1_G,g})_M(\theta^{-1}_{1_G,1_G} \cdot_g m) \\
&= (\gamma_{1_G,g})_M(g_*(\theta^{-1}_{1_G,1_G})m) \\
&= \theta_{1_G,g}g_*(\theta^{-1}_{1_G,1_G})m \\
&= \theta_{1_G,g}(g_*(\theta_{1_G,1_G}))^{-1}m \\
&\overset{(4.8)}{=} \theta_{1_G,g}(\theta_{1_G,g})^{-1}m \\
&= m \\
&\overset{(4.7)}{=} \theta_{g,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G}m \\
&= (\gamma_{g,1_G})_M(\theta^{-1}_{1_G,1_G}m) \\
&= (\gamma_{g,1_G})_M((\gamma_0)_M(m)) \\
&= (\gamma_{g,1_G})_M(F_g((\gamma_0)_M)(m)) \\
&= ((\gamma_{g,1_G})_M \circ F_g((\gamma_0)_M))(m).
\end{aligned}$$

Definição 4.4 *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria k-linear tal que G age em $\mathcal{C}$. Um objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$ é dito equivariante, se existe uma família $s = \{s_g : F_g(X) \to X\}_{g \in G}$ de isomorfismos em $\mathcal{C}$ tais que $s_{1_G} \circ (\gamma_0)_X = I_X$ e $s_g \circ F_g(s_h) = s_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_X$, i.e., os seguintes diagramas são comutativos*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(\gamma_0)_X"] \arrow[dr, "I_X"'] & F_{1_G}(X) \arrow[d, "s_{1_G}"] \\
 & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_h)(X) \arrow[r, "F_g(s_h)"] \arrow[d, "(\gamma_{g,h})_X"'] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"] \\
F_{gh}(X) \arrow[r, "s_{gh}"'] & X,
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $g, h \in G$.

Definição 4.5 *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria k-linear tal que G age em $\mathcal{C}$. A categoria $\mathcal{C}^G$, chamada equivariantização de $\mathcal{C}$ por G, é definida por*

(i) *$Ob(\mathcal{C}^G)$ é a coleção dos pares (X, s), em que X é um objeto equivariante de $\mathcal{C}$ e s a família de isomorfismos associada.*

(ii) *Dados $(X, s), (Y, r) \in Ob(\mathcal{C}^G)$, um morfismo $f : (X, s) \to (Y, r)$ em $\mathcal{C}^G$ (ou um morfismo equivariante) é um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ s_g = r_g \circ F_g(f)$, ou seja, o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} F_g(X) \arrow[r, "F_g(f)"] \arrow[d, "s_g"'] & F_g(Y) \arrow[d, "r_g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

para todo $g \in G$.

Consideremos o Exemplo 4.3. Introduzimos no k-espaço vetorial $A \otimes_k kG$ o produto

$$(a \otimes g)(b \otimes h) = \theta_{g,h} h_*(a) b \otimes gh,$$

para quaisquer $g, h \in G$ e $a, b \in A$.

Com esse produto, $A \otimes_k kG$ é uma k-álgebra. De fato, o elemento $\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G \in A \otimes_k kG$ é sua unidade, pois

$$\begin{aligned} (\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)(a \otimes g) &= \theta_{1_G,g} g_*(\theta^{-1}_{1_G,1_G}) a \otimes 1_G g \\ &= \theta_{1_G,g} (g_*(\theta_{1_G,1_G}))^{-1} a \otimes g \\ &\overset{(4.8)}{=} \theta_{1_G,g} \theta^{-1}_{1_G,g} a \otimes g \\ &= a \otimes g \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (a \otimes g)(\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G) &= \theta_{g,1_G} (1_G)_*(a) \theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g 1_G \\ &\overset{(4.3)}{=} \theta_{g,1_G} a \theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g \\ &\overset{(4.7)}{=} \theta_{1_G,1_G} a \theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g \\ &\overset{(4.6)}{=} a \theta_{1_G,1_G} \theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g \\ &= a \otimes g, \end{aligned}$$

para quaisquer $g \in G$ e $a \in A$.

O produto é associativo. Sejam $g, h, f \in G$ e $a, b, c \in A$. Então

$$\begin{aligned}
(a \otimes g)((b \otimes h)(c \otimes f)) &= (a \otimes g)(\theta_{h,f} f_*(b)c \otimes hf) \\
&= \theta_{g,hf}(hf)_*(a)\theta_{h,f} f_*(b)c \otimes g(hf) \\
&= \theta_{g,hf}((hf)_*(a)\theta_{h,f}) f_*(b)c \otimes g(hf) \\
&= \theta_{g,hf}(\theta_{h,f} f_*(h_*(a))) f_*(b)c \otimes (gh)f \\
&= (\theta_{g,hf}\theta_{h,f}) f_*(h_*(a)) f_*(b)c \otimes (gh)f \\
&= (\theta_{gh,f} f_*(\theta_{g,h})) f_*(h_*(a)) f_*(b)c \otimes (gh)f \\
&= \theta_{gh,f}(f_*(\theta_{g,h}) f_*(h_*(a)) f_*(b))c \otimes (gh)f \\
&= \theta_{gh,f} f_*(\theta_{g,h} h_*(a)b)c \otimes (gh)f \\
&= (\theta_{g,h} h_*(a)b \otimes gh)(c \otimes f) \\
&= ((a \otimes g)(b \otimes h))(c \otimes f).
\end{aligned}$$

Uma vez que $A \otimes_k kG$ é uma k-álgebra, faz sentido enunciarmos o próximo resultado que está relacionado ao que foi dito na introdução desse capítulo. Além disso, o mesmo nos traz um examplo "mais concreto" de uma equivariantização.

Teorema 4.6 *Nas condições acima, existe o seguinte isomorfismo entre categorias*

$$({}_A\mathfrak{m})^G \simeq {}_{(A \otimes_k kG)}\mathfrak{m}$$

Demonstração: Definimos o funtor $H : ({}_A\mathfrak{m})^G \to {}_{(A\otimes_k kG)}\mathfrak{m}$ tal que, para todo $(M, s) \in Ob(({}_A\mathfrak{m})^G)$, $H((M, s)) = M$, com a ação dada por $(a \otimes g)m = s_g(am)$. De fato,

$$\begin{aligned}
1_{A\otimes_k kG} \cdot m &= (\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G) \cdot m \\
&= s_{1_G}(\theta^{-1}_{1_G,1_G} m) \\
&= s_{1_G}((\gamma_0)_M(m)) \\
&= (s_{1_G} \circ (\gamma_0)_M)(m) \\
&= I_M(m) = m,
\end{aligned}$$

para todo $m \in M$. Sejam $a, b \in A$, $g, h \in H$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned}
(a \otimes g)((b \otimes h)m) &= (a \otimes g)(s_h(bm)) \\
&= s_g(as_h(bm)) \\
&= s_g(s_h(a \cdot_h bm)) \\
&= s_g(s_h(h_*(a)bm)) \\
&= s_g(F_g(s_h)(h_*(a)bm)) \\
&= (s_g \circ F_g(s_h))(h_*(a)bm) \\
&= (s_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_M)(h_*(a)bm) \\
&= s_{gh}((\gamma_{g,h})_M(h_*(a)bm)) \\
&= s_{gh}(\theta_{g,h} h_*(a)bm) \\
&= (\theta_{g,h} h_*(a)b \otimes gh)m \\
&= ((a \otimes g)(b \otimes h))m.
\end{aligned}$$

Dado $f : (M,s) \to (N,r)$ um morfismo equivariante, temos $H(f) = f : M \to N$ um morfismo de $A \otimes_k kG$-módulos. De fato, como f é equivariante, temos $f \circ s_g = r_g \circ F_g(f)$ para todo $g \in G$ e assim,

$$\begin{array}{rcl} f((a \otimes g)m) & = & f(s_g(am)) \\ & = & r_g(F_g(f)(am)) \\ & = & r_g(f(am)) \\ & = & r_g(af(m)) \\ & = & (a \otimes g)f(m), \end{array}$$

para quaisquer $a \in A$, $g \in G$ e $m \in M$.

Definimos o funtor $H' : {}_{(A \otimes_k kG)}\mathfrak{m} \to ({}_A\mathfrak{m})^G$ por $H'(M) = (M,s)$, em que $s = \{s_g : F_g(M) = M \to M\}$ é a família definida por $s_g(m) = (1 \otimes g)m$ para todo $g \in G$ e a estrutura de A-módulo à esquerda de M é dada por $a \cdot m = (a\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m$ para todo $a \in A$. De fato,

$$\begin{array}{rcl} a \cdot (b \cdot m) & = & a \cdot ((b\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\ & = & (a\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)((b\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\ & \overset{(*)}{=} & ((a\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)(b\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G))m \\ & = & (\theta_{1_G,1_G}(1_G)_*(a\theta^{-1}_{1_G,1_G})b\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m \\ & = & (\theta_{1_G,1_G}a\theta^{-1}_{1_G,1_G}b\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m \\ & \overset{(**)}{=} & (ab\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m \\ & = & (ab) \cdot m, \end{array}$$

para quaisquer $a, b \in A$. Na igualdade (*) usamos que M é um $A \otimes_k kG$-módulo e em (**) usamos (4.6). Claramente, $1 \cdot m = (1\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m = m$, uma vez que M é um $A \otimes_k kG$-módulo. Notemos também que

$$\begin{array}{rcl} s_g(a \cdot_g m) & = & s_g(g_*(a) \cdot m) \\ & = & s_g((g_*(a)\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\ & = & (1 \otimes g)((g_*(a)\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\ & = & ((1 \otimes g)(g_*(a)\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G))m \\ & = & (\theta_{g,1_G}(1_G)_*(1)g_*(a)\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g)m \\ & = & (\theta_{g,1_G}g_*(a)\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g)m \\ & \overset{(*)}{=} & (g_*(a) \otimes g)m \\ & = & (g_*(a\theta_{1_G,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G}) \otimes g)m \\ & \overset{(4.6)}{=} & (g_*(\theta_{1_G,1_G})g_*(a\theta^{-1}_{1_G,1_G}) \otimes g)m \\ & \overset{(4.8)}{=} & (\theta_{1_G,g}g_*(a\theta^{-1}_{1_G,1_G}) \otimes g)m \\ & = & ((a\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)(1 \otimes g))m \\ & = & a \cdot ((1 \otimes g)m) \\ & = & a \cdot s_g(m). \end{array}$$

Usamos em (*) as igualdades (4.7) e (4.6), nessa ordem. Para mostrarmos que s_g é um isomorfismo, basta encontrar um elemento inverso para $1 \otimes g$ em $A \otimes_k kG$. Consideremos o elemento $\theta^{-1}_{g,g^{-1}}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g^{-1}$. Temos

$$\begin{array}{rcl}
(1 \otimes g)(\theta^{-1}_{g,g^{-1}}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g^{-1}) & = & \theta_{g,g^{-1}}(g^{-1})_*(1)\theta^{-1}_{g,g^{-1}}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes gg^{-1} \\
& = & \theta_{g,g^{-1}}\theta^{-1}_{g,g^{-1}}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G \\
& = & \theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G \\
& = & 1_{A\otimes_k kG}
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl}
(\theta^{-1}_{g,g^{-1}}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes g^{-1})(1 \otimes g) & = & \theta_{g^{-1},g}g_*(\theta^{-1}_{g,g^{-1}}\theta^{-1}_{1_G,1_G}) \otimes g^{-1}g \\
& = & \theta_{g^{-1},g}g_*(\theta^{-1}_{g,g^{-1}}\theta^{-1}_{1_G,1_G}) \otimes 1_G \\
& = & \theta_{g^{-1},g}g_*(\theta^{-1}_{g,g^{-1}})g_*(\theta^{-1}_{1_G,1_G}) \otimes 1_G \\
& \overset{(*)}{=} & \theta_{g^{-1},g}\theta^{-1}_{g^{-1},g}\theta^{-1}_{g,1_G}\theta_{1_G,g}g_*(\theta^{-1}_{g,1_G}) \otimes 1_G \\
& = & \theta^{-1}_{g,1_G}\theta_{1_G,g}g_*(\theta^{-1}_{g,1_G}) \otimes 1_G \\
& \overset{(4.7)}{=} & \theta^{-1}_{1_G,1_G}\theta_{1_G,g}g_*(\theta^{-1}_{g,1_G}) \otimes 1_G \\
& = & \theta^{-1}_{1_G,1_G}\theta_{1_G,g}(g_*(\theta_{g,1_G}))^{-1} \otimes 1_G \\
& \overset{(4.7)}{=} & \theta^{-1}_{1_G,1_G}\theta_{1_G,g}(g_*(\theta_{1_G,1_G}))^{-1} \otimes 1_G \\
& \overset{(4.8)}{=} & \theta^{-1}_{1_G,1_G}\theta_{1_G,g}(\theta_{1_G,g})^{-1} \otimes 1_G \\
& = & \theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G \\
& = & 1_{A\otimes_k kG}.
\end{array}$$

Em (*) utilizamos a igualdade (4.5) para concluir que $\theta_{1_G,g}g_*(\theta_{g,g^{-1}}) = \theta_{g,1_G}\theta_{g^{-1},g}$ e assim, $(g_*(\theta_{g,g^{-1}}))^{-1} = \theta^{-1}_{g^{-1},g}\theta^{-1}_{g,1_G}\theta_{1_G,g}$.

Finalmente, mostremos que a família $s = \{s_g : F_g(M) = M \to M\}$ comuta os diagramas da Definição 4.4. Sejam $g, h \in G$, $M \in Ob({}_{(A\otimes_k kG)}\mathfrak{m})$ e $m \in M$. Então

$$\begin{array}{rcl}
(s_{1_G} \circ (\gamma_0)_M)(m) & = & s_{1_G}(\theta^{-1}_{1_G,1_G} \cdot m) \\
& = & s_{1_G}((\theta^{-1}_{1_G,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\
& = & (1 \otimes 1_G)((\theta^{-1}_{1_G,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\
& = & ((1 \otimes 1_G)(\theta^{-1}_{1_G,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G))m \\
& = & (\theta_{1_G,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m \\
& = & (\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m \\
& = & m
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl}
(s_g \circ F_g(s_h))(m) & = & s_g(F_g(s_h)(m)) \\
& = & s_g((1 \otimes h)m) \\
& = & (1 \otimes g)((1 \otimes h)m) \\
& = & ((1 \otimes g)(1 \otimes h))m \\
& = & (\theta_{g,h} h_*(1) \otimes gh)m \\
& = & (\theta_{g,h} \otimes gh)m \\
& \overset{(4.7)}{=} & ((\theta_{gh,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G})\theta_{g,h} \otimes gh)m \\
& \overset{(*)}{=} & (\theta_{gh,1_G}\theta_{g,h}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes gh)m \\
& = & (\theta_{gh,1_G} 1_{G*}(1)\theta_{g,h}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes gh)m \\
& = & ((1 \otimes gh)(\theta_{g,h}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G))m \\
& = & (1 \otimes gh)((\theta_{g,h}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\
& = & s_{gh}((\theta_{g,h}\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\
& = & s_{gh}(\theta_{g,h} \cdot m) \\
& = & s_{gh}((\gamma_{g,h})_M(m)) \\
& = & (s_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_M)(m).
\end{array}$$

Na igualdade (*) usamos o fato de que $\theta_{1_G,1_G}$ sendo central implica que $\theta^{-1}_{1_G,1_G}$ também o seja.

Seja $f : M \to N$ um morfismo em ${}_{(A\otimes_k kG)}\mathfrak{m}$. Definimos $H'(f) : (M,s) \to (N,r)$ por $H'(f) = f$. Mostremos que f é um morfismo equivariante. De fato,

$$\begin{array}{rcl}
f(a \cdot m) & = & f((a\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)m) \\
& = & (a\theta^{-1}_{1_G,1_G} \otimes 1_G)f(m) \\
& = & a \cdot f(m),
\end{array}$$

para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$. Também

$$\begin{array}{rcl}
(f \circ s_g)(m) & = & f(s_g(m)) \\
& = & f((1 \otimes g)m) \\
& = & (1 \otimes g)f(m) \\
& = & r_g(f(m)) \\
& = & r_g(F(f)(m)) \\
& = & (r_g \circ F(f))(m),
\end{array}$$

para todo $m \in F_g(M)$.

Seja $M \in Ob({}_{(A\otimes_k kG)}\mathfrak{m})$. Consideremos o $(A \otimes_k kG)$ - módulo à esquerda $(H \circ H')(M)$ com a ação denotada por $*$, em que $H'(M) =$

(M,s). Então

$$\begin{array}{rcl}(a\otimes g)*m & = & s_g(a\cdot m)\\ & = & s_g((a\theta^{-1}_{1_G,1_G}\otimes 1_G)m)\\ & = & (1\otimes g)((a\theta^{-1}_{1_G,1_G}\otimes 1_G)m)\\ & = & (\theta_{g,1_G}(1_G)_*(1)a\theta^{-1}_{1_G,1_G}\otimes g)m\\ & = & (\theta_{g,1_G}\theta^{-1}_{1_G,1_G}a\otimes g)m\\ & = & (a\otimes g)m,\end{array}$$

para quaisquer $a\in A$, $g\in G$ e $m\in M$. Logo, $(H\circ H')(M)=M=Id_{(A\otimes_k kG)\mathfrak{m}}(M)$, ou seja, $H\circ H'=Id_{(A\otimes_k kG)\mathfrak{m}}$.

Seja $(M,s)\in({}_A\mathfrak{m})^G$. Consideremos $((H'\circ H)((M,s)),r)$ um objeto equivariante cuja ação em M é denotada por $*$. Então

$$\begin{array}{rcl}a*m & = & (a\theta^{-1}_{1_G,1_G}\otimes 1_G)m\\ & = & s_{1_G}(a\theta^{-1}_{1_G,1_G}m)\\ & = & s_{1_G}(\theta^{-1}_{1_G,1_G}am)\\ & = & s_{1_G}((\gamma_0)_M(am))\\ & = & (s_{1_G}\circ(\gamma_0)_M)(am)\\ & = & am,\end{array}$$

para quaisquer $a\in A$ e $m\in M$. Além disso,

$$\begin{array}{rcl}r_g(m) & = & (1\otimes g)m\\ & = & s_g(m),\end{array}$$

para todo $m\in M$. Portanto, $H'\circ H=Id_{({}_A\mathfrak{m})^G}$. ∎

Teorema 4.7 *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria k-linear tal que G age em $\mathcal{C}$. Então a categoria $\mathcal{C}^G$ é também k-linear.*

Demonstração: Como a categoria $\mathcal{C}$ é aditiva, existe $Z\in Ob(\mathcal{C})$ objeto zero. Para cada $g\in G$, $F_g:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ é um funtor aditivo (portanto, preserva produto) e assim, pelo Lema 3.17 (i), $F_g(Z)\in Ob(\mathcal{C})$ é um objeto zero. Logo, existe um único isomorfismo $s_g:F_g(Z)\to Z$. Consideremos a coleção $s=\{s_g:F_g(Z)\to Z\}$.

Afirmação (i) : (Z,s) é um objeto zero em $\mathcal{C}^G$.

De fato, sabemos que $Hom_{\mathcal{C}}(Z,Z)=\{I_Z\}$. Assim, para todo $g\in G$, $s_{1_G}\circ(\gamma_0)_Z:Z\to Z$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, ou seja, $s_{1_G}\circ(\gamma_0)_Z=I_Z$.

Sejam $g,h\in G$. Então $(F_g\circ F_h)(Z)$ é também um objeto zero em $\mathcal{C}$ (Lema 3.17 (i)) e assim, existe um único isomorfismo entre $(F_g\circ F_h)(Z)$ e Z.

Por outro lado, $s_g \circ F_g(s_h) : (F_g \circ F_h)(Z) \to Z$ e $s_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_Z : (F_g \circ F_h)(Z) \to Z$ são isomorfismos e portanto, $s_g \circ F_g(s_h) = s_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_Z$. Mostramos então que (Z, s) é um objeto em $\mathcal{C}^G$.

Provemos a outra parte da afirmação, isto é, que (Z, s) é um objeto zero na categoria $\mathcal{C}^G$. Seja $(X, r) \in Ob(\mathcal{C}^G)$.

Sabemos que $Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{\psi_X\}$ e $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{\phi_X\}$. Observemos que $s_g \circ F_g(\phi_X)$ e $\phi_X \circ r_g$ são morfimos $Hom_{\mathcal{C}}(F_g(X), Z)$ que é um conjunto unitário, para cada $g \in G$. Logo, $s_g \circ F_g(\phi_X) = \phi_X \circ r_g$. Analogamente, $s_g \circ F_g(\psi_X) = \psi_X \circ r_g$. Portanto, ϕ_X e ψ_X são morfismos equivariantes.

Suponhamos que exista um outro morfismo equivariante $\xi : (Z, s) \to (X, r)$. Por definição, ξ é um morfismo em $\mathcal{C}$ e portanto, $\xi = \phi_X$. Podemos dizer o mesmo para o morfismo ψ_X. Logo, (Z, s) é um objeto zero em $\mathcal{C}^G$.

Para o que segue, consideremos quaisquer $(X, s), (Y, r) \in Ob(\mathcal{C}^G)$.

Afirmação (ii): $Hom_{\mathcal{C}^G}((X, s), (Y, r))$ é um k-espaço vetorial com a soma de morfismos e produto por escalar induzidos pela categoria $\mathcal{C}$.

De fato, sejam $f, l : (X, s) \to (Y, r)$ morfismos em $\mathcal{C}^G$. Em particular, $f, l : X \to Y$ são morfismos em $\mathcal{C}$ onde temos definida uma soma $f + l : X \to Y$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(f + l) \circ s_g &= f \circ s_g + l \circ s_g \\
&= r_g \circ F_g(f) + r_g \circ F_g(l) \\
&= r_g \circ (F_g(f) + F_g(l)) \\
&= r_g \circ F_g(f + l),
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Logo, $f + l$ é um morfismo equivariante.

Observamos que $0_Y^X : X \to Y$ é um morfismo equivariante, pois $0_Y^X \circ s_g = 0_Y^{F_g(X)} = r_g \circ 0_{F_g(Y)}^{F_g(X)} = r_g \circ F_g(0_Y^X)$, para todo $g \in G$, a última igualdade segue do Lema 3.17 (ii).

Dado um morfismo equivariante qualquer $f : X \to Y$, o morfismo oposto $-f : X \to Y$ em relação à soma em $\mathcal{C}$ é também um morfismo equivariante. De fato,

$$\begin{aligned}
f \circ s_g + (-f) \circ s_g &= (f + (-f)) \circ s_g \\
&= 0_Y^X \circ s_g \\
&= r_g \circ F_g(0_Y^X) \\
&= r_g \circ F_g(f + (-f)) \\
&= r_g \circ (F_g(f) + F_g(-f)) \\
&= r_g \circ F_g(f) + r_g \circ F_g((-f)),
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Logo, $(-f) \circ s_g = r_g \circ F_g((-f))$, pois $f \circ s_g = r_g \circ F_g(f)$.

Portanto, segue da soma induzida que $Hom_{\mathcal{C}^G}((X,s),(Y,r))$ é um grupo abeliano. Com o mesmo produto por escalar definido na categoria $\mathcal{C}$, podemos concluir que $Hom_{\mathcal{C}^G}((X,s),(Y,r))$ é um k-espaço vetorial.

Afirmação (iii): Sejam $(X,s),(Y,r) \in Ob(\mathcal{C}^G)$. Então existe o produto de (X,s) e (Y,r) em $\mathcal{C}^G$.

Sabemos que existe o produto $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ de X e Y em $\mathcal{C}$. Para cada $g \in G$, podemos considerar o morfismo $s_g \oplus r_g : F_g(X) \oplus F_g(Y) \to X \oplus Y$ que comuta o seguinte diagrama (veja Definição 3.11)

$$\begin{tikzcd}
 & F_g(X) \oplus F_g(Y) \arrow[dl, "\pi_{F_g(X)}"'] \arrow[dr, "\pi_{F_g(Y)}"] \arrow[dd, dotted, "s_g \oplus r_g"] & \\
F_g(X) \arrow[dd, "s_g"'] & & F_g(Y) \arrow[dd, "r_g"] \\
 & X \oplus Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y,
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\pi_X \circ (s_g \oplus r_g) = s_g \circ \pi_{F_g(X)} \text{ e } \pi_Y \circ (s_g \oplus r_g) = r_g \circ \pi_{F_g(Y)}.$$

Essas igualdades destacadas acima são muito usadas no que segue e não fazemos nenhuma menção a elas para evitar carregar o texto com mais referências.

Provemos que $s_g \oplus r_g$ é um isomorfismo. Para isso, é suficiente mostrarmos que a tripla $(F_g(X) \oplus F_g(Y), s_g \circ \pi_{F_g(X)}, r_g \circ \pi_{F_g(Y)})$ é um produto de X e Y em $\mathcal{C}$.

Sabemos que existem morfismos $i_{F_g(X)} : F_g(X) \to F_g(X) \oplus F_g(Y)$ e $i_{F_g(Y)} : F_g(Y) \to F_g(X) \oplus F_g(Y)$ tais que a quíntupla $(F_g(X) \oplus F_g(Y), \pi_{F_g(X)}, \pi_{F_g(Y)}, i_{F_g(X)}, i_{F_g(Y)})$ é uma soma direta de $F_g(X)$ e $F_g(Y)$, isso segue da Proposição 3.10.

Seja $(C, c_X : C \to X, c_Y : C \to Y)$ uma tripla em $\mathcal{C}$. Definimos o morfismo $\alpha : C \to F_g(X) \oplus F_g(Y)$ por

$$\alpha = i_{F_g(Y)} \circ r_g^{-1} \circ c_Y + i_{F_g(X)} \circ s_g^{-1} \circ c_X.$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
(s_g \circ \pi_{F_g(X)}) \circ \alpha \quad &= \\
= \quad & (s_g \circ \pi_{F_g(X)}) \circ (i_{F_g(Y)} \circ r_g^{-1} \circ c_Y + i_{F_g(X)} \circ s_g^{-1} \circ c_X) \\
= \quad & s_g \circ \pi_{F_g(X)} \circ i_{F_g(Y)} \circ r_g^{-1} \circ c_Y + s_g \circ \pi_{F_g(X)} \circ i_{F_g(X)} \circ s_g^{-1} \circ c_X \\
= \quad & s_g \circ 0_{F_g(X)}^{F_g(Y)} \circ r_g^{-1} \circ c_Y + s_g \circ I_{F_g(X)} \circ s_g^{-1} \circ c_X \\
= \quad & s_g \circ s_g^{-1} \circ c_X \\
= \quad & c_X.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $(r_g \circ \pi_{F_g(Y)}) \circ \alpha = c_Y$. Para provarmos a unicidade, suponhamos que exista um morfismo $\beta : C \to F_g(X) \oplus F_g(Y)$ tal que $(s_g \circ \pi_{F_g(X)}) \circ \beta = c_X$ e que $(r_g \circ \pi_{F_g(Y)}) \circ \beta = c_Y$. Dessas igualdades, resulta que

$$i_{F_g(X)} \circ \pi_{F_g(X)} \circ \beta = i_{F_g(X)} \circ s_g^{-1} \circ c_X$$

e

$$i_{F_g(Y)} \circ \pi_{F_g(Y)} \circ \beta = i_{F_g(Y)} \circ r_g^{-1} \circ c_Y.$$

Como $i_{F_g(X)} \circ \pi_{F_g(X)} + i_{F_g(Y)} \circ \pi_{F_g(Y)} = I_{F_g(X) \oplus F_g(Y)}$ segue, somando membro a membro as duas igualdades, que

$$\beta = i_{F_g(Y)} \circ r_g^{-1} \circ c_Y + i_{F_g(X)} \circ s_g^{-1} \circ c_X = \alpha.$$

Portanto, $(F_g(X) \oplus F_g(Y), s_g \circ \pi_{F_g(X)}, r_g \circ \pi_{F_g(Y)})$ é um produto de X e Y em $\mathcal{C}$ e daí, $s_g \oplus r_g$ é um isomorfismo.

Agora, para cada $g \in G$, o funtor F_g é aditivo e assim, F_g preserva produto (veja Proposição 3.19) e portanto, $(F_g(X \oplus Y), F_g(\pi_X), F_g(\pi_Y))$ é um produto de $F_g(X)$ e $F_g(Y)$. Também, $(F_g(X) \oplus F_g(Y), \pi_{F_g(X)}, \pi_{F_g(Y)})$ é um produto de $F_g(X)$ e $F_g(Y)$ seguindo assim que existe um único isomorfismo $\phi^g_{X,Y} : F_g(X \oplus Y) \to F_g(X) \oplus F_g(Y)$ tal que

$$\pi_{F_g(X)} \circ \phi^g_{X,Y} = F_g(\pi_X) \text{ e } \pi_{F_g(Y)} \circ \phi^g_{X,Y} = F_g(\pi_Y).$$

Essas duas igualdades acima são também muito usadas no que segue e não fazemos nenhuma menção a elas. Consideremos a família de isomorfismos

$$s \oplus r = \{(s_g \oplus r_g) \circ \phi^g_{X,Y} : F_g(X \oplus Y) \to X \oplus Y : g \in G\}.$$

Provemos que $(X \oplus Y, s \oplus r)$ é um objeto equivariante. De fato, notemos que

$$\pi_X \circ ((s_{1_G} \oplus r_{1_G}) \circ \phi^{1_G}_{X,Y} \circ (\gamma_0)_{X \oplus Y}) \quad =$$

$$
\begin{aligned}
&= (\pi_X \circ (s_{1_G} \oplus r_{1_G})) \circ \phi^{1_G}_{X,Y} \circ (\gamma_0)_{X\oplus Y}\\
&= (s_{1_G} \circ \pi_{F_{1_G}(X)}) \circ \phi^{1_G}_{X,Y} \circ (\gamma_0)_{X\oplus Y}\\
&= s_{1_G} \circ (\pi_{F_{1_G}(X)} \circ \phi^{1_G}_{X,Y}) \circ (\gamma_0)_{X\oplus Y}\\
&= s_{1_G} \circ F_{1_G}(\pi_X) \circ (\gamma_0)_{X\oplus Y}\\
&\overset{(*)}{=} s_{1_G} \circ (\gamma_0)_X \circ \pi_X\\
&\overset{(**)}{=} I_X \circ \pi_X = \pi_X\\
&= \pi_X \circ I_{X\oplus Y},
\end{aligned}
$$

em (*) e em (**) utilizamos, respectivamente, que os diagramas

$$
\begin{tikzcd}
X \oplus Y \arrow[r, "(\gamma_0)_{X\oplus Y}"] \arrow[d, "\pi_X"] & F_{1_G}(X \oplus Y) \arrow[d, "F_{1_G}(\pi_X)"] \\
X \arrow[r, "(\gamma_0)_X"'] & F_{1_G}(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(\gamma_0)_X"] \arrow[dr, "I_X"'] & F_{1_G}(X) \arrow[d, "s_{1_G}"] \\
& X
\end{tikzcd}
$$

comutam. A comutatividade do primeiro vem da naturalidade de γ_0 e a do segundo, segue do fato de que X é um objeto equivariante. Analogamente, $\pi_Y \circ ((s_{1_G} \oplus r_{1_G}) \circ \phi^{1_G}_{X,Y} \circ (\gamma_0)_{X\oplus Y}) = \pi_Y \circ I_{X\oplus Y}$. Portanto, do Lema 3.3, resulta que

$$((s_{1_G} \oplus r_{1_G}) \circ \phi^{1_G}_{X,Y}) \circ (\gamma_0)_{X\oplus Y} = I_{X\oplus Y}.$$

Sejam $g, h \in G$. Então provemos a comutatividade do diagram abaixo

$$
\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_h)(X \oplus Y) \arrow[r, "F_g((s_h\oplus r_h)\circ\phi^h_{X,Y})"] \arrow[d, "(\gamma_{g,h})_{X\oplus Y}"'] & F_g(X \oplus Y) \arrow[d, "(s_g\oplus r_g)\circ\phi^g_{X,Y}"] \\
F_{gh}(X \oplus Y) \arrow[r, "(s_{gh}\oplus r_{gh})\circ\phi^{gh}_{X,Y}"'] & X \oplus Y.
\end{tikzcd}
$$

De fato, temos que

$$
\begin{aligned}
&\pi_X \circ (((s_g \oplus r_g) \circ \phi^g_{X,Y}) \circ F_g((s_h \oplus r_h) \circ \phi^h_{X,Y})) =\\
&= (\pi_X \circ (s_g \oplus r_g)) \circ \phi^g_{X,Y} \circ F_g((s_h \oplus r_h) \circ \phi^h_{X,Y})\\
&= s_g \circ \pi_{F_g(X)} \circ \phi^g_{X,Y} \circ F_g((s_h \oplus r_h) \circ \phi^h_{X,Y})\\
&= s_g \circ (\pi_{F_g(X)} \circ \phi^g_{X,Y}) \circ F_g((s_h \oplus r_h) \circ \phi^h_{X,Y})\\
&= s_g \circ F_g(\pi_X) \circ F_g((s_h \oplus r_h) \circ \phi^h_{X,Y})\\
&= s_g \circ F_g(\pi_X \circ (s_h \oplus r_h) \circ \phi^h_{X,Y})\\
&= s_g \circ F_g(s_h \circ \pi_{F_h(X)} \circ \phi^h_{X,Y})\\
&= s_g \circ F_g(s_h \circ F_h(\pi_X))\\
&= s_g \circ F_g(s_h) \circ (F_g \circ F_h)(\pi_X).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rl} & \pi_X \circ (((s_{gh} \oplus r_{gh}) \circ \phi^{gh}_{X,Y}) \circ (\gamma_{g,h})_{X\oplus Y}) \quad = \\ = & (\pi_X \circ (s_{gh} \oplus r_{gh})) \circ \phi^{gh}_{X,Y} \circ (\gamma_{g,h})_{X\oplus Y} \\ = & s_{gh} \circ \pi_{F_{gh}(X)} \circ \phi^{gh}_{X,Y} \circ (\gamma_{g,h})_{X\oplus Y} \\ & \\ = & s_{gh} \circ (\pi_{F_{gh}(X)} \circ \phi^{gh}_{X,Y}) \circ (\gamma_{g,h})_{X\oplus Y} \\ = & s_{gh} \circ F_{gh}(\pi_X) \circ (\gamma_{g,h})_{X\oplus Y} \\ \overset{(*)}{=} & s_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_X \circ (F_g \circ F_h)(\pi_X) \\ \overset{(**)}{=} & s_g \circ F_g(s_h) \circ (F_g \circ F_h)(\pi_X) \end{array}$$

em (*) e em (**) foi utilizado, respectivamente, a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} (F_g \circ F_h)(X \oplus Y) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_{X\oplus Y}"] \arrow[d, "(F_g\circ F_h)(\pi_X)"'] & F_{gh}(X \oplus Y) \arrow[d, "F_{gh}(\pi_X)"] \\ (F_g \circ F_h)(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_X"'] & F_{gh}(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (F_g \circ F_h)(X) \arrow[r, "F_g(s_h)"] \arrow[d, "(\gamma_{g,h})_X"'] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"] \\ F_{gh}(X) \arrow[r, "s_{gh}"'] & X, \end{tikzcd}$$

tais comutatividades seguem, respectivamente, da naturalidade de $\gamma_{g,h}$ e do fato de X ser um objeto equivariante.

Analogamente,

$$\pi_Y\circ(((s_g\oplus r_g)\circ\phi^g_{X,Y})\circ F_g((s_h\oplus r_h)\circ\phi^h_{X,Y})) = \pi_Y\circ(((s_{gh}\oplus r_{gh})\circ\phi^{gh}_{X,Y})\circ(\gamma_{g,h})_{X\oplus Y}).$$

Logo, pelo Lema 3.3, resulta que

$$((s_g\oplus r_g)\circ\phi^g_{X,Y})\circ F_g((s_h\oplus r_h)\circ\phi^h_{X,Y}) = ((s_{gh}\oplus r_{gh})\circ\phi^{gh}_{X,Y})\circ(\gamma_{g,h})_{X\oplus Y}.$$

Observamos também que, para todo $g \in G$,

$$\begin{array}{rcl} \pi_X \circ (s_g \oplus r_g) \circ \phi^g_{X,Y} & = & s_g \circ \pi_{F_g(X)} \circ \phi^g_{X,Y} \\ & = & s_g \circ F_g(\pi_X). \end{array}$$

Assim, π_X é um morfismo equivariante. Similarmente, π_Y é também um morfismo equivariante.

Para finalizarmos a prova dessa afirmação, provemos que a tripla $((X \oplus Y, s \oplus r), \pi_X, \pi_Y)$ é um produto de (X, s) e (Y, r) em $\mathcal{C}^G$.

Seja $((D, \iota), d_X, d_Y)$ uma tripla em $\mathcal{C}^G$, em que $d_X : (D, \iota) \to (X, s)$ e $d_Y : (D, \iota) \to (Y, r)$ são morfismos equivariantes, ou seja, $d_X \circ \iota_g = s_g \circ F_g(d_X)$ e $d_Y \circ \iota_g = s_g \circ F_g(d_Y)$, para todo $g \in G$.

Como $(X\oplus Y, \pi_X, \pi_Y)$ é um produto em $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $\phi : D \to X \oplus Y$ em $\mathcal{C}$ tal que $\pi_X \circ \phi = d_X$ e $\pi_Y \circ \phi = d_Y$.

Provemos que ϕ é um morfismo equivariante. De fato,

$$\begin{aligned}
\pi_X \circ (\phi \circ \iota_g) &= (\pi_X \circ \phi) \circ \iota_g \\
&= d_X \circ \iota_g \\
&= s_g \circ F_g(d_X) \\
&= s_g \circ F_g(\pi_X \circ \phi) \\
&= s_g \circ F_g(\pi_X) \circ F_g(\phi) \\
&= s_g \circ \pi_{F_g(X)} \circ \phi^g_{X,Y} \circ F_g(\phi) \\
&= \pi_X \circ (s_g \oplus r_g) \circ \phi^g_{X,Y} \circ F_g(\phi) \\
&= \pi_X \circ ((s_g \oplus r_g) \circ \phi^g_{X,Y} \circ F_g(\phi)).
\end{aligned}$$

Analogamente, $\pi_Y \circ (\phi \circ \iota_g) = \pi_Y \circ ((s_g \oplus r_g) \circ \phi^g_{X,Y} \circ F_g(\phi))$. Portanto, $\phi \circ \iota_g = (s_g \oplus r_g) \circ \phi^g_{X,Y} \circ F_g(\phi)$, para todo $g \in G$.

Afirmação (iv): Todo morfismo em $\mathcal{C}^G$ possui núcleo.

Sejam $(X, s), (Y, r) \in Ob(\mathcal{C}^G)$ e $f : (X, s) \to (Y, r)$ um morfismo em $\mathcal{C}^G$. Na categoria $\mathcal{C}$, existe o par $(Ker(f), k)$, núcleo de $f : X \to Y$, em que $k : Ker(f) \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$. Para todo $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
f \circ (s_g \circ F_g(k)) &= (f \circ s_g) \circ F_g(k) \\
&\overset{(*)}{=} (r_g \circ F_g(f)) \circ F_g(k) \\
&= r_g \circ (F_g(f) \circ F_g(k)) \\
&= r_g \circ F_g(f \circ k) \\
&= r_g \circ F_g(0_Y^{Ker(f)}) \\
&\overset{(**)}{=} r_g \circ 0_{F_g(Y)}^{F_g(Ker(f))} \\
&= 0_Y^{F_g(Ker(f))},
\end{aligned}$$

em (*) usamos que f é um morfismo equivariante e em (**) que F_g é aditivo (preserva produto) e, pelo Lema 3.17 (ii), segue a igualdade. Assim, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
F_g(ker(f)) \arrow[dr, "s_g\circ F_g(k)"] \arrow[drr, bend left, "0_Y^{F_g(ker(f))}"] \arrow[dd, dotted, "w_g"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"] & Y \\
Ker(f) \arrow[ur, "k"] \arrow[urr, bend right, "0_Y^{Ker(f)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

e, pela definição de núcleo, existe um único morfismo $w_g : F_g(Ker(f)) \to Ker(f)$ tal que

$$k \circ w_g = s_g \circ F_g(k).$$

Novamente alertamos para o fato de que a igualdade acima é bem usada no que segue sem fazermos menção à mesma.

Provemos que $w_g : F_g(Ker(f)) \to Ker(f)$ é um isomorfismo. Consideremos o morfismo

$$F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} : Ker(f) \to F_g(Ker(f)).$$

Nesse caso, $F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} = w_g^{-1}$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
&(k \circ w_g) \circ F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} = \\
=\ & (s_g \circ F_g(k)) \circ F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
=\ & s_g \circ (F_g(k) \circ F_g(w_{g^{-1}})) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
=\ & s_g \circ F_g(k \circ w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
=\ & s_g \circ F_g(s_{g^{-1}} \circ F_{g^{-1}}(k)) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
=\ & s_g \circ (F_g(s_{g^{-1}}) \circ F_g(F_{g^{-1}}(k))) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
=\ & s_g \circ F_g(s_{g^{-1}}) \circ (F_g(F_{g^{-1}}(k)) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)}) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
\overset{(*)}{=}\ & s_g \circ F_g(s_{g^{-1}}) \circ ((\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_X \circ F_{1_G}(k)) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
=\ & (s_g \circ F_g(s_{g^{-1}})) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_X \circ F_{1_G}(k) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
\overset{(**)}{=}\ & (s_{1_G} \circ (\gamma_{g,g^{-1}})_X) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_X \circ F_{1_G}(k) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
=\ & s_{1_G} \circ F_{1_G}(k) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
\overset{(***)}{=}\ & s_{1_G} \circ (\gamma_0)_X \circ k \\
\overset{(****)}{=}\ & I_X \circ k = k \\
=\ & k \circ I_{Ker(f)},
\end{aligned}$$

em (*), (**), (***) e (****) utilizamos, respectivamente, as comutatividades dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
F_{1_G}(Ker(f)) \arrow[r, "(\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)}"'] \arrow[d, "F_{1_G}(k)"'] & (F_g \circ F_{g^{-1}})(Ker(f)) \arrow[d, "(F_g \circ F_{g^{-1}})(k)"] \\
F_{1_G}(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_X"'] & (F_g \circ F_{g^{-1}})(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_{g^{-1}})(X) \arrow[r, "F_g(s_{g^{-1}})"] \arrow[d, "(\gamma_{g,g^{-1}})_X"'] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"] \\
F_{gg^{-1}}(X) \arrow[r, "s_{gg^{-1}}"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, "(\gamma_0)_{Ker(f)}"] \arrow[d, "k"'] & F_{1_G}(Ker(f)) \arrow[d, "F_{1_G}(k)"] \\
X \arrow[r, "(\gamma_0)_X"'] & F_{1_G}(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(\gamma_0)_X"] \arrow[dr, "I_X"'] & F_{1_G}(X) \arrow[d, "s_{1_G}"] \\
& X.
\end{tikzcd}$$

As comutatividades seguem da naturalidade de $\gamma_{g,g^{-1}}$ e de γ_0, para os dois primeiros na vertical e do fato de X ser um objeto equivariante para os dois últimos na vertical. Assim,

$$k \circ (w_g \circ F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)}) = k \circ I_{Ker(f)}$$

e como k é monomorfismo (veja Proposição 1.40), segue que

$$w_g \circ (F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)}) = I_{Ker(f)}.$$

Pelo Lema 4.2 sabemos que F_g é uma equivalência. Como k é um monomorfismo segue, da Proposição 2.21, que $F_g(k)$ é um monomorfismo. Abaixo, em algumas igualdades, usamos a comutatividade dos diagramas dados imediatamente acima. Temos que

$$\begin{aligned}
&F_g(k) \circ (F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \circ w_g) \quad = \\
= \quad & F_g(k) \circ F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \circ w_g \\
= \quad & F_g(k \circ w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \circ w_g \\
= \quad & F_g(s_{g^{-1}} \circ F_{g^{-1}}(k)) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \circ w_g \\
= \quad & (F_g(s_{g^{-1}}) \circ F_g(F_{g^{-1}}(k))) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \circ w_g \\
= \quad & F_g(s_{g^{-1}}) \circ (F_g(F_{g^{-1}}(k)) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)}) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \circ w_g \\
= \quad & F_g(s_{g^{-1}}) \circ ((\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_X \circ F_{1_G}(k)) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \circ w_g \\
= \quad & F_g(s_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_X \circ (F_{1_G}(k) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)}) \circ w_g \\
= \quad & F_g(s_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_X \circ ((\gamma_0)_X \circ k) \circ w_g \\
\overset{(*)}{=} \quad & s_g^{-1} \circ s_{1_G} \circ (\gamma_0)_X \circ k \circ w_g \\
= \quad & s_g^{-1} \circ I_X \circ k \circ w_g \\
= \quad & s_g^{-1} \circ s_g \circ F_g(k) \\
= \quad & F_g(k) \\
= \quad & F_g(k) \circ I_{F_g(Ker(f))},
\end{aligned}$$

em (*) utilizamos que a igualdade $s_g \circ F_g(s_g^{-1}) = s_{1_G} \circ (\gamma_{g,g^{-1}})_X$ é equivalente à $F_g(s_g^{-1}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_X = s_g^{-1} \circ s_{1_G}$. Portanto,

$$F_g(k) \circ ((F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \circ w_g)) = F_g(k) \circ I_{F_g(Ker(f))}$$

e como $F_g(k)$ é monomorfismo, segue que

$$(F_g(w_{g^{-1}}) \circ (\gamma_{g,g^{-1}})^{-1}_{Ker(f)} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)}) \circ w_g = I_{F_g(Ker(f))}.$$

Assim, podemos considerar a família de isomorfismos

$$w = \{w_g : F_g(Ker(f)) \to Ker(f) : g \in G\}.$$

Mostremos que $(Ker(f), w) \in Ob(\mathcal{C}^G)$. De fato,

$$\begin{array}{rcl}
k \circ (w_{1_G} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)}) & = & (k \circ w_{1_G}) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
& = & (s_{1_G} \circ F_{1_G}(k)) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} \\
& = & s_{1_G} \circ (F_{1_G}(k) \circ (\gamma_0)_{Ker(f)}) \\
& \stackrel{(*)}{=} & s_{1_G} \circ ((\gamma_0)_X \circ k) \\
& = & (s_{1_G} \circ (\gamma_0)_X) \circ k \\
& = & I_X \circ k = k \\
& = & k \circ I_{Ker(f)},
\end{array}$$

em (*) utilizamos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, "(\gamma_0)_{Ker(f)}"] \arrow[d, "k"'] & F_{1_G}(Ker(f)) \arrow[d, "F_{1_G}(k)"] \\
X \arrow[r, "(\gamma_0)_X"'] & F_{1_G}(X).
\end{tikzcd}$$

Logo, $k \circ (w_{1_G} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)}) = k \circ I_{Ker(F)}$ e assim, $w_{1_G} \circ (\gamma_0)_{Ker(f)} = I_{Ker(f)}$ (k é um monomorfismo).

Sejam $g, h \in G$. Então

$$\begin{array}{rcl}
k \circ (w_g \circ F_g(w_h)) & = & (k \circ w_g) \circ F_g(w_h) \\
& = & (s_g \circ F_g(k)) \circ F_g(w_h) \\
& = & s_g \circ (F_g(k) \circ F_g(w_h)) \\
& = & s_g \circ F_g(k \circ w_h) \\
& = & s_g \circ F_g(s_h \circ F_h(k)) \\
& = & s_g \circ F_g(s_h) \circ F_g(F_h(k)).
\end{array}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl}
k \circ (w_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_{Ker(f)}) & = & (k \circ w_{gh}) \circ (\gamma_{g,h})_{Ker(f)} \\
& = & (s_{gh} \circ F_{gh}(k)) \circ (\gamma_{g,h})_{Ker(f)} \\
& = & s_{gh} \circ (F_{gh}(k) \circ (\gamma_{g,h})_{Ker(f)}) \\
& \stackrel{(*)}{=} & s_{gh} \circ ((\gamma_{gh})_X \circ (F_g \circ F_h)(k)) \\
& = & (s_{gh} \circ (\gamma_{gh})_X) \circ (F_g \circ F_h)(k) \\
& = & (s_g \circ F_g(s_h)) \circ (F_g \circ F_h)(k),
\end{array}$$

em (*) utilizamos a comutatividade do diagrama abaixo, a qual segue da naturalidade de $\gamma_{g,h}$,

$$\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_h)(Ker(f)) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_{Ker(f)}"] \arrow[d, "(F_g \circ F_h)(k)"'] & F_{gh}(Ker(f)) \arrow[d, "F_{gh}(k)"] \\
(F_g \circ F_h)(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,h})_X"'] & F_{gh}(X).
\end{tikzcd}$$

Portanto, $k \circ (w_g \circ F_g(w_h)) = k \circ (w_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_{Ker(f)})$ e como k é um monomorfismo, segue que $w_g \circ F_g(w_h) = w_{gh} \circ (\gamma_{g,h})_{Ker(f)}$.

Observamos que da construção da família de isomorfismos w, em que para cada $g \in G$, $k \circ w_g = s_g \circ F_g(k)$, resulta que o morfismo $k : Ker(f) \to X$ é equivariante.

Finalmente, provemos que o par $((Ker(f), w), k)$ é um núcleo do morfismo f em $\mathcal{C}^G$. Seja $((Z,t), k')$ um par, em que $(Z,t) \in Ob(\mathcal{C}^G)$ e $k' : (Z,t) \to (X,s)$ é um morfismo equivariante tal que $f \circ k' = 0_Y^Z$. Do fato de $(ker(f), k)$ ser um núcleo de f em $\mathcal{C}$, sabemos que existe um único morfismo $u : Z \to Ker(f)$ em $\mathcal{C}$ tal que $k \circ u = k'$. Basta provarmos que u é um morfismo equivariante. De fato,

$$\begin{aligned}
k \circ (u \circ t_g) &= (k \circ u) \circ t_g \\
&= k' \circ t_g \\
&= s_g \circ F_g(k') \\
&= s_g \circ F_g(k \circ u) \\
&= s_g \circ (F_g(k) \circ F_g(u)) \\
&= (s_g \circ F_g(k)) \circ F_g(u) \\
&= (k \circ w_g) \circ F_g(u) \\
&= k \circ (w_g \circ F_g(u)).
\end{aligned}$$

Portanto, $k \circ (u \circ t_g) = k \circ (w_g \circ F_g(u))$ e assim, $u \circ t_g = w_g \circ F_g(u)$, pois k é um monomorfismo.

Afirmação (v): Todo morfismo em $\mathcal{C}^G$ possui conúcleo.

A demonstração desse fato é similar ao caso da existência de núcleo para morfismos. Apresentamos algumas ideias principais.

Sejam $(X,s), (Y,r) \in Ob(\mathcal{C}^G)$ e $f : (X,s) \to (Y,r)$ um morfismo em $\mathcal{C}^G$. Na categoria $\mathcal{C}$, existe o par $(CoKer(f), q)$, conúcleo do morfismo $f : X \to Y$. Podemos considerar o seguinte diagrama comutativo, para cada $g \in G$,

$$\begin{tikzcd}
Q = F_g(CoKer(f)) & & \\
& X \arrow[ul, "0_Q^X"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "0^X_{CoKer(f)}"] & Y. \arrow[ull, bend right, "F_g(q)\circ r_g^{-1}"'] \arrow[dll, bend left, "q"] \\
CoKer(f) \arrow[uu, dotted, "v_g"] & &
\end{tikzcd}$$

Consideramos o morfismo

$$u_g = (\gamma_0)^{-1}_{CoKer(f)} \circ (\gamma_{g,g^{-1}})_{CoKer(f)} \circ F_g(v_g^{-1}) : F_g(CoKer(f)) \to CoKer(f).$$

Similarmente ao caso do núcleo, prova-se que $u_g = v_g^{-1}$ e portanto, temos um isomorfismo. Assim, podemos considerar a família de isomorfismos

$$u = \{u_g : F_g(CoKer(f)) \to CoKer(f) : g \in G\}.$$

Nessas condições $(CoKer(f), u) \in Ob(\mathcal{C}^G)$ e q é um morfismo equivariante. Finalmente, não é difícil mostrar que $((CoKer(f), u), q)$ é um conúcleo de f em $\mathcal{C}^G$.

Afirmação (vi): Todo monomorfismo em $\mathcal{C}^G$ é um núcleo de algum morfismo em $\mathcal{C}^G$.

Seja $f : (X, s) \to (Y, r)$ um monomorfismo em $\mathcal{C}^G$. Como $\mathcal{C}$ é uma categoria k-linear segue, do Lema 3.23, que f é um núcleo do seu conúcleo $q : Y \to CoKer(f)$.

Da afirmação anterior, segue que $(CoKer(f), u)$ é um objeto equivariante e q é um morfismo equivariante com respeito à família u. Mostremos que f é um núcleo de q em $\mathcal{C}^G$.

Seja $((D, l), d)$ um par, em que $(D, l) \in Ob(\mathcal{C}^G)$ e $d : D \to Y$ é um morfismo equivariante tal que $q \circ d = 0^D_{CoKer(f)}$. Como (X, f) é um núcleo de q em $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $\iota : D \to X$ tal que $f \circ \iota = d$. Resta-nos ver que ι é um morfismo equivariante. De fato,

$$\begin{aligned}
f \circ (\iota \circ l_g) &= (f \circ \iota) \circ l_g \\
&= d \circ l_g \\
&= r_g \circ F_g(d) \\
&= r_g \circ F_g(f \circ \iota) \\
&= r_g \circ (F_g(f) \circ F_g(\iota)) \\
&= (r_g \circ F_g(f)) \circ F_g(\iota) \\
&= (f \circ s_g) \circ F_g(\iota) \\
&= f \circ (s_g \circ F_g(\iota)).
\end{aligned}$$

Portanto, $f \circ (\iota \circ l_g) = f \circ (s_g \circ F_g(\iota))$ e como f é um monomorfismo em $\mathcal{C}^G$, o será em $\mathcal{C}$. Logo, $\iota \circ l_g = s_g \circ F_g(\iota)$.

Afirmação (vii): Todo epimorfismo é um conúcleo de algum morfismo em $\mathcal{C}^G$.

A demonstração desse fato é similar à da afirmação anterior. ■

Finalizamos o trabalhando com um breve comentário a respeito deste assunto. Como nosso objetivo era seguir a referência [16], podemos dizer que esse "fim" não é bem um fim, mas sim uma preparação para um estudo posterior, no contexto de categorias monoidais. Existe, mais especificamente, para categorias tensoriais a construção da equivariantização, utilizando noções de funtores monoidais e isomorfismos naturais monoidais para definir a ação de um grupo em uma categoria desse tipo.

No trabalho citado, o objetivo é estudar representações de categorias tensorias. Para isso é feita toda essa preparação, em que a parte inicial dela está exposta nesta dissertação. Para o leitor que desejar um maior aprofundamento no assunto e tenha curiosidade em continuar estudando o tema, sugerimos as notas de aula [16].

Apêndice A

Álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie

Nesse apêndice apresentamos alguns conceitos importantes no contexto de álgebras de Lie como, por exemplo, a construção da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie. Citamos como referência [17].

A.1 Álgebras de Lie

Definição A.1 *Seja k um corpo. Uma álgebra de Lie sobre k ou k-álgebra de Lie (ou simplesmente álgebra de Lie) é um k-espaço vetorial L, munido de uma aplicação bilinear $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ chamada colchete de Lie, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $[x, x] = 0$, *para todo* $x \in L$;

(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, *para quaisquer* $x, y, z \in L$.

A igualdade (ii) é chamada de *identidade de Jacobi*. Denotamos $(L, [\ ,\ ])$ a álgebra de Lie L.

Definição A.2 *Sejam L_1 e L_2 álgebras de Lie. Uma função $\phi : L_1 \to L_2$ é um morfismo de álgebras de Lie se ϕ é k-linear e $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, para quaisquer $x, y \in L_1$.*

Exemplo A.3 Seja A uma k-álgebra. Definimos em A o colchete $[x,y] = xy - yx$ para quaisquer $x, y \in A$. Então $(A, [\ ,\ ])$ é uma álgebra de Lie.

De fato, notemos que $[x,x] = xx - xx = 0$, para todo $x \in A$. Sejam $x, y, z \in A$. Então

$$\begin{aligned} [x,[y,z]] &= x(yz - zy) - (yz - zy)x \\ &= x(yz) - x(zy) - (yz)x + (zy)x. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$[z,[x,y]] = z(xy) - z(yx) - (xy)z + (yx)z$$

e

$$[y,[z,x]] = y(zx) - y(xz) - (zx)y + (xz)y.$$

Somando membro a membro as três igualdades, obtemos a identidade de Jacobi.

O colchete de Lie definido nesse exemplo é chamado *comutador*. Denotamos por $\mathfrak{L}(A)$ a álgebra de Lie $(A, [\ ,\ ])$ cujo colchete de Lie é o comutador.

Consideremos B uma k-álgebra e $\phi : A \to B$ um morfismo de k-álgebras. Então $\phi : \mathfrak{L}(A) \to \mathfrak{L}(B)$ induzida é um morfismo de álgebras de Lie. De fato,

$$\begin{aligned} \phi([x,y]) &= \phi(xy - yx) \\ &= \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x) \\ &= [\phi(x), \phi(y)] \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Como caso particular do exemplo anterior, segue o próximo exemplo.

Exemplo A.4 Seja V um k-espaço vetorial. Denotamos por $gl(V)$ o espaço das transformações k-lineares de V em V. Considerando a composição de funções como produto, não é difícil ver que $gl(V)$ é uma k-álgebra. Se definirmos em $gl(V)$ o colchete

$$\begin{array}{rccl} [\ ,\ ]: & gl(V) \times gl(V) & \to & gl(V) \\ & (f,g) & \mapsto & f \circ g - g \circ f \end{array}$$

então $gl(V)$ tem uma estrutura de álgebra de Lie.

A.2 Álgebra envolvente de uma álgebra de Lie

Definição A.5 *Sejam k um corpo e V um k-espaço vetorial. Uma álgebra tensorial de V é um par (X, i), em que X é uma k-álgebra e $i : V \to X$ é um morfismo de k-espaços vetoriais tal que, para qualquer k-álgebra A e qualquer $f : V \to A$ morfismo de k-espaços vetoriais, existe um único morfismo de k-álgebras $\phi : X \to A$ tal que $\phi \circ i = f$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, dotted, "\phi"'] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

Observação A.6 A álgebra tensorial é única, a menos de isomorfismo. De fato, se (X, i) e (Y, j) são álgebras tensoriais de V então segue, da definição, que existem morfismos de k-álgebras $\phi : X \to Y$ e $\psi : Y \to X$ tais que $\phi \circ i = j$ e $\psi \circ j = i$.

Assim, $j = \phi \circ i = (\phi \circ \psi) \circ j$. Analogamente, $(\psi \circ \phi) \circ i = i$. Devido à unicidade, resulta que $\phi \circ \psi = I_Y$ e $\psi \circ \phi = I_X$, ou seja, X e Y são isomorfos.

Apresentamos, resumidamente, a construção da álgebra tensorial de um k-espaço vetorial V. Definimos recursivamente o k-espaço vetorial $T(V)$ como $T^0(V) = k$, $T^1(V) = V$ e $T^{n+1}(V) = T^n(V) \otimes V$, para todo $n \geq 1$.

Considerando a soma direta indexada em $\mathbb{N}$, definimos

$$T(V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} T^n(V) = \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes_n},$$

em que $V^{\otimes_n} = V \otimes \cdots \otimes V$ (n vezes). Falta denifirmos um produto para tornar $T(V)$ uma álgebra. Sejam $v, w \in T(V)$ sabemos que $v = v_{n_1} + \cdots + v_{n_k}$ e $w = w_{m_1} + \cdots + w_{m_l}$, em que $v_{n_i} \in V^{\otimes_{n_i}}$ e $w_{m_j} \in V^{\otimes_{m_j}}$, para $i \in \{1, \cdots, k\}$ e $j \in \{1, \cdots, l\}$.

Para definirmos o produto vw, basta que seja definido o produto

$$v_{n_i} w_{m_j} = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n_i} \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{m_j}.$$

Estendemos linearmente para o produto vw. Com essa estrutura, $T(V)$ é uma k-álgebra.

Proposição A.7 *O par $(T(V), i)$, em que $T(V)$ é como acima e $i : V \to T(V)$ é a inclusão canônica, é a álgebra tensorial de V.*

Demonstração: Consideremos A uma k-álgebra e $f : V \to A$ um morfismo de k-espaços vetoriais. Definimos $\phi : T(V) \to A$ por $\phi(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes v_n) = f(v_1)f(v_2)\cdots f(v_{n-1})f(v_n)$ e estendemos linearmente. Claramente, segue a comutatividade do diagrama da definição.

Notemos que a maneira como ϕ é definida é necessária para que tenhamos um morfismo de k-álgebras e isso nos garante a unicidade. ■

Definição A.8 *Seja L uma álgebra de Lie. Uma álgebra envolvente universal de L é um par (U, ι), em que U é uma k-álgebra e $\iota : L \to \mathfrak{L}(U)$ é um morfismo de álgebras de Lie tal que, para qualquer k-álgebra A e qualquer morfismo de álgebras de Lie $\phi : L \to \mathfrak{L}(A)$, existe um único morfismo de k-álgebras $\psi : U \to A$ que induz um morfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{L}(U) \to \mathfrak{L}(A)$ que comuta o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathfrak{L}(U) \arrow[dl, dotted, "\psi"] \\ & \mathfrak{L}(A). & \end{tikzcd}$$

De maneira análoga ao que foi feito no caso da álgebra tensorial, a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie é única, a menos de isomorfismo.

Abaixo, apresentamos a construção da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie.

Definição A.9 *Sejam L uma álgebra de Lie e $T(L)$ a álgebra tensorial de L. Consideremos em $T(L)$ o ideal I gerado por elementos da forma $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x$, para $x, y \in L$. Definimos uma nova álgebra como sendo o quociente $\mathfrak{U}(L) = T(L)/I$.*

A necessidade de pedirmos que o ideal I seja gerado por elementos daquela forma está relacionada com o fato de que a aplicação $\iota : L \to \mathfrak{L}(\mathfrak{U}(L))$ é um morfismo de álgebras de Lie. De fato, para quaisquer $x, y \in L$, temos

$$\begin{array}{rcl} [\iota(x), \iota(y)] & = & [\overline{x}, \overline{y}] \\ & = & \overline{x}\,\overline{y} - \overline{y}\,\overline{x} \\ & = & \overline{x \otimes y} - \overline{y \otimes x} \\ & = & \overline{x \otimes y - y \otimes x} \\ & \overset{(*)}{=} & \overline{[x, y]} \\ & = & \iota([x, y]), \end{array}$$

em (*) usamos explicitamente a definição do ideal I.

Proposição A.10 *O par $(\mathfrak{U}(L), \iota)$ é a álgebra envolvente universal de L.*

Demonstração: Sejam A uma k-álgebra e $\phi : L \to \mathfrak{L}(A)$ um morfismo de álgebras de Lie. Notemos que a aplicação $\phi : L \to A$ é um morfismo de k-espaços vetoriais. Da definição de álgebra tensorial, existe um único morfismo de k-álgebras $\psi : T(L) \to A$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & T(L) \arrow[dl, dotted, "\psi"] \\ & A, & \end{tikzcd}$$

isto é, $\psi \circ i = \phi$.

Observemos também que o ideal I está contindo no núcleo do morfismo ψ. De fato, sejam $x, y \in L$. Então

$$\begin{aligned} \psi([x,y]) &= \phi([x,y]) \\ &= [\phi(x), \phi(y)] \\ &= \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x) \\ &= \psi(xy) - \psi(yx) \\ &= \psi(x \otimes y) - \psi(y \otimes x) \\ &= \psi(x \otimes y - y \otimes x). \end{aligned}$$

Portanto, podemos induzir o morfismo de k-álgebras $\overline{\psi} : \mathfrak{U}(L) \to A$ por $\overline{\psi}(\overline{z}) = \psi(z)$, para todo $z \in T(L)$. Naturalmente, $\overline{\psi}$ está bem definido pelo acima. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathfrak{L}(\mathfrak{U}(L)) \arrow[dl, dotted, "\overline{\psi}"] \\ & \mathfrak{L}(A), & \end{tikzcd}$$

pois

$$\begin{aligned} (\overline{\psi} \circ \iota)(x) &= \overline{\psi}(\iota(x)) \\ &= \overline{\psi}(\overline{x}) \\ &= \psi(x) \\ &= \phi(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in L$. ∎

Apêndice B

Complexo de cadeias e cocadeias

Nesse apêndice estudamos os complexos de cadeia e cocadeia. Citamos como principal referência [8].

Definição B.1 *Seja R um anel. Um complexo de cadeia (C, d) é um par $(\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ em que $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma família de R-módulos e $\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma família de R-homomorfismos $d_n : C_n \to C_{n-1}$ tais que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

A cadeia pode ser representada pelo diagrama seguinte

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

Exemplo B.2 Sejam R um anel e M um R-módulo. Podemos considerar o complexo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Exemplo B.3 Consideremos o morfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}_8 & \to & \mathbb{Z}_8 \\ & x & \mapsto & 4x. \end{array}$$

Então temos a cadeia

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \cdots$$

Definição B.4 *Sejam (C, d) e (D, δ) complexos de cadeia. Um morfismo $\phi : C \to D$ entre as cadeias é uma família de R-homomorfismos $\{\phi_n : C_n \to D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $\phi \circ d = \delta \circ \phi$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos que $\phi_n \circ d_{n+1} = \phi_{n+1} \circ \delta_{n+1}$.*

Podemos representar o morfismo ϕ pela comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\phi_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\delta_n"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Observação B.5 Sejam (A, α), (B, β) e (C, λ) complexos de cadeia. Dados $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos entre cadeias, consideramos $g \circ f : A \to C$ como a família $\{g_n \circ f_n : A_n \to C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Então, $g \circ f$ é um morfismo entre cadeias. De fato, para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_n \circ (g_n \circ f_n) &= (\lambda_n \circ g_n) \circ f_n \\
&= (g_{n-1} \circ \beta_n) \circ f_n \\
&= g_{n-1} \circ (\beta_n \circ f_n) \\
&= g_{n-1} \circ (f_{n-1} \circ \alpha_n) \\
&= (g_{n-1} \circ f_{n-1}) \circ \alpha_n.
\end{aligned}$$

Observamos que essa composição é associativa, isso segue da associatividade da composição entre morfismos de R-módulos. Dado um complexo de cadeia (C, d) o morfismo $1_C : C \to C$ definido pela família de R-homomorfismos identidade $\{1_n : C_n \to C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é a identidade com respeito a essa composição entre morfismos de cadeia.

Dado um complexo de cadeia (C, d), notemos que o fato de $d_n \circ d_{n+1} = 0$ implica que $Im(d_{n+1}) \subseteq ker(d_n)$ e assim podemos formalizar a definição seguinte.

Definição B.6 *O R-módulo quociente $H_n(C) = ker(d_n)/Im(d_{n+1})$ é chamado de n-ézimo grupo de homologia.*

Definição B.7 *Seja R um anel. Um complexo de cocadeia (C, d) é um par $(\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{d^n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ em que $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma família de R-módulos e $\{d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma família de R-homomorfismos $d^n : C^{n-1} \to C^n$ tais que $d^n \circ d^{n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Uma cocadeia pode ser representada pelo diagrama a seguir

$$\cdots \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+2}} C^{n+2} \longrightarrow \cdots .$$

Definição B.8 *Sejam (C, d) e (D, δ) complexos de cocadeia. Um morfismo $\phi : C \to D$ entre as cocadeias é uma família de R-homomorfismos $\{\phi^n : C^n \to D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\phi \circ d = \delta \circ \phi$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos $\delta^{n+1} \circ \phi^n = \phi^{n+1} \circ d^{n+1}$.*

Podemos representar o morfismo ϕ pela comutatividade do diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^n \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d, "\phi^n"] & C^{n+1} \arrow[r, "d^{n+2}"] \arrow[d, "\phi^{n+1}"] & C^{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "\phi^{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^n \arrow[r, "\delta^{n+1}"'] & D^{n+1} \arrow[r, "\delta^{n+2}"'] & D^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Analogamente ao caso feito para cadeias, a composição entre morfismos de cocadeias é um morfismo de cocadeias. Essa composição é associativa e tem como elemento identidade a família das aplicações identidade entre R-módulos.

Dado um complexo de cocadeia (C, d), notemos que a condição $d^n \circ d^{n-1} = 0$ da definição, nos diz que $Im(d^{n-1}) \subseteq ker(d^n)$ e assim temos a definição seguinte.

Definição B.9 *O R-módulo quociente $H^n(C) = Im(d^{n-1})/ker(d^n)$ é chamado de n-ézimo grupo de cohomologia.*

Definição B.10 *Seja R um anel comutativo com unidade. Um R-módulo $\mathbb{Z}$-graduado é uma família de R-módulos $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Dados dois R-módulos $\mathbb{Z}$-graduados M e N, um homomorfismo $\phi : M \to N$ de grau k é uma família de R-homomorfismos $\{\phi_n : M_n \to N_{n+k}\}$.*

Apêndice C

Construção de um modelo do Grupo de Tranças

Faremos aqui a construção de um modelo para o grupo de tranças no espaço $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$. Tal modelo irá satisfazer as relações do grupo de tranças que podem ser utilizadas para definir tal grupo via geradores e relações. Podemos dizer que o grupo de tranças é uma generalização do grupo de permutações. Seguimos a contrução feita em [12].

C.1 Links

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço topológico convexo. Dado uma quantidade finita de pontos $M_1, \cdots, M_k \in X$ com $k \in \mathbb{N}$, denotamos $[M_1, \cdots, M_k]$ a envoltória convexa fechada, isto é,

$$\begin{aligned}[M_1, \cdots, M_k] \quad = \quad & \{\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_k M_k : \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda_i \geq 0 \\ & \text{para } i = 1, \cdots, k \text{ com } \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1\}.\end{aligned}$$

Denotamos por $]M_1, \cdots, M_k[$ a envoltória convexa aberta dos pontos $M_1, \cdots, M_k \in X$.

Definição C.1 *Um arco poligonal L em X é uma união*

$$L = \bigcup_{i=1}^{n-1} [M_i, M_{i+1}]$$

de um número finito de segmentos tais que $]M_i, M_{i+1}[\cap]M_j, M_{j+1}[= \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

Os pontos $M_1, \cdots, M_k$ são chamados de vértices da poligonal e os segmentos $[M_i, M_{i+1}]$ são chamados de arestas da poligonal L para cada $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. Dizemos que o arco poligonal é simples se os vértices são pontos distintos. O arco poligonal L é fechado se $M_1 = M_k$ e nesse caso definimos a fronteira como $\partial L = \emptyset$. Se $M_1 \neq M_k$ então definimos $\partial L = \{M_1, M_k\}$. O ponto M_1 é a origem (ou ponto inicial) e o ponto M_k é o final.

Observação C.2 $[M_i, M_{i+1}]$ define uma orientação, representada pela seta:

$$M_i \longrightarrow M_{i+1} \ .$$

Definição C.3 *Um Link L em X é uma união finita de $m \in \mathbb{N}$ arcos poligonais simples, fechados e dois a dois disjuntos. Os arcos fechados são chamados de componentes conexas de L. O inteiro m é chamado de ordem do Link. Um Knot é um Link de ordem 1.*

A orientação do *Link* é dada pela união das orientações de cada uma de suas componentes conexas.

Exemplo C.4 Um exemplo:

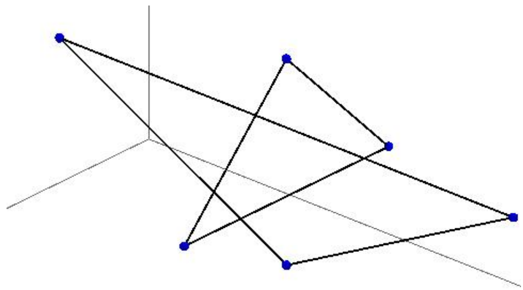


Figura C.1: Link com duas componentes conexas

Definição C.5 (i) *Uma isotopia em X é uma função linear por partes $h : [0,1] \times X \to X$ tal que $\forall t \in [0,1]$ temos que $h_t(-) = h(t,-) : X \to X$ é um homeomorfismo com $h_0(-) = Id_X(-)$.*

(ii) *Dois Links L e L' são ditos isotópicos se existir uma isotopia h de X que preserva orientação tal que $h_1(L) = L'$. Denotamos $L \sim L'$ para designar que L é isotópico a L'.*

Intuitivamente a hipótese de que a função seja linear por partes nos diz geometricamente que deformaremos o espaço de maneira contínua tal que o nosso *Link* seja deformado sem perder sua estrutura de poligonal. A isotopia de *Links* é uma deformação que se inicia como uma paisagem estática que se deforma continuamente até carregar um *Link* em outro *Link*.

Lema C.6 *A relação de isotopia $\sim$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto de todos os Links.*

Demonstração: Reflexiva: seja L um *Link*. Então definimos

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1]\times X & \to & X \\ & (t,x) & \mapsto & x, \end{array}$$

ou seja, $h_t = Id_X$ para todo $t \in [0,1]$. Essa isotopia trivial, nada mais é do que deixar todo o espaço parado. Nesse caso $L \sim L$.

Simétrica: sejam L e L' *Links* tais que $L \sim L'$. Então existe uma isotopia $h : [0,1]\times X \to X$ tal que $h_1(L) = L'$. Como para cada $t \in [0,1]$ a aplicação h_t é um homeomorfismo, podemos considerar a aplicação

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,1]\times X & \to & X \\ & (t,x) & \mapsto & h_t^{-1}(x) \end{array}$$

que é uma isotopia tal que $g_1(L') = h_1^{-1}(L') = L$, pois h_t^{-1} é um homeomorfismo para cada $t \in [0,1]$ e $g_0 = h_0^{-1} = Id_X$. Logo, $L' \sim L$.

Transitiva: sejam L, L' e L'' *Links* tais que $L \sim L'$ e $L' \sim L''$. Então existem isotopias $h : [0,1]\times X \to X$ e $h' : [0,1]\times X \to X$ tais que $h_1(L) = L'$ e $h'_1(L') = L''$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,1]\times X & \to & X \\ & (t,x) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} h(2t,x), \text{ se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ h'(2t-1, h(1,x)), \text{ se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{array} \right. \end{array}$$

Note que g está bem definida pois

$$\begin{array}{rcl} h'(2(\frac{1}{2}) - 1, h_1(x)) & = & h'_0(h_1(x)) \\ & = & h_1(x). \end{array}$$

Para cada $t \in [0,1]$ a aplicação g_t é um homeomorfismo com $g_0 = h_0 = Id_X$ e

$$\begin{array}{rcl} g_1(L) & = & h'_1(h_1(L)) \\ & = & h'_1(L') \\ & = & L''. \end{array}$$

Portanto $L \sim L'$. ∎

C.2 Tangles

A partir de agora iremos restringir a nossa análise para o subespaço convexo $X = \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$. Definimos um objeto chamado *Tangle* que nos servirá para construir o grupo de tranças mais adiante.

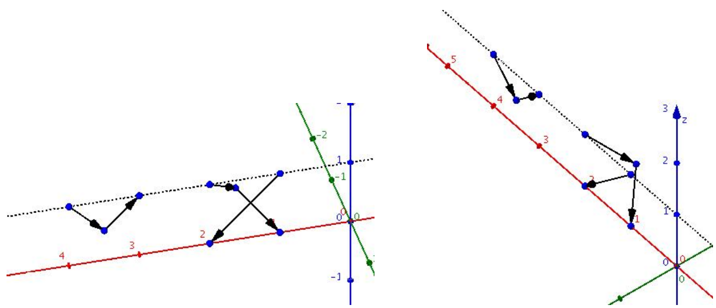
Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ definimos $[n] = \{1, \cdots, n\}$ e para $n = 0$ fazemos $[n] = \emptyset$.

Definição C.7 *Sejam $k, l \in \mathbb{N}$. Um Tangle do tipo (k,l) é uma união de um número finito de arcos poligonais simples, orientados e dois a dois disjuntos em $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ tal que a fronteira satisfaz a seguinte condição:*

$$\begin{aligned} \partial L &= L \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0,1\}) \\ &= ([k] \times 0 \times 0) \cup ([l] \times 0 \times 1). \end{aligned}$$

Pela convenção feita acima, os *Links* podem ser vistos como *Tangles* do tipo $(0,0)$, pois nessas condições a fronteira é vazia, e portanto todos os arcos poligonais são fechados. Assim como fizemos para *Links*, podemos definir uma relação de isotopia entre *Tangles* apenas fazendo um ajuste.

Exemplo C.8 Um exemplo de um *Tangle* do tipo $(2,4)$ visto por dois ângulos distintos



Definição C.9 (i) *Uma isotopia em $X = \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ é uma função linear por partes $h : [0,1] \times X \to X$ tal que $\forall t \in [0,1]$ temos que $h_t(-) : X \to X$ é um homeomorfismo, tal que restrito a fronteira $\partial X = \mathbb{R}^2 \times \{0,1\}$ é a identidade e $h_0(-) = Id_X(-)$.*

(ii) *Dois Tangles L e L' são ditos isotópicos se existir uma isotopia h de X que preserva orientação tal que $h_1(L) = L'$. Denotaremos $L \sim L'$ para designar que L é isotópico a L'.*

Observação C.10 Notemos que a relação de isotopia sobre os *Tangles* é uma relação de equivalência. A verificação desse fato é análogo ao caso dos *Links*, com a ressalva de que na fronteira a isotopia não se move.

Definição C.11 *Uma projeção θ de um Tangle do tipo (k, l) é uma união finita de arcos poligonais em $\mathbb{R}^2$ tal que nenhum vértice se encontra no interior de uma aresta e tal que a fronteira satisfaz a condição*

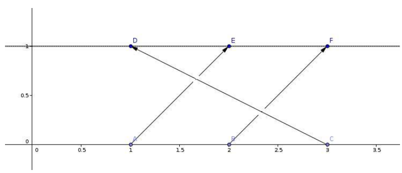
$$\partial\theta = ([k] \times 0) \cup ([l] \times 1).$$

Um ponto de cruzamento de θ é um ponto da projeção que se encontra no interior de pelo menos duas arestas distintas. A ordem de um ponto de cruzamento é o número de arestas distintas às quais o ponto pertence. Uma projeção é dita regular se a ordem de cada ponto de cruzamento é exatamente 2. Dado um ponto de cruzamento P em θ definimos o conjunto E_P formado pelas arestas que contém P.

Definição C.12 *Um diagrama de um Tangle do tipo (k, l) é uma projeção regular em $\mathbb{R} \times [0, 1]$ tal que o conjunto E_P é ordenado, para cada ponto de cruzamento P, a primeira aresta com respeito a ordenação dizemos que está por cima, e a segunda aresta dizemos que está por baixo.*

Vejamos um exemplo de diagrama.

Exemplo C.13



Nosso objetivo é definir uma operação de composição entre alguns *Tangles*, essa operação é a que vai dar origem ao produto no grupo de tranças. Para isso, seja L um *Tangle* do tipo (k, l), definimos duas sequências $s(L)$ e $b(L)$ consistindo de sinais $+$ e $-$. Caso $k = 0$ definimos $s(L) = \emptyset$ e se $l = 0$ fazemos $b(L) = \emptyset$. Supondo que k e l não são nulos definimos $s(L) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)$ e $b(L) = (\delta_1, ..., \delta_l)$ onde $\varepsilon_i = +$ (resp. $\delta_i = +$) se o ponto $(i, 0, 0)$ [resp. $(i, 0, 1)$] é um ponto terminal (resp. de origem) de L . Caso contrário, temos $\varepsilon_i = -$ e $\delta_i = -$.

Consideremos duas aplicações:

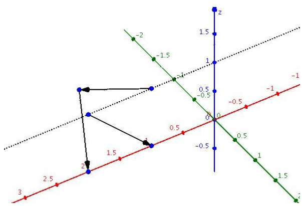
$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 : & \mathbb{R}^2 \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \times [0,1] \\ & (p, z) & \mapsto & (p, \frac{z}{2}) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccc} \alpha_2 : & \mathbb{R}^2 \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \times [0,1] \\ & (p, z) & \mapsto & (p, \frac{z+1}{2}). \end{array}$$

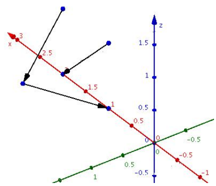
Sejam L e L' dois *Tangles* orientados tais que $b(L) = s(L')$. Então definimos

$$L' \circ L = \alpha_1(L) \cup \alpha_2(L').$$

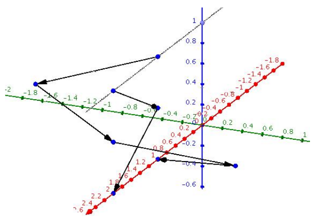
Esse novo *Tangle* é orientado com $s(L' \circ L) = s(L)$ e $b(L' \circ L) = b(L')$, chamamos de composição de L' com L. Vejamos um exemplo prático dessa composição.

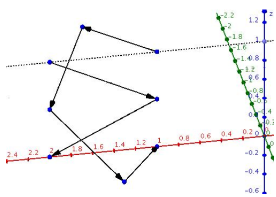
Exemplo C.14 Consideremos os *Tangles*:





Chamemos o *Tangle* à esquerda de L e o *Tangle* à direita de G. Então a composição $L \circ G$ é vista por dois ângulos





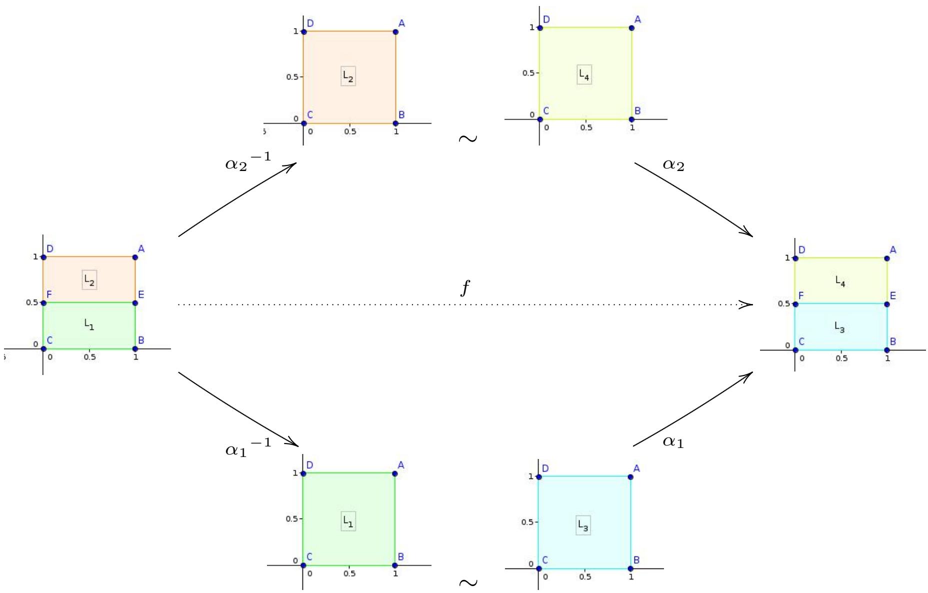
ou seja, geometricamente essa composição é interpretada como uma espécie de colagem entre os *Tangles* em uma derterminada ordem.

Lema C.15 *Sejam L_1, L_2, L_3 e L_4 Tangles orientados com $b(L_1) = s(L_2)$ e $b(L_3) = s(L_4)$. Então*

(i) *Se $L_1 \sim L_3$ e $L_2 \sim L_4$ então $L_2 \circ L_1 \sim L_4 \circ L_3$;*

(ii) *Se $b(L_2) = s(L_3)$ então $(L_3 \circ L_2) \circ L_1 \sim L_3 \circ (L_2 \circ L_1)$.*

Demonstração: (i) A ideia da demonstração pode ser entendida pelo "diagrama" abaixo



Como por hipótese $L_1 \sim L_3$ e $L_2 \sim L_4$, existem isotopias $h : [0,1] \times X \to X$ e $g : [0,1] \times X \to X$ tais que $h_1(L_1) = L_3$ e $g_1(L_2) = L_4$. Definimos

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] \times X & \to & X \\ & (t,(p,\lambda)) & \mapsto & \begin{cases} \alpha_1(h_t(p, 2\lambda)), & \text{se } \lambda \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \\ \alpha_2(g_t(p, 2\lambda - 1)), & \text{se } \lambda \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{array}$$

em que $X = \mathbb{R}^2 \times [0,1]$. Notemos que f está bem definida, pois para

$(t,(p,\frac{1}{2}))\in X$ temos

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1(h_t(p,1)) & \overset{(*)}{=} & \alpha_1(p,1) \\ & = & (p,\frac{1}{2}) \\ & = & \alpha_2(p,0) \\ & \overset{(**)}{=} & \alpha_2(g_t(p,0)) \end{array}$$

em (*) e em (**) utilizamos que as isotopias h e g são a identidade na fronteira do espaço X. Observamos que f restrita a $\mathbb{R}^2\times\left[0,\frac{1}{2}\right]$ é a composição $\alpha_1\circ h\circ\alpha_1^{-1}$ e restrita a $\mathbb{R}^2\times\left[\frac{1}{2},1\right]$ é a composição $\alpha_2\circ g\circ\alpha_2^{-1}$. Notemos também que, para cada $t\in[0,1]$ a aplicação f_t é um homeomofismo, pois é composta de contínuas e portanto contínua, com inversa

$$\begin{array}{rccl} \psi_t: & X & \to & X \\ & (p,\lambda) & \mapsto & \begin{cases} \alpha_1(h_t^{-1}(p,2\lambda)), & \text{se } \lambda\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ \\ \alpha_2(g_t^{-1}(p,2\lambda-1)), & \text{se } \lambda\in\left[\dfrac{1}{2},1\right] \end{cases} \end{array}$$

que é contínua já que h_t^{-1} e g_t^{-1} o são. Observamos também que

$$\begin{array}{rcl} f_0(p,\lambda) & = & \alpha_1(h_0(p,2\lambda)) \\ & = & \alpha_1(p,2\lambda) \\ & = & (p,\lambda) \end{array}$$

se $\lambda\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ e

$$\begin{array}{rcl} f_0(p,\lambda) & = & \alpha_2(g_0(p,2\lambda-1)) \\ & = & \alpha_2(p,2\lambda-1) \\ & = & (p,\lambda) \end{array}$$

se $\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Portanto, $f_0=Id_X$. Finalmente

$$\begin{array}{rcl} f_1(L_2\circ L_1) & = & f_1(\alpha_1(L_1)\cup\alpha_2(L_2)) \\ & = & f_1(\alpha_1(L_1))\cup f_1(\alpha_2(L_2))) \\ & \overset{(*)}{=} & \alpha_1(h_1\circ\alpha_1^{-1}(\alpha_1(L_1)))\cup\alpha_2(g_1\circ\alpha_2^{-1}(\alpha_2(L_2))) \\ & = & \alpha_1(h_1(L_1))\cup\alpha_2(g_1(L_2)) \\ & = & \alpha_1(L_3)\cup\alpha_2(L_4) \\ & = & L_4\circ L_3 \end{array}$$

em (*) utilizamos o fato de que $\alpha_1(L_1) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $\alpha_2(L_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Portanto, $L_2 \circ L_1 \sim L_4 \circ L_3$.
(ii) Para provar que $(L_3 \circ L_2) \circ L_1 \sim L_3 \circ (L_2 \circ L_1)$ definimos a seguinte isotopia

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1] \times X & \to & X \\ & (t,(p,\lambda)) & \mapsto & (p, \phi_t(\lambda)), \end{array}$$

em que

$$\begin{array}{rccc} \phi_t: & [0,1] & \to & [0,1] \\ & \lambda & \mapsto & \begin{cases} \lambda(1-\frac{t}{2}), \text{ se } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \lambda - \frac{t}{4}, \text{ se } \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{4} \\ (1+t)\lambda - t, \text{ se } \frac{3}{4} \leq \lambda \leq 1. \end{cases} \end{array}$$

Fixado um $t \in [0,1]$ a função ϕ_t é invertível e sua inversa é a função

$$\begin{array}{rccc} \psi_t: & [0,1] & \to & [0,1] \\ & \lambda & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{2-t}, \text{ se } 0 \leq \lambda \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{4} \\ \\ \lambda + \dfrac{t}{4}, \text{ se } \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{4} \leq \lambda \leq \dfrac{3-t}{4} \\ \\ \dfrac{\lambda + t}{1+t}, \text{ se } \dfrac{3-t}{4} \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

assim h_t é um homeomorfismo para cada $t \in [0,1]$, já que é continua e tem inversa, a saber $h_t^{-1}(p,\lambda) = (p, \psi_t(\lambda))$ que também é contínua. Notemos que $h_0(p,\lambda) = (p, \phi_0(\lambda)) = (p,\lambda)$.

Mostremos que $h_1((L_3 \circ L_2) \circ L_1) = L_3 \circ (L_2 \circ L_1)$. Primeiro observamos que dado $(p,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} h_1(\alpha_1(p,\lambda)) &= h_1(p, \frac{\lambda}{2}) \\ &\overset{(*)}{=} (p, \frac{\lambda}{4}) \\ &= \alpha_1(\alpha_1(p,\lambda)). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Em (*) utilizamos que $\frac{\lambda}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ para $\lambda \in [0,1]$.

$$h_1(\alpha_2(\alpha_1(p,\lambda))) = h_1(\alpha_2(p, \frac{\lambda}{2}))$$

$$
\begin{aligned}
&= h_1(p, \frac{\lambda+2}{4}) \\
&\overset{(*)}{=} (p, \frac{\lambda+2}{4} - \frac{1}{4}) \\
&= (p, \frac{\lambda+1}{4}) \\
&= \alpha_1(\alpha_2(p,\lambda)). \qquad \text{(C.2)}
\end{aligned}
$$

Em (*) utilizamos que $\frac{\lambda+2}{4} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ para $\lambda \in [0,1]$.

$$
\begin{aligned}
h_1(\alpha_2(\alpha_2(p,\lambda))) &= h_1(\alpha_2(p, \frac{\lambda+1}{2})) \\
&= h_1(p, \frac{\lambda+3}{4}) \\
&\overset{(*)}{=} (p, \frac{\lambda+3}{2} - 1) \\
&= (p, \frac{\lambda+1}{2}) \\
&= \alpha_2(p,\lambda). \qquad \text{(C.3)}
\end{aligned}
$$

Em (*) utilizamos que $\frac{\lambda+3}{4} \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ para $\lambda \in [0,1]$. Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
h_1((L_3 \circ L_2) \circ L_1) &= h_1(\alpha_2(L_3 \circ L_2) \cup \alpha_1(L_1)) \\
&= h_1(\alpha_2(\alpha_2(L_3) \cup \alpha_1(L_2)) \cup \alpha_1(L_1)) \\
&= h_1((\alpha_2(\alpha_2(L_3))) \cup (\alpha_2(\alpha_1(L_2))) \cup \alpha_1(L_1)) \\
&= h_1(\alpha_2(\alpha_2(L_3))) \cup h_1(\alpha_2(\alpha_1(L_2))) \cup h_1(\alpha_1(L_1) \\
&\overset{C.1, C.2 \text{ e } C.3}{=} \alpha_2(L_3) \cup \alpha_1(\alpha_2(L_2)) \cup \alpha_1(\alpha_1(L_1)) \\
&= \alpha_2(L_3) \cup \alpha_1(\alpha_2(L_2) \cup \alpha_1(L_1)) \\
&= \alpha_2(L_3) \cup \alpha_1(L_2 \circ L_1) \\
&= L_3 \circ (L_2 \circ L_1).
\end{aligned}
$$

Logo, $(L_3 \circ L_2) \circ L_1 \sim L_3 \circ (L_2 \circ L_1)$. ■

Definimos um *tangle* que será a identidade com respeito a essa operação de composição. Seja L um *tangle* tal que $s(L) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, então definimos $Id_{s(L)}$ como sendo o *tangle* dado por $\{1, ..., n\} \times \{0\} \times [0,1]$ com $s(Id_{s(L)}) = b(Id_{s(L)}) = s(L)$. Analogamente, definimos $Id_{b(L)}$, com a ressalva que $s(Id_{b(L)}) = b(Id_{b(L)}) = b(L)$.

Lema C.16 *Se L é um Tangle tal que $s(L) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ então $(Id_{b(L)} \circ L) \sim L$ e $L \sim (L \circ Id_{s(L)})$.*

Tal lema é encontrado em ([12], Lemma X.5.11, p. 262). Não iremos demonstrar devido aos argumentos altamente geométricos que não estão no escopo deste trabalho.

C.3 Tranças

Iremos nos ater a um tipo especial de *Tangle* chamado de *braid* que aqui iremos nos referir como trança. Fixemos $1 \leq n$.

Definição C.17 *Uma trança L com n fios é um Tangle do tipo (n, n) tal que*

(i) $s(L) = b(L) = (+, +, ..., +)$*;*

(ii) *L não contém arcos poligonais fechados;*

(iii) *Para cada $z \in [0,1]$ vamos ter que $L \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$ tem exatamente n pontos distintos.*

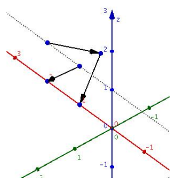
Chamamos uma tranças L com n fios simplesmente de trança, ficando subentendido que temos um natural n fixo. A relação de isotopia entre *Tangles* induz sobre as tranças uma relação de isotopia.

A operação de composição definida entre *Tangles* sempre será possível no caso das tranças e para qualquer trança o elemento $1_n = \{1, ..., n\} \times \{0\} \times [0,1]$ com a orientação dada por $s(1_n) = b(1_n) = (+, ..., +)$ é o elemento $Id_{s(L)}$ e $Id_{b(L)}$ para qualquer trança L.

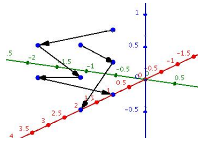
Dada uma trança L definimos uma nova trança, denotada por L^{-1} que é a imagem de L pela reflexão através do plano $\mathbb{R}^2 \times \{\frac{1}{2}\}$, ou seja, $L^{-1} = h(L)$ em que:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \times [0,1] \\ & (p, z) & \mapsto & (p, 1-z). \end{array}$$

Exemplo C.18 No exemplo $C.14$ o *Tangle* L é uma trança e tem um inverso que é representado geometricamente por



Notemos que se fizermos a composição $L \circ L^{-1}$ nesse exemplo obtemos o seguinte resultado



Observação C.19 Observamos que $(L \circ L^{-1}) \sim 1_n \sim (L^{-1} \circ L)$. De fato, se L é uma trança tal que o ponto $(i, 0, 1)$ é levado por um arco poligonal no ponto $(j, 0, 0)$ então pela definição de h a reflexão L^{-1} leva o ponto $(j, 0, 1)$ por um arco poligonal no ponto $(i, 0, 0)$ e a composição vai ter uma nova poligonal de $(i, 0, 1)$ em $(i, 0, 0)$. Isso ocorre com todas as poligonais, e portanto a composição é isotópica à identidade.

Agora que temos todos os ingredientes, podemos fazer a construção do grupo de tranças. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $\mathbb{B}_n$ o conjunto de todas as classes de tranças via isotopia. Denotamos por $[L]$ a classe da trança L.

Proposição C.20 *O par $(\mathbb{B}_n, \circ)$ é um grupo, em que $\circ$ é o produto definido por $[L] \circ [L'] = [L \circ L']$, em que L e L' são tranças quaisquer.*

Demonstração: Observamos que essa operação está bem definida, pois dados $([L], [L'])$, $([G], [G']) \in \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n$ temos

$$\begin{array}{rcl}
([L], [L']) = ([G], [G']) & \Leftrightarrow & [L] = [G] \text{ e } [L'] = [G'] \\
& \Leftrightarrow & L \sim G \text{ e } L' \sim G' \\
& \overset{\text{Lema } C.15}{\Rightarrow} & (L \circ L') \sim (G \circ G') \\
& \Leftrightarrow & [L \circ L'] = [G \circ G'] \\
& \Leftrightarrow & ([L] \circ [L']) = ([G] \circ [G']).
\end{array}$$

Verifiquemos os axiomas de grupo.
Associatividade: sejam $[L_1]$,$[L_2]$ e $[L_3] \in \mathbb{B}_n$. Então,

$$\begin{array}{rcl}
([L_1] \circ [L_2]) \circ [L_3] & = & [L_1 \circ L_2] \circ [L_3] \\
& = & [(L_1 \circ L_2) \circ L_3] \\
& \overset{\text{Lema } C.15}{=} & [L_1 \circ (L_2 \circ L_3)] \\
& = & [L_1] \circ ([L_2] \circ [L_3])
\end{array}$$

Elemento neutro: o elemento $[1_n]$ é a unidade nessa operação. De fato,

$$\begin{array}{lll} [L]\circ[1_n] & = & [L\circ 1_n] \\ & \stackrel{\text{Lema } C.16}{=} & [L] \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{lll} [1_n]\circ[L] & = & [1_n\circ L] \\ & \stackrel{\text{Lema } C.16}{=} & [L] \end{array}$$

para qualquer $[L] \in \mathbb{B}_n$.

Inverso: seja $[L]$ uma trança. O elemento $[L^{-1}]$ é seu inverso com respeito a esse produto. De fato,

$$\begin{array}{lll} [L]\circ[L^{-1}] & = & [L\circ L^{-1}] \\ & \stackrel{\text{Obs. } C.19}{=} & [1_n] \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{lll} [L^{-1}]\circ[L] & = & [L^{-1}\circ L] \\ & \stackrel{\text{Obs. } C.19}{=} & [1_n]. \end{array}$$

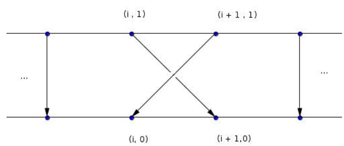
Portanto, $[L]^{-1} = [L^{-1}]$. ■

O grupo $\mathbb{B}_n$ é chamado de grupo de tranças. Denotamos o produto $[L]\circ[G]$ simplesmente por $L\circ G$ ou LG, ficando subentendido que são classes.

Definimos alguns elementos especiais, denotados por $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$. Se chamarmos $M_i = ([(i,0,1);(\frac{2i+1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})]\cup[(\frac{2i+1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2});(i+1,0,0)])$ e $N_i = [(i+1,0,1);(i,0,0)]$, fazemos

$$\sigma_i = [(1,0,1),(1,0,0)] \cup \cdots \cup M_i \cup N_i \cup \cdots \cup [(n,0,1),(n,0,0)]\ .$$

Claro que $\sigma_i \in \mathbb{B}_n$ para todo $i \in \{1,\cdots,n-1\}$. Tais elementos são importantes por caracterizarem o grupo de tranças via relações sobre geradores. Esse elemento pode ser representado pelo diagrama



Proposição C.21 *São válidas as seguintes afirmações*

(i) *O grupo* $\mathbb{B}_n$ *é gerado por* $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$.

(ii) *Sempre que* $3 \le n$ *e* $1 \le i,j \le n-1$ *com* $| i-j | > 1$ *temos*

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i.$$

Também é válido que

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

para todo $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

As duas relações descritas no item (ii) são chamadas relações do grupo de tranças.

Tal demonstração pode ser encontrada em ([12],Lemma X.6.4, p. 264). A demonstração envolve argumentos geométricos que não estão no escopo deste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] AWODEY, S. **Category Theory**, Oxford, 256p. (2006).

[2] DĂSCĂLESCU, S.; NĂSTĂSESCU, C.; RAIANU, S.. **Hopf Algebras: An Introduction**, New York: Marcel Dekker, 401p. (2001).

[3] EILENBERG, S. e MACLANE, S. **Natural Isomorphisms in Group Theory**, Proc. Nat. Aca. Sci., pp. 537-543 (1942).

[4] EILENBERG, S. e MACLANE, S. **General Theory of Natural Equivalences**, American Mathematical Society, Vol. 58, No. 2 , pp. 231-294 (1945).

[5] ETINGOF, P.; GELAKI, S.; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V.. **Tensor Categories**, Lecture notes for the course 18.769 "Tensor categorie", MIT, (2009).

[6] ETINGOF, P.; GOLBERG, O.; HENSEL, S.; LIU, T.; SCHWENDNER, A.; VAINTROB, D.; YUDOVINA, E.. **Introduction to representation theory**, American Mathematical Society, (2011).

[7] FREYD, P. J.. **Abelian Categories** Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 3, (2003).

[8] HILTON, P.J.; STAMMBACH,U.. **A Course in Homological Algebra**, New York: Springer-Verlag, (1997).

[9] HUNGERFORD, T. W.. **Algebra**, New York: Springer- Verlag, 502p. (2000).

[10] JACOBSON, N.. **Basic Álgebra II**, New York: W.H. FREEMAN AND COMPANY, 686p. (1989).

[11] KAN, D. **Adjoint Functors**, American Mathematical Society, Vol. 87, No. 2 , pp. 294-329 (1958).

[12] KASSEL, C.. **Quantum Groups**, New York: Springer-Verlag, 531p. (1995).

[13] MACLANE, S.. **Duality for Groups**, American Mathematical Society, Vol. 56, No. 6 , pp. 485-516 (1950).

[14] MACLANE, S.. **Categories for the Working Mathematician**, Springer, (1971).

[15] MACLANE, S.. **Concepts and categories in perspective** AMS History of Mathematics, Vol. 1: A Century of Mathematics in America, Part I, pp. 323-365 (1988).

[16] MOMBELLI, J. M. **Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones**, Notas de aula, 80p.

[17] SERRE, J. P. **Lie Algebras and Lie Groups**, Lecture notes, Havard, (1964).