6

RELAÇÕES E FUNÇÕES

ESTÁ-SE tornando cada vez mais geralmente compreendido que a Matemática é o estudo de relações no abstrato. Assim, para ensinar Matemática é necessário ensinar o manejo de relações no abstrato. Uma vez que as abstrações não têm nenhuma existência física real, só temos encontrado relações em situações físicas. Se se vai à casa de alguém, lá parecem existir um homem, uma mulher e várias crianças, e supõe-se (às vêzes erradamente) que há certas relações entre os membros de tal grupo, conhecido como família. Essas relações recebem nomes como "espôsa de", "filho de", "mãe de", "irmão de" etc. Encontramos situações semelhantes tôdas às vêzes que "aprendemos" a tratar com tais relações. Não perguntamos, por exemplo, a uma criança de três anos de idade que estiver na sala se podemos fumar, se estiver presente um adulto, que supomos ser um dos pais. Nem nos oferecemos a uma pessoa já crescida para contar-lhe uma estória, embora seja perfeitamente natural fazer êsse oferecimento a uma criança de três anos, na hora em que ela vai dormir. O fato de que nos comportamos de modo "apropriado" nessas circunstâncias significa que estamos tratando tais relacionamentos da maneira devida. Os relacionamentos matemáticos são, de certo modo, muito semelhantes. As situações que exemplificam tais relacionamentos têm de ser encontradas por nós muitas vêzes antes de podermos classificá-las; e, mesmo depois de classificá-las, poderemos necessitar de algum tempo para aprender a "tratá-las", isto é, a fazer as coisas apropriadas com elas. Podemos, por exemplo, ter duas cestas de frutas na mesa, uma contendo menos frutas que a outra. Podemos dizer a uma criança: "Se você quer uma laranja, tire-a daquela cesta que tem menos, porque queremos acabar primeiro com as que estão lá." Numa situação em que $A < B$, se encontramos uma situação em que o número de objetos é menor que A (número de frutas

na cesta, depois que a criança tirou uma laranja da cesta indicada), então sabemos que êsse número também é menor que B, e não precisamos mudar nossas instruções para outra criança que também queria uma fruta. Matemàticamente falando, estamos usando o que é conhecido como a propriedade transitiva da desigualdade, quando argumentamos que, uma vez que $A - 1 < A$ e $A < B$, então $A - 1 < B$. Estamos usando apropriadamente a relação de desigualdade.

O problema educacional consiste em encontrar, em primeiro lugar, os meios de estabelecer, nas mentes das crianças, uma idéia clara de tais relacionamentos, depois do que será necessário assegurar-se que as relações, uma vez estabelecidas, são usadas apropriadamente. Já vimos que o estabelecimento de estruturas mentais, correspondentes a estruturas matemáticas, se realiza em duas etapas; a primeira é a que chamamos de "etapa do jôgo", e a segunda, a "etapa estruturada", depois da qual é necessária a "etapa da prática", para firmar as estruturas, no arsenal de estruturas da criança, entre as que ela sabe manejar. Antes de examinar o problema educacional, tentemos uma análise do que precisa ser aprendido. A Matemática é extremamente variada, mas existem algumas constantes nela; o educador que está interessado em fazer crianças aprenderem Matemática deve ser bastante claro sôbre que constantes são estas, já que isso o capacitará a planejar seqüências de aprendizagem muito mais eficientes.

A Matemática, como qualquer língua, expressa relacionamentos sob a forma de frases. Ao não-iniciado, a confusão de símbolos em um livro de "alta" Matemática não parecerá em nada com frases comuns. Não obstante, sempre que alguma coisa é declarada sôbre alguma coisa enuncia-se uma frase, de alguma forma. Se não temos nada a dizer, não falamos: antes de poder falar, isto é, de enunciar frases, precisamos ter *assunto*. Depois, precisamos ter *algo a dizer* a respeito do assunto. Muitos mal-entendidos acontecem na conversação diária porque as duas pessoas que estão dialogando não estão falando do mesmo assunto, embora possam estar usando as mesmas palavras. Antes que se possa apresentar qualquer grau de clareza em uma conversação, os participantes devem estar cientes, ambos, do assunto comum, bem como das expressões empregadas para falar sôbre o assunto. Na Matemática, isso significa que devemos determinar um *universo de explanação*, que, traduzido para o vernáculo, significa "tôdas as coisas sôbre as quais estamos falando". Depois, temos de concordar a respeito do sistema de símbolos pelos quais nos referiremos aos elementos do universo que escolhemos para falar. Êsses elementos podem ser objetos em uma sala, conjuntos de objetos em uma sala, números de elementos em conjuntos de objetos em uma sala ou qualquer outro conjunto de entidades que tenhamos escolhido para tratar. Tendo estabelecido nosso *universo,* podemos começar *relacionando* membros dêsse universo com outros membros do mesmo universo. Êsse relacionamento pode ser o que estamos dizendo a respeito dos elementos de nosso universo.

Suponhamos que vamos à casa de alguém e encontramos vários adultos, certo número de crianças e uma quantidade de jovens, talvez mesmo alguns bebês, dando-nos boas vindas. Alguém poderá dizer: "Êste é o filho do Sr. Silva", ou "Aquêle é o tio do João". Estas são as relações entre as pessoas da casa. As *pessoas da casa* formam, por enquanto, nosso *universo de explanação* e *o que dizemos a respeito delas* é como estão *relacionadas* com outras pessoas da casa. Se estamos relacionando com pessoas que não são da casa, então, evidentemente, estamos usando um maior universo de explanação do que as pessoas com quem estamos. Se selecionamos um homem da população de uma casa e aplicamos a êle a relação "ser filho de", estamos sendo conduzidos a certas outras pessoas da casa, ou seja, a seus filhos; se êle, por acaso, só tiver um filho, sabemos, exatamentte, aonde nos conduz essa relação. Deve ficar bem claro que estamos relacionando na direção "pai → filho", e não na direção oposta.

Se êle tiver muitos filhos, então a aplicação da relação "pai → filho" não conduz a um fim determinado. Vejamos um exemplo disso na Matemática. "Ser menos que" é uma relação aplicada aos números. Se nosso universo de explanação é o conjunto de números naturais, começando no 1, então, "ser menos que 3" poderá significar o número um ou o dois. "Ser maior que 3" pode ser uma quantidade infinita de números. "Ser menos que 2" só pode significar um número, ou seja, o número um. Então, algumas vêzes as relações conduzem a um único e determinado elemento de nosso universo; outras vêzes, elas determinam, principalmente, conjuntos de elementos de nosso universo.

Um dos métodos de representar relações é o emprêgo de setas unindo membros do universo. Podemos colocar os nomes do pessoal da casa em uma fôlha de papel. Se usamos a relação "pai → filho", então poderemos traçar uma seta do nome de cada pessoa ao do filho dela. Se o filho tem um filho, traçamos uma seta do nome do filho ao do filho do filho, e assim

por diante. Quando tivermos acabado tôdas as setas possíveis entre as pessoas, teremos *delineado* a relação "pai → filho" dentro do universo das pessoas em certa parte do mundo, na casa, na cidade ou na rua. Essa é uma representação concreta de relações.

Há uma quantidade de outros meios para concretizar relações. Um dêles seria providenciar um conjunto de objetos concretos tendo certas propriedades ou combinações de propriedades. As relações entre essas propriedades seriam concretizadas pela justaposição dos objetos que tiverem essas propriedades. Poderíamos, por exemplo, usar o conjunto de blocos atributos ou blocos lógicos. Consistem em alguns objetos de diferentes côres, formas, tamanhos e espessuras. Na maioria dos conjuntos ora em uso há três côres, quatro formas, dois tamanhos e duas espessuras. As côres são, normalmente, vermelho, azul e amarelo; as formas, círculos, retângulos, triângulos eqüiláteros, quadrados e, algumas vêzes, hexágonos regulares. Os tamanhos são, simplesmente, grande e pequeno, e as espessuras são grosso e fino. Para cinco formas, terá de haver sessenta peças no conjunto, se cada combinação de atributos fôr representada uma vez e sòmente uma vez. Com quatro formas, haverá 48 peças no conjunto, dentro do mesmo princípio.

Se apanhamos qualquer peça do conjunto de blocos atributos e colocamo-la ao lado de outra, haverá algumas semelhanças e algumas diferenças entre elas. Haverá, no mínimo, uma diferença nos atributos, pois cada combinação é representada apenas uma vez, devendo cada duas peças ser diferente pelo menos em forma ou em côr ou em espessura ou em tamanho, ou em dois ou três ou quatro dêsses atributos. Êsse fato nos habilita a definir algumas relações entre os atributos presentes. Podemos pensar, por exemplo, na relação de "ter uma côr diferente de". Se isso fôr tudo o que exigimos, então, ao escolhermos qualquer peça vermelha, outra qualquer peça azul ou amarela estará nessa relação com a peça vermelha. Mas, se apanharmos outra qualquer peça vermelha, esta não estará nessa mesma relação com a primeira peça vermelha. Podemos pensar em algumas relações mais sofisticadas. "Ter mais simetrias", por exemplo, poderia ser a relação. Nesse caso, se tomarmos, em primeiro lugar, um retângulo, e, depois, outro retângulo, nossa segunda peça não teria mais simetrias que a primeira. Se apanharmos, então, um triângulo eqüilátero como nossa segunda peça, ela terá mais simetrias que o retângulo. Podemos, portanto, traçar uma seta do triângulo eqüilátero ao retângulo. Podemos, certamente, trocar a relação e falar sôbre "ter um número diferente de simetrias". Nesse caso, podemos traçar a seta do triângulo eqüilátero para o retângulo, assim como do retângulo para o triângulo eqüilátero.

Outra relação que pode ser estudada é "ter uma diferença em um e único atributo de". Se apanharmos em primeiro lugar um grande e grosso quadrado vermelho e, em seguida, um pequeno e grosso quadrado vermelho, essa peça estaria nessa relação com a primeira. A diferença entre elas é, apenas, no tamanho, e isso é *um atributo*. Um grande e fino quadrado vermelho estaria nessa relação com o grande e grosso quadrado vermelho, sendo a diferença apenas a espessura, e assim por diante. Muitos jogos podem surgir com essa espécie de relação. Êles estão descritos na parte inicial do Programa Adelaide, publicado no primeiro volume de *First Years in Mathematics* ("Learning Logic", "Logical Games"), e, portanto, não há necessidade de explicá-los aqui.

Deve-se mencionar, porém, que a *etapa do jôgo* é importante nesse ponto. Se vamos dar os blocos atributos à criança, para dêles aprender alguma coisa, devemos deixá-la, pelo menos por uma semana ou duas, fazer exatamente o que quiser com êles. Depois dêsse período de brinquedo, será possível fazer que executem certos jogos ligados à diferença de atributos, tais como adivinhar que bloco está faltando em certos arranjos sistemáticos, e assim por diante. Essa será a *etapa estruturada* do aprendizado sôbre relações. É evidente que sòmente relações representáveis com os blocos atributos serão tratadas nesse tipo particular de situação concreta. Se vamos usar o princípio de personificação múltipla ou o de variabilidade perceptiva, será necessário usar outros materiais. Estão fàcilmente disponíveis. Podem ser pedras e fôlhas do jardim; deve haver pedras grandes e pequenas, assim como fôlhas grandes e pequenas. Isso nos dará, nìtidamente, uma diferença de espécie e uma diferença de tamanho. Podemos até mesmo introduzir algumas côres, embora seja difícil encontrar uma pedra verde. As próprias crianças são, também, objetos "apropriados"; podemos selecionar como atributos relevantes: tipo de cabelo, côr dos olhos, côr das roupas que estiverem usando, e sexo. Êsses serão os *atributos relevantes*. Duas crianças serão consideradas *parecidas* se, em todos os atributos relevantes, forem *as mesmas*. Por exemplo, um menino de cabelo ondulado e olhos castanhos, usando roupa verde, será considerado *o mesmo* que outro menino de cabelos ondulados e olhos castanhos, de roupa verde. Uma menina de cabelo liso, olhos castanhos, vestida de verde, será considerada como tendo duas diferenças nos atributos relevantes de um menino de cabelos ondulados e olhos castanhos, vestido de verde, e assim por diante.

Após a etapa estruturada, será possível encorajar as crianças a pensar em uma relação como um pensamento objetivo: por exemplo, "ter uma diferença", ou "ter mais linhas de simetria", ou "ter o mesmo sexo", ou "ter nascido na mesma cidade". Tendo chegado a essa etapa, será possível, então, estudar as *propriedades de algumas dessas relações*. É a etapa de prática para as relações, mas a etapa de jôgo para as propriedades das relações. Algumas relações são *reflexivas*. Isso quer dizer que podemos traçar uma seta do objeto para o mesmo objeto. Por exemplo, se a relação é "ter nascido na mesma cidade", então a própria pessoa nasceu, evidentemente, na mesma cidade que êle mesmo e, portanto, uma seta pode ser traçada dessa pessoa para si mesma. Outras setas podem ser traçadas dessa pessoa para as outras pessoas do universo de explanação, que por acaso tenham nascido na mesma cidade. Haverá, então, uma quantidade de setas unindo as pessoas, mas também uma volta, saindo de cada pessoa e retornando à mesma, como um *boomerang*. Uma relação em que cada objeto ao qual se aplica a relação contém tal *boomerang* é chamada de *reflexiva*. Tal relação, em Matemática, é, por exemplo, uma de igualdade ou identidade, porque, evidentemente, qualquer entidade matemática *é igual a si mesma*. O número 2 é igual ao número 2.

Outra possível propriedade de relação é a *simetria*. Isso quer dizer que, se a relação é tal que podemos traçar uma seta do objeto A para o B, então a mesma relação nos permitirá traçar uma seta de B para A. Se isso é possível para cada par de objetos a que se aplica a relação, então diz-se que a relação é *simétrica*. A anteriormente mencionada, entre blocos atributos que têm uma diferença, é tal relação: se o bloco A tem uma diferença do bloco B, o bloco B, igualmente, terá uma diferença do bloco A. Da mesma forma, a desigualdade entre os números é simétrica. Esta não deve ser confundida com as relações de "ser maior" ou "ser menor", que não são, evidentemente, simétricas. Em "A é menor que B", estamos tratando com a relação de "ser menor que" e, assim, traçamos a seta de A para B, se A fôr realmente o menor número. É evidente que, nesse caso, B não será menor que A, não podendo, então, traçar a seta no sentido oposto. Assim, embora a desigualdade seja simétrica, a relação "menor que" não é. A relação de "igual", porém, é simétrica. Se A é igual a B, então, da mesma forma, B é igual a A. Se fôr a relação de igualdade que nos permite traçar a seta de A para B, poderemos, da mesma forma, traçar outra de B para A.

Outra propriedade importante possível para as relações é a da *transitividade*. Pode acontecer que, se podemos traçar uma seta de A para B e outra de B para C, então podemos, em tôdas as circunstâncias, traçar uma seta de A para C, sejam quais forem os objetos que tivermos selecionado de nosso universo de explanação. A relação de "uma diferença" nos blocos atributos não é, evidentemente, transitiva, porque, se fizermos uma diferença em côr de A para B e uma diferença de forma de B para C, teremos duas diferenças de A para C. Podíamos, é lógico, ter feito simplesmente uma segunda diferença em côr. Então, contanto que não tenhamos voltado à côr original, ainda há apenas uma diferença em côr, isto é, apenas uma diferença. Em outras palavras, poderíamos ter começado com um quadrado vermelho para A e mudar para um quadrado azul para B e para um quadrado amarelo para C. Ainda haveria apenas uma diferença de côr de A para C. Mas a possibilidade de traçar uma seta de A para C, cada vez que houver uma de A para B e outra de B para C, deve ser verdadeira *para todos os trios de membros A, B, C* escolhidos no universo de explanação. Se isso fôr verdadeiro *para apenas alguns trios*, então a relação não é chamada de transitiva. Sòmente quando isso fôr *sempre possível* é que a relação é *transitiva*. "Ter a mesma côr", por exemplo, é uma relação transitiva, porque, se B é da mesma côr que A, e C da mesma côr que B, então C é da mesma côr que A. A relação de igualdade também é transitiva; sabemos que, se a seta significa "igual", então se A é igual a B e B igual a C, A é igual a C. A relação de "menor que" também é transitiva. Se A é menor que B, e B menor que C, sabemos que A é, então, menor que C. Por outro lado, a relação de desigualdade não é transitiva. Mesmo que A não seja igual a B, e B não seja igual a C, não se pode garantir que A não seja igual a C. Por exemplo, 2 não é igual a 3, e 3 não é igual a 2. Evidentemente, nesse caso, A não é "não igual a" C, em desigualdade, então, não é uma relação transitiva.

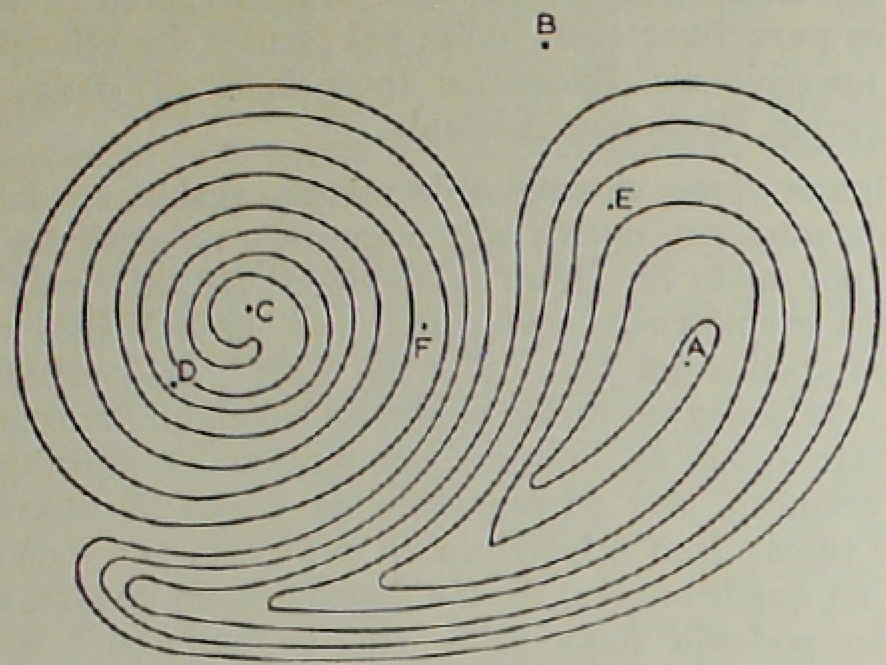
Surgem muitas dificuldades em Matemática porque as crianças não compreendem as várias propriedades das diferentes relações com que se encontram. Algumas relações são simétricas, outras não; algumas são reflexivas, outras não;

umas são transitivas, outras não. Muitos exercícios serão necessários para fixar essas idéias nas mentes das crianças e torná-las operacionais. Exercícios apropriados são dados na última parte do Programa Adelaide.

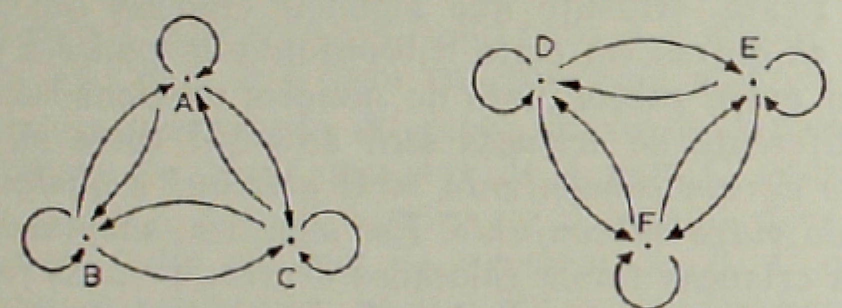
Alguns dêsses exercícios de relações podem ser feitos com o uso de números, outros com o emprêgo de atributos e ainda outros por meio de idéias geométricas. Se quisermos usar os atributos geométricos, podemos traçar um labirinto no chão, havendo apenas um "dentro" e um "fora". Colocaremos, então, algumas crianças em certas partes do labirinto. Podemos, então, perguntar quais as crianças que podem ser apanhadas por quais crianças, sem passar sôbre as linhas de separação. É melhor traçar logo o labirinto no chão, com giz, e não inicialmente no quadro-negro. Se fôr desenhado no quadro, as crianças não poderão ficar sôbre êle. O "universo" consistiria, agora, em algumas posições selecionadas das crianças e a relação seria de acessibilidade. Uma criança será *acessível* a outra criança se puder ir àquela sem cruzar uma linha. Após algum tempo, ficará evidente que algumas crianças são acessíveis a tôdas as outras em certo subconjunto de posições selecionadas. Em outro subconjunto de posições selecionadas, um conjunto diferente de crianças será acessível entre si. *Nenhum elemento de um subconjunto seria acessível a qualquer quantidade do outro subconjunto.* Isso significa, simplesmente, que algumas crianças foram colocadas *dentro*, e outras *fora*, e que o conjunto de crianças *dentro* são inacessíveis ao conjunto de crianças *fora*. Mas as crianças pertencentes ao conjunto de crianças dentro são tôdas acessíveis entre si e que as componentes do conjunto de crianças fora são, da mesma forma, tôdas acessíveis entre si. É uma relação *reflexiva*, porque qualquer criança é acessível a si mesma. Também é transitiva porque, se A pode alcançar B, e B pode alcançar C, andando, evidentemente, pelo mesmo caminho, A pode, eventualmente, alcançar C.

Qualquer relação que tenha tôdas essas três propriedades é chamada de *relação de equivalência*. A "igualdade" é uma relação de equivalência, bem como "ter nascido na mesma cidade", "ter a mesma côr" e "ser acessível a". Relações de equivalência dividem o universo de explanação a que são aplicadas em classes disjuntivas. Estas são chamadas de *classes de equivalência*.

Um jôgo semelhante pode ser executado com crianças menores usando-se conjuntos de objetos como membros do universo. Cada conjunto de objetos pode ser colocado em um



A relação de "acessibilidade" é traçada abaixo ao conjunto de posições (A B C D E F) do labirinto acima.
Há, evidentemente, 2 classes de equivalência: (A B C) e (D E F)



recipiente, e os conjuntos nos recipientes serão os membros de nosso universo de explanação. Podemos, então, dizer que dois conjuntos, cujos membros podem constituir-se em par s, são relacionados entre si por nossa relação. Cada recipiente com dois objetos é relacionado com todos os outros recipientes com dois objetos. Cada conjunto com apenas um objeto é relacionado com qualquer outro conjunto com só um obj to. Mas nosso conjunto de dois objetos *não* estará relacionado com qualquer conjunto com três ou quatro objetos, ou com qualquer número que não seja dois. Êsse jôgo cria, de forma concreta, as classes de equivalência das quais são construídos os números naturais 1, 2, 3, 4 etc. Em tôdas as classes de equivalência, os conjuntos são equivalentes entre si, e a propriedade comum que une os membros dessas classes de equivalência é a de seu número. Isso é o que chamamos de *número natural*. Pode-se verificar com facilidade que essa relação é simétrica porque, se o recipiente B tem tantos objetos quanto o A, então o A tem tantos quanto o B. É reflexiva, uma vez que o recipiente A tem tantos objetos quanto o A. E também é transitiva porque, se A tem tantos quanto B, e B tantos quanto C, então A tem tantos quanto C. Estamos, assim, lidando com uma relação de equivalência, e construímos as classes de equivalência correspondentes, que levam ao conceito de números naturais.

As relações, e particularmente as de equivalência, são fundamentais na Matemática. Muito pouco é normalmente feito para dar às crianças uma prática suficiente para entender como essas relações são básicas para o que aprendem sôbre o número.*

Já mostramos que uma relação pode ser simbòlicamente representada, indicando os membros de nosso universo por posições em um pedaço de papel e, então, traçando setas dessas posições para outras, que são admissíveis em virtude das relações que estamos investigando. Em geral, de qualquer ponto representativo sairão várias setas. Isso significa que seria possível partir de qualquer ponto, de vários modos. No caso de determinadas relações, só é possível partir de um ponto em particular de um único modo e só é possível ir a outro ponto. Tal relação é chamada de *função*. Isso significa que, se aplicamos a relação a qualquer membro do nosso universo, o resultado é determinado. Se aplicarmos qualquer relação geral que não seja uma função a um membro de um universo, o resultado não é determinado. Não sabemos qual das muitas setas iremos tomar, dentre as que saem de um ponto em particular ao qual estamos aplicando a relação.

Usando um exemplo matemático, consideremos a relação de "ser maior que" ou "ser menor que", aplicada aos números naturais. Se usarmos o número 5, "ser maior que" nos conduz aos números 6, 7, 8 ou 9 ou, na realidade, a qualquer outro número que venha depois. Há, de fato, um número infinito de setas saindo de cada ponto de nosso diagrama imaginário da relação de "ser maior que". Podemos restringir nossa relação dizendo, em vez de "ser maior que", "ser um mais que". Nesse caso, de 2 só poderemos ir ao 3, porque 3 é o único número que é um mais que 2. Nosso diagrama, então, é tal que, de cada ponto, só sai uma seta. Só há um lugar onde podemos ir, seja de onde estivermos vindo. Mais uma vez, temos uma *função*. Essa função particular é muitas vêzes chamada de função sucessora. Algèbricamente é descrita como $(X + 1)$. O símbolo X

* Um trabalho muito interessante sôbre relações foi feito por Papy. Ver seu livro *Mathématique Moderne*, Didier, Paris, 1963.

indica o "objeto" matemático em nosso universo, selecionado por nós, e (X + 1) indica o objeto ao qual chegamos após nossa viagem pela seta imaginária. Uma função, portanto, parece comportar-se bastante como uma máquina. Sabemos o que vai produzir depois que botamos alguma coisa nela. Um artifício mecânico é um artifício determinado; colocando algo na entrada, está bem determinado, uma vez a máquina posta em ação, qual será o produto. A máquina não pode *escolher;* se pomos um número na máquina montada por nós, será construído um número um mais que êle. A *matéria-prima* é representada pelo símbolo X, e o *produto* pelo símbolo (X + 1). Nesse caso, estamos relacionando, de algum modo, os membros de um universo aos membros do mesmo universo. Antes que uma função seja definida, temos de determinar: *a*) o universo ao qual se aplica; *b*) como age sôbre a matéria-prima que colocamos nela, a fim de nos dar o produto. Tal função estabelece uma *correspondência* entre um conjunto de entidades e outro dêsses conjuntos de entidades. No exemplo que consideramos, as duas classes de entidades são idênticas. A função "mais um" estabelece a correspondência que *traça* cada membro da classe dos números naturais para algum outro membro da classe dos números naturais. As funções estabelecem tais correspondências, mas nem sempre dentro da mesma classe de entidades. Podemos tomar a *hora do dia cada cinco minutos* como um universo e as *temperaturas possíveis,* arredondadas em graus centígrados, como o outro universo. Podemos, então, estabelecer uma máquina que relacionará as temperaturas à hora. Tudo que temos a fazer é olhar um termômetro do lado de fora de nossa janela a cada cinco minutos e registrar o que vemos, arredondando em graus. Isso nos dará uma correspondência entre os membros do universo que são os pontos de tempo a cada cinco minutos durante o dia e os membros do conjunto de temperaturas possíveis registradas. Tal função nos dirá como a temperatura variou durante o dia em certo lugar fora de nossa janela.

Para ajudar a esclarecer o conceito de função, tais correspondências entre horas do dia e temperaturas fora de casa (gráficos de temperatura), entre a altura das pessoas e a freqüência em que tais alturas se apresentam (histogramas) e muitas outras podem ser apresentadas às crianças e elas poderão investigá-las. Essas correspondências devem ser entre os tipos de variáveis mais diferentes que fôr possível, para pavimentar o caminho para um conceito geral de função. Não podemos esperar progresso muito rápido, pois a compreensão

de abstrações fundamentais está sendo preparada. Mas, com um ambiente matemático suficientemente rico, não há motivo para as crianças não tornarem o conceito de função tão operacional quanto os de variável e número. O conceito de números naturais atinge um grau de clareza nas mentes da maioria das pessoas semelhante aos conceitos de livro, lápis, mesa ou qualquer outro conceito diário. Nunca nos confundiríamos entre um livro e um lápis, entre uma coleção de 3 e outra de 2. A classe de *objetos* conhecida como livros é, para nós, bem definida, do mesmo modo que a de coleções consistindo em 3 objetos. O grau de clareza se torna menor para a pessoa comum quanto às classes de números, ou, falando de modo geral, com *classes de coisas.* A etapa seguinte, quando operamos com classes de números, isto é, com variáveis, é ainda menos clara, e, para o homem comum, uma função matemática é qualquer coisa saída de um emocionante livro de ficção científica, ou um jargão incompreensível. A razão para isso não é, certamente, que o homem comum não seja capaz de tais vôos de abstrações, mas simplesmente que êle não teve as experiências das quais possa abstrair. Não há absolutamente razão para acreditar que a pessoa comum seja incapaz de aprender Matemática, apesar do mito corrente de que a "habilidade" matemática só é dada a poucos. O que pode ser verdade, embora sujeito a dúvida, é que o homem comum encontraria dificuldade para fazer pesquisa matemática. Essa situação poderia ser alterada com o encorajamento de uma atmosfera de investigação desde nossas escolas, em vez da tão comum apresentação de pedaços de conhecimento isolados, na maioria inúteis em si mesmos, a crianças altamente desnorteadas.

Vamos agora descrever umas "experiências de funções", que se demonstraram interessantes para crianças de dez anos de idade, educadas para procurar por si mesmas o conhecimento matemático, através de experiências especialmente organizadas.

Um "projeto" fascinante é o seguinte. Pede-se às crianças para fazer retângulos com 36 quadrados-unidades, dos modos mais diferentes que fôr possível. Isso pode ser feito, a princípio, com quadrados concretos, mas, em breve, serão usadas fôlhas de papel quadriculado. Pede-se, então, que meçam o perímetro de cada um dos retângulos que fizeram. Registram, depois, êsses perímetros junto com o número de linhas do retângulo, organizando, assim, uma tabela de *coneção de duas classes de números.* Ela será algo parecida com a seguinte:

Números de linhas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	↓	↓	↓	↓		↓			↓			↓
Perímetro	74	40	30	26		24			26			30

Número de linhas	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
						↓						
Perímetro						40						

Número de linhas	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
												↓
Perímetro												74

Um pequeno conhecimento de frações permitirá também às crianças preencher as lacunas. É uma boa oportunidade para o trabalho em grupo, divisão de trabalho, verificação dos resultados dos outros etc. As crianças não só aprenderão algumas coisas sôbre o conceito geral de função, ao estudar a correspondência entre as duas classes de números (a que se refere ao número de linhas e a outra, dos perímetros), mas também aprenderão muito a respeito de uma classe de função mais restrita, ou seja, as hipérboles. Descobrir a assíntota aumentando cada vez mais para a direita é uma surprêsa, após aquela rápida variação de valor do perímetro no início. A existência de um mínimo é, também, uma descoberta importante, mas não é menor a surprêsa ao constatar que não há simetria em relação ao ponto mínimo. Verificar que, para 5 linhas, tem de haver $7\frac{1}{5}$ unidades em cada linha, e o perímetro será $24\frac{2}{5}$, embora para 7 linhas tenha de haver $5\frac{1}{7}$ unidades em cada linha e o perímetro seja $24\frac{2}{7}$, parece levar uma dose de emoção às crianças engajadas nesse trabalho. O resultado parece ser tão semelhante e, contudo, é diferente. E, evidentemente, a assimetria se manifesta cada vez maior à proporção que nos afastamos do ponto mínimo. Como o inesperado pode ser emocionante! E como somos cruéis em privar as crianças dessa emoção ligada ao que chega a ser uma descoberta verdadeiramente matemática. A maior emoção que já vi em um grupo de crianças matemàticamente conscientes foi produzida pela apresentação de um problema cuja solução ninguém *ainda* conhecia! (Um problema fàcilmente compreendido, dessa espécie, é, por exemplo, saber se há qualquer número par que não possa ser expresso como soma de dois números primos. Ainda é um problema em aberto.) A compreensão de que elas próprias já atingiram limites de conhecimento, além dos quais até mesmo os melhores matemáticos não podem ver, dá às crianças a primeira visão da possibilidade de que elas mesmas possam, talvez um dia, solucionar tais problemas.

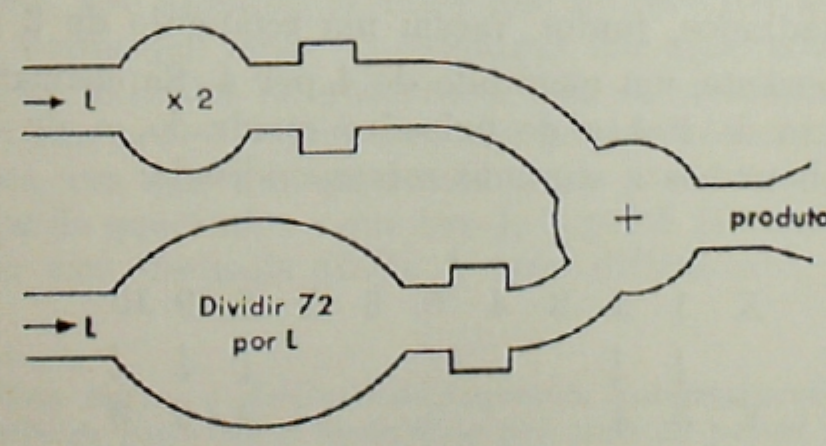
Um grupo "complementar" poderia estar trabalhando no problema de encontrar as áreas de todos os retângulos cujos perímetros sejam 24 unidades. Essas crianças obterão uma parábola, com um ponto máximo e não assíntotas, e a situação será simétrica em relação ao máximo. Se os dois grupos compararem suas notas, verão que o que era mínimo em um problema é o máximo no outro, aparecendo os maiores valôres nos quadrados, isto é, em um quadrado de 6 por 6, em ambos os casos.

Não é provável que as crianças venham, após apenas algumas tentativas em funções, a se tornar capazes de materializar suas experiências em fórmulas. Necessitarão, provàvelmente, de grande número de tais jogos sôbre funções antes de compreenderem que o que estão fazendo para encontrar o companheiro de um número de uma classe em outra classe pode ser *codificado*. Essa codificação da experiência é, certamente, a fórmula, que, nos dois casos, seria

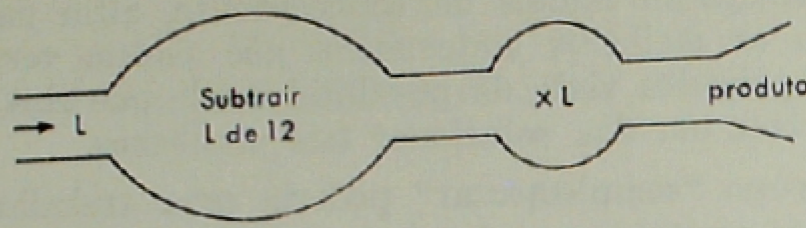
Perímetro $= 2 \times L + (72 \div L)$ [em que L é o número de linhas]

Área $= (12 - L) \times L$

A primeira "fórmula" mostra o produto de uma "máquina" cuja matéria-prima é L, isto é, o número de linhas, "máquina" que pode parecer-se com a figura seguinte:



A segunda "fórmula" dá o produto da "máquina" seguinte:



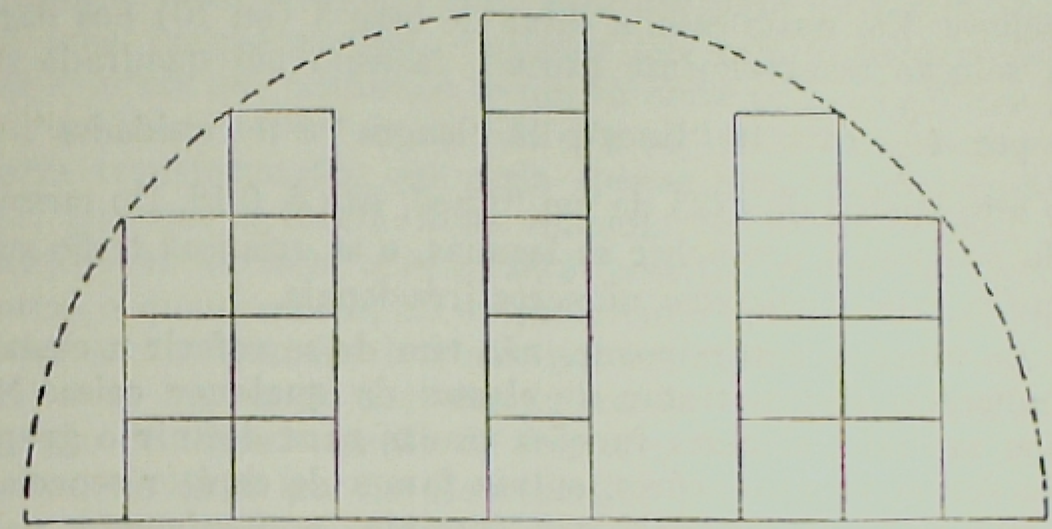
Como nossas crianças verão de forma diferente essas fórmulas, agora que as compreendem como a codificação daquilo que fizeram tantas vêzes para estabelecer as correspondências descritas! E como deverá ser diferente a expressão delas em relação à da criança a quem se dá a fórmula e se pede que descubra a "função"!

Com alguma engenhosidade, podemos manter, indefinidamente, as crianças recebendo tais tarefas de "funções". Ponhamos, por exemplo, todos os inteiros até 12 em um chapéu: para cada inteiro que tirarmos, escrevamos a soma de todos os inteiros, a partir de, até aquêle que tiramos, e essa soma será sua companheira em um segundo chapéu. Se tirarmos 5, por exemplo, do primeiro chapéu, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ será sua companheira no outro chapéu. Obtemos uma parábola.

Se quisermos que o resultado seja um círculo, procederemos da seguinte maneira. Traçamos um quadrado com algumas linhas nêle. Procuramos, agora, outro quadrado apropriado, de forma que, pondo os dois quadrados juntos, poderemos fazer com êle um retângulo com tantas linhas quantas tinha o nosso primeiro quadrado, mas com cada linha contendo 10 quadrados. Se começarmos com um quadrado de 2 por 2, temos de encontrar outro quadrado apropriado de modo que os dois quadrados, juntos, façam um retângulo de 2 por 10. É, evidentemente, um quadrado de 4 por 4. Se chamarmos de X o número de linhas do primeiro quadrado, e de Y o do segundo, obteremos a seguinte correspondência:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	↓	↓			↓			↓	↓	↓
Y	3	4			5			4	3	0

O "gráfico" poderia ser assim:*



O gráfico e a tabela acima dão uma idéia clara de como é a correspondência estabelecida por nossa função ou "máquina".

É importante que, por tôda essa etapa formativa, os gráficos representantes das funções sejam tão tangíveis quanto possível, para que as quantidades reais sejam claramente visíveis. O desejo de continuidade surgirá espontâneamente; subdivisões menores serão sugeridas, até que as ordenadas se tornem tão finas como linhas, caso em que o centro de atenção se volta para a forma da curva nascente, e não mais para as quantidades correspondentes aos membros da primeira classe de números (nosso primeiro chapéu). É também um processo lento. O desenvolvimento dos conceitos não pode ser acelerado. Ao contrário, essas representações mais concisas surgirão semi-espontâneamente quando a situação estiver suficientemente amadurecida.

O desejo de completar — tendência inata, de acôrdo com os psicólogos gestaltistas — será um impulso muito poderoso na ajuda às crianças para amadurecer nesse sentido. Quererão saber, por exemplo, o valor que se deve dar a Y quando X é 3. Verão que terão de encontrar um quadrado cuja área seja de 21 unidades de quadrados. Não demorarão a descobrir que isso não pode ser feito com um grande número de quadrados, uma vez que um quadrado de 4 por 4 tem apenas 16 unidades de quadrados e que um de 5 por 5 já tem 25. Como o trabalho com decimais ainda é uma dificuldade, os "finos"

* Esta figura é ligeiramente imprecisa matemàticamente, mas nenhuma criança perceberá o semicírculo por meio de pontos médios.

das caixas aritméticas podem ser chamados de unidades de quadrados, e será possível tentar terços, quartos, quintos, sextos e décimos. Em nosso caso, a caixa de base 5 (ou 10) nos dará uma solução razoàvelmente precisa, fazendo um quadrado de $4\frac{3}{5}$ por $4\frac{3}{5}$ com 16 "finos", 24 "longos" e 9 "unidades". O êrro será apenas de 4/25 de um "fino", isto é, 0,16. Do mesmo modo poderemos preencher as lacunas, e as crianças terão sua primeira experiência com números irracionais.

As funções, naturalmente, não têm de se referir a classes de números. Podem tratar de classes de qualquer coisa. No último capítulo, algumas funções usadas para definir o grupo Klein foram formas e côres, outras foram de caráter espacial. Na representação espacial, por exemplo, o movimento pelo "soalho" é uma função que relaciona qualquer posição a outra, que será atingida andando-se pelo soalho para a próxima posição que foi permitida. A função "perpendicular" nos conduz de qualquer posição disponível para a posição disponível seguinte, andando perpendicularmente às tábuas do soalho, e assim por diante. Da mesma forma, estamos lidando com funções quando transformamos pilhas ou objetos coloridos de diferentes formas, contanto que tenhamos apenas duas côres e duas formas. A transformação de côres é uma função quando se está certo de que está determinado o que deve acontecer com a forma; por exemplo, quando a forma não muda. Quando dizemos apenas "diferença de côr", não temos uma função, porque temos duas côres e duas formas; devemos escolher a côr diferente de uma forma ou da outra. Mas, se dizemos "mude a côr mas mantenha a forma constante", isso é uma função, porque, então, de um objeto de côr e forma particulares, devemos passar para um objeto de côr e formas definidas, de uma côr diferente, mas da mesma forma. Considerações semelhantes se aplicam às outras funções tratadas na representação côr-forma do grupo Klein.

Há muitas outras funções que podem ser estabelecidas pelas transformações de mudança de côr e de forma. Devemos ter três formas e duas côres, ou seja, por exemplo, círculos, quadrados e triângulos e objetos vermelhos e verdes. Podemos, agora, pensar em uma função de mudança de forma, que transformaria os objetos verdes no seguinte sentido:

círculo, para quadrado, para triângulo, para círculo,

significando que os círculos seriam trocados por quadrados, êstes pelos triângulos e êstes pelos círculos. Para os objetos

vermelhos, a transformação seria no sentido oposto, isto é, os círculos seriam trocados pelos triângulos, êstes p los quadrados e êstes pelos círculos. Êsse conjunto de definições nos dá uma função porque, qualquer que seja a combinação de côr e forma que tenhamos escolhido entre as 6, há ap nas uma que podemos obter, de acôrdo com as regras. Poderíamos ter outra transformação, que seria apenas uma transformação de côr, sem que a forma fôsse mudada. Se usarmos essas duas funções ao mesmo tempo, será possível conseguir qualquer forma e qualquer côr, de outra forma e outra côr, com apenas dois movimentos. Se tivermos, por exemplo, um quadrado vermelho e queremos um círculo verde, precisamos aplicar a função de transformação de forma e, depois, a de côr. A primeira nos dará um círculo vermelho pelo quadrado vermelho. A segunda mudará a côr e nos dará um círculo verde. Se, por outro lado, quiséssemos obter um triângulo verde, começando de quadrado vermelho, precisaríamos mudar a côr primeiro e obter um quadrado verde, para depois usar nossa primeira função e conseguir o triângulo verde. Se tivéssemos feito o inverso, teríamos necessitado de dois movimentos da função de mudança de forma e um da mudança de côr para chegar ao triângulo verde. Poderemos ampliar êsse jôgo para outro de oito movimentos usando, por exemplo, círculos, quadrados, triângulos e hexágonos ou quaisquer outras formas. A função de mudança de formas poderia ser definida, no caso das formas verdes, como mudando os círculos para quadrados, êstes para triângulos, êstes para hexágonos e êstes para círculos; para as formas vermelhas, de círculos para hexágonos, dêstes para triângulos, dêstes para quadrados e dêstes novamente para círculos. Poderíamos ter, também, uma função de mudança de côr. Nesse jôgo será, muitas vêzes, necessário usar três movimentos sucessivos para poder obter, de uma forma e côr particular, outra forma e côr. Partindo de qualquer forma e côr, será necessária uma viagem de três movimentos para conseguir duas das combinações, enquanto o resto das combinações estará acessível em dois ou mesmo em um movimento. Os leitores poderão achar interessante verificar essas assertivas.

Talvez não seja necessário indicar que nossa primeira combinação de duas funções — isto é, da de três formas com a de duas côres — nos dará uma estrutura que é equivalente às simetrias e rotações do *triângulo eqüilátero*. Isso será tratado no capítulo 7. Igualmente, as mudanças, descritas no jôgo em que há oito diferentes combinações de formas e côres, terão a mesma estrutura do conjunto de simetrias e rotações do *quadrado*.

Há muitas maneiras pelas quais as relações e funções podem ser representadas, e tornadas acessíveis e agradáveis, com a experiência diária das crianças na sala de aula. O uso de formas e côres é um modo muito vívido de mostrar às crianças determinadas mudanças, para ilustrar a idéia de função, e mudanças indeterminadas, para ilustrar uma idéia mais geral de relação. Não há, certamente, necessidade de nos restringirmos a formas e côres. Podemos pensar em qualquer outra espécie de atributos. Os atributos das próprias crianças, por exemplo, determinam classes; inúmeras crianças podem ser escolhidas com atributos satisfatórios e podem ser inventadas mudanças entre as crianças de forma que o passar de uma criança para a outra indica certa espécie de transformação. Se essa transformação é única entre as crianças escolhidas, estamos lidando com uma função; se não o fôr, estamos, então, tratando apenas de uma relação.

É importante compreender que, no caso das transformações de forma e côr, assim como com qualquer outra forma concreta de jôgo com relações e funções, as relações de que estamos falando são entre as propriedades dos objetos e não realmente entre os objetos. Já que não podemos lidar fisicamente com uma propriedade como "ser azul" ou "ser redondo", "ser duro ou mole" ou "ser menino ou menina", sem existir realmente à mão um objeto ou uma pessoa com essas propriedades, é necessário que a versão concreta dêsses jogos consista em objetos. Quando traçamos as setas de um objeto ao outro, podemos imaginar que elas se refiram aos próprios objetos. Estritamente falando, as transações são aplicadas às propriedades e não aos objetos. A dificuldade é evitada no caso dos jogos de forma e côr fazendo que cada combinação de formas e côres, usadas no jôgo, só ocorra uma vez. Se houvesse, por exemplo, mais de um círculo vermelho no jôgo, a mudança para um círculo vermelho não seria, claramente, um movimento determinado. Contudo, passar do vermelho e quadrado para o vermelho conjugado com o circular é uma mudança de atributos determinada. Considerações semelhantes se aplicam às relações de desigualdade, "menos que", igualdade etc. Quando dizemos que "há menos membros nesse conjunto que no outro", isso é uma declaração muito diferente de "um número é menos que outro determinado número". Essa diferença se torna ainda mais clara quando tratamos com uma relação tal como "um mais". Se "um mais" se aplica a números, então estamos lidando com uma função; se "um mais" se aplica a conjuntos, estamos lidando apenas com uma relação. Nunca será demasiado darmos ênfa-

se a que o universo de explanação que estamos considerando deve estar bem claro. No jôgo da forma e côr temos um universo de explanação que é constituído de *tôdas as combinações possíveis das formas e côres disponíveis;* essas combinações possíveis são concretizadas pela presença de objetos que representam cada uma dessas combinações. Da mesma forma, poderíamos executar o mesmo jôgo com outros objetos ou com hastes, tais como as de Cuisenaire, caso em que cada número, cada comprimento seria apresentado uma vez e sòmente uma vez se estamos tratando de funções, a não ser que se identifiquem artificialmente várias dessas representações. Se quisermos representar números de modo concreto, não devemos colocar mais do que dois conjuntos com o mesmo número de elementos no jôgo. Se o fizermos, não estaremos representando a singularidade dos números de um modo físico. É evidente que há muitos exemplos de conjuntos com três membros, mas só existe um número 3.

Mesmo quando as crianças estão realizando exercícios estruturados, cujo objetivo final é esclarecer completamente o conceito de função, aparecem situações que envolvem o uso de "função" como um sujeito e não como um predicado. As descobertas com menores e maiores valôres, simetria e assimetria, inclinação, e outras, são os passos preliminares (embora às apalpadelas) para uma teoria do que pode ser *feito* às funções. O leitor, agora, verá, sem dúvida, que, assim que o conceito de função se torna operacional, isto é, logo que a "função" se torna uma ferramenta familiar com a qual as crianças estão ansiosas por brincar, não se poderá deixar fora do alcance delas o cálculo diferencial e integral. Elas estarão fazendo perguntas que só poderão ser respondidas pelo cálculo. Se estão prontas para "operar" com funções, então a passagem para a correspondência entre *classes e funções* se torna possível. Afinal, a diferenciação estabelece uma correspondência entre certa classe de funções (as que são diferenciáveis) e outra classe (seus coeficientes diferenciais). O princípio se mantém o mesmo. As experiências, isto é, jogos entre classes de funções, devem preceder qualquer percepção total daquilo que é simbolizado pelo cálculo. Está claro que poderíamos, então, ir até conceitos de ordem mais elevada; como dissemos, o céu é o limite para o matemático que empilhe predicado sôbre predicado. Está igualmente claro que há uma etapa em que devemos parar na marcha de abstrações de sucessivos conjuntos de conceitos, no que diz respeito a êste pequeno volume! Talvez já tenhamos dito o bastante para tornar claro ao leitor como a construção matemática pode ser realizada pelas crianças. Os métodos que advoguei são modelados nos da pesquisa matemática, e um dos principais objetivos dêste volume é tentar abrir o caminho para as crianças se maravilharem com os princípios matemáticos. A pesquisa nunca é conseguida de forma lógica; é sempre construída como resultado do desejo de saber algo sôbre alguma coisa. Umas vêzes há lacunas na construção que só poderão ser preenchidas mais tarde. Outras vêzes, há até mesmo erros e, nesse caso, parte do edifício ruirá sob o pêso das pressões e tensões das contradições que os erros causaram. Tal é o caminho para novos conhecimentos, caminho que poderia ser percorrido por nossas crianças, se apresentássemos suficientes experiências matemáticas para torná-las verdadeiramente curiosas.

Não mais que uma fração da Matemática realmente estudada pelos escolares pode ser tratada em um volume como êste. A Aritmética e a Álgebra, seguidas pelos conceitos de relação e função, foram escolhidas porque, em minha opinião, é nesses ramos que a situação de aprendizado está mais sèriamente errada. Muito trabalho excelente foi e está sendo realizado na apresentação dinâmica e perceptiva da Geometria,* e muito trabalho prático valioso está sendo feito, particularmente em escolas primárias, na esfera dos conceitos aplicados. Está certo que as crianças devem medir coisas, que devem pesar coisas, passar o líquido de uma garrafa para outra, ter experiência com dinheiro, para que, assim, possam aprender a manejar conceitos matemáticos aplicados que medem variáveis essenciais para nós em nosso ambiente. Também é excelente que as crianças sejam levadas a fábricas, estações ferroviárias, portos, fazendas etc., e que façam que apresentem ao povo local suas próprias perguntas. Conseguem a percepção do trabalho do mundo em que vivem, assim como uma riqueza de material de uma natureza matemática que pode incentivá-las para o aprendizado de abstrações cada vez mais difíceis. Sem o conhecimento de tais abstrações, não podem responder às questões que tais situações reais imediatamente apresentam. O fato de ter dito pouco, aqui, a respeito dessa espécie de trabalho não significa que eu não o considere importante. É mais que importante: é, na verdade, essencial.** Tal trabalho fornece a

* Ver (12) e também *Geometry through transformations*, de Dienes e Golding, parte integrante do Programa Adelaide.

** Ver *Exploration of space and practical measurement*, vol. III de *First Years in Mathematics*, de Z. P. Dienes e E. W. Golding.

etapa prática dos próprios ciclos de formação de conceitos, tornando práticas as abstrações e capacitando-as a serem usadas em situações reais. Minha argumentação tem sido, ao contrário, de que, embora êsse trabalho seja extremamente *necessário*, não é, de forma alguma, *suficiente*. Tôdas as partes do ciclo dinâmico devem ser dadas, não *apenas* a última parte. É sumamente importante que os professôres estejam conscientes da etapa do ciclo pela qual estão passando as crianças, para que as experiências apropriadas sejam apresentadas, quando as crianças estiverem maduras para elas. Isso não é, de modo algum, uma tarefa fácil e, no momento, não há ainda regras pelas quais tais etapas possam ser fàcilmente determinadas. Pequenos testes diagnósticos individuais podem, porém, ser preparados pelos professôres, se êles próprios estiverem plenamente conscientes da espécie de situação de aprendizado pela qual são responsáveis. Finalmente, pequenas baterias de métodos informais de diagnóstico podem ser acumuladas pelos professôres, embora deva ser tomado especial cuidado para não cair no êrro de perguntar "questões padronizadas". As crianças estarão perfeitamente preparadas com respostas padronizadas, e o diagnóstico poderá fàcilmente sair errado.

Já deve ter sido percebido, talvez, que os jogos sugeridos como auxiliares da complementação dos ciclos de formação de conceito variaram, até certo ponto, em grau de concreção. Talvez cheguemos a um ponto em que um nôvo conceito ou círculo de conceitos possa ser obtido por meio de jogos puramente mentais, embora possa ser perigoso conduzir essa transformação de jôgo concreto em abstrato muito depressa. O jôgo que o matemático realiza quando faz pesquisa talvez seja abstrato; mas será? Tem papel e lápis, usa as mãos e gesticula no ar e tenta imaginar contorções n-dimensionais por meio de qualquer auxílio que venha à mente. Se a verdade fôr conhecida, não estaremos nunca totalmente afastados do mundo real dos objetos e talvez seja realmente certo que assim seja. Afinal, a Matemática é a quinta-essência de certas situações que, em última análise, têm algo que ver com objetos. Desligar-nos do mundo dos objetos pode ser uma coisa perigosa. Em conseqüência, eu advertiria de que não devemos apressar nossas crianças no caminho em direção à "abstração total", já que tal noção talvez possa não existir em absoluto na mente humana. É muito emocionante ser capaz de realizar um jôgo puramente mental, mas, se a época não fôr oportuna, isso só poderá conduzir à confusão. Nenhum valor deve ser emprestado ao "afastamento" do material. De fato, o próprio professor deve dar o exemplo realizando trabalho em casa, ou conjunto de trabalhos, com o material, com vista total às crianças.

Nunca será demasiado repetir que o que é proposto aqui não é apenas o uso de certo conjunto de tijolos como um auxílio ao aprendizado. Meu principal argumento se deriva dos quatro princípios apresentados no segundo capítulo. Um conjunto de objetos completamente diferentes poderia realizar o mesmo para pôr em prática tais princípios, contanto que o material seja bastante variado para que obedeça ao Princípio de Variabilidade Perceptiva. Seria bastante fácil, por exemplo, construir os blocos aritméticos multibásicos com as contas de Montessori. O aparelho Stern pode ser usado em vez de uma caixa de base 10. As hastes de Cuisenaire poderiam ser outra variação da situação de equação ou para fixar as idéias de fatôres primos. O que é insuficiente a respeito de qualquer dêsses métodos é que só nos fornece um conjunto de experiências, e não se pode realizar a abstração verdadeiramente matemática. É, evidentemente, muito melhor associar o simbolismo matemático com as atividades realizadas com o uso das hastes de Cuisenaire do que apenas aprender como realizar as várias transformações de certos conjuntos de símbolos em outro equivalente, sem atribuir qualquer significado a essas transformações. Mas é ainda melhor possuir um completo capital de experiências matemáticas, para extrair delas essências verdadeiramente gerais, e não apenas associações com algumas ações.

7

O ESTUDO DE GEOMETRIA*

1. *Introdução*

O ESTUDO de Geometria é o do que pode ser feito no espaço que nos circunda. Inicialmente, êsse estudo toma a forma de um movimento pelo espaço, para ver o que pode e o que não pode ser feito. Mais tarde, partindo de tais atividades, vários conceitos de relação podem ser formados, os quais, eventualmente, construirão a estrutura abstrata conhecida como Geometria. A "etapa do jôgo" da Geometria começa logo que nos tornamos conscientes do movimento, tanto nosso como de outros corpos que estejam em tôrno de nós. Tal movimento dá a variação necessária de posição, direção, orientação etc., que nos capacita a formar os usuais conceitos espaciais, necessários para a sobrevivência no mundo. O estudo de Geometria é, apenas, uma tentativa de pôr êsses conceitos em alguma coisa parecida com ordem.

As únicas espécies de objetos reais são as dos objetos sólidos, tridimensionais. Pareceria ser de bom senso começarmos o estudo da Geometria pelo movimento de objetos tridimensionais, isto é, reais. Não existe isso que se chama um plano e, assim, é impossível apresentar experiências que correspondam exatamente às estruturas que formam parte da Geometria plana ou bidimensional. Contudo, com bom senso ou qualquer outra coisa, as primeiras lições de Geometria consistem, usualmente, no tratamento de "linhas", "pontos" e suas medidas, de um modo ou outro (posições de pontos, direções de linhas, comprimentos de segmentos de linhas etc.). Não é de admirar que as

* Partes dêste capítulo foram conferências realizadas pelo autor na reunião da Quebec Mathematics Association, em maio de 1966, em Rimouski, Canadá.

crianças fiquem perturbadas com a confusão reinante entre o concreto e o abstrato, como, por exemplo, entre a linha de giz no quadro e a abstração conhecida como segmento de linha reta. As únicas espécies de declarações válidas sôbre pontos e linhas são as de suas correlações em alguma espécie de estrutura abstrata, e não sôbre algumas correlações inexatas dessas abstrações, que possamos pretender traçar.

Parece ser uma sugestão sensata, adotada por algumas pessoas nos recentes anos, começar a Geometria pela Geometria Sólida. Eu gostaria de acrescentar outra sugestão, ou seja, a da introdução de exercícios de abstração juntamente com o tratamento com os corpos sólidos, reais, para que a criança venha a compreender que o que está aprendendo é a inter-relação em alguma estrutura, e que essa estrutura pode apresentar mais de uma representação física. Em outras palavras, estou sugerindo que usemos os princípios da variabilidade perceptiva e, assim sendo, vistamos as estruturas geométricas que queremos ensinar às crianças com muitas formas diferentes, algumas espaciais, outras não-espaciais.

No que se segue, será explicado como algumas das inter-relações dentro de estruturas geométricas podem ser tornadas claras a crianças: I) pelo manuseio de objetos físicos no espaço; e II) por outros manuseios não-espaciais, que, pelas "regras do jôgo", obedecem a regras idênticas às das manipulações espaciais.

Depois de extrair a natureza abstrata de uma estrutura-regra, ou de várias delas, semelhantes e relacionadas, descreveremos os modos de expressá-las sob a forma de simples sistemas-axiomas. Poderemos, então, "brincar com" êstes últimos, alterados de qualquer maneira que as crianças desejarem. Será a etapa do jôgo do ciclo seguinte de formação de conceito. No primeiro ciclo, as experiências com objetos reais, e exercícios estruturados com alguns objetos especiais, que tenham certas propriedades bem definidas, são seguidas da determinação da estrutura, dentro da qual estaremos restringidos pelas propriedades dos objetos escolhidos. Para apresentar mais claramente a estrutura, sugere-se que se façam "mapas" dos possíveis "movimentos". Sòmente após o cuidadoso estudo dêsses mapas é que a axiomatização da estrutura se torna possível como um passo psicológico para a maioria das crianças. Uma vez que a estrutura de possíveis "movimentos" possa ser representada por uma criança, sob a forma de um mapa, ou de um sistema-axioma, essa estrutura se torna um objeto de brinquedo para ela se divertir, restingindo aquela, amplian-

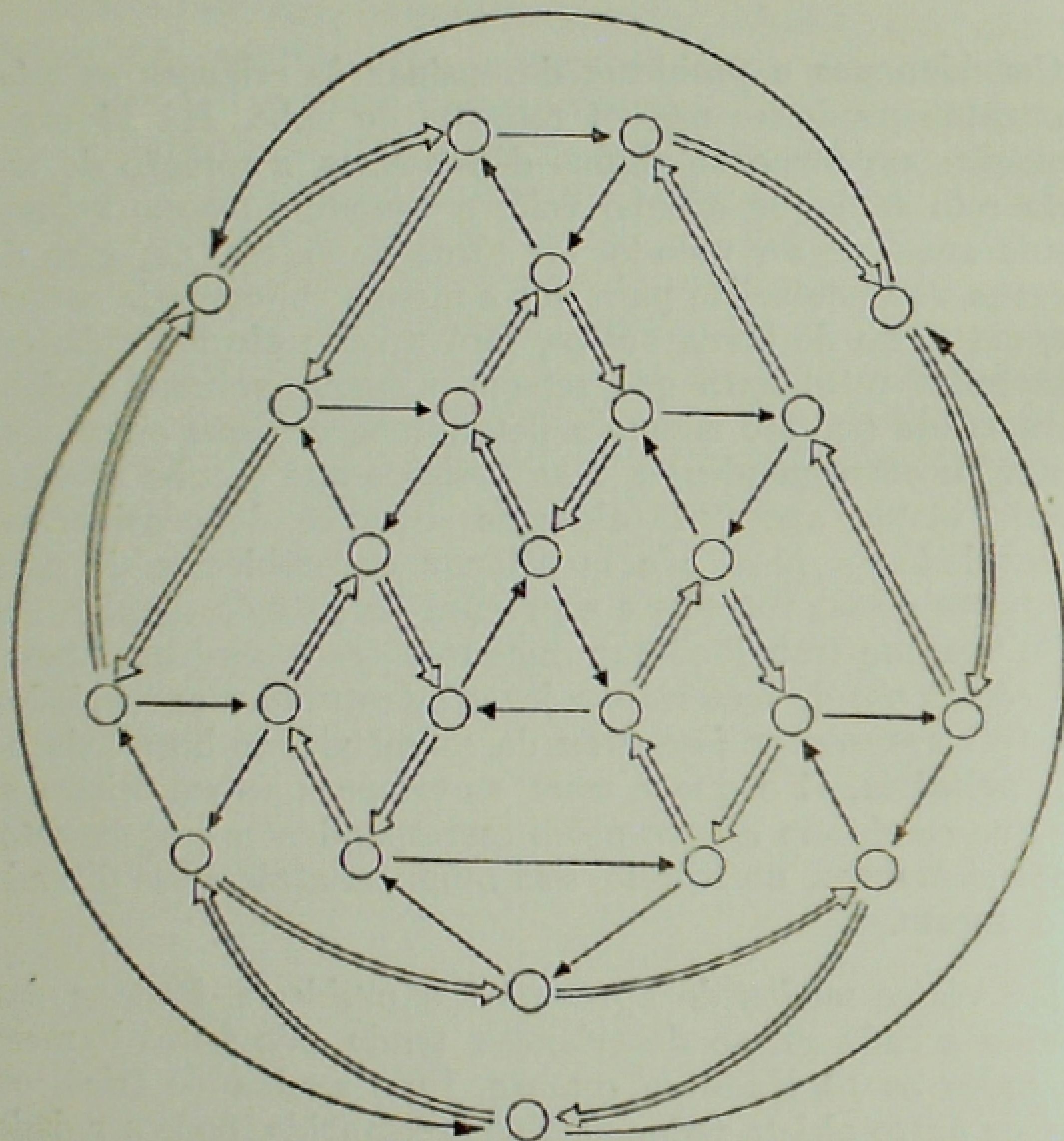
do-a ou mudando-a à vontade, e vendo o que acontece com as propriedades da estrutura como resultado de tais modificações. Como já se disse, essa espécie de atividade já pertence ao ciclo seguinte, e nenhuma dessas atividades será descrita em detalhe neste capítulo.

2. *A aldeia de 24 casas, com seus itinerários de ônibus*

Consideremos o problema de ensinar às crianças os relacionamentos presentes nas 24 rotações do cubo. Há 13 eixos de rotação: em tôrno de alguns dêsses eixos, a rotação de um ângulo reto fará que o cubo volte a ocupar o mesmo volume ocupado antes de ser rodado; em tôrno de outros, um giro de 120 graus será necessário para que o mesmo volume seja ocupado; e, em tôrno de ainda outros, será preciso girar o cubo em dois ângulos retos para que retome o mesmo volume. Poderá ser observado que até mesmo a determinação dêsses eixos, com as rotações correspondentes e as posições que o cubo ocupará em cada etapa, apresenta algumas situações de considerável complexidade — para não mencionar os problemas de combinar pares dessas rotações e a procura da rotação simples, que faria o "mesmo trabalho" que duas rotações sucessivas. Apesar disso, com o uso de materiais e jogos estruturados apropriados, é possível apresentar êsse grau de complexidade bem cedo na escola primária. E o que é mais, as crianças acham ótimos os jogos que conduzem a percepções correspondentes e os executarão por si mesmas, no recreio, sem ninguém atrás delas dizendo que o façam.

Há vários modos de apresentar o problema. Pode-se dar um cubo a cada grupo de crianças, tendo sido feitos buracos para todos os 13 eixos de rotação. Uma agulha de tricô, ou qualquer outro objeto redondo, fino e comprido, pode ser dado para ser passado por êsses buracos. As crianças podem fazer desenhos nas seis faces do cubo e, então, devem apostar entre elas em que posição o cubo deve ser "apunhalado" pela agulha, de modo que uma rotação em tôrno dêsse eixo ponha tal figura à vista, colocada em uma direção desejada. Uma criança poderá dizer: "Quero a flor vermelha para baixo, com a flor em direção à porta." Tem, então, de procurar um eixo tal que, se a agulha fôr colocada nêle, e mantida imóvel, o cubo poderá ser rodado para outra posição em que a flor esteja na direção desejada. Haverá seis desenhos, um em cada face, e cada desenho poderá ocupar quatro posições. Isso nos dá 24 resultados possíveis, que poderemos esperar.

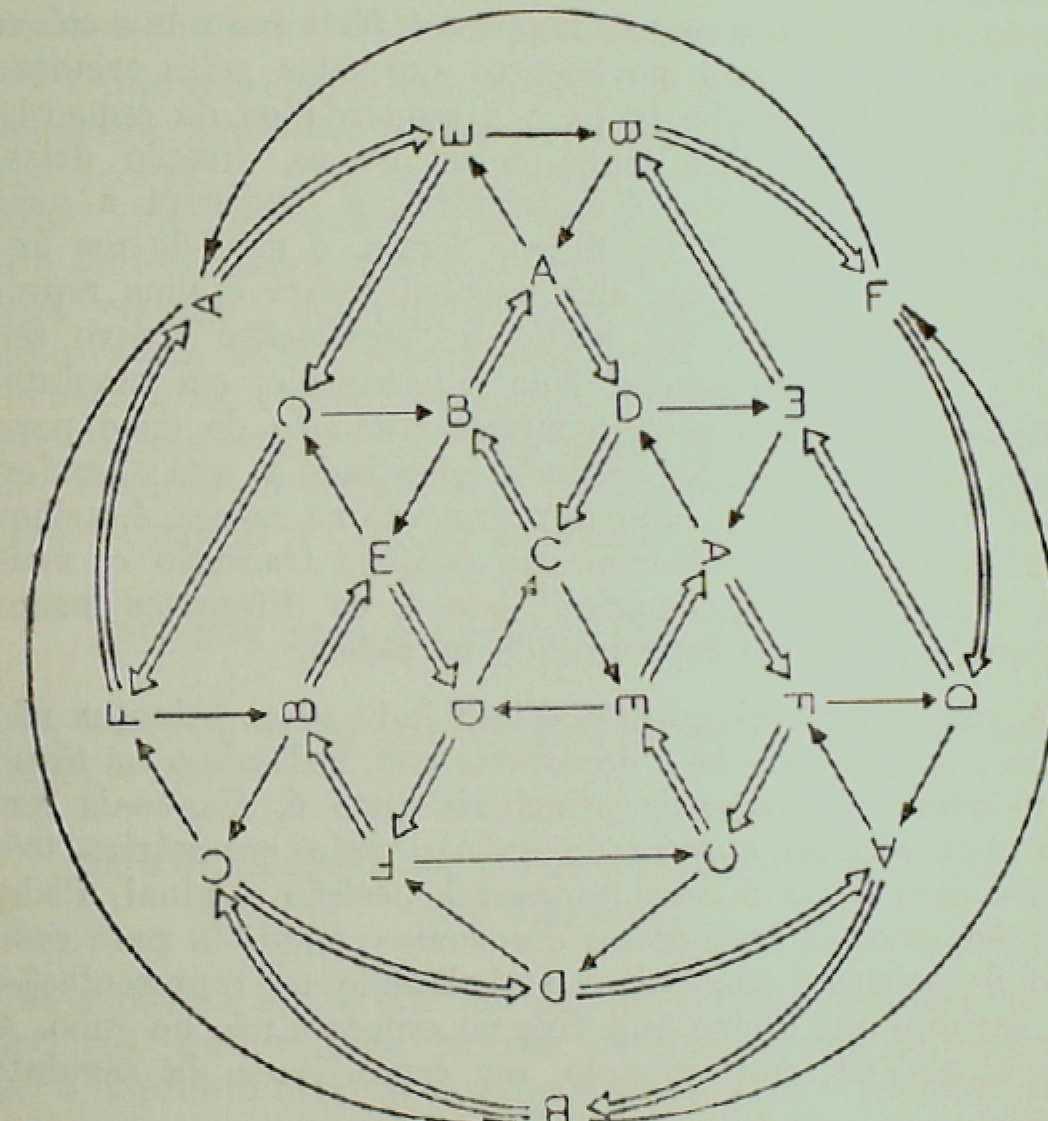
Outro meio seria dar às crianças um "mapa" esquemático dessas 24 posições, sob a forma de uma aldeia de 24 casas, no qual cada rua, de uma casa à outra, é de mão única. Na figura a seguir, as casas são indicadas pelos círculos e as ruas de mão única pelas setas. Há ruas largas e ruas estreitas, sendo estas representadas por um só traço e aquelas por traço duplo.



O jôgo com esta aldeia é simplesmente fazer que as crianças sigam de uma casa a qualquer outra pelo menor número possível de ruas. Uma das casas poderia ser designada como "Lar" e outras serem indicadas como as de outras crianças da turma. Mais tarde, poderemos introduzir linhas de ônibus e cada um dêles teria escrito nêle a sucessão de ruas largas e estreitas pelas quais teria de passar antes de atingir nôvo ponto de parada. Por exemplo, um ônibus "larga, estreita, estreita, larga" teria de passar por uma rua larga, depois por duas estreitas sucessivas e depois por outra larga, antes de parar para deixar ou tomar passageiros. Descobrir-se-á que

cada linha de ônibus terá duas, três ou quatro paradas, a não ser que uma inclua um "itinerário circular" tal como "larga, estreita, larga, estreita". Um ônibus com essa marca só poderá ser de turismo, porque parará cada vez sempre no mesmo lugar, tendo percorrido as ruas prescritas e voltando novamente.

Poderá ser visto que êsses itinerários de ônibus corresponderão a meio giro no cubo, ou um têrço ou um quarto de giro. Outro mapa diferente da aldeia é dado abaixo.



Haverá várias orientações que podemos tomar agora.

a) Podemos concentrar-nos em fazer as crianças compreenderem que a estrutura da aldeia é essencialmente a mesma que a das rotações do cubo.
b) Podemos conduzir as crianças a estudar mais detalhadamente a estrutura da aldeia, fazendo-as viajar de ônibus etc.

Se nos concentrarmos na primeira hipótese, teremos de fazer as crianças representar as rotações do cubo no mapa da aldeia, ou vice-versa. Supondo, por exemplo, que tenham sido feitos desenhos nas seis faces do cubo, aos quais nos referiremos pelas letras A, B, C, D, E, F, teremos de decidir

I) que é uma rua estreita no cubo?
II) que é uma rua larga no cubo?

As ruas largas não apresentam dificuldades, pois as crianças vêem, no mapa, que têm de viajar por quatro ruas largas antes de voltar para o mesmo lugar, e é fácil fazer tais coisas com o cubo. Um dêsses movimentos sugeridos pelas crianças é "rolar" o cubo da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita, ou para longe delas, ou na direção delas. Qualquer dessas sugestões é satisfatória, e conduzirá a uma representação "correta". Da mesma forma, o giro de um ângulo reto em tôrno de um eixo vertical levará a uma representação correta. Uma vez aceito o "movimento", deve ser mantido *nessa representação*. Não é necessário, em absoluto, que tôdas as crianças usem a mesma tradução do cubo para a aldeia, ou vice-versa. Na verdade, admitindo-se que o professor encarregado possa manter a informação na cabeça, é melhor deixar as crianças escolherem sua própria tradução e, mais tarde, compararem "dicionários", isto é, os diferentes modos pelos quais o cubo foi representado na aldeia.

A rua estreita só causará dificuldade se as crianças não tiverem manejado o cubo e descoberto que, rodando-o em tôrno de qualquer das diagonais principais (isto é, diagonais que ligam dois vértices opostos do cubo), serão necessárias três rotações para fazer o cubo retornar à posição original. Pode-se, então, escolher uma dessas diagonais e mantê-la para cada grupo de crianças que estiver trabalhando na representação. Deve ser dito que o eixo está fixo no espaço e não no cubo. A diagonal poderia, por exemplo, ser especificada da seguinte forma:

"Escolha como um dos vértices o que estiver mais próximo a você, do lado da mesa à sua esquerda, e como outro vértice o que estiver mais afastado, na direção acima da mesa à sua direita. Ponha a agulha pelo buraco que une êsses dois pontos, levante o cubo, mas mantenha a agulha na mesma posição todo o tempo; gire o cubo, empurrando a face inferior para cima e para a esquerda, até que o cubo fique em uma posição tal que possa tirar a agulha e colocá-lo na mesa outra vez."

É importante fazer as crianças compreenderem que, uma vez que podem chegar a duas figuras diferentes daquela que podem ver, por meio de um giro em tôrno de uma diagonal principal, devem decidir em *qual direção* deverão fazer o giro. Daí a instrução para "girar empurrando a face inferior para cima". É lógico que o giro no sentido oposto poderia também ser escolhido, desde que seja possível dentro de uma representação na aldeia.

Vamos considerar as instruções acima como o movimento do cubo equivalente a passar por uma rua estreita, e consideremos o "rolar para a nossa direita" como equivalente a passar por uma rua larga. Obtemos então o segundo mapa (pág. 151).

Tendo conseguido que as crianças façam um mapa dêsses, poderemos fazer-lhes várias perguntas. Por exemplo: "Como você poderá ir para atingir tôdas as posições com a mesma letra?" Descobriremos que, no mapa traçado, teremos de tomar ou o ônibus "larga, estreita, estreita", ou o "estreita, estreita, larga, estreita", dependendo da direção que tomarmos para encontrar as letras. Ficará logo evidente que essa espécie de movimento na aldeia corresponde ao giro em ângulo reto em tôrno de um eixo vertical pelo centro do cubo, seja no sentido dos ponteiros do relógio, seja em sentido contrário, conforme o caso. Também poderá ser verificado, no cubo, que

"um giro para a direita e dois giros diagonais"

terão o mesmo efeito que um giro no sentido dos ponteiros do relógio e que

"dois giros diagonais, um giro para a direita e outro giro diagonal"

terão o mesmo efeito que um giro no sentido contrário ao dos ponteiros. As crianças ficarão, muitas vêzes, maravilhadas com a infalibilidade do modêlo e passarão a considerar como preciosa a posse de tais modelos. Uma criança de nove anos exclamou, ao compreender completamente a correspondência entre o cubo e a aldeia:

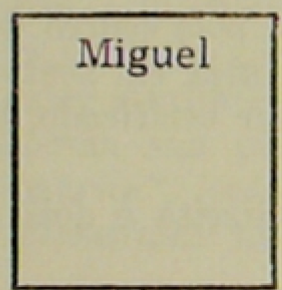
"Êste é o mapa mais maravilhoso do mundo!"

Em vez de seguir o caminho de estabelecer a correspondência entre o cubo e a aldeia, podemos levar as crianças a investigar mais ìntimamente ou o cubo isoladamente ou a aldeia. Poderemos, por exemplo, pedir:

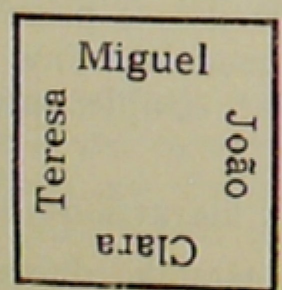
"Se dermos dois giros quaisquer, que você pode executar tantas vêzes quantas quiser, um após o outro, será possível atingir qualquer posição ou apenas algumas?"

A resposta a essa pergunta depende, evidentemente, dos dois giros que foram escolhidos. Naturalmente, poderemos atingir qualquer lugar se escolhermos o "rolar para a direita" e o "giro diagonal", ou, na aldeia, se tomarmos o ônibus que pára após cada rua estreita ou (como segundo) o que pára depois de cada rua larga. Mas o que acontecerá se tomarmos outros itinerários na aldeia, ou outros pares de rotações do cubo? Isso nos conduzirá ao estudo de subgrupos, como veremos.

É lógico que poderemos igualmente representar a aldeia no cubo. Suponhamos que tôdas as 24 casas da aldeia tenham sido marcadas com os nomes das crianças. Podemos então tomar o nosso cubo e escrever na parte de cima da face do cubo o nome de uma das casas, que pode ser escolhida à vontade (o fato da representação funcionar, seja qual fôr o nome que ponhamos na face que escolhemos para iniciar, torna o jôgo ainda mais "mágico" para as crianças). Podemos pôr



na parte superior da face. Supondo que façamos um giro no sentido dos ponteiros, de um ângulo reto, em tôrno de um eixo vertical que passe pelo centro, como se fôsse a viagem por uma rua larga (em vez de "rolar para a direita"), e poderemos imediatamente ir colocando os nomes das crianças cujas casas vamos encontrando ao fazer o percurso pelas ruas largas em que mora o Miguel. O resultado poderá ser:



o que significa que, ao seguir por uma rua larga, partindo da casa de Miguel, encontraremos a de Teresa, depois a de Clara, em seguida a de João, e regressaremos à de Miguel. A

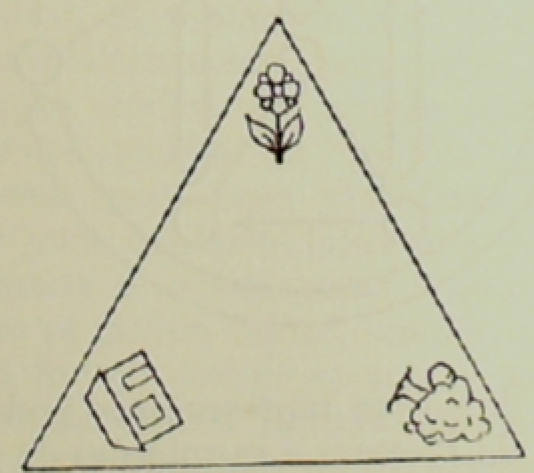
mesma seqüência será produzida girando o cubo cuja face superior é mostrada acima, em sucessivos ângulos retos, no sentido dos ponteiros do relógio. Depois, deve-se escolher uma diagonal para representar o "ônibus triangular" na aldeia e, com a aplicação sucessiva do giro de um ângulo reto em tôrno do eixo vertical e do giro diagonal, cada face será coberta com quatro nomes. Dêsse modo, a aldeia será representada no cubo.

3. *A aldeia de 12 casas e o tetraedro*

De modo semelhante ao que fizemos com o cubo, poderemos fazer com o tetraedro regular. Teremos de providenciar um tetraedro regular de madeira, com seus sete eixos de rotação, como material de manipulação. Os eixos são os seguintes:

I) uniões de vértices com centros da face oposta (em número de quatro)
II) uniões dos pontos médios das arestas opostas (em número de três)

Se não houver tetraedro de madeira disponível, êle pode ser feito, fàcilmente, com cartão, e agulhas de tricô podem ser usadas para "apunhalá-lo" pelos vários eixos de rotação. Três figuras poderão ser desenhadas em cada face, uma em cada "canto", de modo a ficar "para cima" quando o tetraedro fôr colocado apropriadamente. O triângulo abaixo, por exemplo, pode ser a face que a criança estará olhando e as figuras poderiam ser assim:



Poderíamos dizer que o tetraedro está, agora, na posição "flor". Quando as 12 figuras tiverem sido desenhadas, de modo que cada face tenha suas três figuras, poderemos começar o jôgo perguntando às crianças qual o eixo que teremos de usar (isto é, onde teremos de "apunhalar" o bloco com a agulha),