As diagonaes do quadrado cortam-se ao meio, são iguaes e são orthogonaes.

Porque o quadrado é parallelogrammo, é rectangulo e é losango

---

# 2ª PARTE

# Circumferencia

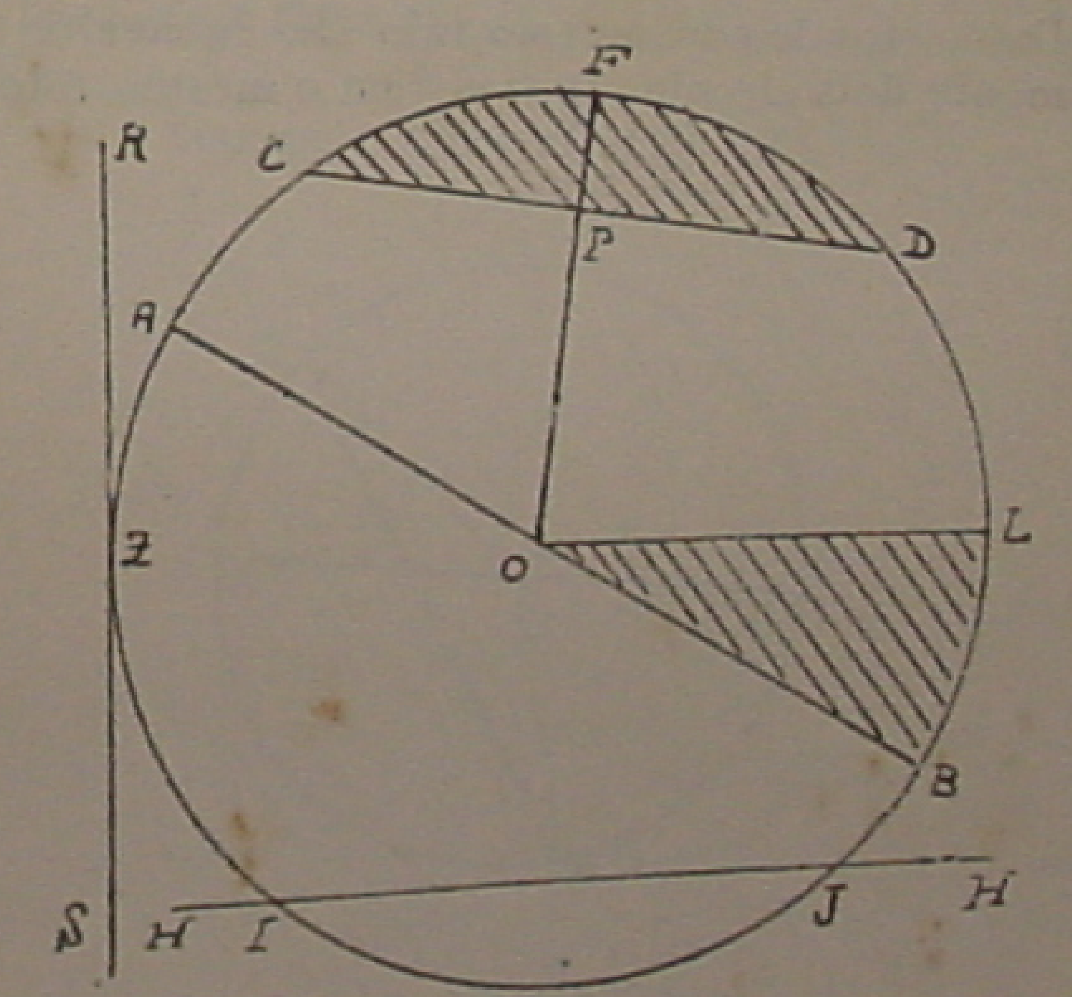
A CIRCUMFERENCIA é o logar geometrico dos pontos do plano, que distam de um ponto fixo, chamado CENTRO, de uma distancia constante chamada RAIO.

O raio prolongado além do centro, até attingir de novo a circumferencia, é um DIAMETRO. Logo, o diametro é o dobro do raio.

Um arco é uma parte qualquer da circumferencia.

Uma corda (C D) é uma recta que une dois pontos d'uma circumferencia. Notemos que o diametro (A B) tambem é uma corda (que passa pelo centro.)

Chama-se FLECHA a perpendicular traçada pelo meio de uma corda e terminada no arco (P F).




Um APOTHEMA é uma perpendicular traçada do centro sobre uma corda (O P).

Uma SECANTE é uma recta que corta a circumferencia de lado a lado, é uma corda prolongada (HH)

A TANGENTE (RS) é o limite das posições de uma secante quando ella, conservando-se parallela a si mesma, tende a sahir do circulo; é então claro que os dois pontos tendem a confundir-se, e, na posição limite, será tangente á circumferencia (Newton).

Tambem podemos considerar a tangente como posição limite de uma secante que gira em torno de um de seus pontos de intersecção até que o outro se confunda com o primeiro (Leibnitz).

Um ANGULO CENTRAL é um angulo formado por dois raios.

O CIRCULO é a porção do plano limitada pela circumferencia.

SECTOR CIRCULAR é a porção do circulo comprehendida entre dois raios e o arco que passa por suas extremidades: a porção B O L é um sector circular.

SEGMENTO CIRCULAR (CPDF) é a porção do circulo comprehendida entre um arco e sua corda.

Todos os raios d'um mesmo circulo são iguaes, bem como todos os diametros.

Dois circulos do mesmo raio são iguaes, e reciprocamente dois circulos iguaes têm o mesmo raio,

# Cordas e arcos

**Theorema 34**—Uma linha recta não póde encontrar uma circumferencia em mais de dois pontos.

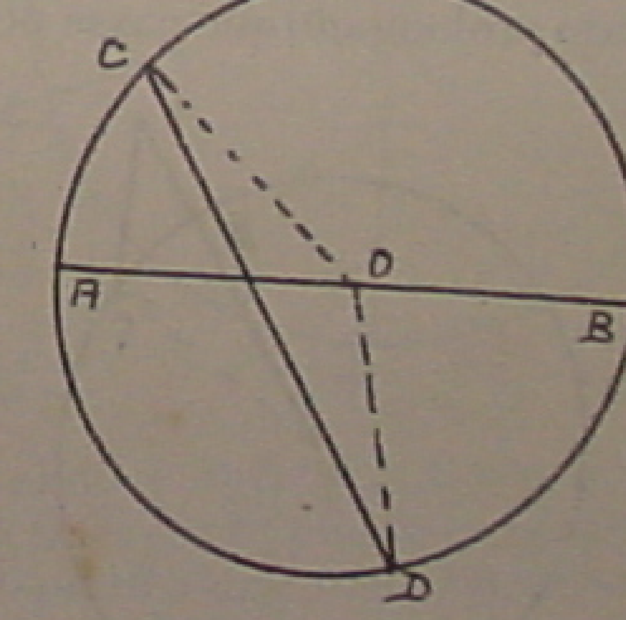
Se existisse n'uma circumferencia tres pontos em linha recta, os raios traçados por esses tres pontos sendo iguaes, poder-se-hia traçar tres rectas iguaes, d'um mesmo ponto a uma mesma recta, o que é impossivel.

**Theorema 35**—Todo diametro divide a circumferencia e o circulo em duas partes iguaes.

Si traçassemos n'uma circumferencia um diametro horizontal, e se fizessemos girar a parte superior em torno do diametro, ella viria coincidir com a parte inferior, pois todos os seus pontos equidistam do centro. Logo as duas partes da circumferencia e tambem as duas partes do circulo determinados pelo diametro são iguaes.

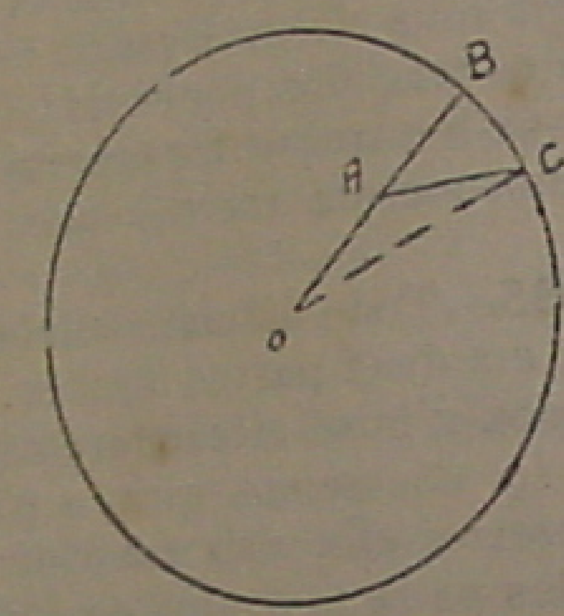
**Theorema 36**—Qualquer corda é menor do que o diametro.

Seja o diametro A B e a corda C D.




$$CD < CO + OD$$
$$CD < AO + OB$$
$$CD < AB$$

**Theorema 37** — A mais curta distancia d'um ponto a uma circumferencia é a parte do raio, ou do raio prolongado, comprehendido entre este ponto e a circumferencia.

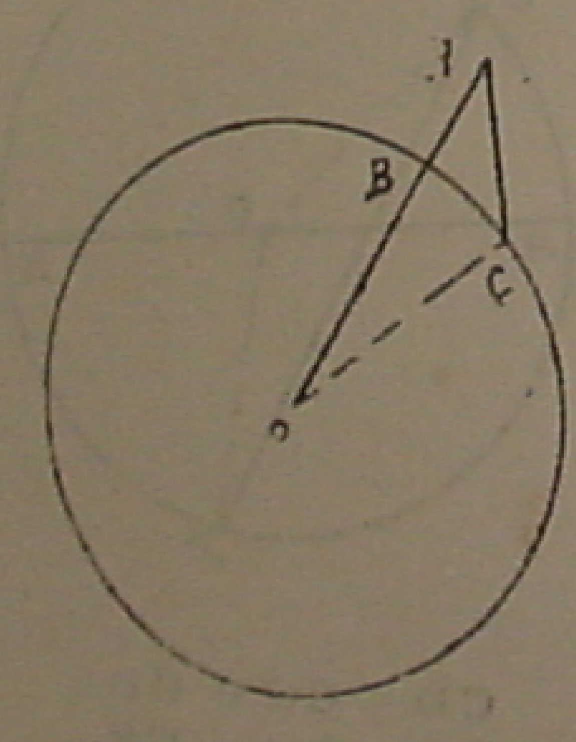



Seja A, o ponto. Digo que a mais curta distancia do ponto A á circumferencia é A B. E', por exemplo, mais curta do que A C.

Com effeito:

$$OC < OA + AC$$
$$OB < OA + AC$$
$$OA + AB < OA + AC$$
$$AB < AC$$

Se tivessemos tomado o ponto A fóra da circumferencia, a sua mais curta distancia á circumferencia seria AB (a porção do raio prolongado que passa pelo ponto A).




$$AO < AC + CO$$
$$AB + BO < AC + CO$$
$$AB < AC$$

—



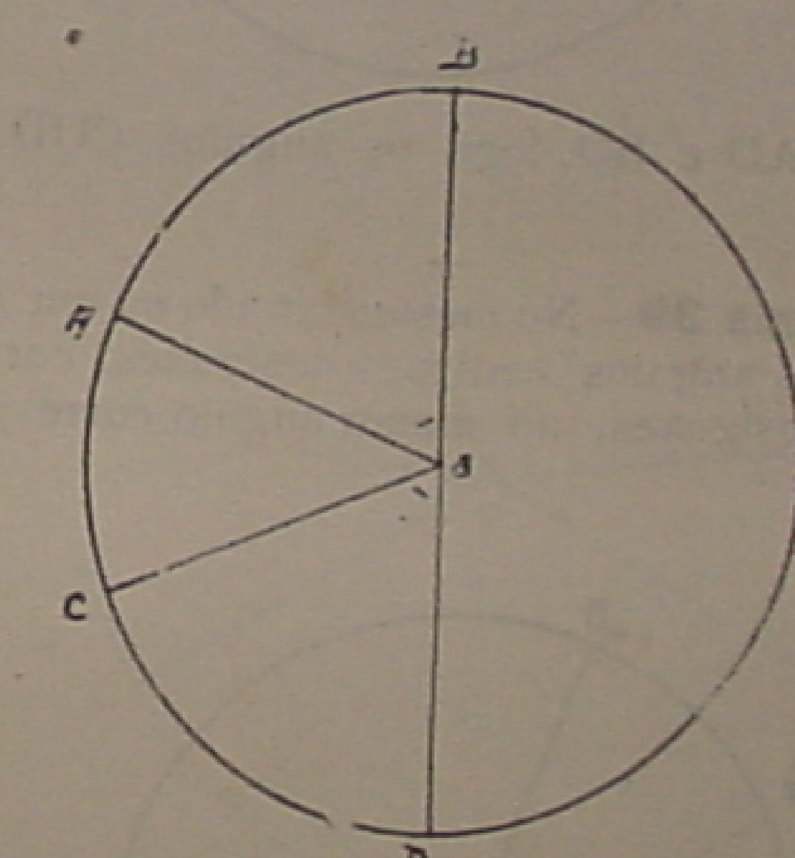
**Problema** — Determinar o logar geometrico dos pontos do plano que distam d'uma circumferencia dada d'uma distancia dada, m.

Sendo r o raio da circumferencia dada; o logar geometrico procurado será formado por duas circumferencias tendo como raios respectivos $m + r$ e $m - r$, (com o mesmo centro da circumferencia dada.)

—

**Theorema 38** — No mesmo circulo ou em circulos iguaes, dois angulos centraes iguaes interceptam arcos iguaes.

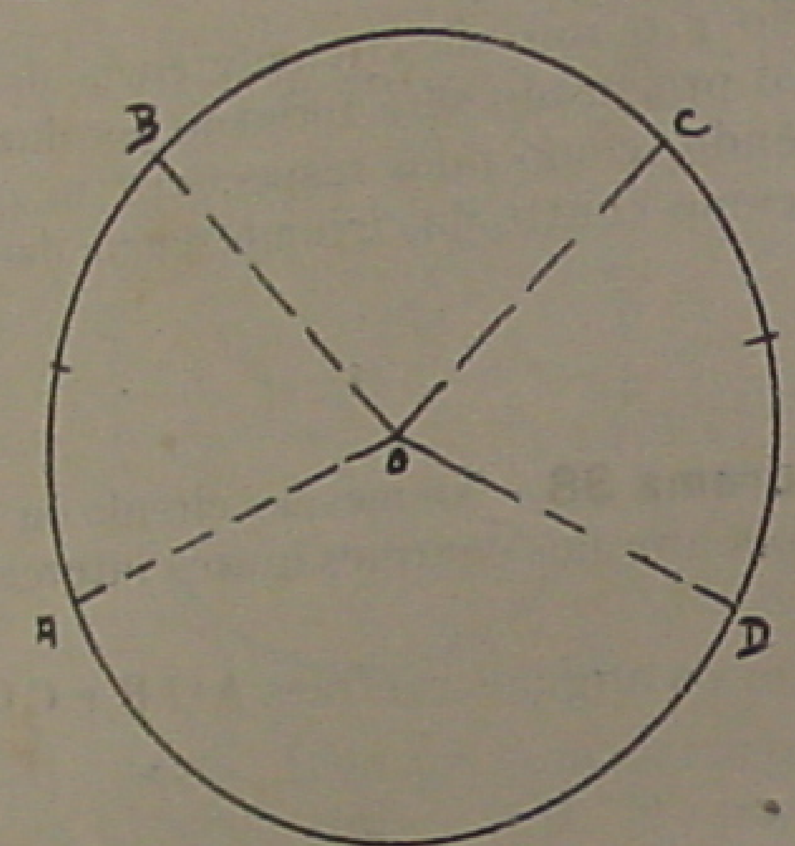
Sejam os angulos centraes A O B e C O D iguaes.




Collocando o raio O C sobre o raio O B, como o angulo C O D é, por hypothese, igaal ao angulo BOA, o raio O D tomará a direcção O A, e os arcos C D e B A coincidirão em toda sua extensão.

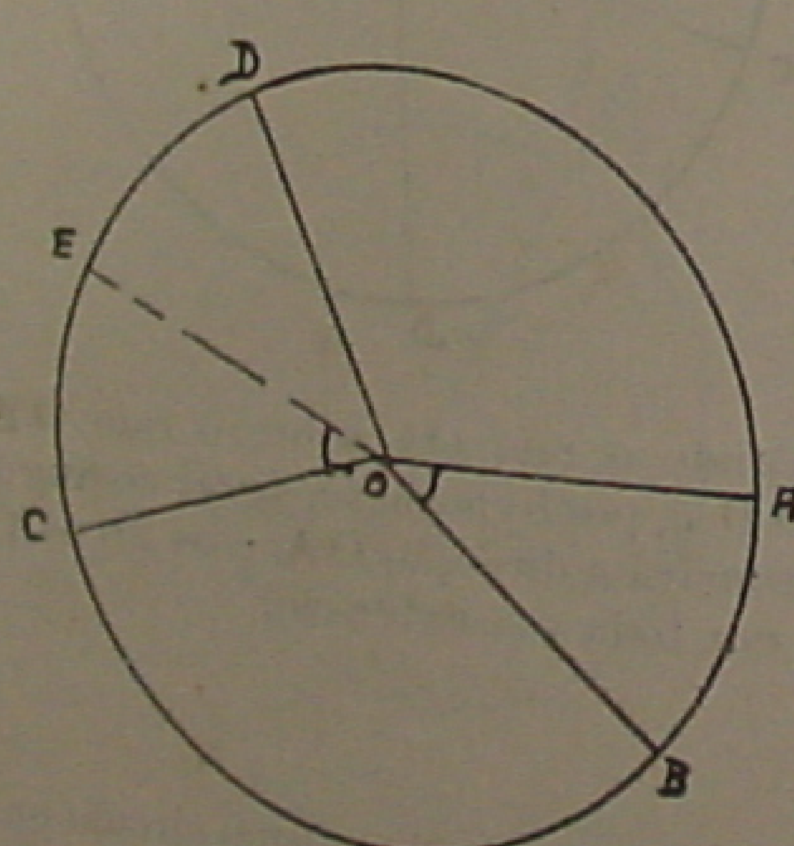
**Reciprocamente** — No mesmo circulo ou circulos iguaes, a arcos iguaes correspondem angulos centraes iguaes.

Sejam os arcos A B e CD, iguaes. Collocando CD sobre A B, os raios C O e D O coincidirão respectivamente com AO e BO, logo os angulos COD e BOA coincidirão.





**Theorema 39**—No mesmo circulo ou em circulos iguaes, a dois angulos centraes desiguaes, correspondem arcos desiguaes, ao menor angulo corresponde o menor arco.





Seja o angulo central AOB, menor do que o angulo central D O C.

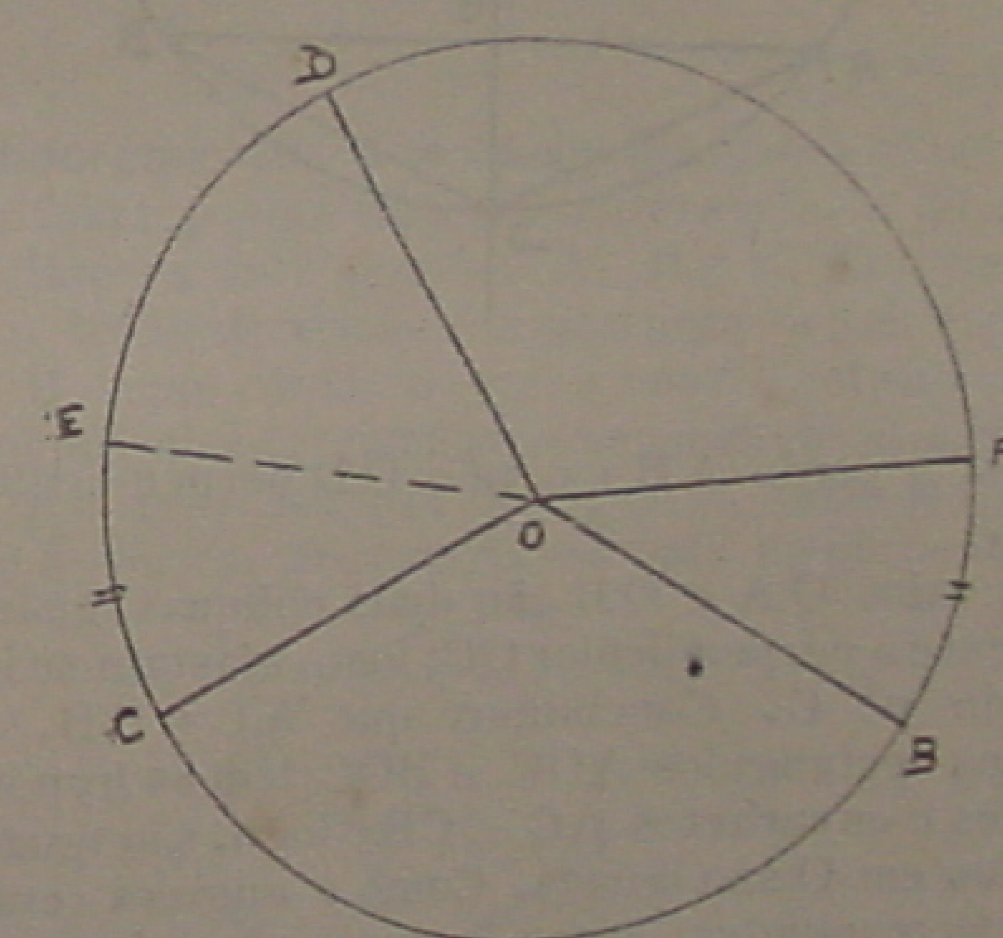


Collocando o angulo BOA sobre C O D, de modo que BO coincida com C O, o primeiro sendo menor do que o segundo, o lado AO cahirá por exemplo em EO.

Logo, o arco C E será igual a AB, e como C E é uma parte de C D, será elle menor do que C D. Concluimos que AB é menor do que C D.

—

**Reciprocamente** — No mesmo circulo ou em circulos iguaes, a dois arcos desiguaes correspondem angulos centraes desiguaes, ao menor arco corresponde o menor angulo.



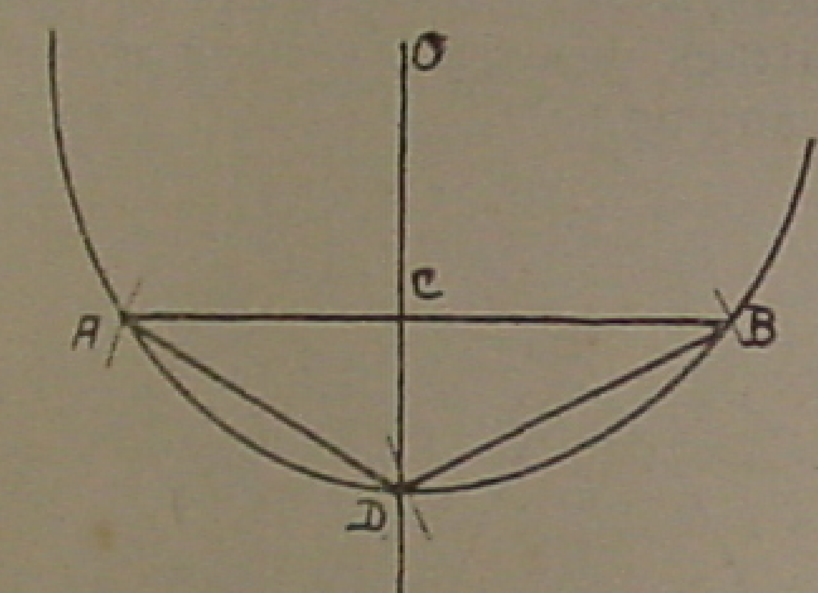


Seja o arco AB menor do que C D.

Collocando o arco AB sobre C D, de modo que A caia em C, podemos suppôr que AB caia em C E; logo, os angulos BOA e C O E correspondendo a arcos iguaes, serão iguaes; e como o angulo COE é uma parte de COD, será elle menor do que C O D.

Logo, o angulo BOA que corresponde ao menor arco, é menor do que o angulo C O D correspondente ao maior arco.

**Theorema 40**—Todo raio perpendicular sobre uma corda, divide esta corda e o arco correspondente em duas partes iguaes.




Seja a corda A B e o raio O D perpendicular sobre A B.

Os raios O A e O B são duas obliquas iguaes relativamente á perpendicular OC; logo, afastam-se igualmente do pé C. Concluimos que A C = C B. — Os triangulos rectangulos AOC e BOC têm as hypotenusas iguaes e os cathetos AC = CB; logo, são iguaes, e os angulos em O são iguaes. Como a angulos centraes iguaes correspondem arcos iguaes, concluimos que o arco A D é igual ao arco D B.

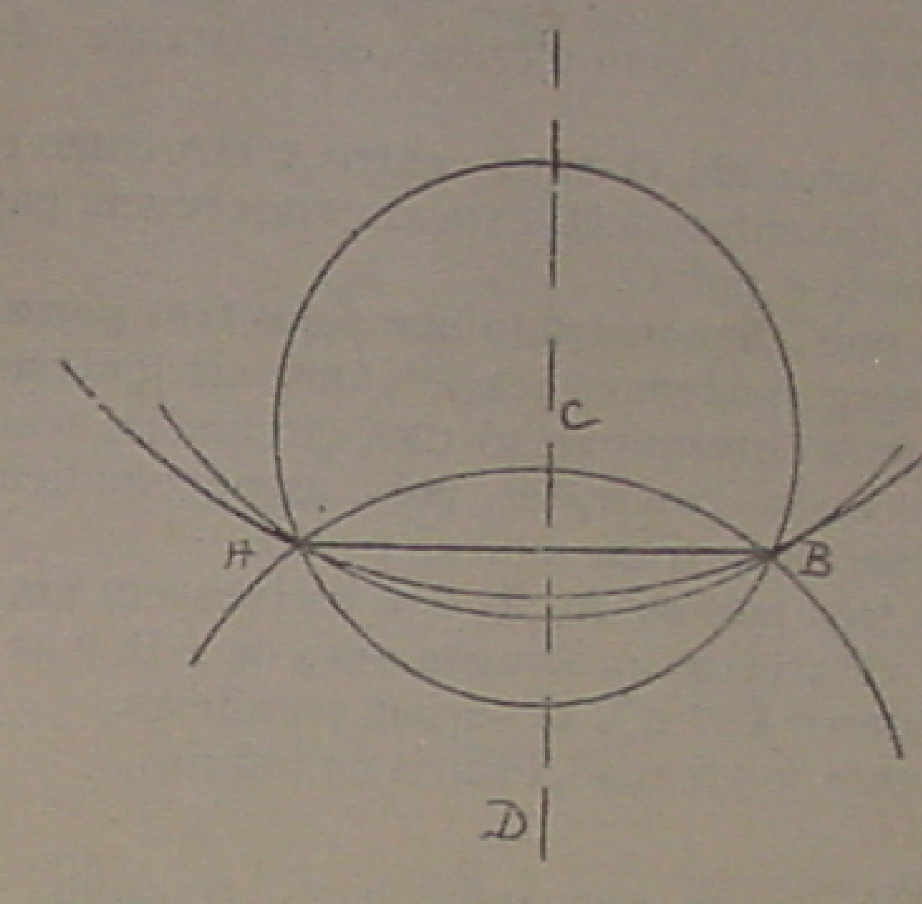
Notamos que o centro O, o meio da corda (C) e o meio do arco (D) estão situados na mesma linha recta, que é perpendicular sobre a corda A B.

Para dividir um arco em duas partes iguaes, basta traçar uma perpendicular ao meio da corda que une os extremos do arco.

A perpendicular illimitada CD traçada pelo meio de uma recta A B é o logar geometrico dos centros

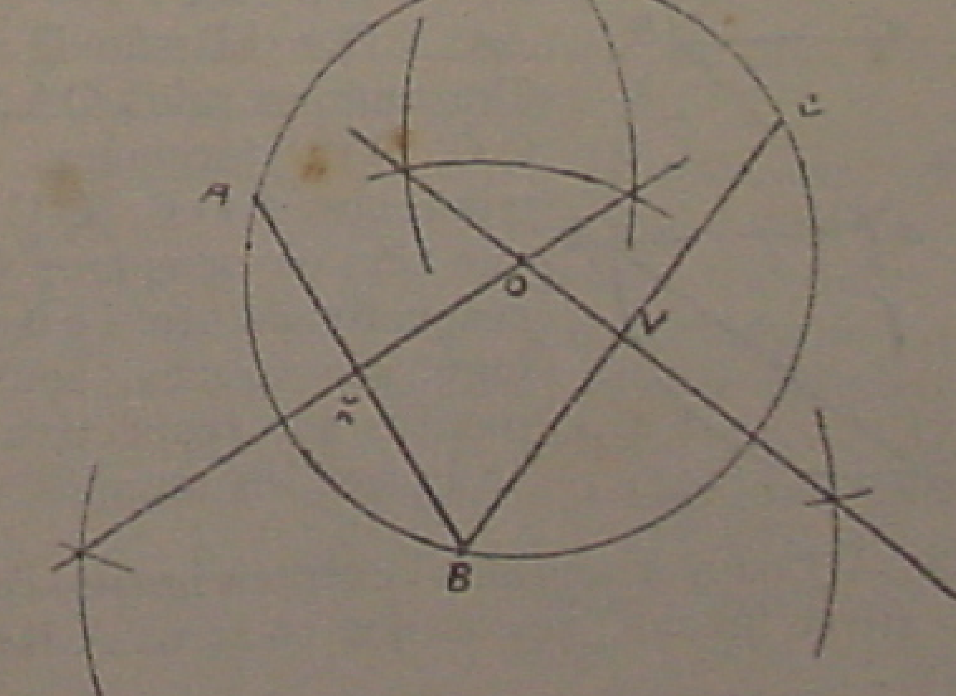


das circumferencias que passam pelas extremidades A e B da recta.




**Theorema 41**—Por tres pontos dados, no plano, póde-se fazer passar uma circumferencia, e uma só.

Sejam os tres pontos, A, B e C, não em linha recta. A circumferencia que passasse por A e por B, teria A B como corda, e o seu centro estaria situado na perpendicular traçada pelo seu meio K. A circumferencia que passasse por B e por C, teria B C como corda, e o seu centro estaria situado na perpendicular




traçada do meio V de B C. A circumferencia, devendo passar por A, B e C terá, pois, seu centro situado no ponto O de encontro das perpendiculares traçadas em K e V.

O ponto O é, com effeito, equidistante de A, B e C.

Logo, tomando O como centro, e OA como raio, e traçando a circumferencia, esta circumferencia passará tambem por B e por C.

Está, pois, demonstrado que pelos tres pontos A, B e C sempre podemos traçar uma circumferencia.

Podemos determinar SÓ UMA circumferencia preenchendo essas condições, pois, as perpendiculares KO e VO se encontram num só ponto.

Si os tres pontos A, B e C estivessem em linha recta, BC estaria no prolongamento de AB, e as duas perpendiculares KO e VO seriam parallelas.

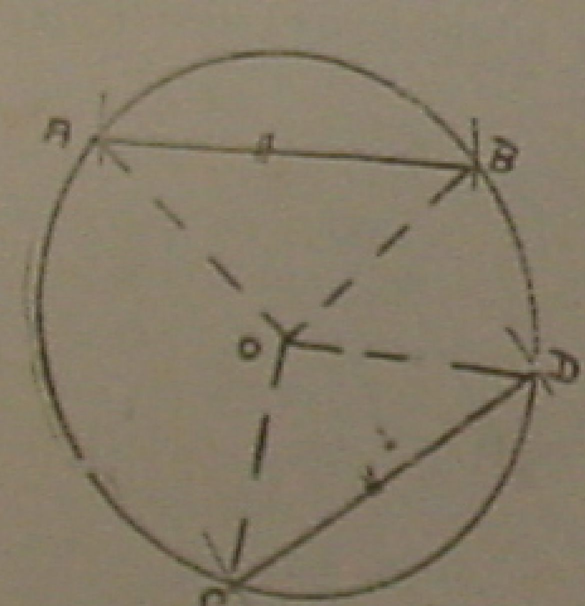
O centro, neste caso, estaria no infinito.

—

NOTA: As perpendiculares traçadas sobre os meios dos lados de um triangulo encontram-se num mesmo ponto, e este ponto é o centro do circulo circumscripto ao triangulo: pois, dista igualmente dos tres vertices (*).

—

**Theorema 42** — No mesmo circulo ou em circulos iguaes, cordas iguaes subtendem arcos iguaes.



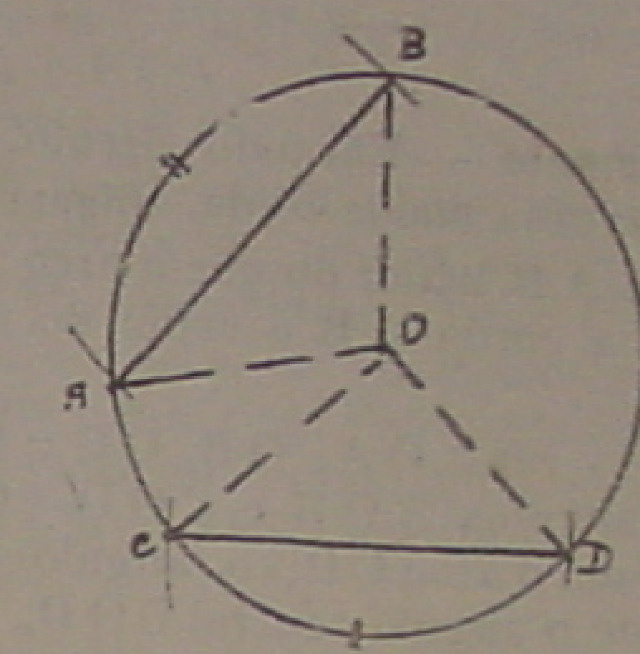

Sejam as cordas iguaes AB e CD: digo que os arcos AB e CD são iguaes. Traçando os raios OA, OB, OC, OD, formamos dois triangulos AOB, e COD, que têm os seus tres lados respectivamente iguaes; logo, são iguaes, seus elementos são respectivamente iguaes, os angulos em O são iguaes — Como a angulos centraes iguaes correspondem arcos iguaes, vemos que os arcos AB e CD são iguaes.

—

(*) São as mediatrizes, das quaes já fallamos, na pag. 19.



**Reciprocamente** — Em todo circulo, a arcos iguaes correspondem cordas iguaes.



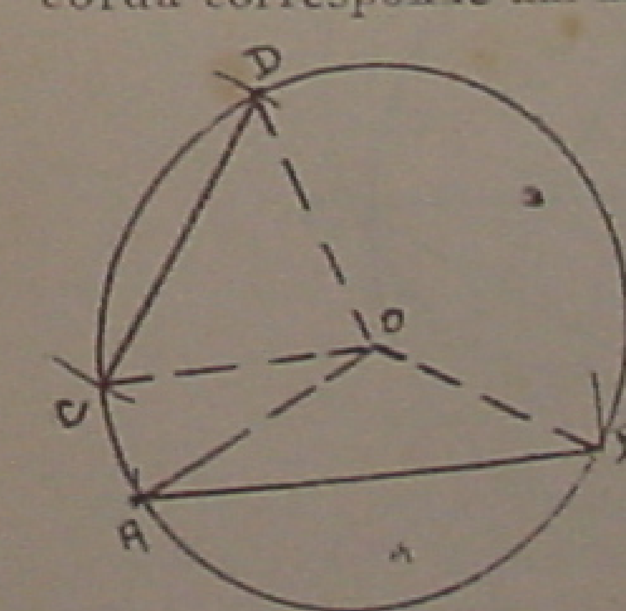

Sejam os arcos AB e CD iguaes. Digo que as cordas AB e CD são iguaes.

Traçando os raios OA, OB, OC e OD, formamos dois triangulos AOB e COD.

Os arcos AB e CD sendo iguaes, os angulos centraes em O, correspondentes a arcos iguaes, serão iguaes; e os triangulos AOB e COD terão um angulo igual comprehendido entre lados respectivamente iguaes; logo serão iguaes, e os lados AB e CD tambem o serão.

—

**Theorema 43** — Em todo circulo, a uma maior corda corresponde um maior arco.




Seja a corda AB maior do que a corda CD. Quero demonstrar que o arco AB é maior do que o arco CD.

Traço os raios OA, OB, OC e OD.

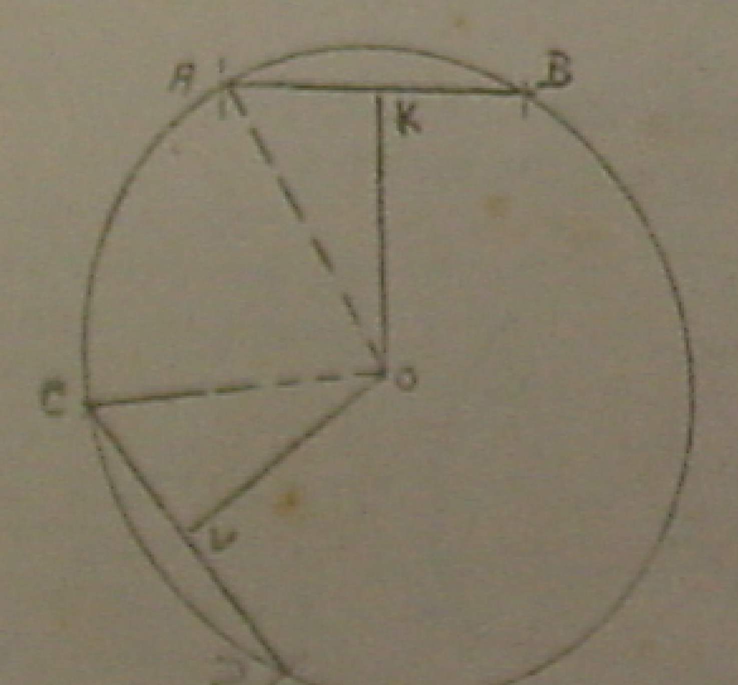
Os dois triangulos AOB e COD têm dois lados respectivamente iguaes, porém o lado AB do primeiro, maior do que o lado CD do segundo; logo, o angulo AOB é maior do que o angulo COD. Já sabemos que a um maior angulo central corresponde um maior arco ; logo, o arco A B será maior do que o arco C D.

**Reciprocamente** — Em todo circulo, a um maior arco corresponde uma maior corda. (figura precedente).

Seja o arco A B maior do que o arco C D. Quero demonstrar que a corda A B é maior do que a corda C D.

Traçando os raios O A, O B, O C e O D, formamos os dois triangulos A O B e C O D. O arco A B sendo maior do que o arco C D, o angulo central A O B será maior do que o angulo central C O D. Os dois triangulos A O B e C O D terão, pois, dois lados respectivamente iguaes, porém o angulo comprehendido entre os dois lados do primeiro maior do que o angulo comprehendido entre os dois lados do segundo ; logo, o lado A B será maior do que o lado C D.

**Theorema 44** — Em todo circulo, duas cordas iguaes afastam-se igualmente do centro.




Sejam as duas cordas iguaes, A B e C D; quero demonstrar que distam igualmente do centro. As per-



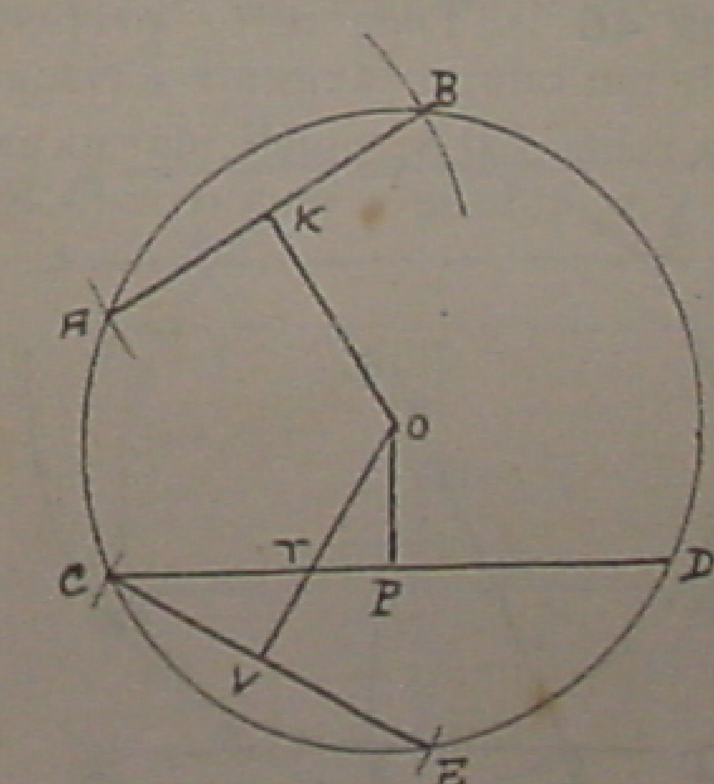
pendiculares O K e O V, traçadas do centro, respectivamente sobre as cordas A B e C D, representam as distancias d'essas cordas ao centro. Precisamos, pois, demonstrar que $OK = OV$.

Traçando os raios O A e O C, formamos dois triangulos A O K e C O V.

Já sabemos que $OA = OC$, como raios do mesmo circulo; tambem já sabemos que as perpendiculares O K e O V dividiram ao meio as cordas A B e C D, e como $AB = CD$, as metades A K e C V tambem serão iguaes; além disto, os triangulos A O K e C O V são rectangulos em K e em V respectivamente; tendo a hypotenusa igual e um angulo igual, são iguaes; logo, seus elementos são respectivamente iguaes. $OK = OV$.

**Theorema 45** — Em todo circulo, duas cordas desiguaes afastam-se desigualmente do centro: a maior afasta se menos e a menor afasta-se mais.

Seja $AB < CD$. Traço $CE = AB$. Traço tambem as perpendiculares O K, O V e O P. As cordas A B e C E, sendo iguaes, as suas distancias ao centro serão iguaes, e $OK = OV$.




Notamos que a perpendicular O P é menor do que a obliqua O T, e por sua vez O T é menor do que O V; logo, O P é menor do que O V, e tambem menor do que O K.

# Tangentes (*)

Podemos tambem definir a tangente como sendo uma recta illimitada que tem um só ponto commum com a circumferencia. Este ponto commum chama-se PONTO DE CONTACTO.

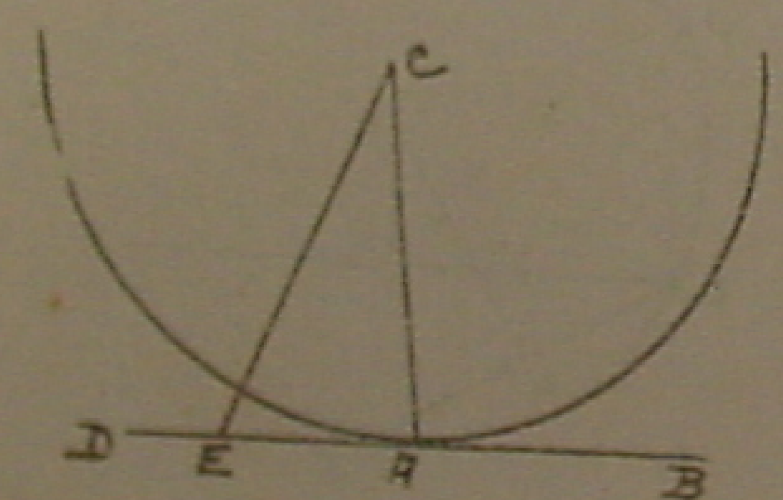
A recta perpendicular á tangente no ponto de contacto é uma NORMAL.

Duas circumferencias são tangentes quando se tocam n'um só ponto, (é o ponto de contacto das duas circumferencias).

Duas circumferencias secantes são duas circumferencias que se cortam.

**Theorema 46** — Toda recta perpendicular na extremidade de um raio, é tangente á circumferencia.

Seja uma recta BD perpendicular na extremidade A de um raio CA: tracemos uma recta CE, ligando o




(*) Foi procurando a tangente a uma curva que *Leibnitz* (em 1684) e *Newton* (em 1711) foram levados á descoberta do calculo differencial (Kiepert)



centro C a um ponto qualquer E da tangente BD. Esta recta é obliqua, é maior do que a perpendicular CA, é, pois, maior do que o raio, e o ponto E é exterior á circumferencia.

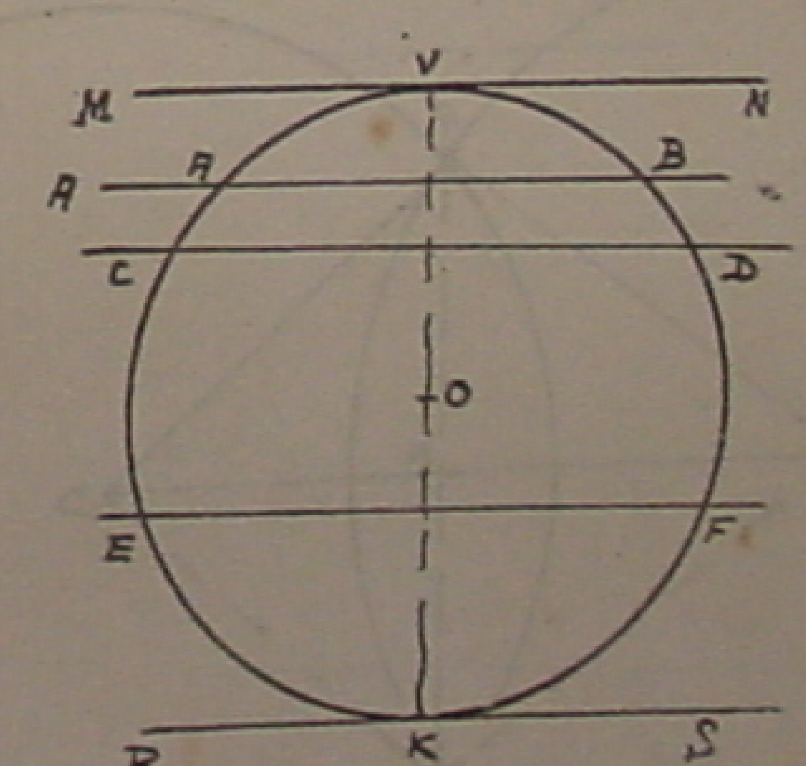
A recta BD tem um unico ponto commum com a circumferencir, o ponto A: logo, é tangente.

**Reciprocamente** — Toda tangente á circumferencia é perpendicular á extremidade do raio que passa pelo ponto de contacto.

O ponto E, sendo exterior á circumferencia, a recta CE será maior do que a recta CA. CA é a mais curta distancia do centro á tangente, logo é perpendicular á BD.

**Corollario** — Por um ponto d'uma circumferencia póde-se traçar só uma tangente.

**Theorema 47** — Duas rectas parallelas determinam sobre uma circumferencia arcos iguaes.




Seja o circulo O e as parallelas AB e CD. Quero demonstrar que os arcos AC e BD, determinados sobre a circumferencia pelas parallelas AB a CD, são iguaes.

Com effeito, traçando o diametro KV, perpendicular sobre AB e CD, este diametro divide o arco CVD ao meio, e tambem o arco AVB.

Logo arco CV = arco VD
arco AV = arco VB

Subtrahindo membro a membro, vem :

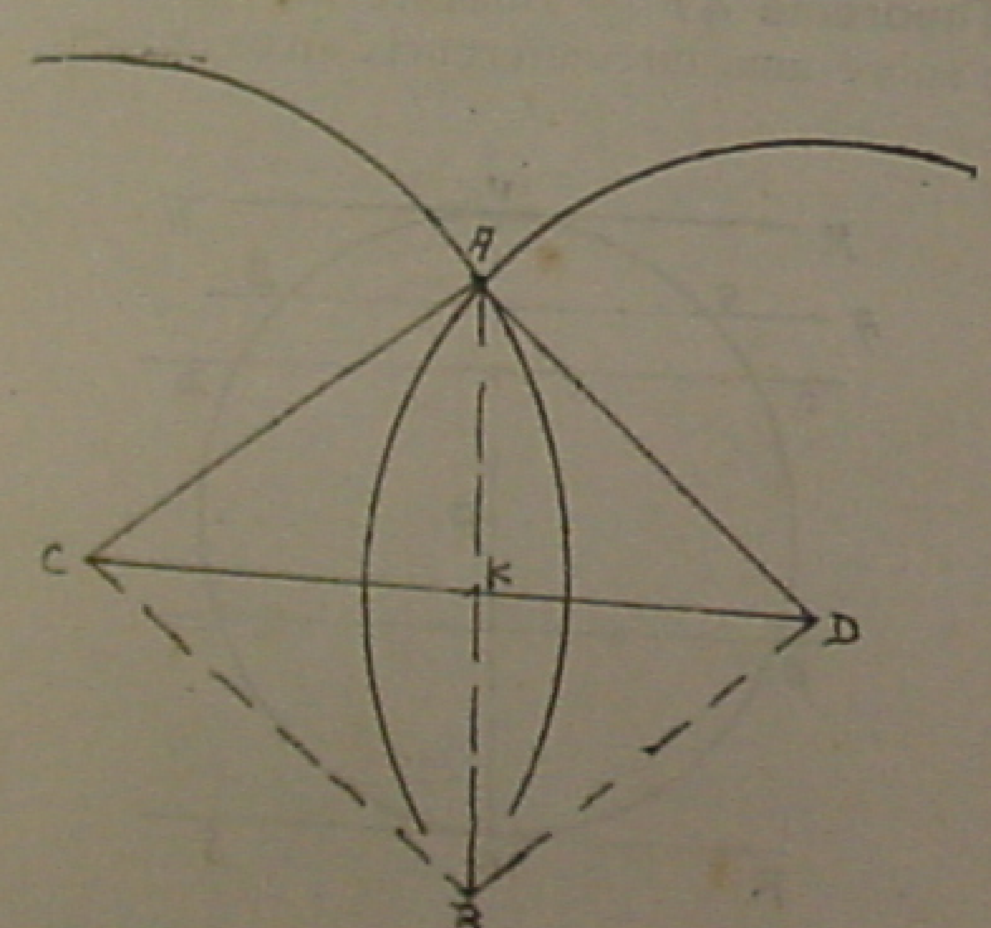
arco CV — arco AV = arco VD — arco VB
ou arco AC = arco BD.

Si tivessemos considerado as parallelas EF e AB, teriamos achado, n'um modo analogo, que os arcos AE e BF são iguaes.

Tambem teriamos podido considerar as parallelas MN e RS, tangentes nas extremidades do diametro KV, e ainda n'este caso os arcos VCK e VDK seriam iguaes.

---

**Theorema 48** —Si duas circumferencias têm um ponto commum fóra da linha dos centros (a recta que une os centros das duas circumferencias), tambem terão




um outro ponto commum, symetrico do primeiro, em relação á linha dos centros.

Sejam os dois circulos C e D, que se cortam em A.



Tracemos AK, perpendicular sobre CD, e prolonguemos até B, de modo que AK = KB. Unamos CA, CB, DA e DB.

As rectas CA e CB são obliquas, em relação á perpendicular CK, afastam-se igualmente do pé K da perpendicular ; logo, são iguaes, e o ponto B pertence á circumferencia C.

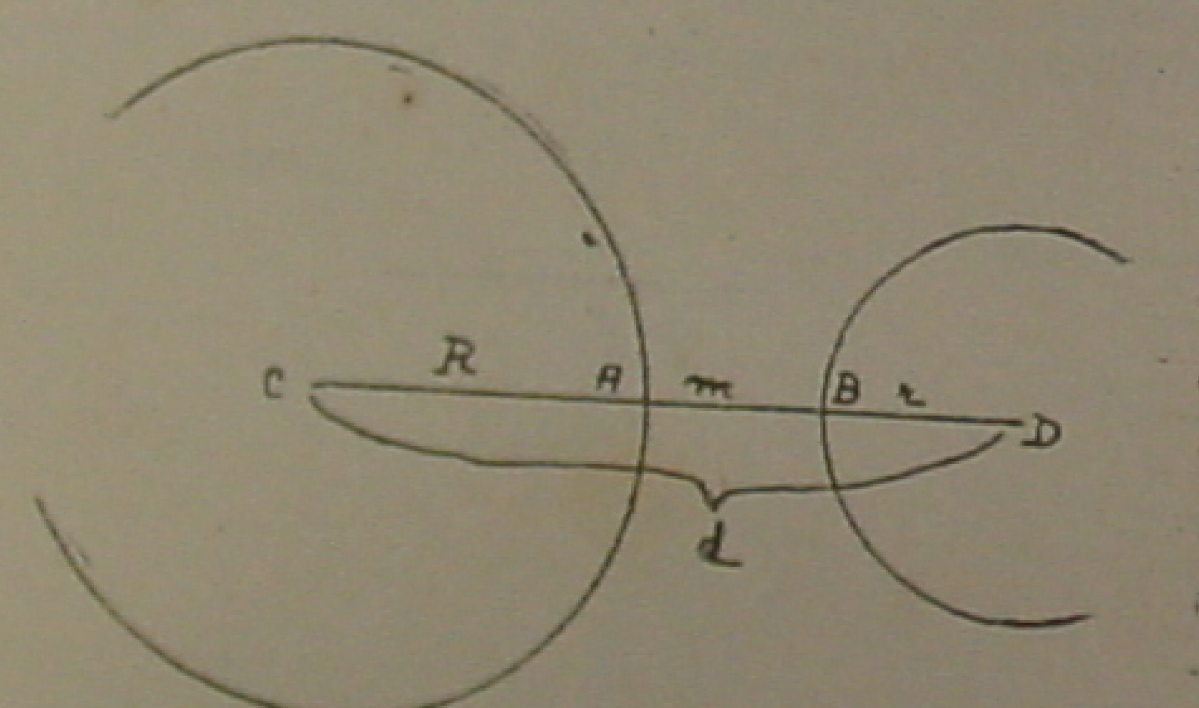
Porém, AD tambem é igual a DB, por motivo analogo, e o ponto B tambem pertence á circumferencia D.

Logo, B pertence a uma e a outra circumferencia ; é, pois, um ponto commum ás duas circumferencias : as circumferencias que se cortam em A, tambem cortar-se-hão em B.

# Posições relativas de duas circumferencias

Uma circumferencia póde occupar cinco posições em relação a uma outra circumferencia. Vamos estabelecer a distancia de seus centros, relativamente a seus raios, em cada uma das cinco posições.

1º

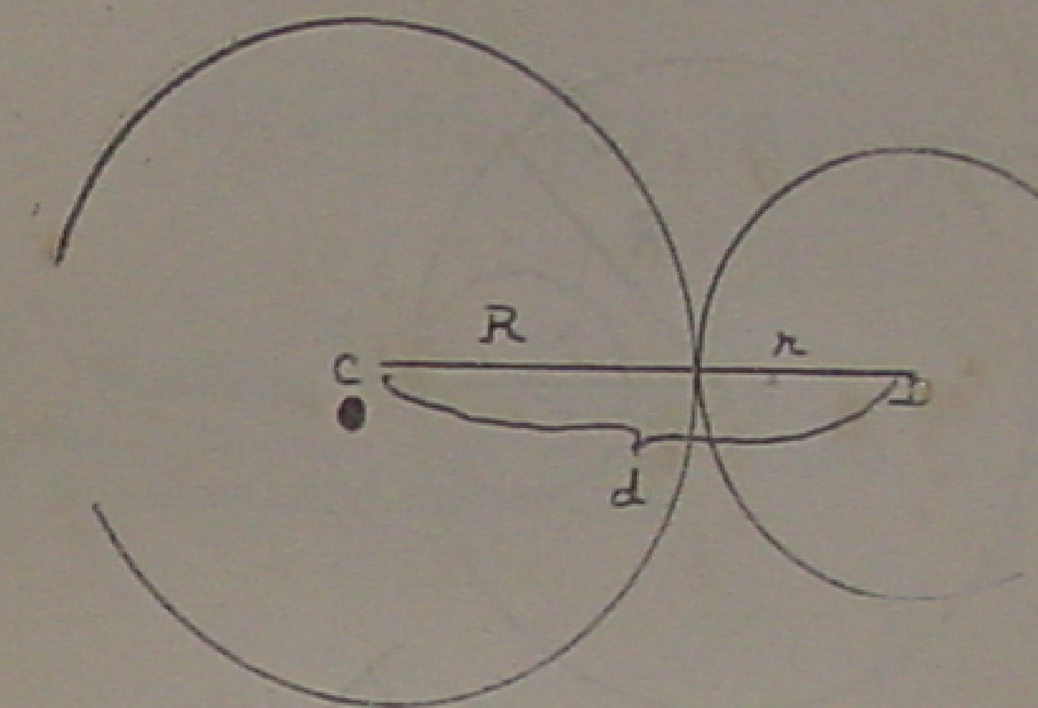



$d = R + r + m$

$d > R + r$

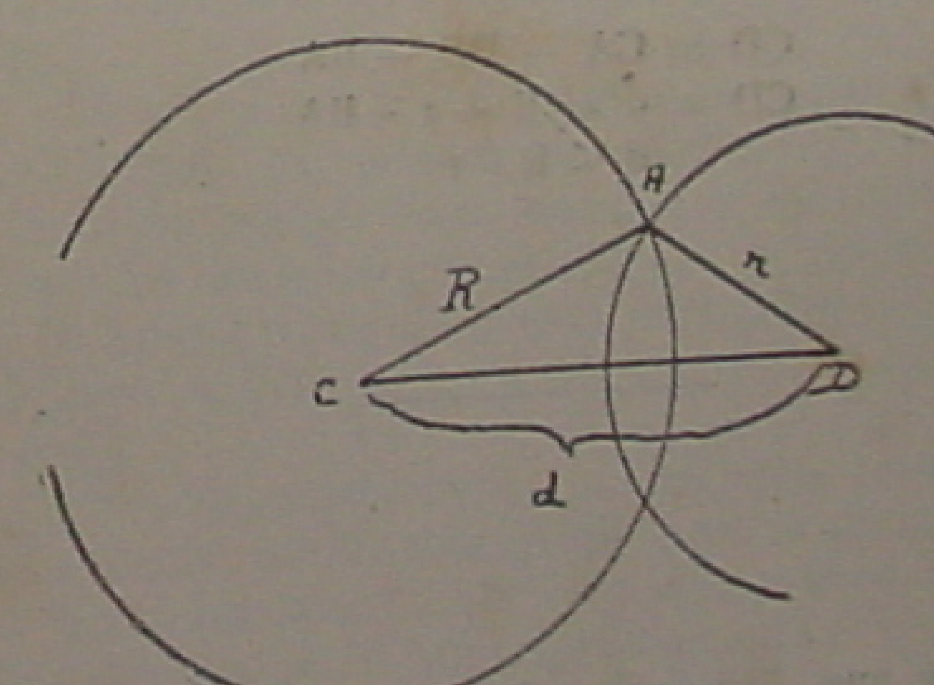


2º



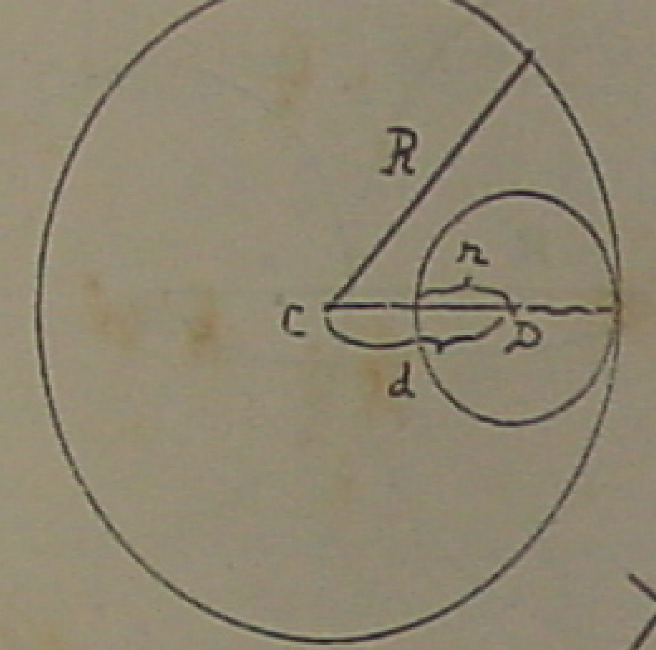

$d = R + r$

3º



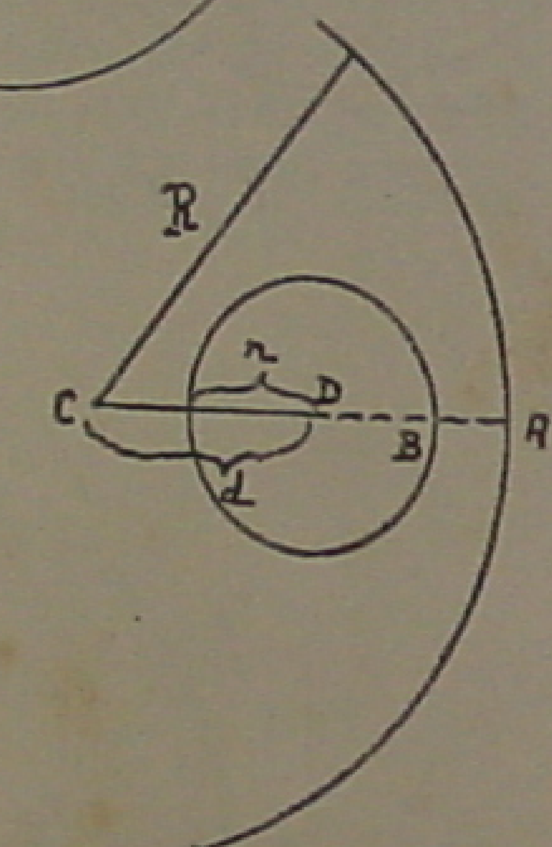

$d < R + r$

4°




$d = R - r$

5°



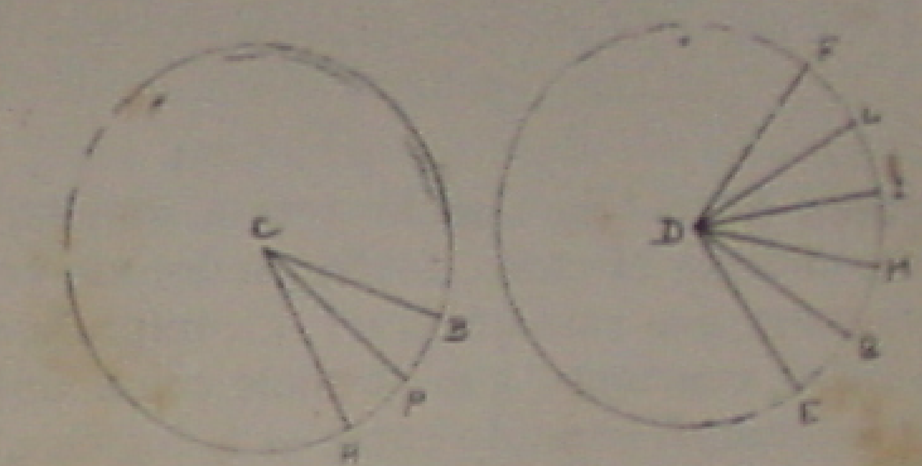

$$CD = CA - DB - BA$$
$$CD = d = R - r - BA$$
$$d < R - r$$

---

**Diz-se que duas circumferencias se cortam orthogonalmente, quando as respectivas tangentes no ponto de intersecção são perpendiculares uma á outra.**

# Medidas dos angulos

**Theorema 49** — No mesmo circulo ou em circulos iguaes, a razão de dois angulos centraes é igual á razão dos arcos que interceptam.




Sejam C e D dois angulos centraes em circulos iguaes: a razão dos angulos é igual á razão dos arcos comprehendidos entre seus lados.

1°. — Supponho que os arcos AB e EF tenham uma medida commum contida um numero exacto de vezes em cada um. Supponho que AB contenha essa medida commum duas vezes, e que EF a contenha 5 vezes.

Os arcos AB e EF estarão na razão de 2 para 5.

Unindo os pontos de divisão P, G, H, I, L, aos centros respectivos, formamos um certo numero de angulos centraes iguaes: 2 no circulo C e 5 no circulo D. Logo, o angulo C está para o angulo D na razão de 2 para 5, isto é, na mesma razão de que os arcos AB e EF.

2°. — Supponho agora que os arcos fossem incommensuraveis, isto é, não admitissem medida commum.

Si dividissemos, por exemplo, o arco EF em dez partes iguaes, e se suppuzessemos que uma d'estas partes fosse contida 7 vezes em AB, sobrando um resto menor do que uma d'essas partes, a razão entre os arcos EF e AB estaria comprehendida entre 7 decimos e 8 decimos. Ora, si traçassemos raios pelos pontos de divisão, formariamos em EF dez angulos centraes iguaes e em AB, sete, sobrando um angulo menor do que um d'esses sete. Logo, a razão entre os angulos centraes em D e em C estaria comprehendida entre 7 decimos e 8 decimos.

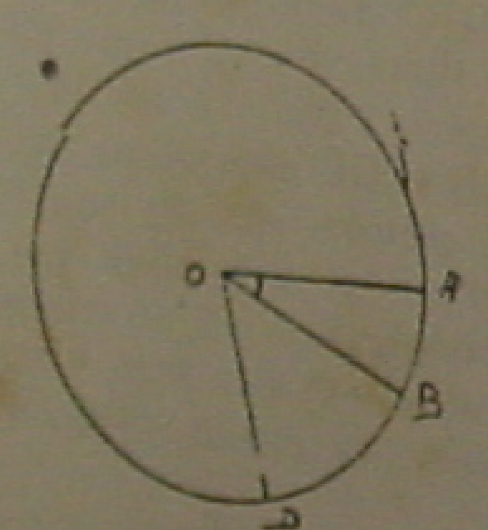
Dividindo o arco EF em 100, 1000, 10000. . . . partes iguaes, e operando como acabamos de fazer, notariamos que a razão dos arcos e a dos angulos está sempre comprehendida entre os mesmos numeros de centesimos, de millesimo. . . . . Logo, essas razões são iguaes.

---

**Theorema 50** — Um angulo tem a mesma medida do que o arco de circulo, descripto do seu vertice como centro, com um raio qualquer, e comprehendido entre seus lados, comtanto que se tome como unidade de arco o arco comprehendido entre os lados da unidade de angulo.

Medir um angulo é procurar sua razão com um angulo tomado por unidade.

Tendo descripto uma circumferencia do vertice de um angulo, como centro, e com um raio qualquer, se



tomassemos por unidade de angulo o angulo central BOD, que corresponde ao arco DB (tomado como unidade de arco), o angulo AOB teria a mesma medida do arco AB.

Em resumo, um angulo tem por medida o arco,



do circulo descripto do seu vertice como centro com um raio qualquer, comprehendido entre seus lados.

Toma-se habitualmente como unidade de arco o QUADRANTE ou quarta parte da circumferencia ; a unidade do angulo é então um angulo recto.

Si, o angulo AOD fosse recto e o arco AB igual a 3/5 do quadrante AD, o angulo AOB seria igual a 3/5 de um angulo recto.

NOTA — Convenciona-se dividir a circumferencia em 360 gráus, o gráo em 60 minutos e o minuto em 60 segundos.

Um angulo de 23° 15' 14'' é um angulo que comprehende entre seus lados um arco de 23° 15' 14'' descripto de seu vertice como centro.

Para avaliar a sua razão ao angulo recto, reduz-se esses 23° 15' 14'' em segundos e divide-se por 90° reduzidos em segundos ; tem-se então :

$$\frac{83714}{324000}$$

de um angulo recto.

E' natural que, si o angulo fosse dado em minutos, seria sufficiente reduzil-o a minutos e dividir por 90° reduzidos tambem a minutos.

---

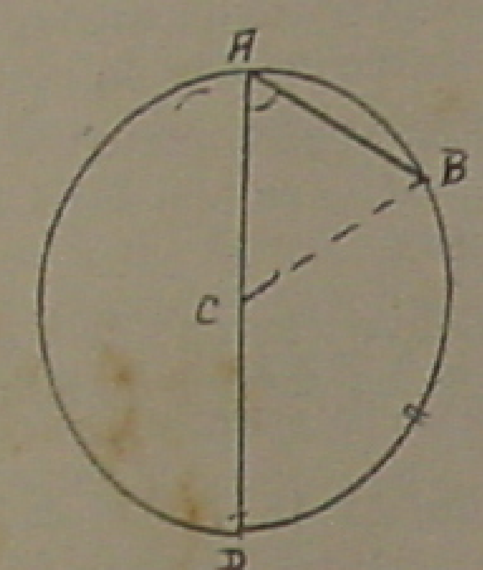
**Definições**. Chamamos ANGULO INSCRIPTO, todo angulo que tem seu vertice sobre uma circumferencia, e cujos lados são cordas.

O angulo formado por uma tangente a uma circumferencia e uma corda passando pelo ponto de contacto da tangente, é um ANGULO DE SEGMENTO.

---

**Theorema 51**. — Um angulo inscripto tem por medida a metade do arco comprehendido entre seus lados.

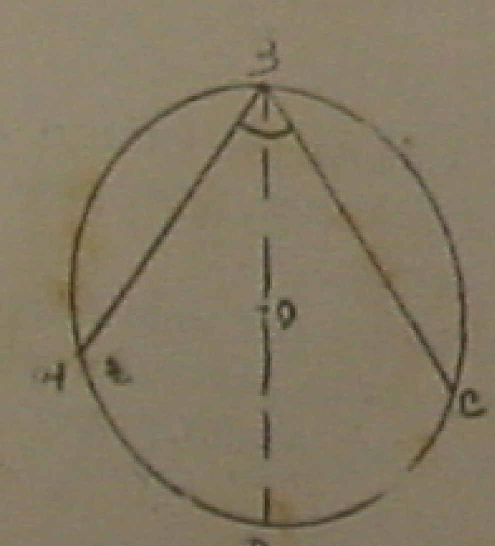
1º um dos lados do angulo passa pelo centro da circumferencia.




Seja o angulo BAD; unindo CB formamos um triangulo isoceles, pois, CA = CB como raios da mesma circumferencia. Logo, os angulos em A e em B são iguaes.

Notamos que o angulo central DCB é exterior ao triangulo CBA, e por conseguinte igual á somma dos interiores não adjacentes, isto é, CAB + ABC ou 2 vezes CAB. Ora, o angulo central DCB tem por medida o arco DB comprehendido entre seus lados, logo, o angulo CAB, que é a metade do angulo DCB, terá por medida a metade do arco DB.

2º O centro da circumferencia se acha entre os lados do angulo.




Seja o angulo ABC. Este angulo é igual á somma dos angulos ABD e DBC; cada um d'estes angulos é

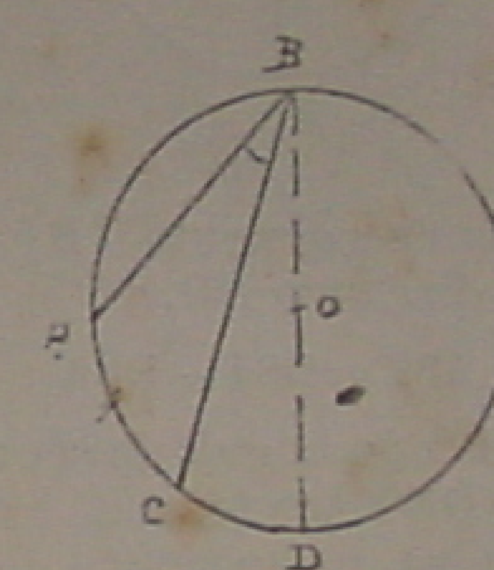


inscripto e tem um lado passando pelo centro: já sabemos que tem por medida a metade dos arcos comprehendidos entre seus respectivos lados.

Logo a medida do angulo ABC, é igual á somma das medidas dos angulos ABD e DBC, isto é, a metade do arco AD mais a metade do arco DC, ou a metade do arco AC.

3º O centro é exterior ao angulo.

O angulo ABC é igual á differença dos angulos ABD e CBD, logo terá por medida a differença das




medidas desses angulos, isso é, a metade de AD menos a metade de CD, ou a metade de AC.

—

**Corollario** — Todos os angulos inscriptos no mesmo segmento são iguaes, pois, todos elles têm a mesma medida, a metade do arco comprehendido entre seus lados.

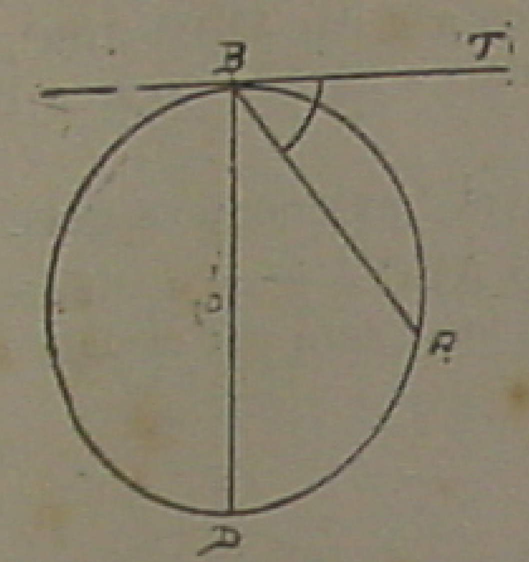
Os angulos inscriptos n'um segmento maior do que um semi-circulo são agudos.

Os inscriptos n'um segmento menor do que um semi-circulo são obtusos.

Os inscriptos n'um semi-circulo são rectos.

—

**Theorema 52.** — Todo angulo de segmento tem por medida a metade do arco comprehendido entre seus lados.

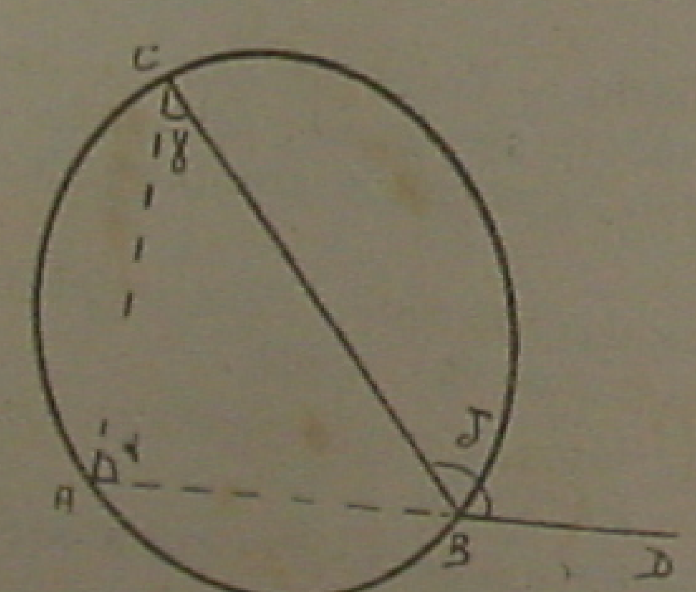



Seja o angulo de segmento TBA.
Tracemos o diametro BD.

$$ABT = DBT - DBA$$

Logo, a medida do angulo de segmento ABT será igual a medida de DBT (recto, pois, a tangente é sempre perpendicular na extremidade do raio que passa pelo ponto de contacto) menos a medida do angulo inscripto DBA: será, pois, a metade do arco BAD menos a metade do arco AD, isso é, a metade do arco BA.

NOTA — O angulo CBD formado por uma corda CB e o prolongamento de uma outra corda AB, tem




por medida a metade do arco BC comprehendido entre seus lados mais a metade do arco AB.



Unamos CA. Temos:

$$\delta = \gamma + \alpha$$

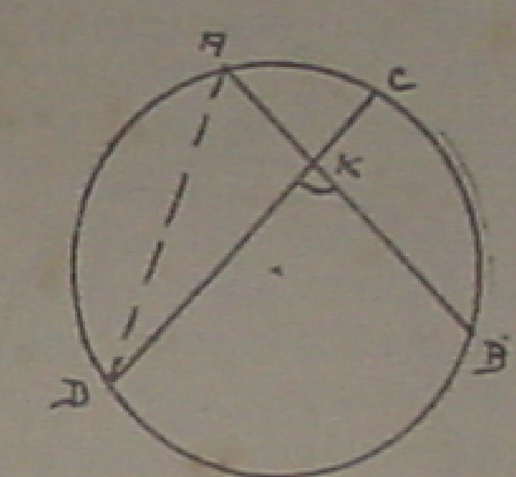
$$\text{medida } \delta = \text{medida } \gamma + \text{medida } \alpha$$

$$\text{medida } \delta = \frac{\text{arco AB}}{2} + \frac{\text{arco BC}}{2}$$

—

**Theorema 53.** — O angulo formado por duas cordas que se cortam, no circulo, tem por medida a semi-somma dos arcos comprehendidos entre seus lados e seus lados prolongados.

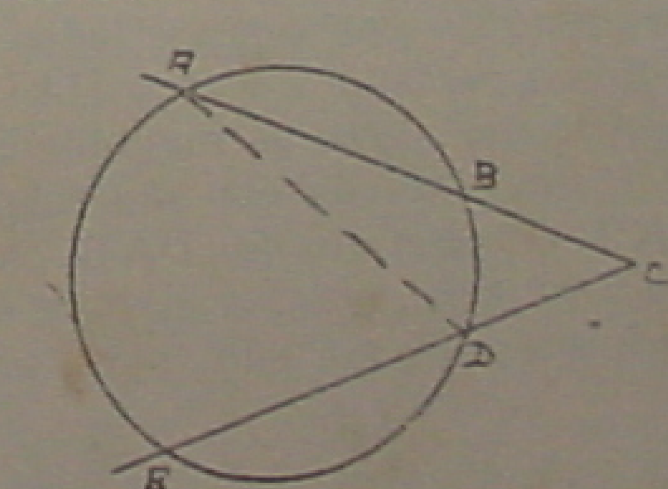
Seja o angulo K formado pelas cordas AB e CD.




Unindo AD, notamos que o angulo K é exterior ao triangulo AKD, logo igual á somma dos angulos interiores não adjacentes A e D. Logo, a medida de K, é igual á medida de A mais a medida de D, isso é, a metade do arco DB mais a metade do arco AC.

—

**Theorema 54.**— O angulo formado por duas secantes que se cortam fóra da circumferencia, tem por




medida a semi-differença dos arcos comprehendidos entre seus lados.

Seja o angulo C.

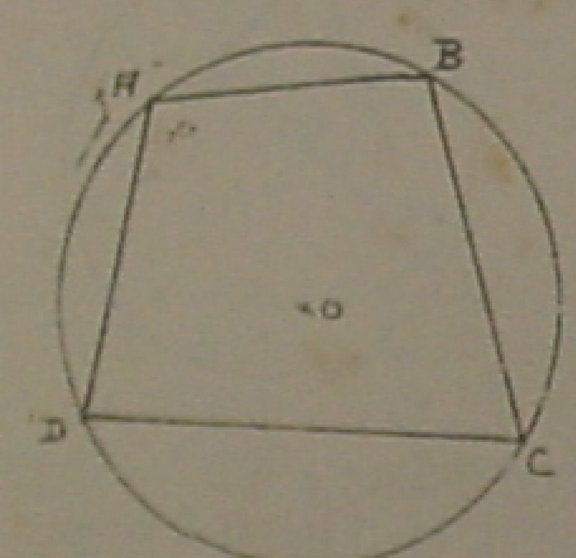
O angulo ADE é exterior ao triangulo ADC; logo o angulo ADE é igual á somma dos angulos C e A; donde deduz-se que o angulo C é a differença entre ADE e A.

Logo a medida de C será igual á medida do angulo ADE menos a medida do angulo A: isso é, a metade do arco AE menos a metade do arco BD.

—

**Theorema 55.**— Em todo quadrilatero inscripto os angulos oppostos são supplementares.

Seja o quadrilatero inscripto ABCD.




(Diz-se que um quadrilatero é inscripto n'uma circumferencia quando seus vertices estão sobre a circumferencia e seus lados são cordas).

O angulo A tem por medida a metade do arco BCD comprehendido entre seus lados, e o angulo C tem por medida a metade do arco DAB comprehendido entre seus lados, logo as medidas dos angulos oppostos A e C do quadrilatero são respectivamente a metade de BCD e a metade de DAB. As medidas dos dois angulos perfazem, pois, a metade de toda circumferencia: os angulos A e C são, pois, supplementares.

---

# Polygonos regulares

---

Um POLYGONO REGULAR tem todos os seus lados iguaes e todos os seus angulos iguaes.

O triangulo equilatero, o quadrado,... são polygonos regulares.

Diz-se que um polygono é INSCRIPTO n'uma circumferencia quando todos os seus vertices estão situados sobre a circumferencia; então todos os seus lados são cordas.

Um polygono é CIRCUMSCRIPTO á uma circumferencia quando todos os seus lados são tangentes á circumferencia.

Uma LINHA POLYGONAL REGULAR tem todos os seus lados iguaes, assim como todos os angulos.

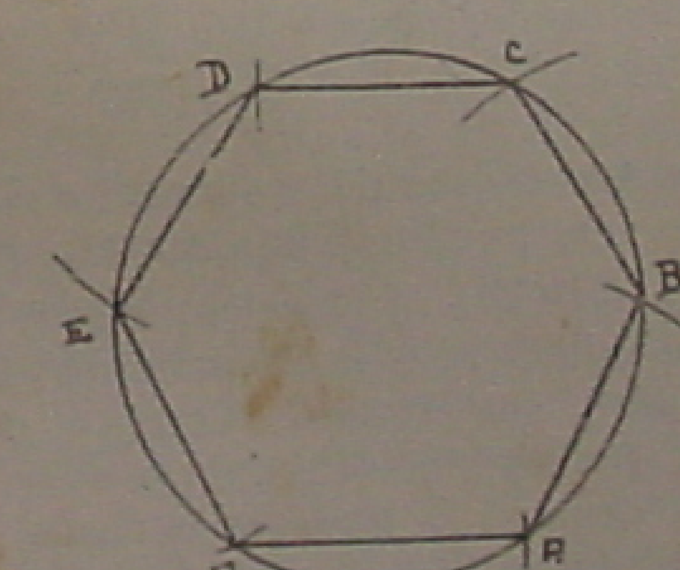
Um SECTOR POLYGONAL REGULAR é a figura limitada por uma linha polygonal regular e os raios traçados de suas extremidades ao centro do circulo circumscripto.

O centro de um polygono regular inscripto é o centro do circulo circumscripto ao polygono.

RAIO DE UM POLYGONO REGULAR INSCRIPTO é o raio do circulo circumscripto a esse polygono. O seu APOTHEMA é a distancia do centro a cada um dos lados.

—

**Theorema 56.**— A toda circumferencia, póde-se inscrever e circumscrever um polygono regular.

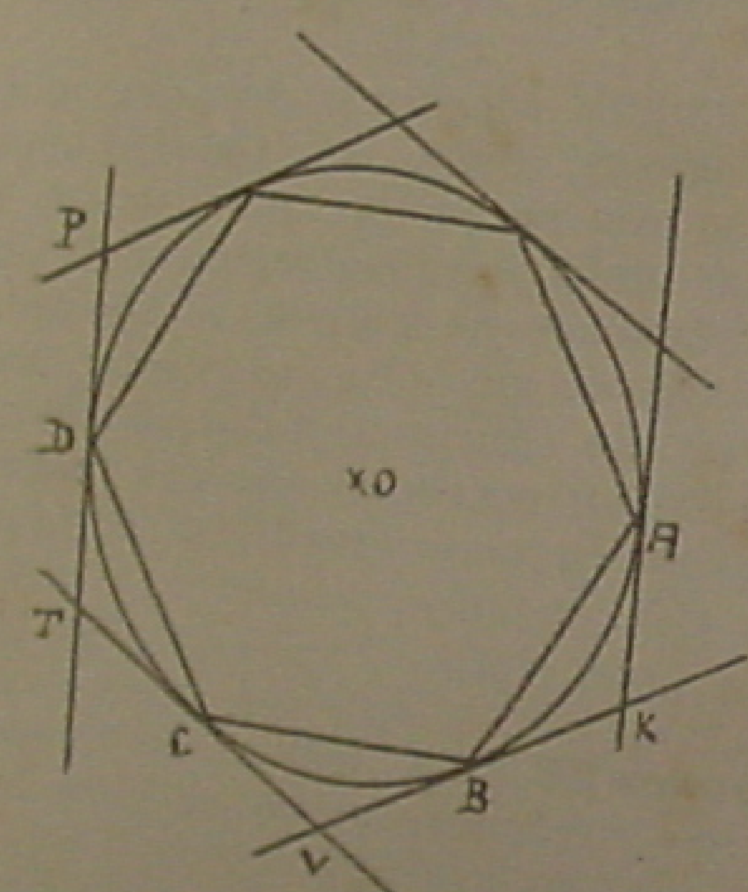



1° — Seja uma circumferencia O: dividamol-a em um certo numero de arcos iguaes, em 6, por exemplo. Unindo as extremidades dos arcos por cordas, já sabemos que estas cordas são iguaes, pois, correspondem a arcos iguaes. Logo, o polygono ABCD... é inscripto, porque tem os seus vertices sobre a circumferencia, e é regular, porque seus lados são todos iguaes e todos seus angulos têm a mesma medida.

2° — Sempre podemos circumscrever um polygono regular a uma circumferencia.

Pelos pontos A, B, C,... tracemos tangentes: formaremos triangulos.

Ora, o angulo A é igual ao angulo B do mesmo triangulo; pois, todos os dois têm a mesma medida, a metade do arco AB.




Mas, no outro triangulo, os angulos B e C também são iguaes e tem por medida a metade do arco BC.

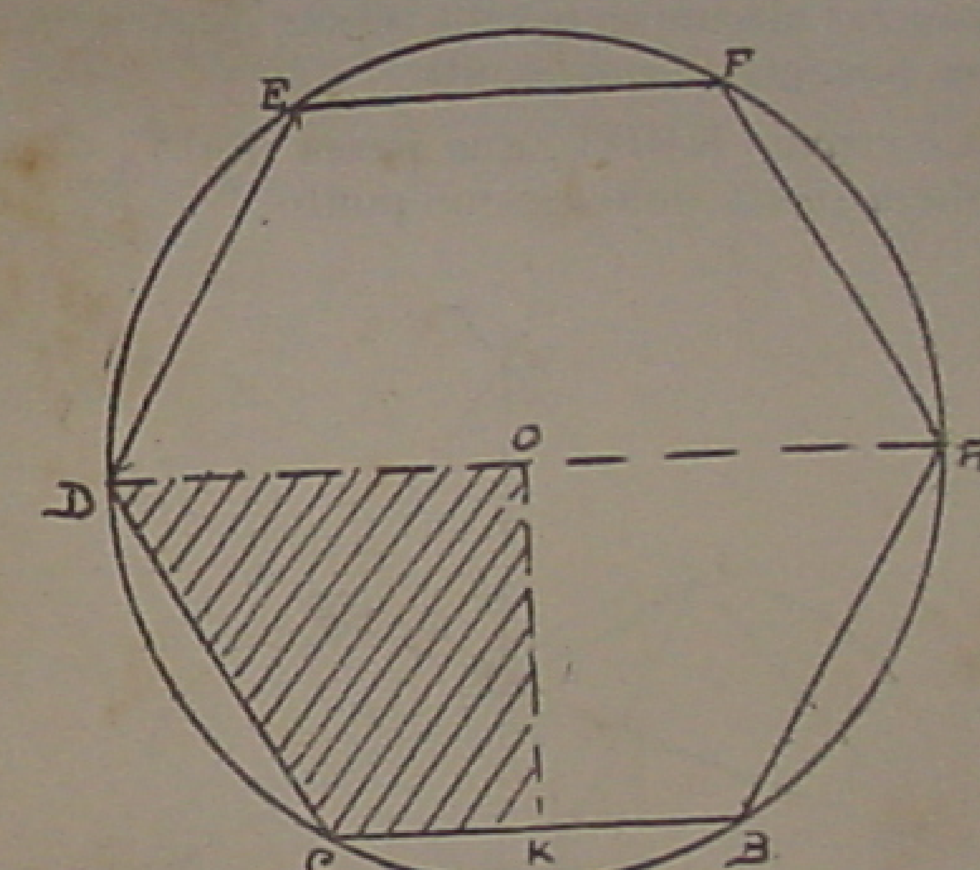
O polygono ABCD... é regular, logo o arco AB= ao arco BC, os angulos A e B do primeiro triangulo,e B e C do segundo, são iguaes. Como a corda AB é igual á corda BC (como lados de polygono regular), os triangulos serão iguaes, pois, têm um lado igual comprehendido entre angulos respectivamente iguaes. Além disso, esses triangulos são isoceles.



Os lados deste novo polygono KVTP... são, pois, iguaes entre si e são todos tangentes ao circulo O.

Os angulos em K, em V, em ... tambem são iguaes. Logo, o polygono é regular e é circumscripto á circumferencia O.

**Reciprocamente** — A todo polygono regular podemos circumscrever e inscrever uma circumferencia.




1° Seja o polygono regular ABCD...

Traço OA, OD e a perpendicular OK sobre CB. Considero a parte ODCK da figura, faço-a girar em torno de OK. Os angulos em K são rectos, logo KC tomará a direcção de KB; mas já sabemos que KC=KB, logo o ponto C cahirá em B.

Os angulos C e B são iguaes, como angulos de polygono regular, logo CD tomará a direcção de BA e como CD = BA, o ponto D cahirá em A.

De modo que a circumferencia que passa por D, C e B tambem passa por A. Demonstrariamos de um modo analogo que ella passa tambem por F, e por E; logo, ella é circumscripta ao polygono dado.

2° O polygono ABCD,... sendo regular, os lados

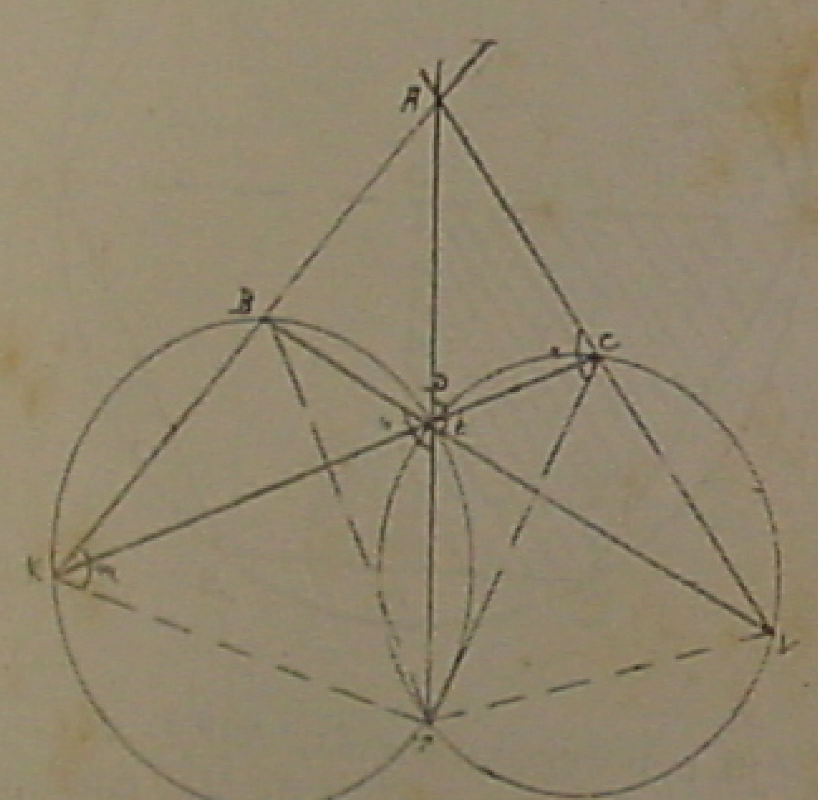
AB, BC, CD.... são iguaes, são cordas iguaes : logo, afastam-se igualmente do centro.

Todos os apothemas dos lados AB, BC, CD.... são iguaes. Logo, si tomassemos O como centro e OK como raio, teriamos uma circumferencia inscripta ao polygono regular ABCD...

—

**Theorema 57**. (DE STEINER) — Quatro rectas cortando-se duas a duas formam quatro triangulos ; as circumferencias circumscriptas a esses quatro triangulos passam por um mesmo ponto.

Seja o circulo KBDT, que passa por T, o circulo DCV tambem passa pelo mesmo ponto T.



O circulo ACK passará por T, si o quadrilatero AKTC fôr inscriptivel. Será inscriptivel, si os seus angulos oppostos forem supplementares.

Trata-se, pois, de demonstrar que o angulo BKT é o supplemento do angulo ACT.

$$K + n = 2 \text{ rectos} \quad 1)$$

mas

$n = t$ como oppostos pelo vertice.

$t = r$, pois, têm por medida uma meia circumferencia menos a metade do arco TV.



Logo,

$$n = r$$

Na igualdade 1) substituindo n por r, temos

$$K + r = 2 \text{ rectos.}$$

Logo, o quadrilatero ACTK é inscriptivel. A circumferencia que passa por A, C e K tambem passará por T.

D'um modo analogo, demonstrariamos que a circumferencia que passa por A, B e V, tambem passa pelo ponto T.

Logo, as quatro circumferencias circumscriptas aos quatro triangulos passam pelo ponto commum T.

---

# Movimento de rotação em torno de um ponto

Diz-se que uma figura plana está animada de um movimento de rotação em torno de um ponto O de seu plano, quando todos os seus pontos se deslocam descrevendo n'esse plano e no mesmo sentido, em torno do ponto O como centro, arcos de circulo tendo como raios as distancias respectivas d'esse ponto ao ponto O.

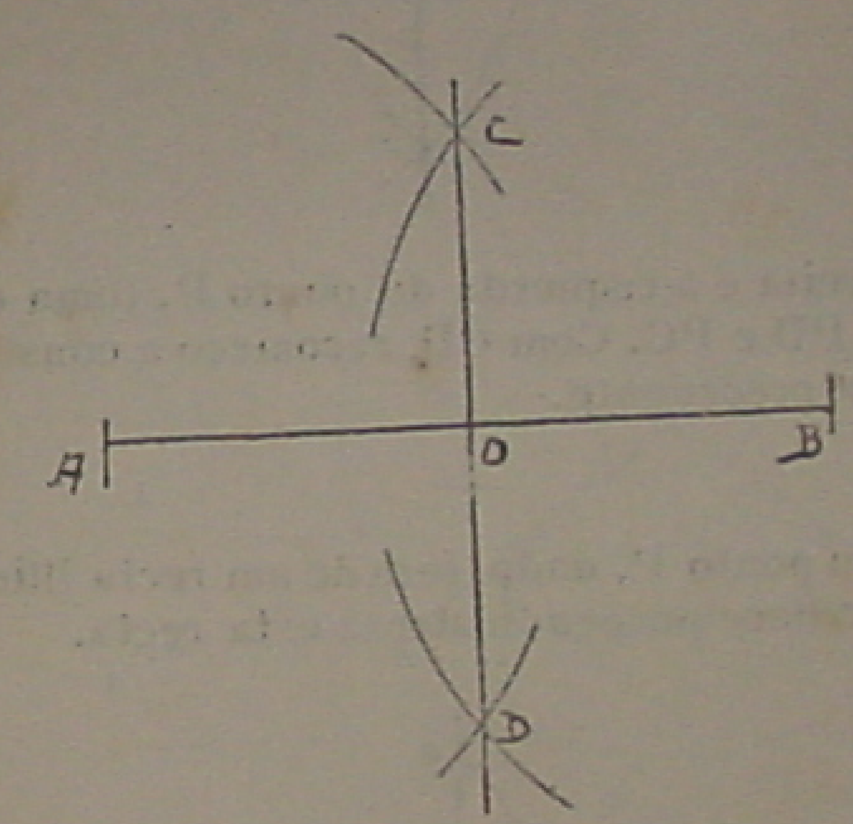
N'esse movimento, os arcos descriptos pelos varios pontos da figura são semelhantes, isso é, medem angulos iguaes.

Todo deslocamento d'uma figura plana de forma invariavel, no seu plano, reduz-se a uma rotação ou a uma translação.

No deslocamento de uma figura no seu plano, os pontos da figura descrevem, ora linhas rectas (translação), ora arcos de circulo (rotação), SEMPRE NO MESMO SENTIDO.

# Alguns problemas

Traçar uma perpendicular pelo meio de uma recta limitada.

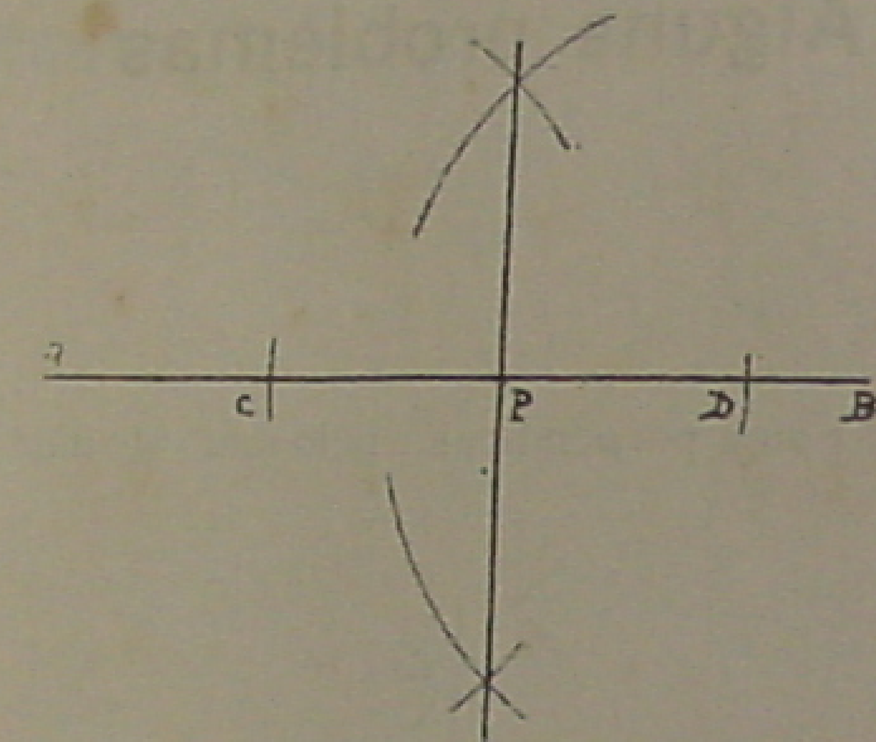



Dos pontos extremos A e B como centros, traço arcos com um mesmo raio, maior do que a metade de AB. Unindo os pontos communs C e D, temos a perpendicular desejada.

Com effeito, os pontos C e D distam igualmente de A e de B, logo CD é o logar geometrico dos pontos do plano que distam igualmente das extremidades de uma recta limitada; é a perpendicular pelo meio d'essa recta.

E' indispensavel tomar-se um raio maior do que a metade de AB, para que os arcos se cortem em dois pontos.

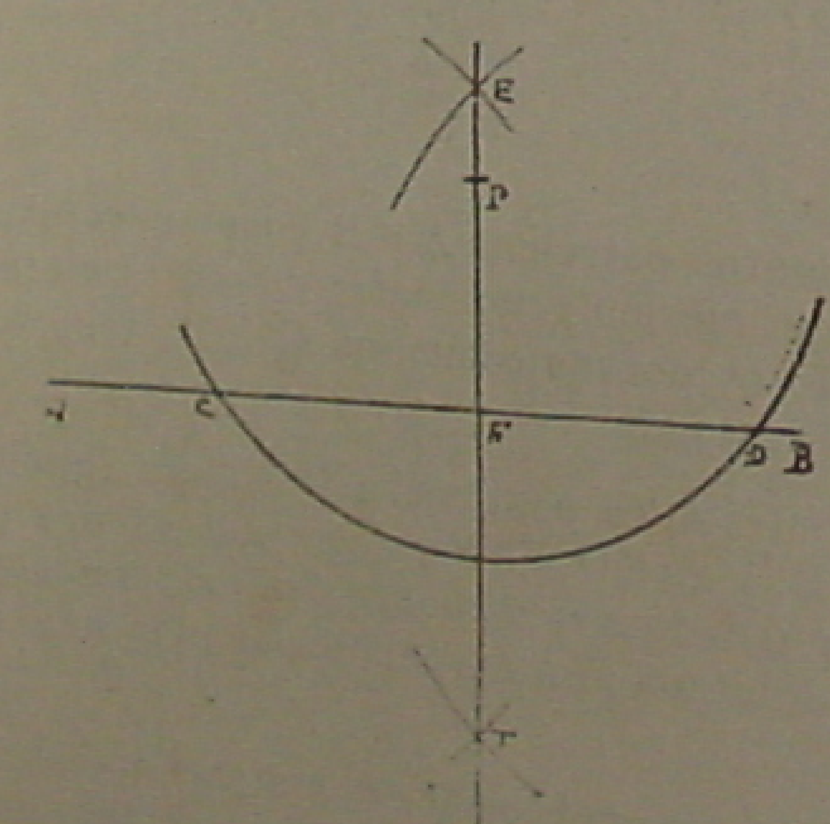
Por um ponto P, dado, sobre uma recta dada illimitada, traçar uma perpendicular a essa recta.




A' direita e á esquerda do ponto P, tomo distancias iguaes PD e PC. Com CD, recomeço a construcção do problema precedente.

---

Por um ponto P, dado, fora de um recta illimitada dada, traçar uma perpendicular a esta recta.




Do ponto P como centro, e com um raio maior do que a sua distancia á recta dada, traço um arco de circulo. Determino assim os pontos C e D.



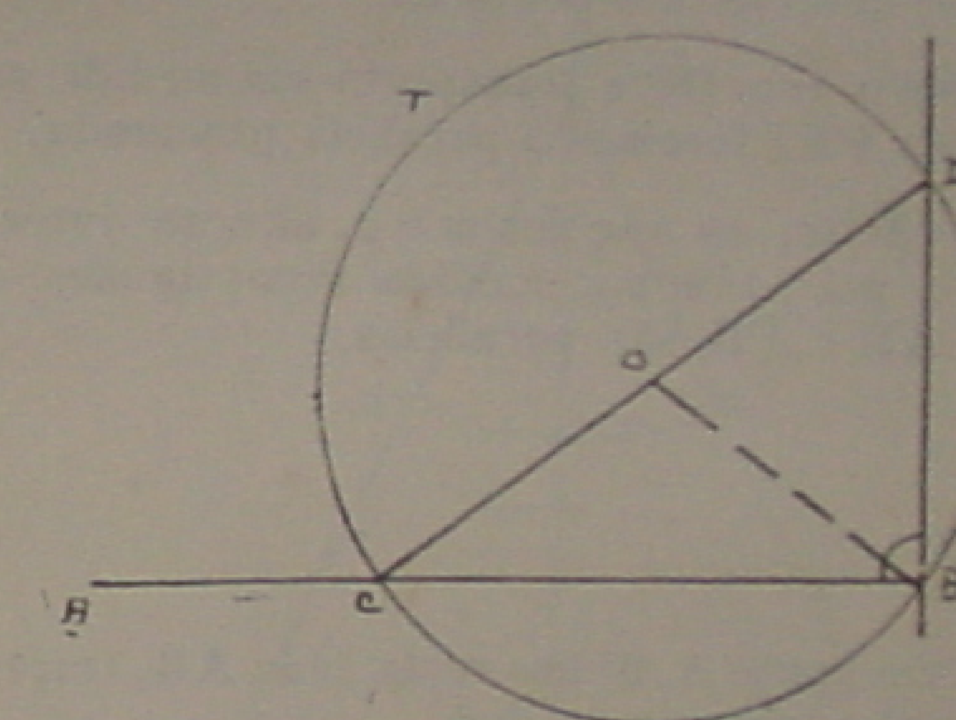
Com CD, procedo como no primeiro problema.

Os tres pontos E, P e T devem estar na mesma direcção.

---

Traçar uma perpendicular na extremidade de uma recta improlongavel.

Seje uma recta AB, improlongavel além de B.




Tomo um ponto qualquer O como centro, e a distancia OB como raio ; traço um circulo que corte AB em C. Uno CO e prolongo até D.

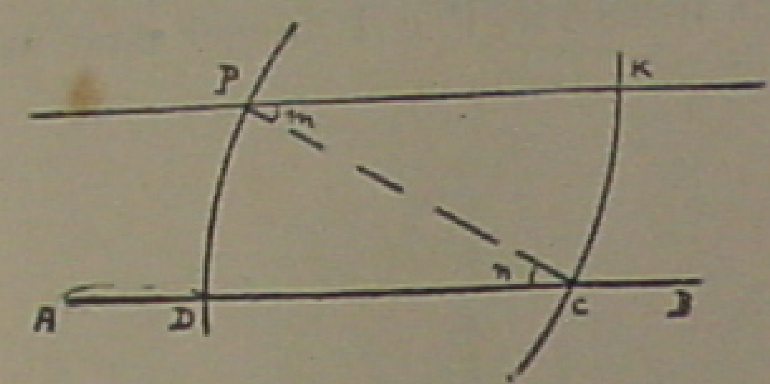
A recta DB é a perpendicular desejada.

Com effeito, o angulo B tem por medida a metade do arco CTD : é um angulo recto.

---

Por um ponto dado, traçar uma recta parallela a uma recta dada.

Seja a recta AB e o ponto P.



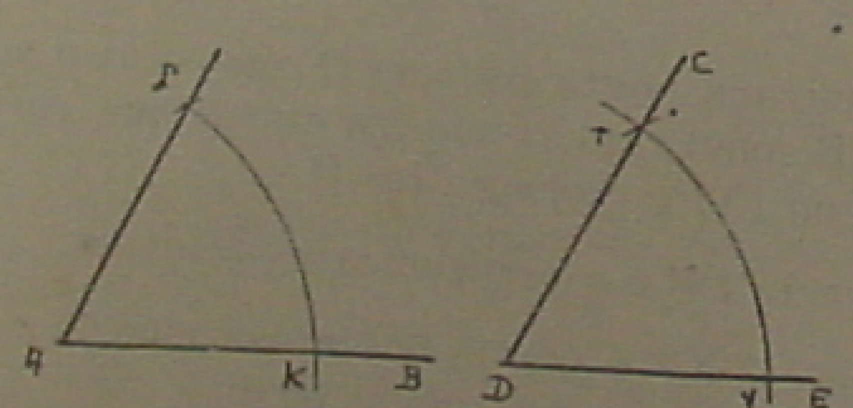

Do ponto P, com um raio PC, maior do que a distancia de P a AB, traço um arco de circulo. Do ponto C, com o mesmo raio, traço um outro arco de circulo, que determina o ponto D.

Messo o arco DP e transporto sua medida sobre CK. Unindo PK, teremos a parallela procurada.

Com effeito, os angulos m e n, alternos-internos, são iguaes, pois, têm por medida arcos iguaes, logo as rectas AB e PK são parallelas.

---

Por um ponto A, d'uma recta dada AB, traçar um angulo igual a um angulo dado.




Seja AB a recta, A o ponto, e CDE o angulo.

De D como centro, com um raio qualquer, traço um arco VT.

De A, como centro, e com o mesmo raio, traço um outro arco.

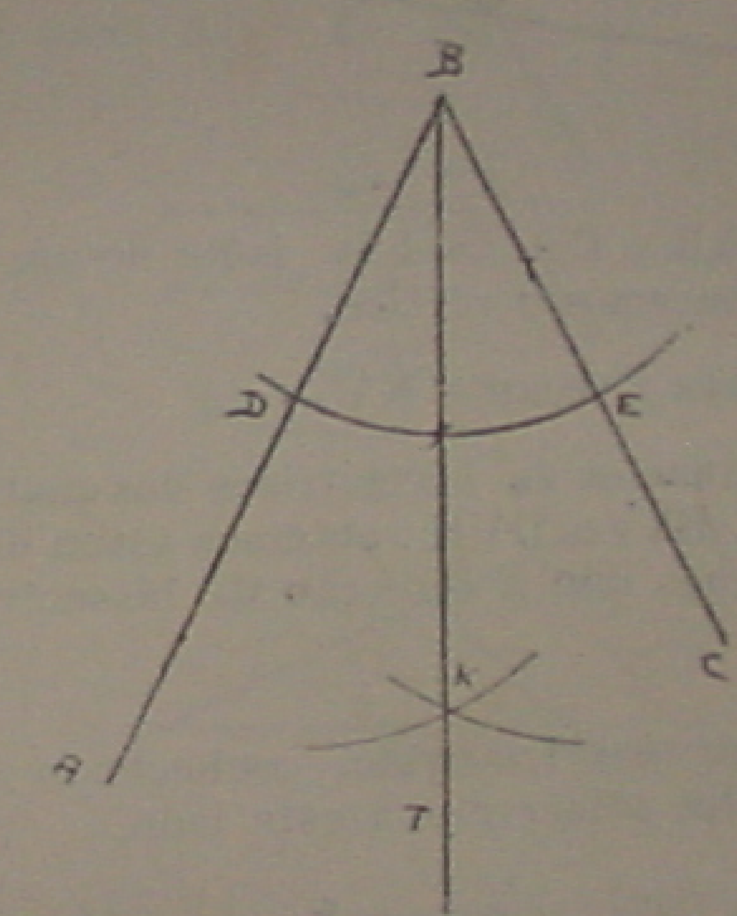


Messo o arco VT e transporto sua medida em KP.

Unindo AP, o angulo PAB será igual ao angulo dado.

---

Traçar a bissectriz de um angulo.

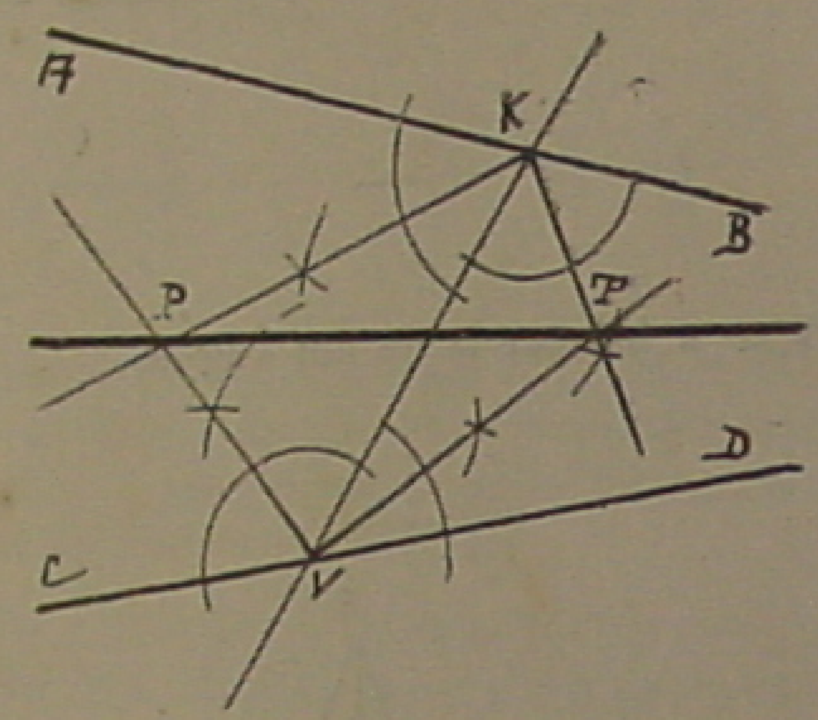



Seja o angulo ABC. Do vertice B, com um raio qualquer, traço um arco DE. Das extremidades D e E, com raios maiores do que a metade do arco DE, traço arcos que se cortam em K.

Unindo BK, teremos a bissectriz procurada.

---

Traçar a bissectriz de um angulo, quando não se conhece seu vertice.



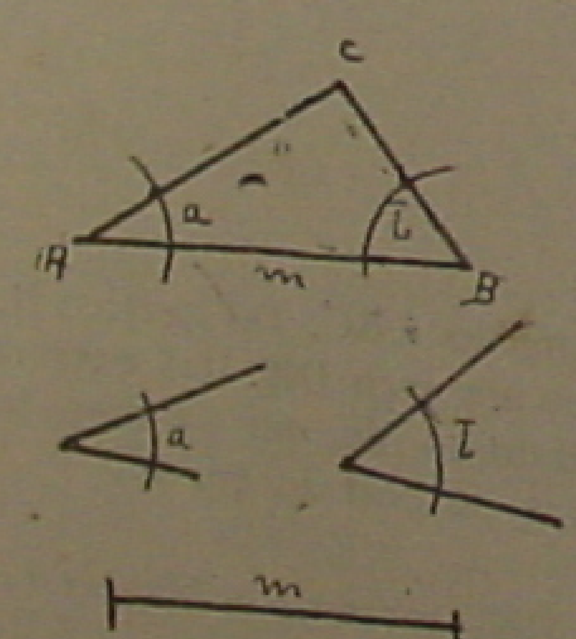

Sejam AB e CD, os dois lados de um angulo do qual não conhecemos o vertice.

Tracemos a secante KV.

Determinamos as bissectrizes dos quatro angulos AKV, CVK, BKV e DVK: obtemos assim dois pontos P e T, que nos dão a direcção da bissectriz PT.

---

Construir um triangulo, conhecendo um lado e os dois angulos adjacentes a este lado.




Traço AB igual ao lado m dado; nas extremidades A e B, traço angulos respectivamente iguaes aos



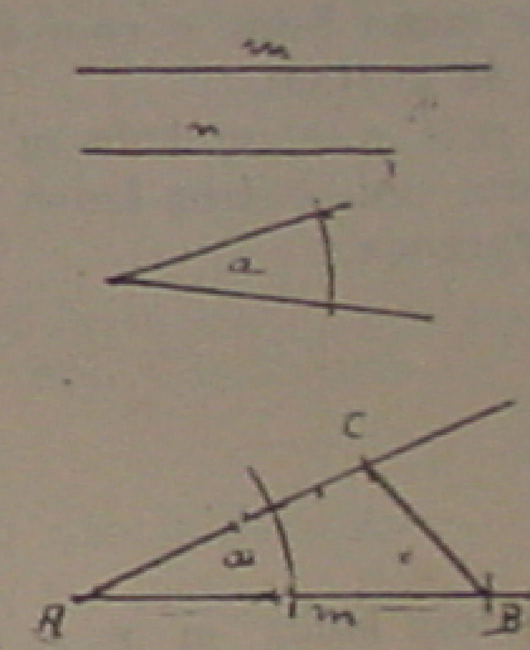
angulos dados a e b; o ponto de encontro C é o terceiro vertice do triangulo procurado.

NOTA — Este problema é possivel, sómente quando a somma dos dois angulos dados é menor do que dois angulos rectos.

---

Construir um triangulo, conhecendo dois lados e o angulo por elles formado.

Traço AB = m; em A traço um angulo igual ao angulo a, e tomo AC = n.




Unindo CB, terei o triangulo ABC procurado.

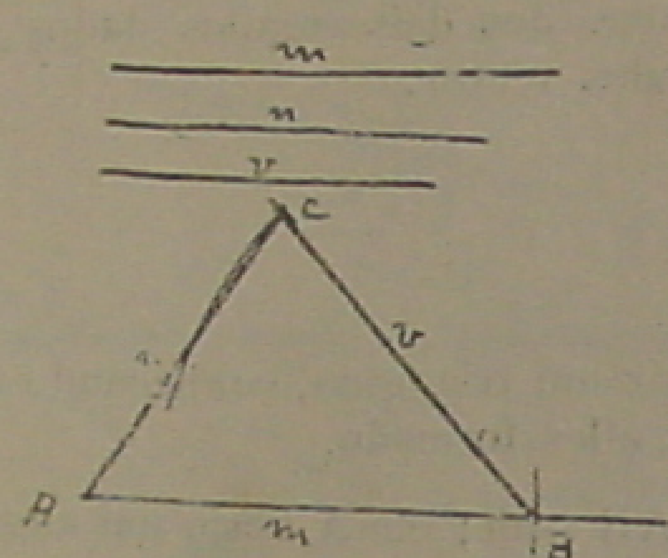
Este problema é sempre possivel.

---

Construir um triangulo, do qual conhecemos os tres lados.

Traço AB = m. De A, como centro, e com um raio = n, traço um arco: de B, como centro, e com um raio = v, traço um outro arco. Estes dois arcos se cortam em C. O triangulo ABC é o triangulo procurado.

O problema é possivel, só si os arcos, que tra-

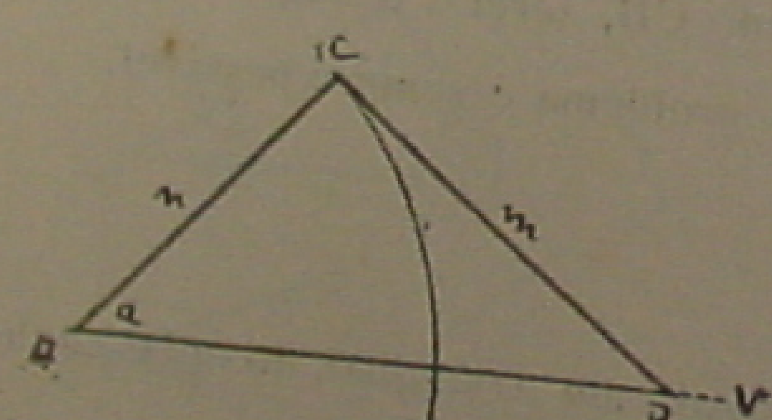


çamos com n e v como raios e com os centros respectivos A e B, se cortam.

E' preciso, pois, que um lado m ou seja menor do que a somma dos dois outros lados n e v, ou maior do que a sua differença.

---

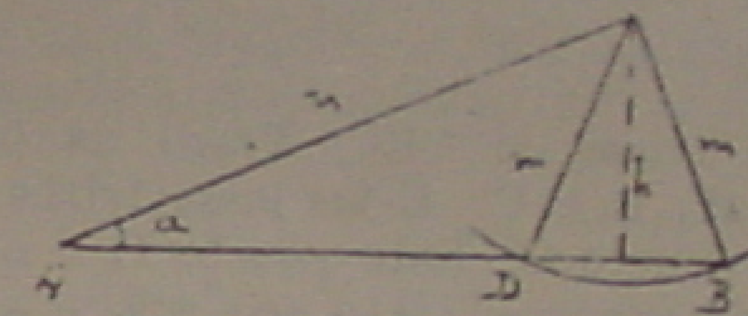
Conhecendo dois lados m e n d'um triangulo



e o angulo opposto ao maior lado m, construir o triangulo.



N'um ponto A d'uma recta qualquer AB, traço um angulo BAC igual ao angulo dado; tomo a distancia AC = n. Do ponto C como centro, e com um raio igual ao lado dado m, traço um arco que corte AV em B. Unindo CB, formo o triangulo ABC, procurado.



Si tivessemos dado o angulo a opposto ao menor lado, o problema teria sido incerto.

$m < h$ não ha solução

$m = h$ ha uma solução.

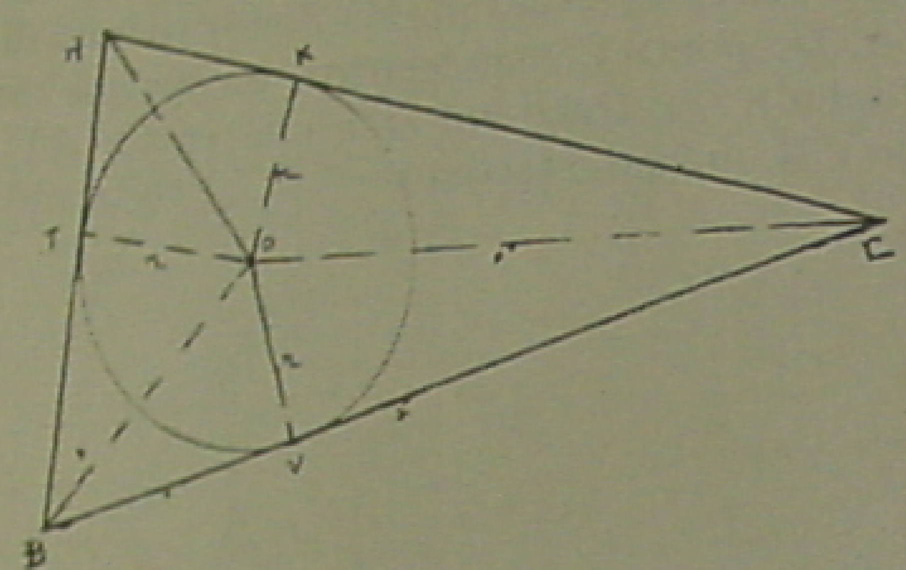
$$m > h \begin{cases} m < n \text{ ha 2 soluções} \\ m = n \text{ ha 1 solução (isoceles)} \\ m > n \text{ ha 1 solução.} \end{cases}$$

Em resumo, seja qual fôr o angulo a, obtem-se uma solução e uma só, quando $m > n$.

Para que haja duas soluções é preciso que a seja agudo e que ao mesmo tempo $m < n$, e $m > h$.

---

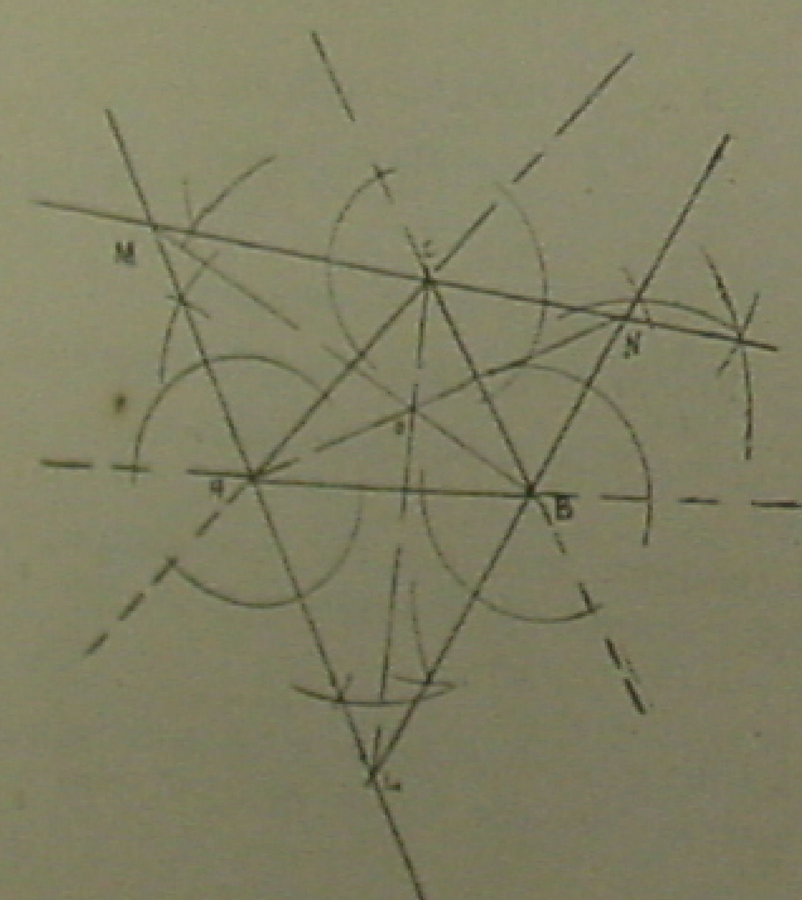
Inscrever uma circumferencia n'um triangulo.



Seja o triangulo ABC. Traço as bissectrizes dos angulos A, B e C. Estas bissectrizes cortam-se n'um mesmo poncto O. Este poncto O é o centro da circumferencia procurada e o seu raio é a perpendicular OV, traçada de O para V.

Traçar as circumferencias tangentes a tres rectas que se cortam duas a duas.

Sejam as rectas AB, BC e AC, que se cortam duas a duas.

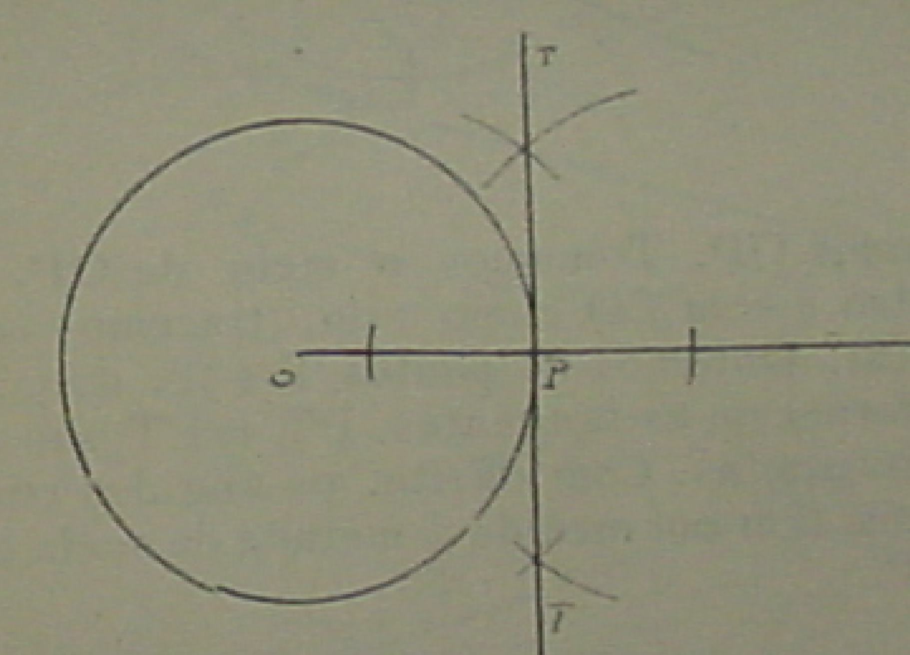


As bissectrizes dos angulos A, B e C nos fornecem o centro O do circulo inscripto.



As bissectrizes dos angulos exteriores nos fornecem os centros M, N e L dos circulos ex-inscriptos, isto é, dos circulos tangentes a um lado e aos prolongamentos dos dois outros lados.

Traçar uma tangente a uma circumferencia por um ponto situado sobre a curva,

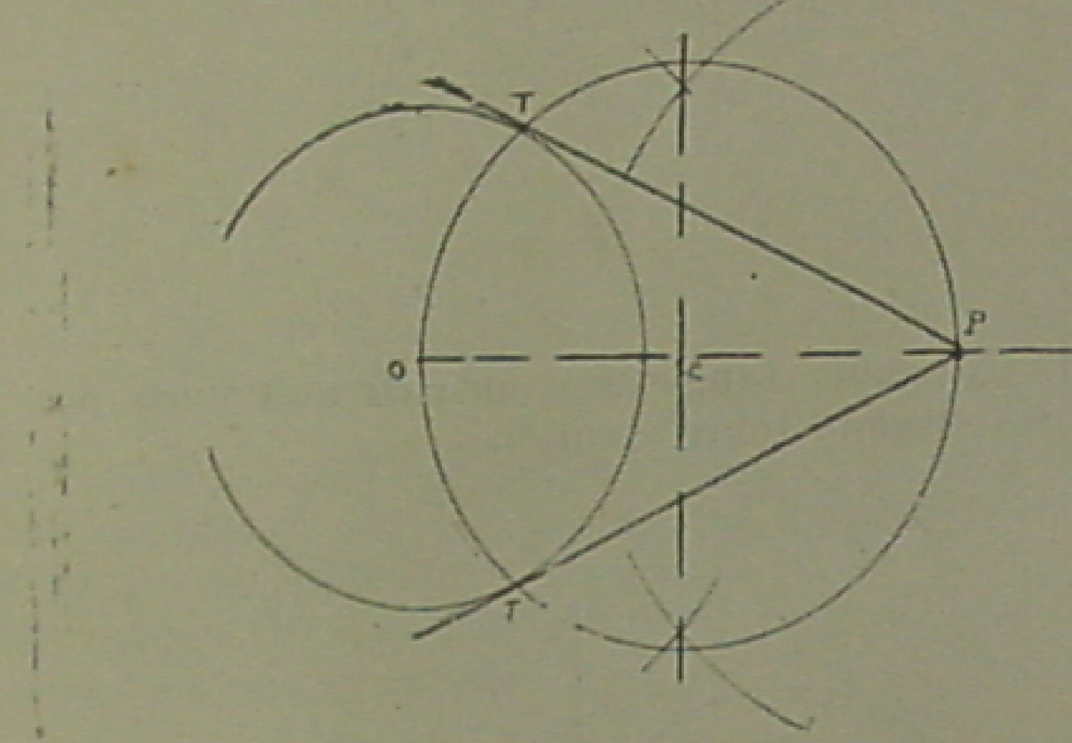


Seja O a circumferencia, e P o ponto dado.

Resta traçar uma perpendicular em P. Já sabemos que a tangente é sempre perpendicular na extremidade do raio que passa pelo ponto de contacto. Logo TT é a tangente procurada.

Traçar uma tangente a uma circumferencia por um ponto exterior á curva.

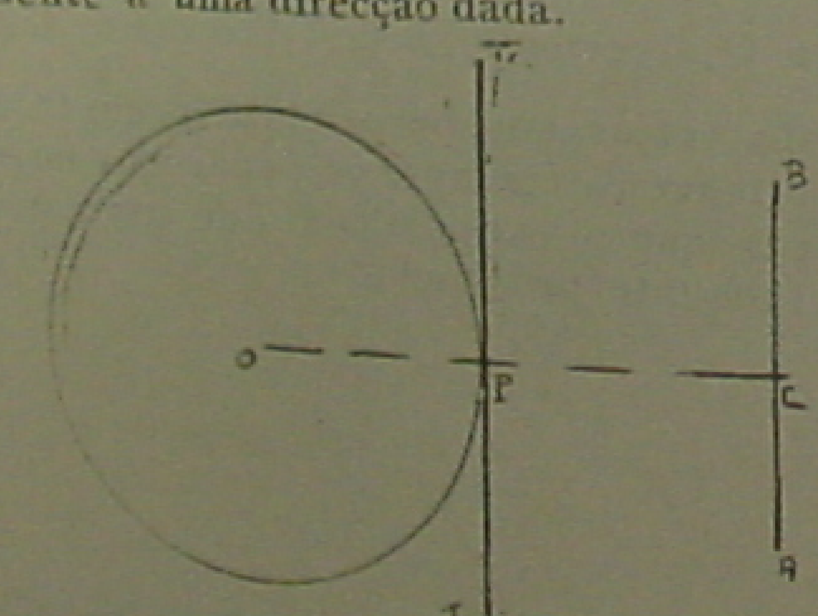
Seja O a circumferencia dada, e P o ponto dado fóra da curva.




Unamos OP. Tomemos o meio de OP, De C como centro e com CO como raio, tracemos uma circumferencia. Obtemos os pontos T e T, que, unidos a P, nos fornecem as tangentes. PT e PT são as tangentes procuradas. Com effeito, os angulos em T são rectos; pois, têm por medida a metade da meia circumferencia C.

—

Traçar uma tangente a uma circumferencia, parallelamente a uma direcção dada.




Seja o circulo O e a recta AB.



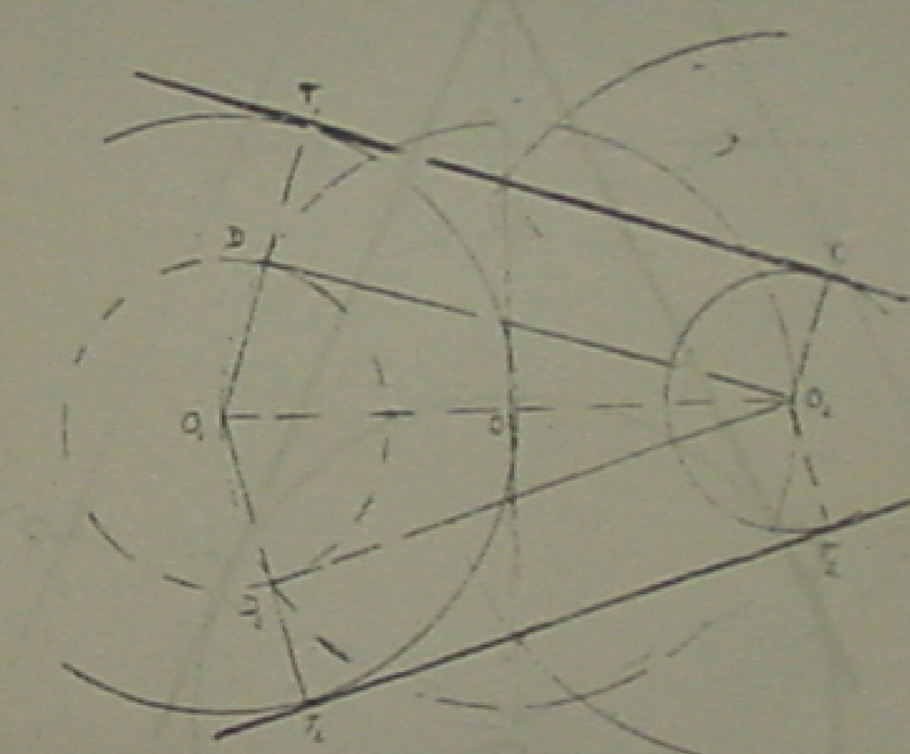
Traço a perpendicular de O sobre AB e depois uma perpendicular PT a OC, em P.

TT será a tangente procurada: pois, AB e TT são todas as duas perpendiculares a OC, e TT passa pela extremidade do raio OP.

—

Traçar as tangentes communs a duas circumferencias.

Sejam as duas circumferencias $O_1$ e $O_2$ Levo o raio da menor a partir da extremidade do raio da



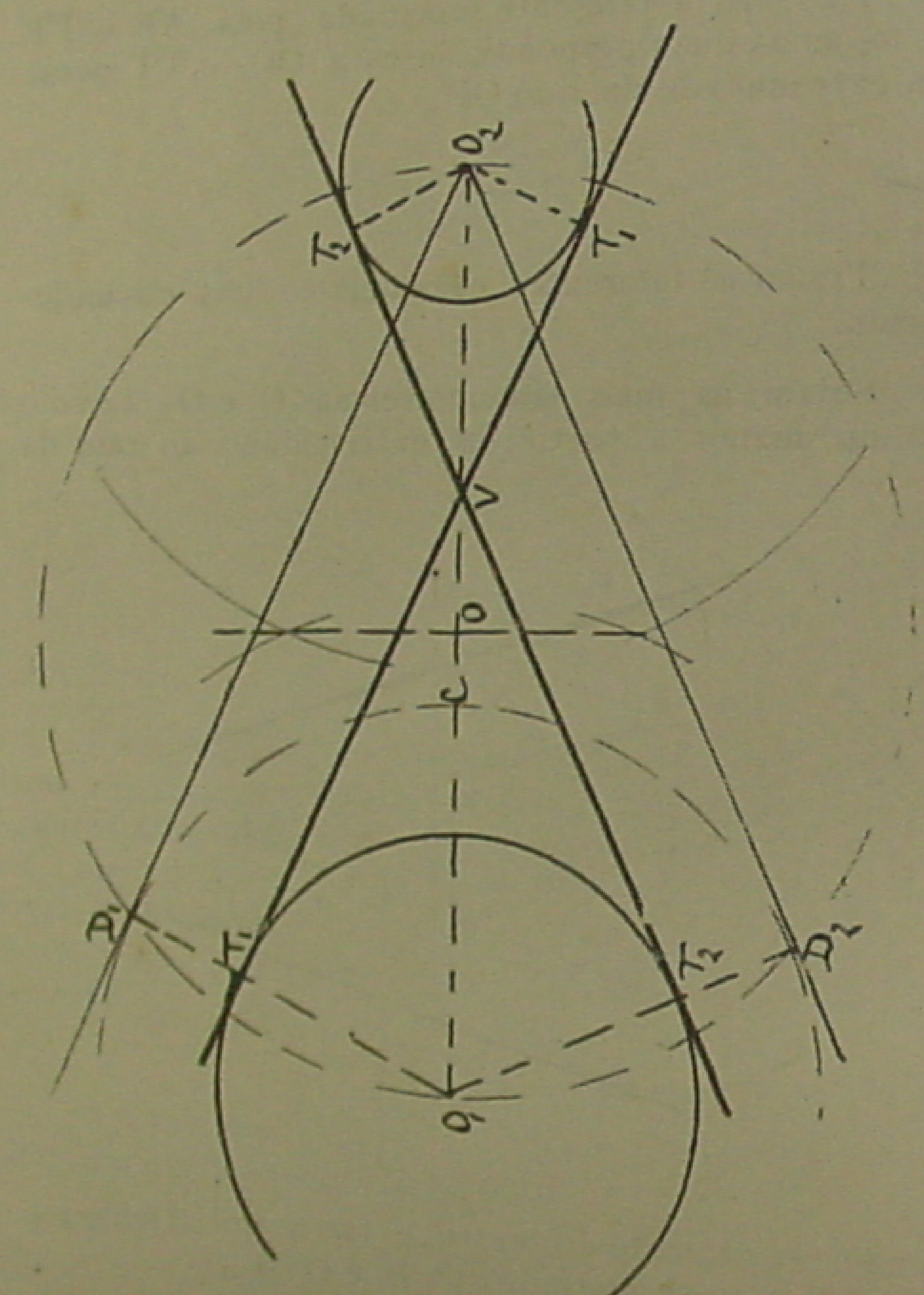
grande na direcção do centro, e traço um circulo auxiliar. Traço as tangentes $O_2 D_1$ e $O_2 D_2$.

Traçando os raios $O_1 D_1$ e $O_1 D_2$, prolongando-os até $T_1$ e $T_2$; traçando os raios $O_2 T_1$ e $O_2 T_2$ parallelos respectivamente a $O_1 T_1$ e a $O_1 T_2$ bastará unir os pontos $T_1 T_1$ e $T_2 T_2$ e teremos as tangentes procuradas.

Essas duas tangentes prolongadas se encontrariam n'um mesmo ponto do prolongamento da linha dos centros, e este ponto chama-se CENTRO EXTERIOR DE SEMELHANÇA.

—

Em vez de traçar o raio do pequeno circulo a partir da extremidade do raio do grande, na direcção




do centro, se o tivessemos traçado no prolongamento do raio do grande, teriamos podido analogamente traçar um circulo auxiliar com raio $O_1$ C. Traçando pelo ponto $O_2$ as tangentes a esse circulo auxiliar $O_2$ $D_1$ e $O_2$ $D_2$, bastará unir $O_1$ $D_1$ e $O_1$ $D_2$ para têrmos os pontos de contacto das tangentes com o circulo $O_1$.

As parallelas $O_2$ $T_1$ e $O_2$ $T_2$ respectivamente a $O_1$ $D_1$ e $O_1$ $D_2$ nós fornecem os pontos de contacto com o circulo $O_2$.



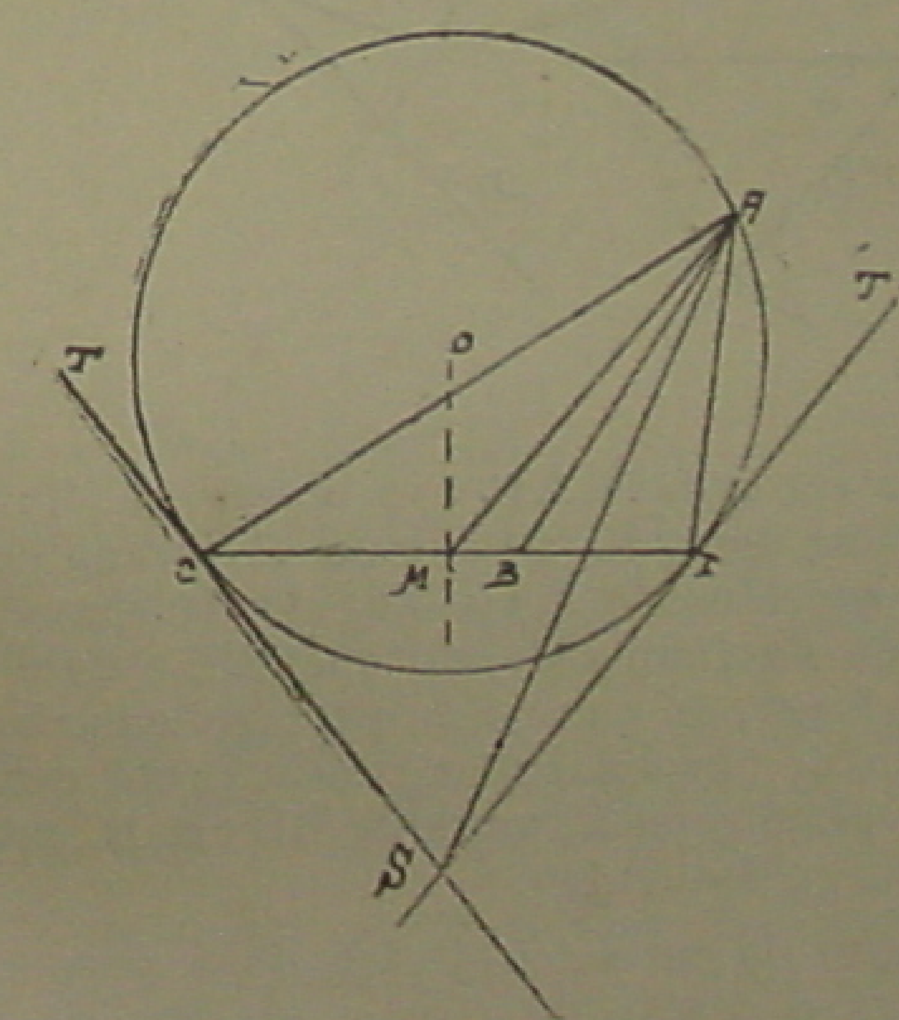
Essas duas tangentes, são tangentes interiores e cortam-se n'um mesmo ponto V, da linha dos centros, que se chama CENTRO INTERIOR DE SEMELHANÇA.

NOTA — As circumferencias dadas podem occupar cinco posições relativas, podem ser exteriores uma a outra, podem ser tangentes exteriormente, podem ser secantes, podem ser tangentes interiormente e podem ser interiores uma á outra.

Na primeira posição ha quatro tangentes communs, duas exteriores e duas interiores; na segunda posição, a tres tangentes communs, duas exteriores e uma interior; na terceira posição, ha somente duas tangentes exteriores; na quarta posição, ha uma só tangente exterior e na quinta posição, não ha tangente nenhuma.

Traçar a symediana d'um angulo d'um triangulo.

Seja o triangule APC, Queremos traçar a symediana do angulo A. Circumscrevo uma circumferencia

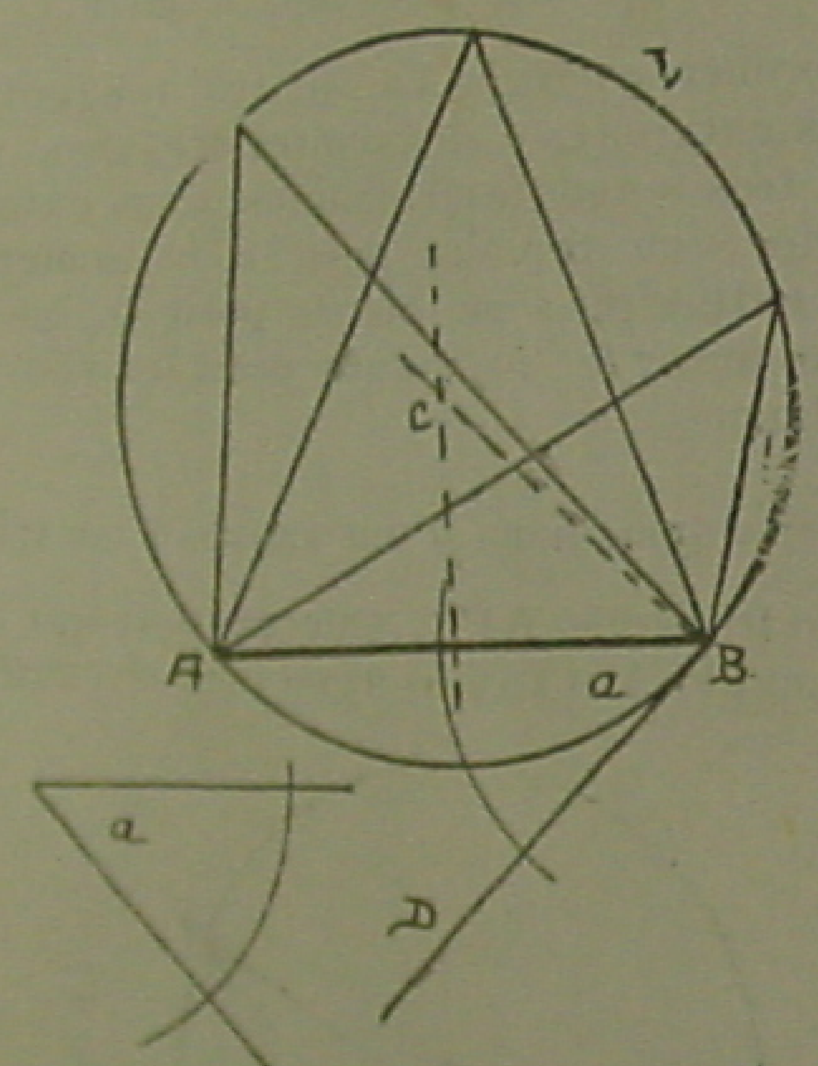



ao triangulo, e pelos pontos C e P, traço as tangentes. O ponto S, de encontro das tangentes, nos dará a symediana AS.

Procedendo d'um modo analogo para os angulos C e P, obtemos as duas outras symedianas; e o ponto commum d'estas tres symedianas, é o PONTO K, ou PONTO DE LEMOINE (Pag. 19.)

---

Construir um segmento capaz de um angulo dado, sobre uma corda dada.




Seja a corda dada AB e o angulo a. Tracemos em B, um angulo igual ao angulo a. O angulo ABD póde ser considerado como angulo de segmento do circulo ainda desconhecido, do qual AB é corda e BD tangente. Logo, si traço a perpendicular no meio da corda, e ta perpendicular passará pelo centro: si traço a perpendicular á tangente BD em B, esta também passará pelo centro.

O ponto de encontro d'essa duas perpendiculares nos dará o centro do circulo procurado.

O segmente procurado é AVB, pois, todo angulo n'elle inscripto e com os lados passando respectivamente por A e por B terá a mesma medida do que o angulo ABD, igual angulo dado a.

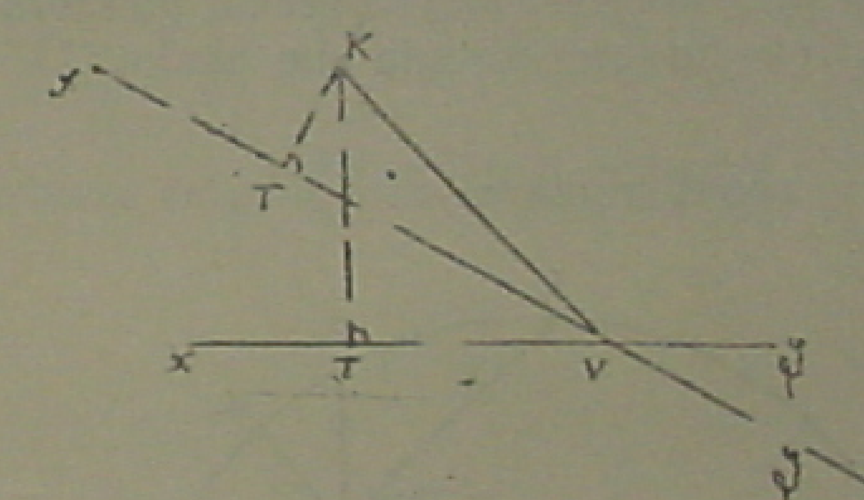


Para baixo de AB, ha uma outra solução, symetrica da primeira.

---

Determinar o logar geometrico das projecções d'um ponto K, sobre as rectas que passam por um ponto dado, e estão situadas n'um plano dado.

Antes de tudo, preciso dizer que a projecção de um ponto sobre uma recta, é o pé da perpendicular traçada do ponto sobre a reeta.




K = ponto fixo, dado.

V = ponto fixo, dado, pelo qual passa uma recta xy que gira em todos os sentidos no plano (porém sempre passando por V.)

O logar procurado é o circulo do qual KV é o diametro: isto é, cujo diametro é igual á distancia do ponto dado ao outro ponto fixo do recta xy.

Todos os angulos taes que KTV, KTV,... são rectos, pois, são inscriptos na semi- circumferencia de diametro KV.

Procurar o logar geometrico dos meios das cordas que passam por um ponto V, dado no interior d'um circulo.

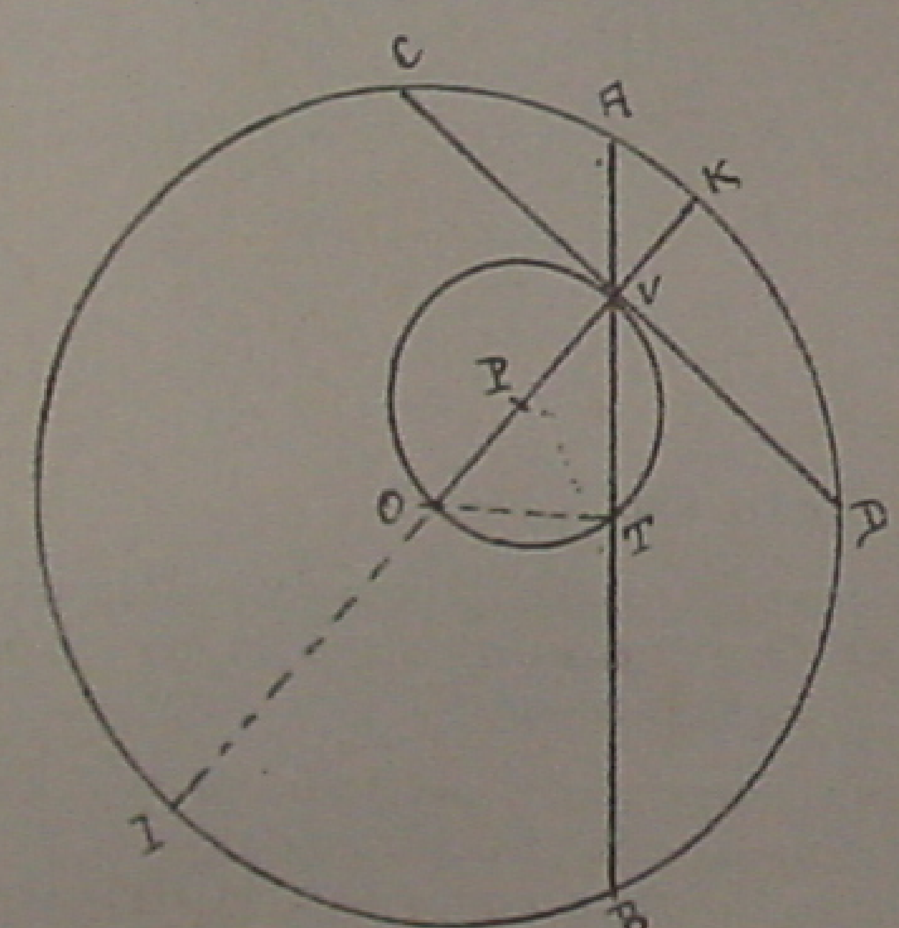
Unindo o centro O ao ponto V, e prolongando até K, temos o raio OK. Já sabemos que a corda CD perpendicular ao raio em V, acha-se n'este ponto dividida em duas partes igaaes: logo V é um ponto do logar geometrico procurado.

Prolongando KO até I, temos o diamet o KI; logo, o ponto O tambem é um ponto do logar procurado.

Consideremos agora uma corda qualquer AB passando pelo ponto dado V; si, do centro, traçamos a perpendicular OT sobre AB, o ponto T cahirá no meio da corda considerada. Logo, T tambem é um ponto do logar geometrico.

Notando que o angulo OTV é recto, podemos consideral-o inscripto no semi-circulo que tenha OV como diametro.

O mesmo acontecendo para todas as cordas que




passam pelo ponto V, concluimos que o logar geometrico procurado é o circulo que tem por diametro a distancia do centro do circulo dado ao ponto dado.

# 3ª PARTE