mas uma atitude modificada em relação às crianças que estão aprendendo. Uma atitude de humildade, ou até de admiração, face a um ato de criação por uma criança, é necessária por parte do professor. Há uma grande diferença entre ensinar crianças e ajudá-las a aprender. Podemos estar certos de que, se pusermos *todos* os tijolos em frente delas, construirão, não só sua Matemática, com os tijolos de madeira, mas, em seus cérebros, uma Matemática verdadeiramente abstrata, apesar de pessoal, por meio de tijolos mentais que confeccionaram para elas mesmas, durante o brinquedo.

4

CONCEITOS ALGÉBRICOS ELEMENTARES

Não há razão, hoje, para qualquer tentativa de separar diferentes ramos da Matemática, tais como Aritmética e Álgebra; há tanta conexão entre êles que é impossível falar sôbre um dêles sem apresentar alguns dos outros. A sugestão de que alguns fatos algébricos devem ser conhecidos antes de certas operações aritméticas serem verdadeiramente dominadas pode parecer revolucionária. Mas os professôres sensíveis às exigências do aprendizado de crianças sempre tentaram alguma forma de esclarecimento de conceitos subjacentes, antes de iniciar um nôvo processo. Quero apenas sugerir que êsses esclarecimentos sejam colocados em uma base apropriada, e organizados em conjuntos de experiências, das quais as crianças possam extrair a informação algébrica necessária ao desenvolvimento de sua Aritmética. Não há estrita necessidade no simbolismo de forma algébrica; quando os conceitos correspondentes forem realmente apreendidos, uma forma de simbolizá-los não só será possível como será pedida pelas crianças. Assim, a Álgebra aparecerá como uma parte natural da experiência matemática, e será enxertada no edifício matemático das crianças.

Imaginemos uma primeira aula de Álgebra convencional, em uma escola secundária, e uma criança que não tenha tido nenhuma experiência algébrica anterior. Os AA e os BB que são escritos no quadro se tornarão cada vez mais confusos, particularmente quando lhe dizem que essas letras são realmente números. Quando ela pergunta por que se parecem tanto com letras, na melhor das hipóteses receberá uma explicação de que uma letra é usada porque poderia ser qualquer número, ou um número desconhecido; mas, na pior das hipóteses, dir-lhe-ão para não fazer perguntas estúpidas. No primeiro caso, ela não conseguirá compreender por que, se podia ser *qualquer* número, o professor não escreve qualquer número. Afinal, seria muito mais fácil. No segundo caso, ela se desencorajará de fazer outras perguntas, e sua curiosidade matemática minguará.

E por que êsse negócio de "qualquer número" é tão difícil de entender pelas crianças? Certamente o Princípio da Variabilidade Matemática dá a resposta. Essas crianças não foram tornadas conscientes do que acontece a tôda sorte de números *diferentes* nas *mesmas* situações. Não adiantará pôr uma variável à frente de uma criança até que esta a veja variar. Quando uma variável tiver realmente variado na experiência da criança, então haverá sentido em colocar "nosso número escolhido", em lugar de todos os números diferentes que já representaram o nosso número escolhido, e não será necessário muito tempo para convencê-la de que, como economia de expressão, pode usar-se uma letra-código para o "nosso número escolhido". O modo normal de "explanar" uma fórmula é pedir à criança para substituir as letras da fórmula e "verificar" que está certa. Mas isso é pôr o carro adiante dos bois, pois a fórmula é, na realidade, o modo conciso de expressar justamente aquêle agregado de experiência com número, o qual conduz à fórmula. Esta deve ser o ponto final num projeto de pesquisa, a formulação concisa de uma subtração de muitas experiências que só são diferentes enquanto a variável varia, e cuja semelhança essencial é expressa pela fórmula. Êsse é o método construtivo de se encarar uma fórmula e o único que a criança pode proceder com verdadeira percepção. A substituição na fórmula — a facêta analítica do mesmo conceito — só pode ser perceptível quando a fórmula tiver sido não apenas construída matemàticamente, mas também psicològicamente. Tanto o Princípio Dinâmico quanto o de Construtividade exigem que procedamos dêsse modo e não do modo inverso. O Princípio da Variabilidade Perceptiva, por outro lado, exige uma riqueza de experiências concretas com a mesma estrutura conceptual, para que, novamente, *tôdas as crianças* possam recolher a idéia essencialmente abstrata inerente a qualquer fórmula particular. Neste capítulo, trataremos da descrição de um número de experiências que foram julgadas úteis na condução de crianças a abstrações cada vez mais altas, ao longo do caminho construtivo.

Onde estão essas experiências que conduzem aos conceitos algébricos? Quando, na vida real, cruzamos com atividades cuja estrutura seja, por exemplo, idêntica à da fórmula

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

A resposta é, claramente, nunca. A orientação ambiente não apresentará à criança experiências que a tornem capaz de atingir os conceitos algébricos. Nunca será dada ênfase suficiente. Se a experiência é a fonte do conhecimento, como se pode esperar que as crianças saibam Álgebra — no sentido de apreensão da estrutura matemática, mais do que a participação em uma inútil atividade de estímulo-reação — se não têm experiência na qual basear tal conhecimento?

Vamos voltar nosso pensamento, por um momento, para a experiência com números que já têm as crianças que seguem o caminho indicado nestas páginas. Um marco muito importante foi a compreensão do número cardinal. É a compreensão de que, a cada coleção de objetos separados, corresponde certo atributo definido, ou seja, o número de objetos. Assim, coleções de objetos foram colocadas em classes de equivalência, e a cada uma dessas classes correspondia um número; essa compreensão é consubstanciada na notação formal dos números, isto é, na série de números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

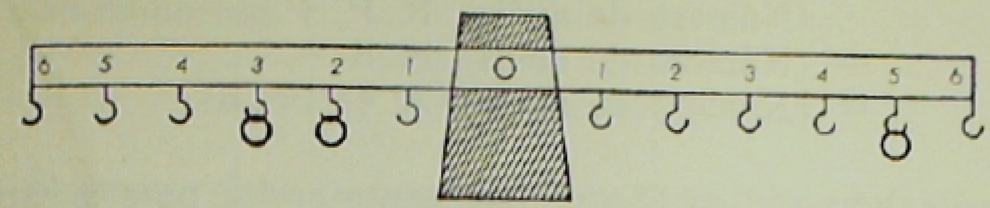
As operações com êsses números têm sido, até agora, novos predicados, sempre construídos, como último recurso, com os próprios números e não com as classes de números. Mas já vimos no último capítulo, que era difícil — se não impossível — aprender as propriedades dessas operações sem estar cientes de certas propriedades que se aplicavam à classe tôda dos números. Foi aí que a Álgebra começou a entrar pela porta dos fundos. O conceito de valor de posição se apresenta plenamente com as classes de números: nos arranjos de base N, os algarismos são da classe de números naturais menores que N, as potências e as bases são números naturais maiores que 1. Foi por essa mesma razão que variamos essas variáveis na experiência das crianças, para lançar em suas mentes as fundações de uma experiência que vai além do número, atingindo o conceito de uma classe de números ("qualquer número" ou "qualquer número menor que dez"). Assim, a experiência aritmética que tais crianças realizaram agiu, na realidade, como uma preparação, sob a forma de jogos preliminares, para conceitos algébricos mais gerais. As crianças devem, agora, estar preparadas para tornar mais explícito o que já sabem implìcitamente; em outras palavras, devem estar prontas para passar a experiências algébricas completamente estruturadas. Podem, de fato, entrar na segunda fase da formação de conceitos algébricos, começando, como sempre, com o aspecto construtivo, e com a maior variedade de experiências semelhantes que se possa imaginar. Levará tempo, porém, para que uma letra possa simbolizar uma classe de números tão claramente quanto o número, uma classe de coleções. Até que se consiga isso, faremos bem em observar escrupulosamente o Princípio de Variabilidade Matemática, para que cada letra escrita pelas crianças tenha um passado de experiência pessoal atrás dela. Sòmente depois de poderem derivar de tal série de processos de abstração a idéia matemática de uma classe de números, isto é, de uma variável matemática, é que estarão aptas a manusear letras, tão perceptivamente quanto números.

Ao descrever uma quantidade de ciclos de conceitos algébricos, concentrar-me-ei, principalmente, nas fases estruturadas que conduzem às percepções necessárias. Comecemos com a lei distributiva na qual o multiplicando é parcelado:

$$K \times (A + B) = K \times A + K \times B$$

Ou, em palavras, um múltiplo de uma soma é igual à soma dos múltiplos dos têrmos da soma.

Poderíamos começar com uma balança, com ganchos a iguais intervalos do fulcro, como é mostrado adiante. Por exemplo, um anel é colocado no gancho 5. A tarefa é equilibrá-lo com dois anéis do outro lado, cada um em um gancho diferente. Não demorará muito para se descobrir que os ganchos 4 e 1, ou 3 e 2, conseguem equilibrar o anel do gancho 5. Movemos, então, o anel do gancho 5 para outro qualquer do mesmo lado e apresentamos o mesmo problema. Não serão necessárias muitas tentativas, até para as crianças menos brilhantes, para descobrir que têm de somar os números dos ganchos de um lado para obter o número do gancho do outro lado. Se essa descoberta demorar, podemos sugerir que, cada vez que se usar um gancho, seja tirada da caixa a quantidade de unidades que representa o número do gancho. Se houver uma criança trabalhando em cada lado da balança, não podem deixar de perceber, eventualmente, que ambas têm o mesmo número de unidades de cada vez. Depois, a tarefa é alterada, colocando-se dois anéis, digamos, no gancho 5; dizemos, à criança que está trabalhando do outro lado da balança, que deve equilibrá-los usando dois ganchos e pondo dois anéis em cada um dêles. Algumas crianças vêem, imediatamente, que êsse problema tem a mesma estrutura do anterior, e colocam 3 anéis no gancho 4 e dois no 1, ou usarão, da mesma maneira, os ganchos 2 e 3.



Esta é, evidentemente, a solução construtiva. Algumas crianças, por outro lado, dizem: 2 cincos fazem 10, se coloco 2 anéis no 3, usei 6 dos 10 e ficam 4; como há dois anéis, vão para o gancho 2. Esta é, naturalmente, a solução analítica. Crianças capazes de dar soluções tão diferentes não devem, se possível, trabalhar juntas, porque a criança capaz de analisar sua construção ou está muito mais avançada que as outras ou talvez tenha uma preferência natural pelas soluções analíticas. No primeiro caso, a outra criança se tornará, logo, um passageiro; no segundo, ficará confusa.

As crianças, que tiverem tido essa experiência, tirarão daí a seguinte informação matemática:

> 2 $\times$ número do primeiro gancho + 2 $\times$ número do segundo gancho = 2 $\times$ (número do primeiro gancho + número do segundo gancho)

Isso pode ser fàcilmente escrito, mais convenientemente, usando-se P para o "número do primeiro gancho" e S para o "número do segundo gancho":

$$2 \times P + 2 \times S = 2 \times (P + S)$$

Explica-se que a função dos parênteses envolvendo P + S é indicar que P + S é um único número, e que apenas não sabemos qual o seu valor exato. Pomos os parênteses antes e depois dêle para que todos saibam que é um número.

É fácil repetir o exercício com 3 anéis em cada gancho, depois com 4, depois com 5, até que fiquemos sem anéis. Seria o mesmo com 10, supondo-se que não iriam cair do gancho? A resposta invariável é um Sim muito convicto. Um relacionamento matemático está sendo *construído* na mente das crianças, mas evidentemente não provado. De fato, qualquer "prova" de tipo matemático iria, òbviamente, ser bastante ininteligível para elas e, certamente, não convincente. Uma vez tendo compreendido que pode ser usado qualquer número de anéis, terão chegado à conclusão de que

$$\begin{aligned} &(\text{Número de anéis}) \times P + \\ + &(\text{Número de anéis}) \times S = \\ = &(\text{Número de anéis}) \times (P + S) \end{aligned}$$

E aqui a letra-código N será fàcilmente aceita para a expressão "número de anéis" e parece que chegamos à identidade

$$N \times P + N \times S = N \times (P + S)$$

Mas teremos chegado? A fórmula acima não é meramente um modo de escrever a essência da experiência com a balança? Antes de se tornar uma identidade matemática, essa essência deve ser divorciada da balança; de outro modo, permanecerá como uma associação e não uma abstração. É aí que a variação do material se torna de capital importância, se quisermos atingir nosso objetivo: a realização de uma estrutura puramente matemática, da qual a fórmula é a expressão.

Pinos em um eucatex seriam o meio apropriado de dar uma montagem perceptiva muito diferente para idêntico conceito. Por exemplo, uma linha de 7 pinos — sendo prêtos os 4 primeiros, e vermelhos os 3 últimos — pode ser montada no eucatex. Outra linha semelhante pode ser feita paralela a esta (e outra, e mais outra). Teremos um padrão semelhante ao seguinte:

p p p p v v v
p p p p v v v

que, quando dividido em parte preta e parte vermelha, poderá ser registrado da seguinte forma: $2 \times 4 + 2 \times 3$ e, quando dividido em primeira e segunda linhas, pode ser registrado assim: 2×7. O primeiro tijolo da estrutura a ser construída é, portanto,

$$2 \times 4 + 2 \times 3 = 2 \times 7$$

Mais cedo ou mais tarde, conforme a inteligência e a receptividade de cada criança em particular, isso pode tomar a seguinte forma

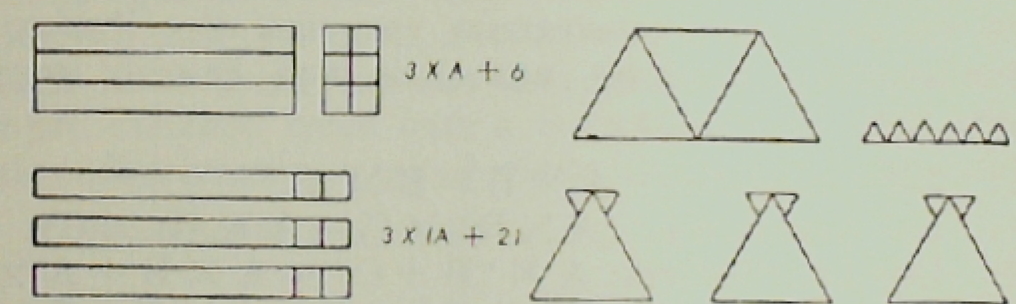
$$\begin{aligned} &2 \times (\text{número de prêtos}) + \\ + &2 \times (\text{número de vermelhos}) = \\ = &2 \times (\text{números de prêtos} + \text{número de vermelhos}) \end{aligned}$$

ou, eventualmente,

$$2 \times P + 2 \times V = 2 \times (P + V)$$

Algumas vêzes poderá ser necessária uma fase intermediária, em que apenas um dos têrmos da soma é variado, permanecendo o outro o mesmo. Isso, finalmente, pode ser concretizado com o uso de outro tipo de aparelho, constituído de retângulos e quadrados de madeira: o número de quadrados pode permanecer constante, enquanto os retângulos representam, já em forma semi-abstrata, o número arbitrário de quadrados de que é composto cada um. Em qualquer caso, múltiplos maiores que 2 podem ser usados muito em breve e um múltiplo generalizado será eventualmente aceito.

Para dar riqueza perceptiva aos que são capazes de generalizar apenas uma variável de cada vez, podem ser usados tanto retângulos e quadrados como triângulos, ou qualquer outra coisa que esteja à mão para apresentar a estrutura nas mais variadas formas que fôr possível. O diagrama a seguir mostra dois modos de ajudar tais crianças.



É bastante convincente que as crianças estejam também familiarizadas com a lei comutativa. Muitas crianças, mesmo com nove anos, parecem estar bastante inconscientes a respeito dela; e, caso contrário, a encaram como um caso isolado, como uma espécie de curiosidade, e não como parte de um todo. Uma percepção da lei comutativa pode ser obtida com a construção de retângulos com pinos no eucatex, com quadrados e, lògicamente, com a balança. Os exercícios com a lei distributiva, esboçados acima, terão o efeito de levar a criança a associar o número de anéis com o multiplicador e o número de ganchos com o multiplicando. Podemos apresentar problemas do tipo seguinte: Pôr 3 anéis no gancho 2. Onde a criança colocará 2 anéis, se ambos tiverem de ser postos no mesmo gancho, para equilibrar os 3 já colocados? Ou podemos fazer a pergunta da seguinte maneira: Quantos anéis devem ser colocados no gancho 3 do outro lado, para equilibrar os 3 anéis do gancho 2 do lado de cá? Como resultado, as crianças poderiam verificar que a estrutura nesse exercício é idêntica à daquele em que se usaram pinos e quadrados e, assim, descobrir que os fatôres são permutáveis. Como corolário, as crianças ficarão igualmente preparadas para olhar os números dos ganchos e os dos anéis como multiplicadores. Isso abre o caminho para uma percepção da segunda lei distributiva. O leitor pode, agora, reconstruir a seqüência por si mesmo e o resultado seria

> (número do primeiro gancho) × (número de anéis) + (número do segundo gancho) × (número de anéis) = (número do primeiro gancho + + número do segundo gancho) × (número de anéis)

onde os números dos ganchos agem, agora, como multiplicadores e não como multiplicandos. Essas experiências podem ser conduzidas com uma quantidade de modalidades perceptivas, para se ter a certeza de que se realizou uma abstração e não uma associação.

Podemos agora supor (se a lei associativa também foi aprendida por intermédio dos meios sugeridos no último capítulo) que as crianças construíram, com suas experiências, as leis fundamentais seguintes, nas quais será baseada grande parte do resto da Álgebra:

1) Lei Comutativa: $A \times B = B \times A$
2) Lei Associativa: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
3) Leis Distributivas: $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

Muitas crianças, nas escolas secundárias, não compreendem que o sinal de igual é usado na Álgebra em dois sentidos diferentes. Um é o da identidade; o outro, o da igualdade. Quando aprendem que $2 \times (A + B) = 2 \times A + 2 \times B$, estão aprendendo uma identidade, porque os dois lados são iguais para quaisquer valôres dados às variáveis A e B. Muito breve, as letras são usadas para designar *incógnitas* e não *variáveis*, e isso pode conduzir a confusão. Quando escrevemos $A + B = 10$, isso, evidentemente, não é verdadeiro para todos os valôres das variáveis A e B, mas apenas para alguns valôres. $A + B = 10$ não é, portanto, uma identidade, mas uma igualdade. Uma identidade sempre estabelece um fato que é verdadeiro para todos os valôres de uma variável; uma igualdade apresenta um problema, a saber, o problema de encontrar os valôres das variáveis para os quais a declaração em questão é verdadeira. Nesse caso, temos um número infinito de modos de satisfazer

a igualdade, se pudermos usar frações ou números negativos; apenas um número finito, se nos restringirmos aos números naturais. Isso é, de fato, o que as crianças pequenas fazem quando constroem todos os pares de números cuja soma é 10. Podemos tornar o problema mais particularizado quando estabelecemos que apenas um valor dado à letra poderá tornar a igualdade verdadeira. Por exemplo, $2 \times A + 4 = 10$ só pode ser considerada verdadeira se A significar o número 3. Em outras palavras, uma exigência ou uma especificação é apresentada, e o problema é encontrar o número que preencha essa exigência, isto é, que está de acôrdo com a especificação dada; isso, em essência, é a "situação da equação". Uma quantidade de tais situações "reais" deve ser experimentada pela criança antes de poder abstrair as qualidades ou atributos de tal "situação de equação". Só então é que o simbolismo formal de uma equação poderá representar uma linguagem, expressando a simples essência de tudo o que tais experiências têm em comum.

A função do professor é, portanto, apresentar a maior variedade possível de experiências a caminho de reais "situações de equação". Como essas situações não são freqüentes na vida real, será, em geral, necessário criá-las artificialmente na sala de aula. Descreveremos uma quantidade de tais situações, sempre tomando como base a mesma equação, para salientar, mais enfàticamente, o que é constante e o que é variável nelas.

Consideremos a equação

$$3 \times A + 10 = 5 \times A + 2$$

Não é necessário dizer que essa equação não será apresentada às crianças. Ao contrário, apreciarão a seguinte situação.

Pede-se à criança da esquerda para pôr 10 em seu lado da balança; pode, por exemplo, pôr 2 anéis no gancho 5. À criança da direita pede-se para pôr 2 do seu lado. Pode pôr 2 no gancho 1 ou 1 no gancho 2, à sua vontade. Deve-se, então, escolher um gancho de tal forma que, se a criança da esquerda puser 3 anéis nesse gancho do seu lado, a criança da direita porá 5 anéis no gancho correspondente, em seu lado, para equilibrar perfeitamente a balança. Deve ficar claro que, se a criança da esquerda tenta o gancho 2, então a da direita deve também tentar o gancho 2 e assim por diante, uma sempre usando 3 anéis e a outra 5. Eventualmente será descoberto que o gancho 4 solucionará a questão. Pode-se formular o problema assim:

10 + 3 × (número do gancho) = 2 + 5 × (número do gancho)

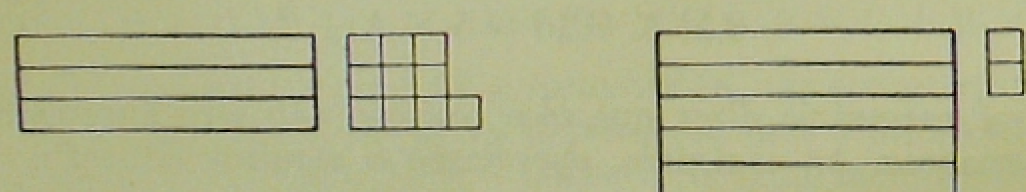
Ou uma letra, como G por exemplo, poderia ser usada para o número do gancho, e a equação seria, então,

$$10 + 3 \times G = 2 + 5 \times G$$

Está claro que o número do gancho terá de ser 4. As crianças podem escrever: "O número do gancho é 4", ou, mais tarde, "G = 4".

A formulação acima é para aquêles que usam o número de anéis como multiplicador. Para os que preferem usar o número do gancho como multiplicador, o problema seria formulado assim: Pôr 10 à esquerda e 2 à direita. As crianças deverão encontrar certo número de anéis, o mesmo para ambas, que, quando colocado no gancho 3 pela criança da esquerda, equilibre o mesmo número de anéis que fôr colocado no gancho 5 pela criança da direita. A equação será a mesma, exceto que a incógnita é o número de anéis, em vez do número do gancho.

Até aqui, G apenas significa um gancho desconhecido, não um número desconhecido. Ou talvez N signifique um número de anéis desconhecido e não um número desconhecido em geral. Vamos, agora, ajudar as crianças a compreender a natureza geral do que fizeram. Se a criança à esquerda tem 3 retângulos e 10 quadrados; a da direita, 5 retângulos e 2 quadrados, a situação será a seguinte:



O problema consiste em achar um número de quadrados pelo qual se deve trocar cada retângulo para que, quando todos os retângulos tiverem sido trocados, ambas as crianças possam ter o mesmo número de quadrados. Tôdas as crianças fazem isso por tentativas e erros, ou mais por tentativas. Tentam, talvez, trocar os retângulos por 2 quadrados cada um. A criança à esquerda fica com quadrados demais. Depois, podem tentar 3. A da esquerda ainda está com mais, mas a diferença está sendo reduzida; talvez 4 sirva. Eis que, quando substituem cada retângulo por 4 quadrados, cada criança fica com 22 quadrados; assim, a solução do problema é "Cada retângulo deve ser trocado por 4 quadrados".

Novamente podemos formular o problema dizendo

$$3 \times (\text{certo número de quadrados}) + 10 =$$
$$= 5 \times (\text{o mesmo número de quadrados}) + 2$$

ou, escrevendo Q para o "certo número de quadrados" necessários,

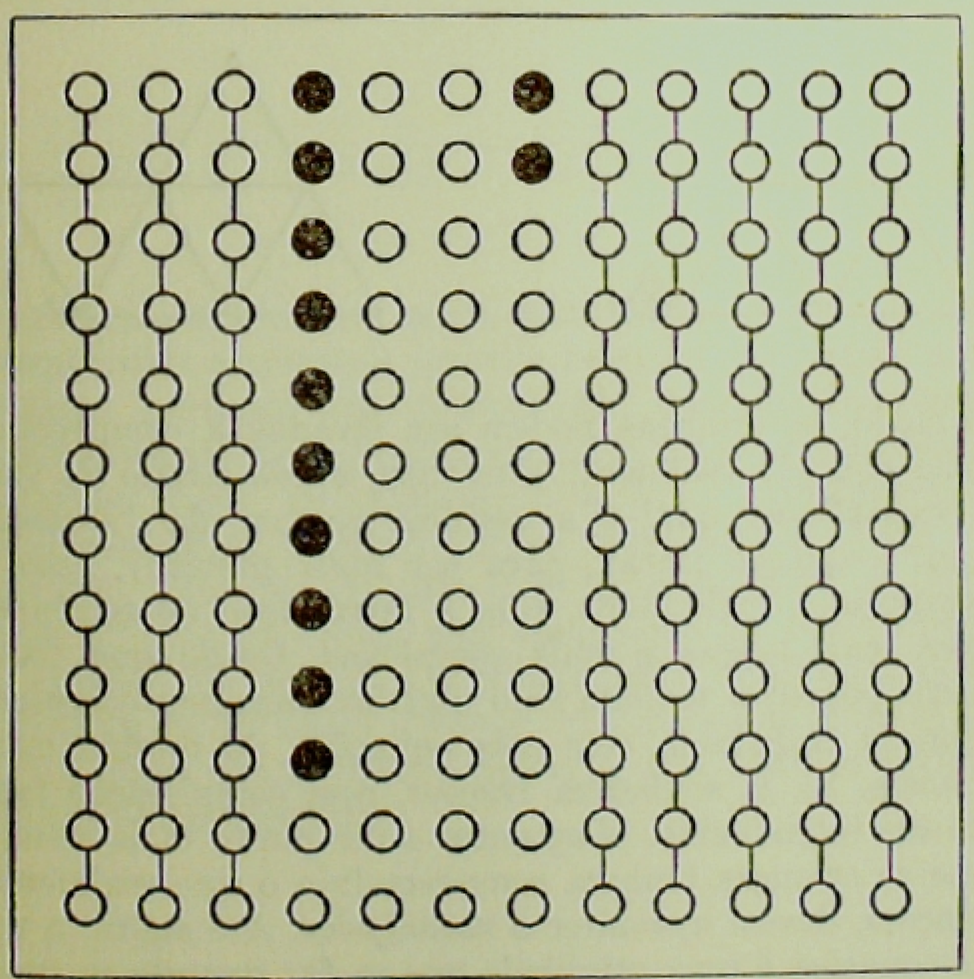
$$3 \times Q + 10 = 5 \times Q + 2$$

O resultado é, finalmente, apresentado escrevendo-se concisamente "Q = 4".

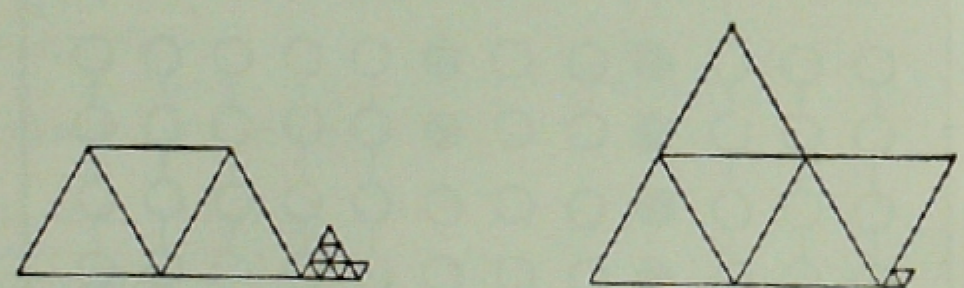
A situação poderá novamente ser invertida, se necessário, fazendo-se o número de fileiras em alguns retângulos a incógnita. O problema será: 10 quadrados + certo número de fileiras de 3 quadrados deve ser o mesmo que 2 + o mesmo número de fileiras de 5 quadrados. Qual é o número de fileiras necessário para que isso aconteça?

Para maior variação da estrutura perceptiva, podemos recorrer aos pinos e ao eucatex.

Marquemos três linhas no eucatex, como mostra o diagrama, e coloquemos 10 pinos. Isso pode ser para a criança à



esquerda. A criança da direita pode marcar 5 linhas e colocar 2 pinos. Supondo que se põe o mesmo número de pinos em cada linha, em ambos os lados, o problema é: Quantos pinos devem ser colocados em cada linha para que, por fim, os dois lados do eucatex tenham o mesmo número de pinos? A resposta é, evidentemente, 4 pinos. O leitor, a esta altura, já está ficando cansado com essa equação, e sentindo que é, realmente, preocupação demasiada com tão pouca coisa. Se é assim, é justamente porque está familiarizado com o conceito de uma equação e vê, imediatamente, as coisas que o exercício sugere que há em comum. Tal não acontece com a maioria das crianças. De fato, só quando eventualmente começam a ver que há uma espécie de repetição acontecendo aqui e que, em essência, estão fazendo a mesma coisa muitas vêzes, é que a essência comum da "situação de equação" começa a alvorecer nelas. Algumas vêzes, é aconselhável variar as variáveis psicológicas ainda mais. Podemos usar triângulos, e apresentar a mesma estrutura que mostramos com retângulos e quadrados, utilizando triângulos grandes e pequenos. O diagrama a seguir indica o modo pelo qual isso pode ser feito. (Os triângulos podem ser substituídos por caixas de fósforos com fichas dentro delas, ou por qualquer material que possa ser estruturado similarmente.)



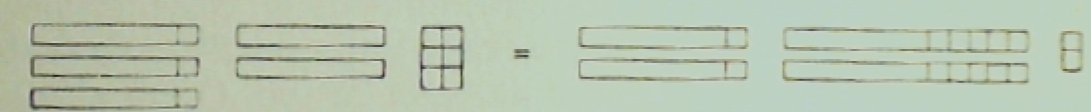
Dêsse modo, as crianças podem ser levadas a compreender o que uma equação realmente simboliza, tendo tirado de sua variada experiência qual é a essência comum da "situação de equação" (equação linear, para ser mais preciso). Isso pode ser complicado, mais tarde, com a introdução de parênteses e equações mais longas e mais complexas. Desde que todos os ciclos componentes tenham sido satisfatòriamente completados, as crianças trabalham com tais equações da mesma maneira satisfatória. Se já souberem frações, essa complicação também poderá ser introduzida. Mas, antes de ir muito mais além, uma vez que as crianças tenham compreendido o que realmente são as equações, devem aprender a *manejá-las*. Até agora, a resolução de equações é uma atividade que se faz quando se encontra

uma situação de equação. Em outras palavras, uma equação era essencialmente uma atividade, ou um predicado, cujo sujeito era a situação. Você fêz alguma coisa à situação, e o resultado foi a solução. Chegará a época em que as crianças terão "concretizado" o conceito de uma equação suficientemente para torná-las capazes de usá-la como instrumento para outros jogos. Estarão, então, prontas para considerar a equação como o sujeito e o *manuseio* da equação como o predicado.* O método normal nas escolas é *começar* com o manuseio. As pobres crianças recebem a ordem de manejar coisas que não conhecem, desde o tempo de Adão e Eva; não lhes deram a oportunidade de descobrir o que são aquelas coisas escritas no quadro-negro, chamadas equações. Em outras palavras, uma fase genética completa no desenvolvimento do conceito foi tirada. E ficamos admirados por que as crianças acham a Matemática difícil!

Consideremos a equação

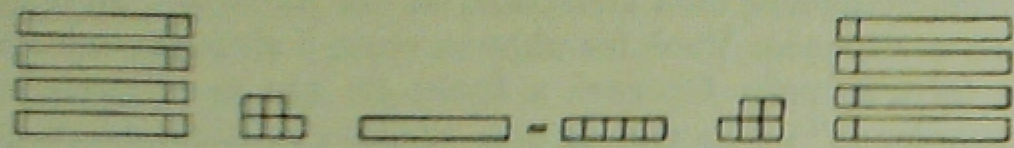
$$3 \times (A + 1) + 2 \times A + 6 =$$
$$= 2 \times (A + 1) + 2 \times (A + 5) + 2$$

Isso pode ser apresentado com retângulos e quadrados da seguinte forma



As crianças realizaram certa quantidade de "reorganização" de expressões algébricas quando estavam estudando a lei distributiva, portanto não estranharão quando sugerirmos que alguma reorganização poderá ajudar a resolver o problema mais fàcilmente. Aqui, as extremamente fortes propriedades de simetria gestaltista poderão vir em nosso auxílio. Pode ser mostrado que, uma vez que dos dois lados do sinal de igual há o mesmo número de coisas, êsse sinal pode ser considerado como uma espécie de espelho. Os retângulos e quadrados podem ser arranjados de tal modo a haver exatamente as mesmas imagens de cada lado, tanto quanto possível. Um arranjo poderia, por exemplo, ser o seguinte:

* Ver Servais.



$$4 \times (A + 1) + 5 \times A = 5 + 5 + 4 \times (1 + A)$$

Tornar-se-á claro, desde logo, que cada retângulo terá de ser substituído por 5 quadrados, já que as partes do padrão são idênticas em *qualquer* lugar, exceto nas que estão mais próximas do espelho. "$A = 5$" não pode demorar a aparecer.

Para fixar permanentemente o conceito de equação nas mentes das crianças, de forma operacional, devem ser apresentados, naturalmente, exercícios com problemas que resultem em equações. O grau até o qual cada criança em particular terá generalizado o conceito será percebido por sua presteza em aplicá-lo em circunstâncias diversas. Tais problemas são fáceis de elaborar e, finalmente, as próprias crianças estarão começando a formulá-los para as outras.

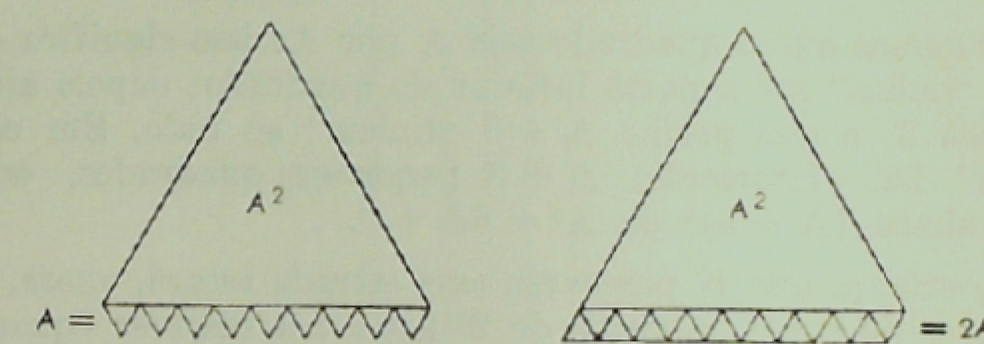
Passemos, agora, ao conceito matemático de quadrado. Está surgindo como resultado de formar quadrados maiores por meio de outros pequenos, de apresentá-los com pinos no eucatex, e, conseqüentemente, compreendendo o relacionamento fundamental que um número quadrado pode ser feito de tantos grupos quantos são os membros de cada grupo. Certo abandono da forma geométrica de um quadrado é necessário, agora, para tornar o conceito de quadrado mais abstrato. Isso pode ser feito dando-se às crianças um grande número de formas idênticas, triângulos por exemplo, e pedindo-lhes para fazer formas semelhantes, mas maiores, nesse caso triângulos maiores. O fato de que os mesmos números são obtidos ao fazer quadrados em vez de triângulos, ou ao construir paralelogramos ou trapézios, não é apenas um bom exercício preliminar para o futuro teorema das áreas das figuras semelhantes, mas também generaliza o conceito de quadrado, tornando-o menos prêso à forma do quadrado real. Isso pode ser seguido por uma gradual apreciação da relação

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Novamente deveremos proceder por meio de grandes quadrados, retângulos e pequenos quadrados, ou pelo uso do eucatex

ou de triângulos. O lado esquerdo terá, claramente, de ser construído com auxílio do lado direito de uma construção, e não "multiplicado" pelo lado esquerdo, como é costume nas escolas. É fácil ver como fazer isso com quadrados e retângulos, assim como com os pinos.* Descreverei, portanto, apenas a forma com os triângulos.

Tomemos um grande triângulo que pode ser cheio por, digamos, $A \times A$ ou A^2 pequenos triângulos. Quando estiver cheio, haverá, ao longo de cada lado, exatamente A pequenos triângulos — o lado de cada um dêles está sôbre o lado do triângulo grande. Podemos chamar A pequenos triângulos de uma "linha".



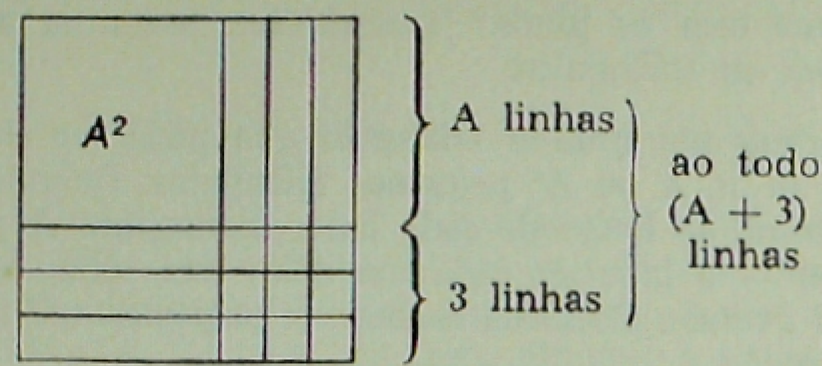
Se acrescentarmos uma "linha" ao nosso grande triângulo, obteremos a figura à esquerda. Se somarmos ainda outra "linha", obtemos a figura à direita. Já construímos, até agora, $A^2 + 2A$ pequenos trângulos. Se acrescentarmos mais 1 único pequeno triângulo, teremos

$$A^2 + 2A + 1 \text{ pequenos triângulos}$$

e teremos completado outro triângulo grande, cujas "linhas" são 1 mais que A e, portanto, deve haver nêle $(A + 1)^2$ pequenos triângulos. Assim construímos $(A + 1)^2$ por meio de A^2, 2A e 1. Se acrescentarmos mais duas "linhas" e mais 3 pequenos triângulos, poderemos construir $(A + 2)^2$ por meio de A^2, 4A e 4, e assim por diante. Só nos resta generalizar o *número extra* de pequenos triângulos em uma "linha" de triângulos cada vez maiores que iremos construir, para obter $(A + B)^2$, onde A é o número dos pequenos triângulos em uma "linha" do primeiro grande triângulo e B é o dos triângulos extra que entraram na "linha", à proporção que cons-

* Em qualquer caso, ver os manuais (15).

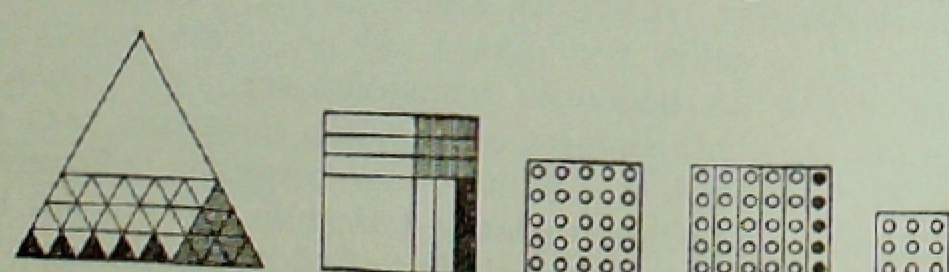
truíamos triângulos cada vez maiores. Naturalmente, para variar a estrutura perceptiva, teremos de recorrer a quadrados e retângulos e construir a figura clássica, indicada a seguir.



Digamos que o quadrado seja A por A: isso significa que há A "linhas" até a parte inferior do quadrado; depois ainda há mais 3, o que perfaz A + 3 "linhas" ao todo. Em cada "linha" há, claramente, A + 3 pequenos quadrados, então construímos $(A + 3)^2$ de $A^2 + 6A + 9$.

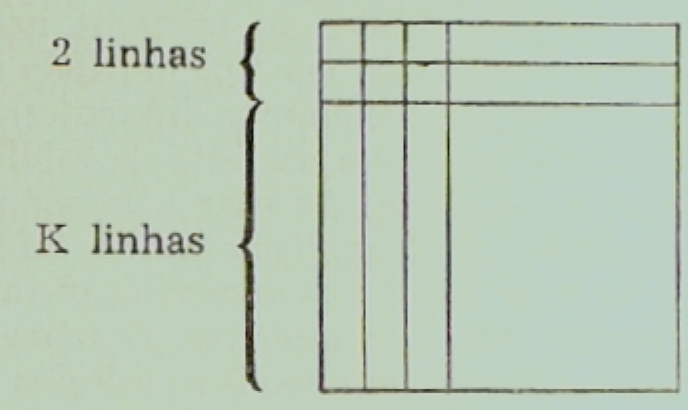
A criança que já percorreu essa estrada estará, agora, em condições de fazer fatoração de 2º grau e a resolver equações do mesmo grau. A resolução dessas é, certamente, analítica, porque se deve subdividir um quadrado e nêle colocar um pequeno quadrado. O número de objetos em uma "linha" (sejam quadrados ou triângulos reais) dará a solução do problema. Por exemplo, o problema pode ser arranjar 64 em três partes: I) 1 quadrado; II) 6 "linhas", cada uma das quais tão longa quanto as do quadrado; III) 9 objetos extras.

Não é provável que haja qualquer dano para a situação de aprendizado se a situação fôr conduzida pelo método de tentativas, como foi feito para a situação de equação linear. Se alguma criança achar a tarefa difícil, é preferível parar e tentar algo mais construtivo, tal como fatoração do 2º grau. A solução da equação acima é indicada nos três diagramas a seguir.



$$K^2 + 6K + 9 = 64$$
$$K = 5$$

Tendo construído quadrados, as crianças estarão perfeitamente aptas para construir retângulos mais gerais. Um exercício estruturado visando ao conceito da fatoração de 2º grau poderia ser, por exemplo, a apresentação de 1 quadrado, 5 retângulos com o lado maior igual ao do quadrado e 6 pequenos quadrados cujo lado seja igual ao menor do retângulo. Pode-se pedir às crianças que construam um retângulo com essa peça. Suponhamos que nosso quadrado seja K por K, isto é, que consista em K "linhas" de K quadrados menores. Estará claro, então, para cada criança, que há (K + 2) "linhas" de (K + 3) quadrados no retângulo e que, portanto, existem,



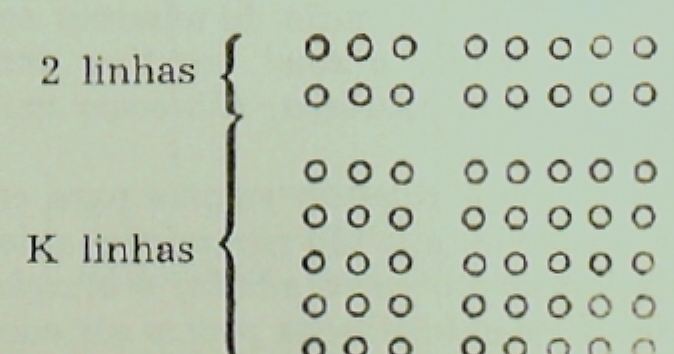
K + 3 em cada linha

ao todo $(K + 2) \times (K + 3)$ quadrados. Construímos $(K + 2) \times (K + 3)$ por meio de $K^2 + 5K + 6$.

Então,

$$K^2 + 5K + 6 = (K + 2) \times (K + 3)$$

O exercício poderá ser repetido no eucatex, tal como mostrado na figura abaixo.



Exemplo no eucatex quando K = 5

Deve-se dar ênfase ao fato de que o processo reverso, de multiplicar dois binômios, e de reunir os têrmos, é muito mais difícil e não deve ser tentado até que o conceito de fatoração esteja total e verdadeiramente operacional. Estamos, novamente, face a um exemplo em que os graus de dificuldade de duas tarefas são determinados pela utilização ou dos métodos rotineiros ou dos construtivos. O leitor poderá estar imaginando por que os números negativos estão com seu aparecimento tão retardado; de fato, nem mesmo o conhecimento de frações é essencial para a habilidade de uma criança aprender os conceitos descritos até agora. Os *tijolos fundamentais*, com os quais a criança estêve construindo até o momento, são: I) os números naturais; II) as classes de números naturais. É melhor ficar bem acostumado com um tipo de tijolo do que se lançar ao uso de espécies completamente diferentes; não queremos que o edifício caia por causa da falta de habilidade por parte de nossos jovens pedreiros. Ao usar números negativos, introduzimos uma espécie de ingrediente muito diferente. Os números passam a ter uma direção, os números naturais deixam de existir e se tornam números positivos. O número 3 não indica mais a propriedade comum a tôdas as coleções consistindo em 3 objetos, mas 3 passos *em certa direção*. Isso é uma grande revolução, muito mais difícil para uma criança realizar do que a solução de uma simples equação de 2º grau, a qual podemos construir com as experiências com *números naturais*. Por isso, sugere-se que, assim como + 3 sempre tem significado que se deve adicionar 3 a alguma coisa, − 3 deverá significar que se deve subtrair 3 a alguma coisa. Naturalmente essa alguma coisa deverá estar ali, ou nada se poderá subtrair, da mesma maneira que essa alguma coisa deve estar ali, como diz a operação com + 3; por si mesmos, êsses números nada significam para a criança, e são, de fato, sem sentido, a não ser que introduzamos os números dirigidos. É surpreendente quanto da *estrutura* da teoria dos números negativos pode ser formulado pelo simples uso de subtração de números naturais, e sugerimos que, no princípio, o sinal negativo deve ser usado apenas para indicar uma operação; não como um sinal ligado ao número que precede.

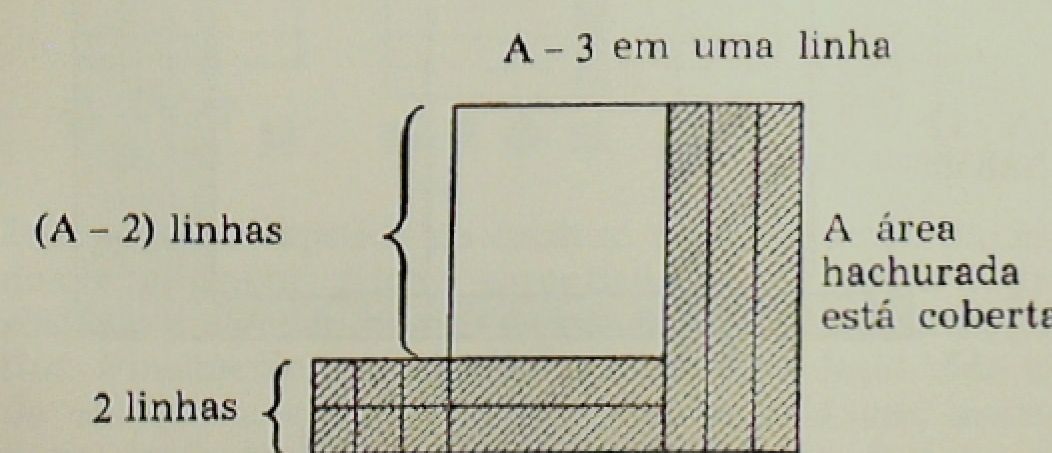
Não há espaço neste pequeno volume para entrar em detalhes sôbre as operações que são necessárias antes da criança descobrir o relacionamento entre adição, subtração e multiplicação. Informações mais detalhadas podem ser encontradas nos manuais referidos na bibliografia. Descreverei aqui as experiências que conduzirão as crianças à descoberta da fatoração de quadrados, com coeficientes positivos e negativos; e ofe-

recerei sugestões de como preencher a lacuna entre tais fatorações e a solução das equações correspondentes.

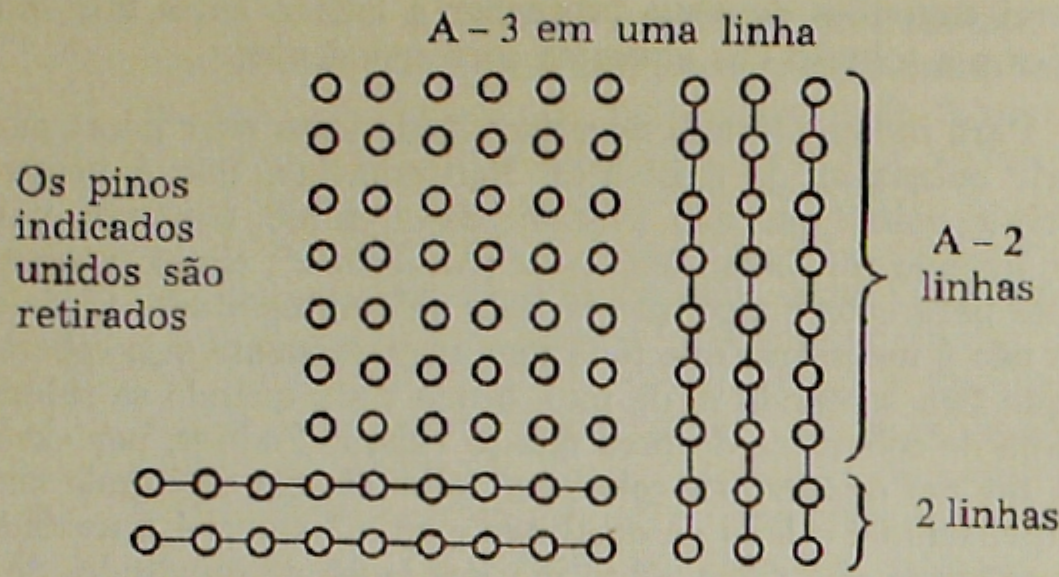
Para indicar têrmos negativos, poderemos usar peças para cobrir outras ali já existentes. Naturalmente, não é possível cobrir-se coisas que não existam; dá-se ênfase, portanto, para que, quando fôr dada uma "peça para cobrir", ela só possa ser usada para cobrir algo que já tiver sido apresentado. É lógico que não é necessário que tôda uma peça existente seja coberta. O que fica sobrando é, de fato, o que resta quando se subtrai a peça de cobertura da peça que já existir. Pode-se, por exemplo, ter um quadrado e colocar-se sôbre êle um retângulo cujo comprimento é o lado do quadrado e cuja largura é a unidade. Suponhamos que fique sôbre um dos lados do quadrado. Se o lado do quadrado tiver A unidades, o que fica sobrando é $A^2 - A$. As crianças fàcilmente perceberão que há A "linhas" de $A - 1$ quadrados unitários, ou $A - 1$ "linhas" de A quadrados unitários, sobrando, conforme o modo pelo qual olharem. Não demorarão muito a declarar que

$$A^2 - A = (A - 1) \times A = A \times (A - 1)$$

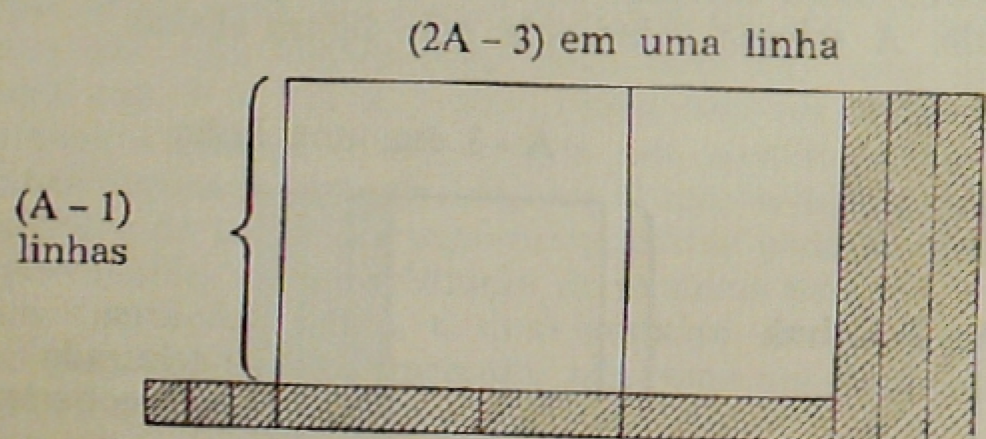
Consideremos, porém, um problema ligeiramente mais complicado, digamos a fatoração de $A^2 - 5A + 6$. As crianças colocarão, ràpidamente, em primeiro lugar, as peças "positivas", isto é, nesse caso, se estão sendo usados retângulos e quadrados, um quadrado grande e 6 quadrados pequenos. Têm 5 retângulos de cobertura para usar, de modo que, quando êles estão todos cobrindo alguma coisa, o que resta é um retângulo. A solução é indicada pela figura abaixo.



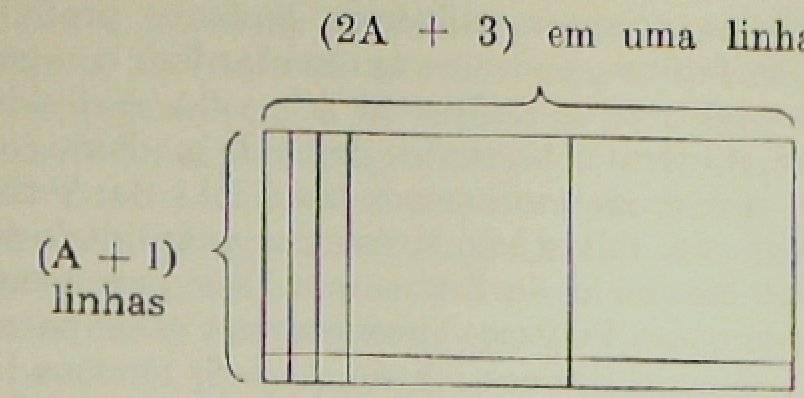
O mesmo pode ser feito com pinos e eucatex, e, nesse caso, os pinos "negativos" são de fato retirados. A solução é dada a seguir.



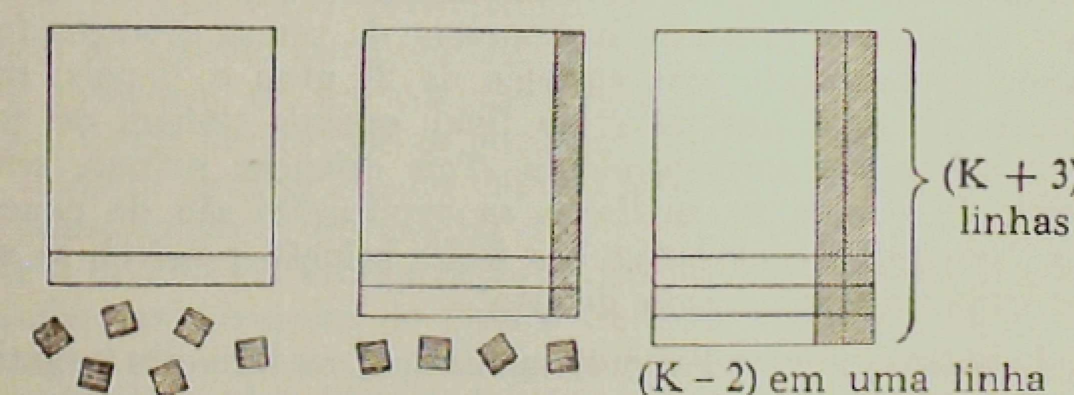
As crianças deverão repetir a solução no eucatex para diferentes tamanhos do quadrado, de forma a ficarem bem convencidas de que a solução não depende do tamanho do quadrado. Dessa forma, pelo menos duas variantes perceptivas foram experimentadas, e o tamanho também variou. Se fôr necessária outra variação, poderemos usar quadrados em vez de pinos, as "linhas" de quadrados substituindo, então, as de pinos, e isso dá também outra variação quantitativa — além de dar uma terceira variação perceptiva do tema conceptual de que se está tratando. Não há razão para não introduzir quadrados maiores: por exemplo, a solução para a fatoração de $2A^2 - 5A + 3$ é indicada a seguir.



Poderemos agora tentar os exercícios que envolvam formas de 2º grau que tenham propriedades semelhantes. Por exemplo, o relacionamento entre as equações de 2º grau $2A^2 - 5A + 3$ e $2A^2 + 5A + 3$ é representado em seus fatôres respectivos.

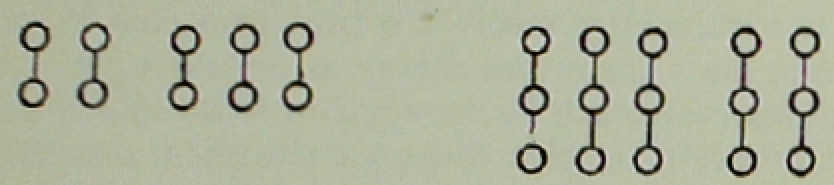


Passemos, agora, aos fatôres em que o têrmo absoluto é negativo, isto é, indicado na representação concreta pelas peças de cobertura. Consideremos, por exemplo, $K^2 + K - 6$. É impossível, naturalmente, resolver o problema com as peças existentes. Nada mais justo que deixar as crianças penetrar no importante, mas realmente óbvio, segrêdo matemático, aquêle que, se somarmos alguma coisa e depois tirarmos a mesma quantidade, ficamos com o que tínhamos inicialmente. Assim, podemos *somar* um retângulo e tornar maior a quantidade que temos, se, ao mesmo tempo, cobrirmos *outra parte* do que temos com um retângulo semelhante. Uma vez compreendido êsse segrêdo, abrem-se possibilidades sem fim. Podemos colocar outro retângulo ao lado do que já temos e cobrir outra parte com retângulo idêntico. Isso nos permite utilizar 2 de nossos quadrados de cobertura. Temos, apenas, de repetir o processo e usar outros quatro quadrados de cobertura e ficar com um retângulo.



Isso pode ser repetido no eucatex, ou de qualquer outro modo que o professor julgue apropriado, para tornar o processo abstrato e não dependente de certas peças de madeira ou plástico. Finalmente, as crianças aprenderão a fazer tôda a coisa de cabeça, de qualquer modo. Mas, nessa época, mesmo que o que estão fazendo não seja absolutamente abstrato, deriva-se da experiência e não se fêz violência alguma à dinâmica natural de seu pensamento. Evidentemente, quanto mais variada fôr a experiência que pudermos dar-lhes durante o período de formação, tanto mais abstratos serão os resultados finais.

Quando as crianças estiverem bastante proficientes em encontrar os fatôres, podemos apresentar-lhes o seguinte problema: "Ao calcular os fatôres de $A^2 - 5A + 6$ não tivemos muita sorte em têrmos bastantes peças de madeira (ou bastantes pinos), das quais pudéssemos tirar 5A? Se A tivesse sido bastante pequeno, talvez não tivéssemos quantidade suficiente? Ou podemos escolhê-lo de forma que haja justamente o suficiente e nada mais? Podemos encontrar um valor para A de tal forma que, quando tiramos 5A de $A^2 + 6$, teremos limpado a mesa?" A resposta é dada nas figuras a seguir: A pode ser 2, ou também 3.



Em *ambos* os casos (disjunção!) poderemos limpar a mesa. Fizemos o aparentemente impossível, *construímos uma disjunção.* É realmente a porta dos fundos da análise lógica; da mesma forma que as propriedades da balança nos deram a porta dos fundos da Álgebra enquanto estávamos trabalhando com os conceitos aritméticos, a construção de tal situação de disjunção abre a porta, embora sempre tão vagarosamente e sempre tão gradualmente, ao conceito de uma disjunção lógica. Todo professor de Álgebra já sentiu o desprazer de ver as crianças fatorando corretamente uma equação do 2º grau e, depois, cometendo um êrro "estúpido" ao final, quando tinham de resolver a equação correspondente. Tais crianças sofrem, sem dúvida, de choque de análise, e as explicações são de pouca valia. Um desvio construtivo é a única solução possível, se se quer evitar o aprendizado de cor.

Deve-se compreender que, nessa fase, os números negativos não existem e, portanto,

$$X^2 + 5X + 6 = 0$$

por exemplo, não terá solução. A existência de soluções depende do que resolvemos chamar de número. Ficamos bastante satisfeitos ao dizer a uma criança que $X^2 + 1 = 0$ não tem soluções e, contudo, procederemos igualmente satisfeitos ao contradizer-nos alguns anos depois. O mesmo pode ser aplicado a qualquer fase de aprendizado na qual apenas um campo restrito de números está sendo considerado.

As crianças precisam de muito tempo para descobrir a relação entre os fatôres e as soluções, mesmo quando dispõem de exercícios especialmente estruturados para êsse fim. Isso pode ser esperado, já que tal percepção é, essencialmente, das relações *internas* de uma estrutura, isto é, analítica, e, portanto, difícil, em seu todo, para a criança. De maneira alguma deve-se acelerar a progressão nesse ponto; se as experiências da criança ainda não a amadureceram para essa percepção, então estaremos perdendo tempo ao tentar ensiná-las a ela. Em uma fase posterior, quando ela estiver preparada, a percepção virá bastante fàcilmente.

Não devemos encerrar o capítulo sôbre a Álgebra sem delinear caminhos pelos quais poderemos preparar para a criança uma orientação construtiva para aprender índices e logaritmos. Minha experiência ensinou-me que extremamente poucas crianças das escolas primárias inglêsas têm qualquer noção da interligação entre as operações de elevação a uma potência, extração de uma raiz ou determinação de um logaritmo. Suspeito que não é porque os próprios professôres não estejam conscientes de tal conexão, mas por causa da amplamente divulgada técnica de estímulo-reação no aprendizado ter tal influência que o conhecimento dessas relações fica parecendo desnecessário para passar nos exames. Por outro lado, se é verdade que as crianças tendem a ter primeiro uma visão global do que estão aprendendo, então, certamente, é justamente tal aspecto geral que lhes deve ser dado. Uma criança vê uma paisagem em seu conjunto. Sòmente nós, adultos sofisticados, temos prazer com os pequenos detalhes e nos esquecemos da madeira para as árvores. Não se pode evitar a lembrança do entusiasta musical que analisa uma peça de música até à última nota e detalhe da orquestração; como pode tal pessoal gozar o grande arrebatamento de *tôda* a sinfonia, enquanto ela se desenvolve? O crítico de arte que aniquila uma obra de arte, investigando até o último detalhe, não é capaz, ou não quer, *deleitar-se com* a pintura, e satisfação, afinal, é o que ela deveria dar. Alguma percepção analítica é necessária, e pode conduzir à visão geral, mas o principal é sempre o todo e não a parte; a parte foi feita para o todo e não inversamente. Por essa razão, a região potência-raiz-logaritmo do pensamento matemático deverá ser, inicialmente, construída em seu contôrno principal, e a análise de suas partes deverá vir depois.

Qual é essa figura geral? É certamente esta: se tivermos três variáveis A, B, e C que estejam na seguinte relação

$$A = B^C$$

então é possível determinar duas delas de três modos diferentes. Correspondentemente, podemos apresentar três problemas diferentes, procurando o valor ou os valôres da terceira variável que satisfaça a relação acima, com as duas variáveis cujos valôres já tivermos escolhido. Em outras palavras, podemos escolher B e C e estabelecer a questão

$$X = B^C$$

onde X substitui o valor da variável a ser determinada. O valor será obtido elevando-se B à potência C. Por outro lado, podemos escolher A e C e estabelecer a igualdade

$$A = X^C$$

onde, novamente, deve-se determinar X. Isso é feito extraindo-se a raiz C de A. Finalmente, podemos escolher A e B e estabelecer a questão

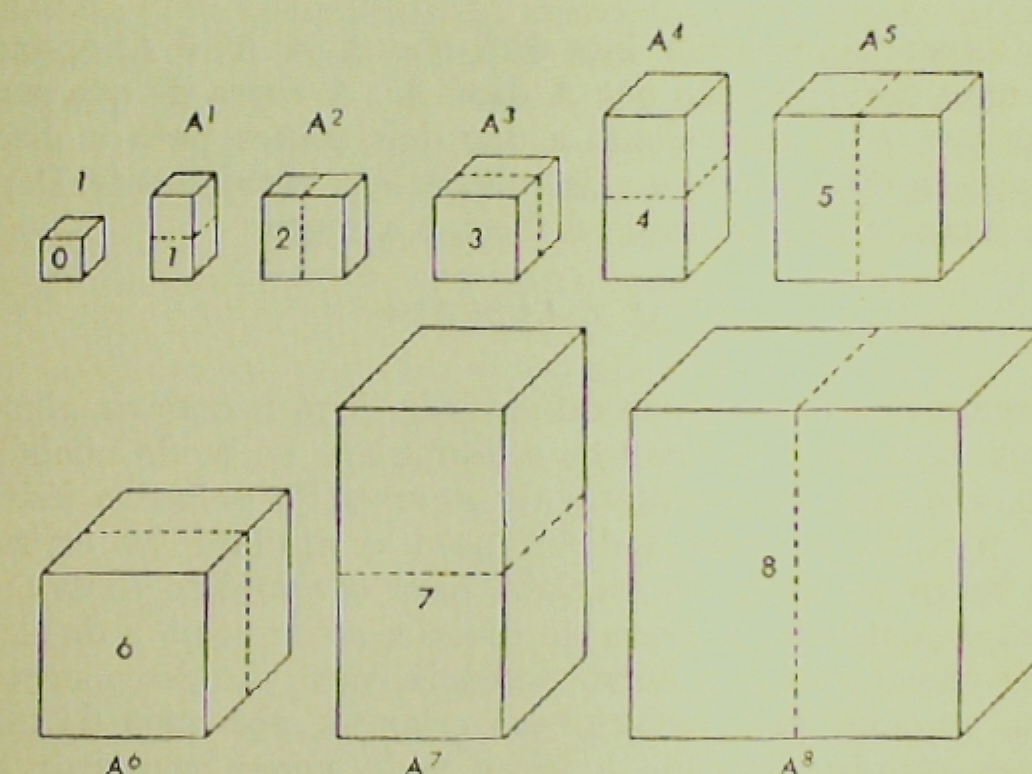
$$A = B^X$$

em que X é o valor da variável a ser determinada. Podemos obtê-lo determinando o logaritmo A na base B. Não se está, naturalmente, sugerindo que o problema seja apresentado às crianças dessa maneira, mas experiências estruturadas podem ser estabelecidas com essa finalidade em vista.

Qualquer aparelho para introduzir índices, isto é, potências, deverá ser construído de forma a permitir o máximo de variação para as duas variáveis em questão, a saber, a base e o índice. Há limitações para o tamanho do aparelho e poderemos verificar que, com potências de bases grandes, o índice não pode variar muito sem tornar o aparelho demasiado incômodo. Inversamente, se queremos introduzir grandes índices, então as bases terão, por fôrça, de se manter razoàvelmente pequenas. É possível trabalhar com as bases 2, 3 e 4 com uma razoável escala de índices, mas, mesmo assim, decrescendo em número à proporção que a base aumenta. Para conseguir maior variedade, é lògicamente possível usar bases fracionárias, e a experiência com elas conduzirá, finalmente, a importante percepção a respeito da base dos logaritmos naturais.

Pode-se construir o primeiro tipo de aparelho de índice usando-se o princípio da progressão geométrica englobado nos

blocos aritméticos (descritos na seção anterior). Nesse caso, será desnecessário ter as peças marcadas e, na realidade, será melhor que elas não estejam marcadas. Uma vez que são irrelevantes os números reais, baseados nos quais as peças são feitas, tal marcação iria apenas focalizar a atenção nas propriedades particulares e não nas gerais, e poderia, na verdade, embaraçar a formação do conceito de índices e logaritmos. Mostramos a seguir uma série de blocos de base 2. Lembramos ao leitor que, antes de tentar os exercícios que se seguem, já deve ter sido



realizada a "revolução direcional" a respeito dos números. Essa "revolução" é um assunto vasto e é tratada em outro lugar.

Na base 2, deverá, preferìvelmente, haver duas peças de cada espécie, pois, assim, cada peça pode ser construída de outras duas do tamanho imediatamente menor. Na série de base 3 deverá haver 3 de cada espécie, e assim por diante. Essa construção do tamanho maior seguinte é um exercício essencial para o conhecimento do que realmente significa a multiplicação de uma potência pelo número-base. Quando as crianças houverem adquirido uma prática adequada nisso, poderão abstrair o número da base, embora 2, 3 e 4 sejam uma variação bastante pobre. Contudo, nessa ocasião, estarão acostumadas com os processos de abstração e estarão procurando as propriedades comuns aos processos realizados com objetos de tamanhos variados. As crianças verificarão, então, que, se A é a base, isto é, o número de unidades que formam o primeiro "longo", multiplicar por A é dar um passo à direita ao longo da série. Da mesma forma, aprenderão que dividir por A é dar um passo à esquerda ao longo da série. Pode-se, então, perguntar qual seria o efeito de multiplicar por A^2. Se a lei associativa ainda não está operacional, a resposta a essa pergunta poderá custar a chegar. Mas, para os que sabem a lei associativa, não há dificuldade em considerar

A^2 vêzes A^5, isto é, $(A \times A) \times A^5$, como $A \times (A \times A^5)$

O exercício anterior lhes dirá que $A \times A^5$ é A^6 e, então, uma nova multiplicação por A dará A^7. A regra de que multiplicar por A^2 é equivalente a dar dois passos para a direita ao longo da série deverá ser descoberta bem ràpidamente. Depois dêsse passo, a generalização é fácil, e a regra

$$A^p \times A^q = A^{p+q}$$

é encontrada sem nenhuma dificuldade. Será necessária alguma prática para que as crianças a formulem no modo simbólico acima, e a fase intermediária de escrever "o primeiro índice" para p e "o segundo índice" para q ajudará as crianças mais lentas ao longo do caminho para o completo simbolismo de sua experiência. A regra da divisão, assim como a de elevação de uma potência a outra potência, pode ser descoberta da mesma maneira pela maioria das crianças, por meio de experiências apropriadas, que o leitor pode, agora, construir por si mesmo.

Agora é possível passar para os índices negativos e/ou fracionários. Os primeiros são naturalmente obtidos mudando-se de unidade, ou seja, a unidade atual será trocada para A^6, por exemplo. Passamos a falar em têrmos de uma nova unidade A^6, que chamamos de 1. A base continua a ser a mesma, mas a unidade foi alterada. Assim sendo, a multiplicação e a divisão ainda obedecem ao padrão familiar, e passos à esquerda (direcionalidade está implicada aqui!) levam diretamente aos índices negativos. Se, em vez de mudar de unidade, trocarmos de base, obteremos os índices fracionários. A^{12} é uma boa forma para escolher como uma nova base. Podemos chamá-la de B e, daqui em diante, vamos indicar as peças em têrmos de potências de B. Face a êsse problema, se forem dadas algumas indicações se necessário (dependendo de suas habilidades), as crianças chegarão, ràpidamente, a uma solução fracionária para o problema.

Temos 3 séries de caixas, correspondentes às 3 bases diferentes usadas. Qualquer caixa, em qualquer base em particular, tem um número (o índice), e essa caixa consistirá em certo número de unidades. Quando dizemos "Procure 3^5", o que estamos dizendo é "Quantas unidades há na Série 3, caixa 5?" Mas também podemos formular o seguinte problema: "Na caixa 7 há 128 unidades. A que série pertence?" Ou, "Na caixa 3 há 64 unidades. A que série pertence?" Na verdade, estamos perguntando qual é a base, quando são conhecidos o índice e o resultado da elevação da base a êsse índice. Será necessária uma quantidade de exercícios para tornar as crianças inteiramente familiarizadas com a natureza dêsse nôvo problema. Quando já estão bem à vontade de solucionar problemas que têm representações concretas à frente das crianças, pode-se formular um problema como êste: "Na caixa 4 há 625 unidades. A que série pertence?" Estará claro, após olhar todo o esquema, presumìvelmente agora esgotados todos os índices até 10, que há apenas 256 unidades na caixa 4 da Série 4. Deverá existir outra série que tenha mais unidades em *sua* caixa 4. Nosso pequeno pesquisador se defronta com o dilema de ou: I) construir, pelo menos mentalmente, a Série 5, ou II) aplicar imediatamente a regra fundamental de construção em seqüência à caixa 4; se estiver necessitando de mais experiência, fará a primeira, se tiver tido suficiente experiência da qual possa generalizar, fará a segunda alternativa. De nada adiantará interferir, pois êle pode estar próximo do momento crítico de uma percepção eventual, e o caminho deve ser deixado desimpedido. Da mesma forma como o nosso menino de sete anos aprenderá a somar e subtrair em bases cujas caixas nunca terá visto, o de onze ou doze anos, batalhando com a situação de extração de raízes, aprenderá a extrair raízes e a estar preparado a achar qualquer número como base.

Quando as crianças estão preparadas, a abstração pode ser aumentada ainda mais, formulando questões como as seguintes: "Vocês sabem que A^8 é a caixa 8 da Série A. Em que série estará a caixa 4?" Estamos, na realidade, pedindo-lhes que encontrem a raiz 4^a de A^8, mas não precisamos dizer que elas não estão conscientes disso. A resposta é, por certo, A^2, pois a Série A^2 consistirá nas caixas 1, A^2, A^4, A^6, A^8, A^{10} ...

.. 0 1 2 3 4 5

e é nessa série que A^8 aparece na caixa 4. "Em que série A^8 seria a caixa 2?" Evidentemente em 1, A^4, A^8, A^{12}... Não demorará que as crianças compreendam que os índices estão sendo divididos pelo número da caixa para acharmos o índice da base procurado. Agora, podemos providenciar, se necessário, experiências para estabelecer ligação com o conceito de índice fracionário, se êste já tiver sido aprendido; e $A^{p/q}$ logo significará A elevado à potência p e, depois, extraída sua raiz q.

Podemos agora passar ao terceiro tipo de pergunta, em que o índice é desconhecido. "Qual é o número da caixa da Série 3, que tem 81 unidades?" As crianças já se terão acostumado a ter diferentes números associados a diferentes formas, e podem, agora, saber que êsses números são chamados de logaritmos das formas. O de um cubo é 3, o de um "fino" é 2, o logaritmo de um "bloco fino" é 5, e assim por diante. Irão, também, perceber que, se queremos escrever o logaritmo de, digamos 64, temos, primeiro, de dizer a série em que estamos pensando. Podemos dizer log (Série 2) 64 = 6, mas, também, log (Série 4) 64 = 3. Elas sabem que as séries correspondem às bases, e a notação usual será aceita sem dificuldade.

Saberão, agora, que

$$A^2 \times A^3 = A^5$$

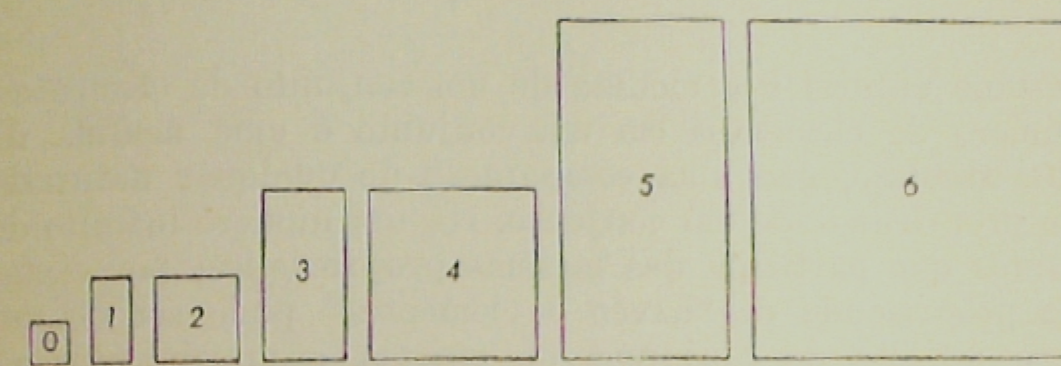
e que

$$\log {}_A A^2 = 2, \log {}_A A^3 = 3, \log {}_A A^5 = 5$$

A lei dos índices é apenas ligeiramente reformulada quando expressa em têrmos de logaritmos. Na verdade, longe de achar difícil, elas olharão os teoremas sôbre logaritmos, tais como log (AB) = log A + log B como outro modo de dizer as mesmas coisas que já sabiam a respeito de índices. Afinal, os logaritmos *são* índices, e é difícil ver de onde surgirá a dificuldade, supondo que as crianças já percorreram o caminho totalmente perceptivo.

As linhas principais da paisagem já estão claras. Podem ser dadas duas de três coisas: I) número da série; II) número da caixa; III) número de unidades na caixa; e o problema será achar o número restante. A êsses problemas correspondem, respectivamente, as operações de radiciação, logaritmos e potenciação. A representação simbólica, com a qual começamos êste pequeno ensaio sôbre potências, raízes e logaritmos, terá, agora, um significado e pode ser usada para cristalizar as experiências que as crianças tiveram com as caixas.

Para nos mantermos fiéis ao nosso Princípio de Variabilidade Conceptual, devemos iniciar agora com uma figura completamente diferente. As crianças que abstraíram com o que foi descrito até agora não precisarão de muito auxílio antes de divorciarem a essência da experiência. Por exemplo, poderemos desenhar uma simples série bidimensional, como indicado na figura a seguir. Qualquer perseverança por formas particulares que se possa ter formado será, em breve, abandonada com o uso de tal esquema, e podemos ter a certeza de que a essência puramente matemática terá sido construída.



5

ALGUMAS IDÉIAS SÔBRE A ÁLGEBRA LINEAR

O NÚMERO natural é a medida de um conjunto de elementos. O número de elementos em um conjunto é uma medida de caráter absoluto, não uma comparação de qualquer natureza, mas a propriedade de um conjunto. Há um número infinito de conjuntos que participa das mesmas propriedades; por exemplo, a propriedade de "haver 5 elementos" pode ser de um número infinito de conjuntos de objetos, acontecimentos ou idéias abstratas. A propriedade de "haver 5 elementos" separa tôda uma classe de conjuntos do total de conjuntos possíveis, tendo, todos, essa propriedade "dos 5". Todos os conjuntos em tal classe de conjuntos são chamados de *equivalentes* um ao outro; em linguagem comum, dizemos que têm o mesmo *número* de elementos.

Em muitas situações em que nos encontramos, comparamos quantidades, em vez de estabelecer quantidades absolutas, tal como declaradas pelos números naturais. Há muitas maneiras para comparar quantidades, mas as usuais são

I) declarando a razão entre as quantidades,
II) declarando a diferença entre as quantidades.

A primeira forma de comparação conduz ao estudo de razões ou frações; a segunda, ao dos *números dirigidos ou escalares*. Aqui nos interessaremos pela segunda forma de comparação. Assim, estudaremos o "isso é tanto mais que aquilo" e "isso é tanto menos que aquilo", tipo de frase matemática. Deve-se levar em conta que "cinco mais" não significa muito até que especifiquemos "cinco mais" de alguma coisa, assim como "cinco mais que" alguma coisa. Em outras palavras, precisamos de duas situações em que comparamos em uma escala de "mais que" e menos que", depois do que as frases sôbre "mais que" e "menos que" adquirem um significado definido. Por exemplo,

posso dizer que ganho NCr$ 100,00 mais que meu amigo. Isso tem um sentido claro. Se eu dissesse:

"Ganho NCr$ 100,00 mais"

não há um sentido muito claro. As pessoas poderiam pensar que ganho NCr$ 100,00 mais que no ano passado, ou que acabei de receber um aumento de NCr$ 100,00 ou que recebo NCr$ 100,00 mais que o salário normal para o meu trabalho etc. Ou, se eu dissesse:

"São NCr$ 100,00 que o salário de meu amigo"

ainda não está claro o que o "são" significa na frase.

Parece que seria altamente vantajoso apresentar muitas situações em que "mais que" e "menos que" medissem claramente uma quantidade em relação a outra, em uma escala de mais e menos. Os números que medem ao longo de tal escala são, muitas vêzes, chamados de *escalares* ou *números dirigidos*, ou *números positivos e negativos*.

De acôrdo com o princípio de variabilidade perceptiva, o maior número possível de tais situações deve ser apresentado para que as crianças possam, de fato, fazer abstrações, e não apenas aprender regras mecânicas que poderão não ser capazes de transferir para outras situações, até agora não-familiares.

Levando em consideração o princípio da variabilidade matemática, seria conveniente colocar as crianças *dentro* de cada situação, com certo número de variáveis independentes. Por exemplo, se tivermos de comparar os salários de duas pessoas, podemos também comparar o número de crianças em sua família, suas idades; em outras palavras, comparamos em uma quantidade de modos diferentes. Tal procedimento significaria que, em vez de começar o estudo de escalares pela medida em uma escala, poderíamos começar com medidas simultâneas em diversas escalas. Essas medidas simultâneas por meio de diferentes "dimensões" são, muitas vêzes, chamadas de *vetores*. O número de variáveis independentes descritas quantitativamente por um vetor é referido como o *número de dimensões* do vetor.

Que queremos dizer com as palavras "variáveis independentes"? As variáveis são independentes se o valor de uma pode ser mudado sem alterar o das outras. Por exemplo, as diferenças nos rendimentos são grandemente independentes das diferenças nos tamanhos das famílias. Nosso *rendimento* não muda com a adição de um nôvo filho à família (exceto em alguns países onde talvez sejam pagos altos salários-família) e nossa família não aumenta ou diminui automàticamente com acréscimos ou decréscimos em nosso rendimento. Por outro lado, se o nosso salário sofre um aumento anual, em uma escala salarial, então os rendimentos e a idade não são independentes, mudando os rendimentos cada ano que se passa.

Êsses tipos de consideração seriam grande verborragia para crianças de escola primária e, como já observamos, as crianças pequenas são muito mais capazes de construir seus conceitos por meio das próprias experiências concentradas do que de discussão verbal. Isso não quer dizer que não haja lugar para a discussão verbal, mas que é impossível discutir algo que ainda não se experimentou. Assim, vetores, escalares, variáveis independentes etc. são melhor apresentados por meio de experiências, das quais as crianças tirarão abstrações, expressas pelas noções matemáticas acima. Vamos descrever algumas dessas experiências.

Tomemos algumas fichas, de duas formas e duas côres. Separemos as quadradas, vermelhas e azuis, juntamente com o ábaco multibase, e algumas circulares, vermelhas e azuis (usadas nos jardins de infância). Temos, assim, alguns

quadrados azuis, quadrados vermelhos, círculos azuis, círculos vermelhos.

Se fôr necessário, poderemos incluir outras formas, mas é aconselhável que não se usem mais de três formas diferentes no início. Deve haver apenas duas côres (a menos que escolhamos três côres e duas formas, e façamos as formas adquirir as propriedades das côres, e vice-versa, no que vamos descrever).

São feitas pilhas de fichas, e dizemos às crianças para verificar se há mais quadrados azuis ou vermelhos, mais círculos azuis ou vermelhos. Se houver mais quadrados azuis que vermelhos, a pilha será chamada de *pilha quadrada azul;* se existirem mais quadrados vermelhos que azuis, *pilha quadrada vermelha.* Se houver mais círculos azuis que vermelhos, será uma *pilha circular azul,* e se houver mais círculos vermelhos que azuis, *pilha circular vermelha.* Êsses serão os nomes das pilhas. Cada pilha em particular terá dois nomes, um referindo-se aos quadrados, outro, aos círculos. Se houver uma terceira forma, então cada pilha terá três nomes. Se houver o mesmo número de quadrados azuis e vermelhos, a pilha poderá ser chamada *pilha de zero quadrados,* e, no caso semelhante com os círculos, uma *pilha de zero círculos.* Se uma pilha é zero círculos, assim como zero quadrados, e zero em tôdas as outras variáveis que estivermos considerando, então será uma *pilha zero.*

Depois de algum tempo, podemos encorajar as crianças a dar às pilhas melhores nomes, dizendo, exatamente, quantos quadrados vermelhos há mais que azuis, ou mais azuis que vermelhos, fazendo a mesma declaração em relação a tôdas as formas que estiverem sendo usadas na pilha. O nome de uma pilha típica poderá ser:

"3 quadrados vermelhos, 2 círculos azuis, 5 triângulos azuis"

o que significaria que, nessa pilha, há mais 3 quadrados vermelhos que azuis, mais 2 círculos azuis que vermelhos, mais 5 triângulos azuis que vermelhos. Se estabelecermos, para sempre, a ordem de escrever os numerais que expressam essas diferenças, poderemos omitir as palavras das formas. O "nome" acima poderia, então, ser escrito, abreviadamente,

"3 vermelhos, 2 azuis, 5 azuis",

supondo-se que concordamos em escrever primeiro os quadrados, os círculos depois e, no fim, os triângulos. O que as crianças terão de compreender é que um grande número de pilhas terá o mesmo nome. Essa compreensão não surge em um dia e será necessária muita experiência antes que percebam que um nome não se aplica a uma pilha em particular, mas a tôda uma classe de pilhas.

Para evitar escrever vermelho e azul, combinamos escrever "mais" ou "menos". Temos, porém, de combinar a respeito de "mais o quê?" A escolha é arbitrária, mas deve ser feita. Digamos que estaremos sempre tratando de peças azuis quando escrevemos as diferenças, de tal forma que, quando houver mais azuis que vermelhas, apenas escreveremos "mais" e, quando houver mais vermelhas que azuis — isto é, menos azuis que vermelhas — apenas escreveremos "menos". De acôrdo com essa convenção, o nome da pilha pode agora ser reescrito como

(3 menos, 2 mais, 5 mais) ou (menos 3, mais 2, mais 5)

Com os sinais matemáticos para essas palavras, o nome se tornará

$$(-3, +2, +5)$$

Conseguimos, portanto, chegar ao modo convencional e expressar um vetor. Isso não significa que os diferentes modos acima de expressar um mesmo vetor não sejam tão precisos como tão eficazes, *em nosso caso*. Mas não seria tão fácil usar as outras expressões do vetor em situações totalmente diferentes, visto que, em têrmos de "mais" e "menos", a expressão é aplicável a uma mais ampla variedade de situações. Por essa razão, não deverá ser apresentada até que essa variedade mais ampla de situações tenha sido, de fato, experimentada pela criança. O simbolismo convencional adquire certa medida de abstração, que deve ser conseguida antes que todo o poder e beleza abstrata da notação convencional seja apreciado.

É necessário, portanto, apresentar outras situações, a fim de acelerar o processo de abstração. Outra situação possível é a seguinte:

Suponhamos que a Inglaterra, a Irlanda e a Escócia estejam em uma competição de dança. Naturalmente, isso significa que competidores inglêses só dançarão com competidoras inglêsas, irlandeses com irlandesas e escoceses com escocesas. Os competidores devem dançar todo o tempo, enquanto tiverem um acompanhante do outro sexo com quem possam dançar. Não é permitido dançar com uma pessoa do mesmo sexo. Os que não estiverem dançando deverão estar na sala de espera. Nessa situação,

o número mais inglêses que inglêsas, ou
o número menos inglêses que inglêsas

será expresso por um numeral, que também expressará o número de pessoas inglêsas que estarão na sala de espera. O mesmo se aplica exatamente aos escoceses e irlandeses. Por exemplo, a situação em um dado momento da competição poderia ser expressa dando-lhe o seguinte nome:

"3 inglêses, 2 irlandesas, 5 escocesas"

o que significaria que há, naquele momento, mais 3 inglêses que inglêsas, mais 2 irlandesas que irlandeses e mais 5 escocesas que escoceses. Se combinarmos pôr em primeiro lugar as pessoas inglêsas, depois as irlandesas e por fim as escocesas, poderemos abreviar nosso "nome" da situação para

"3 homens, 2 mulheres, 5 mulheres"

É evidente que, depois, poderíamos concordar em usar o método "mais" "menos" para escrever o nome. Poderíamos aplicar os adjetivos "mais" e "menos" tanto aos homens como às mulheres. Escolhamos as mulheres para o "mais". Então, nossa situação será expressa pelo vetor

(3 menos, 2 mais, 5 mais) ou (menos 3, mais 2, mais 5)

ou em "Matemática"

$$(-3, +2, +5)$$

e podemos ver que o vetor que acabamos de escrever expressa a mesma situação matemática que antes, embora a situação "perceptiva", ou melhor, nesse caso, o contexto, seja claramente muito diferente nos dois casos.

Deve ficar bem claro que, em ambas as "corporificações" da idéia matemática do vetor, estamos lidando com variáveis independentes. Na primeira, o número de quadrados é claramente independente do de círculos, assim como do de triângulos. Podemos pôr mais quadrados na pilha, ou tirar alguns; isso não afetará a parte do "nome" que apresenta o número de círculos ou o de triângulos. O mesmo é verdade em relação às outras duas variáveis. Similarmente, se aparecerem mais competidores inglêses, isso não afeta o número de irlandeses ou escoceses que esteja ou dançando ou na sala de espera. E o mesmo é verdadeiro para escoceses e irlandeses.

É fácil perceber como a adição e a subtração são apresentadas, juntando ou diminuindo as pilhas de fichas ou de competidores. No caso das pilhas, por exemplo:

(1 mais, 4 menos, 3 mais) + (2 mais, 1 mais, 4 menos)
= (3 mais, 3 menos, 1 menos)

O nome do vetor de tôda a pilha acima é

(1 mais, 4 menos, 3 mais).

O nome do vetor da parte a ser removida é

(2 mais, 1 mais, 4 menos).

O nome do que é deixado na pilha é

(1 menos, 5 menos, 7 mais)

se as palavras "mais" e "menos" se referem às formas coloridas. Isso pode ser expresso pela subtração de vetores

$$(+1, -4, +3) - (+2, +1, -4) = (-1, -5, +7).$$

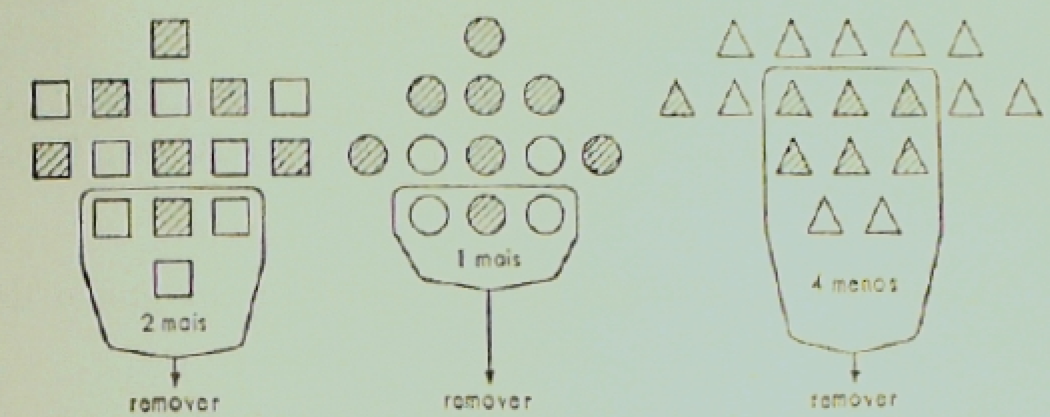
Será observado que à *união dos conjuntos de objetos* corresponde a operação de *adição*, e que à *diminuição de conjuntos de objetos* corresponde a operação de *subtração*. Não se deve esquecer que as pilhas é que são unidas ou diminuídas, mas que são os seus nomes de vetores que são adicionados ou subtraídos quando descrevemos a mudança no estado matemático de seus conjuntos.

É difícil, a princípio, compreender, por exemplo, que a pilha acima poderia ser substituída por qualquer outra do mesmo nome, desde que contivesse a pilha a ser removida como subpilha. A pilha a ser removida poderia, também, ter sido feita de modo diferente, contanto que tivesse o mesmo nome. A "pilha diferença" resultante seria, sem dúvida, diferente, mas seu nome ainda seria o mesmo (1 menos, 5 menos, 7 mais). As verdadeiras uniões e diminuições que realizamos são apenas protótipos de tôdas as possíveis uniões e diminuições que poderíamos realizar, se usássemos pilhas do mesmo nome. A subtração resultante será sempre a mesma, assim como o resultado da subtração.

Deverá ficar claro que não há razão por que não possamos usar qualquer número de variáveis nesses jogos de vetor. Em outras palavras, com êsse tipo de apresentação, são abertas as portas para as crianças estudarem espaços vetoriais n-dimensionais. Um "espaço" nada mais é que o conjunto de todos os possíveis vetores de uma determinada espécie, e não tem realmente nada a ver com o espaço geométrico, do qual tira o nome. O espaço geométrico é, por fôrça, uma situação particular em que espaços vetoriais de até três dimensões podem ser usados para descrever movimentos de um lugar para o outro. Na verdade, seria uma excelente idéia acompanhar os exercícios acima com outros posteriores, nos quais as crianças vão "passear" (se necessário no papel, se não houver espaço realmente disponível para o movimento integral pela sala de aula). Os passeios poderiam consistir em passos para Leste, passos para Oeste, outros para o Norte e outros para o Sul e, se desejarem, também passos para cima e passos para baixo. Tal como anteriormente, um passeio descrito como (3 Leste, 6 Sul) significaria haver 3 passos a mais para Leste que para Oeste, e 6 mais para o Sul que para o Norte. O leitor poderá, sem dúvida, tratar dos detalhes de juntar os passeios ou diminuí-los, levando às

correspondentes adições e subtrações de vetores dos nomes dos passeios. Algumas vêzes será necessário relembrar as crianças de que devem começar o segundo passeio exatamente onde terminaram o primeiro. Passeios interrompidos podem ser caracterizados pelo uso de uma carona em automóveis durante parte dêles ou pelo uso de bicicletas.

Para a subtração é conveniente consultar a figura a seguir:



Temos agora três interpretações da idéia de vetor.

I) pilhas de peças de formas diferentes em duas côres,
II) a estória da competição,
III) os passeios.

Naturalmente podemos imaginar mais estórias e pensar em outras interpretações físicas. Pôr a mesa, por exemplo, pois podemos imaginar "pares", como facas e garfos, xícaras e pires, argolas e guardanapos, e assim por diante, e cada conjunto de mesa receberia um nome tirado do excesso de objetos de cada par. Uma mesa em que haja

(8 facas, 7 garfos, 10 xícaras, 7 pires, 11 guardanapos e 9 argolas)

teria o nome

(1 faca, 3 xícaras, 2 guardanapos)

Podem ser imaginados cafés em que haja muitas mesas, postas um tanto negligentemente, de modo que há, muitas vêzes, peças ímpares de louça ou de talher; e, se chegam grandes grupos ao café, as mesas poderão ser reunidas, levando a outras "situações de adição", nas quais poderá ser praticada a soma de vetores. A separação das mesas levará às subtrações.

Outras interpretações poderão ser usadas, tais como, por exemplo, os braços da balança descrita no capítulo da Álgebra.

Em vez de equilibrá-los, poderemos deixar desequilibrados e a quantidade de desequilíbrio, para a esquerda ou para a direita, dará o nome para as correspondentes cargas sôbre os braços da balança. O número de balanças usadas simultâneamente determinará o número de dimensões do espaço vetorial correspondente, e os números-carga para cada balança fornecerão os escalares com os quais o espaço vetorial é construído. No caso de estarem sendo usadas três balanças simultâneamente, poderemos ter a seguinte situação:

Primeira, carrega 5 para a esquerda, 8 para a direita; segunda, 2 para a esquerda, 7 para a direita; terceira, 23 para a esquerda e 18 para a direita.

Temos aí uma situação de carregamento em que o desequilíbrio é o seguinte:

(3 mais à direita que à esquerda, 5 mais à direita que à esquerda, 5 mais à esquerda que à direita)

e, se formos descrever o lado direito da balança por meio de nossos escalares, poderia ser expresso pelo vetor

$$(+3,\ +5,\ -5).$$

É claro que os carregamentos de balanças são independentes uns dos outros, e que estamos tratando de um correspondente espaço vetorial de três dimensões.

Estritamente falando, ainda não construímos o que os matemáticos chamam normalmente de espaço vetorial. Isso, em parte, porque ainda não consideramos os escalares fracionários, e, em parte, porque ainda não tratamos de qualquer multiplicação de vetores por escalares. Isso só poderemos fazer depois de apresentar a multiplicação de escalares por escalares. O problema fracionário deveria, por outro lado, ser auto-evidente, de modo que nos restringiremos ao problema da multiplicação de escalares.

A operação normal usada para multiplicar um escalar por outro segue as seguintes "regras":

escalar positivo × escalar positivo = escalar positivo,
escalar positivo × escalar negativo = escalar negativo,
escalar negativo × escalar positivo = escalar negativo,
escalar negativo × escalar negativo = escalar positivo.

A estrutura-regra acima é um dos casos muito simples de um grupo matemático. Para dar uma idéia de lugar dessa estrutura no esquema matemático geral das coisas, talvez seja útil apresentar estruturas-regra algo mais complexas, particularmente se o simples grupo acima puder ser encarado como parte dos grupos mais complexos apresentados. Poderá, por exemplo, ser organizado o seguinte jôgo:

Desenhar, no chão, um quadrado com as diagonais. Dois dos lados poderão acompanhar as tábuas do soalho da sala de aula, ficando os outros atravessando-as. Uma criança poderá ser colocada em um dos cantos do quadrado e receber a missão de executar um ou vários dos seguintes "movimentos" do jôgo:

1)	Ficar onde está	FICAR
2)	Mover-se ao longo das tábuas para o outro canto	Movimento pelas TÁBUAS
3)	Mover-se perpendicularmente às tábuas para o outro canto	Movimento PERPENDICULAR
4)	Mover-se pela diagonal para o outro canto	Movimento DIAGONAL

Depois da criança realizar dois movimentos sucessivos, podemos perguntar-lhe se poderia vir de onde estava para onde está em apenas um movimento. Se fôr possível, qual teria sido o movimento? Com os movimentos acima, isso é sempre possível, como o leitor poderá fàcilmente verificar. Por exemplo, um movimento pelas Tábuas, seguido de um Diagonal, poderia ser realizado por um simples movimento Perpendicular. As crianças, muitas vêzes, divertem-se bastante com a descoberta de tôdas as relações entre os possíveis pares de movimentos, preparando a tabela da página seguinte.

A estrutura-regra mostrada nessa tabela é conhecida, em Matemática, como o *grupo Klein*. Pode-se ver que cada uma das dezesseis combinações de pares de movimentos pode ser substituída por um único movimento, que pode ser chamado de *produto* dos dois movimentos de cada par. Essa propriedade de grupos matemáticos é chamada de *fechamento*. O jôgo acima é fechado, no sentido de que, qualquer que seja o número de movimentos executados, um após o outro, pode ser substituído por um único movimento, por meio do qual se atinge o ponto final, partindo do inicial. Pode-se também ver que, depois de cada movimento, há apenas um que restabelece a situação

Ficar · Ficar = Ficar	Ficar · Tábuas = Tábuas	Ficar · Perpendicular = Perpendicular	Ficar · Diagonal = Diagonal
Tábuas · Ficar = Tábuas	Tábuas · Tábuas = Ficar	Tábuas · Perpendicular = Diagonal	Tábuas · Diagonal = Perpendicular
Perpendicular · Ficar = Perpendicular	Perpendicular · Tábuas = Diagonal	Perpendicular · Perpendicular = Ficar	Perpendicular · Diagonal = Tábuas
Diagonal · Ficar = Diagonal	Diagonal · Tábuas = Perpendicular	Diagonal · Perpendicular = Tábuas	Diagonal · Diagonal = Ficar

existente antes daquele ser executado. Por exemplo, quando se realizou um movimento Diagonal, outro Diagonal restabelecerá a situação. Se tiver sido um pelas Tábuas, outro pelas Tábuas executará o restabelecimento. O mesmo é verdadeiro com o Perpendicular e também com o Ficar.

Um movimento que inverterá um outro é chamado de *inverso* daquele movimento. Podemos ver que, no jôgo acima, cada movimento é seu próprio inverso. A execução de um movimento, seguida da de seu inverso, faz um par que é sempre equivalente ao Ficar. Está claro, também, que um Ficar não tem efeito sôbre qualquer outro movimento com que o combinemos. Um movimento dêsse tipo é usualmente chamado de *neutro* ou de elemento neutro do grupo. Finalmente, pode-se verificar que a operação de combinar movimentos em movimentos únicos é *associativa*. Por exemplo:

(Tábuas. Perpendicular). Diagonal =
= Tábuas. (Perpendicular. Diagonal)

ou

(Diagonal. Perpendicular). Diagonal =
= Diagonal. (Perpendicular. Diagonal)

Qualquer conjunto de movimentos que defina um caminho, no qual pares de movimentos são transformados em movimentos únicos, representa um grupo matemático quando, *e sòmente quando,*

I) o conjunto de movimentos é fechado,
II) para cada movimento existe um inverso,
III) existe um movimento neutro,
IV) a regra-combinação é uma operação associativa.

Há uma quantidade de modos diferentes nos quais o mesmo conjunto de regras pode ser produzido por situações físicas. Faríamos, por exemplo, surgir o mesmo conjunto de regras girando um objeto em dois ângulos retos em relação a cada um de três eixos mùtuamente perpendiculares, além de um "ficar". Ou, ainda, se tivéssemos duas côres e duas formas, poderíamos fazer duas pilhas de objetos, nas quais podem ocorrer quaisquer combinações das duas formas e das duas côres e podemos apresentar o seguinte conjunto de regras:

1) Fazer outra pilha com exatamente o mesmo número, a mesma côr e a mesma forma de objetos de outra

2) Transformar uma determinada pilha dada em outra, mudando a côr de cada objeto, mas mantendo a mesma forma
3) Transformar uma determinada pilha de objetos em outra, mudando a forma de cada objeto, mas mantendo a côr
4) Transformar uma determinada pilha de objetos em outra, mudando a forma como a côr de cada objeto.

De acôrdo com essas regras, se usarmos a regra 2) para uma transformação, e depois a regra 3), aplicando-a à pilha transformada, teremos mudado nossa pilha original em nossa terceira pilha, mudando, finalmente, tanto a côr quanto a forma. Isso poderia ter sido realizado usando a regra 4). Portanto: 2) . 3) = 4).

Iremos ver que, em tôdas as representações dadas até agora, cada movimento é seu próprio inverso. Se mudarmos a côr, e se, depois, a mudarmos novamente, estaremos de volta à situação original. Se girarmos um objeto em tôrno de *qualquer* eixo, em dois ângulos retos, e, depois, executarmos outro giro de dois ângulos retos, em tôrno do mesmo eixo, retornaremos à posição original. De todos os jogos acima, podemos tirar três "subjogos", havendo sòmente dois movimentos em cada um dêsses "subjogos", e isso é possível justamente porque cada movimento é seu próprio inverso. Os "subjogos" são os seguintes:

(FICAR, TÁBUAS) (FICAR, PERPENDICULAR) (FICAR, DIAGONAL)

A estrutura-regra de cada subjogo é:

Ficar . Ficar = Ficar	Ficar . Tábuas = Tábuas
Tábuas . Ficar = Tábuas	Tábuas . Tábuas = Ficar
Ficar . Ficar = Ficar	Ficar . Perpendicular = = Perpendicular
Perpendicular . Ficar = = Perpendicular	Perpendicular . Perpendicular = Ficar
Ficar . Ficar = Ficar	Ficar . Diagonal = Diagonal
Diagonal . Ficar = Diagonal	Diagonal . Diagonal = Ficar

Será ràpidamente percebido que todos êsses subjogos têm a mesma estrutura-regra, correspondente à do subgrupo (e, a) em que e indica o elemento neutro, e as regras são

$$e\ e = e \qquad e\ a = a$$
$$a\ e = a \qquad a\ a = e$$

Êste é o único grupo matemático que consiste em dois elementos, como pode ser fàcilmente provado, superpondo aos nossos dois elementos as quatro condições que um grupo deve satisfazer. Ficará evidente, também, que a multiplicação de escalares por escalares mostra justamente a estrutura-regra acima, onde o elemento neutro é "escalar positivo" e o outro elemento é "escalar negativo".

Para fazer a estrutura parecer ainda mais "natural" para as crianças, devemos apresentar-lhes uma quantidade de exemplos, além do anterior, nos quais é usada a estrutura-regra do grupo com dois elementos. Por exemplo, somando números pares com ímpares, mostraremos a mesma estrutura, onde os "números pares" são o elemento neutro e os "números ímpares" são o outro elemento, e a adição é a operação que fornece outros elementos além dos pares. Assim, está claro que

"qualquer número par" mais "qualquer outro número par" =
= "um número par"

o que corresponde à declaração e e = e na expressão simbólica do grupo. Será fácil verificar que outras três declarações, que poderemos fazer sôbre a soma de números pares e ímpares, corresponderão à estrutura-regra do grupo com dois elementos.

Devem ser dados outros exemplos menos matemáticos. Podemos, por exemplo, brincar com o interruptor de luz. Os dois movimentos do jôgo podem ser

e ⇔ mover o interruptor duas vêzes
a ⇔ mover o interruptor uma vez.

Será observado que, conforme essas operações sejam reunidas, novamente teremos as regras do grupo com dois elementos.

O trabalho no grupo com dois elementos pode ser formulado da seguinte maneira:

elemento neutro: juntando o elemento neutro para fazer um par, teremos o *mesmo* elemento que colocamos para fazer o par com o elemento neutro.

Por exemplo: pondo a com e, teremos a novamente
pondo e com e, teremos e novamente

outro elemento: juntando o outro elemento para fazer um par, teremos um elemento *diferente* daquele que usamos para fazer o par com o outro elemento.

Por exemplo: pondo a com a, mudamos o a em e
pondo e com a, mudamos o e em a

Assim, o elemento neutro tem o efeito de deixar as coisas como são, e o outro elemento tem o efeito de mudar as coisas.

Podemos, agora, passar ao problema da multiplicação escalar. Tomando, em primeiro lugar, o problema mais simples de multiplicar escalares por escalares, convém relembrar que, em qualquer escala de "mais que" "menos que", temos exclusivamente essas duas espécies de escalares referidas como números positivos e negativos, respectivamente. É costume usar os números positivos para desempenhar o papel de elemento neutro, e os negativos para o do outro elemento. Isso não é essencial, mas é conveniente, uma vez que tôdas as convenções matemáticas baseadas no uso de números positivos e negativos partem dessa escolha.

Uma representação física de tais multiplicações poderá ser elaborada providenciando-se um grande número de objetos vermelhos e azuis, como, por exemplo, fósforos tintos naquelas côres. Diremos às crianças para fazer dois conjuntos de fósforos:

Poderemos chamá-los de: I) conjunto A; II) conjunto B.

O problema será construir ainda um terceiro conjunto de fósforos, que poderemos chamar de conjunto C, de tal forma que nêle haverá

a) tantos conjuntos B quantos fósforos azuis houver no conjunto A,
b) tantos "opostos" ao conjunto B quantos fósforos vermelhos no conjunto A.

O "oposto" a qualquer conjunto de fósforos K deveria conter o mesmo número de fósforos que o conjunto K, mas tantos azuis quantos forem os vermelhos em K, e tantos vermelhos quantos os azuis de K.

Tomemos, por exemplo,

Conjunto A	Conjunto B	Conjunto C
aaavvvv	aavvvv	aaavvvv
		aaavvvv
		vvvaaaa
		vvvaaaa
		vvvaaaa
		vvvaaaa

Nome-número do conjunto A = "1 vermelho mais que azuis"
Nome-número do conjunto B = "2 vermelhos mais que azuis"
Nome-número do conjunto C = "2 azuis mais que vermelhos"

O equivalente matemático do exercício acima seria

"1 vermelho mais que azuis" vêzes "2 vermelhos mais que azuis" = "2 azuis mais que vermelhos"

ou

"1 azul menos que vermelhos" vêzes "2 azuis menos que vermelhos" = "2 azuis mais que vermelhos"

ou

$$(-1) \times (-2) = (+2)$$

O jôgo acima, junto com outros semelhantes, estabelecerá o uso do grupo com dois elementos como o modo de apresentar a multiplicação de escalares. As regras serão definidas como

a) multiplicando-se por um número positivo, o sinal fica inalterado,
b) multiplicando-se por um número negativo, o sinal é alterado

correspondendo às funções do elemento neutro e do outro elemento no grupo com dois elementos.

Essas regras podem ser expressas mais formalmente da **seguinte maneira**:

mais vêzes mais = mais, mais vêzes menos = menos,
menos vêzes mais = menos, menos vêzes menos = mais

que são, de fato, as regras de multiplicação usuais.

Podemos, agora, tomar um vetor, representado, por exemplo, pelo seguinte conjunto de peças:

{□□ ◍◍◍ △} cujo vetor é (+ 2, − 3, + 1),

em que os escalares descrevem as peças coloridas, isto é, expresso integralmente como (2 brancos mais que prêtos, 3 brancos menos que prêtos, 1 branco mais que prêto), referindo-se o primeiro escalar ao número de quadrados; o segundo, ao de círculos; o terceiro, ao de triângulos. (Quaisquer "opostos" da mesma forma já tendo sido suprimidos por não interessarem ao nome do vetor.)

Se tivermos, agora, um conjunto de fósforos, representando um escalar a ser usado como multiplicador do vetor acima, teremos estabelecido a situação física correspondente à multiplicação de um vetor por um escalar. Podemos tomar, por exemplo,

(3 fósforos azuis) como nosso conjunto de fósforos.

Podemos convencionar que as figuras brancas se referem a azul, e que as pretas se referem a peças vermelhas. Usando o azul para representar o neutro no grupo com dois elementos, nosso conjunto de fósforos indicará a triplicação do número de peças no conjunto que indica nosso vetor, com as côres deixadas inalteradas. Obteremos o seguinte conjunto de peças

{□□□□□□ ◍◍◍◍◍◍◍◍◍ △△△}

como nosso conjunto-produto, isto é, o conjunto *produzido* pelo conjunto-multiplicador, consistindo em três fósforos azuis, e

pelo conjunto-multiplicando, consistindo em (dois quadrados azuis, três círculos vermelhos, um triângulo azul) que representava nosso vetor (+ 2, − 3, + 1). O vetor do conjunto-produto é evidentemente (+ 6, − 9, + 3). Poderíamos escrever a multiplicação assim:

$$(+3) \;.\; (+2,\ -3,\ +1) = (+6,\ -9,\ +3)$$

Conjuntos de fósforos vermelhos multiplicariam, da mesma forma, o número de objetos de conjunto-multiplicando, mas teriam o efeito de alterar tôdas as côres. A notação matemática correspondente seria

$$(-3) \;.\; (+2,\ -3,\ +1) = (-6,\ +9,\ -3)$$

Se continuarmos, para permitir partes fracionárias das formas, então a correspondente descrição matemática da situação será o espaço vetorial, pois temos, agora,

I) adição de vetores,
II) multiplicação de vetores por escalares.

Há vários caminhos que podemos tomar a partir de agora. Um poderia ser um aprofundamento da compreensão da estrutura recém-descrita, apresentando essa mesma estrutura em uma quantidade de maneiras diferentes, numa tentativa de induzir as crianças a ligar as diferentes apresentações, auxiliando-as, dessa forma, a perceber sua estrutura comum, isto é, a do espaço vetorial. Já mostramos como isso pode ser feito com o uso das diferentes interpretações do grupo Klein. Podemos pedir as crianças para organizar "dicionários" com as diversas interpretações. No caso do grupo Klein, um dêsses "dicionários" poderia ser

FICAR ⇔ CÓPIA
TÁBUAS ⇔ MUDANÇA DE CÔR
PERPENDICULAR ⇔ MUDANÇA DE FORMA
DIAGONAL ⇔ MUDANÇA DE CÔR E FORMA

Tal "dicionário" traduzirá as frases de uma interpretação para outra. A sentença, por exemplo,

TÁBUAS . PERPENDICULAR = DIAGONAL

é traduzida para a frase

MUDANÇA DE CÔR . MUDANÇA DE FORMA = MUDANÇA DE CÔR E FORMA

que é a *verdadeira frase*. Um dicionário é chamado de *isomorfismo* se traduz qualquer frase verdadeira de uma língua em uma frase verdadeira em outra língua, e vice-versa. Tais isomorfismos esmiúçam as propriedades estruturais das representações, mostrando as ligações reais que são preservadas, independentemente das representações particulares usadas. Uma estrutura matemática não é mais que um conjunto de tais conexões invariáveis.

É muito fácil fazer dicionários que estabelecerão isomorfismos entre diferentes representações de espaços vetoriais. Por exemplo, a representação de

quadrados azuis, quadrados vermelhos, círculos azuis, círculos vermelhos

pode ser ligada à de

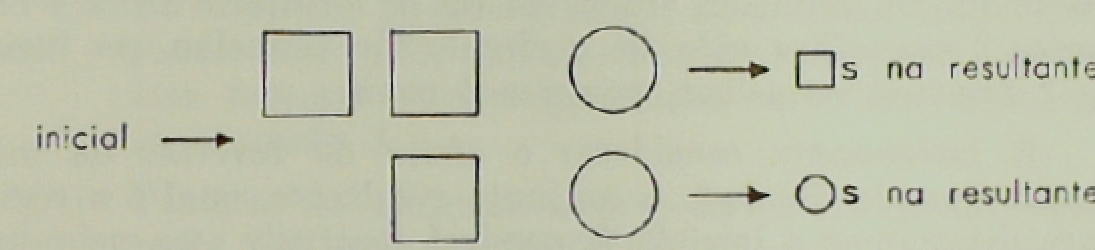
passos para Leste, para Oeste, para o Norte e para o Sul

pelo seguinte isomorfismo:

quadrados azuis ⇔ passos para Leste quadrados vermelhos ⇐ ⇒ passos para Oeste
círculos azuis ⇔ passos para o Norte círculos vermelhos ⇐ ⇒ passos para o Sul

Qualquer outro dicionário que faça pares corresponderem a pares será um isomorfismo, isto é, traduzirá frases verdadeiras sôbre união e separação de pilhas em frases verdadeiras sôbre união e separação de passeios, e vice-versa. Se quisermos incorporar multiplicações de vetores por escalares em nossas frases, então, devem ser escolhidas direções positivas e negativas em nossa representação de passeios; os escalares serão, então, o número de excesso de passos positivos sôbre o negativo ou o de negativos sôbre os positivos. Multiplicar por um escalar positivo significará multiplicar o número de passos do passeio, mantendo-os na mesma direção anterior. Multiplicar por um negativo seria multiplicar o número de passos do passeio, mas, então, cada passo seria substituído na multiplicação pelo múltiplo encontrado, mas como espécies opostas de passos. No isomorfismo, será necessário declarar que os escalares positivos em uma representação devem ser traduzidos por escalares positivos na outra, e os negativos, por negativos. Se isso não fôr feito, algumas multiplicações poderão ser traduzidas por multiplicações inverídicas na outra representação, e o dicionário não seria um isomorfismo.

Alternativamente, podemos iniciar com o estudo das matrizes. Isso pode ser realizado com a construção de máquinas de papel que executarão as transformações de vetores em outros. Uma dessas máquinas pode ser parecida com a mostrada no diagrama a seguir:



A máquina funciona da seguinte maneira. Devemos escolher um conjunto inicial, por exemplo (3 quadrados azuis, 2 círculos vermelhos). Devemos, então, ter disponível um suprimento de fósforos azuis e vermelhos para representar os escalares. Em cada quadrado da máquina devemos pôr tantos fósforos quantos quadrados há no conjunto inicial e da mesma côr. Em cada círculo da máquina devemos pôr tantos fósforos quantos círculos há na máquina e da mesma côr. Isso significa que na primeira fila da máquina teremos 6 fósforos azuis e 2 vermelhos, o que, na escala vermelho-azul, é medido pelo escalar "4 azuis mais que vermelhos". Devemos combinar que a primeira fila da máquina produz quadrados para o conjunto resultante e sabemos, agora, que haverá quatro quadrados azuis no conjunto resultante. Na segunda fila há 3 fósforos azuis e dois vermelhos, o que, na escala azul-vermelho, é medido pelo escalar "1 azul mais que vermelhos"; se combinamos que a segunda fila produz círculos para o conjunto resultante, êste terá 1 círculo azul. Assim,

o conjunto inicial (3 quadrados azuis, 2 círculos vermelhos)

é transformado em

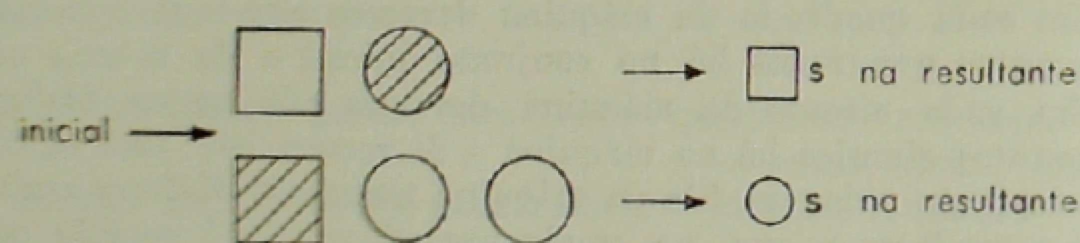
o conjunto resultante (4 quadrados azuis, 1 círculo azul).

Podemos agora acrescentar que a moldura desenhada para representar as partes da máquina deve ter sido desenhada em azul. Se, porém, qualquer moldura na máquina fôr desenhada em vermelho, então o mesmo número de fósforos ainda deve ser pôsto em tal moldura que o número de peças dessa forma no conjunto inicial, mas êles devem ser da côr oposta à das peças a que correspondem os fósforos no conjunto inicial. Em outras palavras, estamos mantendo a convenção de que

azul é a côr que mantém as côres inalteradas,
vermelho é a côr que altera as côres.

Por exemplo, se o quadrado na segunda fila da máquina foi desenhado em vermelho, então, em vez de 3 fósforos azuis, serão postos 3 vermelhos nêle. Se o círculo fôr vermelho, em lugar de 2 fósforos vermelhos, poremos 2 azuis.

É interessante considerar o efeito de reversão da máquina. Quando fôr dado o conjunto resultante, qual é a regra para determinar o inicial? É possível construir uma máquina semelhante, que produzirá 3 quadrados azuis e 2 círculos vermelhos como resultante quando se colocar nela 4 quadrados azuis e 1 círculo vermelho como conjunto inicial? A resposta é sim, e a máquina é:



Essa máquina desfaz tudo que a outra fêz, e vice-versa. Cada uma é, portanto, o inverso da outra.

Correspondendo à transformação de conjuntos iniciais em resultantes por tais máquinas de papel, falamos da mudança de vetores iniciais em vetores resultantes pelas matrizes. Uma matriz é o artifício matemático que transforma um vetor em outro, na forma linear acima. Existem manuais de professôres e cartões de alunos para criar situações que auxiliem a espécie de aprendizado descrita aqui (ver *Positive and negative numbers through vectors and matrices for elementary school children*, Z. P. Dienes, O.C.D.L., Paris).

Outro caminho ainda possível seria definir a multiplicação diretamente em um espaço vetorial multidimensional, decidindo por uma "tabuada de multiplicação" para os vetores unitários, e postulando a lei distributiva de multiplicação em relação à adição e subtração. A representação física de tal processo matemático seria algo como o que segue.

Tomemos alguns quadrados e círculos azuis ou vermelhos e façamos um conjunto A e um conjunto B com êles, como anteriormente. Depois, façamos um conjunto C de acôrdo com as seguintes regras :

1) No conjunto C deverá haver tantos conjuntos B quantos *quadrados azuis* existirem no conjunto A.

2) No conjunto C deverá haver, além disso, tantos conjuntos como o B, com as côres alteradas, mas as mesmas formas, quantos *quadrados vermelhos* existirem no conjunto A.

3) Também no conjunto C deve haver tantos conjuntos como o B, mas com as formas alteradas e as mesmas côres, quantos *quadrados azuis* houver no conjunto A.

4) Finalmente, deve haver no conjunto C tantos conjuntos como o B, mas com formas e côres alteradas, quantos *círculos azuis* houver no conjunto A.

Tomamos o conjunto A como multiplicador; o B como multiplicando e o C como produto. Está claro que se colocarmos apenas um quadrado azul no conjunto multiplicador, o produto terá as mesmas espécies de peças que o multiplicando e o mesmo número. O quadrado azul corresponde ao elemento neutro no grupo. Da mesma forma, se colocarmos apenas um quadrado vermelho no multiplicador, então, para passar do conjunto multiplicando para o produto, teremos de mudar a côr de cada peça, mas manter igual a forma. Idênticamente, atribuímos ao círculo azul a transformação de formas, sem mudança de côr, e ao círculo vermelho, a transformação que altera tanto a forma quanto a côr. Como já vimos, superpondo essas transformações uma à outra produzimos a estrutura conhecida como grupo Klein.

As regras de multiplicação acima referidas não são, de modo algum, as únicas possíveis. Na verdade, a escolha é, teòricamente, bem arbitrária, e as crianças poderão divertir-se construindo as mais estranhas estruturas apenas pensando em esquisitas regras de multiplicação. É verdade que leis tais como as de associatividade, comutatividade etc. logo serão jogadas fora, se não formos cuidadosos. Na realidade, as leis acima não são as mais costumeiras. As apresentadas a seguir constituem uma estrutura matemática usual, imposta a um espaço vetorial bidimensional:

quadrado azul como conjunto multiplicador: não muda nada, elemento neutro;

quadrado vermelho como conjunto multiplicador: muda a côr, mas não a forma;

círculo azul como conjunto multiplicador: muda a forma, mas não a côr, quando alterando do quadrado para o círculo; muda forma e côr quando mudando do círculo para o quadrado;

círculo vermelho como conjunto multiplicador: muda a forma, mas não a côr, quando alterando do círculo para o quadrado; muda forma e côr quando alterando de quadrado para círculo.

Um espaço vetorial a que se impõe a estrutura de multiplicação acima é conhecido como o campo de *números complexos*, ou de *Álgebra complexa*. Pode-se ver, fàcilmente, que a estrutura-regra personificada nas regras

T	Giro total
M	Meio giro (isto é, dois ângulos retos)
P	Giro de um ângulo reto no sentido dos ponteiros do relógio
C	Giro de um ângulo reto no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio

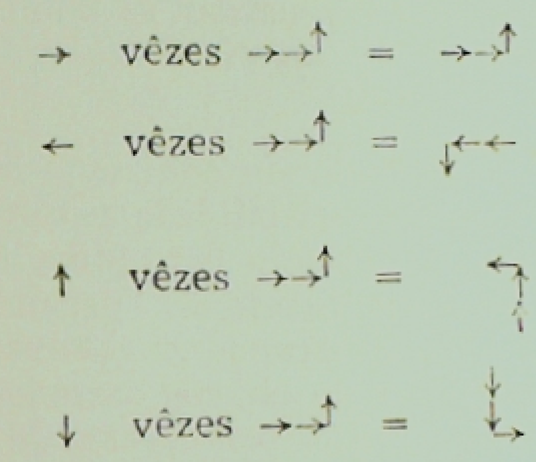
é a mesma personificada anteriormente nas transformações de côr e forma. Deixa-se ao leitor verificar que os dois dicionários

quadrado azul ⇔ T, quadrado vermelho ⇔ M,
círculo azul ⇔ P, círculo vermelho ⇔ C,

quadrado azul ⇔ T, quadrado vermelho ⇔ M,
círculo azul ⇔ C, círculo vermelho ⇔ P

são isomorfismos entre as duas representações.

Vetores bidimensionais são normalmente representados como deslocamentos em um plano, tais como passeios em que demos passos para Leste, Oeste, Norte e Sul. É usual considerar um deslocamento unitário para Leste como o operador neutro T; para Oeste, como o operador M. Os deslocamentos para o Norte e para o Sul, respectivamente, podem ser tomados como giros C e P. De acôrdo com essas convenções, poderíamos, por exemplo, ter as seguintes transformações de "passeios" por "passeios unitários":



Os vetores unitários correspondentes a êsses "passeios unitários" poderiam ser indicados por e, − e, i, − i, respectivamente, de modo que o "passeio multiplicando" poderia ter como vetor 2e + i. As transformações de passeio acima poderiam ser simbolizadas como

$$e \,.\, (2e + i) = 2e + i, = -e \,.\, (2e + i) = -2e - i$$

$$i \,.\, (2e + i) = -e + 2i, = -i \,.\, (2e + i), = e - 2i$$

se quiséssemos expressar como os vetores correspondentes foram transformados. Pode-se verificar que e nada mais é que o resumo do vetor (+ 1, 0); − e, o do (− 1, 0); i, o do (0, + 1), e − i, o do (0, − 1).

Não se pode dizer que uma grande quantidade de material está disponível para a técnica de ensinar tais estruturas matemáticas e escalares. A relativa facilidade que tiveram as crianças submetidas ao Projeto Matemático Adelaide, e outros nos Estados Unidos, para aprender êsse tipo de Matemática é, porém, encorajadora. As crianças em questão atingiram uma compreensão bastante profunda das estruturas subjacentes, por meio dos vários exercícios de abstração pelos quais foram conduzidas; adquiriram, também, alguma técnica em manejar vetores, matrizes e números complexos, antes de completar 12 anos. A pesquisa, tanto sôbre os processos psicológicos de aprendizado como sôbre os problemas práticos de transmitir tais ferramentas matemáticas de alto poder a crianças do curso primário, está continuando não só em Adelaide como em vários centros de diferentes partes do mundo, muitos dêles filiados ao International Study Group for Mathematics Learning (ISGML). Professôres interessados ou quaisquer outras pessoas são conclamados a aguardar as publicações dos resultados em revistas como *Arithmetic Teacher, Mathematics Teacher* e o *Bulletin* da ISGML.

As situações de aprendizado aqui esquematizadas são baseadas nos princípios de variabilidade perceptiva e de variabilidade matemática. A variação perceptiva é garantida pelo fornecimento de uma quantidade de "personificações" do espaço vetorial e da idéia de grupo. Os vetores foram representados por meio de pilhas de objetos, passeios, louça e talheres colocados na mesa e assim por diante. Os grupos matemáticos o foram pelas transformações de mudança de côr e forma, movimentos ao longo dos lados e diagonais de quadrados, rotações em ângulos retos (um, dois ou quatro), e assim por diante. A variação matemática foi obtida alterando-se tanto quanto possível as variáveis matemáticas em pauta. No caso dos espaços vetoriais, a apresentação simultânea de várias dimensões, em vez do habitual tratamento da "linha numérica", garante que uma generalidade maior seja observada pela criança do que se se levasse muito tempo com uma dimensão. A apresentação de grupos foi feita dando-se exemplos de grupos com pelo menos quatro elementos. Isso garante que o grupo com dois elementos, utilizado para a apresentação da multiplicação por números positivos e negativos (escalares), seja apreciado como parte de um esquema mais geral de estruturas matemáticas, tornando assim essa simples estrutura mais significativa.

A superposição de grupos em espaços vetoriais permite a criação de estruturas conhecidas como álgebras. A verdadeira álgebra é "criada" pela superposição do grupo com dois elementos a um espaço vetorial unidimensional. Da mesma forma é "criada" a álgebra complexa, pela superposição do grupo cíclico com quatro elementos (isto é, aquêle baseado em giros em ângulo reto) em um espaço vetorial bidimensional. Para conseguir tais construções, é necessário fazer uma síntese de duas estruturas diferentes, isto é, de um espaço vetorial e de um grupo. É um tipo de processo de aprendizagem bastante nôvo, mas ainda é construtivo e, portanto, deveria ser fàcilmente acessível às crianças da escola primária, contanto que o princípio dinâmico seja aplicado a estruturas já abstratas. Por isso é tão importante que se permita às crianças, literalmente, "brincar" com essas estruturas, fazendo conjuntos de regras para ver se obedecem às exigências dos grupos matemáticos e fazendo álgebras para ver se obedecem às condições de comutatividade, associatividade, distributividade etc. ou mesmo a outras imaginadas pelas próprias crianças. Passando a ficar à vontade no laboratório de Matemática, podem, então, começar a adquirir habilidade em reunir estruturas cada vez mais refinadas. Mas, depois de feitas as construções, é importante relembrar que uma fase de prática será necessária, durante a qual são usadas as novas estruturas em tôdas as espécies de situações.

Pode-se até sugerir que o princípio da variabilidade seja estendido até às próprias estruturas. Sugeriu-se, por exemplo, que dois diferentes grupos de quatro elementos fôssem apresentados; apenas um dêles será usado para construir a álgebra complexa. Será interessante ver que espécie de álgebra é construída quando se usa o grupo Klein como inserido em nosso espaço vetorial bidimensional. Se isso fôr feito, será possível, por exemplo, encontrar pares de vetores (nenhum dêles sendo o vetor zero) tais que o produto dos vetores existentes no par é o vetor zero. Agora isso é impossível na álgebra complexa. Se

$$A \text{ vêzes } B = 0 \qquad \text{implica} \qquad A = 0 \qquad \text{ou} \qquad B = 0$$

torna-se, então, uma questão viva, respondida pela afirmativa na álgebra complexa, mas na negativa pela álgebra baseada no grupo Klein. O contraste é um fenômeno importante, e deveríamos usá-lo seguidamente do que fazemos nas situações de aprendizagem que criamos para nossas crianças.*

* Essas teorias são mais amplamente tratadas em *The power of mathematics* e *An experimental study of mathematics-learning* de Z. P. Dienes.