UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Felipe Augusto Tasca

C*-ÁLGEBRA DE CUNTZ-KRIEGER E PRODUTO CRUZADO PARCIAL

Florianópolis

2015

Felipe Augusto Tasca

C*-ÁLGEBRA DE CUNTZ-KRIEGER E PRODUTO CRUZADO PARCIAL

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. Danilo Royer - UFSC.

Florianópolis

2015

Felipe Augusto Tasca

C*-ÁLGEBRA DE CUNTZ-KRIEGER E PRODUTO CRUZADO PARCIAL

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 20 de fevereiro 2015.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves - UFSC.
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Danilo Royer - UFSC.
Orientador

Prof. Dr. Daniel Gonçalves - UFSC.

Prof. Dr. Gilles Castro - UFSC.

Prof. Dr. Alexandre Baraviera - UFRGS.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente aos meus familiares (principalmente meus pais), meus professores (principalmente meu orientador), minha namorada e meus amigos.

Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

RESUMO

Inicialmente estudamos a teoria da construção da C*-álgebra Universal, e um exemplo importante de C*-álgebra Universal, que é a C*-álgebra de Cuntz-Krieger. Também estudamos a construção do produto cruzado parcial, obtido a partir de uma ação parcial de um grupo discreto em uma C*-álgebra. Por último demonstramos que a C*-álgebra de Cuntz-Krieger é isomorfa a um produto cruzado parcial, obtido a partir de uma ação parcial do grupo livre no espaço das funções contínuas sobre o conjunto dos caminhos infinitos obtidos a partir da matriz que define a C*-álgebra de Cuntz-Krieger.
Palavras-chave: C*-algebras. C*-álgebras universais. C*-álgebra de Cuntz-Krieger. Produto Cruzado Parcial.

ABSTRACT

Initially we study the theory of the universal C*-algebra and an important example of this, which is the Cuntz-Krieger C*-algebra. We also study the construction of the partial crossed product, obtained from a partial action of a discrete group on a C*-algebra. Finally we prove that the Cuntz-Krieger C*-algebra is isomorphic to a partial crossed product, gotten from a partial action of the free group on the space of continuous functions over the set of the infinite paths obtained from the matrix that defines the Cuntz-Krieger C*-algebra.

Keywords: C*-algebras. Universal C*-algebras. Cuntz-Krieger C*-algebra. Partial crossed product.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A C*-álgebra de Cuntz-Krieger foi definida por volta dos anos 80 do século XX por Joachim Cuntz e Wolfgang Krieger (CUNTZ; KRIEGER, 1980), matemáticos alemães cuja contribuição na álgebra de operadores é inestimável. O produto cruzado parcial de uma C*-álgebra sobre um grupo discreto foi desenvolvido durante os anos 90 e teve grande contribuição de (EXEL, 1994) e (MCCLANAHAN, 1995).

Neste trabalho, faremos a construção da C*-álgebra de Cuntz-Krieger e de um produto cruzado parcial que é isomorfo à essa álgebra. As definições de álgebra e C*-álgebras encontram-se no capítulo 2. Mesmo assim, é aconselhável que já seja de conhecimento do leitor, alguns resultados importantes da álgebra de operadores como por exemplo o Teorema de Gelfand. Primeiro, precisamos definir o que é uma C*-álgebra universal. Isto é feito no capítulo 3. Prova-se também neste capítulo a propriedade universal e a unicidade da C*-álgebra universal.

No capítulo 4 definimos a C*-álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$ usando a teoria vista no capítulo 3. Para tanto, precisamos de uma matriz quadrada $A \in \mathbb{M}_n(\{0,1\})$, um conjunto de geradores e um conjunto de relações que formem um par admissível e respeitem quatro axiomas. Daí em diante, é provado que span$\{S_\alpha S_\beta^*\}$, em que α e β são palavras positivas finitas com letras em $\{1,\dots,n\}$, é um conjunto comutativo que é denso em $\mathcal{O}_A$. Depois de provar mais algumas propriedades deste conjunto definimos o conjunto $\mathbf{Q} = \{Q_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{W}}$ que respeita algumas relações que se parecem com as relações satisfeitas por $S_\alpha S_\beta^*$. Usando $\mathbf{Q}$ como gerador com as relações dadas, consideramos a C*-álgebra universal $\mathcal{B}$ deste par e notamos, por Gelfand, que $\mathcal{B} \cong C(\widehat{\mathcal{B}})$, já que $\mathcal{B}$ é comutativo com unidade. No fim, este conjunto $\widehat{\mathcal{B}}$ é identificado como sendo homeomorfo à $X := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in N^{\mathbb{N}} : a_{x_i x_{i+1}} = 1\}$, em que os a_{ij}'s são obtidos a partir da matriz A que define a C*-álgebra de Cuntz-Krieger.

A construção do produto cruzado parcial é feita no capítulo 5. Primeiro é definida a ação parcial de um grupo sobre uma C*-álgebra e algumas propriedades são observadas. Em seguida, define-se o produto cruzado parcial algébrico $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$, que já herdará as propriedades de espaço vetorial pois será definido a partir de um espaço vetorial que o contém. Um produto é definido a fim de tornar este produto cruzado parcial algébrico em uma álgebra, porém, para mostrar que este produto é associativo algumas proposições terão de ser feitas. Por fim, dotamos $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$ com uma involução e uma norma. Com isso, construímos uma $*$-álgebra normada a qual nos proporciona a definir uma C*-álgebra envolvente, que é o que resta para definir o produto cruzado parcial $A \rtimes_\alpha G$.

O capítulo 6 tem por finalidade definir a ação parcial que será utilizada para definir o produto cruzado parcial. Passo a passo, relembramos a definição do conjunto $\mathbb{W}$ feita no capítulo 4 e definimos cada um dos conjuntos e isomorfismos da ação parcial que será construída. Finalmente, construímos o produto cruzado parcial obtido a partir de uma ação parcial γ do grupo livre $\mathbb{F}$ no espaço das funções contínuas sobre o conjunto X dos caminhos infinitos obtidos a partir da matriz que define a C*-álgebra de Cuntz-Krieger.

O último capítulo é destinado a mostrar o objetivo principal deste trabalho: o isomorfismo entre a C*-álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$ e o produto cruzado parcial $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$. Primeiro, construímos um $*$-homomorfismo de $\mathcal{O}_A$ para $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$. Depois, montamos uma representação parcial π e provamos que existe um $*$-homomorfismo φ de $C(X)$ para $\mathcal{O}_A$. Com isso e o Teorema 42 no capítulo 5, basta mostrarmos que (φ, π) é γ-covariante para garantir a existência de um $*$-homomorfismo de $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$ para $\mathcal{O}_A$. Por fim, mostramos que estes dois $*$-homomorfismos são inversos um do outro.

2 C*-ÁLGEBRA E ÁLGEBRA DOS MULTIPLICADORES

Neste primeiro capítulo faremos uma rápida introdução à teoria de C*-álgebras. Algumas demonstrações serão omitidas pela simplicidade da prova ou por serem comuns no meio matemático. Mesmo assim, a principal referência utilizada para desenvolver esta parte foi (MURPHY, 1990). No final do capítulo, existe um breve estudo sobre álgebra de multiplicadores, a qual será de grande utilidade no capítulo 5. Vamos começar definindo o que é uma álgebra:

Definição 1. *Uma álgebra é um espaço vetorial A (sobre $\mathbb{C}$) com a operação bilinear "$.$":*

$$\begin{aligned} . : A^2 &\longrightarrow A \\ (a,b) &\longmapsto a.b \end{aligned}$$

tal que $a(bc) = (ab)c$, para todo $a, b, c \in A$.

Um subálgebra de A é um subespaço vetorial B tal que se $b, b' \in B$ então $b.b' \in B$. Dotado com a multiplicação restrita aos elementos de B, B é uma álgebra.

Uma norma é dita submultiplicativa se $\|a.b\| \leq \|a\|.\|b\|$. Nesse caso, o par $(A, \|.\|)$ é chamado álgebra normada. Se $(A, \|.\|)$ é completo, chamamos de álgebra de Banach.

Definição 2. *Uma involução em uma álgebra A é uma função conjugada - linear em A, $A \ni a \mapsto a^* \in A$, tal que $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$, $\forall a, b \in A$.*

O par $(A, *)$ é chamado álgebra involutiva ou $*$-álgebra. Se S é um subconjunto de A, definimos $S^* := \{a^* | a \in S\}$ e se $S = S^*$, dizemos que S é auto-adjunto. Uma subálgebra auto-adjunta B de A é uma $*$-subálgebra de A e é uma $*$-álgebra quando dotada da involução dada pela restrição. Se I é um ideal auto-adjunto de A, então a álgebra quociente A/I é uma $*$-álgebra com involução dada por $(a+I)^* = a^*+I$, $(a \in A)$.

Definição 3. *Uma $*$-álgebra de Banach é uma $*$-álgebra A com uma norma submultiplicativa completa tal que $\|a^*\| = \|a\|$, para todo $a \in A$.*

Se além disso, A tem uma unidade tal que $\|1\| = 1$, chamamos A de $*$-álgebra de Banach unitária.

Definição 4. *Uma C*-álgebra é uma $*$-álgebra de Banach, tal que*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \;\; a \in A.$$

Chamaremos uma $*$-subálgebra fechada de uma C*-álgebra de C*-subálgebra. Obviamente, uma $*$-subálgebra fechada de uma C*-álgebra é também uma C*-álgebra. Se uma C*-álgebra tem uma unidade 1, então automaticamente $\|1\| = 1$, pois $\|1\| = \|1^*1\| = \|1\|^2$. Similarmente, se p é projeção, $\|p\| = 1$. Se u é unitário, então, $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$, de modo que $\|u\| = 1$.

Exemplos. 1. O corpo dos escalares $\mathbb{C}$ é uma C*-álgebra (unitária) com involução dada pela conjugação complexa, $\lambda \longmapsto \overline{\lambda}$.

2. Se Ω é espaço localmente compacto Hausdorff, então $C_0(\Omega)$ com a norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$ é uma C*-álgebra com involução $f \longmapsto \overline{f}$. Com essa mesma involução e essa mesma norma, temos as seguintes C*-álgebras: $l^\infty(S)$ com S conjunto; $L^\infty(\Omega, \mu)$ em que (Ω, μ) é um espaço de medida; $C_b(\Omega)$ em que Ω é um espaço topológico.

Para mais detalhes destas definições e mais exemplos de C*-álgebras, pode-se consultar Murphy (1990). Nos próximos parágrafos, vamos introduzir a álgebra $\mathcal{M}(A)$.

A cada C*-álgebra A existe uma certa C*-álgebra associada $\mathcal{M}(A)$ (unital) que contém A como um ideal.

Definição 5. *Um duplo centralizador para uma C*-álgebra A é um par (L, R) de funções lineares limitadas em A, tais que para todo $a, b \in A$,*

$$L(ab) = L(a)b, \;\; R(ab) = aR(b) \text{ e } R(a)b = aL(b).$$

Exemplo. Se $c \in A$ e $L_c, R_c : A \to A$ são tais que $L_c(a) = ca$ e $R_c(a) = ac$, então o par (L_c, R_c) é um duplo centralizador de A. É fácil verificar que L_c e R_c são limitados, pois, $\|c\| = \sup\limits_{\|b\|\leq 1} \|cb\| = \sup\limits_{\|b\|\leq 1} \|bc\|$ e portanto, $\|L_c\| = \|R_c\| = \|c\|$.

Lema 6. *Se (L, R) é um duplo centralizador em uma C*-álgebra A, então $\|L\| = \|R\|$.*

Demonstração. Como $\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leq \|R\|\|a\|\|b\|$, temos que $\|L(b)\| = \sup\limits_{\|a\|\leq 1} \|aL(b)\| \leq \|R\|\|b\|$ e por isso, $\|L\| \leq \|R\|$.

Por outro lado, tem-se que $\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \leq \|L\|\|a\|\|b\|$, o que implica que $\|R(a)\| = \sup\limits_{\|b\|\leq 1} \|R(a)b\| \leq \|L\|\|a\|$, e com isso, $\|R\| \leq \|L\|$. Portanto, $\|L\| = \|R\|$. ■

Definição 7. *Se A é uma C^*-álgebra denotamos o conjunto de todos os duplos centralizadores por $\mathcal{M}(A)$. $\mathcal{M}(A)$ é chamada a álgebra dos multiplicadores de A.*

Definimos a norma de um duplo centralizador (L, R) por $\|L\| = \|R\|$. É fácil verificar que $\mathcal{M}(A)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{B}(A) \oplus \mathcal{B}(A)$ (em que $\mathcal{B}(A)$ é o espaço dos operadores limitados em A) e portanto completo.

Se $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in \mathcal{M}(A)$, definimos o produto por $(L_1, R_1).(L_2, R_2) = (L_1L_2, R_2R_1)$. Através de cálculos simples mostra-se que isso é novamente um duplo centralizador em $\mathcal{M}(A)$ e que $\mathcal{M}(A)$ é uma álgebra sobre essa multiplicação. Seja $L : A \to A$. Defina $L^* : A \to A$ como sendo $L^*(a) = (L(a^*))^*$. Então L^* é linear e a função $L \mapsto L^*$ é uma função conjugada linear isométrica de $\mathcal{B}(A)$ nele mesmo tal que $L^{**} = L$ e $(L_1L_2)^* = L_1^*L_2^*$.

Agora, se $(L, R) \in \mathcal{M}(A)$, defina $(L, R)^* = (R^*, L^*)$. Facilmente verifica-se que a função $(L, R) \longmapsto (R^*, L^*)$ é uma involução em $\mathcal{M}(A)$: $(L, R)^{**} = (R^*, L^*)^* = (L^{**}, R^{**}) = (L, R)$ e $((L_1, R_1).(L_2, R_2))^* = (L_1L_2, R_2R_1)^* = ((R_2R_1)^*, (L_1L_2)^*) = (R_2^*R_1^*, L_1^*L_2^*) = (R_2^*, L_2^*)(R_1^*, L_1^*) = (L_2, R_2)^*(L_1, R_1)^*$.

Proposição 8. *Se A é uma C^*-álgebra, então $\mathcal{M}(A)$ é uma C^*-álgebra com a multiplicação, involução e norma definidas anteriormente.*

Demonstração. A única propriedade que falta provar rigorosamente é que se $T = (L, R)$ é um duplo centralizador, então $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Se $a \in A$ é tal que $\|a\| \leq 1$ então $\|L(a)\|^2 = \|L(a)^*L(a)\| = \|L^*(a^*)L(a)\|$ $= \|a^*R^* \circ L(a)\| \leq \|R^*L\| = \|T^*T\|$, o que implica em $\|T\|^2 = \sup\limits_{\|a\|\leq 1} \|L(a)\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2$. ■

Proposição 9. *A função $\varphi : A \longrightarrow \mathcal{M}(A)$, que leva $a \longmapsto (L_a, R_a)$ é um $*$-homomorfismo isométrico.*

Demonstração. Sejam $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então, se $x \in A$:

$$\begin{aligned}
\varphi(a+\lambda b)\big|_x &= (L_{a+\lambda b}, R_{a+\lambda b})(x) = \big(L_{a+\lambda b}(x), R_{a+\lambda b}(x)\big) \\
&= \big((a+\lambda b)x, x(a+\lambda b)\big) = \big(ax+\lambda bx, xa+x\lambda b\big) \\
&= \big(L_a(x)+\lambda L_b(x), R_a(x)+\lambda R_b(x)\big) \\
&= \big(L_a(x), R_a(x)\big) + \big(\lambda L_b(x), \lambda R_b(x)\big) \\
&= \big(L_a, R_a\big)(x) + \lambda\big(L_b, R_b\big)(x) = \big[\varphi(a)+\lambda\varphi(b)\big]\big|_x.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\varphi(a.b)\big|_x &= (L_{ab}, R_{ab})(x) = \big(L_{ab}(x), R_{ab}(x)\big) = \big((ab)x, x(ab)\big) \\
&= \big(a(bx), (xa)b\big) = \big(L_a(bx), R_b(xa)\big) \\
&= \big(L_a(L_b(x)), R_b(R_a(x))\big) = \big(L_a \circ L_b, R_b \circ R_a\big)(x) \\
&= (L_a, R_a).(L_b, R_b)(x) = \big[\varphi(a).\varphi(b)\big]\big|_x.
\end{aligned}$$

E mais,

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(a^*)\big)^*\big|_x &= \big(L_a, R_a\big)^*(x) = \big(L_a(x), R_a(x)\big)^* = \big(R_a^*(x), L_a^*(x)\big) \\
&= \big((R_a(x^*))^*, (L_a(x^*))^*\big) = \big((x^*a)^*, (ax^*)^*\big) \\
&= (a^*x, xa^*) = \big(L_{a^*}(x), R_{a^*}(x)\big) = \varphi(a^*)\big|_x.
\end{aligned}$$

Portanto, φ é $*$-homomorfismo. Falta mostrar que é isométrico. Mas isto segue do exemplo na página 18 que vem logo em seguida da Definição 5: $\|\varphi(a)\| = \|(L_a, R_a)\| = \|L_a\| = \|R_a\| = \|a\|$. ∎

Diante deste resultado, podemos identificar A como uma C*-subálgebra de $\mathcal{M}(A)$. Note que $\mathcal{M}(A)$ (sempre) é unital, basta tomarmos $1 = (Id_A, Id_A)$. Mais ainda, $\varphi(A)$ é um ideal de $\mathcal{M}(A)$: De fato, seja $x \in A$ e $(L, R) \in \mathcal{M}(A)$, então para todo $a \in A$, $L_x \circ L(a) = x(L(a)) = R(x)a = L_{R(x)}(a)$ e $R \circ R_x(a) = R(ax) = aR(x) = R_{R(x)}(a)$. Assim, $(L_x, R_x).(L, R) = (L_x \circ L, R \circ R_x) = (L_{R(x)}, R_{R(x)}) \in \varphi(A)$. Analogamente, $(L, R).(L_x, R_x) = (L_{L(x)}, R_{L(x)}) \in \varphi(A)$. Portanto, $\varphi(A) \lhd \mathcal{M}(A)$. Uma observação válida a ser feita é que φ é isomorfismo se, e somente se A é unital.

3 C*-ÁLGEBRAS UNIVERSAIS

No capítulo anterior introduzimos a noção de C*-álgebra. Agora faremos a construção de um tipo especial de C*-álgebra. A C*-álgebra universal é gerada apenas com um conjunto qualquer de elementos equipado com certas relações. Para mais detalhes desta construção, ou modos diferentes de construção, pode-se consultar (BOAVA, 2007), (MATTOS, 2007).

Seja $\mathcal{G}$ um conjunto qualquer. Chamaremos $\mathcal{G}$ de conjunto de geradores. Considere o conjunto $\mathcal{G}^* = \{g^* | g \in \mathcal{G}\}$.

Note que o símbolo $*$ em usado $\mathcal{G}^*$ não tem nenhum significado matemático. Foi usado apenas para distinguir dos elementos de $\mathcal{G}$. Claro que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}^*$ são disjuntos e têm a mesma cardinalidade. Uma maneira de se obter $\mathcal{G}^*$ é definir $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \times \{1\}$ e denotar cada elemento $g \times 1$ por g^*.

Definição 10. *Defina $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} := \{r_1 \dots r_n | r_1, \dots, r_n \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*, n \in \mathbb{N}\}$ e considere o produto em $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ dado pela concatenação, isto é:*

$$(r_1 \dots r_n)(s_1 \dots s_m) = r_1 \dots r_n s_1 \dots s_m.$$

Considere também a sequência vazia (isto é, não possui nenhuma entrada) em $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ denotada por e.

Definição 11. *Defina* $\mathcal{B}_{\mathcal{G}} := span\{\mathcal{F}_{\mathcal{G}}\} = \left\{ \sum^{finita} \lambda_r r | r \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}, \lambda_r \in \mathbb{C} \right\}$.

Note agora que se definirmos de maneira natural em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ a soma e o produto por escalar, obtemos um espaço vetorial. Também, quando consideramos em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ o produto da forma:

$$(\lambda_r r).(\lambda_s s) = (\lambda_r.\lambda_s)(rs), \forall r, s \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}, \forall \lambda_r, \lambda_s \in \mathbb{C},$$

temos que $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ é uma álgebra. Agora, vamos produzir uma operação de involução em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$:

Definição 12. *Seja $* : \mathcal{F}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, definida por $r_1 \dots r_n \mapsto {r_n}^* \dots {r_1}^*$ em que* $r_i^* = \begin{cases} g, & se\ r_i = g^* \in \mathcal{G}^*; \\ g^*, & se\ r_i = g \in \mathcal{G}. \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n.$

Diante disto definimos de maneira natural $* : \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ dada por $\lambda_r r \mapsto \overline{\lambda_r} r^*$, que é uma involução em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$. Assim, o conjunto $(\mathcal{B}_{\mathcal{G}}, +, ., *)$ é uma $*$-álgebra.

Proposição 13. *Sejam $\mathcal{G}$ um conjunto de geradores A uma $*$-álgebra e $\rho : \mathcal{G} \to A$ uma função. Então, existe $\widetilde{\rho} : \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \to A$ extensão linear de ρ para $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$.*

Demonstração. Defina $\widetilde{\rho}$ da forma:

i. $\forall g \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\rho}(g) = \rho(g)$;

ii. $\forall g^* \in \mathcal{G}^*$, $\widetilde{\rho}(g^*) = (\rho(g))^*$, note que $\rho(g) \in A$ que é $*$-álgebra;

iii. $\forall r_1 \dots r_n \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, $\widetilde{\rho}(r_1 \dots r_n) = \rho(r_1) \dots \rho(r_n)$;

iv. $\forall x = \sum^{finita} \lambda_r r \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$, $\widetilde{\rho}\Big(\sum^{finita} \lambda_r r\Big) = \sum^{finita} \lambda_r \rho(r)$.

Assim, $\widetilde{\rho}$ é extensão linear de ρ para $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$. ■

Observação. Note que $\widetilde{\rho} : \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \to A$ também satisfaz $\widetilde{\rho}(ab) = \widetilde{\rho}(a)\widetilde{\rho}(b)$ e $\widetilde{\rho}(a^*) = (\widetilde{\rho}(a))^*$, $\forall a, b \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$.

Diante desta observação, podemos dizer que tal proposição nos garante que podemos estender qualquer função entre o conjunto $\mathcal{G}$ e uma $*$-álgebra A para um $*$-homomorfismo entre $*$-álgebras $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ e A. Logo, nos resultados seguintes, iremos eventualmente considerar a $*$-álgebra gerada por $\mathcal{G}$ sempre que for necessário, somente sabendo como as funções se comportam nos geradores.

A ideia agora é dotar um quociente de $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ com uma norma.

Definição 14. *Seja B uma $*$-álgebra. Uma relação em B é um par $(x, \eta) \in B \times \mathbb{R}_+$.*

Definição 15. *Sejam $\mathcal{G}$ um conjunto de geradores, R um conjunto de relações em $(\mathcal{B}_{\mathcal{G}}, \mathbb{R}_+)$, A uma C^*-álgebra e $\rho : \mathcal{G} \to A$ uma função. Dizemos que ρ é uma representação de $\mathcal{G}$ que satisfaz R se, $\forall (x, \eta) \in R$, $\|\widetilde{\rho}(x)\| \leq \eta$, em que $\widetilde{\rho}$ é a extensão de ρ para $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$.*

Para simplificar a notação, quando ρ é uma representação de $\mathcal{G}$ que satisfaz R, dizemos apenas que ρ é uma representação de $(\mathcal{G}, R)$.

Exemplo. Considere $\mathcal{G} = \{x\}$ e $R = \{(x - x^*, 0)\}$. Defina $\rho : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ por $x \mapsto \lambda$, em que $\lambda \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Então,

$$\|\widetilde{\rho}(x - x^*)\| = \|\widetilde{\rho}(x) - \widetilde{\rho}(x^*)\| = \|\lambda - \overline{\lambda}\| = \|\lambda - \lambda\| = 0.$$

Assim, ρ é uma representação de $(\mathcal{G}, R)$.

Definição 16. *Um par* $(\mathcal{G}, R)$ *é dito ser admissível se, para todo* $g \in \mathcal{G}$ *existe* $c_g \in \mathbb{R}$ *tal que, para toda representação de* $\mathcal{G}$ *que satisfaz* R*, tenhamos* $\|\rho(g)\| \leq c_g$*.*

Exemplos.

1. Sejam $\mathcal{G} = \{u, e\}$ e $R = \{(ue-u, 0), (eu-u, 0), (e-e^*, 0)\}$. Defina $\rho : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ que leva $u \mapsto i$ e $e \mapsto 1$. Claro que ρ é representação de $(\mathcal{G}, R)$, pois $\|\widetilde{\rho}(ue-u)\| = \|i1-i\| = 0$, $\|\widetilde{\rho}(eu-u)\| = \|1i-i\| = 0$ e $\|\widetilde{\rho}(e-e^*)\| = \|1-1\| = 0$. Mas $(\mathcal{G}, R)$ não é admissível pois se considerar $\rho_n : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ tal que $\rho_n(u) = n.i$ e $\rho_n(e) = 1$ então, claramente, ρ_n é representação de $(\mathcal{G}, R)$. Porém $\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |n| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\rho_n(u)\|$.

2. Sejam $\mathcal{G} = \{x\}$ e $R = \{(x - x^2, 0), (x - x^*, 0)\}$. Então $(\mathcal{G}, R)$ é admissível. De fato, sejam A uma C^*-álgebra e $\rho : \mathcal{G} \to A$ uma representação de $(\mathcal{G}, R)$, vamos obter $c_x \in \mathbb{R}$ tal que $\|\rho(x)\| \leq c_x$. Por ρ ser representação de $(\mathcal{G}, R)$, temos que $\|\widetilde{\rho}(x - x^*)\| = 0$ e $\|\widetilde{\rho}(x - x^2)\| = 0$, ou seja, $\|\rho(x) - \rho(x^*)\| = 0$ e $\|\rho(x) - \rho(x^2)\| = 0$, ou seja, $\rho(x)^* = \rho(x) = \rho(x)^2$, o que implica que $\rho(x)$ é projeção em A. Logo, $\|\rho(x)\| = 0$ ou $\|\rho(x)\| = 1$. Portanto, tomando $c_x = 1$ temos que $\|\rho(x)\| \leq 1 = c_x$. Como ρ é representação qualquer, temos que $(\mathcal{G}, R)$ é admissível.

Agora, vamos definir uma C*-seminorma em uma $*$-álgebra e mostrar que desta C*-seminorma é sempre possível criar uma C*-norma (que é uma norma que satisfaz $\|x^*x\| = \|x\|^2$). Isto será útil mais adiante, quando definirmos em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ uma C*-seminorma.

Definição 17. *Seja* A *uma* $*$*-álgebra. Dizemos que uma aplicação* $\|.\|_s : A \to \mathbb{R}_+$ *é uma C*-seminorma se:*

1. $\|.\|_s$ *é uma seminorma*[1]*;*
2. $\|ab\|_s \leq \|a\|_s \|b\|_s$, $\forall a, b \in A$*;*
3. $\|a^*\|_s = \|a\|_s$, $\forall a \in A$*;*
4. $\|a^*a\|_s = \|a\|_s^2$, $\forall a \in A$*.*

[1] Note que em uma seminorma, $\|x\| = 0 \nRightarrow x = 0$. Porém, $\|0\| = \|0.0\| = 0.\|0\| = 0$. E claro que toda norma é uma seminorma.

Considere $\|.\|_s : A \to \mathbb{R}_+$ uma C*-seminorma. Então se definirmos o conjunto $N := \{x \in A : \|x\|_s = 0\}$, temos que tal conjunto é ideal bilateral auto-adjunto de A. De fato, se $x \in A$, $n, m \in N$, então:

- $0 \leq \|x.n\|_s \leq \|x\|_s \|n\|_s = \|x\|_s.0 = 0$;
- $0 \leq \|m.x\|_s \leq \|m\|_s \|x\|_s = 0.\|x\|_s = 0$;
- $0 \leq \|n + m\|_s \leq \|n\|_s + \|m\|_s = 0 + 0 = 0$;
- $0 \leq \|n^*\|_s = \|n\|_s = 0$.

Então podemos considerar a $*$-álgebra A/N cujos elementos são da forma $\overline{x} = x + N$ com $x \in A$.

Proposição 18. *Seja $\|.\| : A/N \to \mathbb{R}_+$ tal que $\overline{x} \longmapsto \|\overline{x}\| = \|x\|_s$. Então $\|.\|$ é C*-norma em A/N.*

Demonstração. De fato, note que $\|.\|$ está bem definida pois se $\overline{x} = \overline{y}$ então $x-y \in N$, ou seja, $\|x-y\|_s = 0$. Mas $|\|x\|_s - \|y\|_s| \leq \|x-y\|_s = 0$, donde $\|x\|_s = \|y\|_s$. ■

Observação. Note agora que se completarmos A/N na C*-norma (que é contínua), então tal norma se estende por densidade em $\overline{A/N}$.

No lugar da $*$-álgebra A que estava sendo citada, vamos estudar agora $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ que é a $*$-álgebra que nos interessa.

Proposição 19. *Considere a classe $\Delta = \{\rho : \mathcal{G} \to C : \rho$ é representação de $(\mathcal{G}, R)$ par admissível e C é C*-álgebra$\}$.*
Seja $|||.||| : \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}_+$ tal que $|||x||| = \sup\limits_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\|$. Então $|||.|||$ é C-seminorma em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$.*

Demonstração. De fato, $|||.|||$ está bem definido pois se considerarmos $x = \sum\limits_{i=1}^{n_x} \lambda_i r_i \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ arbitrário, temos que para cada $i = 1, \ldots, n_x$, o elemento $r_i = r_1^i r_2^i \ldots r_n{}^i \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ e como $(\mathcal{G}, R)$ é admissível, para cada $r_j^i \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*$, existe $c_{r_j^i} \in \mathbb{R}$ tal que $\|\rho(r_j^i)\| \leq c_{r_1^i}$. Então,
$\|\widetilde{\rho}(r_i)\| = \|\widetilde{\rho}(r_1^i \ldots r_n^i)\| = \|\widetilde{\rho}(r_1^i) \ldots \widetilde{\rho}(r_n^i)\| \leq \|\widetilde{\rho}(r_1^i)\| \ldots \|\widetilde{\rho}(r_n^i)\| \leq$
$\leq c_{r_1^i} \ldots c_{r_n^i} =: c_{r_i}$. Portanto,

$$\|\widetilde{\rho}(x)\| = \|\widetilde{\rho}(\sum_{i=1}^{n_x} \lambda_i r_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n_x} |\lambda_i| \|\widetilde{\rho}(r_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n_x} |\lambda_i| c_{r_i} < +\infty,$$

donde claramente,

$$\sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)\| < +\infty.$$

Vamos provar agora que $|||.|||$ é C*-seminorma. Sejam $x, y \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então,

(1) $|||x||| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)\| \geq 0$, óbvio;

(2) $|||\alpha x||| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(\alpha x)\| = \sup_{\rho\in\Delta}|\alpha|.\|\widetilde{\rho}(x)\| = |\alpha|.|||x|||$;

(3) $|||x+y||| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x+y)\| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)+\widetilde{\rho}(y)\| \leq$
$\sup_{\rho\in\Delta}\{\|\widetilde{\rho}(x)\| + \|\widetilde{\rho}(y)\|\} \leq \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)\| + \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(y)\| = |||x||| + |||y|||$;

(4) $|||x^*||| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x^*)\| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)^*\| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)\| = |||x|||$;

(5) $|||xy||| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(xy)\| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)\widetilde{\rho}(y)\| \leq$
$\sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)\|\|\widetilde{\rho}(y)\| \leq \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)\| \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(y)\| = |||x|||.|||y|||$;

(6) $|||x^*x||| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x^*x)\| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)^*\widetilde{\rho}(x)\| = \sup_{\rho\in\Delta}\|\widetilde{\rho}(x)\|^2 =$
$|||x|||^2$.

■

Observação. Não podemos garantir que $|||.|||$ é uma norma, pois se $|||x||| = 0$, nada nos garante que $x = 0$. Por outro lado, podemos usar a Proposição 18 para garantir que a aplicação $\|.\| : \mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N \to \mathbb{R}_+$ que leva $\overline{x} \mapsto |||x|||$ é C*-norma em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N$, em que $N = \{x \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}} : |||x||| = 0\}$.

Definição 20. *A C*-álgebra universal gerada por $\mathcal{G}$ com as relações R, denotada por $C^*(\mathcal{G}, R)$, é o completamento de $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N$ na norma $\|.\|$, ou seja:*

$$C^*(\mathcal{G}, R) = \overline{\mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N}^{\|\cdot\|}.$$

Observações.

1. Note que $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N$ é *-subálgebra de $C^*(\mathcal{G}, R)$ e podemos considerar a projeção canônica $i : \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \to C^*(\mathcal{G}, R)$ que leva $x \mapsto \overline{x}$.

2. A ideia de construir a C*-álgebra universal era que os objetos associados a elementos de $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ nessa C*-álgebra, satisfizessem as relações R. Vamos verificar que a C*-álgebra $C^*(\mathcal{G}, R)$ satisfaz esta propriedade. Se $(x, \eta) \in R$, então $\|i(x)\| = \|\overline{x}\| = |||x||| = \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\| \leq \eta$, ou seja, a imagem de x em $C^*(\mathcal{G}, R)$ satisfaz a propriedade que desejávamos.

Vamos agora verificar que $C^*(\mathcal{G}, R)$ satisfaz a propriedade universal.

Teorema 21. *Se ρ é uma representação de $(\mathcal{G}, R)$ em C, então existe um único homomorfismo $\psi : C^*(\mathcal{G}, R) \to C$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "i"'] & & C \\
& C^*(\mathcal{G}, R) \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina $\widetilde{\psi} : \mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N \to C$ por $\widetilde{\psi}(\overline{x}) = \widetilde{\rho}(x)$, em que $\widetilde{\rho}$ é a extensão de $\rho : \mathcal{G} \to C$ para $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$. Então $\widetilde{\psi}$ está bem definida pois se $\overline{x} = \overline{0}$, ou seja, se $x + N = 0 + N$, ou ainda, se $x = x - 0 \in N$, então $0 = |||x||| = \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\| \geq \|\widetilde{\rho}(x)\|_C \geq 0$, o que implica que $\widetilde{\rho} = 0$, ou seja, $\widetilde{\psi}(\overline{x}) = 0$. Logo, $\widetilde{\psi}$ está bem definida.

Note agora que, como $\widetilde{\rho}$ é homomorfismo[1] entre $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ e C, é claro que $\widetilde{\psi}$ também é homomorfismo. Mais ainda, note que $\widetilde{\psi}$ é contrativo, pois:

$$\|\widetilde{\psi}(\overline{x})\|_C = \|\widetilde{\rho}(x)\|_C \leq \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(x)\| = |||x|||_{\mathcal{B}_{\mathcal{G}}} = \|\overline{x}\|_{\mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N}.$$

Assim, $\widetilde{\psi}$ se estende para $C^*(\mathcal{G}, R)$, gerando $\psi : C^*(\mathcal{G}, R) \to C$, já que $\widetilde{\psi}$ é homomorfismo contrativo em $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N \subseteq C^*(\mathcal{G}, R)$.

Por fim, para mostrar que o diagrama comuta, basta tomar $r \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{G}}$, então,

$$\psi(i(r)) = \psi(\overline{r}) = \widetilde{\rho}(r) = \rho(r),$$

ou seja, $\psi \circ i = \rho$. Logo, o diagrama comuta.

Vamos agora mostrar a unicidade de ψ. Suponha que exista $\phi : C^*(\mathcal{G}, R) \to C$ $*$-homomorfismo tal que para todo $r \in \mathcal{G}$,

[1] Dados auxiliares: $\rho : \mathcal{G} \to C$, $\widetilde{\rho} : \mathcal{B}_{\mathcal{G}} \to C$, $\widetilde{\psi} : \mathcal{B}_{\mathcal{G}}/N \to C$ e $\psi : C^*(\mathcal{G}, R) \to C$

$\phi(i(r)) = \rho(r)$. Então, temos que $\forall r \in \mathcal{G}$, $\phi(i(r)) = \rho(r) = \psi(i(r))$, o que implica que $\phi = \psi$ pois $\mathcal{G}$ gera $C^*(\mathcal{G}, R)$. ■

Agora vamos mostrar a unicidade da C*-álgebra universal.

Teorema 22. *Seja C uma C*-álgebra e $j : \mathcal{G} \to C$ uma representação de $(\mathcal{G}, R)$. Se para qualquer representação $\rho : \mathcal{G} \to A$ de $(\mathcal{G}, R)$ existe um único homomorfismo $\pi : C \to A$ tal que $\rho = \pi \circ j$, ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "j"'] & & A \\ & C \arrow[ur, dashed, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, então $C \cong C^*(\mathcal{G}, R)$.

Demonstração. Esta demonstração consiste em aplicar repetidas vezes o teorema da propriedade universal que C e $C^*(\mathcal{G}, R)$ obedecem.

(i) Para o diagrama $\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & C^*(\mathcal{G},R) \\ & C^*(\mathcal{G},R) \arrow[ur, dashed, "\psi_1"'] & \end{tikzcd}$ aplicamos a propriedade universal e com isso ψ_1 é homomorfismo único tal que $\psi_1 \circ i = i$. Como $Id_{C^*(\mathcal{G},R)}$ é homomorfismo único tal que $Id_{C^*(\mathcal{G},R)} \circ i = i$, então $\psi_1 = Id_{C^*(\mathcal{G},R)}$.

(ii) Para o diagrama $\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "j"'] & & C \\ & C \arrow[ur, dashed, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$ aplicamos a propriedade universal e existe um único homomorfismo ψ_2 tal que $\psi_2 \circ j = j$. Como Id_C é único homomorfismo tal que $Id_C \circ j = j$, então $\psi_2 = Id_C$

(iii) Para o diagrama $\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & C \\ & C^*(\mathcal{G},R) \arrow[ur, dashed, "\psi_3"'] & \end{tikzcd}$ usamos a propriedade universal e com isso existe único ψ_3 homomorfismo tal que $\psi_3 \circ i = j$.

(iv) Para o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & C^*(\mathcal{G}, R) \\ & C \arrow[u, dashed, "\psi_4"'] \end{tikzcd}$$

usamos a propriedade universal e com isso existe único ψ_4 homomorfismo tal que $\psi_4 \circ j = i$.

Então, por (iii) e (iv), $\psi_3 \circ \psi_4 : C \to C$ é homomorfismo tal que $(\psi_3 \circ \psi_4) \circ j = j$ e $\psi_4 \circ \psi_3 : C^*(\mathcal{G}, R) \to C^*(\mathcal{G}, R)$ é homomorfismo tal que $(\psi_4 \circ \psi_3) \circ i = i$. Assim, por (i) e (ii), temos que $(\psi_3 \circ \psi_4) = Id_C$ e $(\psi_4 \circ \psi_3) = Id_{C^*(\mathcal{G},R)}$. Portanto, $C^*(\mathcal{G}, R) \cong C$.

■

4 C*-ÁLGEBRA DE CUNTZ-KRIEGER

Usando a teoria aprendida sobre C*-álgebras universais no capítulo anterior, vamos construir uma C*-álgebra famosa entre os estudiosos desta área: a C*-Álgebra de Cuntz-Krieger. Tal álgebra tem se mostrado muito rica em propriedades e tem sido observada com muita atenção por vários pesquisadores sedentos por álgebras frutíferas como esta que aparece não somente na teoria de álgebra mas também em sistemas dinâmicos, grafos e wavelets, por exemplo. Primeiro faremos a construção, depois várias propriedades interessantes que ajudarão a caracterizar a C*-álgebra de Cuntz-Krieger e que serão úteis nos próximos capítulos.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ e suponha que A não tenha linhas nulas. Considere os elementos $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} =: \mathcal{G}$, (geradores) e as relações:

1. $(S_i S_i^* S_i - S_i, 0)$, ou seja, $S_i S_i^* S_i = S_i$ (isometria parcial);
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = 1$, em que o símbolo 1 é unidade em $\mathcal{G}$;
3. $S_i^* S_j = 0$;
4. $\displaystyle S_i^* S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_j S_j^*$.

Observe que se R é o conjunto das relações 1., 2., 3. e 4., então o par $(\mathcal{G}, R)$ é admissível.

Definição 23. *A C*-Álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$ é definida como sendo a C*-álgebra universal gerada pelos geradores $\mathcal{G} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ com as relações* $1., 2., 3.$ *e* $4.$ *acima.*

Para simplificar a notação, escrevamos:

$$\begin{cases} S_{ab} = S_a S_b, a, b \in \mathbb{N}; \\ S_{ba}^* = S_b^* S_a^* = (S_{ab})^*, a, b \in \mathbb{N};. \end{cases}$$

Desta maneira, note que se α é uma concatenação do tipo $\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\alpha|}$ então S_α é uma concatenação do tipo $S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_{|\alpha|}}$ de tamanho finito ($|\alpha|$) de elementos $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_{|\alpha|}}$ em $\mathcal{G}$ e índices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{|\alpha|} \in \{1, \ldots, n\}$. Também, se β é uma concatenação do tipo $\beta_1, \ldots, \beta_{|\beta|}$ então o elemento S_β^* é uma concatenação do tipo

$S^*_{\beta_{|\beta|}} \dots S^*_{\beta_2} S^*_{\beta_1} = (S_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{|\beta|}})^*$ de tamanho finito ($|\beta|$) de elementos $S^*_{\beta_1}, S^*_{\beta_2}, \dots, S^*_{\beta_{|\beta|}}$ em $\mathcal{G}^*$ e índices $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{|\beta|} \in \{1, \dots, n\}$.

Proposição 24. *O conjunto* $span\{S_\alpha S^*_\beta\}$ *é denso em* $\mathcal{O}_A$.

Demonstração. De fato, da maneira que construímos a C*-álgebra universal, temos que o conjunto $\mathcal{F}_\mathcal{G} := \{g_1 \dots g_k | g_1, \dots, g_k \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^*, k \in \mathbb{N}\}$ é tal que $\overline{span\{\mathcal{F}_\mathcal{G}\}} = \mathcal{O}_A$ (lembre que o produto em $\mathcal{F}_\mathcal{G}$ é dado pelas concatenações). Portanto, basta notar que cada $g_1 \dots g_k \in \mathcal{F}_\mathcal{G}$ é uma combinação linear de elementos da forma $S_\alpha S^*_\beta$ em $\mathcal{F}_\mathcal{G}$. Mas se nos termos de $g_1 \dots g_k$ ocorrer, para algum i, $1 \leq i \leq k$, que $g = g_1 \dots g_k = g_1 \dots S^*_i S_i \dots g_k$, temos pela propriedade 4., que $g = g_1 \dots \sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_j S^*_j \dots g_k$. Se por outro lado ocorrer $g = g_1 \dots S^*_i S_j \dots g_k$ com $i \neq j$, então $g_1 \dots g_k = 0$. Logo, $g \in span\{S_\alpha S^*_\beta\}$. ∎

Exemplo. Seja $n = 4$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{G} = \{S_1, \dots, S_4\}$.

Temos então que o elemento

$$S_1 S_4 S^*_3 S_3 S_2 S^*_2 S_2 = S_1 S_4 S^*_3 S_3 S_2 = S_{14} \left(\sum_{j=1}^{4} a_{3j} S_j S^*_j \right) S_2 =$$
$$= S_{14}(a_{31} S_1 S^*_1 + a_{32} S_2 S^*_2 + a_{33} S_3 S^*_3 + a_{34} S_4 S^*_4 +) S_2 =$$
$$= S_{14}(0.S_1 S^*_1 + 0.S_2 S^*_2 + 1.S_3 S^*_3 + 0.S_4 S^*_4) S_2 = S_{14} S_3 S^*_3 S_2 =$$
$$= S_{143} \underbrace{S^*_3 S_2}_{=0} = S_{143}.0 = 0.$$

Porém, o elemento

$$S_{14} S^*_3 S_{33} S^*_3 S_3 S^*_{42} = S_1 S_4 S^*_3 S_3 S_3 S^*_3 S_3 S^*_4 S^*_2 =$$
$$S_{14} S^*_3 S_3 S_3 S^*_2 S^*_4 = S_{14} S_3 S^*_3 S_3 S^*_{42} = S_{14} S_3 S^*_{42} = S_{143} S^*_{42}.$$

Proposição 25. *Se* $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m$, *com* $\alpha_i \in N$, *então* S_α *é isometria parcial.*

Demonstração. Basta provarmos para $m = 2$. Para $m > 2$ basta seguir os mesmos passos. Seja $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, então

$$\begin{aligned} S_\alpha S_\alpha^* S_\alpha &= S_{\alpha_1\alpha_2} S_{\alpha_1\alpha_2}^* S_{\alpha_1\alpha_2} = \\ &= S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} S_{\alpha_2}^* S_{\alpha_1}^* S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \\ &= S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} S_{\alpha_2}^* \sum_{j=1}^{n} a_{\alpha_1 j} S_j S_j^* S_{\alpha_2} \\ &= a_{\alpha_1\alpha_2} S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} S_{\alpha_2}^* S_{\alpha_2} S_{\alpha_2}^* S_{\alpha_2} \\ &= a_{\alpha_1\alpha_2} S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} S_{\alpha_2}^* S_{\alpha_2} \\ &= a_{\alpha_1\alpha_2} S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} = a_{\alpha_1\alpha_2} S_\alpha. \end{aligned}$$

Claro que se $a_{\alpha_1\alpha_2} = 1$ o resultado segue. Se $a_{\alpha_1\alpha_2} = 0$, iremos provar na letra a) da Proposição 29 que $S_\alpha = 0$, de modo que segue o resultado também. ■

Proposição 26. *Considere os elementos $S_\alpha, S_\beta \in \mathcal{F}_\mathcal{G}$ em que $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ e $\beta = \beta_1\beta_2\ldots\beta_l$. Então*

$$S_\alpha S_\alpha^* S_\beta S_\beta^* = \begin{cases} 0, \ se \ \alpha_i \neq \beta_i, para \ algum \ i = 1, \ldots, min\{k, l\}; \\ S_\alpha S_\alpha^*, \ se \ k \geq l \ e \ \alpha_i = \beta_i, \ 1 \leq i \leq l; \\ S_\beta S_\beta^*, \ se \ l \geq k \ e \ \alpha_i = \beta_i, \ 1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Demonstração. Para provar este resultado, note primeiro que se $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$\begin{aligned} (S_{ij})^* S_{ij} &= S_{ji}^* S_{ij} = S_j^* S_i^* S_i S_j \\ &= S_j^* \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} S_k S_k^* \right) S_j \\ \overset{k\neq j \Rightarrow S_j^* S_k = 0}{} &= S_j^* a_{ij} \underbrace{S_j S_j^* S_j}_{isom.parc.} = S_j^* a_{ij} S_j \\ &= a_{ij} S_j^* S_j. \end{aligned}$$

Ou seja, se $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, então $(S_{ij})^* S_{ij} = a_{ij} S_j^* S_j$. Assim, se $\alpha_1 \neq \beta_1$, temos que

$$\begin{aligned} S_\alpha S_\alpha^* S_\beta S_\beta^* &= S_\alpha (S_{\alpha_1 \ldots \alpha_k})^* S_{\beta_1 \ldots \beta_l} S_\beta^* = \\ &= S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots \underbrace{S_{\alpha_1}^* S_{\beta_1}}_{=0} \ldots S_{\beta_l} S_\beta^* = 0. \end{aligned}$$

Agora se $\alpha_i = \beta_i$, $\forall i = 1, \ldots, j < k$, l, tome o primeiro $i > j$ tal que $\alpha_i \neq \beta_i$. Então, pelo que vimos no começo da demonstração,

$$\begin{aligned} S_\alpha S_\alpha^* S_\beta S_\beta^* &= S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots S_{\alpha_i}^* S_{\alpha_{i-1}}^* \ldots S_{\alpha_1}^* S_{\beta_1} \ldots S_{\beta_{i-1}} S_{\beta_i} \ldots S_{\beta_l} S_\beta^* \\ &= S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots S_{\alpha_i}^* (a_{\alpha_1\alpha_2} a_{\alpha_2\alpha_3} \ldots a_{\alpha_{i-1}\alpha_i}) S_{\alpha_i} S_{\alpha_i}^* S_{\beta_i} \ldots S_{\beta_l} S_\beta^* \\ &= (a_{\alpha_1\alpha_2} a_{\alpha_2\alpha_3} \ldots a_{\alpha_{i-1}\alpha_i}) S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots \underbrace{S_{\alpha_i}^* S_{\beta_i}}_{=0} \ldots S_{\beta_l} S_\beta^* = 0. \end{aligned}$$

Suponha agora que $k \geq l$ e $\alpha_i = \beta_i$, $1 \leq i \leq l$. Então

$$\begin{aligned} S_\alpha S_\alpha^* S_\beta S_\beta^* &= S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots S_{\alpha_l}^* \ldots S_{\alpha_1}^* S_{\beta_1} \ldots S_{\beta_l} S_{\beta_l}^* \ldots S_{\beta_1}^* \\ &= S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots S_{\alpha_{l+1}}^* \underbrace{(S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l})^* S_{\beta_1 \ldots \beta_l} (S_{\beta_1 \ldots \beta_l})^*}_{iso.\ parc.\ \alpha_i = \beta_i,\ \forall i = 1, \ldots, l.} \\ &= S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots S_{\alpha_{l+1}}^* (S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l})^* \\ &= S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots S_{\alpha_{l+1}}^* S_{\alpha_l}^* \ldots S_{\alpha_1}^* \\ &= S_\alpha (S_{\alpha_1 \ldots \alpha_l \alpha_{l+1} \ldots \alpha_k})^* = S_\alpha S_\alpha^*. \end{aligned}$$

Porém se $l \geq k$ e $\alpha_i = \beta_i$, $1 \leq i \leq k$, temos:

$$\begin{aligned} S_\alpha S_\alpha^* S_\beta S_\beta^* &= S_\alpha S_{\alpha_k}^* \ldots S_{\alpha_1}^* \underbrace{S_{\beta_1} \ldots S_{\beta_k}}_{\beta_i = \alpha_i,\ \forall i = 1, \ldots, k} S_{\beta_{k+1}} \ldots S_{\beta_l} S_\beta^* \\ &= \underbrace{S_\alpha S_\alpha^* S_\alpha}_{isom.\ parc.} S_{\beta_{k+1}} \ldots S_{\beta_l} S_\beta^* = S_\alpha S_{\beta_{k+1}} \ldots S_{\beta_l} S_\beta^* \\ &= S_{\beta_1 \ldots \beta_k} S_{\beta_{k+1}} \ldots S_{\beta_l} S_\beta^* = S_\beta S_\beta^*. \end{aligned}$$

■

Corolário 27. *O conjunto span*$\{S_\alpha S_\alpha^*\}$ *é comutativo.*

Demonstração. De fato, pela proposição anterior, se $\alpha = \beta$, então $S_\alpha S_\alpha^* S_\beta S_\beta^* = S_\alpha S_\alpha^* = S_\beta S_\beta^* = S_\beta S_\beta^* S_\alpha S_\alpha^*$. ■

Vamos denotar $B := \overline{span}\{S_\alpha S_\alpha^*\}$. Note que $B \subseteq \mathcal{O}_A$, e como vimos no corolário recém mostrado, B é comutativo com unidade, logo, pelo Teorema de Gelfand, $B \cong C(X)$ para algum X compacto Hausdorff.

Exemplo. Neste exemplo vamos construir uma representação de $\mathcal{O}_A$. Seja A uma matriz $n \times n$ com $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Considere H espaço de Hilbert separável ($dimH = \infty$). Sejam $H_1 = H_2 = \ldots = H_n = H$

e defina $S_i : \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j \to H_i$ isomorfismo isométrico entre $\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$ e H_i. Claro que podemos considerar $S_i^{-1} : H_i \to \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$ (inversa de S_i). Como S_i é isomorfismo isométrico, temos que $S_i^{-1} = S_i^* : H_i \to \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$. Portanto, $S_i S_i^* = Id_{H_i}$ e $S_i^* S_i = Id_{\oplus_{a_{ij}=1} H_j}$. Considere agora $V = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$. Seja $T_i : V \to V$, operador tal que T_i é extensão de S_i por zeros, ou seja,

$$T_i(v) = \begin{cases} S_i(v), \ se \ v \in \bigoplus\limits_{a_{ij}=1} H_j; \\ 0, \ se \ v \in \left(\bigoplus\limits_{a_{ij}=1} H_j \right)^{\perp}. \end{cases}$$

Então, podemos afirmar que $T_i T_i^* =$ projeção sobre H_i, isto é, se $v \in H_i$, então $T_i T_i^*(v) = v$ e se $w \in H_j$, com $j \neq i$, então $T_i T_i^*(w) = 0$. De fato, tome $v \in H_i$, então, $T_i T_i^*(v) = T_i(T_i^*(v)) \overset{v \in H_i}{=} T_i(\underbrace{S_i^*(v)}_{\in \oplus H_j}) = S_i(S_i^*(v)) = (S_i S_i^*)(v) = Id_{H_i} v \overset{v \in H_i}{=} v$. Também, se $w \in H_j$, $j \neq i$, por definição de T_i^*, $T_i^*(w) = 0$, logo, $T_i T_i^*(w) = T_i(0) = 0$.
Por outro lado, podemos afirmar que $T_i^* T_i =$ projeção sobre $\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$, isto é, se $v \in \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$, então $T_i^* T_i(v) = v$ e se $w \in \left(\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j \right)^{\perp}$, então $T_i^* T_i(w) = 0$. De fato, tome $v \in \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j$ então $T_i^* T_i(v) = T_i^*(T_i(v)) \overset{v \in \oplus H_j}{=} T_i^*(\underbrace{S_i(v)}_{\in H_i}) = S_i^*(S_i(v)) = Id_{\oplus H_j}(v) = v$. Mas se $w \in \left(\bigoplus_{a_{ij}=1} H_j \right)^{\perp}$, temos que $T_i^* T_i(w) = T_i^*(T_i(w)) = T_i^*(0) = 0$.

Proposição 28. *O conjunto* $\{T_i\}_{i=1}^n$ *satisfaz as relações* 1., …, 4. *que definem* $\mathcal{O}_A$.

Demonstração.

1. T_i é isometria parcial. De fato tome $v \in V$, então

$$T_iT_i^*T_i(v) = \underbrace{T_iT_i^*}_{proj.\ s/\ H_i}(T_i(v)) \stackrel{T_i(v)\in H_i}{=} T_i(v) \Rightarrow T_iT_i^*T_i = T_i;$$

2. Seja $v \in V = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$, então $v = v_1 + \ldots + v_n$ com $v_i \in H_i$, $\forall i$. Assim

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} T_iT_i^*(v) &= \sum_{i=1}^{n} T_iT_i^*(v_1 + \ldots + v_n) = \sum_{i=1}^{n} T_iT_i^*(v_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(v_i) = v \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} T_iT_i^* = Id_V;\end{aligned}$$

3. Se $i \neq j$, $v \in V$, então $T_iT_i^*T_jT_j^*(v) = \underbrace{T_iT_i^*}_{proj.\ s/\ H_i}\underbrace{(T_jT_j^*(v))}_{\in H_j} = 0$.
   Logo, $T_iT_i^*T_jT_j^* = 0 \Rightarrow T_i^*T_iT_i^*T_jT_j^*T_j = T_i^*T_j = 0$.

4. $T_i^*T_i = \text{proj. s/} \bigoplus_{a_{ij}=1} H_j = \sum_{j:a_{ij}=1} \text{proj. s/ } H_j = \sum_{j:a_{ij}=1} T_jT_j^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}T_jT_j^*$.

■

Definamos agora

$$\begin{aligned}\Psi : \{S_1, \ldots, S_n\} &\to \mathcal{L}(V)\\ S_i &\mapsto T_i.\end{aligned}$$

Note que $\{\Psi(S_i)\}_{i=1}^n = \{T_i\}_{i=1}^n$ satisfaz as relações $1., \ldots, 4.$ exigidas. Diante disto temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \{S_i\}_{i=1}^n \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathcal{L}(V) \\ & \mathcal{O}_A \arrow[ur, dashed, "\overline{\Psi}"'] & \end{tikzcd}$$

e pela propriedade universal, $\exists! \overline{\Psi} : \mathcal{O}_A \to \mathcal{L}(V)$ tal que $\overline{\Psi}(S_i) = T_i$, $\forall i$. Note ainda que cada $T_i \neq 0$, por definição. Com isso $S_i \neq 0$, pois, caso contrário, pelo homomorfismo $\overline{\Psi}$, teríamos que $T_i = 0$, o que é absurdo pois $\|\Psi(S_i)\| = \|T_i\| = 1 > 0$. Logo, $S_i \neq 0$.

4.1 MAIS ALGUMAS PROPRIEDADE DE $\mathcal{O}_A$

Agora faremos mais algumas proposições a respeito de $\mathcal{O}_A$ e terminaremos o capítulo com um importante teorema que será utilizado no último capítulo do trabalho. Daqui em diante, considere sempre $N := \{1, \ldots, n\}$.

Proposição 29. *a) Se $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$, com $\alpha_i \in N$ e $a_{\alpha_i \alpha_{i+1}} = 0$ para algum $i = 1, \ldots, m-1$, então $S_\alpha = 0$.*

b) Se $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$, com $\alpha_i \in N$, então
$$S_\alpha S_\alpha^* = \sum_{\substack{j=1 \\ a_{\alpha_m, j}=1}}^{n} S_{\alpha j} S_{\alpha j}^*.$$

Demonstração. a) De fato, basta mostrar para α com $\sharp\alpha = |\alpha| = 2$, ou seja, $m = 2$. Seja $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$. Vamos renomear α_1 por i e α_2 por j, tais que $a_{ij} = 0$. Então

$$\begin{aligned} S_\alpha^* S_\alpha = (S_i S_j)^* S_i S_j = S_j^* S_i^* S_i S_j = S_j^* \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} S_k S_k^* \right) S_j \\ = S_j^* a_{ij} S_j S_j^* S_j = a_{ij} S_j^* S_j = 0.S_j^* S_j = 0. \end{aligned}$$

ou seja, $S_\alpha^* S_\alpha = 0 \Rightarrow S_\alpha = S_\alpha S_\alpha^* S_\alpha = S_\alpha 0 = 0$.

b) De fato, $S_\alpha S_\alpha^* = S_\alpha \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} S_j S_j^* \right)}^{1} S_\alpha^* = \sum_{j=1}^{n} S_{\alpha j} S_{\alpha j}^* = \sum_{\substack{j=1 \\ a_{\alpha_m, j}=1}}^{n} S_{\alpha j} S_{\alpha j}^*$

■

Considere agora o conjunto

$$\mathbb{W} = \left\{ \begin{array}{l} \text{palavras finitas } \alpha, \text{ com letras em } \{1, \ldots, n\} \text{ e tais que} \\ \text{se } \alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m, \text{ então } a_{\alpha_i \alpha_{i+1}} = 1, \ \forall i = 1, \ldots, m-1 \end{array} \right\} \cup N.$$

Observação. Se $\alpha \in \mathbb{W}$ dizemos que α é palavra admissível.

Vamos construir agora outra C*-álgebra universal.

Seja $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\{0,1\})$, sem linhas nulas. Considere $\mathcal{B}$ a C*-álgebra universal com os geradores $\mathbf{Q} = \{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{W}}$, com as relações:

i) Q_α são projeções, $\forall\alpha \in \mathbb{W}$, isto é, $Q_\alpha^* = Q_\alpha = Q_\alpha^2$;

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q_i = 1$;

iii) $Q_\alpha = \displaystyle\sum_{j:\alpha j\in\mathbb{W}} Q_{\alpha j}$;

iv) Q_α comuta com Q_β, $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{W}$.

Note que $\mathbf{Q}$ com as relações i),...,iv). é um par admissível. Note ainda que $\mathcal{B}$ é comutativo com unidade, então pelo Teorema de Gelfand, $\mathcal{B} \cong C(\widehat{\mathcal{B}})$. Vamos agora tentar caracterizar $\widehat{\mathcal{B}}$.

Considere o conjunto $N^{\mathbb{N}} = N^{\mathbb{N}} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in N\}$. Tal conjunto é um espaço topológico compacto com a topologia produto. Seja $X \subseteq N^{\mathbb{N}}$, tal que $X := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in N^{\mathbb{N}} : a_{x_i x_{i+1}} = 1\}$. Pode-se dizer que X é o conjunto das "sequências"admissíveis.

Teorema 30. *O espectro de $\mathcal{B}$, $\widehat{\mathcal{B}}$ e X são homeomorfos. ($\widehat{\mathcal{B}}$ com a topologia fraca-$*$ e X com a topologia produto).*

Demonstração. Vamos definir $T : \widehat{\mathcal{B}} \longrightarrow X$. Para tanto, fixe $\varphi \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Então, como φ é homomorfismo não nulo e unital, temos que:

$$1 = \varphi(1) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(Q_i).$$

Do fato de Q_i ser projeção, $\forall i = 1,\dots,n$, tem-se que $\varphi(Q_i)$ é projeção em $\mathbb{C}$, então $\varphi(Q_i) = 0$ ou $\varphi(Q_i) = 1$. Logo, $\exists! i \in N$ tal que $1 = \varphi(1) = \varphi(Q_i)$. Defina, $x_1 = i$.

Agora, pela propriedade iii) de $\mathbf{Q}$ (e consequentemente de $\mathcal{B}$) temos que

$$1 = \varphi(Q_i) = \varphi\left(\sum_{j:ij\in\mathbb{W}} Q_{ij}\right) = \sum_{j:ij\in\mathbb{W}} \varphi(Q_{ij}).$$

e como cada $\varphi(Q_{ij})$ é projeção em $\mathbb{C}$, $\exists! j \in N$ tal que $\varphi(Q_{ij}) = 1$. Defina $x_2 = j$.

Agora, pela propriedade iii) de $\mathcal{B}$ temos que

$$1 = \varphi(Q_{ij}) = \varphi\left(\sum_{k:ijk\in\mathbb{W}} Q_{ijk}\right) = \sum_{k:ijk\in\mathbb{W}} \varphi(Q_{ijk}),$$

então $\exists! k \in N$ tal que $\varphi(Q_{ijk}) = 1$. Defina $x_3 = k$.

Assim, podemos seguir recursivamente e construir uma sequência admissível, e definirmos $T(\varphi) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\varphi \in \widehat{\mathcal{B}}$.

Por outro lado, defina $R : X \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}}$ em que para cada $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$, definimos $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\psi(Q_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ é o começo de } x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note agora que $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ é homomorfismo não nulo, pois $\psi(Q_{x_1}) = 1$. Também, podemos afirmar que ψ satisfaz as relações de $\mathcal{B}$, isto é, o conjunto $\{\psi(Q_\alpha) : \alpha \in \mathbb{W}\}$ satisfaz as relações $i), \ldots, iv)$. De fato, lembre que para cada $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ fixo, está relacionado a um $\psi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ fixo:

i) $(\psi(Q_\alpha))^2 = \psi(Q_\alpha)$, pois $\psi(Q_\alpha) = 0$ ou $\psi(Q_\alpha) = 1$. Da mesma forma, temos que $\psi(Q_\alpha)^* = \overline{\psi(Q_\alpha)} = \psi(Q_\alpha)$, pois $\psi(Q_\alpha) = 0 = \overline{0}$, ou $\psi(Q_\alpha) = 1 = \overline{1}$;

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \psi(Q_i) = \psi(Q_j) = 1$ para algum j tal que j é começo de x.

iii) Queremos mostrar que $\psi(Q_\alpha) = \displaystyle\sum_{j:\alpha j\in\mathbb{W}} \psi(Q_{\alpha j}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha j\in\mathbb{W}}}^{n} \psi(Q_{\alpha j})$.

Temos dois casos:

(I) Se α não é começo de x, então $\psi(Q_\alpha) = 0 = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ \alpha j\in\mathbb{W}}}^{n} \psi(Q_{\alpha j})$;

(II) Se α é começo de x, então $\psi(Q_\alpha) = 1$ e com isso, temos que $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ \alpha j\in\mathbb{W}}}^{n} \psi(Q_{\alpha j}) = \psi(Q_{\alpha k}) = 1$ para algum k tal que αk é começo de x.

Logo seque o item $iii)$;

iv) Óbvio, pois $\psi(Q_\alpha) \in \mathbb{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{W}$.

Afirmação 1: R é contínua.
De fato, temos que

$$\begin{aligned} R : X &\longrightarrow \widehat{\mathcal{B}} \\ x &\longmapsto R(x) =: \psi_x \text{ tal que} \end{aligned}$$

$$\psi_x(Q_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ é o começo de } x; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere (x^k) net tal que $x^k \longrightarrow x$. Por definição $R(x^k) = \psi_{x^k}$ tal que $\psi_{x^k}(Q_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ é o começo de } x^k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$. Como $x^k \to x$, temos que $\forall k_0 \in \mathbb{N}$, $\exists j_0$ tal que $x_i^j = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, k_0$, $\forall j \geq j_0$, pois o conjunto N é discreto. Fixando $\alpha \in \mathbb{W}$, temos que $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_{k_0}$ é começo de x ou não. Se α é começo de x, $\alpha_i = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, k_0$. Agora, $\psi_{x^j}(Q_\alpha) = 1$, $\forall j \geq j_0$. Também, $\psi_x(Q_\alpha) = 1$, ou seja, $\psi_{x^j}(Q_\alpha) = \psi_x(Q_\alpha)$, $\forall j \geq j_0$. E se α não é começo de x, tem-se que $\psi_{x^j}(Q_\alpha) = 0 = \psi_x(Q_\alpha)$, portanto, $\psi_{x^j}(Q_\alpha) \longrightarrow \psi_x(Q_\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$. Note que isto também vale para somas e produtos de Q_α's e, com isso, $\psi_{x^j}(b) \longrightarrow \psi_x(b)$, $\forall b \in \{$subconjunto denso em $\mathcal{B}\} =: D$.
Agora, tome $a \in \mathcal{B}$ e considere $(b_n)_n \subseteq D$ tal que $b_n \to a$. Então claro que dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N_0$, tem-se que $\|b_n - a\| < \varepsilon/3$. Como $\psi_{x^j}(b) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \psi_x(b)$, $\forall b \in D$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq j_0$, temos que $\|\psi_{x^j}(b) - \psi_x(b)\| < \varepsilon/3$, $\forall b \in D$, ou seja, isto ocorre inclusive para $b = b_n$, com $n \geq N_0$ fixado. Então, para $a \in \mathcal{B}$, se $j \geq j_0$, temos:

$$\begin{aligned} \|\psi_{x^j}(a) - \psi_x(a)\| &\leq \|\psi_{x^j}(a) - \psi_{x^j}(b_n)\| + \|\psi_{x^j}(b_n) - \psi_x(b_n)\| + \\ &\quad + \|\psi_x(b_n) - \psi_x(a)\| \\ &\leq \underbrace{\|a - b_n\|}_{\psi_{x^j} \text{ é homo. contrativo}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{b_n \in D} + \underbrace{\|b_n - a\|}_{\psi_x \text{ é homo. contrativo}} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\psi_{x^j}(a) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \psi_x(a)$, $\forall a \in \mathcal{B}$, ou seja $R(x^j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} R(x)$.

Afirmação 2: T é contínua.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} T : \widehat{\mathcal{B}} &\longrightarrow X \\ \varphi &\longmapsto T(\varphi) =: x^{\varphi} \end{aligned}$$

Seja $(\varphi_n)_n \subseteq \widehat{\mathcal{B}}$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$. Então, $\forall b \in \mathcal{B}$, tem-se que $\varphi_n(b) \longrightarrow \varphi(b)$ (pois estamos considerando a topologia fraca$-*$). Em particular, $\varphi_n(Q_\alpha) \longrightarrow \varphi(Q_\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$. Também, $T(\varphi_n) = x^{\varphi_n} \in X$. Tome $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$ tal que $\alpha_i = x_i$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Então α é começo de x^{φ}. Sabemos que $\varphi_n(Q_\alpha) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(Q_\alpha) = 1$, pois α é começo de x^{φ}. Então, para n suficientemente grande $\varphi_n(Q_\alpha) = 1$, pois $\varphi(Q_\alpha)$ é sempre igual à 0 ou 1 e converge em $\mathbb{C}$. Então, para n suficientemente grande α é começo de x^{φ_n}. Assim, o começo de x^{φ_n} é começo de x^{φ}. Portanto, $x^{\varphi_n} \longrightarrow x^{\varphi} \in X$ na topologia produto.

Afirmação 3: R e T são inversas.

De fato, seja $x \in X$, então,

$$\begin{aligned} (T \circ R)(x) &= T(R(x)) \\ &= T(\psi_x) \text{ (tal que } \psi_x(Q_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ é o começo de } x; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \Bigg) \\ &= (x_1, x_2, \ldots) = x, \text{ pois, pela construção de } T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1 = i \text{ tal que } \psi(Q_i) = 1, \text{ ou seja, } i \text{ é a primeira entrada de } x, \\ &x_2 = j \text{ tal que } \psi(Q_{ij}) = 1, \text{ ou seja, } j \text{ é a segunda entrada de } x, \\ &x_3 = k \text{ tal que } \psi(Q_{ijk}) = 1, \text{ ou seja, } k \text{ é a terceira entrada de } x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, $T \circ R = Id_X$.

Por outro lado, seja $\psi \in \widehat{\mathcal{B}}$. Então,

$$\begin{aligned} (R \circ T)(\psi) &= R(T(\psi)) \\ &= R(x^{\psi}) = \varphi \text{ tal que} \\ \varphi(Q_\alpha) &= \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ é o começo de } x; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Mas note que pela construção de x, temos que $\psi(Q_\alpha) = 1$ se, e somente se, α é começo de x. Assim, $\psi(Q_\alpha) = \varphi(Q_\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$. Então, temos

$\psi = \varphi$. Logo, $(R \circ T)(\psi)\Big|_{Q_\alpha} = \psi\Big|_{Q_\alpha}$, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$. Como span$\{\mathbf{Q}\}$ é denso em $\mathcal{B}$, $R \circ T(\psi) = (\psi)$, $\forall \psi \in \widehat{\mathcal{B}} \Rightarrow R \circ T = Id_{\widehat{\mathcal{B}}}$. Portanto R e T são contínuas e tais que $R = T^{-1}$ e $T = R^{-1}$, ou seja, X e $\widehat{\mathcal{B}}$ são homeomorfos. ∎

5 PRODUTO CRUZADO PARCIAL

Neste capítulo faremos a construção do produto cruzado parcial, obtido a partir de uma ação parcial de um grupo sobre uma C*-álgebra. Primeiro, definiremos o que é uma ação parcial, depois construiremos o produto cruzado parcial algébrico, que já herdará as propriedades de espaço vetorial pois será definido a partir de um espaço vetorial que o contém. Em seguida definiremos um produto a fim de tornar este produto cruzado parcial algébrico em uma álgebra, que depois de alguns resultados se mostrará associativo. No fim, chegaremos a uma C*-álgebra envolvente que é produto cruzado parcial desejado. As principais referências utilizadas aqui foram (DOKUCHAEV; EXEL, 2005), (CIDRAL, 2011) e (VIEIRA, 2008)

Definição 31. *Seja G um grupo e A uma C^*-álgebra. Uma ação parcial de G sobre A (denotada por α) é uma coleção $\{D_g\}_{g\in G}$ de ideais bilaterais fechado de A e uma coleção $\{\alpha_g\}_{g\in G}$ de $(*-)$isomorfismos $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$, tais que:*

(1) $D_e = A$, $\alpha_e = Id_A$;

(2) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$;

(3) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, $\forall x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.

Observações.

i) A igualdade em (3) está bem definida, pois, se $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_g^{-1})$, então faz sentido escrever $\alpha_h(x)$ e $\alpha_h(x) \in D_h \cap D_g^{-1} \subseteq D_g^{-1}$. Com isso, podemos fazer a composição $\alpha_g \circ \alpha_h(x)$. E pelo item (2), claro que podemos aplicar α_{gh} em $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)}^{-1}$.

ii) Para todo $t \in G$, $\alpha_{t^{-1}} = \alpha_t^{-1}$, pois pelo item (3), se tomarmos $g = h^{-1}$, temos que $\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h(x) = \alpha_e(x)$, $\forall x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_h)$, ou seja, $\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_h(x) = x$, $\forall x \in \alpha_h^{-1}(D_h) = D_{h^{-1}}$. Como α_h é isomorfismo, $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$.

iii) $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g) = D_h \cap D_{hg}$. De fato, substituindo g por $(hg)^{-1}$ no item (2), temos que $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{hg}) \subseteq D_g$. Como $\alpha_h : D_{h^{-1}} \to D_h$ é isomorfismo, então, $D_h \cap D_{hg} \subseteq \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g)$. Por outro lado, também por (2), trocando h por h^{-1} e g por g^{-1}, obtemos $\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_g) \subseteq D_{hg}$. Como $\alpha_{h^{-1}} : D_h \to D_{h^{-1}}$ é isomorfismo e $\alpha_{h^{-1}}^{-1} = \alpha_h$, temos que $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g) \subseteq D_h \cap D_{hg}$. Logo, segue a igualdade.

iv) $\alpha_g \circ \alpha_h$ é um isomorfismo de $D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$ sobre $D_g \cap D_{gh}$. De fato, utilizando a observação *iii)* com $(gh)^{-1}$ no lugar de g, obtemos $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}) = D_h \cap D_{g^{-1}}$. Pela mesma observação *iii)*, trocando g por h e vice e versa, temos $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$. Então, $\alpha_g \circ \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}) = \alpha_g(D_g \cap D_{g^{-1}}) = D_g \cap D_{gh}$. Como α_g e α_h são isomorfismos, então $\alpha_g \circ \alpha_h$ é isomorfismo.

v) Os itens *ii)* e *iii)* no fundo nos garantem que α_{gh} estende $\alpha_g \circ \alpha_h$, para quaisquer $g, h \in G$. $(\mathrm{Dom}(\alpha_g \circ \alpha_h) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} = \alpha_h^{-1}(D_{D_h \cap g^{-1}}))$.

5.1 PRODUTO CRUZADO PARCIAL ALGÉBRICO

Seja $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C*-álgebra A.

Denote por V o espaço vetorial de todas as funções de G em A que tem suporte finito, isto é,

$$V := \{f : G \longrightarrow A | f(t) \neq 0 \text{ apenas para finitos elementos } t \in G\}.$$

Defina $V_\alpha := \{f \in V | f(t) \in D_t, \ \forall t \in G\}$. Claramente, V_α é um subespaço vetorial de V. Para qualquer $t \in G$ e $a_t \in D_t$, denote por $a_t\delta_t$ a função pertencente a V_α dada por: $a_t\delta_t(s) = \begin{cases} a_t, & \text{se } s = t; \\ 0, & \text{se } s \neq t. \end{cases}$ Assim, é fácil ver que toda função $f \in V_\alpha$ é escrita de maneira única sob a forma $f = \sum\limits_{t\in G}^{finita} a_t\delta_t$, em que $a_s = f(s)$, para todo $s \in G$.

Definição 32. *O produto cruzado parcial algébrico de A por G através de α, denotado por $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$, é o espaço vetorial V_α definido acima. Em outras palavras,*

$$A\widetilde{\rtimes}_\alpha G = \left\{ \sum_{t\in G}^{finita} a_t\delta_t \;\middle|\; a_t \in D_t \right\}.$$

Observações.

(i) $\displaystyle\sum_{t\in G}^{finita} a_t\delta_t = 0 \Leftrightarrow a_t = 0, \forall t \in G;$

(ii) Para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{t\in G}^{finita} a_t\delta_t + \lambda \sum_{t\in G}^{finita} b_t\delta_t = \sum_{t\in G}^{finita} (a_t + \lambda b_t)\delta_t;$$

(iii) $\{a_t\delta_t | t \in G \text{ e } a_t \in D_t\}$ gera $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$.

Vamos agora dar a $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ uma estrutura de álgebra. A soma e o produto por escalar serão dados como na observação (ii). Para o produto, adotamos a seguinte operação:

$$(a_t\delta_t)(a_s\delta_s) = \alpha_t(\underbrace{\underbrace{\alpha_{t^{-1}}(a_t)}_{\in D_{t^{-1}}} \underbrace{a_s}_{\in D_s}}_{\in (D_{t^{-1}} \cap D_s)})\delta_{ts}$$

Para este produto, considere a distributiva em relação a soma. Claro que o produto definido assim é bilinear. Mas para concluir que é associativo, precisamos de alguns outros resultados. Aqui, usaremos a álgebra dos multiplicadores definida no Capítulo 2.

Definição 33. *Uma álgebra I é dita ser (L,R)-associativa se, dados quaisquer dois multiplicadores (L,R), $(L',R') \in \mathcal{M}(I)$, tem-se que $R' \circ L = L \circ R'$.*

Exemplo. Vamos construir uma álgebra não (L,R)-associativa. Seja I álgebra não unital com a multiplicação $xy = 0, \forall x, y \in I$. Então qualquer par (L,R) de operadores lineares em I formam um multiplicador de I. Então se escolhermos S, T tais que $S \circ T \neq T \circ S$, e consideramos os pares (S,R), (L,T) onde $L, R \in \mathcal{L}(I)$, obtemos um exemplo que não é (L,R)-associativo.

Uma condição suficiente para que uma álgebra A seja (L,R)-associativa é A ser idempotente ou não-degenerada, ver (Dokuchaev e Exel (2005)). Porém, nosso interesse aqui é trabalhar em cima do produto cruzado sobre C*-álgebras, que sempre são (L,R)-associativas.

Proposição 34. *Toda C*-álgebra é (L,R)-associativa.*

Demonstração. De fato, seja A uma C*-álgebra e $x \in A$. Então, pelo teorema de fatoração de Cohen-Hewitt, $\exists a, b \in A$, tais que $x = a.b$.

Sejam (L, R), $(L', R') \in \mathcal{M}(A)$. Então, $R' \circ L(x) = R'(L(ab)) = R'(L(a)b) = L(a)R'(b) = L(aR'(b)) = L(R'(ab)) = L \circ R'(x)$. ■

Lema 35. *Sejam I, J C^*-álgebras e $\varphi : I \longrightarrow J$ um $*$-isomorfismo. Então a função*

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M}(I) &\longrightarrow \mathcal{M}(J) \\ (L, R) &\longmapsto (\varphi \circ L \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}) \end{aligned}$$

está bem definida, ou seja, $(\varphi \circ L \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}) \in \mathcal{M}(J)$

Demonstração. Sejam $a, b \in J$ e $(L, R) \in \mathcal{M}(I)$. (Devemos mostrar os axiomas: $L'(a, b) = L'(a)b, R'(ab) = aR'(b)$ e $R'(a)b = aL'(b)$ em que $L' = \varphi \circ L \circ \varphi^{-1}$ e $R' = \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$). Então:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ L \circ \varphi^{-1})(ab) &= \varphi(L(\varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b))) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(a)).\varphi^{-1}(b)) \\ &= \varphi(L(\varphi^{-1}(a))).b; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi \circ R \circ \varphi^{-1})(ab) &= \varphi(R(\varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b))) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(a).R(\varphi^{-1}(b))) \\ &= a.\varphi(R(\varphi^{-1}(b))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}(a))b &= \varphi(R(\varphi^{-1}(a)))\varphi(\varphi^{-1}(b)) \\ &= \varphi[R(\varphi^{-1}(a)).\varphi^{-1}(b)] \\ &= \varphi[\varphi^{-1}(a).L(\varphi^{-1}(b))] \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(a)).\varphi(L(\varphi^{-1}(b))) \\ &= a.(\varphi \circ L \circ \varphi^{-1}(b)). \end{aligned}$$

Portanto, $(\varphi \circ L \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}) \in \mathcal{M}(J)$ ■

Teorema 36 (Associatividade de $\boldsymbol{A \widetilde{\rtimes}_\alpha G}$)**.** *Seja $(\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C^*-álgebra A. Então, o produto cruzado algébrico $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração. Sejam $r, s, t \in G$, $a_r \in D_r$, $a_s \in D_s$ e $a_t \in D_t$, arbitrários. Como cada elemento de $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$ é da forma $\sum\limits_{t \in G}^{finita} a_t \delta_t$, pela distributividade, $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ é associativo se, e somente se,

$$(a_r\delta_r a_t\delta_t)a_s\delta_s = a_r\delta_r(a_t\delta_t a_s\delta_s) \quad (*)$$

Por definição, temos que:

$$\begin{aligned}(a_r\delta_r a_t\delta_t)a_s\delta_s &= \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t)\delta_{rt}a_s\delta_s \\ &\overset{def}{=} \alpha_{rt}(\alpha_{(rt)^{-1}}(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t))a_s)\delta_{rts}. \quad (**)\end{aligned}$$

Uma vez que $\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t \in D_{r^{-1}} \cap D_t$, então

$$\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t) \in \alpha_r(D_{r^{-1}} \cap D_t) = D_r \cap D_{rt}$$

e

$$\alpha_{(rt)^{-1}}(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t)) \in \alpha_{(rt)^{-1}}(D_r \cap D_{rt}) = D_{t^{-1}} \cap D_{(rt)^{-1}}.$$

Assim, podemos trocar $\alpha_{(rt)^{-1}}$ por $\alpha_{t^{-1}} \circ \alpha_{r^{-1}}$ e α_{rt} por $\alpha_r \circ \alpha_t$, pelos axiomas de ação parcial. Então,

$$\begin{aligned}\alpha_{(rt)^{-1}}(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t)) &= \alpha_{t^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t))) \\ &= \alpha_{t^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t),\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}(a_r\delta_r a_t\delta_t)a_s\delta_s &\overset{(**)}{=} \alpha_{rt}(\alpha_{(rt)^{-1}}(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t))a_s)\delta_{rts} \\ &= \alpha_{rt}(\alpha_{t^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t)a_s)\delta_{rts} \\ &= \alpha_r(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t)a_s))\delta_{rts}. \quad (***)\end{aligned}$$

Agora, desenvolvendo o lado direito da equação $(*)$, temos:

$$\begin{aligned}a_r\delta_r(a_t\delta_t a_s\delta_s) &= a_r\delta_r\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s)\delta_{ts} \\ &= \alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a_r)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s))\delta_{rts}. \quad (****)\end{aligned}$$

Comparando $(***)$ e $(****)$ e aplicando $\alpha^{r^{-1}}$ em ambos os lados, obtemos que o produto cruzado é associativo se, e somente se,

$$\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a_r)a_t)a_s) = \alpha_{r^{-1}}(a_r)\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s).$$

Mas como $\alpha_{r^{-1}} : D_r \to D_{r^{-1}}$ é um isomorfismo, podemos substituir $\alpha_{r^{-1}}(a_r)$ por $a_{r^{-1}} \in D_{r^{-1}}$.

Com isso, a equação anterior é válida se, e somente se,

$$\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_{r^{-1}}a_t)a_s) = a_{r^{-1}}\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s),$$

quaisquer que sejam $r, s, t \in G$ e $a_i \in D_i$, para $i = r^{-1}, s, t$. Fazendo $r = s = e$, temos que $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ é associativo se, e somente se, $\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(ba_t)c) = b\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)c)$, para quaisquer $t \in G$, $b, c \in A$ e $a_t \in D_t$. Mas esta equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(\alpha_t \circ R_c \circ \alpha_{t^{-1}}) \circ L_b(a_t) = L_b \circ (\alpha_t \circ R_c \circ \alpha_{t^{-1}})(a_t),$$

em que R_c é multiplicador à direita de $D_{t^{-1}}$ e L_b é multiplicador à esquerda de D_t.

Pelo Lema anterior, $(\alpha_t \circ R_c \circ \alpha_{t^{-1}})$ é um multiplicador a direita de D_t, pois D_t é C*-subálgebra $\forall t \in G$, em particular, uma C*-álgebra também e portanto, como D_t é (L, R)-associativo para todo $t \in G$ (pela Proposição 34, antes do lema), temos que o produto cruzado parcial algébrico $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ é associativo. ■

5.2 A C*-ÁLGEBRA DO PRODUTO CRUZADO

Até agora temos uma álgebra associativa. Nesta seção, faremos a construção da C*-álgebra gerada através desta álgebra. Primeiro vamos dotá-la de uma involução e depois de uma norma. Com isso, obteremos uma $*$-álgebra normada, o que nos permitirá definir sua C*-álgebra envolvente.

Proposição 37. *Seja $(\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C*-álgebra A. Defina*

$$\begin{aligned} * : \ A\widetilde{\rtimes}_\alpha G &\longrightarrow A\widetilde{\rtimes}_\alpha G \\ \sum_{t\in G} a_t\delta_t &\longmapsto \sum_{t\in G} \alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}} \end{aligned}$$

Então $*$ é uma operação de involução em $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$.

Demonstração. Como D_t é ideal auto-adjunto, $*$ está bem definida. Como $\alpha_{t^{-1}}$ é isomorfismo e $*$ de A preserva a soma, então $*$ de $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ preserva a soma. Então, basta provar os outros axiomas de involução nos geradores de $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$.

1. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, então $(\lambda a_t\delta_t)^* = \alpha_{t^{-1}}((\lambda a_t)^*)\delta_{t^{-1}} = \alpha_{t^{-1}}(\overline{\lambda} a_t^*)\delta_{t^{-1}} = \overline{\lambda}\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}} = \overline{\lambda}(a_t\delta_t)^*$;

2. Sejam $s, t \in G$, $a_s \in D_s$ e $a_t \in D_t$, então

$$\begin{aligned}(a_t\delta_t a_s\delta_s)^* &= (\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s)\delta_{ts})^* \\ &= \alpha_{(ts)^{-1}}(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s)^*)\delta_{(ts)^{-1}} \\ &= \alpha_{(ts)^{-1}}(\alpha_t(a_s^*\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)))\delta_{(ts)^{-1}} = \star.\end{aligned}$$

Como $a_s^*\alpha_{t^{-1}}(a_t^*) \in D_s \cap D_{t^{-1}}$, então

$$\begin{aligned}\star &= \alpha_{s^{-1}}(a_s^* a_{t^{-1}}(a_t^*))\delta_{(ts)^{-1}} = \alpha_{s^{-1}}(\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s^*)).\alpha_{t^{-1}}(a_t^*))\delta_{(ts)^{-1}} \\ &= \alpha_{s^{-1}}(a_s^*)\delta_{s^{-1}}.\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{(t)^{-1}} = (a_s\delta_s)^*.(a_t\delta_t)^*\end{aligned}$$

3. Se $t \in G$, $a_t \in D_t$, então

$$\begin{aligned}((a_t\delta_t)^*)^* &= [\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}}]^* = \alpha_t[(\alpha_{t^{-1}}(a_t^*))^*]\delta_t \\ &= \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t))\delta_t = a_t\delta_t\end{aligned}$$

Portanto, $*$ é uma involução sobre $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$.

■

Para a próxima proposição, defina a função $\|.\|_1 : A\widetilde{\rtimes}_\alpha G \longmapsto \mathbb{R}_+$, $\left\|\sum_{t\in G} a_t\delta_t\right\|_1 := \sum_{t\in G} \|a_t\|_A$.

Proposição 38. *Seja $(\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre uma C^*-álgebra A. Com $\|.\|_1$, $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ é uma $*$-álgebra normada.*

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ com $x = \sum_{t\in G} a_t\delta_t$ e $y = \sum_{s\in G} b_s\delta_s$. Então:

1. $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \left\|\sum_{t\in G} a_t\delta_t\right\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{t\in G} \|a_t\|_A = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \|a_t\|_A = 0,\ \forall t \in \sum_{t\in G} \Leftrightarrow x = 0;$

2.

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_1 &= \left\|\lambda\sum_{t\in G} a_t\delta_t\right\|_1 = \left\|\sum_{t\in G} \lambda a_t\delta_t\right\|_1 = \sum_{t\in G} \|\lambda a_t\|_A \\ &= \sum_{t\in G} |\lambda|\|a_t\|_A = |\lambda|\sum_{t\in G} \|a_t\|_A = |\lambda|\left\|\sum_{t\in G} a_t\delta_t\right\|_1 = |\lambda|\|x\|;\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \left\|\sum_{t\in G} a_t\delta_t + \sum_{t\in G} b_t\delta_t\right\|_1 = \left\|\sum_{t\in G}(a_t+b_t)\delta_t\right\|_1 \\
&= \sum_{t\in G}\|a_t+b_t\|_A \leq \sum_{t\in G}\|a_t\|_A + \sum_{t\in G}\|b_t\|_A \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_1;
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\|xy\|_1 &= \left\|\sum_{t\in G} a_t\delta_t \sum_{s\in G} b_s\delta_s\right\|_1 = \left\|\sum_{t,s\in G} a_t\delta_t b_s\delta_s\right\|_1 \\
&= \left\|\sum_{s\in G}\left(\sum_{t\in G}\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_s)\delta_{ts}\right)\right\|_1 \overset{h=ts}{=} \\
&= \left\|\sum_{h\in G}\left(\sum_{t\in G}\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}h})\delta_h\right)\right\|_1 \\
&= \sum_{h\in G}\left\|\sum_{t\in G}\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}h})\right\|_A \\
&\leq \sum_{h\in G}\sum_{t\in G}\|\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}h})\|_A \overset{\alpha_t \text{ é isometria}}{=} \\
&= \sum_{h\in G}\sum_{t\in G}\|\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}h}\|_A \\
&\leq \sum_{h\in G}\sum_{t\in G}\|\alpha_{t^{-1}}(a_t)\|_A.\|b_{t^{-1}h}\|_A \overset{\alpha_{t^{-1}} \text{ é isometria}}{=} \\
&= \sum_{h\in G}\sum_{t\in G}\|a_t\|_A.\|b_{t^{-1}h}\|_A \\
&= \left(\sum_{t\in G}\|a_t\|_A\right).\left(\sum_{h\in G}\|b_{t^{-1}h}\|_A\right) \\
&= \left(\sum_{t\in G}\|a_t\|_A\right).\left(\sum_{s\in G}\|b_s\|_A\right) \\
&= \|x\|_1.\|y\|_1;
\end{aligned}$$

5.
$$\|x^*\|_1 = \left\| \left(\sum_{t \in G} a_t \delta_t \right)^* \right\|_1 = \left\| \sum_{t \in G} \alpha_{t^{-1}}(a_t^*) \delta_{t^{-1}} \right\|_1$$
$$= \sum_{t \in G} \|\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\|_A \overset{\alpha_{t^{-1}} \text{ é isometria}}{=}$$
$$= \sum_{h \in G} \|a_t^*\|_A = \sum_{h \in G} \|a_t\|_A = \|x\|_1.$$

E portanto, $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$ com $\|.\|_1$ é uma $*$-álgebra normada. ■

Observação. Note que se $a_t \in D_t$, $t \in G$, então $\|a_t \delta_t\|_1 = \|a_t\|_A$, ou seja, nos geradores de $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$ a norma $\|.\|_1$ coincide com a norma de A. Diante deste fato, podemos afirmar que a função $\varphi : A \longrightarrow A\delta_e \subseteq A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$ que leva $a \mapsto a\delta_e$ é um $*$-isomorfismo, pois, de imediato, as operações de $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$ nos garante que φ é linear, multiplicativa, involutiva, bijeção e isométrica. Portanto, $\varphi(A) = A\delta_e$, e assim $A\delta_e$ é uma C*-álgebra.

Já sabemos que $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$ é uma $*$- álgebra normada, que tem como geradores $\{a_t \delta_t \mid t \in G\} \cong \{a_t \in D_t \mid t \in G\}$. Então podemos considerar a C*-álgebra envolvente de $A \widetilde{\rtimes}_\alpha G$. (Aqui faremos somente a definição que precisamos. Para mais detalhes sobre C*-álgebra envolvente, olhar (BUSS, 2003)).

Definição 39. *Seja C uma $*$-álgebra normada. Defina o conjunto $\mathcal{G} = \{[a] | a \in C\}$, que é formado por cópias dos elementos de C. Interprete $\mathcal{G}$ apenas como conjunto, sem possuir nenhuma operação de C. Defina*

$$R = \{([a] + \lambda[b] - [a + \lambda b], 0) \mid a, b \in C, \lambda \in \mathbb{C}\}$$
$$\cup \{([a][b] - [ab], 0) \mid a, b \in C\} \cup \{([a]^* - [a], 0) \mid a, b \in C\}$$
$$\cup \{([a], \|a\|_C) \mid a, b \in C\}$$

Definimos a C-álgebra envolvente de C, denotada por $C^*(C)$, como a C*-álgebra universal gerada por G com as relações R, ou seja, $C^*(C) = C^*(\mathcal{G}, R)$.*

Note que pela última relação, se $[a] \in \mathcal{G}$, então $\|\rho([a])\| \leq \|a\|_C$, para qualquer representação de G que satisfaz R, ou seja, o par $(\mathcal{G}, R)$ é admissível (basta escolher $c_{[a]} = \|a\|_C$ e notar que toda representação de $(\mathcal{G}, R)$ é contrativa).

Para o nosso caso, $C = A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ é a $*$-álgebra normada. Diante disto, definimos:

Definição 40. *O produto cruzado parcial do grupo G pela C*-álgebra A, relativo à ação parcial α, denotado por $A \rtimes_\alpha G$, é a C*-álgebra envolvente da $*$-álgebra $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$, ou seja,*

$$C^*(A\widetilde{\rtimes}_\alpha G) = A \rtimes_\alpha G.$$

Proposição 41. *Se $\psi : A\widetilde{\rtimes}_\alpha G \to B$ é $*$-homomorfismo da $*$-álgebra $A\widetilde{\rtimes}_\alpha G$ na C*-álgebra B, tal que $\|\psi(\sum a_g\delta_g)\| \leq \sum \|a_g\|$, então ψ se estende à $A \rtimes_\alpha G$.*

Demonstração. Imediata. ■

Agora provaremos um teorema que será de fundamental importância para o último capítulo deste trabalho.

Teorema 42. *Sejam A e B C*-álgebras, com B unital, G um grupo, $\varphi : A \to B$, $\pi : G \to B$ tais que φ é $*$-homomorfismo, π é representação parcial*[1]*, isto é, $\pi(e) = 1_B$, $\pi(r^{-1}) = \pi(r)^*$ e $\pi(r)^*\pi(r)\pi(s) = \pi(r)^*\pi(rs)$, $\forall r, s \in G$. Suponha que o par (φ, π) seja α-covariante, ou seja, $\forall g \in G$, $a_{g^{-1}} \in D_{g^{-1}}$ e $a \in A$, tenhamos*

(i) $\varphi(\alpha_g(a_{g^{-1}})) = \pi(g)\varphi(a_{g^{-1}})\pi(g)^*$;

(ii) $\varphi(a)\pi(g)\pi(g)^* = \pi(g)\pi(g)^*\varphi(a)$.

Então, $(\varphi\widetilde{\times}\pi) : A\widetilde{\rtimes}_\alpha G \longrightarrow B$ definida por

$$(\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_g a_g\delta_g\right) := \sum_g \varphi(a_g)\pi(g)$$

é um $*$-homomorfismo contrativo.

Demonstração. Sejam $\displaystyle\sum_t a_t\delta_t, \sum_s b_s\delta_s \in A\widetilde{\rtimes}_\alpha G, \lambda \in \mathbb{C}$.

---

[1]Note que a condição $\pi(r)^*\pi(r)\pi(s) = \pi(r)^*\pi(rs)$ é equivalente à condição $\pi(r)\pi(s)\pi(s)^* = \pi(rs)\pi(s)^*$, basta trocar r por s^{-1} e s por r^{-1} e aplicar $*$ em ambos os lados.

- Linearidade:

$$
\begin{aligned}
(\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_t a_t\delta_t+\sum_s b_s\delta_s\right) &\overset{g=s,t}{=} (\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_g (a_g+b_g)\delta_g\right) \\
&= \sum_g \varphi(a_g+b_g)\pi(g) = \sum_t \varphi(a_t)\pi(t)+\sum_s \varphi(b_s)\pi(s) \\
&= (\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_t a_t\delta_t\right)+(\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_s b_s\delta_s\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\lambda\sum_t a_t\delta_t\right) &= \sum_t \varphi(\lambda a_t)\pi(t) \\
&= \sum_t \lambda\varphi(a_t)\pi(t) = \lambda\sum_t (\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(a_t\delta_t\right) \\
&= \lambda(\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_t a_t\delta_t\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\varphi\widetilde{\times}\pi)$ é linear. Para separar no produto precisamos usar a α-covariança do par (φ,π):

$$
\begin{aligned}
(\varphi\widetilde{\times}\pi)((a_t\delta_t)(a_s\delta_s)) &= (\varphi\widetilde{\times}\pi)(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s)\delta_{ts}) \\
&= \varphi(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s))\pi(ts) \\
&= \pi(t)\varphi(\alpha_{t^{-1}}(a_t)a_s)\pi(t)^*\pi(ts) \\
&= \pi(t)\varphi(\alpha_{t^{-1}}(a_t))\varphi(a_s)\pi(t)^*\pi(ts) \\
&= \pi(t)\pi(t^{-1})\varphi(a_t)\pi(t^{-1})^*\varphi(a_s)\pi(t)^*\pi(ts) \\
&= \varphi(a_t)\pi(t)\pi(t)^*\pi(t)\varphi(a_s)\pi(t)^*\pi(t)\pi(s) \\
&= \varphi(a_t)\pi(t)\varphi(a_s)\pi(t)^*\pi(t)\pi(s) \\
&= \varphi(a_t)\pi(t)\pi(t)^*\pi(t)\varphi(a_s)\pi(s) \\
&= \varphi(a_t)\pi(t)\varphi(a_s)\pi(s) \\
&= (\varphi\widetilde{\times}\pi)(a_t\delta_t)(\varphi\widetilde{\times}\pi)(a_s\delta_s).
\end{aligned}
$$

Como $\varphi\widetilde{\times}\pi$ é linear, segue para $\displaystyle\sum_t a_t\delta_t$ e $\displaystyle\sum_s a_s\delta_s$ arbitrários que:
$(\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\left(\sum_t a_t\delta_t\right)\left(\sum_s a_s\delta_s\right)\right) = (\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_t a_t\delta_t\right)(\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_s a_s\delta_s\right).$

- Preservação de $*$: Aqui, usa-se mais uma vez que (φ,π) é α-

covariante:

$$\begin{aligned}
\varphi\widetilde{\times}\pi((a_t\delta_t)^*) &= \varphi\widetilde{\times}\pi(\alpha_{t^{-1}}(a_t^*)\delta_{t^{-1}}) = \varphi(\alpha_{t^{-1}}(a_t^*))\pi(t^{-1}) \\
&= \pi(t)^*\varphi(a_t^*)\pi(t)\pi(t)^* = \pi(t)^*\pi(t)\pi(t)^*\varphi(a_t^*) \\
&= \pi(t)^*\varphi(a_t)^* = (\varphi(a_t)\pi(t))^* = (\varphi\widetilde{\times}\pi(a_t\delta_t))^*
\end{aligned}$$

Novamente, como $\varphi\widetilde{\times}\pi$ é linear, para $\displaystyle\sum_t a_t\delta_t$ arbitrário, temos:

$$(\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\left(\sum_t a_t\delta_t\right)^*\right) = \left((\varphi\widetilde{\times}\pi)\left(\sum_t a_t\delta_t\right)\right)^*.$$

- <u>Contrativa</u>: Uma vez que $\varphi(a_t), \pi(t) \in B$, φ é homomorfismo contrativo e $\|\pi(t)\| \leq$ [2]1, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi\widetilde{\times}\pi\left(\sum_{t\in G} a_t\delta_t\right)\right\| &= \left\|\sum_{t\in G}\varphi(a_t)\pi(t)\right\| \leq \sum_{t\in G}\|\varphi(a_t)\pi(t)\| \\
&\leq \sum_{t\in G}\|\varphi(a_t)\|\|\pi(t)\| \leq \sum_{t\in G}\|a_t\|\|\pi(t)\| \\
&\leq \sum_{t\in G}\|a_t\| = \left\|\sum_{t\in G} a_t\delta_t\right\|_1.
\end{aligned}$$

Portanto $\varphi\widetilde{\times}\pi$ é contrativo.

■

Observação. Diante deste Teorema, note que pela propriedade universal de C*-álgebras universais (já que $A \rtimes_\alpha G$ é uma C*-álgebra envolvente, que no fundo é uma C*-álgebra universal) temos que existe um único $*$-homomorfismo $\psi : A \rtimes_\alpha G \longrightarrow B$.

$$\begin{tikzcd}
A\widetilde{\rtimes}_\alpha G \arrow[rr, "\varphi\widetilde{\times}\pi"] \arrow[dr, "i"'] & & B \\
& A \rtimes_\alpha G \arrow[ur, dashed, "\psi=:\varphi\times\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

[2]Como $\pi(t)^*\pi(t)\pi(s) = \pi(t)^*\pi(ts)$, basta tomar $s = t^{-1}$, então $\pi(t)^*\pi(t)\pi(t)^* = \pi(t)^*$ de modo que $\pi(t)$ é isometria parcial e assim $\|\pi(t)\| \leq 1$.

6 A AÇÃO PARCIAL

O título deste capítulo usa o artigo "a" pois esta ação parcial que iremos construir é de crucial importância para este trabalho. É através desta ação que construiremos o produto cruzado parcial que será isomorfo à C*-Álgebra de Cuntz-Krieger.

Considere

$$X = \{(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq N^{\mathbb{N}} : a_{\xi_i \xi_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}\},$$

em que $(a_{ij})_{i,j} = A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\{0,1\})$, sem linhas nulas. Lembre que

$$\mathbb{W} = \left\{ \begin{array}{l} \text{palavras finitas } \alpha, \text{ com letras em } \{1, \dots, n\} \text{ e tais que} \\ \text{se } \alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m, \text{ então } a_{\alpha_i \alpha_{i+1}} = 1, \ \forall i = 1, \dots, m-1 \end{array} \right\} \cup N.$$

em que $\mathbb{W}$ é chamado o conjunto das palavras (finitas) positivas admissíveis geradas pelas letras $\{1, \dots, n\}$.

Note que $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{F}-$grupo livre gerado por $N = \{1, \dots, n\}$.

Definição 43. *Para cada $\alpha \in \mathbb{W}$, defina:*

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \{\xi \in X : \xi \textit{ começa com } \alpha\} \\ &= \{\xi \in X : \xi_1 \dots \xi_{|\alpha|} = \alpha_1 \dots \alpha_{|\alpha|}\} \\ &= \{\xi \in X : \xi_i = \alpha_i, \forall i = 1, \dots, |\alpha|\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\alpha^{-1}} &= \{\xi \in X : \alpha\xi \in X\} \\ &= \{\xi \in X : a_{\alpha_{|\alpha|}\xi_1} = 1\}. \end{aligned}$$

Proposição 44. *Os conjuntos X_α e $X_{\alpha^{-1}}$ são abertos e fechados em X.*

Demonstração. De fato, X_α é fechado pois, se $(x^\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X_\alpha$ é net tal que $x^\lambda \longrightarrow x \in X$, então, fixando a coordenada $i \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_i \in \Lambda$ tal que $\forall \lambda \geq \lambda_i$, $x_i^\lambda = x_i$. Então, se $\lambda \geq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{|\alpha|}$, segue que $x_i^\lambda = x_i$, $\forall i \in \{1, \dots, |\alpha|\}$, ou seja, $x_i = x_i^\lambda = \alpha_i$, $\forall i \in \{1, \dots, |\alpha|\}$, daí, $x \in X_\alpha$, Da mesma forma, X_α^C é fechado, ou seja, X_α é aberto. Portando, X_α é aberto e fechado.

Por outro lado temos que $X_{\alpha^{-1}}$ é fechado pois, se $(x^\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X_\alpha$ é net tal que $x^\lambda \longrightarrow x \in X$, então, na primeira coordenada de cada x^λ, temos que $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ tal que, $x_1^\lambda = \xi_1 \in N$ tal que $a_{\alpha_{|\alpha|}\xi_1} = 1$. Daí x tem como primeira coordenada ξ_1, ou seja, $x \in X_{\alpha^{-1}}$. Logo, $X_{\alpha^{-1}}$ é fechado. De maneira análoga, $X^C_{\alpha^{-1}}$ é fechado, ou seja, $X_{\alpha^{-1}}$ é aberto. Portando, $X_{\alpha^{-1}}$ é aberto e fechado. ■

Defina agora,

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : X_{\alpha^{-1}} &\longrightarrow X_\alpha \\ \xi &\longmapsto \alpha\xi. \end{aligned}$$

Note que θ_α é homeomorfismo. De fato, é óbvio que θ_α é bijeção. Também, θ_α é contínua pois, se $(x^\lambda) \subseteq X_{\alpha^{-1}}$ é tal que $x^\lambda \to x \in X_{\alpha^{-1}}$, então $\theta_\alpha(x^\lambda) = \alpha x^\lambda \longrightarrow \alpha x = \theta_\alpha(x)$.

Considere agora

$$\begin{aligned} \theta_\alpha^{-1} : X_\alpha &\longrightarrow X_{\alpha^{-1}} \\ \xi &\longmapsto \widehat{\alpha}\xi, \end{aligned}$$

em que $\widehat{\alpha}\xi = \xi_{|\alpha|+1}\xi_{|\alpha|+2}\xi_{|\alpha|+3}\ldots \in X$, ou seja, $\widehat{\alpha}\xi$ é o mesmo que "apagar"α do começo de $\xi \in X_\alpha$.

Afirmação 1: θ_α^{-1} é a inversa de θ_α. De fato, se $\xi \in X_{\alpha^{-1}}$, então $\theta_\alpha^{-1} \circ \theta_\alpha(\xi) = \theta_\alpha^{-1}(\alpha\xi) = \widehat{\alpha}\alpha\xi = \xi$, ou seja, $\theta_\alpha^{-1} \circ \theta_\alpha = Id_{X_{\alpha^{-1}}}$. Por outro lado, se $\xi \in X_\alpha$, ou seja, se ξ começa com α, temos que $\theta_\alpha \circ \theta_\alpha^{-1}(\xi) = \theta_\alpha(\xi_{|\alpha|+1}\xi_{|\alpha|+2}\xi_{|\alpha|+3}\ldots) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{|\alpha|}\xi_{|\alpha|+1}\xi_{|\alpha|+2}\xi_{|\alpha|+3}\cdots = \xi$, ou seja, $\theta_\alpha \circ \theta_\alpha^{-1} = Id_{X_\alpha}$. Logo, segue a afirmação.

Afirmação 2: θ_α^{-1} é contínua. De fato, basta notar que se se $(x^\lambda) \subseteq X_\alpha$ é tal que $x^\lambda \to x \in X_\alpha$, então $\theta_\alpha^{-1}(x^\lambda) = \widehat{\alpha}x^\lambda \longrightarrow \widehat{\alpha}x = \theta_\alpha^{-1}(x)$. Com isso, θ_α^{-1} é contínua e portanto, θ_α é um homeomorfismo.

Observação. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$, dizemos que $\alpha\beta^{-1} \in \mathbb{F}$ está na forma reduzida se $\alpha_{|\alpha|} \neq \beta_{|\beta|}$.

Daqui em diante, sempre que aparecer termos da forma $\alpha\beta^{-1}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$, vamos considerar $\alpha\beta^{-1}$ na forma reduzida.

Definição 45. *Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$, defina:*

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta^{-1}} &= \{\xi \in X : \xi \textit{ começa com } \alpha \textit{ e } \beta\widehat{\alpha}\xi \in X\} \\ &= \{\xi \in X : \xi \in X_\alpha \textit{ e } \beta\widehat{\alpha}\xi \in X\}. \end{aligned}$$

Exemplo. Note que $X_{\alpha\beta^{-1}}$ pode ser vazio, pois se $n = 3$, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $\gamma = 3$, então

$$\mathbb{W} = \{1, 2, 3, 11, 22, 23, 32, 111, 222, 223, 322, 232, 323, \ldots\}.$$

Por outro lado, $X = X_e = \{(1,1,1,\ldots);(2,2,2,\ldots);(2,3,2,3,\ldots);$ $(3,2,3,2,\ldots);(3,2,2,2\ldots);(3,2,2,3\ldots);(2,3,2,2\ldots)(2,2,3,2\ldots);$ $(2,2,2,3,2,\ldots);\ldots\}$.

Daí,

$$
\begin{aligned}
X_{12^{-1}} &= \{\xi \in X : \xi \in X_1 \text{ e } 2\widehat{1}\xi \in X\} = \emptyset;\\
X_{21^{-1}} &= \{\xi \in X : \xi \in X_2 \text{ e } 1\widehat{2}\xi \in X\} = \emptyset;\\
X_{13^{-1}} &= \{\xi \in X : \xi \in X_1 \text{ e } 3\widehat{1}\xi \in X\} = \emptyset;\\
X_{31^{-1}} &= \{\xi \in X : \xi \in X_3 \text{ e } 1\widehat{3}\xi \in X\} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Porém, $X_{23^{-1}} = \{\xi \in X : \xi \in X_2 \text{ e } 3\widehat{2}\xi \in X\} \neq \emptyset$, basta notar que o elemento $(2,2,3,2,3,2,3,2,3,2,\ldots)$ pertence à $X_{23^{-1}}$. Também, o conjunto $X_{32^{-1}} = \{\xi \in X : \xi \in X_3 \text{ e } 2\widehat{3}\xi \in X\}$ não é vazio, pois $(3,2,2,2,2,2,2,2,\ldots) \in X_{32^{-1}}$.

Proposição 46. *O conjunto $X_{\alpha\beta^{-1}}$ é aberto e fechado em X.*

Demonstração. De fato, se $(x^\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X_{\alpha\beta^{-1}}$ é net tal que $x^\lambda \longrightarrow x \in X$, então, para cada $\lambda \in \Lambda$, $x^\lambda \in X_\alpha$ e $\beta\widehat{\alpha}x^\lambda \in X$, ou seja, $\widehat{\alpha}x^\lambda \in X_{\beta^{-1}}$. Daí, como X_α e $X_{\beta^{-1}}$ são fechados, $x \in X_\alpha$ e $\widehat{\alpha}x \in X_{\beta^{-1}}$, ou seja, $x \in X_{\alpha\beta^{-1}}$. Portanto, $X_{\alpha\beta^{-1}}$ é fechado. Por outro lado, $X^C_{\alpha\beta^{-1}}$ é fechado também pois, se $(x^\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X^C_{\alpha\beta^{-1}}$ é tal que $x^\lambda \longrightarrow x \in X$, $\forall\lambda \in \Lambda$, temos que $x^\lambda \notin X_\alpha$ ou $\widehat{\alpha}x^\lambda \notin X_{\beta^{-1}}$, daí, como X_α e $X_{\beta^{-1}}$ são fechados, $x \notin X_\alpha$ ou $\widehat{\alpha}x \notin X_{\beta^{-1}}$, ou seja $x \notin X_{\alpha\beta^{-1}}$, isto é, $x \in X^C_{\alpha\beta^{-1}}$. Logo $X^C_{\alpha\beta^{-1}}$ é fechado, e assim, $X_{\alpha\beta^{-1}}$ é aberto. Portando, $X_{\alpha\beta^{-1}}$ é aberto e fechado. ∎

Defina:

$$
\begin{aligned}
\theta_{\alpha\beta^{-1}} : X_{\beta\alpha^{-1}} &\longrightarrow X_{\alpha\beta^{-1}}\\
\xi \quad &\longmapsto \alpha\widehat{\beta}\xi.
\end{aligned}
$$

Note que $\theta_{\alpha\beta^{-1}}$ é homeomorfismo. De fato, $\theta_{\alpha\beta^{-1}}$ é contínua pois se $x \in X_{\beta\alpha^{-1}}$, então $x \in X_\beta$ e $\alpha\widehat{\beta}x \in X$. Daí,

$$\theta_{\alpha\beta^{-1}}(x) = \alpha\widehat{\beta}x = \theta_\alpha(\widehat{\beta}x) = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}(x)$$

e como θ_α e θ_β^{-1} são contínuas, segue que $\theta_{\alpha\beta^{-1}}$ é contínua. Assim, a função:

$$\begin{aligned} \theta_{\beta\alpha^{-1}} : X_{\alpha\beta^{-1}} &\longrightarrow X_{\beta\alpha^{-1}} \\ \xi &\longmapsto \beta\widehat{\alpha}\xi, \end{aligned}$$

também é contínua.

Afirmação: $\theta_{\beta\alpha^{-1}} = \theta^{-1}_{\alpha\beta^{-1}}$. De fato, note que se $\xi \in X_{\alpha\beta^{-1}}$, então $\xi = \alpha\mu$ tal que $\mu \in X_{\alpha^{-1}}$ e $\beta\widehat{\alpha}\xi = \beta\widehat{\alpha}\alpha\mu = \beta\mu \in X$. Daí, $\widehat{\alpha}\xi = \mu$ e assim,

$$\theta_{\alpha\beta^{-1}}(\theta_{\beta\alpha^{-1}}(\xi)) = \theta_{\alpha\beta^{-1}}(\beta\widehat{\alpha}\xi) = \theta_{\alpha\beta^{-1}}(\beta\mu) = \alpha\widehat{\beta}\beta\mu = \alpha\mu = \xi.$$

Por outro lado, se $\xi \in X_{\beta\alpha^{-1}}$, então $\xi = \beta\mu$ tal que $\mu \in X_{\beta^{-1}}$ e $\alpha\widehat{\beta}\xi = \alpha\widehat{\beta}\beta\mu = \alpha\mu \in X$. Daí, $\widehat{\beta}\xi = \mu$, logo,

$$\theta_{\beta\alpha^{-1}}(\theta_{\alpha\beta^{-1}}(\xi)) = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(\alpha\widehat{\beta}\xi) = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(\alpha\mu) = \beta\widehat{\alpha}\alpha\mu = \beta\mu = \xi.$$

E assim, segue a afirmação. Portanto, $\theta_{\alpha\beta^{-1}}$ é homeomorfismo, cuja inversa é $\theta_{\beta\alpha^{-1}}$.

Lembre que $\mathbb{F}$ é o grupo livre gerado por $N = \{1, \ldots, n\}$. Então, defina:

$$R_A = \left\{ \begin{array}{c} \alpha\beta^{-1} : \alpha \in \mathbb{W},\ \beta \in \mathbb{W} \text{ em que} \\ \alpha\beta^{-1} \text{ está na forma reduzida} \end{array} \right\}.$$

Note que $\mathbb{W} \cap R_A = \emptyset$ mas $\mathbb{W} \subsetneq \mathbb{F}$ e $R_A \subsetneq \mathbb{F}$. Também, note que $\mathbb{W}^{-1} \subseteq \mathbb{F}$ em que $\mathbb{W}^{-1} = \{\alpha^{-1} : \alpha \in \mathbb{W}\}$.

Observação. Considere os conjuntos $\mathbb{W}$ e R_A definidos anteriormente e os homeomorfismos θ's e observe que:

1) $X_e = X$, em que "e"é o elemento neutro do grupo livre $\mathbb{F}$.

2) $X_\alpha = \{\xi \in X : \xi \text{ começa com } \alpha\}$, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$;

3) $X_{\alpha^{-1}} = \{\xi \in X : \alpha\xi \in X\}$, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$;

4) $X_{\alpha\beta^{-1}} = \{\xi \in X : \xi \text{ começa com } \alpha \text{ e } \beta\widehat{\alpha}\xi \in X\}$, $\forall \alpha\beta^{-1} \in R_A$;

5) $X_r = \emptyset$, para cada $r \in \mathbb{F}$ que não está em $\mathbb{W}$, $\mathbb{W}^{-1}$, R_A ou $\{e\}$;

6)

$$\begin{aligned} \theta_e : X_e &\longrightarrow X_e \\ \xi &\longmapsto \xi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta_\alpha : X_{\alpha^{-1}} &\longrightarrow X_\alpha \\ \xi &\longmapsto \alpha\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha^{-1}} : X_\alpha &\longrightarrow X_{\alpha^{-1}} \\ \xi &\longmapsto \widehat{\alpha}\xi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta_{\alpha\beta^{-1}} : X_{\beta\alpha^{-1}} &\longrightarrow X_{\alpha\beta^{-1}} \\ \xi &\longmapsto \alpha\widehat{\beta}\xi \end{aligned}$$

Agora, vamos definir a ação parcial de $\mathbb{F}$ em $C(X)$.

Definição 47. *Para cada $r \in \mathbb{F}$ defina*

$$\begin{aligned} \gamma_r : C(X_{r^{-1}}) &\longrightarrow C(X_r) \\ f &\longmapsto f \circ \theta_r^{-1}. \end{aligned}$$

Observações.

1. Note que se $r = e$, então $\gamma_e : C(X) \to C(X)$ é tal que $f \mapsto f \circ \theta_e^{-1} = f \circ Id_X = f$, e assim $\gamma_e = Id_{C(X)}$.

2. Se $r = \alpha \in \mathbb{W}$, então

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha : C(X_{\alpha^{-1}}) &\longrightarrow C(X_\alpha) \\ f &\longmapsto f \circ \theta_\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

3. Se $r = \alpha^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$, então

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha^{-1}} : C(X_\alpha) &\longrightarrow C(X_{\alpha^{-1}}) \\ f &\longmapsto f \circ \theta_{\alpha^{-1}}^{-1} = f \circ \theta_\alpha \end{aligned}$$

4. Se $r = \alpha\beta^{-1} \in \mathbb{R}_A$, então

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta^{-1}} : C(X_{\beta\alpha^{-1}}) &\longrightarrow C(X_{\alpha\beta^{-1}}) \\ f &\longmapsto f \circ \theta_{\alpha\beta^{-1}}^{-1} = f \circ \theta_{\beta\alpha^{-1}} \end{aligned}$$

5. Se $r \in \mathbb{F}$ é tal que r não é da forma $r = e$ ou $r = \alpha \in \mathbb{W}$ ou $r = \alpha^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$ ou $r = \alpha\beta^{-1} \in R_A$, então $X_r = \emptyset$ e assim, $C(X_r) = \{0\}$.

Vamos agora demonstrar um lema que será útil na sequência deste capítulo.

Lema 48. *Seja $\theta = (\{Y_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial do grupo livre G sobre o espaço topológico Y, em que cada Y_g é aberto e fechado. Então:*

- $C(Y) = \{f : Y \longrightarrow \mathbb{C} \mid f$ *é contínua*$\}$ *é* $*$*-álgebra;*
- $C(Y_g)$ *é* $*$*-subálgebra de* $C(Y)$, $\forall g \in G$;
- $C(Y_g)$ *é ideal (bilateral auto-adjunto) de* $C(Y)$, $\forall g \in G$;
- $$\begin{aligned} \gamma_g : C(Y_{g^{-1}}) &\longrightarrow C(Y_g) \text{ é isomorfismo (de $*$-álgebras), } \forall g \in G; \\ f &\longmapsto f \circ \theta_g^{-1} \end{aligned}$$
- $\gamma = (\{C(Y_g)\}_{g\in G}, \{\gamma_g\}_{g\in G})$ *é ação parcial de* G *sobre a* $*$*-álgebra* $C(Y)$.

Demonstração. Claro que $D := C(Y)$ com as operações ponto a ponto é álgebra e considerando $f^*(x) = \overline{f(x)}$, uma $*$-álgebra com a norma do supremo. Também, note que $\forall g \in G$, temos que $D_g := C(Y_g)$ é $*$-subálgebra de D, pois se $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, j \in D_g$, então $(f + j)$, $(f.j)$, λf e $f^* \in D_g$. Ainda, se $f \in D_g$ e $j \in D$, então $fj = jf \in C(Y_g)$. Logo, D_g é ideal bilateral auto-adjunto de D.

Provemos agora que $\gamma_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ é isomorfismo. É óbvio que γ_g é homomorfismo de $*$-álgebras. Falta provar que é bijetiva. Para isso, exibiremos sua inversa:

Seja $f \in D_{g^{-1}} = C(Y_{g^{-1}})$. Então, se $x \in Y_{g^{-1}}$, temos que

$$\begin{aligned} \gamma_{g^{-1}} \circ \gamma_g(f)(x) &= \gamma_g(f) \circ \theta_{g^{-1}}^{-1}(x) = \gamma_g(f)(\theta_g(x)) \\ &= f \circ \theta_g^{-1} \circ \theta_g(x) = f(x) \end{aligned}$$

Por outro lado, se $f \in D_g = C(Y_g)$. Então, se $x \in Y_g$, temos

$$\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}}(f)(x) = \gamma_{g^{-1}}(f) \circ \theta_g^{-1}(x) = f \circ \theta_g \circ \theta_g^{-1}(x) = f(x)$$

Logo, $\gamma_{g^{-1}} = \gamma_g^{-1}$. Portanto, γ_g é isomorfismo.

Falta mostrar que γ é ação parcial.

(i) Por definição, $Y_e = Y$, assim, $D_e = C(Y_e) = C(Y) = D$. Como $\theta_e = \theta_e^{-1} = Id_Y$, pois θ é ação parcial, temos que se $f \in D$, $\gamma_e(f) = f \circ \theta_e^{-1} = f \circ Id = f$. Logo $\gamma_e = Id_D = Id_{C(Y)}$.

(ii) Seja $f \in \gamma_g^{-1}(D_g \cap D_{h^{-1}})$[1]. Como $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$ (pois θ é ação

[1] $\gamma_g^{-1} = \gamma_{g^{-1}} : D_g \longrightarrow D_{g^{-1}}$.

parcial), tem-se que $f = \gamma_{g^{-1}}(g) = g \circ \theta_g$, para algum $g \in D_g \cap D_{h^{-1}} = C(Y_g \cap Y_{h^{-1}}) = C(\theta_g(Y_{(hg)^{-1}} \cap Y_{g^{-1}})) \subseteq C(\theta_g(Y_{(hg)^{-1}}))$, isto implica que $g \in C(\theta_g(Y_{(hg)^{-1}}))$, ou seja, $g \circ \theta_g \in C(Y_{(hg)^{-1}})$, mas $f = g \circ \theta_g$, e assim $f \in D_{(hg)^{-1}}$. Logo, segue (ii).

(iii) Seja $f \in \gamma_{g^{-1}}(D_g \cap D_{h^{-1}})$. Observe que se $x \in Y_h$,

$$\gamma_h \circ \gamma_g(f)(x) = \gamma_g(f) \circ \theta_h^{-1}(x)$$

e se $x \in Y_h$ e $\theta_h^{-1}(x) \in Y_g$, temos

$$\gamma_h \circ \gamma_g(f)(x) = \gamma_g(f) \circ \theta_h^{-1}(x) = f \circ \theta_g^{-1}\theta_h^{-1}(x).$$

Mas note que $x \in Y_h$ e $\theta_h^{-1}(x) \in Y_g \iff x \in \theta_h(Y_{h^{-1}} \cap Y_g)$. Como θ é ação parcial, $\theta_h(Y_{h^{-1}} \cap Y_g) = Y_h \cap Y_{hg}$. Também, se $x \in \theta_h(Y_{h^{-1}} \cap Y_g)$, então $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_{h^{-1}}(x) = \theta_{(hg)^{-1}}(x)$. Portanto,

$$\gamma_h \circ \gamma_g(f)(x) = f \circ \theta_{(hg)^{-1}}(x), \ \forall x \in Y_h \cap Y_{hg}. \quad (I)$$

Por outro lado, $\gamma_{hg}(x) = f \circ \theta_{(hg)^{-1}}(x)$, $\forall x \in Y_{hg}$, e com isso, se $x \in Y_h \cap Y_{hg} \subseteq Y_{hg}$, temos que

$$\gamma_{hg}(x) = f \circ \theta_{(hg)^{-1}}(x). \quad (II)$$

De (I) e (II) segue que

$$\gamma_h \circ \gamma_g(f) = \gamma_{hg}(f), \ \forall f \in \gamma_{g^{-1}}(D_g \cap D_{h^{-1}}).$$

Portanto, γ é ação parcial de G sobre $D = C(Y)$. ■

Teorema 49. *Sejam $\mathbb{F}$ o grupo livre gerado por $\{1, \ldots, n\}$, considere $\{X_r\}_{r\in\mathbb{F}}$ como na Observação da página 56 e considere $\{\gamma_r\}_{r\in\mathbb{F}}$ como na Definição 47. Então $\gamma = (\{C(X_r)\}_{r\in\mathbb{F}}, \{\gamma_r\}_{r\in\mathbb{F}})$ é uma ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre $C(X)$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, para provar este teorema basta mostrarmos que $\theta = (\{X_r\}_{r\in\mathbb{F}}, \{\theta_r\}_{r\in\mathbb{F}})$ é uma ação parcial do grupo livre $\mathbb{F}$ sobre o espaço topológico X.

Já vimos que X_r é aberto e fechado para todo $r \in \mathbb{F}$ e que θ_r é homeomorfismo $\forall r \in \mathbb{F}$. Vamos mostrar agora que os axiomas de ação parcial valem para θ:

(i) Como $X_e = X_{e^{-1}} = X$ por definição, então $\theta_e : X_e \longrightarrow X_e$ leva $x \longmapsto ex = x$, e assim, $\theta_e = Id_X$.

(ii) Vamos mostrar que $\theta_t^{-1}(X_t \cap X_{r^{-1}}) \subseteq X_{(rt)^{-1}}$, $\forall r, t \in \mathbb{F}$. Seja $x \in \theta_t^{-1}(X_t \cap X_{r^{-1}})$. Então $\exists y \in X_t \cap X_{r^{-1}}$ tal que $\theta_t^{-1}(y) = x$. Daqui em diante, temos de considerar alguns casos:

- Caso 1: $r = e$ ou $t = e \Rightarrow X_t = X$ ou $X_{r^{-1}} = X$, e assim, em ambos os casos, é fácil ver que $\theta_t^{-1}(X_t \cap X_{r^{-1}}) \subseteq X_{(rt)^{-1}}$

- Caso 2: $t = \alpha \in \mathbb{W}$ e $r = \beta \in \mathbb{W}$.

  Então $x = \theta_\alpha^{-1}(y)$ com o elemento $y \in X_\alpha \cap X_{\beta^{-1}}$. Logo $y = \alpha z \in X_{\beta^{-1}} \Rightarrow \beta y = \beta\alpha z \in X_\beta$. Isto implica que $z \in X_{(\beta\alpha)^{-1}}$, ou seja, $x = \theta_\alpha^{-1}(y) = \widehat{\alpha} y = z \in X_{(\beta\alpha)^{-1}}$;

- Caso 3: $t = \alpha \in \mathbb{W}$ e $r = \beta^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$.

  Seja $x \in \theta_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap X_\beta)$.

  ◦ Se $\alpha_i \neq \beta_i$ para algum i, temos um absurdo.

  ◦ Se α é começo de β, ou seja, se $\alpha_i = \beta_i$, $\forall i = 1, \ldots, |\alpha|$, temos que $\beta = \alpha z$. Logo, $x = \theta_\alpha^{-1}(y)$ para algum $y \in X_\alpha \cap X_\beta = X_\beta$, ou seja, $y = \beta\xi$, e assim, $x = \theta_\alpha^{-1}(y) = \widehat{\alpha} y = \widehat{\alpha}\beta\xi = \widehat{\alpha}\alpha z\xi = z\xi \in X_{\alpha^{-1}\alpha z} = X_z$.

  ◦ Se β é começo de α, ou seja, se $\beta_i = \alpha_i$, $\forall i = 1, \ldots, |\beta|$, temos que $\alpha = \beta z$. Logo, $x = \theta_\alpha^{-1}(y)$ para algum $y \in X_\alpha \cap X_\beta = X_\alpha$, ou seja, $y = \alpha\xi$, e assim, $x = \theta_\alpha^{-1}(y) = \widehat{\alpha} y = \widehat{\alpha}\alpha\xi = \xi \in X_{(\beta z)^{-1}\beta} = X_{z^{-1}\beta^{-1}\beta} = X_{z^{-1}}$. Logo segue a continência.

- Caso 4: $t = \alpha^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$ e $r = \beta \in \mathbb{W}$.

  Queremos mostrar que $\theta_\alpha(X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}}) \subseteq X_{(\beta\alpha^{-1})^{-1}} = X_{\alpha\beta^{-1}}$. Seja $x \in \theta_\alpha(X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}})$. Então $x = \theta_\alpha(y)$ para algum $y \in X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}}$, ou seja, $x = \alpha y$ com $y \in X_{\beta^{-1}}$, ou seja, $x \in X_{\alpha\beta^{-1}}$.

- Caso 5: $t = \alpha^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$ e $r = \beta^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$.

  Então $x = \theta_{\alpha^{-1}}^{-1}(y) = \theta_\alpha(y)$ com $y \in X_{\alpha^{-1}} \cap X_{(\beta^{-1})^{-1}} = X_{\alpha^{-1}} \cap X_\beta$. Logo $x = \alpha y$, $y \in X_\beta$ e $y \in X_{\alpha^{-1}} \Rightarrow y = \beta\xi \in X_{\alpha^{-1}}$. Daí, $x = \alpha y = \alpha\beta\xi \in X_{\alpha\beta} = X_{(\beta^{-1}\alpha^{-1})^{-1}}$;

- Caso 6: $t = \alpha\beta^{-1} \in R_A$, $r = \gamma \in \mathbb{W}$.

  Então $x = \theta_{\alpha\beta^{-1}}^{-1}(y)$ com $y \in X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\gamma^{-1}}$, ou seja, $\gamma y \in X$, $y \in X_\alpha$ e $\beta\widehat{\alpha} y \in X$, isto significa que $\gamma y = \gamma\alpha z \in X$ e $\beta z \in X$, com $z \in X_{(\gamma\alpha)^{-1}}$. Daí,
  $x = \theta_{\alpha\beta^{-1}}^{-1}(y) = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y) = \beta\widehat{\alpha} y = \beta z \in X_{\beta(\gamma\alpha)^{-1}} = X_{(\gamma\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{(rt)^{-1}}$.

- Caso 7: $t = \alpha\beta^{-1} \in R_A$ e $r = \gamma^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$.

Queremos mostrar que $\theta^{-1}_{\alpha\beta^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{(\gamma^{-1})^{-1}}) \subseteq X_{(\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1})^{-1}}$ ou seja, $\theta_{\beta\alpha^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\gamma}) \subseteq X_{(\beta\alpha^{-1}\gamma)}$. Seja $x \in \theta_{\beta\alpha^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\gamma})$.

∘ Se $\alpha_i \neq \gamma_i$ para algum i, temos um absurdo.

∘ Se α é começo de γ, ou seja, se $\alpha_i = \gamma_i$, $\forall i = 1, \ldots, |\alpha|$, temos que $\gamma = \alpha z$. Logo, $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ para algum $y \in X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\gamma} = X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\alpha z}$, ou seja, $y = \alpha z\xi$ e $\beta z\xi \in X$, e assim, $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y) = \beta\widehat{\alpha}y = \beta\widehat{\alpha}\alpha z\xi = \beta z\xi \in X_{\beta\alpha^{-1}\alpha z} = X_{\beta z}$.

∘ Se γ é começo de α, ou seja, se $\gamma_i = \alpha_i$, $\forall i = 1, \ldots, |\gamma|$, temos que $\alpha = \gamma z$. Logo, $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ para algum $y \in X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\gamma} = X_{\gamma z\beta^{-1}}$, ou seja, $y = \gamma z\xi$ e $\beta\widehat{\gamma z}y \in X$, e assim, $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y) = \beta\widehat{\alpha}y = \beta\widehat{\alpha}\gamma z\xi = \beta\widehat{\gamma z}\gamma z\xi = \beta\xi \in X_{\beta\alpha^{-1}\gamma} = X_{\beta z^{-1}\gamma^{1}\gamma} = X_{\beta z^{-1}}$. Logo segue a continência.

- Caso 8: $t = \gamma \in \mathbb{W}$ e $r = \alpha\beta^{-1} \in R_A$.
  Então $x = \theta_{\gamma^{-1}}(y)$ com $y \in X_{\gamma} \cap X_{\alpha\beta^{-1}} \Rightarrow y \in X_{\gamma}$, $y \in X_{\beta}$ e $\alpha\widehat{\beta}y \in X$.

  ∘ Se $\gamma_i \neq \beta_i$ para algum i, temos um absurdo.

  ∘ Se β é começo de γ, ou seja, se $\gamma_i = \beta_i$, $\forall i = 1, \ldots, |\beta|$, temos que $\gamma = \beta z$. Logo, $y = \gamma\xi = \beta z\xi \in X_{\beta\alpha^{-1}}$, ou seja, $\alpha\widehat{\beta}\beta z\xi = \alpha z\xi \in X \Rightarrow \xi \in X_{(\alpha z)^{-1}}$. Assim, $x = \theta^{-1}_{\gamma}(y) = \widehat{\gamma}y = \widehat{\beta z}\beta z\xi = \xi \in X_{(\alpha z)^{-1}} = X_{(\alpha\beta^{-1}\beta z)^{-1}} = X_{((\alpha\beta^{-1})\gamma)^{-1}}$

  ∘ Se γ é começo de β, ou seja, se $\gamma_i = \beta_i$, $\forall i = 1, \ldots, |\gamma|$, temos que $\beta = \gamma z$. Logo, $y = \beta\xi \in X_{\beta\alpha^{-1}}$, ou seja, $\alpha\widehat{\beta}\beta\xi \in X \Rightarrow \xi \in X_{\alpha^{-1}}$. Daí, $x = \theta^{-1}_{\gamma}(y) = \widehat{\gamma}y = \widehat{\gamma}\gamma z\xi = z\xi \in X_{z\alpha^{-1}} = X_{(\alpha z^{-1})^{-1}} = X_{(\alpha(\gamma z)^{-1}\gamma)^{-1}} = X_{(\alpha\beta^{-1}\gamma)^{-1}}$;

- Caso 9: $t = \gamma^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$ e $r = \alpha\beta^{-1} \in R_A$.
  Então $x = \theta^{-1}_{\gamma^{-1}}(y) = \theta_{\gamma}(y)$ e $y \in X_{\gamma^{-1}} \cap X_{(\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\alpha^{-1}}$. Logo $y \in X_{\gamma^{-1}}$, $y \in X_{\beta}$ e $\alpha\widehat{\beta}y \in X$. Assim, $x = \theta_{\gamma}(y) = \gamma y \in X_{\alpha\beta}$ e $\alpha\widehat{\gamma\beta}y \in X$. Mas por outro lado,

$$\begin{aligned} X_{((\alpha\beta^{-1})\gamma^{-1})^{-1}} &= X_{\gamma\beta\alpha^{-1}} \\ &= \{\xi \in X : \xi \in X_{\gamma\beta} \text{ e } \alpha\widehat{\gamma\beta}\xi \in X\} \end{aligned}$$

  Logo, segue a continência.

- Caso 10: $t = \alpha\beta^{-1} \in R_A$ e $r = \gamma\delta^{-1} \in R_A$.
  Queremos mostrar que $\theta_{\beta\alpha^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\delta\gamma^{-1}}) \subseteq X_{\beta\alpha^{-1}\delta\gamma^{-1}}$.
  ◦ Se $\alpha_i \neq \delta_i$, para algum i, temos um absurdo.
  ◦ Se α é começo de δ, temos que $\delta = \alpha z$. Daí, $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ para algum $y \in X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\alpha z\gamma^{-1}}$, ou seja, $y = \alpha z\xi$, $\beta z\xi \in X$ e $\gamma\xi \in X$, assim $x = \beta\widehat{\alpha}y = \beta\widehat{\alpha}\alpha z\xi = \beta z\xi \in X_{\beta\alpha^{-1}\alpha z\gamma^{-1}} = X_{\beta z\gamma^{-1}}$.
  ◦ Se δ é começo de α, temos que $\alpha = \delta z$. Daí, $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ para algum $y \in X_{\delta z\beta^{-1}} \cap X_{\delta\gamma^{-1}}$, ou seja, $y = \delta z\xi$, $\beta\xi \in X$ e $\gamma z\xi \in X$, assim $x = \beta\widehat{\alpha}y = \beta\widehat{\delta z}\delta z\xi = \beta\xi \in X_{\beta(\delta z)^{-1}\delta\gamma^{-1}} = X_{\beta z^{-1}\gamma^{-1}} = X_{\beta(\gamma z)^{-1}}$.
- Caso 11: Se t ou r não são da forma como nos 10 casos anteriores, X_t ou X_r será vazio, e segue a continência trivialmente.

(iii) Temos de mostrar que se $x \in \theta_t^{-1}(X_t \cap X_{r^{-1}})$ é arbitrário, então $\theta_r \circ \theta_t(x) = \theta_{rt}(x)$.

- Caso 1: $t = e$ ou $r = e$ a igualdade é óbvia.
- Caso 2: $t = \alpha \in \mathbb{W}$ e $r = \beta \in \mathbb{W}$.
  Então, se $x = \theta_\alpha^{-1}(y)$ com $y \in X_\alpha \cap X_{\beta^{-1}}$, temos que $y = \alpha z$ e $\beta y = \beta\alpha z \in X$. Daí, $\theta_\beta \circ \theta_\alpha(x) = \theta_\beta(\alpha x) = \beta\alpha x \in X$. Por outro lado, $x \in \theta_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap X_{\beta^{-1}}) \subseteq X_{\alpha^{-1}} \cap X_{(\beta\alpha)^{-1}}$, logo $\theta_{\beta\alpha}(x) = \beta\alpha x \in X$. E assim, $\theta_\beta \circ \theta_\alpha(x) = \theta_{\beta\alpha}(x)$, $\forall x \in \theta_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap X_{\beta^{-1}})$;
- Caso 3: $t = \alpha \in \mathbb{W}$ e $r = \beta^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$.
  Então, $x = \theta_\alpha^{-1}(y)$ com $y \in X_\alpha \cap X_\beta$, daí:
  • Se $\alpha_i \neq \beta_i$ para algum $i = 1, \ldots, \min\{|\alpha|, |\beta|\}$, temos que $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$.
  • Se α é começo de β, ou seja, $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, |\alpha|$, temos que $x \in \theta_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap X_\beta) = \theta_\alpha^{-1}(X_\beta) = \theta_\alpha^{-1}(X_{\alpha z})$, em que $\beta = \alpha z$. Daí, $x = \theta_\alpha^{-1}(y)$ com $y \in X_{\alpha z}$, logo, $y = \alpha z\xi \in X$. Assim, $\theta_{\beta^{-1}} \circ \theta_\alpha(x) = \theta_{\beta^{-1}}(\alpha x) = \theta_{\beta^{-1}}(\alpha\theta_{\alpha^{-1}}(y)) = \theta_{(\alpha z)^{-1}}(\alpha z\xi) = \xi \in X$. Por outro lado, claro que $x \in \theta_{\alpha^{-1}}(X_{\alpha z}) \subseteq X_{(\beta^{-1}\alpha)^{-1}} = X_{\alpha^{-1}\beta}$. Daí $\theta_{\beta^{-1}\alpha}(x) = \theta_{(\alpha z)^{-1}\alpha}(x) = \theta_{z^{-1}\alpha^{-1}\alpha}(x) = \theta_{z^{-1}}(x) = \widehat{z}x = \widehat{z}\theta_\alpha^{-1}(y) = \widehat{z}\widehat{\alpha}\alpha z\xi = \xi \in X$. Logo segue a igualdade.
  • Se β é começo de α, ou seja, $\alpha = \beta z$, então, $x \in \theta_\alpha^{-1}(X_\alpha \cap X_\beta) = \theta_\alpha^{-1}(X_\alpha) = X_{\alpha^{-1}}$, pois θ_α^{-1} é

bijetora. Daí, $x = \theta_\alpha^{-1}(y)$ com $y \in X_\alpha$, ou seja, $y = \alpha\xi = \beta z\xi \in X$. Logo, $\theta_{\beta^{-1}} \circ \theta_\alpha(x) = \theta_{\beta^{-1}}(\alpha x) = \theta_{\beta^{-1}}(\alpha x) = \theta_{\beta^{-1}}(\beta z x) = zx \in X$. Por outro lado, $\theta_\alpha^{-1}(X_\alpha) = X_{\alpha^{-1}} \subseteq X_{(\beta^{-1}\alpha)^{-1}} = X_{\alpha^{-1}\beta} = X_{(\beta z)^{-1}\beta} = X_{z^{-1}}$. Daí, $\theta_{\beta^{-1}\alpha}(x) = \theta_{\beta^{-1}\beta z}(x) = \theta_z(x) = zx \in X$ e segue a igualdade.

- Caso 4: $t = \alpha^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$ e $r = \beta \in \mathbb{W}$.

  Então $x \in \theta_{\alpha^{-1}}^{-1}(X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}}) = \theta_\alpha(X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}})$, e $x = \theta_\alpha(y) = \alpha y$ com $y \in X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}}$. Com isso, $\theta_\beta \circ \theta_{\alpha^{-1}}(x) = \theta_\beta(\theta_{\alpha^{-1}}(\alpha y)) = \theta_\beta(y) = \beta y$. Por outro lado, claro que $\theta_\alpha(X_{\alpha^{-1}} \cap X_{\beta^{-1}}) \subseteq X_{(\beta\alpha^{-1})^{-1}} = X_{\alpha\beta^{-1}}$. Daí, $\theta_{\beta\alpha^{-1}}(x) = \beta\widehat{\alpha}x = \beta\widehat{\alpha}\alpha y = \beta y$.

- Caso 5: $t = \alpha^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$ e $r = \beta^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$.

  Então $x \in \theta_{\alpha^{-1}}^{-1}(X_{\alpha^{-1}} \cap X_{(\beta^{-1})^{-1}}) = \theta_\alpha(X_{\alpha^{-1}} \cap X_\beta)$, e $x = \theta_\alpha(y)$ com $y \in X_{\alpha^{-1}} \cap X_\beta$. Logo, $x = \theta_\alpha(y) = \alpha y = \alpha\beta\xi \in X$ para algum $\xi \in X$. Assim, $\theta_{\beta^{-1}} \circ \theta_{\alpha^{-1}}(x) = \theta_{\beta^{-1}}(\theta_{\alpha^{-1}}(\alpha\beta\xi)) = \theta_{\beta^{-1}}(\beta\xi) = \xi \in X$. Por outro lado, claro que $x \in \theta_{\alpha^{-1}}^{-1}(X_{\alpha^{-1}} \cap X_\beta) \subseteq X_{(\beta^{-1}\alpha^{-1})^{-1}} = X_{\alpha\beta}$. Daí, $\theta_{\beta^{-1}\alpha^{-1}}(x) = \theta_{(\alpha\beta)^{-1}}(x) = \theta_{(\alpha\beta)^{-1}}(\alpha\beta\xi) = \xi$.

- Caso 6: $t = \alpha\beta^{-1} \in R_A$ e $r = \gamma \in \mathbb{W}$.

  Então $x \in \theta_{\alpha\beta^{-1}}^{-1}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\gamma^{-1}})$, e $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ com $y \in X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\gamma^{-1}}$. Daí, tem-se que $\theta_\gamma \circ \theta_{\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_\gamma(\alpha\widehat{\beta}\theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)) = \theta_\gamma(\alpha\widehat{\beta}\beta\widehat{\alpha}y) = \gamma y \in X$. Por outro lado, $x \in X_{(\gamma\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{\beta(\gamma\alpha)^{-1}}$. Assim, $\theta_{\gamma\alpha\beta^{-1}}(x) = \gamma\alpha\widehat{\beta}\theta_{\beta\alpha}^{-1}(y) = \gamma\alpha\widehat{\beta}\beta\widehat{\alpha}y = \gamma y$.

- Caso 7: $t = \alpha\beta^{-1} \in R_A$ e $r = \gamma^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$.

  Então $x \in \theta_{\alpha\beta^{-1}}^{-1}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_\gamma) = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_\gamma)$.

  - Se $\alpha_i \neq \gamma_i$ para algum $i = 1, \ldots, \min\{|\alpha|, |\gamma|\}$, temos que $X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_\gamma = \emptyset$.

  - Se α é começo de γ, então $\gamma = \alpha z$. Daí, $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ com $y \in X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_\gamma$, ou seja, $x = \beta\widehat{\alpha}y = \beta\widehat{\alpha}\gamma\xi = \beta\widehat{\alpha}\alpha z\xi = \beta z\xi \in X$. Assim, $\theta_{\gamma^{-1}} \circ \theta_{\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_{\gamma^{-1}}(\alpha\widehat{\beta}\beta z\xi) = \theta_{(\alpha z)^{-1}}(\alpha z\xi) = \xi \in X$. Por outro lado, note que $x \in \theta_{\alpha\beta^{-1}}^{-1}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_\gamma) \subseteq X_{(\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{((\alpha z)^{-1}\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{(z^{-1}\beta^{-1})^{-1}} = X_{\beta z}$. Então, temos que $\theta_{\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_{z^{-1}\beta^{-1}}(x) = \theta_{(\beta z)^{-1}}(x) = \widehat{\beta z}\beta z\xi = \xi \in X$.

• Se γ é começo de α, então $\alpha = \gamma z$. Com isso, $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ com $y \in X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_\gamma = X_{\alpha\beta^{-1}}$, ou seja, $x = \beta\widehat{\alpha}y = \beta\widehat{\alpha}\alpha y = \beta y \in X$. Daí, , $\theta_{\gamma^{-1}} \circ \theta_{\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_{\gamma^{-1}}(\alpha\widehat{\beta}x) = \theta_{\gamma^{-1}}(\alpha\widehat{\beta}\beta y) = \theta_{\gamma^{-1}}(\gamma z y) = zy \in X$. Por outro lado, $x \in \theta_{\beta\alpha^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_\gamma) \subseteq X_{(\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{(\gamma^{-1}\gamma z\beta^{-1})^{-1}} = X_{(z\beta^{-1})^{-1}} = X_{\beta z^{-1}}$. Assim, $\theta_{\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_{\beta z^{-1}}(x) = z\widehat{\beta}\beta y = zy \in X$.

- Caso 8: $t = \gamma \in \mathbb{W}$ e $r = \alpha\beta^{-1} \in R_A$.

  Então $x \in \theta_\gamma^{-1}(X_\gamma \cap X_{(\alpha\beta^{-1})^{-1}}) = \theta_\gamma^{-1}(X_\gamma \cap X_{\beta\alpha^{-1}})$.

  • Se $\beta_i \neq \gamma_i$ para algum $i = 1, \ldots, \min\{|\beta|, |\gamma|\}$, temos que $X_\gamma \cap X_{\beta\alpha^{-1}} = \emptyset$.

  • Se β é começo de γ, então $\gamma = \beta z$. Com isso, $x \in \theta_{\gamma^{-1}}(X_\gamma \cap X_{\beta\alpha^{-1}}) \Rightarrow x = \theta_\gamma^{-1}(y) = \widehat{\gamma}y = \widehat{\gamma}\gamma\xi = \xi \in X_{\gamma^{-1}}$, pois $y \in X_\gamma$. Daí, $\theta_{\alpha\beta^{-1}} \circ \theta_\gamma(x) = \theta_{\alpha\beta^{-1}}(\gamma x) = \alpha\widehat{\beta}\gamma x = \alpha\widehat{\beta}\beta z x = \alpha z x \in X$. Por outro lado, temos que $x \in \theta_\gamma^{-1}(X_\gamma \cap X_{\beta\alpha^{-1}}) \subseteq X_{(\alpha\beta^{-1}\gamma)^{-1}} = X_{(\alpha\beta^{-1}\beta z)^{-1}} = X_{(\alpha z)^{-1}}$. Daí, $\theta_{\alpha\beta^{-1}\gamma}(x) = \theta\alpha z(x) = \alpha z x \in X$.

  • Se γ é começo de β, então $\beta = \gamma z$. Com isso, $x = \theta_\gamma^{-1}(y)$ com $y \in X_\gamma \cap X_{\beta\alpha^{-1}} = X_{\beta\alpha^{-1}}$. Daí $x = \widehat{\gamma}y = \widehat{\gamma}\beta\xi = \widehat{\gamma}\gamma z\xi = z\xi \in X$. Então, $\theta_{\alpha\beta^{-1}} \circ \theta_\gamma(x) = \theta_{\alpha\beta^{-1}}(\gamma x) = \alpha\widehat{\beta}\gamma x = \alpha\widehat{\beta}\gamma z\xi = \alpha\widehat{\gamma z}\gamma z\xi = \alpha\xi \in X$. Por outro lado, $x \in \theta_\gamma^{-1}(X_\gamma \cap X_{\beta\alpha^{-1}}) \subseteq X_{(\alpha\beta^{-1}\gamma)^{-1}} = X_{(\alpha z^{-1}\gamma^{-1}\gamma)^{-1}} = X_{z\alpha^{-1}}$. Daí, $\theta_{\alpha\beta^{-1}\gamma}(x) = \theta_{\alpha z^{-1}}(x) = \alpha\widehat{z}x = \alpha\widehat{z}z\xi = \alpha\xi \in X$.

- Caso 9: $t = \gamma^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$ e $r = \alpha\beta^{-1} \in R_A$.

  Então $x \in \theta_{\gamma^{-1}}^{-1}(X_{\gamma^{-1}} \cap X_{(\alpha\beta^{-1})^{-1}}) = \theta_\gamma(X_{\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\alpha^{-1}})$. Daí, $x = \theta_\gamma(y) = \gamma y$ para algum $y \in X_{\gamma^{-1}} \cap X_{(\alpha\beta^{-1})^{-1}}$. Logo, $\theta_{\alpha\beta^{-1}} \circ \theta_{\gamma^{-1}}(x) = \theta_{\alpha\beta^{-1}}(\widehat{\gamma}x) = \theta_{\alpha\beta^{-1}}(\widehat{\gamma}\gamma y) = \alpha\widehat{\beta}y \in X$. Por outro lado, $x \in \theta_\gamma(X_{\gamma^{-1}} \cap X_{\beta\alpha^{-1}}) \subseteq X_{(\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1})^{-1}} = X_{(\alpha(\gamma\beta)^{-1})^{-1}} = X_{\gamma\beta\alpha^{-1}}$. Com isso, $\theta_{\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}}(x) = \theta_{\alpha(\gamma\beta)^{-1}}(x) = \alpha\widehat{\gamma\beta}x = \alpha\widehat{\gamma\beta}\gamma y =$
  $\alpha\widehat{\beta}\widehat{\gamma}\gamma y = \alpha\widehat{\beta}y \in X$. Logo, segue a igualdade.

- Caso 10: $t = \alpha\beta^{-1} \in R_A$ e $r = \gamma\delta^{-1} \in R_A$.

  Então $x \in \theta_{\alpha\beta^{-1}}^{-1}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{(\gamma\delta^{-1})^{-1}}) = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\delta\gamma^{-1}})$.

  • Se $\alpha_i \neq \delta_i$ para algum $i = 1, \ldots, \min\{|\alpha|, |\delta|\}$, temos que $X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\delta\gamma^{-1}} = \emptyset$.

- Se α é começo de δ, então $\delta = \alpha z$. Daí $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ para algum $y \in X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{(\alpha z)\gamma^{-1}}$. Logo, $\theta_{\gamma\delta^{-1}} \circ \theta_{\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_{\gamma\delta^{-1}}(\alpha\widehat{\beta}\beta\widehat{\alpha}y) = \gamma\widehat{\delta}y \in X$. Por outro lado, $x \in \theta_{\beta\alpha^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\delta\gamma^{-1}}) \subseteq X_{(\gamma\delta^{-1}\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{(\gamma(\alpha z)^{-1}\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{(\gamma z^{-1}\beta^{-1})^{-1}} = X_{\beta z\gamma^{-1}}$. Logo, $\theta_{\gamma\delta^{-1}\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_{\gamma(\beta z)^{-1}}(x) = \gamma\widehat{\beta z}x = \gamma\widehat{\beta z}\beta\widehat{\alpha}y = \gamma\widehat{z}\widehat{\alpha}y = \gamma\widehat{\alpha z}y = \gamma\widehat{\delta}y \in X$.
- Se δ é começo de α, então $\alpha = \delta z$. Então $x = \theta_{\beta\alpha^{-1}}(y)$ para algum $y \in X_{\delta z\beta^{-1}} \cap X_{\delta\gamma^{-1}}$. Daí, $\theta_{\gamma\delta^{-1}} \circ \theta_{\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_{\gamma\delta^{-1}}(\delta z\widehat{\beta}\beta\widehat{\alpha}y) = \gamma\widehat{\delta}\delta z\widehat{\alpha}y = \gamma z\widehat{\alpha}y \in X$. Por outro lado, $x \in \theta_{\beta\alpha^{-1}}(X_{\alpha\beta^{-1}} \cap X_{\delta\gamma^{-1}}) \subseteq X_{(\gamma\delta^{-1}\alpha\beta^{-1})^{-1}} = X_{(\gamma\delta^{-1}(\delta z)\beta^{-1})^{-1}} = X_{(\gamma z\beta^{-1})^{-1}} = X_{\beta(\gamma z)^{-1}}$. Logo, $\theta_{\gamma\delta^{-1}\alpha\beta^{-1}}(x) = \theta_{\gamma z\beta^{-1}}(x) = \gamma z\widehat{\beta}x = \gamma z\widehat{\beta}\beta\widehat{\alpha}y = \gamma z\widehat{\alpha}y \in X$.

- Caso 11: Se t ou r não são como nos casos anteriores, X_t ou X_r será vazio e a igualdade será sempre imediata.

Logo o item (iii) é válido.

Portanto, θ é ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre X e com isso, γ é ação parcial. ■

Diante do Teorema 49, podemos considerar o produto cruzado parcial $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$.

7 O ISOMORFISMO ENTRE $\mathcal{O}_A$ E $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$

Chegamos ao capítulo final do trabalho. Por um lado já construímos a C*-álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$. Por outro, já construímos o produto cruzado parcial $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$. Estas duas estruturas formam duas C*-álgebras e nosso objetivo final é mostrar que tais estruturas são isomorfas. Para conseguir este feito vamos nos basear nas seções 2 e 3 do artigo (GONÇALVES; ROYER, 2014b) e na seção 2 do artigo (GONÇALVES; ROYER, 2014a). Começamos construindo um homomorfismo de $\mathcal{O}_A$ para $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$.

Definição 50. *Defina:*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{G} &\longrightarrow C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F} \\ S_i &\longmapsto \ 1_i\delta_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Em que $1_i = 1_{X_i}$ = unidade de $C(X_i)$.

No fundo, $1_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in X_i; \\ 0, \text{ se } x \notin X_i. \end{cases}$. Ou seja, 1_i é a função característica em X_i.

Vamos mostrar que φ preserva as relações de $\mathcal{O}_A$. Para isso, basta mostrar que preserva nos geradores. No fim, φ é representação de $\mathcal{G}$, o que nos permite usar o Teorema 21 na página 26.

Proposição 51. *A função φ preserva as relações de $\mathcal{O}_A$.*

Demonstração.

1. Isometria parcial:

$$\begin{aligned} \varphi(S_i)\varphi(S_i)^*\varphi(S_i) &= 1_i\delta_i(1_i\delta_i)^*1_i\delta_i = 1_i\delta_i\gamma_{i^{-1}}(1_i^*)\delta_{i^{-1}}1_i\delta_i \\ &= \gamma_i(\gamma_{i^{-1}}(1_i)\gamma_{i^{-1}}(1_i^*))\delta_e 1_i\delta_i \overset{\gamma_{i^{-1}} \text{ é homo.}}{=} \\ &= \gamma_i(\gamma_{i^{-1}}(1_i1_i^*))\delta_e 1_i\delta_i = 1_i1_i^*\delta_e 1_i\delta_i \\ &= \gamma_e(\gamma_{e^{-1}}(1_i1_i^*)1_i)\delta_i \overset{\gamma_e = Id_X}{=} \\ &= 1_i1_i^*1_i\delta_i = 1_i\delta_i = \varphi(S_i). \end{aligned}$$

Note que $1_i1_i^* = 1_i\overline{1_i} = 1_i^2 = 1_i$.

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\varphi(S_i)\varphi(S_i)^* &= \sum_{i=1}^{n} 1_i\delta_i\gamma_{i^{-1}}(1_i^*)\delta_{i^{-1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(\gamma_{i^{-1}}(1_i)\gamma_{i^{-1}}(1_i^*))\delta_e \\
&= \sum_{i=1}^{n}\gamma_i(\gamma_{i^{-1}}(1_i1_i^*))\delta_e = \sum_{i=1}^{n}1_i1_i^*\delta_e \\
&= \sum_{i=1}^{n}1_i\delta_e = 1_X\delta_e = 1_{C(X)\rtimes_\gamma\mathbb{F}}
\end{aligned}$$

3. Sejam $i, j \in N$ tais que $i \neq j$. Então

$$\begin{aligned}
\varphi(S_i)^*\varphi(S_j) &= (1_i\delta_i)^*(1_j\delta_j) = \gamma_{i^{-1}}(1_i^*)\delta_{i^{-1}}(1_j\delta_j) \\
&= \gamma_{i^{-1}}(\gamma_i(\gamma_{i^{-1}}(1_i^*))1_j)\delta_{i^{-1}j} \\
&= \gamma_{i^{-1}}(1_i^*1_j)\delta_{i^{-1}j} = \gamma_{i^{-1}}(0)\delta_{i^{-1}j} \\
&= 0\delta_{i^{-1}j} = 0\delta_e = 0_{C(X)\rtimes_\gamma\mathbb{F}}
\end{aligned}$$

Note que 0 aqui é a função nula.

4.

$$\begin{aligned}
\varphi(S_i)^*\varphi(S_i) &= (1_i\delta_i)^*(1_i\delta_i) = \gamma_{i^{-1}}(1_i^*)\delta_{i^{-1}}(1_i\delta_i) \\
&= \gamma_{i^{-1}}(\gamma_i(\gamma_{i^{-1}}(1_i^*))1_i)\delta_{i^{-1}i} \\
&= \gamma_{i^{-1}}(1_i^*1_i)\delta_e = 1_{i^{-1}}\delta_e.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi(S_j)\varphi(S_j)^* \overset{2.}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}1_j\delta_e.$$

Então, basta mostrar que $\forall x \in X$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}1_j(x) = 1_{i^{-1}}(x)$. Por um lado,

$$1_{i^{-1}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X_{i^{-1}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } ix \in X; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1, & \text{se } a_{ix_1} = 1; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \text{ Por outro lado,}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} 1_j(x) = a_{i1} 1_1(x) + \ldots + a_{in} 1_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_{ix_1} = 1; \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Logo, como $x \in X$ é arbitrário, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} 1_j = 1_{i^{-1}}$, ou seja,

$$\varphi(S_i)^* \varphi(S_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi(S_j) \varphi(S_j)^*.$$

■

Sendo assim, φ é representação de $\mathcal{G}$. Logo, pela propriedade universal de $\mathcal{O}_A$, existe único $\psi : \mathcal{O}_A \longrightarrow C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$ $*$-homomorfismo, tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & & C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F} \\
& \mathcal{O}_A \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.
Note que $\psi \circ i = \varphi \Rightarrow \psi(i(S_i)) = \varphi(S_i) = 1_i \delta_i$.

Agora, vamos construir um homomorfismo de $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$ para $\mathcal{O}_A$. Para tal feito, teremos um pouco mais de trabalho.

Definição 52. *Defina $\pi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{O}_A$ da seguinte maneira: Se $j \in N = \{1, \ldots, n\}$, então $\pi(j) = S_j$ e $\pi(j^{-1}) = S_j^*$. Para $r \in \mathbb{F}$, na forma reduzida, $r = r_1 \ldots r_m$, com $r_k \in N \cup N^{-1}$, $\forall k = 1, \ldots, m$. Defina:*

$$\pi(r) = \pi(r_1) \ldots \pi(r_m) \quad e \quad \pi(e) = 1_{\mathcal{O}_A}.$$

Sendo assim, note que $\pi(r_k) = \begin{cases} S_{r_k}, & \text{se } r_k \in N; \\ S_{r_k}^*, & \text{se } r_k \in N^{-1}. \end{cases}$

Lema 53. *Seja $r \in \mathbb{F}$ tal que $|r| = 1$. Então $\pi(r^{-1}) = \pi(r)^*$.*

Demonstração. De fato, $\pi(r^{-1}) = \begin{cases} S_{r^{-1}}, & \text{se } r^{-1} \in N; \\ S_r^*, & \text{se } r^{-1} \in N^{-1}. \end{cases}$

$$= \begin{cases} S_r, & \text{se } r \in N^{-1}; \\ S_r^*, & \text{se } r \in N. \end{cases}$$

Por outro lado, $\pi(r)^* = \left(\begin{cases} S_r, & \text{se } r \in N; \\ S_r^*, & \text{se } r \in N^{-1} \end{cases} \right)^*$
$= \begin{cases} S_r^*, & \text{se } r \in N; \\ S_r, & \text{se } r \in N^{-1}. \end{cases}$
Portanto, segue a igualdade. ■

Proposição 54. *A aplicação π é uma representação parcial, isto é, $\pi(e) = 1_{\mathcal{O}_A}$, $\pi(t^{-1}) = \pi(t)^*$ e $\pi(t)^*\pi(t)\pi(s) = \pi(t)^*\pi(ts)$, $\forall t, s \in \mathbb{F}$*

Demonstração. (i) Óbvio, pois definimos que $\pi(e) = 1_{\mathcal{O}_A}$.

(ii) Pelo lema anterior, $\pi(t^{-1}) = \pi(t)^*$, $\forall t \in \mathbb{F}$, com $|t| = 1$, assim, se $t \in \mathbb{F}$, $t = t_1 \ldots, t_m$, $m > 1$, então $t^{-1} = t_m^{-1} \ldots t_1^{-1}$, e assim, $\pi(t^{-1}) = \pi(t_m^{-1} \ldots t_1^{-1}) = \pi(t_m^{-1}) \ldots \pi(t_1^{-1}) = \pi(t_m)^* \ldots \pi(t_1)^* = (\pi(t_1) \ldots \pi(t_n))^* = \pi(t)^*$.

(iii) <u>1º caso:</u> ts está na forma reduzida, ou seja, $t_{|t|} \neq s_1^{-1}$. Então, $\pi(t)\pi(s)\pi(s^{-1}) = \pi(t_1) \ldots \pi(t_{|t|})\pi(s_1) \ldots \pi(s_{|s|})\pi(s^{-1}) = \pi(ts)\pi(s^{-1})$.

<u>2º caso:</u> $t = ab \in \mathbb{F}$, $s = b^{-1}c \in \mathbb{F}$.

Podemos supor que $a_{|a|} \neq c_1^{-1}$, pois se for igual, "aumentamos o tamanho"de b. Daí, $ts = ac$ e com isso,

$\bullet \pi(ts)\pi(s^{-1}) = \pi(ac)\pi(c^{-1}b) \overset{1^{\text{o}} \text{ caso}}{=} \pi(a)\pi(c)\pi(c)^*\pi(b) = \star$.
Por outro lado,
$\bullet \pi(t)\pi(s)\pi(s^{-1}) = \pi(a)\pi(b)\pi(b)^*\pi(c)\pi(c)^*\pi(b) = \star\star$.
Agora, note que se $b = e$ ou $c = e$, teríamos trivialmente que $\star = \star\star$. Também, se $b \notin R_A$ ou $c \notin R_A$, temos que $\pi(b) = 0$ ou $\pi(c) = 0$. Assim podemos supor que $b = \alpha\beta^{-1}$ e $c = \gamma\delta^{-1}$, com α ou β ou γ ou δ podendo ser e, então, pela relação *iv*) de $\mathcal{O}_A$, temos:

$$\pi(b)\pi(b)^* = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_\alpha^* = \sum S_x S_x^*.$$

$$\pi(c)\pi(c)^* = S_\gamma S_\delta^* S_\delta S_\gamma^* = \sum S_y S_y^*.$$

Mas pela Proposição 26 o elemento $S_x S_x^*$ comuta com $S_y S_y^*$ para todo $x, y \in \mathbb{W}$. Com isso, $\sum^{finita} S_x S_x^*$ comuta com $\sum^{finita} S_y S_y^*$ e portanto, $\pi(b)\pi(b)^*$ comuta com $\pi(c)\pi(c)^*$, de modo que $\star\star = \pi(a)\pi(c)\pi(c)^*\pi(b)\pi(b)^*\pi(b) = \pi(a)\pi(c)\pi(c)^*\pi(b) = \star$, já que $\pi(b)$ é isometria parcial.

Portanto, π é representação parcial. ■

Teorema 55. *Existe um C^*-homomorfismo $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathcal{O}_A$ tal que*

$$\begin{cases} \varphi(1_\alpha) = S_\alpha S_\alpha^*, \ \forall \alpha \in \mathbb{W}; \\ \varphi(1_\alpha^{-1}) = S_\alpha^* S_\alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{W}; \\ \varphi(1_{ab^{-1}}) = S_a S_b^* (S_a S_b^*)^* = S_a S_b^* S_b S_a^*, \ ab^{-1} \in R_A. \end{cases}$$

Demonstração. Vimos na página 36 que $\mathcal{B}$ é a C*-álgebra universal gerada por $\mathbf{Q} = \{Q_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{W}}$ com as relações i) - iv):

i) Q_α são projeções, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$, isto é, $Q_\alpha^* = Q_\alpha = Q_\alpha^2$;

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q_i = 1$;

iii) $\displaystyle Q_\alpha = \sum_{j : \alpha j \in \mathbb{W}} Q_{\alpha j}$;

iv) Q_α comuta com Q_β, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{W}$.

é uma C*-álgebra comutativa tal que $\mathcal{B} \cong C(\widehat{\mathcal{B}}) \cong C(X)$ em que X é homeomorfo ao espectro de $\mathcal{B}$. Sendo assim, precisamos definir uma representação $\rho : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathcal{O}_A$ para usar a propriedade universal de C*-álgebra. Então defina $\rho : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathcal{O}_A$ por $\rho(Q_\alpha) = S_\alpha S_\alpha^*$. Pelo Corolário 27 na página 32 e pela Proposição 29 na página 35 ρ preserva as relações de $\mathbf{Q}$, assim, pela propriedade universal de C*-álgebras universais, existe único $\widetilde{\varphi} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{O}_A$ $*$-homomorfismo tal que $\widetilde{\varphi} \circ i = \rho$, ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Q} \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "i"'] & \mathcal{O}_A \\ & \mathcal{B} \arrow[u, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

comuta. Sabemos também, pelo Teorema de Gelfand, que $\exists \Gamma : \mathcal{B} \longrightarrow C(\widehat{\mathcal{B}})$, $*$-isomorfismo isométrico pois $\mathcal{B}$ é C*-álgebra comutativa. Mostramos que $\widehat{\mathcal{B}}$ e $X = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in N^{\mathbb{N}} : a_{x_i x_{i+1}} = 1\}$ são homeomorfos, então existe $\sigma : C(X) \longrightarrow C(\widehat{B})$ isomorfismo. Com isso, obtemos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Q} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathcal{O}_A & & \\ & \mathcal{B} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] \arrow[rr, shift left, "\Gamma"] & & C(\widehat{\mathcal{B}}) \arrow[ll, shift left, "\Gamma^{-1}"] \arrow[r, shift left, "\sigma^{-1}"] & C(X) \arrow[l, shift left, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

Então, para o teorema, basta definir $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \Gamma^{-1} \circ \sigma$. Daí, note que $\varphi : C(X) \longrightarrow \mathcal{O}_A$ é $*$-homomorfismo, pois é composição de $*$-homomorfismos.

Note agora que se $\alpha \in \mathbb{W}$, $\varphi(1_\alpha) = \widetilde{\varphi} \circ \Gamma^{-1} \circ \sigma(1_\alpha) = \widetilde{\varphi}(Q_\alpha) = S_\alpha S_\alpha^*$, pois se $\psi \in \widehat{B}$, ou seja, ψ é um caracter, temos que $T(\psi) = \xi$ e

$$\sigma(1_\alpha)(\psi) = 1_\alpha \circ T(\psi) = 1_\alpha(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ é começo de } \xi; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

em que T é homeomorfismo de $\widehat{B}$ em X e $\sigma : C(X) \longrightarrow C(\widehat{B})$ é isomorfismo que leva $f \longmapsto f \circ T$. Por outro lado,

$$\Gamma(Q_\alpha)(\psi) = \psi(Q_\alpha) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ é começo de } T(\psi) = \xi; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $\sigma(1_\alpha) = \Gamma(Q_\alpha) \Rightarrow 1_\alpha = \sigma^{-1} \circ \Gamma(Q_\alpha)$, ou seja, $\Gamma^{-1} \circ \sigma(1_\alpha) = Q_\alpha$.

Vamos mostrar agora que $\varphi(1_\alpha^{-1}) = S_\alpha^* S_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$:

Seja $x \in X$ e $i \in N$. Então,

$$1_{i^{-1}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X_{i^{-1}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi(1_j)$$

(isto foi feito no item 4 da Proposição 51). Assim, para $i \in N$,

$$\varphi(1_{i^{-1}}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} 1_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi(1_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} S_j S_j^* = S_i^* S_i.$$

Fixe $i \in N$ e seja $k \in N$ tal que $ik \in \mathbb{W}$. Então, $1_{(ik)^{-1}} = 1_{k^{-1}} \Rightarrow \varphi(1_{(ik)^{-1}}) = \varphi(1_{k^{-1}}) = S_k^* S_k$, e note que

$$S_k^* S_i^* S_i S_k = S_k^* \sum_{m=1}^{n} a_{im} S_m S_m^* S_k = a_{ik} S_k^* S_k S_k^* S_k = 1.S_k^* S_k = S_k^* S_k,$$

logo $\varphi(1_{(ik)^{-1}}) = S_{ik}^* S_{ik}$.

Fixe $ik \in \mathbb{W}$ e considere $n \in N$ tal que $ikn \in \mathbb{W}$. Então, $1_{(ikn)^{-1}} =$

$1_{n^{-1}} \Rightarrow \varphi(1_{(ikn)^{-1}}) = \varphi(1_{n^{-1}}) = S_n^* S_n$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} S_n^* S_k^* S_i^* . S_i S_k S_n &= S_n^* S_k^* S_k S_n = S_n^* \sum_{l=1}^{n} a_{kl} S_l S_l^* S_n \\ &= S_n^* 1 S_n S_n^* S_n = S_n^* S_n \end{aligned}$$

O que implica que $\varphi(1_{(ikn)^{-1}}) = S_{ikn}^* S_{ikn}$.

Seguindo este processo, como cada $\alpha \in \mathbb{W}$ é finita, segue que $\varphi(1_\alpha) = S_\alpha^* S_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{W}$.

Falta mostrar que $\forall ab^{-1} \in R_A$, tem-se que $\varphi(1_{ab^{-1}}) = S_a S_b^* S_b S_a^*$:
Note que

$$\begin{aligned} X_{ab^{-1}} &= \{\xi \in X : \xi \text{ começa com } a \text{ e } b\widehat{a}\xi \in X\} \\ &= \{\xi \in X : \xi \text{ começa com } a \text{ e } a_{b_{|b|}\xi_{|a|+1}} = 1\} \\ &= \bigcup_{\substack{j=1 \\ a_{b_{|b|}j}=1}}^{n} X_{a_j}. \end{aligned}$$

Então,

$$\varphi(1_{ab^{-1}}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_{b_{|b|}j} 1_{aj}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{b_{|b|}j} S_{aj}^* S_{aj} = \sum_{j=1}^{n} a_{b_{|b|}j} S_a S_j S_j^* S_a^*.$$

Por outro lado, $S_a S_b^* S_b S_a^* = S_a S_{b_{|B|}}^* S_{b_{|b|}} S_a^* = S_a \sum_{j=1}^{n} a_{b_{|b|}j} S_j S_j^* S_a^* = \sum_{j=1}^{n} a_{b_{|b|}j} S_a S_j S_j^* S_a^*$. E portanto, segue o resultado.

■

Para o próximo lema, é sabido que $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^{-1} \cap \{e\} \cap R_A = \emptyset$. Diante disso, faremos para todos os casos.

Lema 56. *a) Fixe $\beta \in \mathbb{W} \cup \{e\}$. Então, para todo $t \in \mathbb{W} \cup \mathbb{W}^{-1} \cup R_A \cup \{e\}$, tem-se que $\gamma_t(1_{t^{-1}} 1_\beta) = 1_t 1_{t\beta}$.*

b) Se $\beta = b^{-1} \in \mathbb{W}^{-1}$ e $a \in \mathbb{W} \cup \{e\}$, então $\gamma_a(1_{a^{-1}} 1_\beta) = 1_a 1_{a\beta}$

Demonstração. a) Claro que se $\beta = e$, o resultado é óbvio. Supõe então que $\beta \in \mathbb{W}$.

Se $t = e$, é óbvio.

<u>Se $t=\alpha\in\mathbb{W}$</u>: Então, $\gamma_t(1_{t^{-1}}1_\beta) = \gamma_\alpha(1_{\alpha^{-1}}1_\beta)$. Seja $x\in X_\alpha$, então, pela definição de γ_α, temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_\alpha(1_{\alpha^{-1}}1_\beta)(x) &= (1_{\alpha^{-1}}.1_\beta)\circ\theta_\alpha^{-1}(x) = (1_{\alpha^{-1}}(\theta_\alpha^{-1}(x))).(1_\beta(\theta_\alpha^{-1}(x)))\\
&= 1_{\alpha^{-1}}(\widehat{\alpha}(x)).1_{\beta^{-1}}(\widehat{\alpha}(x))\\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } \widehat{\alpha}x\in X_{\alpha^{-1}} \text{ e } \widehat{\alpha}x\in X_\beta;\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } x\in X_\alpha \text{ e } x\in X_{\alpha\beta};\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}\\
&= 1_\alpha(x)1_{\alpha\beta}(x) = 1_\alpha 1_{\alpha\beta}(x)
\end{aligned}$$

<u>Se $t=\alpha^{-1}\in\mathbb{W}^{-1}$</u>: Então, $\gamma_t(1_{t^{-1}}1_\beta) = \gamma_{\alpha^{-1}}(1_\alpha 1_\beta)$. Daí, temos três casos: • Se $\alpha_i\neq\beta_i$, para algum i, então $1_\alpha 1_\beta = 0 = 1_{\alpha^{-1}}1_{\alpha^{-1}\beta}$.

• Se α é começo de β, então, $\beta=\alpha z$, e assim, $1_\alpha 1_\beta = 1_\beta$ e $\gamma_{\alpha^{-1}}(1_\beta) = \gamma_{\alpha^{-1}}(1_{\alpha z})$. Daí, se $x\in X_{\alpha^{-1}}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha^{-1}}(1_{\alpha z})(x) &= 1_{\alpha z}\circ\theta_\alpha(x) = 1_{\alpha z}(\alpha x)\\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha x\in X_{\alpha z};\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x\in X_z \text{ e } x\in X_{\alpha^{-1}};\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
1_{\alpha^{-1}}1_{\alpha^{-1}\beta}(x) = 1_{\alpha^{-1}}1_{\alpha^{-1}\alpha z}(x) &= 1_{\alpha^{-1}}(x).1_z(x)\\
&= \begin{cases} 1, & \text{se } x\in X_{\alpha^{-1}} \text{ e } x\in X_z;\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}
\end{aligned}$$

• Se β é começo de α, então $\alpha=\beta z$ e $1_\alpha 1_\beta = 1_\alpha$. Daí, $\gamma_{\alpha^{-1}}(1_\alpha) = 1_{\alpha^{-1}} = 1_{(\beta z)^{-1}}$. Por outro lado,

$$1_{\alpha^{-1}}1_{\alpha^{-1}\beta} = 1_{(\beta z)^{-1}}1_{(\beta z)^{-1}\beta} = 1_{(\beta z)^{-1}}1_{z^{-1}} = 1_{(\beta z)^{-1}}$$

<u>Se $t=ab^{-1}\in R_A$</u>: Então, $\gamma_t(1_{t^{-1}}1_\beta) = \gamma_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_\beta)$. Daí, temos que: • Se $b_i\neq\beta_i$, para algum i, então $1_{ba^{-1}}1_\beta = 0 = 1_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}\beta}$.

• Se b é começo de β, então, $\beta=bz$, e assim, $1_{ba^{-1}}1_\beta = 1_{ba^{-1}}1_{bz}$.

Logo, para $x \in X_{ab^{-1}}$, tem-se

$$\gamma_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_{bz})(x) = 1_{ba^{-1}}(\theta_{ba^{-1}}(x))1_{bz}(\theta_{ba^{-1}}(x)) = 1_{ba^{-1}}(b\widehat{a}x)1_{bz}(b\widehat{a}x)$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{se } b\widehat{a}x \in X_{ba^{-1}} \text{ e } b\widehat{a}x \in X_{bz}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X_{ab^{-1}},\ x \in X_{az} \text{ e } bz \in \mathbb{W}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, $1_t 1_{t\beta} = 1_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}bz} = 1_{ab^{-1}}1_{az}$ e claro que

$$1_{ab^{-1}}1_{az}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X_{ab^{-1}} \text{ e } x \in X_{az}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

• Se β é começo de b, então, $b = \beta z$, e assim, $1_{ba^{-1}}1_\beta = 1_{\beta z a^{-1}}1_\beta$. Logo,

$$\gamma_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_\beta) = \gamma_{a(\beta z)^{-1}}(1_{\beta z a^{-1}}1_\beta) = \gamma_{a(\beta z)^{-1}}(1_{\beta z a^{-1}}) = 1_{a(\beta z)^{-1}}.$$

Por outro lado,

$$1_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}\beta} = 1_{a(\beta z)^{-1}}1_{a(\beta z)^{-1}\beta} = 1_{a(\beta z)^{-1}}1_{az^{-1}} = 1_{a(\beta z)^{-1}}.$$

pois, $1_{a(\beta z)^{-1}}(x)1_{az^{-1}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X_{a(\beta z)^{-1}} \text{ e } x \in X_{az^{-1}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X_a \text{ e } \beta z\widehat{a}x \in X \text{ e } z\widehat{a}x \in X; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X_a \text{ e } \beta z\widehat{a}x \in X; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} = 1_{a(\beta z)^{-1}}(x)$$

b) Se $a = e$ o resultado é óbvio. Suponha que $a \in \mathbb{W}$. Então se $x \in X_a$,

$$\begin{aligned} \gamma_a(1_{a^{-1}}1_{b^{-1}})(x) &= 1_{a^{-1}}(\theta_{a^{-1}}(x))1_{b^{-1}}(\theta_{a^{-1}}(x)) \\ &= 1_{a^{-1}}(\widehat{a}x)1_{b^{-1}}(\widehat{a}x) \\ &= 1.1_{b^{-1}}(\widehat{a}x) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } \widehat{a}x \in X_{b^{-1}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} = (\circledast). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$1_a 1_{ab^{-1}}(x) = 1.1_{ab^{-1}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in X_{ab^{-1}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{se } \widehat{a}x \in X_{b^{-1}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} = (\circledast).$$

■

Proposição 57. *Considere π e φ como na Definição 52 e no Teorema 55, respectivamente. Então, (φ, π) é γ-covariante, isto é: $\forall r \in \mathbb{F}$, $g \in C(X_{r^{-1}})$ e $f \in C(X)$, temos*

(i) $\varphi(\gamma_r(g)) = \pi(r)\varphi(g)\pi(r)^*$;

(ii) $\varphi(f)\pi(r)\pi(r^{-1}) = \pi(r)\pi(r^{-1})\varphi(f)$.

Demonstração. Para provar (ii), basta notar que $\varphi(f) \in \widetilde{\varphi}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{O}_A$ e $\pi(r)\pi(r^{-1}) = S_r S_r^* = \varphi(1_r) = \widetilde{\varphi} \circ \Gamma^{-1} \circ \sigma(1_r) \in \widetilde{\varphi}(\mathcal{B})$ que é comutativo.

Agora, para provar (i), precisamos considerar $g \in C(X_{r^{-1}})$. Mas note que se r não pertencer a união $\mathbb{W} \cup \mathbb{W}^{-1} \cup R_A \cup \{e\}$ temos que $X_{r^{-1}} = \emptyset$ e assim $D_{r^{-1}} = C(X_{r^{-1}}) = \{0\}$, daí, segue a igualdade, pois $\varphi(\gamma_r(0)) = \varphi(0) = 0 = \pi(r)\varphi(0)\pi(r)^*$. Então, vamos trabalhar com $r \in \mathbb{W} \cup \mathbb{W}^{-1} \cup R_A \cup \{e\}$, ou seja, suponha que $r = ab^{-1} \in R_A$ com a e b podendo ser e, isto é, $a, b \in \mathbb{W} \cup \{e\}$.

Diante disto, pelo lema 56, temos que

$$\varphi(\gamma_r(1_{r^{-1}}1_\beta)) = \varphi(1_r 1_{r\beta}) = \varphi(1_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}\beta}).$$

Vamos mostrar que $\varphi(\gamma_r(1_{r^{-1}}1_\beta)) = \pi(r)\varphi(1_r 1_\beta)\pi(r)^* = 0$. Bem, caso $b_i \neq \beta_i$ para algum i, temos que

$$X_{ab^{-1}\beta} = \emptyset \Longrightarrow 1_{ab^{-1}\beta} = 0 \Longrightarrow 1_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}\beta} = 0$$

e segue a igualdade (i), pois neste caso,

$$1_{r^{-1}}1_\beta = 1_{ba^{-1}}1_\beta = 0 \Longrightarrow \pi(ab^{-1})\varphi(1_{ba^{-1}}1_\beta)\pi(ab^{-1}).$$

Agora, se b é começo de β, então $\beta = bz$, com isso:

$$\begin{aligned}\varphi(1_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}\beta}) &= \varphi(1_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}bz}) = \varphi(1_{ab^{-1}}1_{az}) = \varphi(1_{ab^{-1}})\varphi(1_{az}) \\ &= S_a S_b^* S_b S_a^* S_a S_z S_z^* S_a^* = S_a S_b^* S_b S_z S_z^* S_a^* = \bigstar.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\pi(r)\varphi(1_r 1_\beta)\pi(r)^* &= \pi(ab^{-1})\varphi(1_{ab^{-1}}1_{bz})\pi(ba^{-1})\\
&= \pi(ab^{-1})\varphi(1_{ab^{-1}})\varphi(1_{bz})\pi(ba^{-1})\\
&= S_aS_b^*S_aS_b^*S_bS_a^*S_bS_zS_z^*S_b^*S_bS_a^*\\
&= S_aS_b^*\underbrace{S_aS_b^*}_{\in\widetilde{\varphi}(\mathcal{B})}\underbrace{S_bS_a^*}_{\in\widetilde{\varphi}(\mathcal{B})}S_bS_zS_z^*S_a^*\\
&= S_aS_b^*S_bS_a^*S_aS_b^*S_bS_zS_z^*S_a^*\\
&= S_aS_b^*S_bS_zS_z^*S_a^* = \bigstar.
\end{aligned}$$

E segue a igualdade. Por fim, se β é começo de b, então $b = \beta z$ e assim:

$$\begin{aligned}
\varphi(1_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}\beta}) &= \varphi(1_{a(\beta z)^{-1}}1_{a(\beta z)^{-1}\beta}) = \varphi(1_{a(\beta z)^{-1}}1_{az^{-1}})\\
&= \varphi(1_{a(\beta z)^{-1}})\varphi(1_{az^{-1}}) = S_aS_{\beta z}^*S_{\beta z}S_a^*S_aS_z^*S_zS_a^*\\
&= S_aS_z^*S_\beta^*S_\beta S_zS_a^*S_aS_z^*S_zS_a^*\\
&= S_aS_z^*S_\beta^*S_\beta S_zS_a^* = \maltese.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\pi(r)\varphi(1_r 1_\beta)\pi(r)^* &= \pi(ab^{-1})\varphi(1_{ab^{-1}}1_\beta)\pi(ba^{-1})\\
&= \pi(a(\beta z)^{-1})\varphi(1_{a(\beta z)^{-1}})\varphi(1_\beta)\pi((\beta z)a^{-1})\\
&= S_aS_{\beta z}^*\underbrace{S_aS_{\beta z}^*}_{\in\widetilde{\varphi}(\mathcal{B})}\underbrace{S_{\beta z}S_a^*}_{\in\widetilde{\varphi}(\mathcal{B})}S_\beta S_\beta^*S_\beta S_zS_a^*\\
&= S_a\underbrace{S_{\beta z}^*S_{\beta z}}_{\in\widetilde{\varphi}(\mathcal{B})}\underbrace{S_a^*S_a}_{\in\widetilde{\varphi}(\mathcal{B})}S_{\beta z}^*S_{\beta z}S_a^*\\
&= S_aS_a^*S_aS_{\beta z}^*S_{\beta z}S_{\beta z}^*S_{\beta z}S_a^*\\
&= S_aS_{\beta z}^*S_{\beta z}S_a^* = \maltese.
\end{aligned}$$

E segue a igualdade.

Portanto, para $r = ab^{-1} \in R_A$ com a, b podendo ser e, temos que $\varphi(\gamma_r(1_{r^{-1}}1_\beta)) = \pi(r)\varphi(1_r1_\beta)\pi(r)^*$. Então, basta mostrar que o fecho do span linear de $B := \{1_r1_\beta :\ \text{com } \beta \in \mathbb{W} \cup \{e\}\}$ é igual a $C(X_r)$, ou seja, $\overline{span(B)} = C(X_r)$. Mas note que se $r \notin \mathbb{W}$ ou $r \notin \mathbb{W}^{-1}$ ou $r \notin R_A$ ou $r \neq e$, tem-se que $1_r \in C(X_r) = 0$. Logo, podemos considerar $r = ab^{-1} \in R_A$ com $a, b \in \mathbb{W} \cup \{e\}$, (claro, com ab^{-1} na forma reduzida). Com isso, usaremos o fato que $\varphi(\gamma_r(g)) = \pi(r)\varphi(g)\pi(r)^*$ para todo $g \in D := span\{1_{ab^{-1}}1_\beta :\ \beta \in \mathbb{W} \cup \{e\}\} \subseteq C(X_{ab^{-1}})$ e como

φ, γ_r são homomorfismos contínuos, segue que a igualdade ocorre para todo $g \in C(X_{ab^{-1}})$ e portanto, (φ, π) é γ-covariante.

Afirmação: D é denso em $C(X_{ab^{-1}})$, (ab^{-1} fixos, β variando em $\mathbb{W} \cup \{e\}$). (span linear, ou seja, somas e produtos por escalares):

Usando o Teorema de Stone-Weierstrass, note que, obviamente, D é subálgebra de $C(X_{ab^{-1}})$ e $X_{ab^{-1}}$ é compacto. A função constante $1_{C(X_{ab^{-1}})}$ pertence à D, basta tomar $\beta = e$ então $1_{ab^{-1}} 1_\beta = 1_{ab^{-1}} 1_e = 1_{C(X_{ab^{-1}})}$, pois se $f \in C(X_{ab^{-1}})$, então, $1_{ab^{-1}}.f(x) = f.1_{ab^{-1}}(x) = f(x)$, $\forall x \in X_{ab^{-1}}$ ou seja, $1_{ab^{-1}}(x) = 1$, $\forall x \in X_{ab^{-1}}$, e isto quer dizer que $1_{ab^{-1}}$ é a função constante 1 em $X_{ab^{-1}}$. Também, para $x, y \in X_{ab^{-1}}$, se $x \neq y$, ou seja, $x_i \neq y_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$ (note que $i > |a|$ pois $x, y \in X_a$), então podemos considerar $\beta \in \mathbb{W}$ com $\beta \in X_a$ tal que $\beta = x_1 x_2 x_3 \ldots x_i$. Assim, $1_{ab^{-1}} 1_\beta(x) = 1$ e $1_{ab^{-1}} 1_\beta(y) = 0$, ou seja, D separa pontos. Logo, por Stone-Weiertrass, $\overline{D} = C(X_{ab^{-1}})$. ∎

Corolário 58. *Existe um $*$-homomorfismo $\varphi \times \pi : C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{O}_A$.*

Demonstração. De fato, invocando a observação na página 52 logo em seguida do Teorema 42, já que π é representação parcial (Proposição 54), φ é $*$-homomorfismo (Teorema 55), $C(X)$ é C*-álgebra, B é C*-álgebra, $\mathbb{F}$ grupo e (φ, π) é γ-covariante (Proposição 57). Nestas condições, o $*$-homomorfismo $\varphi \times \pi$ é dado pela extensão do $*$-homomorfismo $\varphi \widetilde{\times} \pi : C(X) \widetilde{\rtimes}_\gamma \mathbb{F} \to \mathcal{O}_A$, dado por

$$(\varphi \widetilde{\times} \pi)\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{W}} 1_\alpha \delta_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{W}} \varphi(1_\alpha)\pi(\alpha).$$

∎

No começo deste capítulo construímos o $*$-homomorfismo ψ que vai de $\mathcal{O}_A$ para $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$ e, com a ajuda deste corolário, construímos um $*$-homomorfismo de $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$ para $\mathcal{O}_A$, à saber, $(\varphi \times \pi)$. Para concluirmos nosso trabalho, resta apenas mostrar que estes $*$-homomorfismos são inversos um do outro.

Teorema 59. *As funções ψ definida na página 69 e $\varphi \times \pi$ definida no Corolário 58, são inversas (uma da outra).*

Demonstração. Considere $\varphi \times \pi \circ \psi : \mathcal{O}_A \to \mathcal{O}_A$, então para cada $S_i \in \mathcal{O}_A$ (note que S_i é gerador de $\mathcal{O}_A$), temos que:

$$\varphi \times \pi \circ \psi(S_i) = \varphi \times \pi(1_i \delta_i) = \varphi \widetilde{\times} \pi(1_i \delta_i) = \varphi(1_i)\pi(i) = S_i S_i^* S_i = S_i.$$

Já que os S_i's são os geradores de $\mathcal{O}_A$, $\varphi \times \pi$ e φ são contínuas, temos que

$$\varphi \times \pi \circ \psi = Id_{\mathcal{O}_A}.$$

Por outro lado, para qualquer elemento $x \in C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$, sabemos que existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X) \widetilde{\rtimes}_\gamma \mathbb{F}$ tal que $y_n \to x$ pois $C(X) \widetilde{\rtimes}_\gamma \mathbb{F}$ é denso em $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$. Logo, podemos definir $\psi \circ \varphi \times \pi : C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F} \longrightarrow C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$, que leva $x \longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} (\psi \circ \varphi \times \pi(y_n))$. Então, se $x \in C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$, temos que:

$$\psi \circ \varphi \times \pi(x) = \lim_{n\to\infty} (\psi \circ \varphi \widetilde{\times} \pi(y_n)) = (*).$$

Agora, note que para cada $n \in \mathbb{N}$, o elemento $y_n \in C(X) \widetilde{\rtimes}_\gamma \mathbb{F}$ e assim, $y_n = \sum\limits_{\alpha_n}^{finita} g_{\alpha_n} \delta_{\alpha_n}$ com $g_{\alpha_n} \in C(X_{\alpha_n})$. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Denote α_n por $t = t(n)$, assim, $y_n = \sum\limits_{t}^{finita} g_t \delta_t$ com $g_t \in D_t$. Observe que $D := span\{1_t 1_\beta : \beta \in \mathbb{W} \cup \{e\}\} \subseteq C(X_t)$ é denso (isto foi feito durante a prova do teorema anterior). Note agora que podemos considerar $t = ab^{-1} \in R_A$, com $a, b \in \mathbb{W} \cup \{e\}$, pois os outros casos não interessam, já que teríamos $X_t = \emptyset$. Com isso, $y_n = \sum\limits_{t}^{finita} g_t \delta_t = \sum\limits_{t}^{finita} \lim\limits_{m\to\infty} 1_t 1_{\beta_m} \delta_t$, pois para $g_t \in C(X_t)$, existe $(1_t 1_{\beta_m})_m \subseteq D \subseteq C(X_t)$ tal que $g_t \delta_t = \lim\limits_{m\to\infty} 1_t 1_{\beta_m} \delta_t$.

Afirmamos que $\psi \circ \varphi \widetilde{\rtimes} \pi(1_t 1_\beta \delta_t) = 1_t 1_\beta \delta_t$, pois:

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi \widetilde{\rtimes} \pi(1_t 1_\beta \delta_t) &= \psi(\varphi(1_{ab^{-1}} 1_\beta) \pi(ab^{-1})) = \psi(\varphi(1_\beta 1_{ab^{-1}}) \pi(ab^{-1})) \\
&= \psi(\varphi(1_\beta) \varphi(1_{ab^{-1}}) \pi(ab^{-1})) \\
&= \psi(S_\beta S_\beta^* S_a S_b^* S_b S_a^* S_a S_b^*) = \psi(S_\beta S_\beta^* S_a S_b^*) \\
&= 1_\beta \delta_\beta \gamma_{\beta^{-1}}(1_\beta^*) \delta_{\beta^{-1}} . 1_a \delta_a \gamma_{b^{-1}}(1_b^*) \delta_{b^{-1}} \\
&= 1_\beta \delta_\beta \gamma_{\beta^{-1}}(1_\beta) \delta_{\beta^{-1}} . 1_a \delta_a \gamma_{b^{-1}}(1_b) \delta_{b^{-1}} \\
&= 1_\beta \delta_\beta 1_{\beta^{-1}} \delta_{\beta^{-1}} . 1_a \delta_a 1_{b^{-1}} \delta_{b^{-1}} \\
&= \gamma_\beta(\gamma_{\beta^{-1}}(1_\beta) 1_{\beta^{-1}}) \delta_e . \gamma_a(\gamma_{a^{-1}}(1_a) 1_{b^{-1}}) \delta_{ab^{-1}} \\
&= 1_\beta \delta_e . \gamma_a(1_{a^{-1}} 1_{b^{-1}}) \delta_{ab^{-1}} =^{\text{parte b) do Lema 56}} \\
&= 1_\beta \delta_e 1_a 1_{ab^{-1}} \delta_{ab^{-1}} = \gamma_e(\gamma_{e^{-1}}(1_\beta) 1_a 1_{ab^{-1}}) \delta_{eab^{-1}} \\
&= 1_\beta 1_a 1_{ab^{-1}} \delta_{ab^{-1}} = 1_{ab^{-1}} 1_\beta \delta_{ab^{-1}} = 1_t 1_\beta \delta_t.
\end{aligned}$$

Usamos que $\gamma_a(1_{a^{-1}}1_{b^{-1}}) = 1_a 1_{ab^{-1}}$, com $ab^{-1} \in R_A$ e $a, b \in \mathbb{W} \cup \{e\}$, que é a parte b) do Lema 56.

Diante disso tudo, se $x \in C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$, então:

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi \times \pi(x) &= \lim_{n\to\infty} (\psi \circ \varphi \widetilde{\times} \pi(y_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \psi \circ \varphi \widetilde{\times} \pi \left(\sum_{\alpha_n}^{finita} g_{\alpha_n} \delta_{\alpha_n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \psi \circ \varphi \widetilde{\times} \pi \left(\sum_{t=t(n)}^{finita} g_t \delta_t \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \psi \circ \varphi \widetilde{\times} \pi \left(\sum_{t}^{finita} \lim_{m\to\infty} 1_t 1_{\beta_m} \delta_t \right) =^{\sum\ finita} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{t}^{finita} \psi \circ \varphi \widetilde{\times} \pi \left(\lim_{m\to\infty} 1_t 1_{\beta_m} \delta_t \right) \right) =^{(\dagger)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{t}^{finita} \lim_{m\to\infty} \psi \circ \varphi \widetilde{\times} \pi \left(1_t 1_{\beta_m} \delta_t \right) \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{t}^{finita} \lim_{m\to\infty} \left(1_t 1_{\beta_m} \delta_t \right) \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{t}^{finita} g_t \delta_t \right) = \lim_{n\to\infty} y_n = x.
\end{aligned}$$

Note que no passo $(\dagger)$ usamos um limite em m, que surge do Teorema de Stone-Weierstrass, onde g_t é aproximado por $1_t 1_{\beta_m}$ com a norma de $C(X_t)$, ou seja, na norma do sup., a qual é a norma considerada nas hipóteses do Teorema de Stone-Weierstrass. Porém, a norma considerada em $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$ é outra norma, que provém da norma em $C(X)$, pois $\left\| \sum_t a_t \delta_t \right\| = \sup_{\rho \in \Delta} \|\widetilde{\rho}(\sum_t a_t \delta_t)\|$. E como $\|\rho(\sum_t a_t \delta_t)\| \leq \sum_t \|a_t\| = \sum_t \|a_t\|_{sup}$, pois é representação, notamos que $1_t 1_{\beta_m}$ aproxima g_t na norma de $C(X)$ também, ou seja, $1_t 1_{\beta_m} \delta_t$ aproxima $g_t \delta_t$ na norma de $C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$ também. Isto nos diz que podemos "passar o limite pra fora" do argumento de $\psi \circ \varphi \times \pi$.

Portanto, $\psi \circ \varphi \times \pi = Id_{C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}}$, pela unicidade da identidade $Id_{C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}}$,

$$\begin{tikzcd} C(X) \widetilde{\rtimes}_\gamma \mathbb{F} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i"'] & C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F} . \\ & C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F} \arrow[u, dashed, "Id"'] \end{tikzcd}$$

Concluímos que $\mathcal{O}_A \cong C(X) \rtimes_\gamma \mathbb{F}$.

$\blacksquare$

8 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos a C*-álgebra de Cuntz-Krieger e o produto cruzado que são temas que vêm proporcionando um grande número de produções científicas. Nosso objetivo foi mostrar que a famosa C*-álgebra de Cuntz-Krieger pode ser vista como um produto cruzado, obtido a partir de uma ação parcial do grupo livre no espaço das funções contínuas definida sobre o conjunto dos caminhos infinitos (obtidos a partir da matriz que define a C*-álgebra de Cuntz-Krieger).

Para este processo, utilizamos várias referências, muitas delas dissertações defendidas, alguns artigos e um livro. Algumas partes, como por exemplo, a construção da ação parcial feita no capítulo 6, foram desenvolvidas sem referências bibliográficas. Outras partes, como por exemplo a construção da C*-álgebra universal no capítulo 3, continham várias referências, principalmente dissertações, o que permitiu pesquisar e avaliar várias maneiras de se fazer a construção.

No fim das contas, a maior dificuldade do trabalho foi provar a γ-covariança de (φ, π) na página 76. Isto não quer dizer que o resto foi fácil. A elaboração deste trabalho, contribuiu de forma significativa na aprendizagem de seu elaborador. Espera-se também que contribua, por mais que seja pouco, para enriquecer ainda mais a gigantesca produção acadêmica matemática.

REFERÊNCIAS

BOAVA, G. *Caracterizações da C*-álgebra gerada por uma compressão aplicadas a cristais e quasicristais*. Dissertação (Mestrado) — UFSC, 2007.

BUSS, A. *A C*-álgebra de um Grupo*. Dissertação (Mestrado) — UFSC, 2003.

CIDRAL, F. C. *Ideais no produto cruzado parcial reduzido*. Dissertação (Mestrado) — UFSC, 2011.

CUNTZ, J.; KRIEGER, W. A Class of C*-Algebras and Topological Markov Chains. *Inventiones Mathematicae*, v. 56, p. 251, 1980.

DOKUCHAEV, M.; EXEL, R. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of The Amerian Mathematical Society*, v. 357, p. 1931–1952, 2005.

EXEL, R. Circle actions on c*-algebras, partial automorphisms and a generalized pimsner-voiculescu exact sequence. *Journal of Functional Analysis*, v. 122, p. 281–288, 1994.

GONÇALVES, D.; ROYER, D. C*-algebras associated to stationary bratteli diagrams. *Houston Journal of Mathematics*, v. 40, p. 127, 2014.

GONÇALVES, D.; ROYER, D. Leavitt path algebras as partial skew group rings. *Communications in Algebra*, v. 42, n. 8, p. 3578–3592, 2014.

MATTOS, A. D. *C*-álgebras geradas por isometrias*. Dissertação (Mestrado) — UFSC, 2007.

MCCLANAHAN, K. K-theory for partial crossed products by discrete groups. *Journal of Functional Analysis*, v. 130, p. 77–117, 1995.

MURPHY, G. J. *C*-Algebras and Operator Theory*. [S.l.]: Academic Press; 1 edition; 296 p., 1990.

VIEIRA, F. *Produtos cruzados por ações de semigrupos inversos e ações parciais de grupos*. Dissertação (Mestrado) — UFSC, 2008.