Procurar o logar geometrico dos meios das cordas que passam por um ponto V, dado no interior d'um circulo.

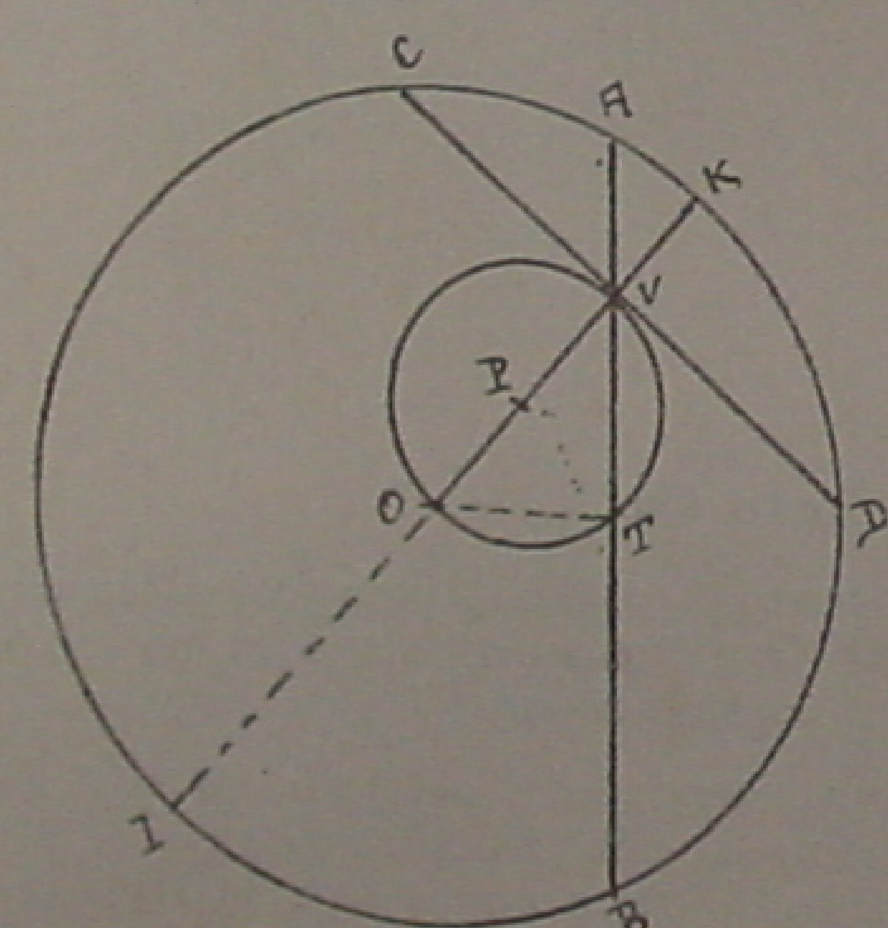
Unindo o centro O ao ponto V, e prolongando até K, temos o raio OK. Já sabemos que a corda CD perpendicular ao raio em V, acha-se n'este ponto dividida em duas partes igaaes: logo V é um ponto do logar geometrico procurado.

Prolongando KO até I, temos o diamet o KI; logo, o ponto O tambem é um ponto do logar procurado.

Consideremos agora uma corda qualquer AB passando pelo ponto dado V; si, do centro, traçamos a perpendicular OT sobre AB, o ponto T cahirá no meio da corda considerada. Logo, T tambem é um ponto do logar geometrico.

Notando que o angulo OTV é recto, podemos consideral-o inscripto no semi-circulo que tenha OV como diametro.

O mesmo acontecendo para todas as cordas que



passam pelo ponto V, concluimos que o logar geometrico procurado é o circulo que tem por diametro a distancia do centro do circulo dado ao ponto dado.

3ª PARTE

Linhas proporcionaes

Para a bôa comprehensão d'esta terceira parte, é indispensavel saber-se exactamente o que é uma razão, uma proporção, uma quarta proporcional, um meio proporcional, uma terceira proporcional. E' indispensavel conhecer-se os theoremas mais importantes relativos ás proporções: em toda proporção, o producto dos meios é igual ao producto dos extremos; reciprocamente, si quatro quantidades são taes que o producto de duas d'ellas seja igual ao producto das duas outras, essas quatro quantidades formam uma proporção.

Em toda proporção a somma ou a differença dos dois primeiros termos está para o segundo, na mesma razão que a somma ou a differença dos dois ultimos está para o ultimo.

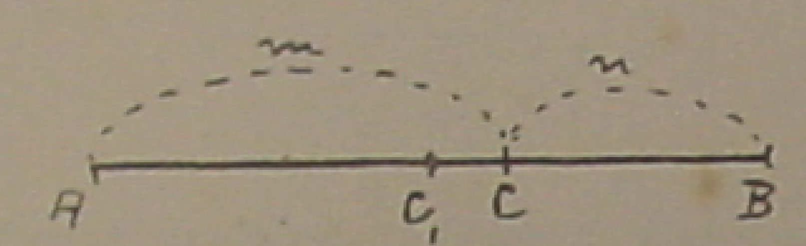
Em toda proporção, a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes, como cada antecedente está para seu consequente.

N'uma serie de razões iguaes, a somma de um certo numero de antecedentes está para a somma dos seus respectivos consequentes, como qualquer antecedente está para o seu consequente.

São tambem indispensaveis certos couhecimentos relativos ás equações do 1º e do 2º gráu.

Theorema 58. — Sobre uma recta limitada AB ha sempre um ponto e UM só, entre A e B, que divida a recta dada AB n'uma certa razão m/n.

Seja a recta AB. Quero demonstrar que entre A e B ha um ponto C que divide AB n'uma certa razão,



por exemplo, na razão $^3/_2$. Basta para isto dividir-se AB em $3 + 2$ ou 5 partes iguaes : contando-se 3 d'estas partes a partir de A, e ahi marcando o ponto C, notamos que AC comprehende 3 das cinco partes entre as quaes dividimos AB, e CB comprehende 2 d'estas partes.

Logo AC está para CB como 3 está para 2.

Generalizando, e supponde que quizessemos dividir AB na razão m/n, bastaria dividir AB em $m + n$ partes iguaes. Contando m d'estas partes a partir de A, e ahi marcando C, ficam para CB as n partes restantes, e AC está para CB como m para n.

Logo sempre ha um ponto entre A e B que divide AB n'uma razão dada.

Precisamos agora é demonstrar que ha UM SÓ PONTO, entre A e B, que divida AB n'uma razão dada m/n.

C dividindo AB na razão de m para n, temos :

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Imaginemos um outro ponto C_1 que tambem dividisse AB na razão m/n, teriamos analogamente

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

Comparando as proporções (1) e (2) notamos que

os segundos membros são iguaes, logo os dois primeiros tambem o são, e

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{C_1B}$$

Mas, já sabemos que

$$\frac{AC + CB}{CB} = \frac{AC_1 + C_1B}{C_1B}$$

ou

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AB}{C_1B}$$

N'esta proporção os dois antecedentes são identicos, é indispensavel, pois, que os consequentes tambem o sejam : logo

$$CB = C_1B$$

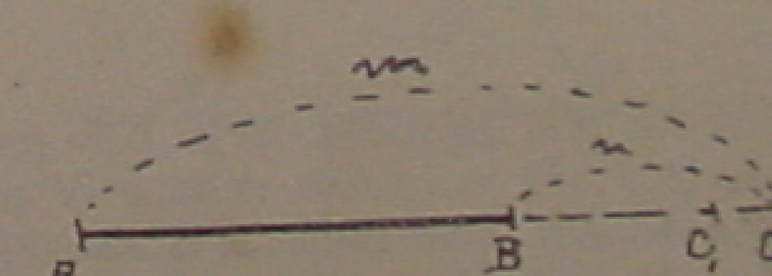
O que exige que o ponto C_1 coincida com o ponto C.

Logo, o ponto C_1 que suppomos dividir AB na razão m/n não é mais do que o proprio ponto C.

E', pois, claro que entre A e B só existe um ponto que divida AB n'uma razão dada m/n.

—

Theorema 59. — No prolongamento de AB tambem ha um ponto e UM só que divida AB n'uma razão dada m/n.



E' facil provar que sempre ha um ponto C tal que

$$\frac{AC}{CB}$$

seja igual a m/n (analogamente ao que fizemos no theorema precedente).

Podemos, pois, escrever:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$$

Imaginemos um ponto C_1 tal que

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{m}{n}$$

Concluimos que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{C_1B}$$

ou

$$\frac{AC - CB}{CB} = \frac{AC_1 - C_1B}{C_1B}$$

ou

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AB}{C_1B}$$

Os antecedentes d'esta ultima proporção sendo identicos, é indispensavel que o mesmo aconteça com os consequentes, logo

$$CB = C_1B$$

e o ponto C_1 coincide com C. Logo, o ponto C_1 que suppomos dividir AB na razão m/n não é mais do que o proprio ponto C.

—

Seja a recta AB limitada, seja K o ponto entre A e B, que divida AB na razão m/n, e V o ponto no prolongamento de AB, que divida AB na mesma razão. Os pontos K e V são chamados CONJUGADOS HARMONICOS.

Os quatro pontos A, K, B e V formam uma DIVISÃO HARMONICA.

Sabemos que

$$\frac{AK}{KB} = \frac{m}{n}$$

e

$$\frac{AV}{VB} = \frac{m}{n}$$

logo

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AV}{VB}$$

ou

$$AK.VB = KB.AV$$

d'ahi deduzimos a condição para que os quatro pontos A, B, K e V formem uma divisão harmonica: é preciso que o producto dos dois segmentos extremos seja igual ao producto do segmento do meio pela distancia total AV.

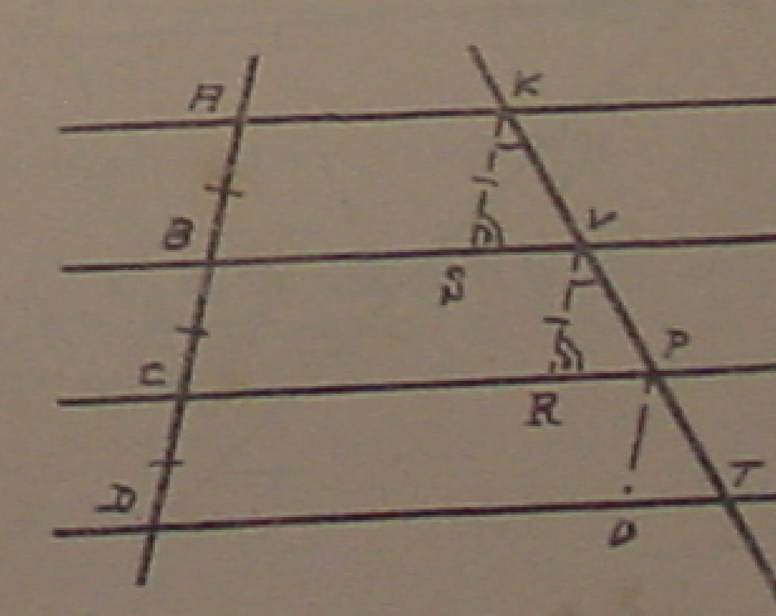
Os segmentos AK e KB cuja somma perfaz AB chamam-se SEGMENTOS ADDITIVOS.

Os segmentos AV e VB cuja differença perfaz AB, chamam-se SEGMENTOS SUBTRACTIVOS.

—

Theorema 60.—Quando um certo numero de parallelas determinam sobre uma secante partes iguaes, ellas tambem determinam sobre qualquer outra secante partes iguaes.

Sejam as parallelas AK, BV, CP, DT, que de-



terminam sobre uma secante AD partes iguaes AB, BC, CD. Quero demonstrar que essas parallelas determinam, sobre qualquer outra secante KT, partes iguaes.

Com effeito, pelos pontos K, V, P, traço as rectas KS, VR e PO parallelas a AD.

KS = AB como parallelas comprehendidas entre parallelas.

VR = BC pelo mesmo motivo.

Como AB = BC (por hypothese), concluimos que KS = VR.

Nos dois triangulos KSV e VRP, os angulos em K e em V são iguaes como correspondentes, e os angulos S e R têm os lados respectivamente parallelos e dirigidos no mesmo sentido.

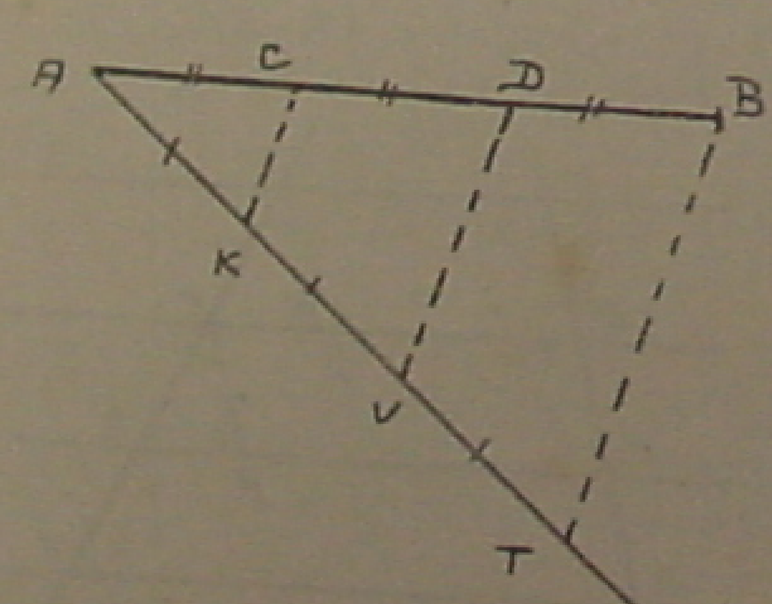
Os triangulos KSV e VRP têm, pois, um lado igual comprehendido entre angulos respectivamente iguaes, logo são iguaes, e seus elementos são respectivamente iguaes, — o lado KV = ao lado VP.

D'um modo analogo, demonstrariamos qu VP = PT.

Logo, as parallelas consideradas determinaram, sobre a outra secante K T, partes iguaes.

—

D'ahi um processo para dividir uma recta em um numero qualquer de partes iguaes.



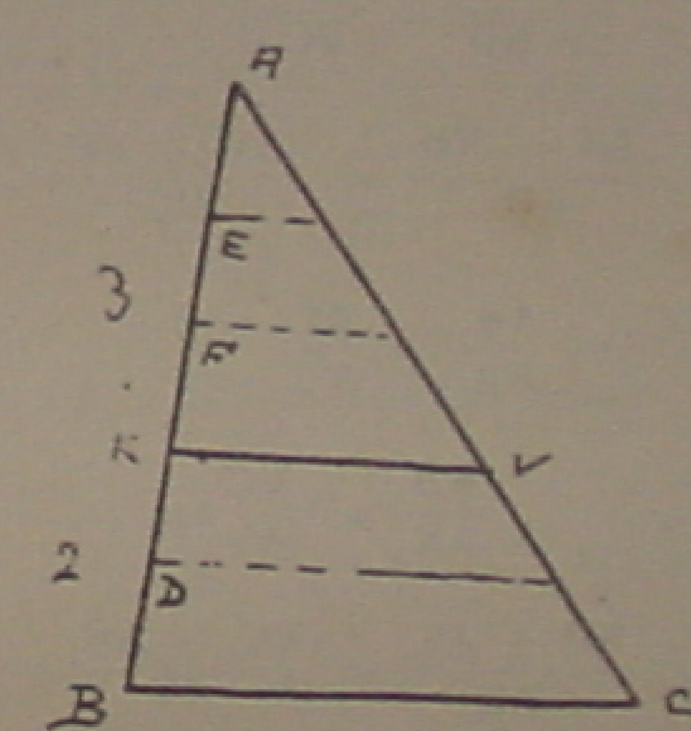
Seja a recta AB, que queremos dividir, por exemplo, em 3 partes iguaes.

Traço uma recta auxiliar qualquer AT, e levo sobre essa recta a partir de A, uma medida qualquer tantas vezes quantas são as partes entre as quaes quero dividir a recta dada (no caso actual, 3 vezes).

Uno os ponto T e B, e traço pelos pontos V e K as parallelas VD e KC, a TB. As parallelas KC, VD e TB determinando sobre a secante AT, tres partes iguaes AK, KV e VT, determinarão tambem sobre a outra secante AB, tres partes iguaes AC, CD e DB.

—

Theorema 61. — Toda recta, parallela a um dos lados de um triangulo, determina, sobre os dois outros lados partes proporcionaes.



Seja o triangulo ABC e a recta KV parallela ao lado BC.

Suppomos que entre AK e KB haja uma medida commum contida exactamente 3 vezes de A a K, e 2 vezes de K a B, teremos

$$\frac{AK}{KB} = \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Pelos pontos de divisão E, F, D, tracemos paral-

·lelas a KV. Estas parallelas determinarão sobre o lado AC cinco partes iguaes, 3 de A a V, e 2 de V a C, logo

$$\frac{AV}{VC} = \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Das proporções (1) e (2) deduzimos

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AV}{VC}$$

O que queriamos demonstrar.

Esta ultima proporção póde ser escripta de varias fórmas

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AV}{VC} \quad (a)$$

$$\frac{AK + KB}{KB} = \frac{AV + VC}{VC}$$

$$\frac{AB}{KB} = \frac{AC}{VC} \quad (b)$$

$$\frac{KB}{AK} = \frac{VC}{AV}$$

$$\frac{KB + AK}{AK} = \frac{VC + AV}{AV}$$

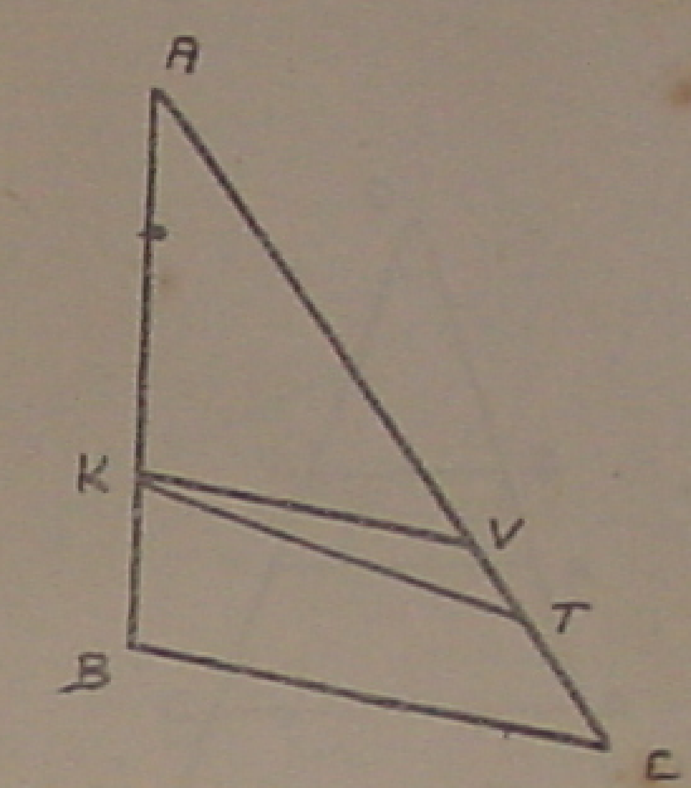
$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AV} \quad (c)$$

em geral, podemos effectuar todas as transformações permittidas em algebra.

—

Reciprocamente. — Si uma certa recta KV de-

termina sobre dois lados de um triangulo partes proporcionaes, essa recta é parallela ao terceiro lado.



Seja KV, tal que

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AV}{VC} \qquad (1)$$

Suppondo que KV não fosse parallela a BC, e traçando a parallela KT a BC, teriamos

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AT}{TC} \qquad (2)$$

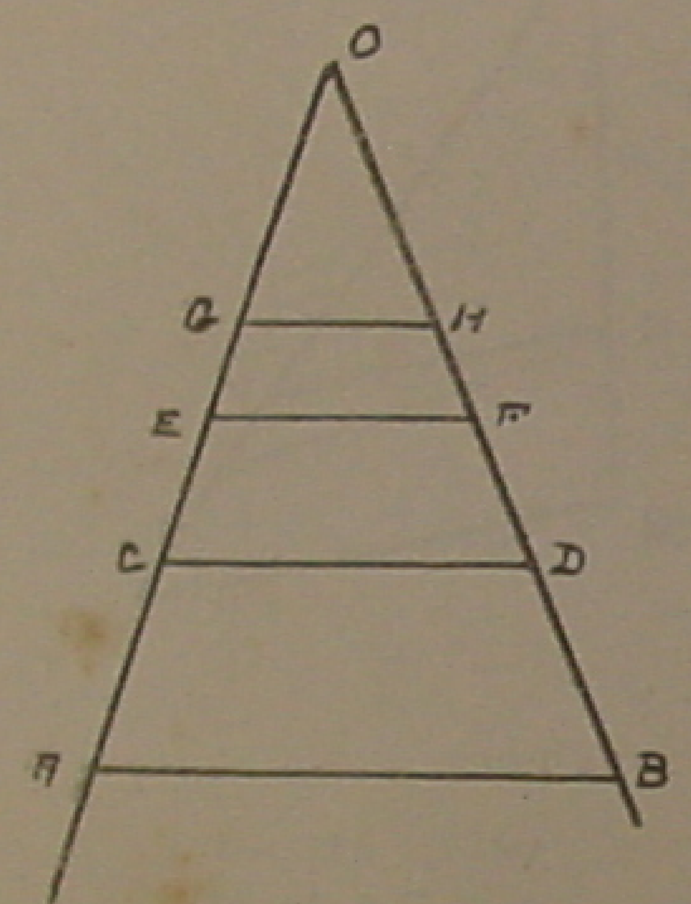
Comparando (1) e (2) notamos que

$$\frac{AV}{VC} = \frac{AT}{TC}$$

O que não é possivel senão quando o ponto T coincide com o ponto V; pois, entre A e C não podem existir dois pontos V e T que dividam AC na mesma razão. Logo KV coincide com KT e é parallela ao terceiro lado BC.

—

Si duas rectas OA e OB são cortadas por uma serie de parallelas, os segmentos da primeira recta estão



na mesma razão do que os segmentos correspondentes da segunda.

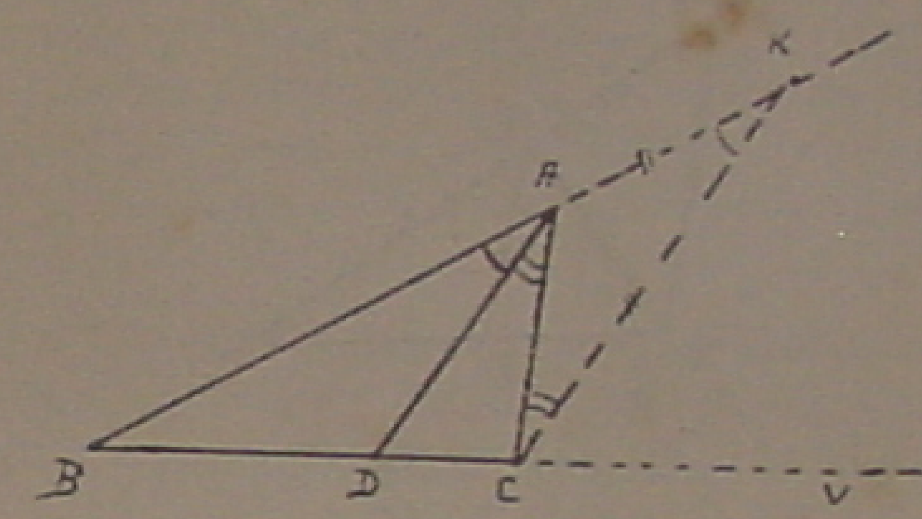
$$\frac{OG}{OH} = \frac{GE}{HF} = \frac{OE}{OF} = \frac{EC}{FD} = \frac{OC}{OD} = \frac{CA}{DB} = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{OG}{OH} = \frac{GE}{HF} = \frac{EC}{FD} = \frac{CA}{DB}$$

—

Theorema 62. — A bissectriz do angulo INTERIOR de um triangulo determina sobre o lado opposto dois

segmentos directamente proporcionaes aos dois outros lados do triangulo.



Seja o triangulo ABC e a bissectriz AD interior do angulo A. Pelo ponto C traço CK parallela a DA até encontrar BA prolongado. Formamos o triangulo AKC.

Notamos que o angulo BAD é igual ao angulo K, como correspondentes: o angulo DAC é igual ao angulo ACK, como alternos-internos. Os angulos formados pela bissectriz AD são iguaes, os dois outros em K e C tambem o serão. Logo, o triangulo AKC é isosceles e AK = AC

No triangulo KBC, AD é parallela á base CK, logo

$$\frac{BA}{AK} = \frac{BD}{DC}$$

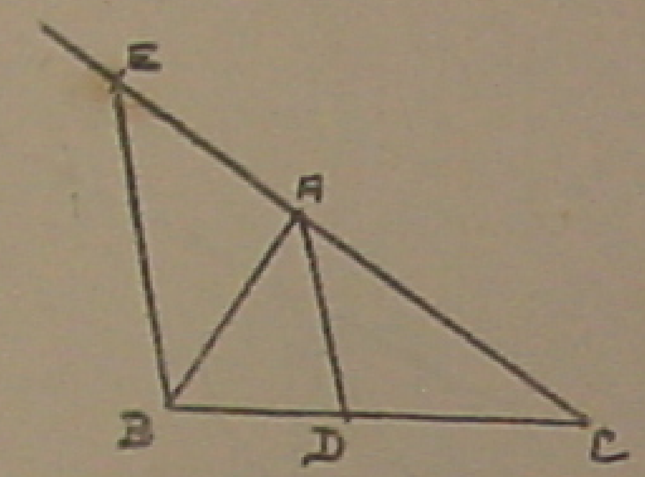
substituindo AK pelo seu igual AC temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

—

Reciprocamente. — Si uma recta, partindo do vertice A d'um triangulo, divide o lado opposto em segmentos proporcionaes aos dois outros lados, ella é bissectriz do angulo A.

Seja, no triangulo ABC, a proporção:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (1)$$

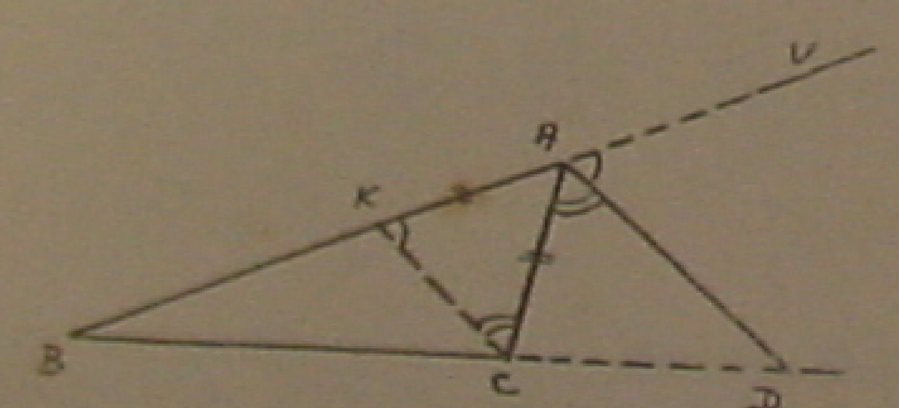
Tracemos BE parallela a DA e prolonguemos CA até seu encontro com essa parallela em E. No triangulo CBE as parallelas AD e BE dão a proporção

$$\frac{BD}{DC} = \frac{EA}{AC}$$

Comparando esta proporcão com a proporção (1), notamos que AE = AB; o triangulo BAE é, pois, isosceles, e os angulos EBA, AEB são iguaes; mas os angulos EBA, BAD são iguaes como alternos-internos e os angulos AEB, DAC são iguaes como correspondentes. Logo, os angulos BAD, DAC são iguaes, e AD é bissectriz do angulo A.

—

Theorema 63.—A bissectriz do angulo EXTERIOR de um triangulo, determina sobre o lado opposto dois



segmentos directamente proporcionaes aos dois outros lados do triangulo.

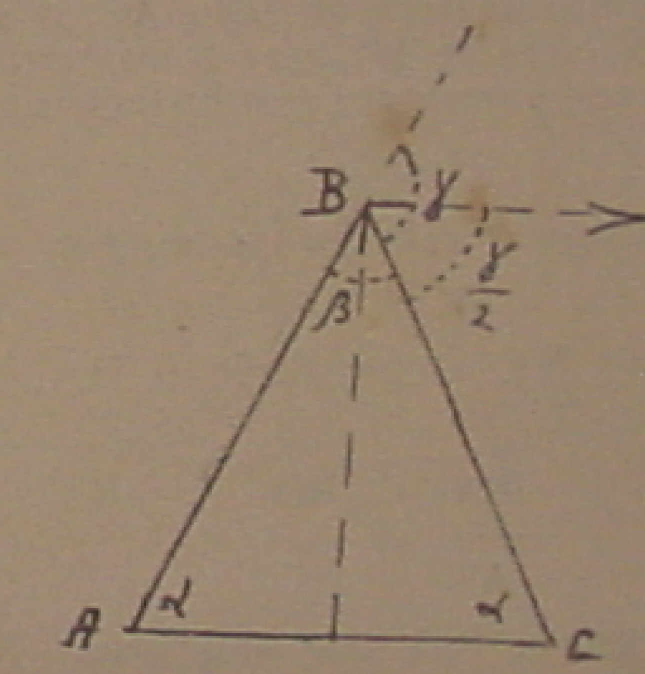
Seja o triangulo ABC e a bissectriz AD do angulo A exterior.

Pelo ponto C traço CK parallela a DA.

O angulo AKC é igual ao angulo VAD, como correspondentes. O angulo ACK é igual ao angulo CAD, como alternos-internos. Ora, os angulos em A sendo iguaes, como formados pela bissectriz AD, os dois outros K e C respectivamente iguaes aos angulos em A, tambem serão iguaes.

NOTA.—(do Major Tenorio de Albuquerque) *O theorema é falso para os triangulos isoceles e equilateros.*

Seja o triangulo isoceles ABC tendo os angulos α iguaes. O angulo β será $= 180^\circ - 2\alpha$ e o angulo γ externo será $= 180^\circ - \beta$ ou $180^\circ - 180^\circ + 2\alpha$ ou 2α.



Se traçarmos a bissectriz de γ, o angulo formado por esta bissectriz e a altura sobre AC será $\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$

ou

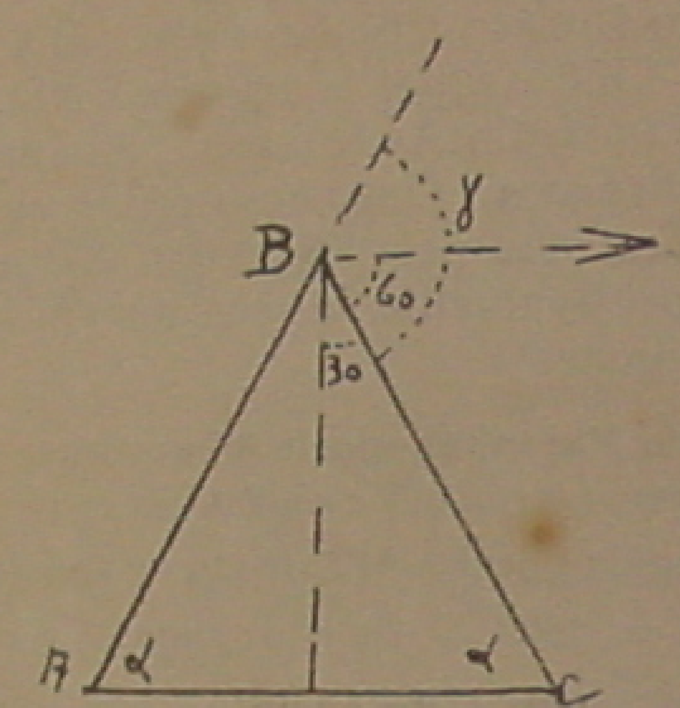
$$\frac{2\alpha}{2} + \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} \text{ ou } \alpha + 90^\circ - \alpha \text{ ou } 90^\circ.$$

Se a bissectriz é perpendicular á altura e a altura perpendicular á base, a *bissectriz será parallela á base.*

No triangulo equilatero ABC, supponhamos o angulo γ que dará

$$\gamma = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

A bissectriz d'esse angulo formará com o lado BC um angulo de 60°.



Traçando a altura relativa ao lado AC, o angulo dessa altura com o lado BC será de 30°, logo a bissectriz externa e a altura são orthogonaes, e portanto essa bissectriz é parallela ao lado AC.

Logo, o triangulo AKC é isoceles e

$$AK = AC$$

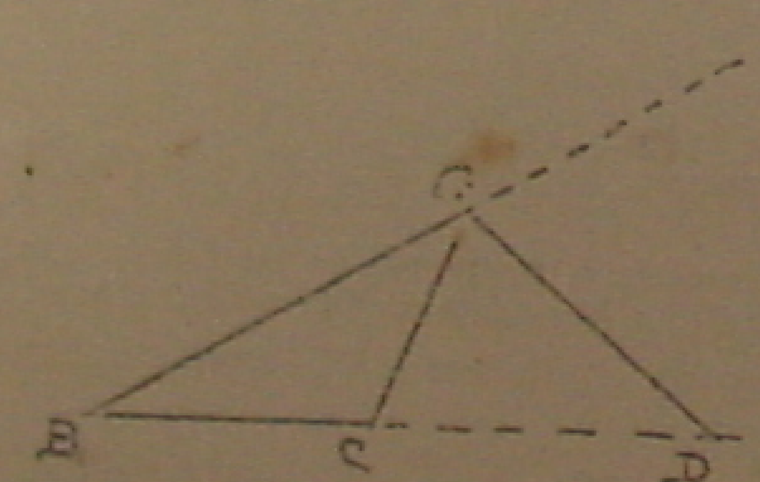
Notando que KC é parallela a DA, o triangulo ABD nos dá

$$\frac{BA}{AK} = \frac{BD}{DC}$$

Ou, substituindo KA por seu igual AC, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

Reciprocamente. — Si uma recta AD partindo

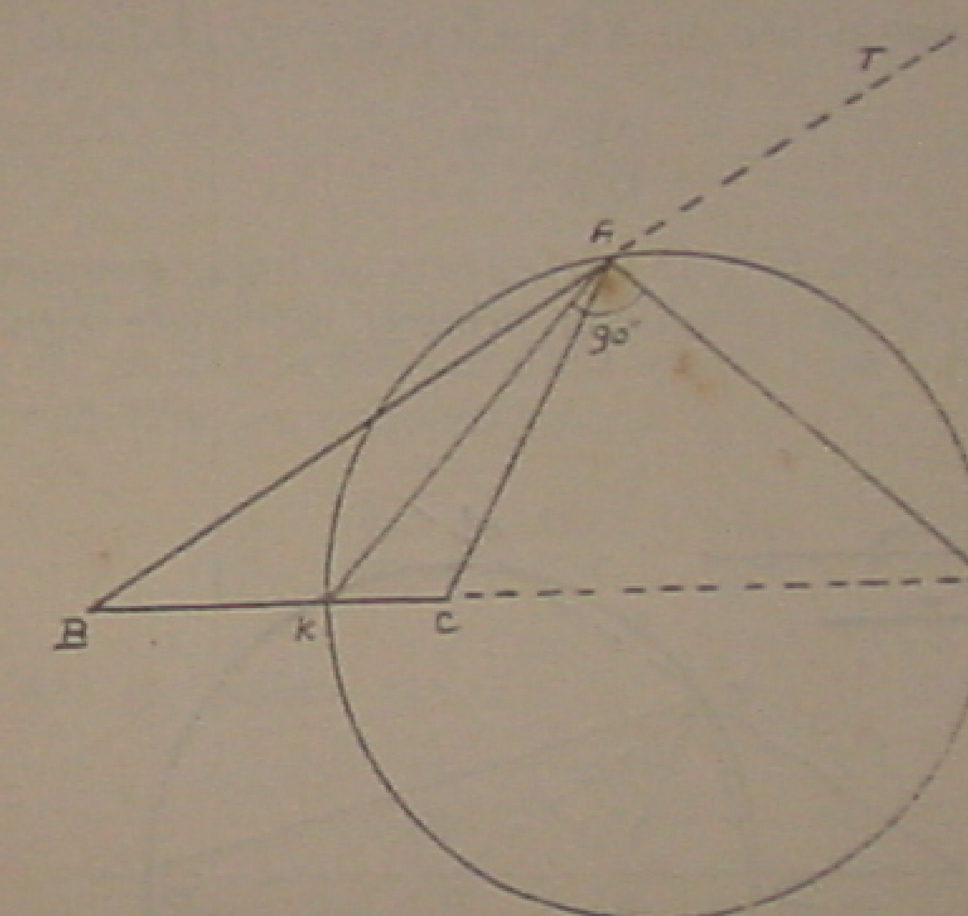


d'um vertice A d'um triangulo encontra o PROLONGAMENTO do lado opposto BC em um ponto D cujas distancias aos pontos B e C sejam proporcionaes aos dois outros lados AB e AC, essa recta AD é bissectriz do angulo EXTERIOR ao triangulo tendo seu vertice em A.

Demonstração analoga á demonstração da reciproca do theorema precedente.

NOTA. — A bissectriz interior determinou sobre o lado opposto do triangulo um certo ponto K tal que

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$$



A bissectriz exterior determinou o ponto V tal que

$$\frac{BV}{VD} = \frac{AB}{AC}$$

logo $$\frac{BK}{KC} = \frac{BV}{VC}$$

e BC acha-se dividido HARMONICAMENTE por K e V. Os quatro pontos B, K, C e V formam uma DIVISÃO HARMONICA.

Traçando uma circumferencia sobre KV como diametro, esta circumferencia passa pelo ponto A. Com effeito, o angulo KAV, formado pelas bissectrizes de dois angulos adjacentes supplementares, é recto.

Problema. — O logar geometrico dos pontos, cujas distancias a dois pontos dados A e B são proporcionaes a duas dimensões dadas m e n, é uma circumferencia.

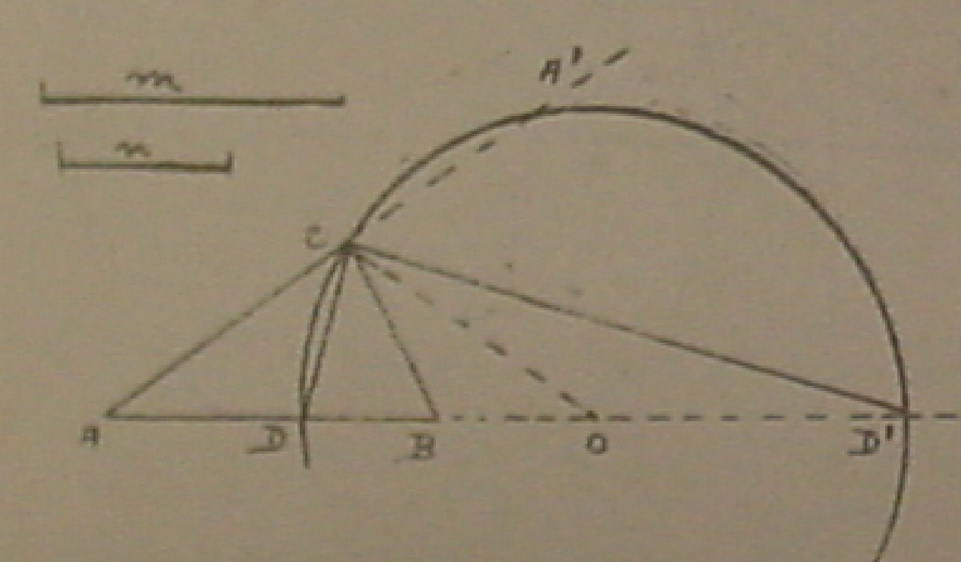
Supponhamos m > n. Tomemos sobre a recta que une A e B, um ponto D, tal que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$$

e no prolongamento de AB, um ponto D', tal que

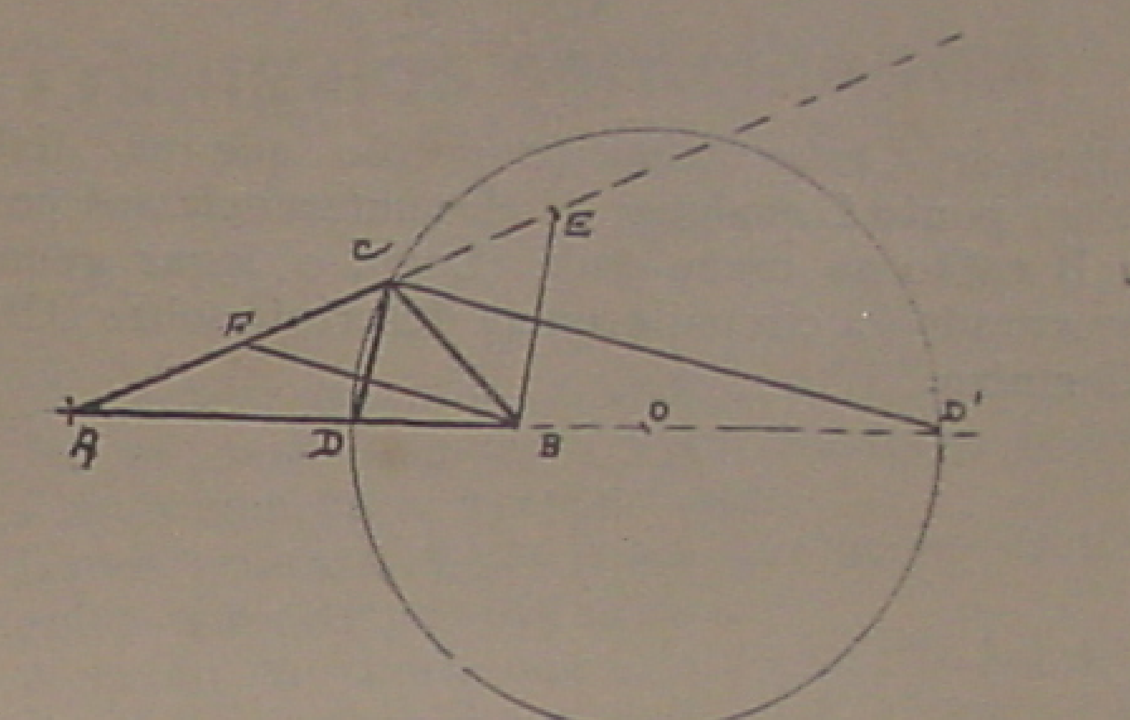
$$\frac{AD'}{D'B} = \frac{m}{n}$$

Os pontos D' e D pertencem ao logar geometrico procurado, e são os unicos pontos do logar situados sobre AB.



Seja um ponto C qualquer do logar geometrico procurado: unamos CA, CD, CB, CD'. Pelas reciprocas dos dois ultimos theoremas, a recta CD é bissectriz do angulo ACB, e a recta CD' é bissectriz do angulo exterior BCA'. As duas rectas CD e CD', bissectrizes de dois angulos adjacentes supplementares são orthogonaes, e o vertice C do angulo recto DCD' está sobre a circumferencia O descripta sobre DD' como diametro.

Todo ponto C d'essa circumferencia é um ponto do logar procurado.



Com effeito, unindo CA, CD, CB, CD', e pelo ponto B, traçando BE parallela a CD, essas parallelas nos fornecerão as proporções:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE} \quad e \quad \frac{AD'}{D'B} = \frac{AC}{CF} \quad (1)$$

Mas as razões

$$\frac{AD}{DB} \quad e \quad \frac{AD'}{D'B}$$

são iguaes, pois, cada uma d'ella é igual á

$$\frac{m}{n}$$

logo CE = CF.

O triangulo FBE é rectangulo, pois, seus lados são respectivamente parallelos aos lados do angulo recto DCD'; logo, a recta CB que une o meio C da hypotenusa FE ao vertice B é igual a CE, e por conseguinte a primeira das proporções (1) pode-se escrever

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

Como

$$\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$$

segue-se d'esta ultima proporção que as distancias d'um ponto C qualquer da circumferencia aos pontos A e B estão na razão dada. Logo, o logar geometrico procurado é a circumferencia descripta sobre DD' como diametro.

Triangulos semelhantes

Chamam-se TRIANGULOS SEMELHANTES, triangulos que têm os seus angulos respectivamente iguaes, e seus lados homologos proporcionaes.

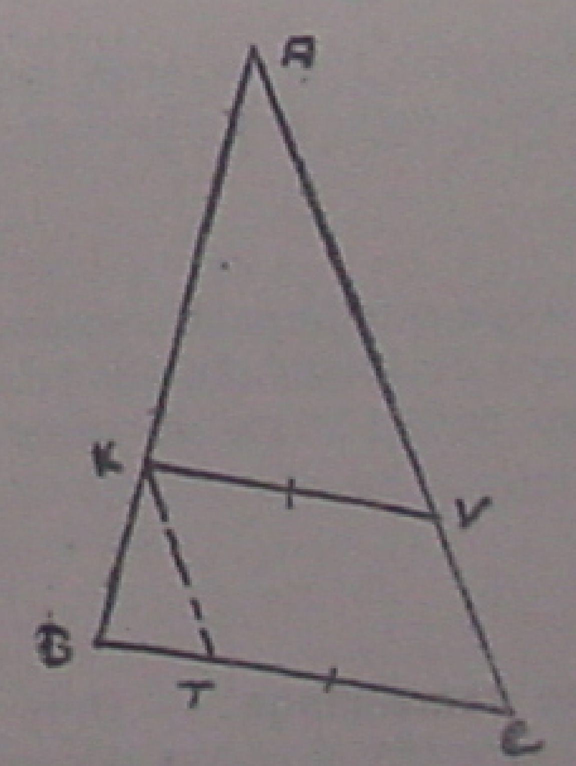
LADOS HOMOLOGOS são lados que unem vertices de angulos respectivamente iguaes.

A razão constante que existe entre os lados homologos de dois triangulos semelhantes chama-se RAZÃO DE SEMELHANÇA dos dois triangulos.

—

Theorema 64. (Lei linear de Thales). — Toda parallela a um lado de um triangulo determina um segundo triangulo semelhante ao primeiro.

Seja o triangulo ABC e a recta KV parallela ao lado BC. Quero demonstrar que o triangulo AKV é



semelhante ao triangalo dado ABC.

O angulo A é commum, os angulos em B e K são iguaes como correspondentes formados pelas parallelas BC e KV cortadas pela secante BA; d'um modo analogo os angulos C e V tambem são iguaes. Logo, os dois triangulos ABC e AKV têm os seus angulos respectivamente iguaes; basta agora demonstrar que os lados homologos são proporcionaes.
KV sendo parallela a BC, temos :

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AV}{AC} \qquad (1)$$

Pelo ponto K traço KT parallela a AC, teremos :

$$\frac{AK}{AB} = \frac{CT}{CB}$$

Mas KVCT é um parallelogrammo, logo CT=KV.
Substituindo na ultima proporção CT pelo seu igual KV, acho :

$$\frac{AK}{AB} = \frac{KV}{BC} \qquad (2)$$

Reunindo as proporções (1) e (2) que têm uma razão commum, acho

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AV}{AC} = \frac{KV}{BC}$$

logo, os dois triangulos têm os seus lados homologos proporcionaes. São, pois, semelhantes.

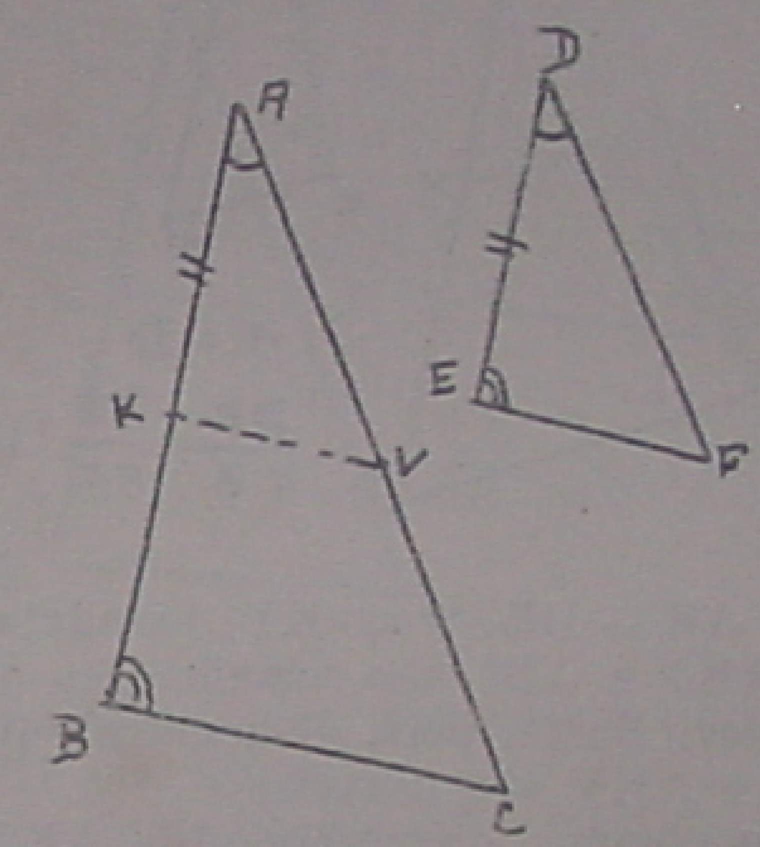
—

Baseados sobre este importantissimo theorema de Thales, e os casos de igualdade dos triangulos, vamos agora estabelecer certos casos de semelhança dos triangulos.

—

1º caso de semelhança. — Dois triangulos são semelhantes quando têm dois angulos respectivamente iguaes.

Sejam os dois triangulos ABC e DEF com os angulos A = D e B = E. Digo que são semelhantes. Tomo sobre o lado AB, a partir de A, uma distancia AK = DE e pelo ponto K traço KV parallela a BC.

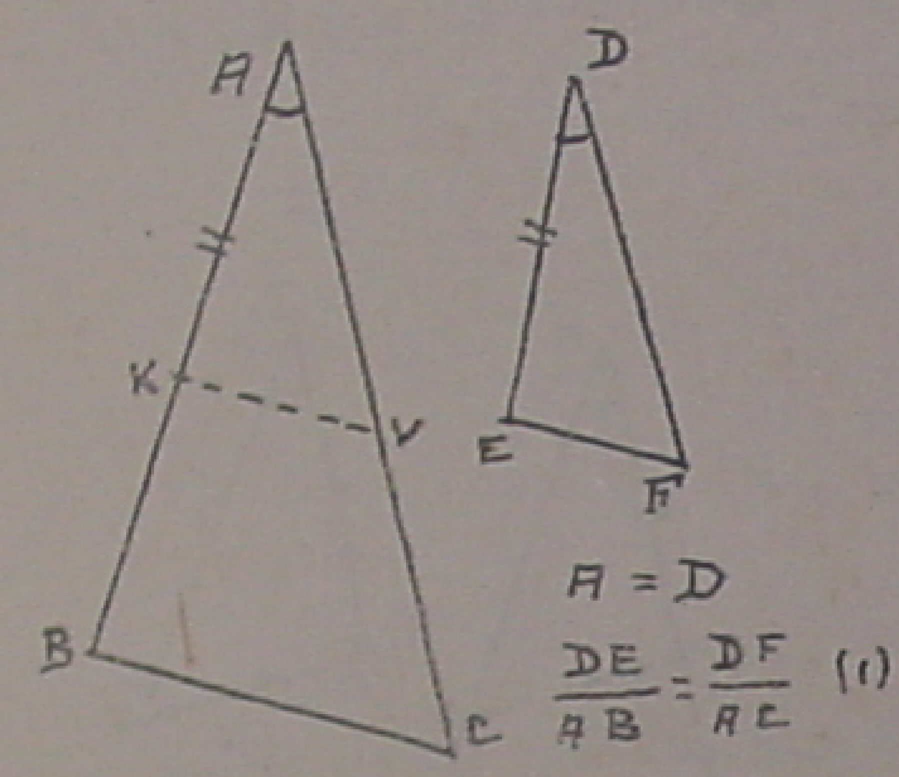


Pelo theorema de Thales os triangulos AKV e DEF são semelhantes. Basta, pois, provar que os triangulos AKV e DEF são iguaes; porque si DEF fôr igual a AKV, AKV sendo semelhante a ABC, DEF tambem o será.

Os angulos B e K são iguaes como correspondentes. B sendo igual a E por hypothese, E será igual a K. Logo os dois triangulos DEF e AKV têm os angulos A = D, K = E e o lado DE = AK, são iguaes pelo primeiro caso d'igualdade. Os triangulos DEF e ABC são, pois, semelhantes.

—

2º caso de semelhança. — Dois triangulos são semelhantes quando têm um angulo igual comprehendido entre lados homologos proporcionaes.



Tomo AK = DE, traço KV parallela a BC. Os triangulos AKV e ABC são semelhantes pelo theorema de Thales. Basta, pois, demonstrar que os triangulos DEF e AKV são iguaes.

Da semelhança dos triangulos AKV e ABC, tiramos:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AV}{AC} \qquad (2)$$

Comparando as duas proporções (1) e (2) e notando que os numeradores das duas primeiras razões DE e AK são iguaes, por construcção, e que os denominadores são identicos, deduzimos que as duas segundas razões, respectivamente iguaes ás duas primeiras, são iguaes, logo,

$$\frac{DF}{AC} = \frac{AV}{AC}$$

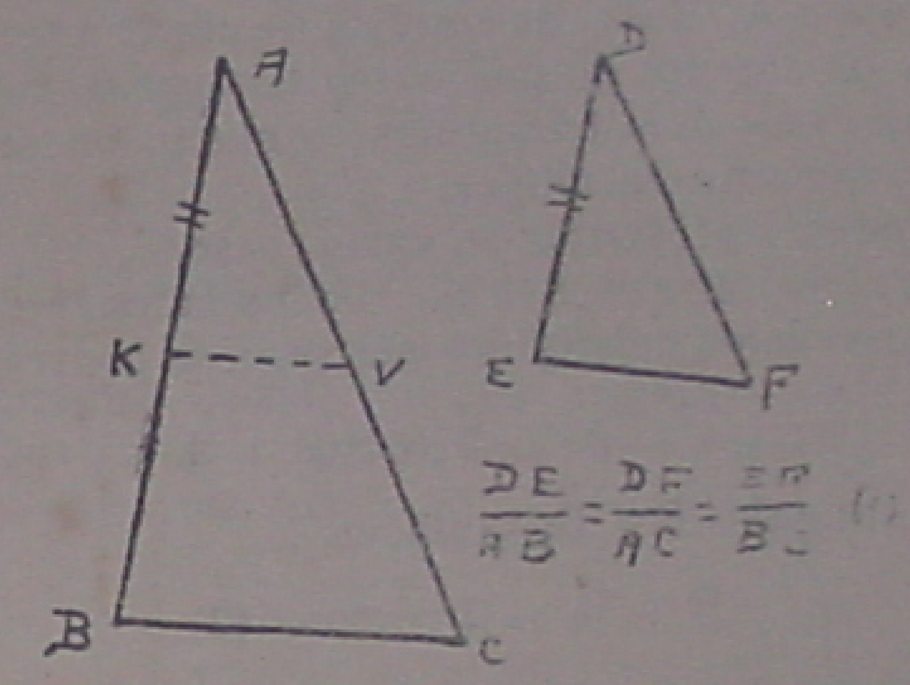
O que só é possivel quando DF fôr igual a AV.

Logo, os dois triangulos AKV e DEF têm o angulo A = ao angulo D, o lado AK = ao lado DE por construcção, e finalmente o lado AV = ao lado DF. São iguaes pelo segundo caso d'igualdade.

Os triangulos ABC e DEF são, pois, semelhantes.

3° caso de semelhança — Dois triangulos são semelhantes quando tem os seus lados homologos proporcionaes.

Tomo AK = DE, e traço KV parallela a BC. Pelo theorema de Thales, os triangulos ABC e AKV são



semelhantes, basta, pois, demonstrar que os triangulos AKV e DEF são iguaes.

Os triangulos semelhantes AKV e ABC, dão

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AV}{AC} = \frac{KV}{BC} \qquad (2)$$

Comparando as series de razões iguaes (1) e (2), notamos que as duas primeiras são iguaes: AK = DE por construcção e os denominadores são identicos; logo as duas segundas razões das series (1) e (2), respectivamente iguaes ás duas primeiras, serão iguaes; e como os denominadores são identicos, é indispensavel que os numeradores AV e DF sejam iguaes. Logo

$$AV = DF$$

As duas terceiras razões das series (1) e (2), respectivamente iguaes ás duas segundas, tambem são iguaes, e como os denominadores são identicos, os numeradores serão forçosamente iguaes e

$$KV = EF$$

Logo, os dois triangulos AKV e DEF tem os seus tres lados respectivamente iguaes; são iguaes, pelo terceiro caso d'igualdade.

Os triangulo ABC e DEF são pois, semelhantes.

4° caso de semelhança. — Dois triangulos são semelhanees quando tem os seus lados respectivamente parallelos (ou perpendiculares) e dirigidos no mesmo sentido.

Sejam A, B e C os angulos de um triangulo, e A_1, B_1 e C_1 os angulos de um outro triangulo. Supponhamos que esses dois triangulos tenham os seus lados respectivamente parallelos.

Podem apresentar-se varios casos.

1.° Os angulos A e A_1 têm os lados respectivamente parallelos e dirigidos em sentido contrario.

$$A + A_1 = 2 \text{ rectos} \quad (1)$$

Os angulos B e B_1 tambem

$$B + B_1 = 2 \text{ rectos} \quad (2)$$

Os angulos C e C_1 tambem

$$C + C_1 = 2 \text{ rectos} \quad (3)$$

Sommando (1), (2) e (3), achamos que

$$A + A_1 + B + B_1 + C + C_1 = 6 \text{ rectos}.$$

O que é impossivel, pois, já foi demonstrado que a somma dos angulos de um triangulo vale 2 rectos.

Tendo aqui dois triangulos, deveriamos achar 4 rectos e não 6. Essa hypothese é, pois, impossivel.

2.° Vamos agora suppôr A e A_1 com os lodos respectivamente parallelos e dirigidos em sentido contrario,

$$A + A_1 = 2 \text{ rectos}$$

B e B_1 tambem, logo

$$B + B_1 = 2 \text{ rectos}$$

porém, vamos agora suppôr que C e C_1 tenham os seus lados respectivamente parallelos e dirigidos no mesmo sentido. Achamos, addicionando

$$A + A_1 + B + B_1 + C = 4 \text{ rectos} + C_1$$

A somma dos angulos dos dois triangulos ainda é

aqui superior a 4 rectos, logo essa hypothese tembem é impossivel.

3.° — Os angulos A, B e C têm os seus lados respectivamente parallelo aos lados dos angulos A_1, B_1 e C_1 e são dirigidos no mesmo sentido.

$$\left.\begin{array}{l} B = A_1 \\ A = B_1 \\ C = C_1 \end{array}\right\}$$

$$2 \text{ rectos} = 2 \text{ rectos}.$$

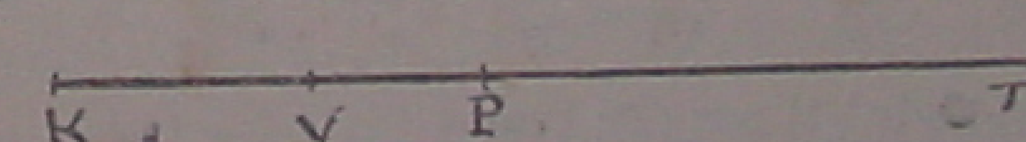
Agora a somma dos angulos dos dois triangulos perfaz 4 rectos. E' a unica hypothese possivel.

E' preciso, pois, que os angulos considerados tenham seus lados respectivamente parallelos e DIRIGIDOS NO MESMO SENTIDO.

Demonstrar-se-hia d'um modo analogo que dois triangulos são semelhantes quando têm seus lados respectivamente PERPENDICULARES E DIRIGIDOS NO MESMO SENTIDO.

RAZÃO ANHARMONICA

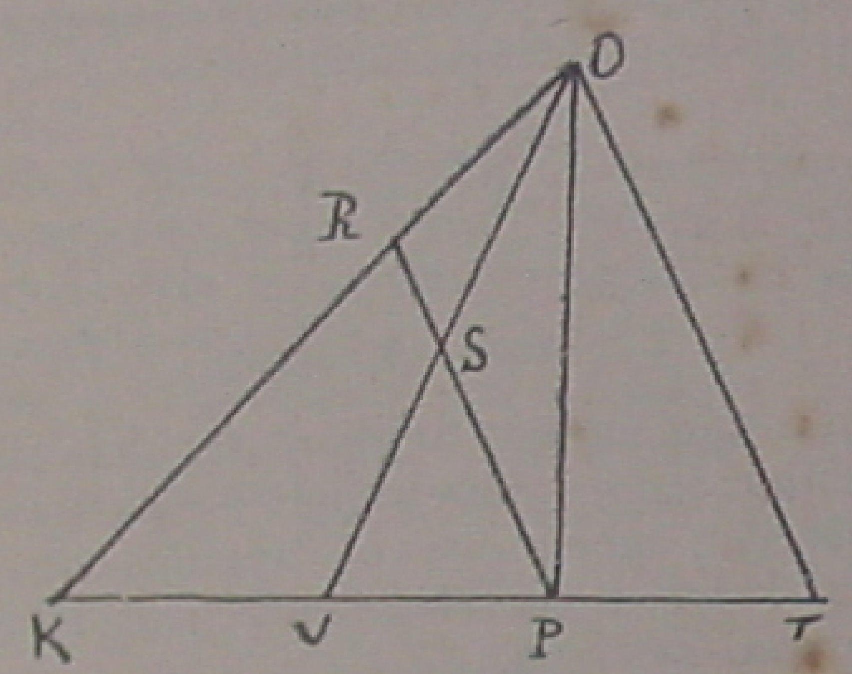
RAZÃO ANHARMONICA entre quatro pontos K, V, P, T, em linha recta é o quociente obtido dividindo a razão das distancias do primeiro ponto aos dois ultimos, pela razão das distancias do segundo ponto aos dois ultimos.



A razão anharmonica representa-se habitualmente do modo seguinte:

$$(KVPT) = \frac{KP}{KT} : \frac{VP}{VT}$$

Problema I. — Determinar a razão de duas linhas que seja igual á razão anharmonica de quatro pontos dados K, V, P, T.



Os quatro pontos K, V, P, T, estando em razão anharmonica, temos:

$$(KVTP) = \frac{KV}{KT} : \frac{VP}{VT}$$

Tomemos um ponto O, exterior, e tracemos

OK, OV, OP e OT.

Tracemos PS parallela a OT.

Os triangulos KPR e KTO são semelhantes e dão

$$\frac{KP}{KT} = \frac{PR}{TO} \qquad (1)$$

Os triangulos VPS e VTO são semelhantes, e dão

$$\frac{VP}{VT} = \frac{PS}{TO} \qquad (2)$$

Dividindo (1) por (2), temos

$$\frac{KP}{KT} : \frac{VP}{VT} = \frac{PR}{TO} : \frac{PS}{TO} = \frac{PR}{PS}$$

logo

$$(KVPT) = \frac{PR}{PS}$$

Problema II. — Conhecendo tres pontos d'uma razão anharmonica, determinar o quarto ponto. **(figura precedente)**.

Sejam K, V e P os pontos dados d'um razão anharmonica $\frac{m}{n}$.

Pelo ponto P, traço uma recta qualquer, e marco os pontos R e S, taes que

$$\frac{RP}{SP} = \frac{m}{n}$$

Uno AR e AS, e prolongo até encontrarem-se em O, traço OT, parallela a RP. O ponto T é o ponto procurado.

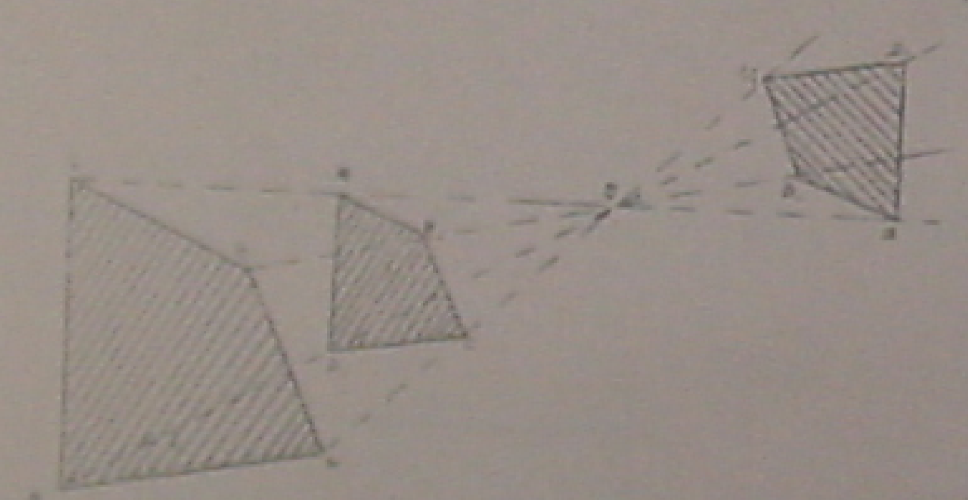
$$(KVPT) = \frac{KP}{KT} : \frac{VP}{VT} = \frac{RP}{SP} = \frac{m}{n}$$

Figuras homotheticas

Unindo um ponto O qualquer tomado no plano d'um polygono ABCD aos vertices d'este polygono e tomando sobre as rectas assim obtidas ou sobre seus prolongamentos pontos A_1, B_1, C_1, D_1, taes que

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} = K$$

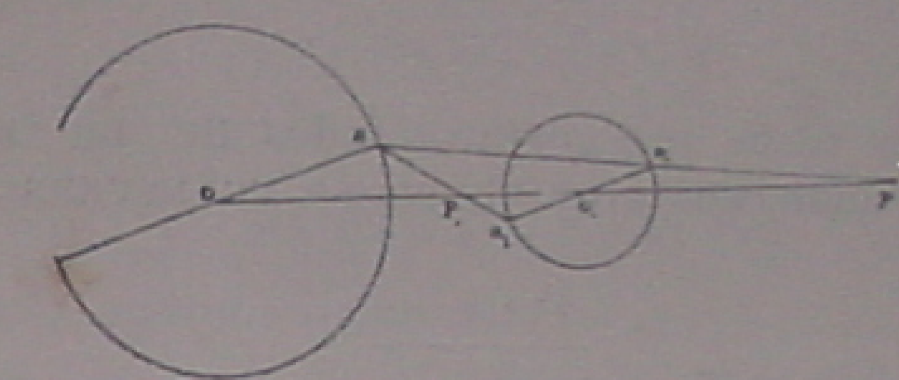
K sendo um numero dado, o polygono $A_1B_1C_1D_1$, formado unindo estes pontos entre si, é semelhante ao polygono ABCD.



Os polygonos ABCD e $A_1B_1C_1D_1$ são chamados HOMOTHETICOS DIRECTOS quando ESTÃO situados do mesmo lado do ponto O, e HOMOTHETICOS INVERSOS quando NÃO ESTÃO situados do mesmo lado do ponto O.

Dois polygonos homotheticos inversos podem ser transformados em homotheticos directos por meio de uma rotação de 180° em torno do ponto O, chamado CENTRO DE HOMOTHETIA.

Em duas circumferencias, as rectas que unem as extremidades de raios parallelos e de MESMO SENTIDO passam por um ponto fixo P, chamado CENTRO DE SEMELHANÇA DIRECTA ou CENTRO EXTERIOR DE SEMELHANÇA.



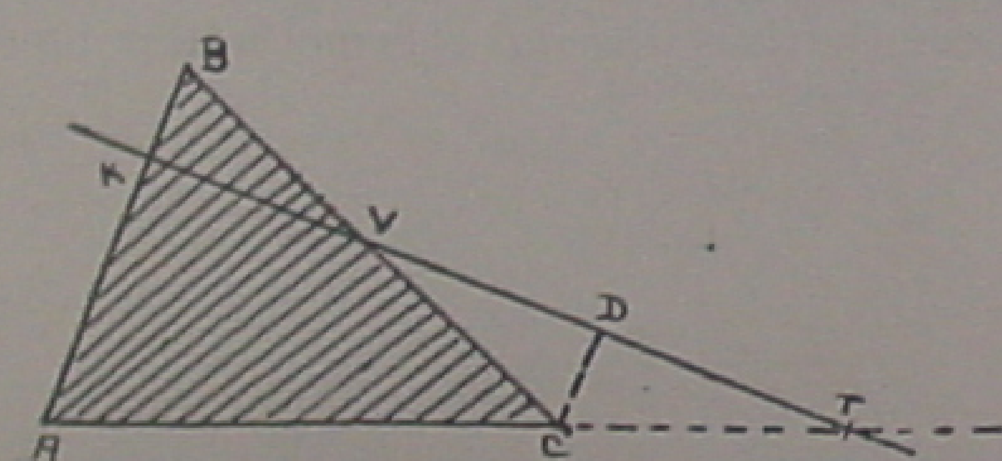
As rectas que unem as extremidades de dois RAIOS PARALLELOS e de SENTIDO CONTRARIO passam por um ponto fixo P_1, chamado CENTRO DE SEMELHANÇA INVERSA ou CENTRO INTERIOR DE SEMELHANÇA. Os pontos P e P_1 são centros de homothetia.

As circumferencias O e O_1 são figuras ao mesmo tempo homotheticas directas e homotheticas inversas.

Noções sobre transversaes

Toda recta que corta os lados de um triangulo ou seus prolongamentos chama-se TRANSVERSAL.

Theorema 65. (de Menelaus) — Quando uma secante corta os lados de um triangulo ou seus respectivos prolongamentos, ella determina seis segmentos taes que o producto de tres d'elles não consecutivos é igual ao producto dos tres outros.



Seja o triangulo ABC e a secante KVT. Traço CD parallela a AB.

Os triangulos AKT e CDT, dão

$$\frac{AK}{CD} = \frac{AT}{TC} \text{ ou } AK \cdot CT = TA \cdot CD \qquad (1)$$

Os triangulos BKV e CVD, dão

$$\frac{KB}{DC} = \frac{BV}{VC} \text{ ou } KB \cdot VC = BV \cdot DC \qquad (2)$$

Dividindo as igualdades (1) e (2) membro a membro, achamos:

$$\frac{AK \cdot CT}{KB \cdot VC} = \frac{TA \cdot DC}{BV \cdot DC}$$

ou

$$\frac{AK \cdot CT}{KB \cdot VC} = \frac{TA}{BV}$$

ou

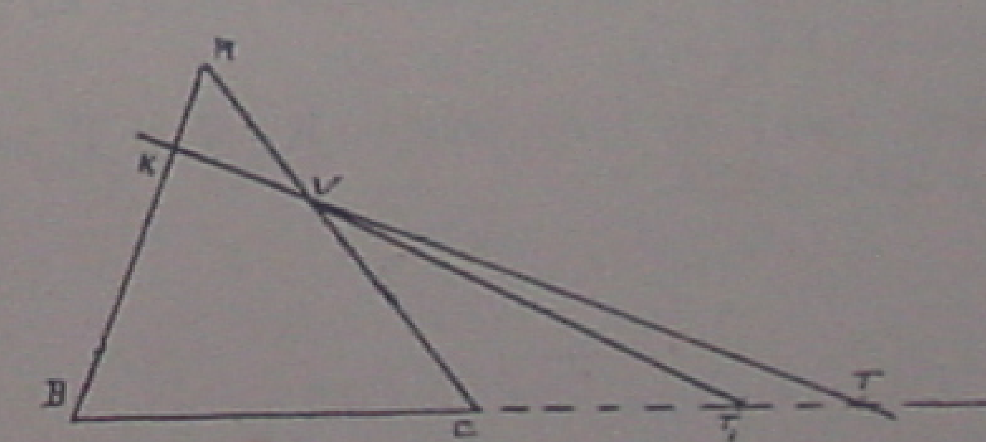
$$AK \cdot CT \cdot BV = KB \cdot VC \cdot TA$$

O que queriamos demonstrar.

E', ás vezes, commodo considerar esta ultima relação sob a forma seguinte:

$$\frac{AK \cdot CT \cdot BV}{KB \cdot VC \cdot TA} = 1$$

Reciprocamente — Quando, sobre os tres lados de um triangulo (ou seus respectivos prolongamentos), ha tres pontos determinando seis segmentos taes que o producto de tres d'elles não consecutivos seja igual ao producto dos tres outros, os tres pontos se acham na mesma linha recta.



Seja o triangulo ABC e os tres pontos K, V e T taes que

$$BK \cdot AV \cdot CT = KA \cdot VC \cdot TB \qquad (1)$$

Suppondo que o ponto T não estivesse no prolongamento de KV, e que KV prolongada encontrasse BC prolongada em T_1, teriamos, pelo theorema de Menelaus:

$$BK \cdot AV \cdot CT_1 = KA \cdot VC \cdot T_1B \qquad (2)$$

Dividindo membro a membro as relações (1) e (2), temos:

$$\frac{BK \cdot AV \cdot CT_1}{BK \cdot AV \cdot CT} = \frac{KA \cdot VC \cdot T_1B}{KA \cdot VC \cdot TB}$$

ou, simplificando

$$\frac{CT_1}{CT} = \frac{T_1B}{TB}$$

ou

$$\frac{CT_1}{T_1B} = \frac{CT}{TB}$$

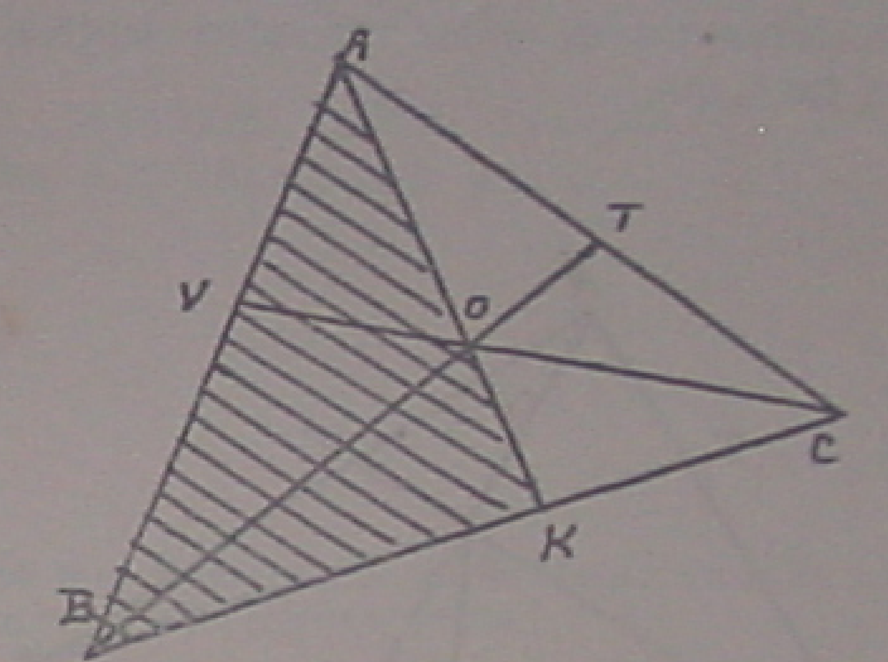
por ahi vemos que o ponto T_1 divide BC na mesma razão do que o ponto T, o que só póde acontecer quando T_1 coincide com T.

Por construcção K, V e T_1 estão em linha recta; T coincidindo com T_1, tambem estará no prolongamento de KV.

Assim, pois, os tres pontos K, V e T estão na mesma linha recta.

Theorema 66. (de Ceva) — Si, de um ponto tomado no interior de um triangulo, traçarmos rectas que o unam aos vertices e sejam prolongadas até aos lados oppostos, estas rectas determinarão sobre os

lados do triangulo seis segmentos taes que o producto de tres d'elles não consecutivos é igual ao producto dos tres outros.



Considerando o triangulo ABK cortado pela transversal CV, temos:

$$BV \cdot AO \cdot KC = VA \cdot OK \cdot CB \qquad (1)$$

Considerando o triangulo AKC cortado pela transversal BT, temos:

$$OA \cdot TC \cdot BK = KO \cdot AT \cdot CB \qquad (2)$$

Dividindo (1) e (2) membro a membro, temos:

$$\frac{BV \cdot AO \cdot KC}{OA \cdot TC \cdot BK} = \frac{VA \cdot OK \cdot CB}{KO \cdot AT \cdot CB}$$

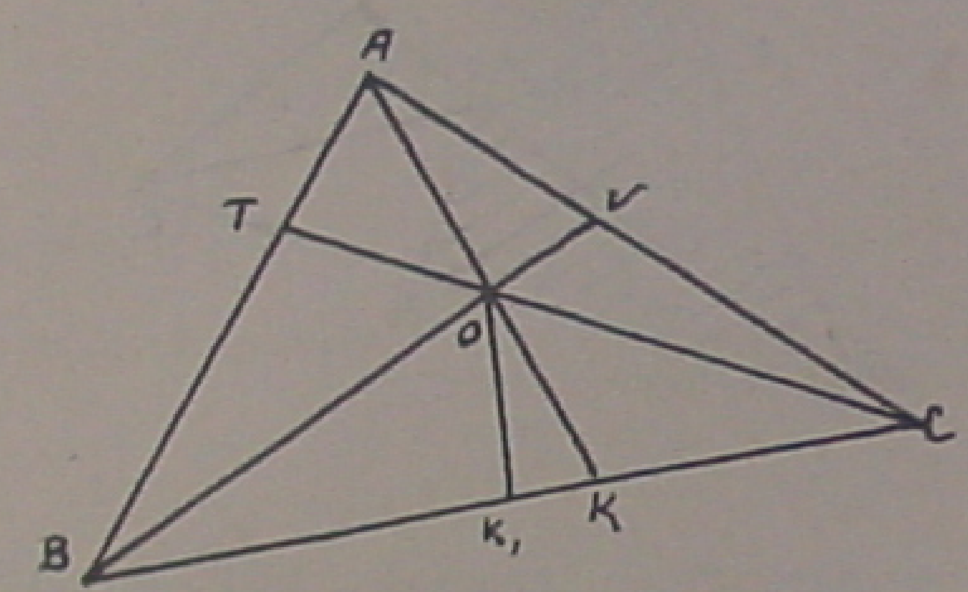
ou, simplificando:

$$\frac{BV \cdot KC}{TC \cdot BC} = \frac{VA}{AT}$$

$$\text{ou } BV \cdot KC \cdot AT = VA \cdot TC \cdot BK$$

Reciprocamente — Si, tres rectas, partindo respectivamente de cada vertice de um triangulo, determinam sobre os lados oppostos seis segmentos taes que o producto de tres d'elles não consecutivos seja igual ao producto dos tres outros, as tres rectas passam por um mesmo ponto.

Seja o triangulo ABC e tres rectas AK, BV e CT que determinam sobre os lados oppostos seis segmentos taes que



$$BT\cdot AV\cdot CK = TA\cdot VC\cdot KB \qquad (1)$$

quero demonstrar que estas tres rectas passam por um ponto O commum.

Duas d'ellas, BV e CT, por exemplo, cortam-se no ponto O; basta, pois, demonstrar que a terceira tambem passa pelo ponto O.

Para isso, vamos suppôr que o prolongamento de AO cortasse BC em K_1. Pelo theorema de Ceva, temos:

$$BT\cdot AV\cdot CK_1 = TA\cdot VC\cdot K_1B \qquad (2)$$

Dividindo (1) e (2) membro a membro, achamos:

$$\frac{BT\cdot AV\cdot CK}{BT\cdot AV\cdot CK_1} = \frac{TA\cdot VC\cdot KB}{TA\cdot VC\cdot K_1B}$$

ou $\quad \dfrac{CK}{CK_1} = \dfrac{KB}{K_1B} \quad$ ou $\quad \dfrac{CK}{KB} = \dfrac{CK_1}{K_1B}$

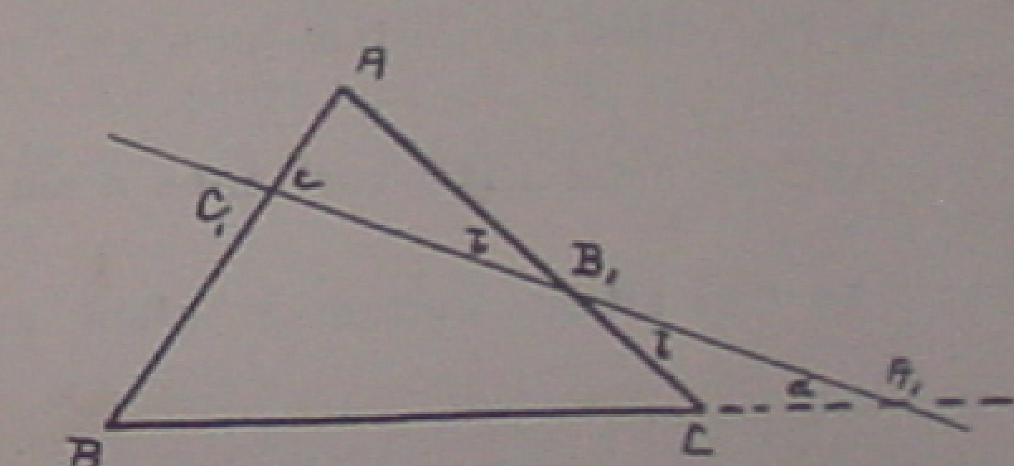
O que nos mostra que o ponto K e o ponto K_1 dividem BC na mesma razão; o que é impossivel, pois,

que, entre as extremidades B e C de uma recta limitada ha um ponto e só UM que divide esta recta n'uma razão dada.

Concluimos, pois, que o ponto K_1, que se acha no prolongamento de AO, coincide com o ponto K.

Logo, as tres rectas consideradas BV, CT e AK passam por um mesmo ponto.

Talvez seja interessante dar a demonstração do theorema de Menelaus pela trigonometria.



Consideremos os triangulos AB_1C_1, A_1BC_1 e A_1B_1C: no primeiro

$$\frac{AB_1}{C_1A} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } b}$$

no segundo

$$\frac{BC_1}{A_1B} = \frac{\text{sen } a}{\text{sen } c}$$

no terceiro

$$\frac{CA_1}{B_1C} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}$$

Multiplicando membro a membro estas tres ultimas relações, achamos:

$$\frac{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1}{C_1A \cdot B_1C \cdot A_1B} = \frac{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a} = 1$$

logo

$$AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1 = C_1A \cdot B_1C \cdot A_1B$$

Como consequencias importantissimas dos theoremas de Menelaus e de Ceva demonstraremos que em todo triangulo:

I. — As tres medianas cortam-se n'um mesmo ponto.

II. — As tres bissectrizes cortam-se n'um mesmo ponto.

III. — As tres alturas cortam-se n'um mesmo ponto.

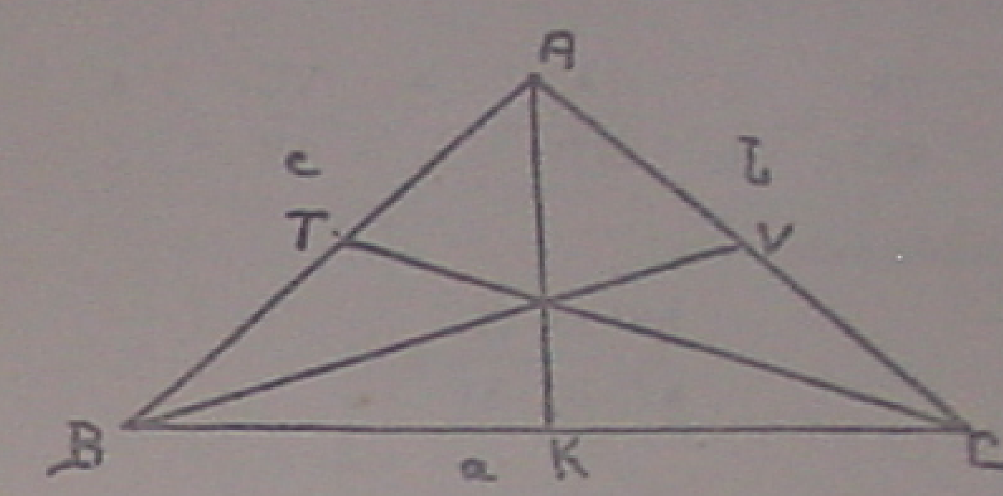
I — As tres medianas de um triangulo cortam-se n'um mesmo ponto.

Seja o triangulo ABC e as medianas AK, BV e CT.

Já sabemos que

$$\frac{BT}{TA} = 1, \quad \frac{AV}{VC} = 1, \quad \frac{CK}{KB} = 1$$

Multiplicando estas igualdades membro a membro, achamos



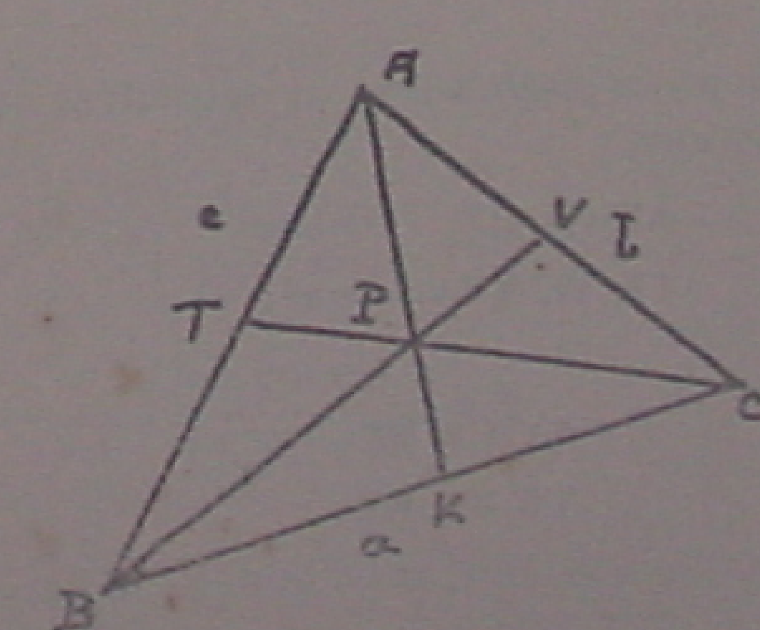
$$\frac{BT \cdot AV \cdot CK}{TA \cdot VC \cdot KB} = 1$$

ou

$$BT \cdot AV \cdot CK = TA \cdot VC \cdot KB$$

O que nos prova que as tres medianas d'um triangulo se cortam n'um mesmo ponto.

II. — As tres bissectrizes de um triangulo cortam-se n'um mesmo ponto.



Seja o triangulo ABC e as bissectrizes AK, BV e CT.

Sabemos que

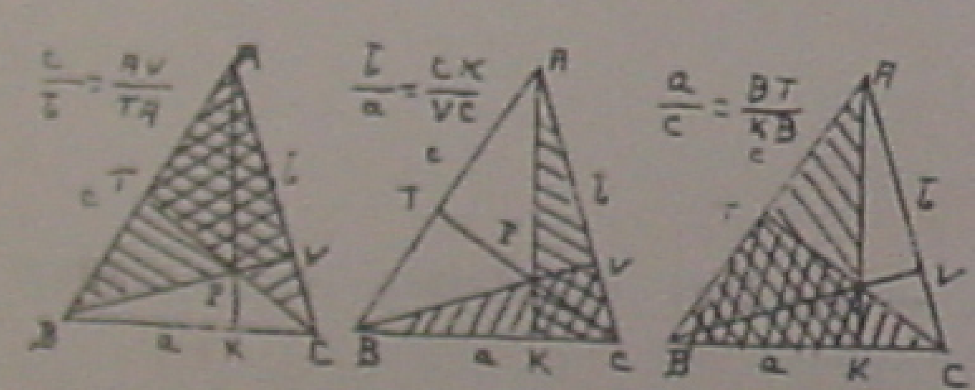
$$\frac{BK}{KC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{TA}{BT} = \frac{b}{a}, \quad \frac{VC}{AV} = \frac{a}{c}$$

logo; multiplicando, vem :

$$\frac{BK \cdot TA \cdot VC}{KC \cdot BT \cdot AV} = 1$$

III. — As tres alturas de um triangulo cortam-se n'um mesmo ponto.

Para melhor comprehensão faremos tres figuras.



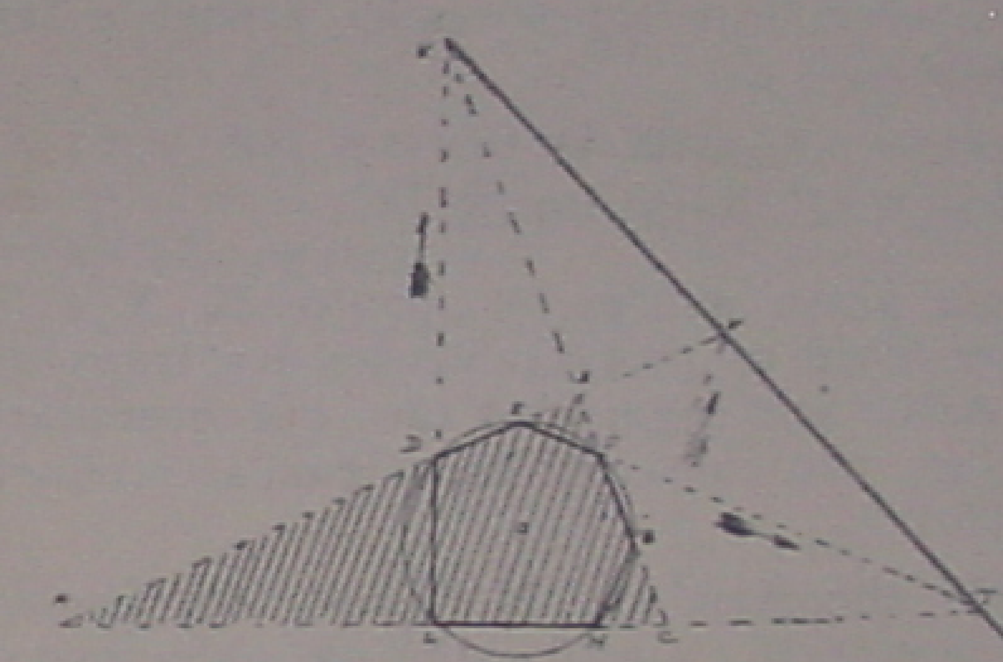
Multiplicando estas tres igualdades, membro a membro, achamos :

$$\frac{AV \cdot CK \cdot BT}{TA \cdot VC \cdot KB} = \frac{c \cdot b \cdot a}{b \cdot a \cdot c} = 1$$

logo

$$\frac{AV \cdot CK \cdot BT}{TA \cdot VC \cdot KB} = 1$$

Theorema 67. (**de Pascal.**) — Seja um hexagono inscripto n'um circulo : prolongando os lados oppostos, determinamos tres pontos : estes tres pontos estão na mesma linha recta.



Considerando o triangulo formado por tres lados do polygono, não consecutivos, e prolongados, por exemplo, o triangulo ABC, notamos que os outros tres lados do polygono são transversaes do triangulo considerado.

Applicando o theorema de Menelaus para cada uma d'estas transversaes, temos :

$$\frac{AD \cdot BK \cdot CL}{DB \cdot KC \cdot LA} = 1$$

$$\frac{AV \cdot BG \cdot CH}{VB \cdot GC \cdot HA} = 1$$

$$\frac{AE \cdot BF \cdot CT}{EB \cdot FC \cdot TA} = 1$$

Multiplicando estas tres igualdades membro a membro, achamos :

$$\frac{AD\cdot BK\cdot CL\cdot AV\cdot BG\cdot CH\cdot AE\cdot BF\cdot CT}{DB\cdot KC\cdot LA\cdot VB\cdot GC\cdot HA\cdot EB\cdot FC\cdot TA} = 1$$

Notando que

$$AD\cdot AE = AL\cdot AH$$
$$BE\cdot BD = BF\cdot BG$$
$$CG\cdot CF = CH\cdot CL$$

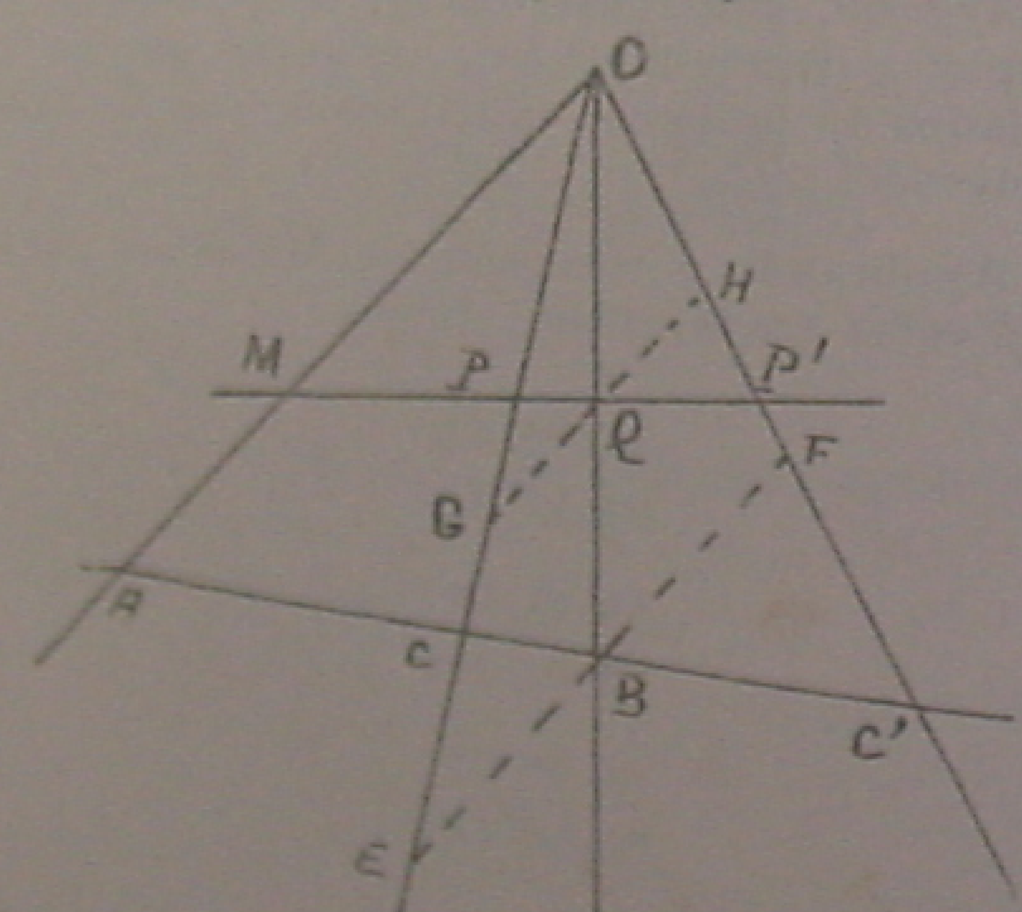
podemos simplifiicar a espres ão acima, e teremos finalmente

$$\frac{BK\cdot AV\cdot CT}{KC\cdot VB\cdot TA} = 1$$

O que nos prova que os tres pontos K, V e T determinam sobre os prolongamentos dos lados do triangulo ABC, seis segmentos taes que o producto de tres d'elles, não consecutivos, é igual ao producto dos tres outros.

Pelo theorema de Menelaus, concluimos que os tres pontos K, V e T estão em linha recta.

Theorema. 68 — Se cortarmos um feixe harmonico OACBC' por uma secante qualquer MP', esta será dividida harmonicamente nos pontos M, P, Q, P', de encontro com as rectas que compõem o feixe.



Pelos pontos B e Q, tracemos EF e GH, parallelas

a OA. Os triangulos semelhantes ACO e ECB nos dão:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{OA}{BE}$$

e os triangulos semelhantes AC'O e FC'B dão:

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{OA}{BF}$$

A recta AB estando dividida harmonicamente nos pontos C e C', as primeiras razões d'essas duas proporções são eguaes, e

$$BE = BF$$

logo, tambem

$$GQ = HQ$$

Ora, os triangulos MPO e GPQ, e os triangulos MP'O e HQP', nós dão:

$$\frac{MP}{PQ} = \frac{OM}{GQ}$$

$$\frac{MP'}{QP'} = \frac{OM}{HQ}$$

e como

$$GQ = HQ$$

temos

$$\frac{MP}{PQ} = \frac{MP'}{QP'}$$

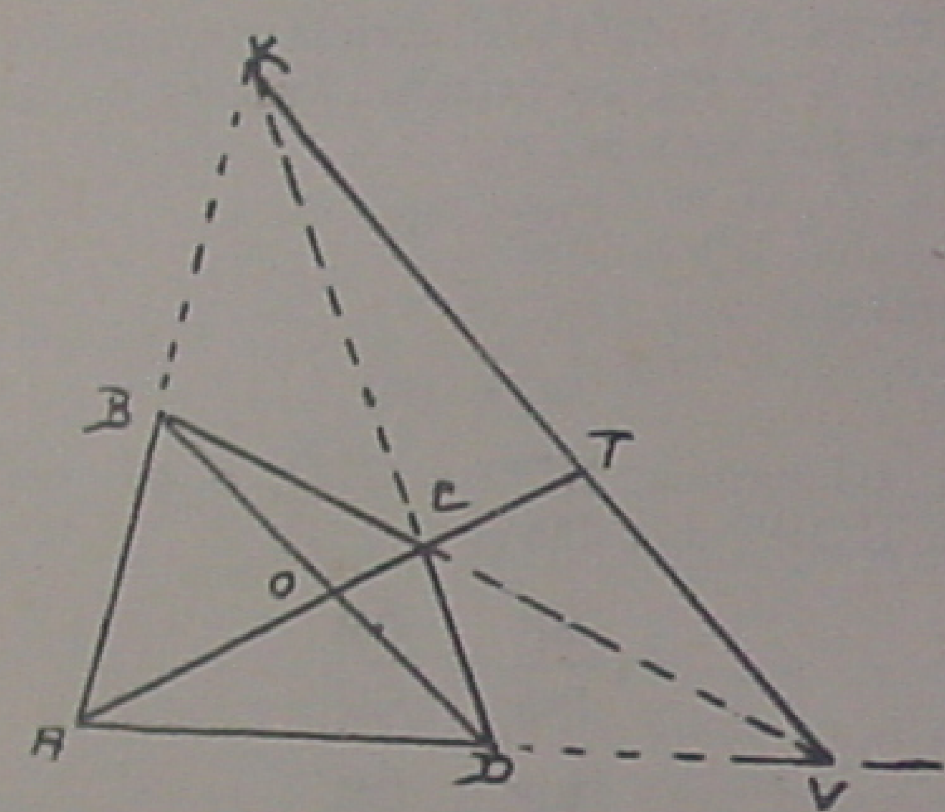
A recta MP' é, pois, dividida harmonicamente nos pontos onde ella encontra as rectas do feixe.

NOTA: Uma parallela a uma qualquer das quatro rectas formando um feixe harmonico é dividida pelas tres outras em partes iguaes.

Pois, acabamos de vêr que o ponto B está no meio da recta EF parallela a OA.

Theorema 69. — Em todo QUADRILATERO COMPLETO, cada diagonal é dividida harmonicamente pela duas outras.

Seja o quadrilatero ABCD, cujas duas diagonaes são AC e DB. Prolongo os lados oppostos, formo o quadrilatero completo; traço a diagonal KV.



Do triangulo ABC, deduzimos:

$$\frac{AK \cdot BV \cdot CT}{BK \cdot VC \cdot TA} = 1 \qquad \text{(Menelaus)}$$

Do mesmo triangulo, unindo D aos tres vertices A, B e C, deduzimos:

$$\frac{BV \cdot AK \cdot OC}{VC \cdot BK \cdot OA} = 1 \qquad \text{(Ceva)}$$

logo

$$\frac{AK \cdot BV \cdot CT}{BK \cdot VC \cdot TA} = \frac{BV \cdot AK \cdot OC}{VC \cdot BK \cdot OA}$$

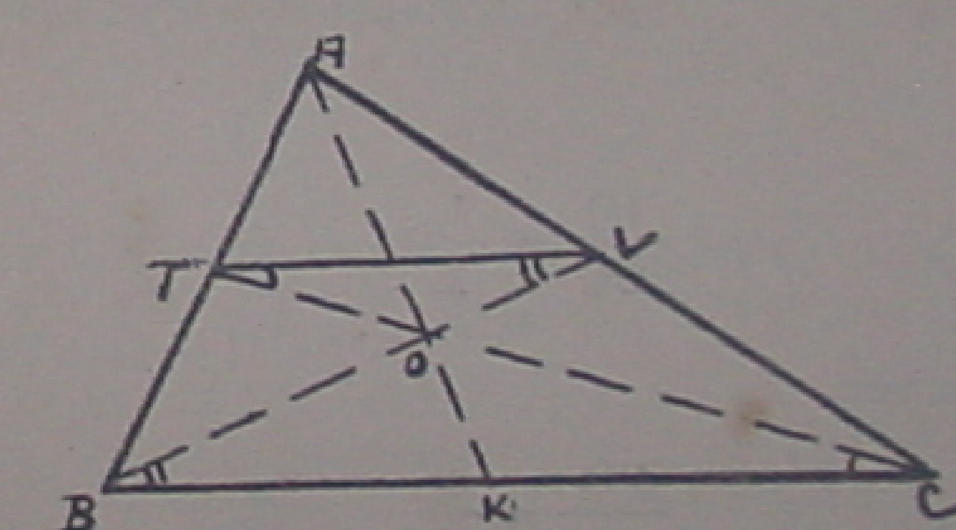
ou
$$\frac{CT}{TA} = \frac{OC}{OA}$$

e
$$CT \cdot OA = OC \cdot TA$$

Theorema 70. — As tres medianas de um triangulo cortam-se n'um mesmo ponto, que se acha ás duas terças partes de cada uma d'ellas a partir do vertice.

Já foi demonstrado, como consequencia dos theoremas de Menelaus e de Ceva, que as tres medianas se cortam n'um mesmo ponto. Resta agora demonstrar que esse ponto acha-se ás duas terças partes de cada mediana a partir do vertice.

Seja o traiangulo ABC, e as medianas AK, BV e CT.



Sabemos que
$$\frac{AT}{AB} = \frac{1}{2}$$

o que
$$\frac{AV}{AC} = \frac{1}{2}$$

logo
$$\frac{AT}{AB} = \frac{AV}{AC}$$

e TV é parallela a BC.

Pelo theorema de Thales, o triangulo ATV é semelhante a ABC.

$$\frac{AT}{AB} = \frac{AV}{AC} = \frac{TV}{BC} = \frac{1}{2}$$

$^1/_2$ sendo a razão de semelhança dos dois triangulos.

Considerando TOV e BOC, notamos que os angulos T e C são iguaes, como alternos e internos, e tambem os angulos V e B, pelo mesmo motivo; logo os triangulos TOV e BOC são semelhantes e

$$\frac{TV}{BC} = \frac{TO}{OC} = \frac{VO}{OB}$$

Mas, já vimos que

$$\frac{TV}{BC} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\frac{TO}{OC} = \frac{1}{2}$$

e tambem

$$\frac{VO}{OB} = \frac{1}{2}$$

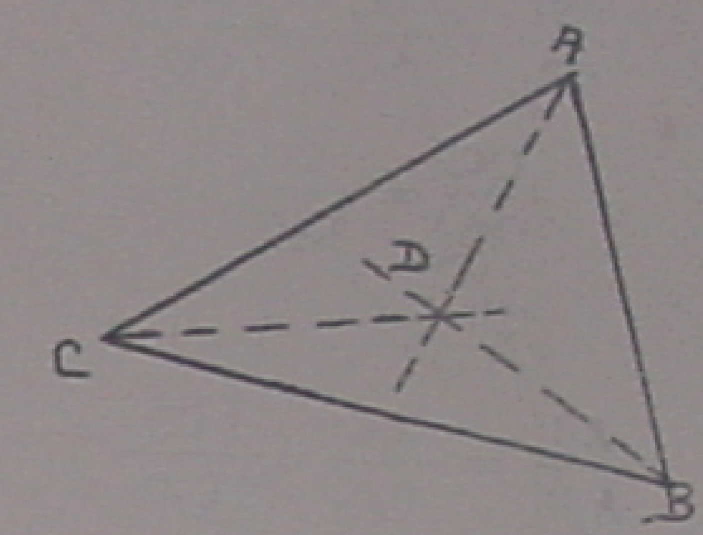
Logo, o ponto O acha-se ás duas terças partes de BV a partir do vertice B.

O ponto O acha-se ás duas terças partes de CT a partir do vertice C.

Demonstrariamos d'um mo lo analogo que o ponto O se acha ás duas terças partes de AK a partir do vertice A.

———

Nota : — Sem recorrer á theoria das transversaes, podemos demonstrar que as tres bissectrizes de um triangulo se cortam n'um mesmo ponto.

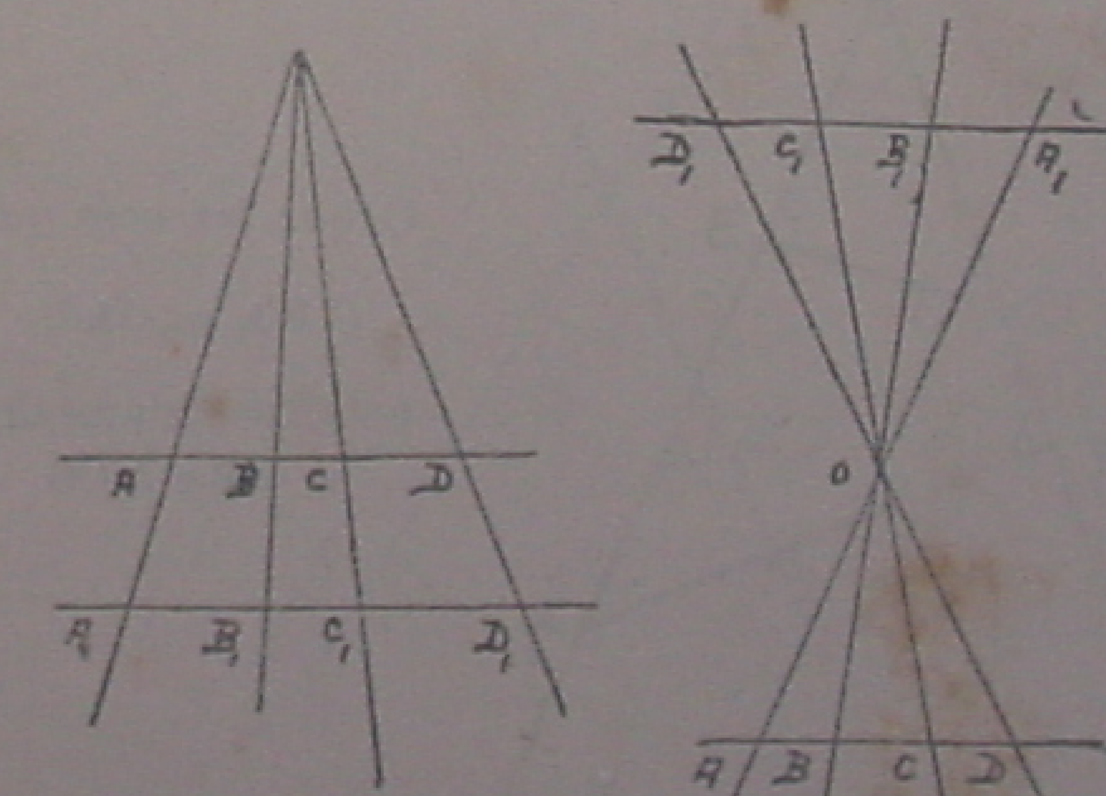


O ponto D de encontro das bissectrizes dos angulos A e B estando a igual distancia dos lados AC e BC, pertence á bissectriz do angulo C.

D'um modo analogo demonstrariamos que as tres mediatrizes cortam-se n'um mesmo ponto : o centro do circulo circumscripto ao triangulo.

———

Theorema 71. (das rectas concorrentes) — Seja o feixe de rectas concorrentes em O, cortado pelas duas parallelas AD e A_1D_1.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1}$$

$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OC}{OC_1}$$

$$\frac{OC}{OC_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

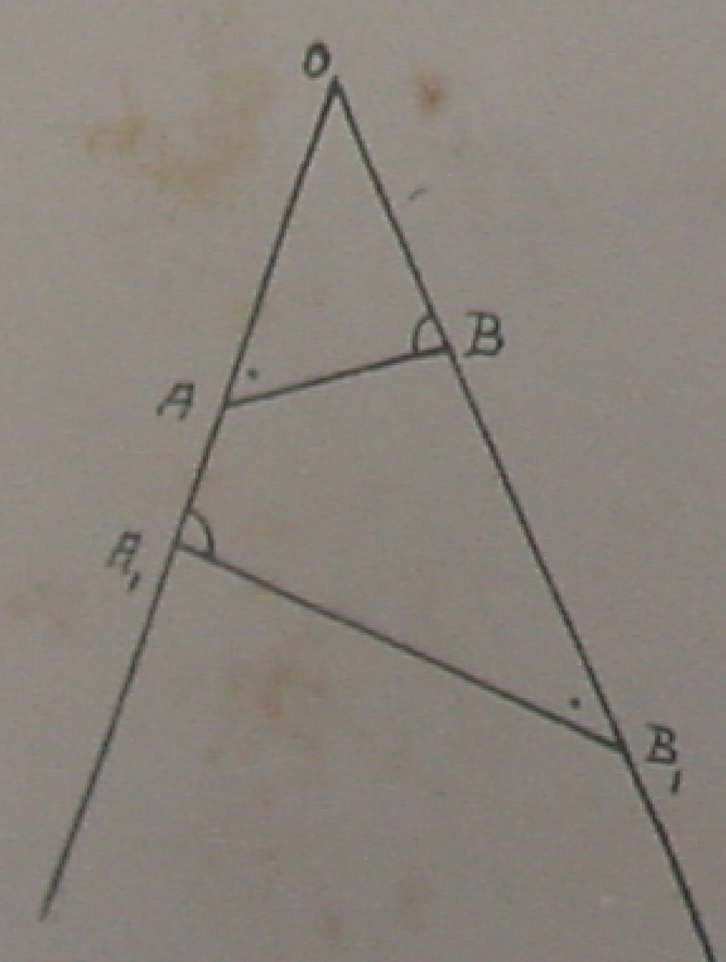
logo

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

Os segmentos determinados pelas rectas concorrentes sobre as parallelas são proporcionaes.

Anti-parallelas — Duas rectas AB e A_1B_1, comprehendidas entre os lados d'um angulo AOB, são chamadas anti-parallelas, quando o angulo formado por uma d'ellas com o primeiro lado, é igual ao angulo formado pela outra com o segundo lado.

Por exemplo : $OAB = OB_1A_1$

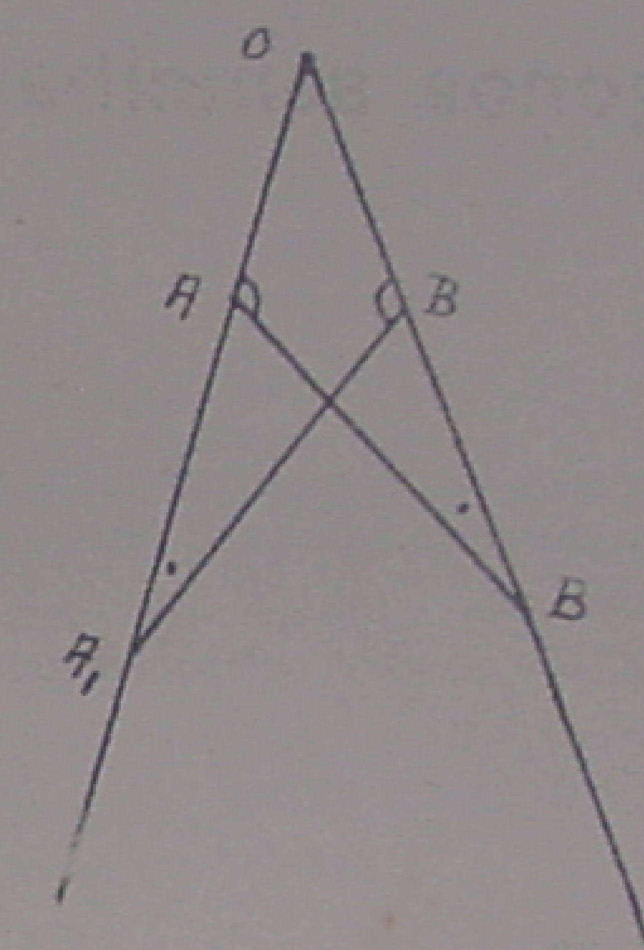


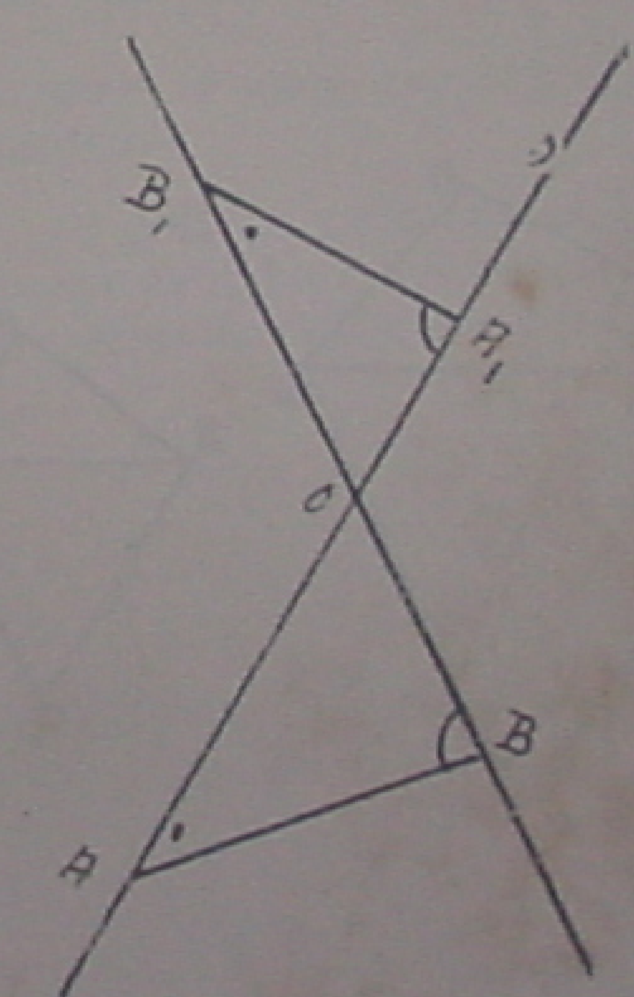
O que faz com que

$$OBA = OA_1B_1$$

pois, os triangulos AOB e A_1OB_1

são equiangulos.

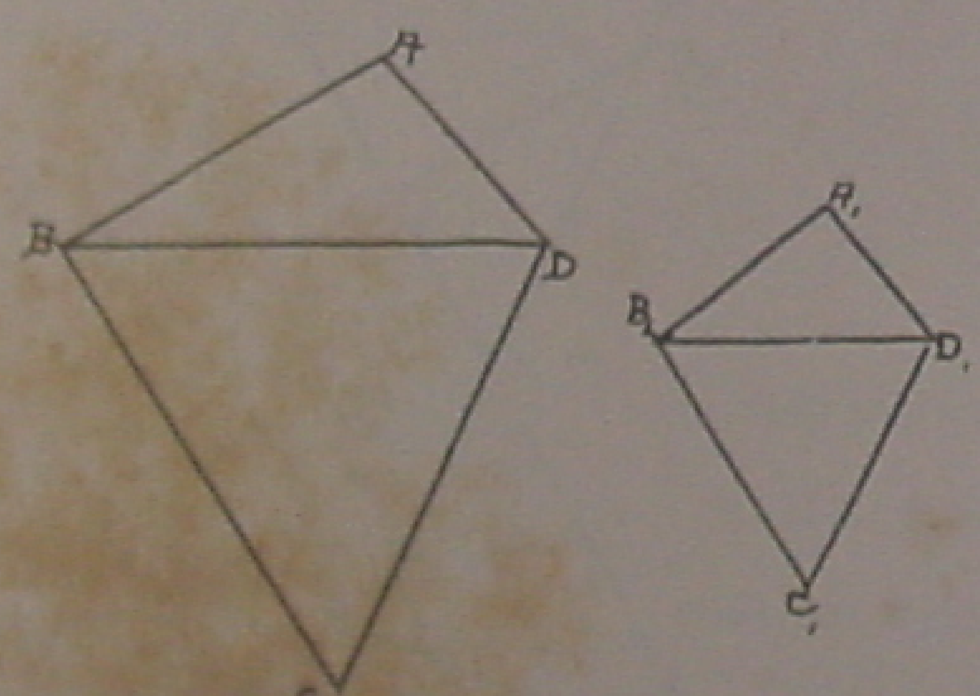




Polygonos semelhantes

Dois polygonos são semelhantes quando têm seus angulos respectivamente iguaes e seus lados homologos proporcionaes.

Theorema 72. — Dois polygonos semelhantes podem ser decompostos em um mesmo numero de triangulos semelhantes e semelhantemente dispostos.



Sejamos os dois polygonos semelhantes ABCD e $A_1B_1C_1D_1$. Já sabemos que os angulos $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$, $D=D_1$; alem d'isso, temos:

$$\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{DC}{D_1C_1} = \frac{CB}{C_1B_1} = \frac{BA}{B_1A_1}$$

Os dois polygonos sendo semelhantes, têm o mesmo numero de lados; por vertices correspondentes B e B_1, por exemplo, podemos traçar o mesmo numero de diagonaes nos dois polygonos, e por conseguinte, formar o mesmo numero de triangulos em cada um.

Os triangulos ABD e $A_1B_1D_1$ têm os vertices A e A_1 correspondentes e os lados AB, A_1B_1, AD, A_1D_1 homologos proporcionaes, logo o primeiro triangulo do primeiro polygono corresponde bem ao primeiro triangulo do segundo polygono. D'um modo analogo, proceder-se-hia com os outros triangulos.

Além d'isso, esses triangulos são respectivamente semelhantes. ABD e $A_1B_1D_1$ têm o angulo A igual ao angulo A_1 e os lados.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$$

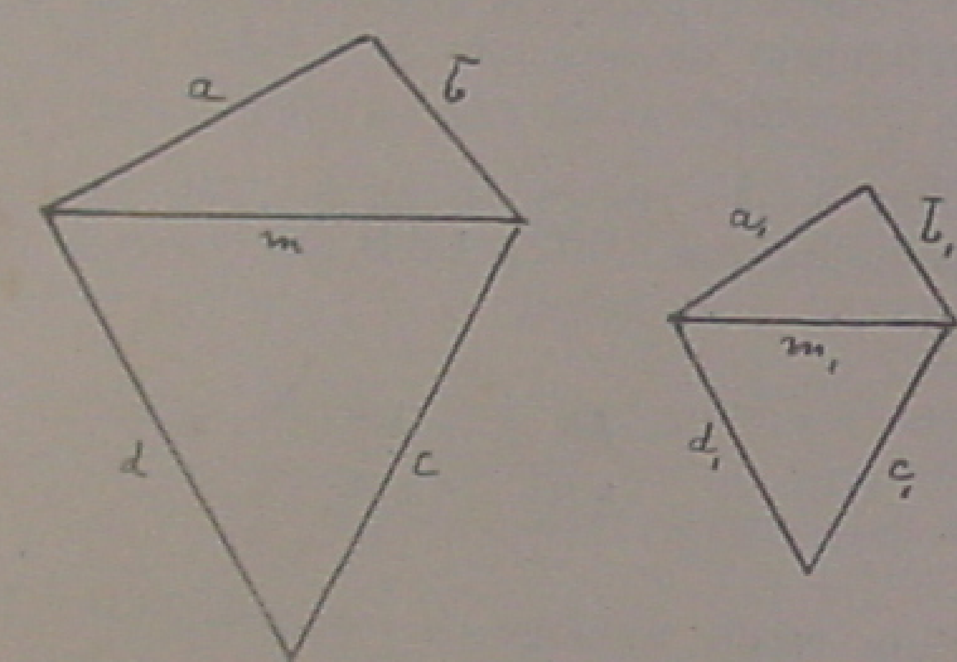
D'um modo anologo os triangulo BCD e $B_1C_1D_1$ são semelhantes.

Logo, os dois polygonos são decomponiveis no mesmo numero de triangulos, semelhantes cada um a cada um, e semelhantemente dispostos.

Deducção de C

(Rectificação da circumferencia)

Theorema 73. — Os perimetros de dois polygonos semelhantes estão entre si na mesma razão de que os seus lados homologos, ou as suas linhas homologas.



Sejam os dois polygonos acima, semelhantes, temos:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{m}{m_1}$$

Já sabemos que:

$$\frac{a + b + c + d}{a_1 + b_1 + c_1 + d_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{m}{m_1}$$

Mas, chamando o perimetro $a + b + c + d$ por p, e o perimetro $a_1 + b_1 + c_1 + d_1$ por p_1, temos:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{m}{m_1}$$

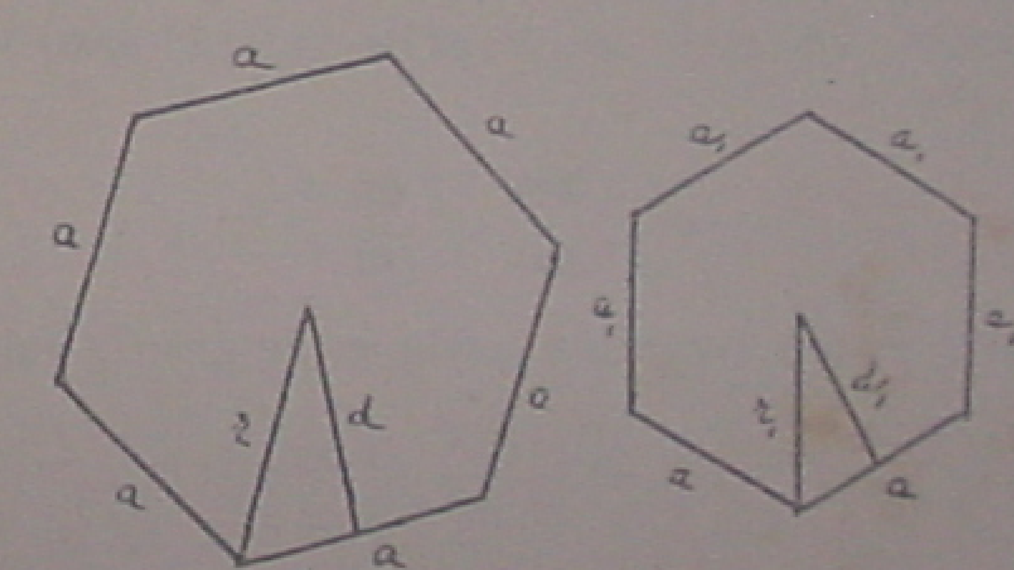
Um polygono qualquer sendo inscripto n'um circulo, si dobrarmos o numero de lados d'este polygono, porém conservando-o inscripto no mesmo circulo, o perimetro do segundo polygono será maior do que o perimetro do primeiro — Si continuarmos dobrando o numero de lados (sempre no mesmo circulo) os perimetros respectivos dos polygonos irão augmentando.

Quanto maior fôr o numero de lados do polygono inscripto, quando mais o seu perimetro approximar-se-ha da circumferencia.

Vê-se, pois, que tomando um polygono de um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos, teremos um perimetro tão approximado da circumferencia quanto quizermos.

Diz-se então que a circumferencia é o LIMITE para o qual tendem os perimetros dos polygonos inscriptos quando o numero de seus lados augmenta.

Theorema 74. — Dois polygonos regulares de um mesmo numero de lados são semelhantes.



$$\frac{p}{p_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{r}{r_1}$$

Si duplicarmos o numero de lados dos polygonos considarados, ate termos um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos, teremos no limite dois circulos C e C_1 e os apothemas d e d_1 passarão a ser os raios r e r_1 ; logo, no limite :

$$\frac{C}{C_1} = \frac{r}{r_1} \text{ ou } \frac{C}{C_1} = \frac{2r}{2r_1}$$

ou
$$\frac{C}{2r} = \frac{C_1}{2r_1}$$

Si tivessemos considerado outros polygonos semelhantes, tendo como limite circulos $C_2, C_3, \ldots$ poderiamos escrever :

$$\frac{C}{2r} = \frac{C_1}{2r_1} = \frac{C_2}{2r_2} = \frac{C_3}{2r_3} = \ldots \frac{C_n}{2r_n}$$

Esta razão constante é que chamamos π.

Logo π é a relação constante existente entre qualquer circumferencia e seu diametro,

$$\frac{C}{2r} = \pi$$

ou
$$C = 2r\pi$$

A circumferencia toda vale pois $2r\pi$.

Então, um arco de 1 grão, valerá 360 vezes menos, ou

$$1^\circ = \frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$$

e um arco de um numero n qualquer de gráos, valerá

$$n^\circ = \frac{\pi r n}{180}$$

Si tivessemos um arco contendo gráos, minutos e segundos, seria preciso, para utilisar a formula estabelecida, reduzir n a unidades da menor subdivisão, e 180° em unidades da mesma especie.

O numero π que calcularemos depois, foi determinado pela primeira vez por ARCHIMEDES que achou

$$\pi = \frac{22}{7} = 3,1428\ldots$$

Mais tarde, ADRIANO METIUS, achou

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929\ldots$$

Emfim, um mathematico allemão, LUDOLPH VON EULEN, achou π com 19 casas decimaes exactas :

$$\pi = 3,1415926535897932385\ldots$$

Os allemães ainda chamam ao numero π LUDOLPH'SCHE ZAHL, isto é o numero de Ludolpho.

Hoje, por processos mais rapidos, porém dependentes da mathematica superior, podemos calcular π com um numero muito elevado de casas decimaes.

Aqui darei π com 25 casas decimaes (do Dr. LUDWIG KIEPERT).

$$\pi = 3,1415926535897932384626434\ldots$$

O diametro é igual á circumferencia dividida por π, ou multiplicada pelo seu inverso

$$\frac{1}{\pi} = 0,318309886\ldots$$

Relações numericas das linhas

(Triangulo)

Chama-se QUADRADO DE UMA LINHA ao quadrado do numero que indica o comprimento d'essa linha.

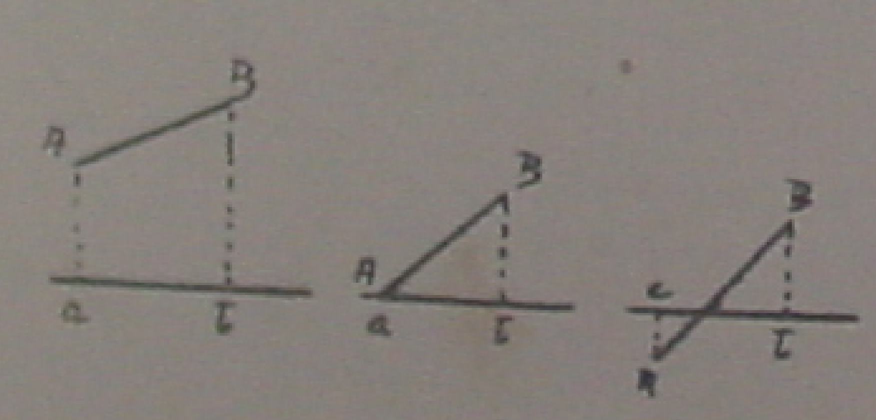
Chama-se SOMMA, DIFFERENÇA, PRODUCTO, QUOCIENTE DE DUAS LINHAS á somma, differença, producto, quociente dos numeros que indicam os comprimentos d'essas linhas (em relação á mesma unidade).

Chama-se PROJECÇÃO DE UM PONTO SOBRE UMA RECTA ao pé da perpendicular traçada d'esse ponto sobre a recta.

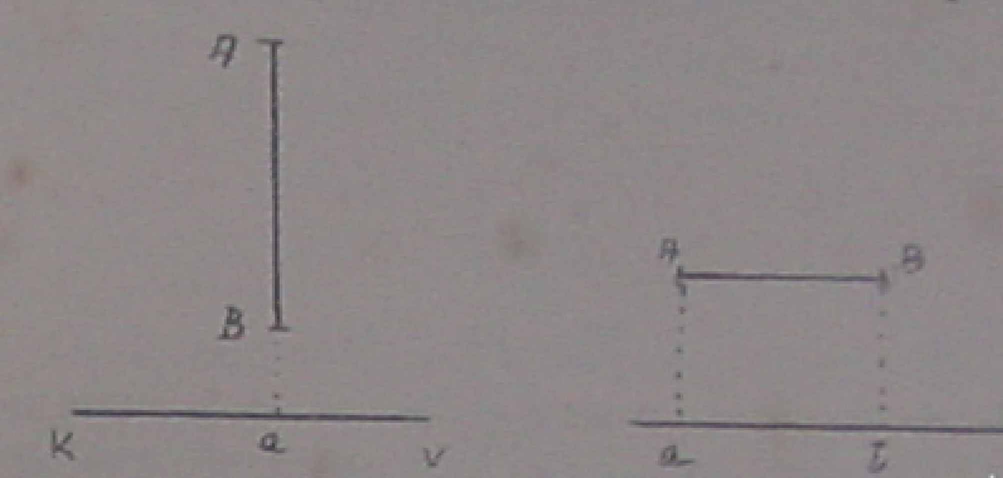
A distancia do ponto á recta (a perpendicular) chama-se PROJECTANTE.

A PROJECÇÃO DE UMA RECTA LIMITADA sobre uma outra recta (illimitada), é a porção d'esta comprehendida entre os pés das perpendicalares traçadas das extremidades da primeira sobre a segunda.

Nas figuras seguintes, ab é a projecção de AB.

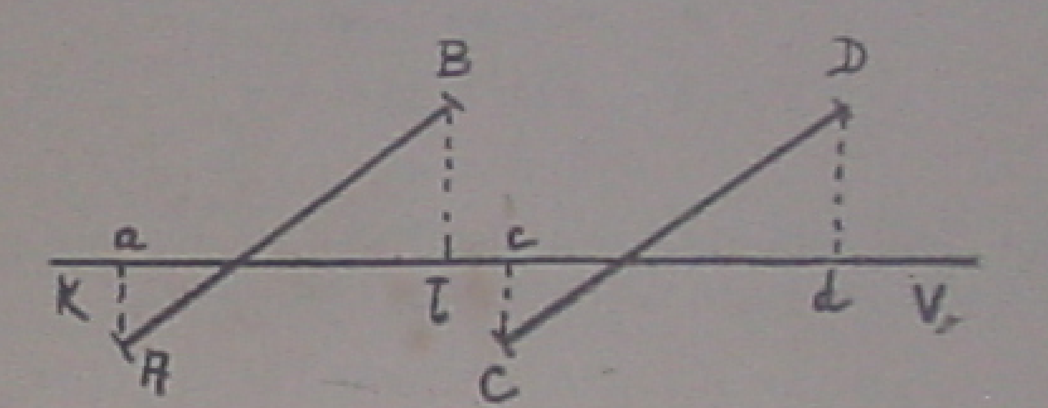


Si a recta AB fôr perpendicular sobre KV a sua projecção sobre KV limitar-se-a a um ponto.



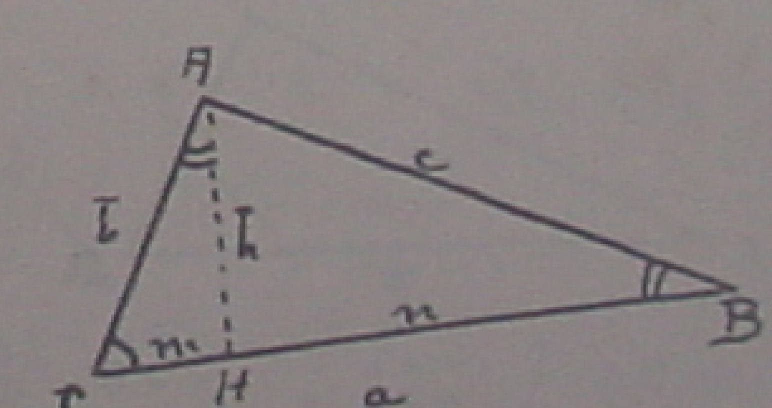
Si a recta AB fôr parallela á KV, sua projecção ab sobre KV lhe será igual.

Si duas rectas são iguaes e parallelas, suas projecções sobre uma mesma recta KV são iguaes.



AB sendo igual e parallela a CD, ab projecção de AB sobre KV será igual a cd projecção de CD sobre KV.

Theorema 75.—Em todo triangulo rectangulo um



catheto é meio proporcional entre a hypotenusa inteira e sua projecção sobre a hypotenusa.

Os triangulos ACH e ABC têm o angulo C commum, e os angulos CAH e CBA iguaes, por terem os lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido, logo esses triangulos são semelhantes, e

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

ou $\qquad b^2 = am \qquad (1)$

Si tivessemos considerado os dois triangulos ABH e ABC, teriamos achado d'um modo analogo

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$$

ou $\qquad c^2 = an \qquad (2)$

Sommando membro a membro as igualdades (1) e (2) achamos:

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a\,(m + n) = a.a$$

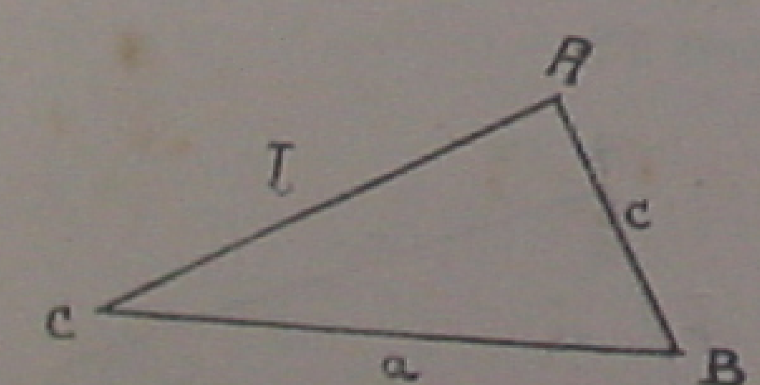
$$b^2 + c^2 = a^2$$

D'onde concluimos que o quadrado da hypotenusa é igual á somma dos quadrados dos cathetos.

—

Para os estudantes, que já têm algumas noções de trigonometria, sera talvez interessante demonstrar este ultimo theorema pela trigonometria.

Seja o triangulo rectangulo ABC



$$\sin B = \frac{b}{a} \qquad\qquad \cos B = \frac{c}{a}$$

$$a \sin B = b \qquad\qquad a \cos B = c$$

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \qquad\qquad a^2 \cos^2 B = c^2$$

$$a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) = b^2 + c^2$$

notando que

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

achamos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

—

Dividindo as igualdades (1) e (2) membro a membro, achamos:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{am}{an}$$

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n}$$

Logo os quadrados dos cathetos estão na mesma razão do que suas projecções sobre o hypotenusa.

—

Em todo triangulo rectangulo, a altura sobre a hypotenusa é meia proporcional entre os dois segmentos determinados sobre a hypotenusa (fig. pag. 157)

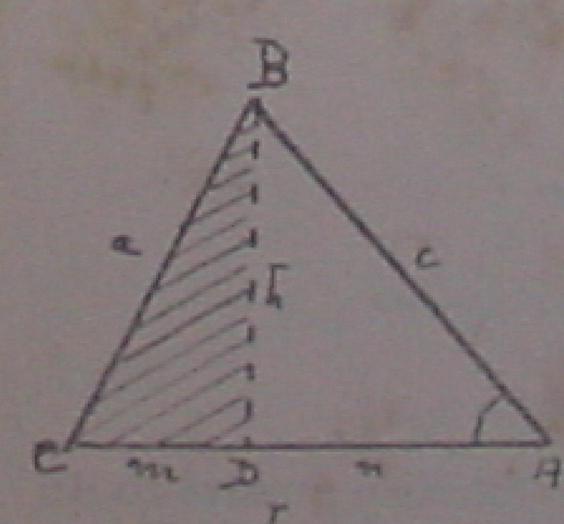
Basta para isso considerar os dois triangulos rectangulos ABH e AHC, semelhantes por terem os angulos BAH = ACH e ABH = CAH, logo

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

ou $\qquad h^2 = mn$

—

Thecrema 76 — Em todo triangulo, o quadrado do lado opposto a um angulo agado é igual á somma dos quadrados dos dois outros lados MENOS o duplo producto do segundo pela projecção do terceiro sobre o segundo.

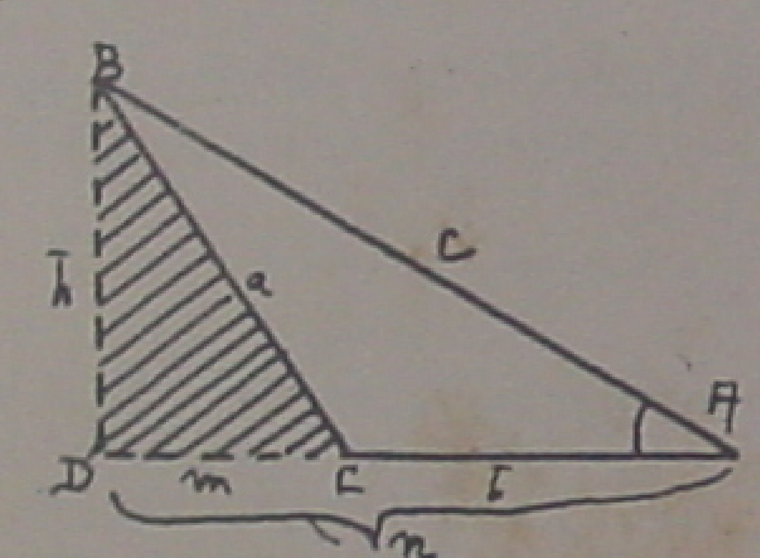


I

I. — O angulo C é agado:

$$a^2 = h^2 + m^2$$
$$m = b - n$$
$$m^2 = (b - n)^2$$
$$m^2 = b^2 - 2bn + n^2$$
$$a^2 = h^2 + b^2 - 2bn + n^2$$
$$h^2 + n^2 = c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$$

II.— O angulo C é obtuso :

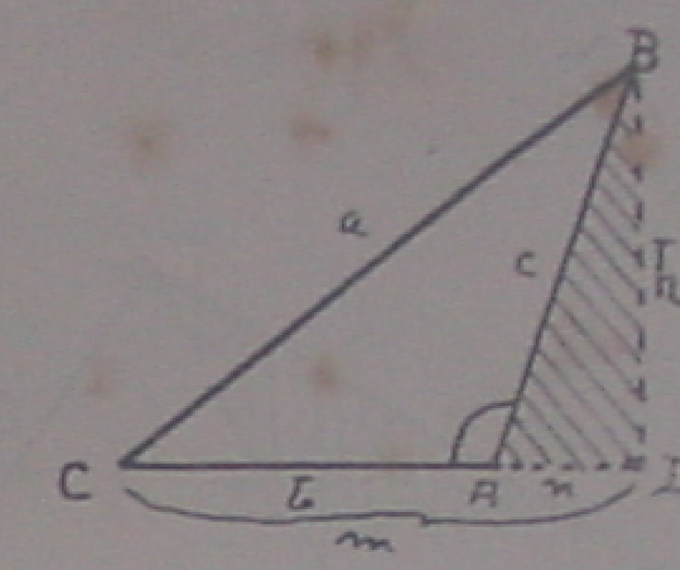


$$a^2 = h^2 + m^2$$
$$m = n - b$$
$$m^2 = (n - b)^2$$
$$m^2 = n^2 - 2nb + b^2$$
$$a^2 = h^2 + n^2 - 2nb + b^2$$
$$h^2 + n^2 = c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$$

—

Theorema 77—Em todo triangulo, o quadrado do lado opposto ao angulo obtuso é igual á somma dos

quadrados dos dois outros lados MAIS o duplo producto do segundo pela projecção do terceiro sobre o segundo.



$$a^2 = m^2 + h^2$$
$$m = b + n$$
$$m^2 = (b + n)^2$$
$$m^2 = b^2 + 2bn + n^2$$
$$a^2 = h^2 + b^2 + 2bn + n^2$$
$$h^2 + n^2 = c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

—

Em rezumo :

$a^2 = b^2 + c^2$ (rectangulo)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$ (acutangulo)
$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$ (obtusangulo)

Estes tres casos constituem a «SYNTHESE DE CLAIRAUT».

—

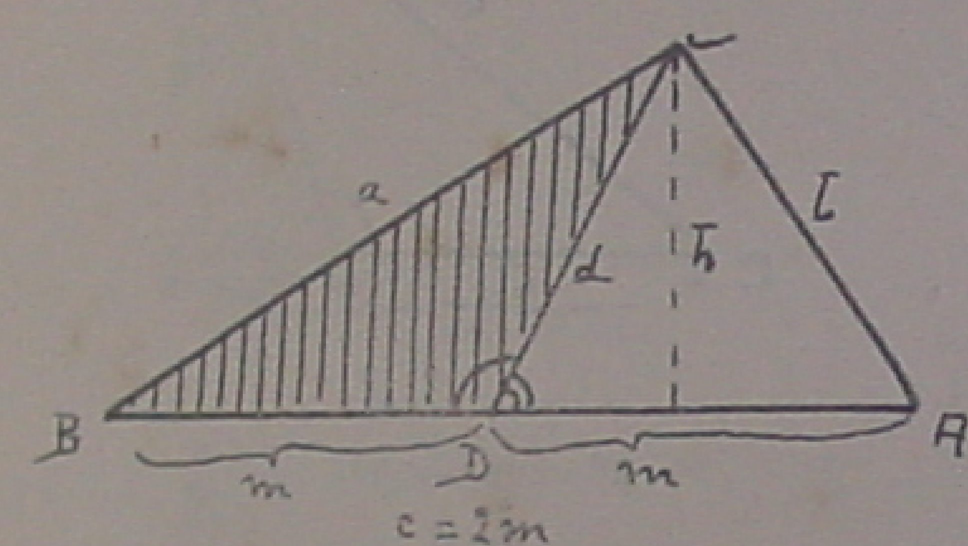
Na trigonometria reduzem-se a uma unica formula:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

—

Theorema 78. — A somma dos quadrados de dois lados de um triangulo qualquer, é igual ao dobro do quadrado da metade do terceiro lado, mais o dobro do quadrado da mediana relativa a este terceiro lado.

Seja o triangulo ABC e a mediana CD ; e para simplificar, AB = 2m.



No triangulo obtusangulo CBD, temos :

$$a^2 = m^2 + d^2 + 2mn \qquad (1)$$

n sendo a projecção de CD sobre AB.

No triangulo acutangulo ACD, temos :

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2mn \qquad (2)$$

Sommando as igualdades (1) e (2), temos :

$$a^2 + b^2 = 2m^2 + 2d^2 \qquad (3)$$

Da formula (3) deduzimos :

$$2d^2 = a^2 + b^2 - 2m^2$$

$$d^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2m^2}{2}$$

$$d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 2m^2}{2}}$$

Os pontos A e B sendo fixos e a sua distancia

sendo 2m, representando $a^2 + b^2$ pela quantidade constante K^2 teremos

$$d = \sqrt{\frac{K^2 - 2m^2}{2}}$$

E' o logar geometrico dos pontos do plano cuja SOMMA DOS QUADRADOS das distancias a dois pontos fixos A e B e dada.

E' uma circumferencia com o centro em D, e com o raio igual a

$$d = \sqrt{\frac{K^2 - 2m^2}{2}}$$

Si tivessemos subtrahido membro a membro as igualdades (1) e (2), teriamos achado :

$$a^2 - b^2 = 4mn$$

ou $$\frac{a^2 - b^2}{4m} = n$$

Ora $$2m = c$$

logo $$4m = 2c$$

temos, pois, $$\frac{a^2 - b^2}{2c} = n$$

A differença dos quadrados $a^2 - b^2$ sendo dada, por exemplo K^2, temos :

$$\frac{K^2}{2c} = n$$

E' a expressão que nos permitte calcular o logar geometrico dos pontos do plano cuja DIFFERENÇA DOS QUADRADOS das distancias a dois pontos fixos é dada.

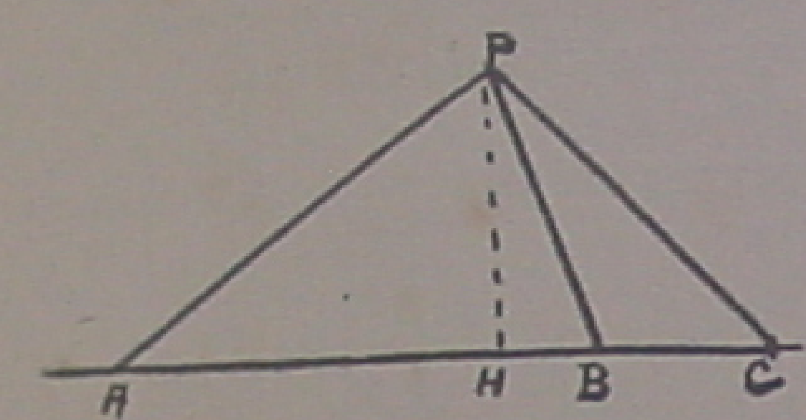
Esse logar geometrico é o EIXO RADICAL, que estudaremos depois.

—

Theorema 79 (de Stewart). — Sendo A, B e C tres pontos em linha recta, se unirmos um ponto P qualquer, a cada um desses tres pontos, teremos a relação:

$$PA^2 . BC + PC^2 . AB = PB^2 . AC + BC . AB . AC$$

Com effeito,



O triangulo APB nos dá

$$PA^2 = PB^2 + AB^2 - 2AB.HB \quad (1)$$

O triangulo PCB nos dá

$$PC^2 = PB^2 + BC^2 + 2BC.HB \quad (2)$$

Multiplicando (1) por BC e multiplicando (2) por AB, temos

$$PA^2.BC = PB^2.BC + AB^2.BC - 2AB.BC.HB$$
$$PC^2.AB = PB^2.AB + BC^2.AB + 2BC.\ AB.HB$$

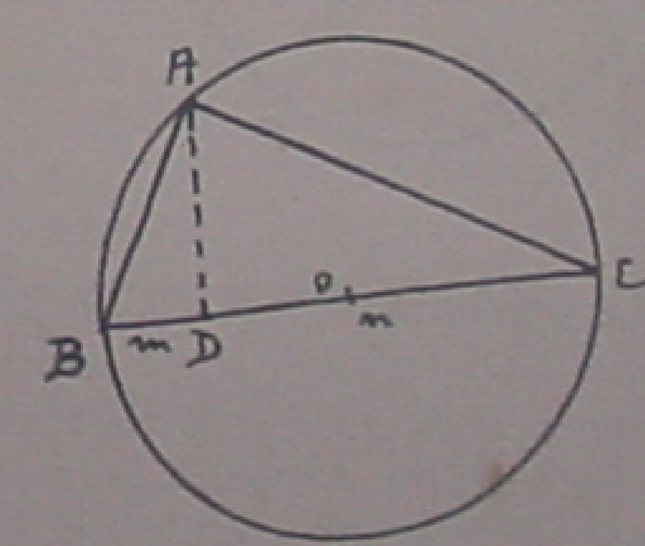
Sommando e simplificando, achamos:

$$PA^2.BC + PC^2.AB = PB^2 (AB + BC) + AB.BC\ (AB + BC)$$
$$PA^2.BC + PC^2.AB = PB^2.AC + AB.BC.AC$$

Relações numericas das linhas

(Circulo)

Considerando um triangulo rectangulo inscripto num semi-circulo, isto é, tendo o diametro como hypotenusa e os cathetos sendo cordas que partem d'um mesmo ponto da circumferencia e vão ter ás extremidades do diametro, podemos applicar o que já estudamos no capitulo precedente.



Seja o triangulo rectangulo inscripto no semi-circulo O; a hypotenusa é BC, e os cathetos são AB e AC.

Temos $AB^2 = BC.m$

$AC^2 = BC.n$

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

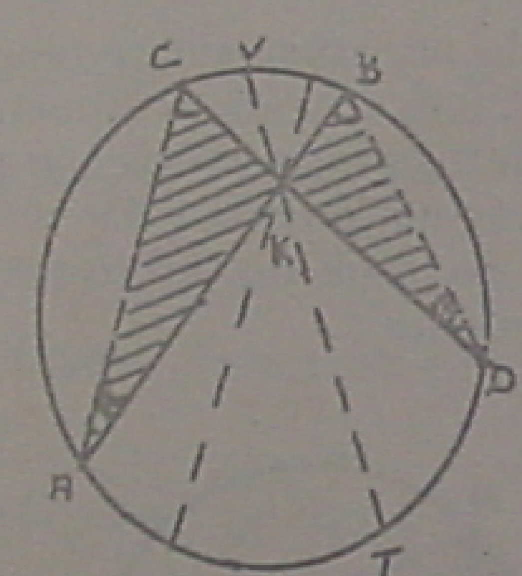
$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{m}{n}$$

tambem temos

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BC.m}{BC.BC} = \frac{m}{BC}$$

—

Theorema 80. — Quando duas cordas se cortam, o producto dos dois segmentos de uma d'ellas é igual ao producto dos dois segmentos da outra.



Sejam as duas cordas AB e CD que se cortam no ponto K.

Os dois triangulos ACK e BDK têm os angulos em C e em B iguaes por terem a mesma medida, e tambem o angulo A é igual ao angulo D por motivo analogo, logo os triangulos são semelhantes e seus lados são proporcionaes.

$$\frac{AK}{KD} = \frac{CK}{KB}$$

ou

$$AK.KB = CK.KD$$

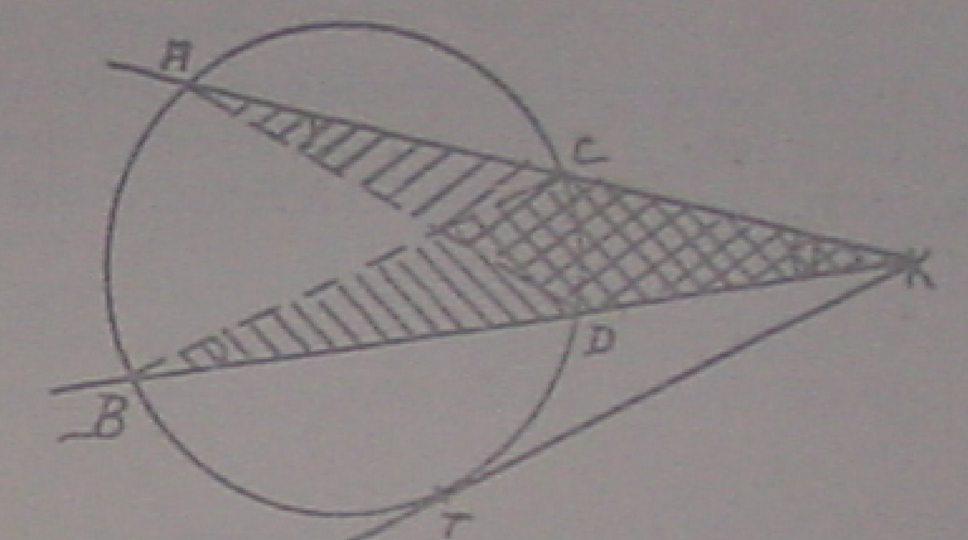
Qualquer outra corda VT que tambem passasse pelo ponto K, teria o producto dos seus dois segmentos

VK.KT igual ao producto dos segmentos das cordas já consideradas AB e CD.

E se producto constante dos dois segmentos de todas as cordas que passam por um ponto K qualquer, chama-se POTENCIA DO PONTO K. Essa denominação é devida a STEINER.

—

Theorema 81. — Si duas secantes partem d'um mesmo ponto K, fóra de um circulo O, o producto d'uma



secante inteira pela sua parte exterior, é igual ao producto da outra secante inteira pela sua parte exterior.

Os triangulos ADK e BCK têm o angulo K commum, e os angulos A e B iguaes por terem a mesma medida; logo, são semelhantes, e os lados homologos são proporcionaes.

$$\frac{AK}{BK} = \frac{KD}{KC}$$

$$AK.KC = BK.KD$$

Tambem aqui o producto da secante inteira pela sua parte exterior, para qualquer secante que passe pelo ponto K, é constante, e se chama POTENCIA DO PONTO K.

Si o ponto K estivesse sobre a circumferencia a sua potencia seria nulla.

—

NOTA. — Suppondo que a secante KB gire em torno do ponto K até occupar a posição limite KT (tangente), teremos :

$$AK.KC = BK.KD = KT.KT = KT^2$$

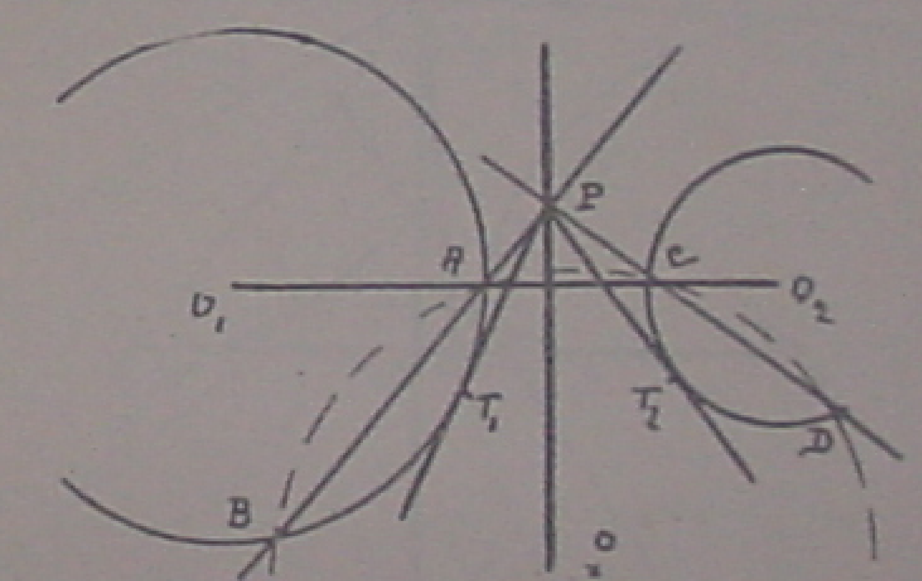
Logo, a tangente é meia proporcional entre a secante inteira e sua parte exterior.

—

O logar geometrico dos pontos de mesma potencia relativamente a duas circumferencias dadas é o EIXO RADICAL, ao qual já nos referimos, e que vamos agora estudar.

Eixo radical

Para construir o EIXO RADICAL de duas circumferencias, traçamos uma circumferencia auxiliar que corte as duas circumferencias dadas : traçam-se as cordas que passam pelos pontos de intersecção da circumferencia auxiliar com as circumferencias dadas e prolonga-se essas rectas até o seu ponto de encontro. D'este ponto traça-se a perpendicular sobre a linha dos centros : esta perpendicular é o eixo radical (é o



logar geometrico dos pontos de mesma potencia em relação ás duas circumferencias dadas).

Em relação ao circulo O, a potencia do ponto P é

$$BP.PA \text{ ou } DP.PC$$

Notando que PB é secante commum aos circulos O e O_1 concluimos que a potencia de P em relação a O, isso é BP.PA, é igual a potencia de P em relação a O_1, isso é BP.PA.

D'um modo analogo, DP.PC potencia de P em relação a O, tambem o é em relação a O_2 ; logo, a potencia de P em relação a O_1 e a O_2 é a mesma ; logo P tem a mesma potencia em relação aos dois circulos dados O_1 e O_2.

Já sabemos que

$$BP.PA = PT_1^2$$

e que

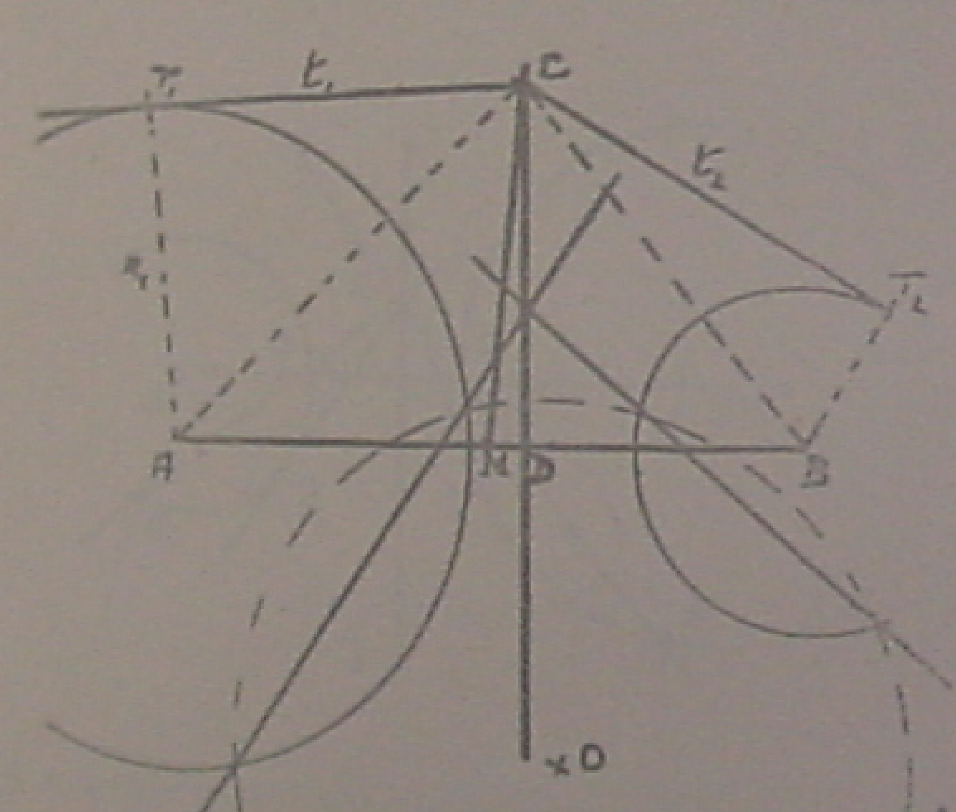
$$DP.PC = PT_2^2$$

mas $$BP.PA = DP.PC$$

logo $$PT_1^2 = PT_2^2$$

e $$PT_1 = PT_2$$

D'ahi deduzimos que o eixo radical é o logar geometrico dos pontos do plano pelos quaes podemos traçar tangentes iguaes a dois circulos dados.



$$CA^2 - AT_1^2 = CT_1^2$$

$$CB^2 - BT_2^2 = CT_2^2$$

$$CA^2 - r_1^2 = CB^2 - r_2^2$$

$$CA^2 - CB^2 = r_1^2 - r_2^2 = K^2$$

$$MD = \frac{K^2}{2AB}$$ (pagina 163)

O eixo radical é, pois, o logar geometrico dos pontos do plano cuja differença dos quadrados das distancias a dois pontos fixos A e B é constante (K^2).

O eixo radical é a perpendicular traçada sobre a linha AB dos centros, a uma distancia

$$MD = \frac{K^2}{2AB}$$

do meio M de AB.

—

Si considerassemos tres circumferencias, os eixos radicaes d'essas circumferencias, consideradas duas a duas, se encontrariam n'um ponto chamado CENTRO RADICAL. Do centro radical podemos traçar SEIS TANGENTES IGUAES aos tres circulos dados.

—

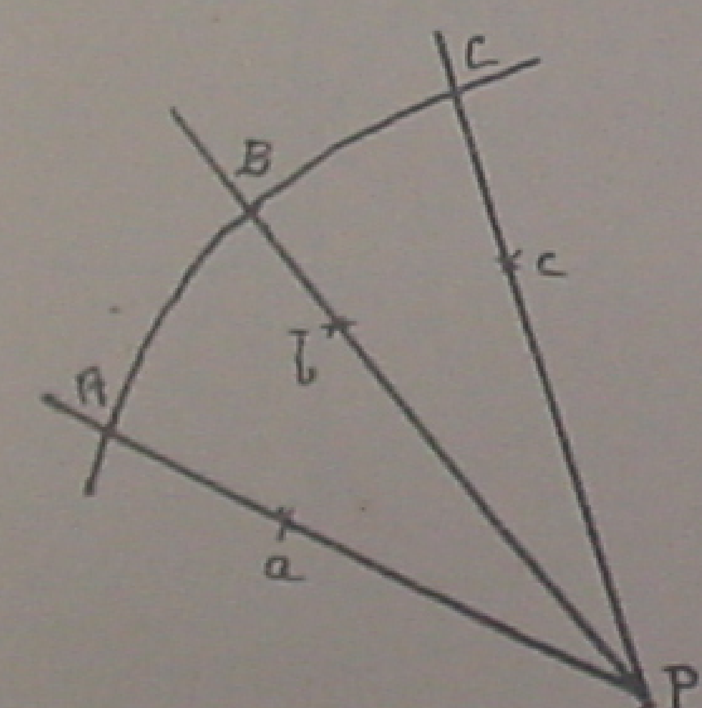
NOTA.— Si os tres centros dos tres circulos dados estivessem em linha recta, os tres eixos radicaes seriam parallelos ; o theorema ainda é verdadeiro n'esse caso limite, porém, o centro radical acha-se no infinito.

Inversão

Consideremos, n'um plano, pontos A, B, C,... pertencendo a uma figura, unamos um ponto qualquer P do plano a esses differentes pontos; tomando sobre os raios vectores PA, PB, PC,... pontos a, b, c,... taes que

$$Pa.PA = Pb.PB = Pc.PC + \dots = K$$

K sendo uma constante dada; o logar geometrico dos pontos a, b, c,... é uma figura que se chama a FIGURA INVERSA (ou TRANSFORMADA) d'aquella á qual pertencem os pontos A, B, C,...

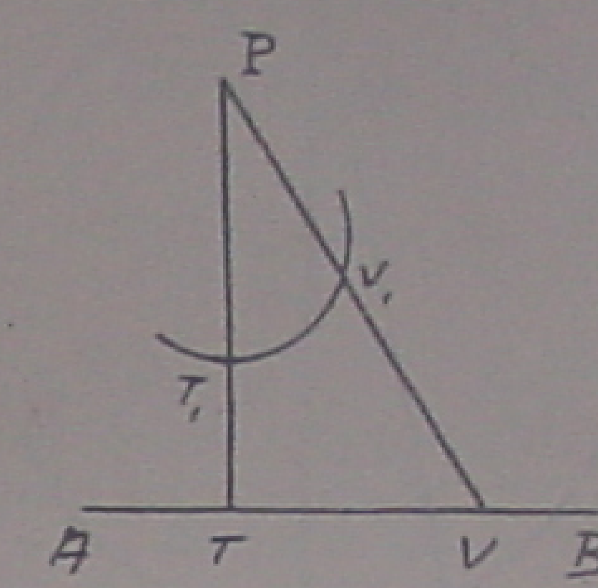


O ponto P se chama POLO, e K é a POTENCIA DE INVERSÃO.

Podemos considerar K como positivo ou negativo, segundo os pontos a, b, c,... são tomados sobre os raios vectores PA, PB, PC,... ou sobre seus prolongamentos além do ponto P.

—

Theorema 82. — A figura inversa de uma linha recta é uma circumferencia passando pelo polo.



Sejam a recta AB, um polo P, e K a potencia de inversão. Unamos o ponto P a um ponto qualquer V da recta, tracemos PT perpendicular sobre AB e tomemos os pontos V_1 e T_1 taes que

$$PV.PV_1 = PT.PT_1 = K$$

d'ahi tiramos

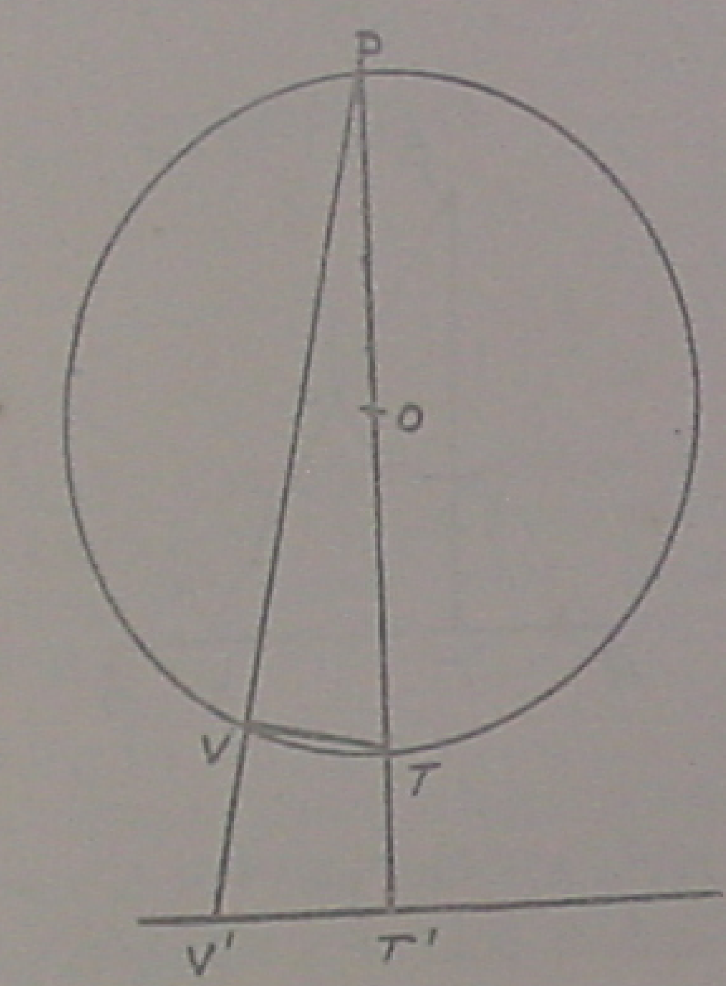
$$\frac{PV_1}{PT_1} = \frac{PT}{PV}$$

Unamos V_1T_1. Os triangulos PV_1T_1 e PVT têm o angulo commum P comprehendido entre lados proporcionaes, logo são semelhantes; PT_1 sendo homologo de PV, o angulo PV_1T_1 será recto.

O logar geometrico dos pontos V_1 é, pois, a circumferencia tendo PT_1 como diametro.

—

Theorema 83. — A figura inversa d'uma circumferencia é uma linha recta perpendicular ao diametro passando pelo polo, este ultimo estando situado sobre a circumferencia.



Sejam uma circumferencia O, o polo P situado sobre a circumferencia, e K a potencia de inversão.

Tracemos uma corda qualquer PV e o diametro PT e tomemos sobre as rectas prolongadas os pontos V' e T', taes que

$$PV'.PV = PT'.PT = K$$

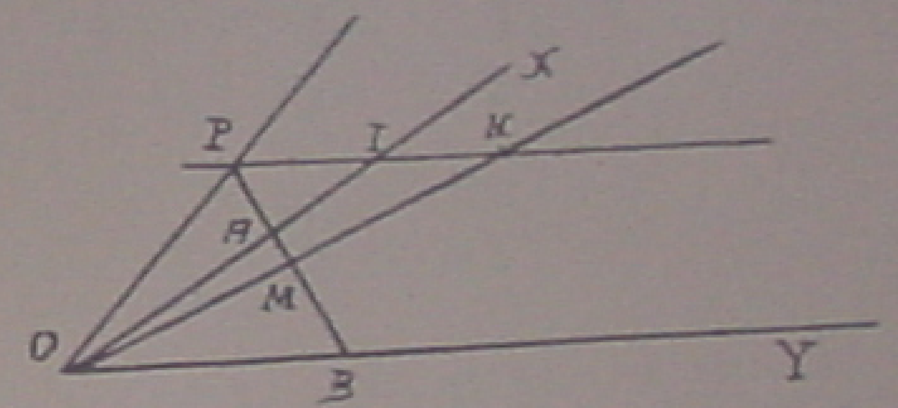
d'ahi deduzimos

$$\frac{PV'}{PT'} = \frac{PT}{PV}$$

Unamos V'T' e VT: os triangulos PV'T' e PVT são semelhantes por terem um angulo commum comprehendido entre lados proporcionaes: d'ahi resulta a igualdade dos angulos em V e em T'. Vê-se logo que o logar geometrico do ponto V' é a recta V'T' perpendicular sobre o diametro passando pelo polo P.

Polo e polar

Dá-se um angulo XOY e um ponto P no seu plano; traça-se uma secante qualquer PAB e toma-se o ponto M, conjugado harmonico do ponto P em relação aos pontos A e B: demonstrar que o logar do ponto M é uma linha recta.



Unindo o ponto O aos pontos P, A, M, B, forma-se um feixe harmonico: todas as secantes traçadas pelo ponto P serão divididas harmonicamente nos seus pontos de encontro com as rectas OP, OA, OM, OB.

D'ahi segue-se que o logar procurado é a recta que une o ponto O a um dos pontos M.

Para construir esta recta, traça-se PH paralleia a OY e toma-se IH igual PI; unindo OH, tem-se a recta procurada.

A recta OM se chama POLAR do ponto P em relação ao angulo XOY. O ponto P é o POLO da recta OM.

Dá-se um circulo O e um ponto P no seu plano: traça-se pelo ponto P uma secante qualquer PAB, e toma-se o ponto M conjugado harmonico do ponto P em relação aos pontos A e B.

O logar geometrico do ponto M é uma linha recta.

Tracemos o diametro CD passando pelo ponto P e seja I o ponto d'este diametro, conjugado harmonico do ponto P em relação aos pontos C e D

A circumferencia O é o logar dos pontos cuja razão das distancias aos pontos P e I é a mesma; logo:

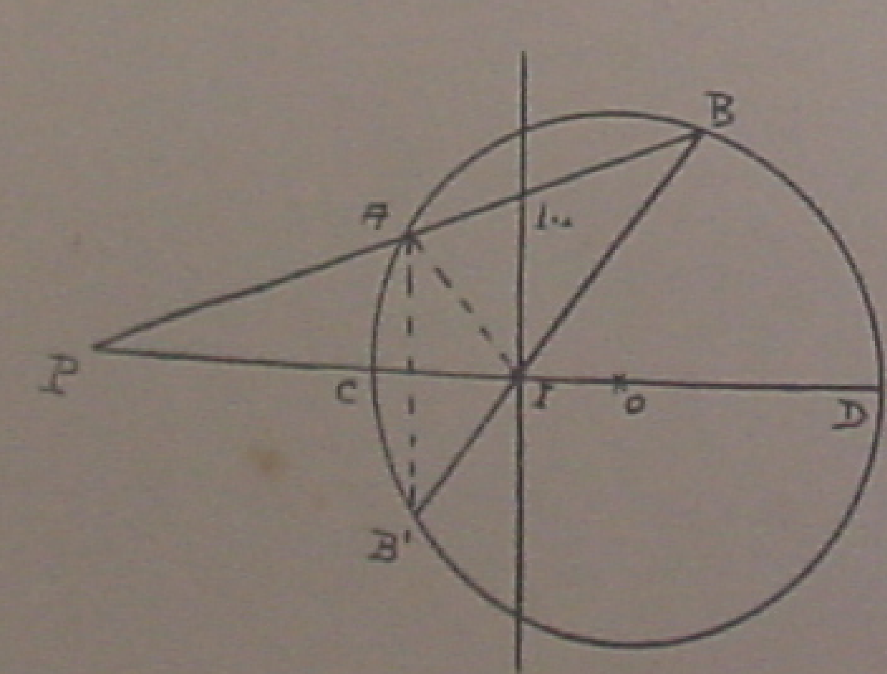
$$\frac{AP}{AI} = \frac{PB}{BI} \text{ ou } \frac{AP}{PB} = \frac{AI}{BI}$$

IP é, pois, bissectriz do angulo AIB' exterior ao triangulo AIB.

$$\text{Mas} \qquad \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB}$$

$$\text{logo} \qquad \frac{AM}{MB} = \frac{AI}{BI}$$

e, MI é bissectriz do angulo AIB.



A recta MI é assim perpendicular sobre PD.

Logo o logar do ponto M é a perpendicular traçada sobre o diametro passando pelo ponto P.

no ponto I d'este diametro, conjugado harmonico do ponto P em relação aos pontos C e D.

Obter-se-ha este ponto I, traçando pelo ponto P uma secante qualquer, tomando o symetrico de um de seus pontos de intersecção em relação ao diametro, e unindo este symetrico ao outro ponto de intersecção.

A recta MI chama-se POLAR do ponto P em relação ao circulo O. O ponto P é o POLO da recta MI.

Divisão de uma recta em media e extrema razão

Diz-se que uma recta AB está dividida em media e extrema razão n'um certo ponto D, quando este ponto D determinando sobre AB dois segmentos, o maior d'elles ao quadrado é igual ao producto da recta inteira pelo menor segmento.

Os allemães chamam a divisão em media e extrema razão «GOLDENER SCHNITT».

Os antigos chamavam-n'a «SECTIO AUREA» ou «SECTIO DIVINA».

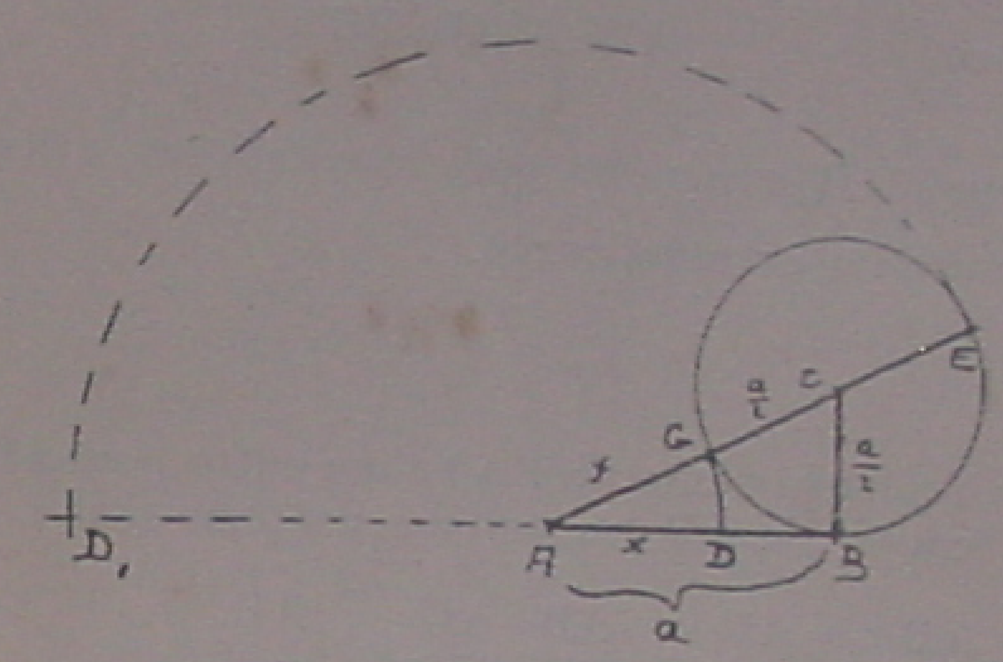
—

Vamos proceder a uma certa construcção para a determinação do ponto que divide uma recta AB em media e extrema razão.

Depois, justificaremos a nossa construcção, provando que o ponto achado preheenche bem as condições.

Em B, traço uma perpendicular igual á metade de AB; com C como centro e CB como raio, traço uma circumferencia; traço AC e prolongo até E. Com A

como centro, e AG como raio, traço o arco GD que determina o ponto D.



Digo que o ponto D divide AB em media e extrema razão.

Com effeito

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AG}$$

$$\frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AG}{AG}$$

Notando que

$$BC = \frac{AB}{2}$$

$$AB = 2BC = \text{diametro} = GE, \text{ temos}$$

$$\frac{AE - GE}{AB} = \frac{AB - AG}{AG}$$

ou

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AB - AG}{AG}$$

mas $\quad AG = AD$

logo

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB - AD}{AD}$$

ou

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{AD}$$

ou

$$AD^2 = AB.DB$$

O ponto D prehenche, pois, as condições, e divide AB em media e extrema razão.

—

No prolongamento de BA ha um outro ponto D_1 que tambem divide AB em media e extrema razão.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AG}{AB} = \frac{AB+AG}{AE+AB} = \frac{AD_1}{D_1B}$$

logo

$$\frac{AB}{AD_1} = \frac{AD_1}{D_1B}$$

e

$$AD_1^2 = AB.D_1B$$

Os pontos D e D_1 são CONJUGADOS HARMONICOS.

—

Veremos depois que o primeiro segmento achado, AD, é o lado do decagono regular convexo inscripto n'um circulo de raio igual a AB.

Tambem veremos que o outro segmento, AD_1, é o lado do decagono regular estrellado inscripto no mesmo circulo de raio AB.

—

EXPRESSÃO ANALYTICA. — O triangulo rectangulo ABC nos dá:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 + a^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$$

$$x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Notando que $\sqrt{5}$ tem dois signaes, + e −, achamos, tomando o signal —

$$x = -\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$-x = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

Veremos, em momento opportuno, que

$$\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

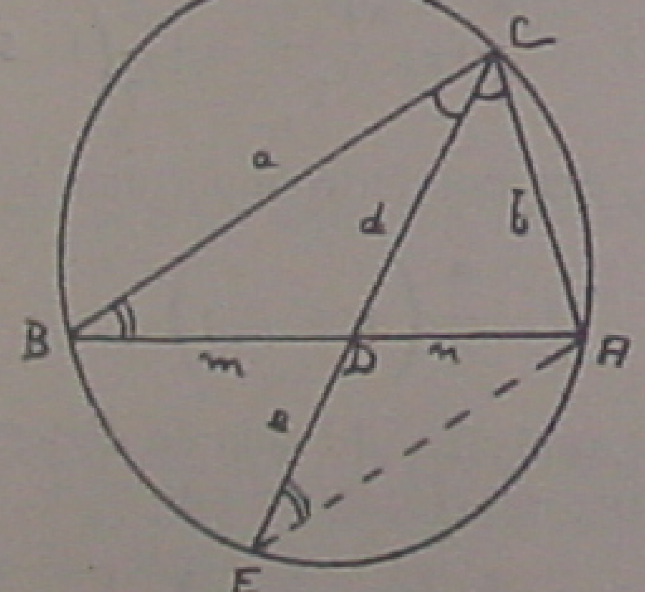
é a expressão analytica do lado do decagono regular convexo inscripto no circulo de raio a : e

$$\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

é a expressão analytica do lado do decagono regular estrellado em funcção do raio a do circulo circumscripto.

Alguns Theoremas

Theorema 84. — O producto de dois lados de um triangulo é igual ao producto dos segmentos determinados sobre o terceiro lado pela bissectriz do angulo opposto, mais o quadrado d'essa bissectriz.



Seja o triangulo ABC e a bissectriz CE. Unamos EA.

Os triangulos semelhantes BDC e EAC dão a relação :

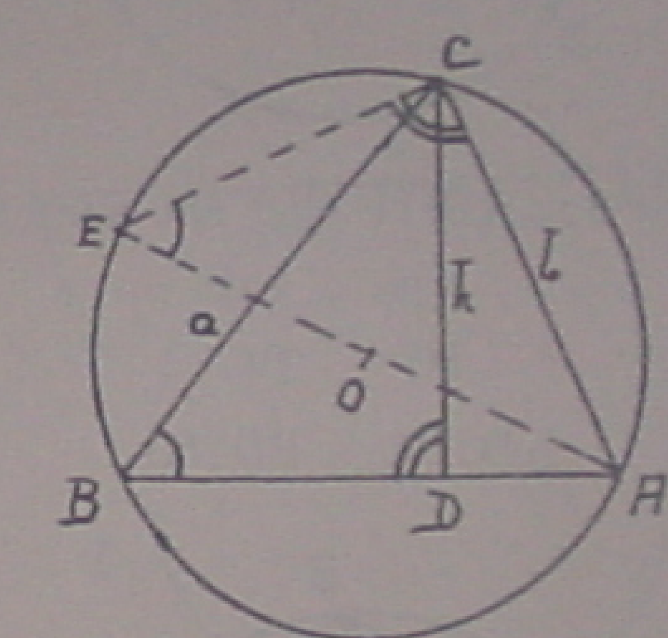
$$\frac{a}{d+e} = \frac{d}{b}$$

$$ab = d\,(d+e) = d^2 + de$$

mas $de = mn$

logo $ab = d^2 + mn$

Theorema 85. — O producto de dois lados quaesquer de um triangulo é igual ao producto da altura relativa ao terceiro lado pelo diametro do circulo circumscripto.



Seja o triangulo ABC e a altura CD. Tracemos o diametro $AE = 2r$; unamos EC.

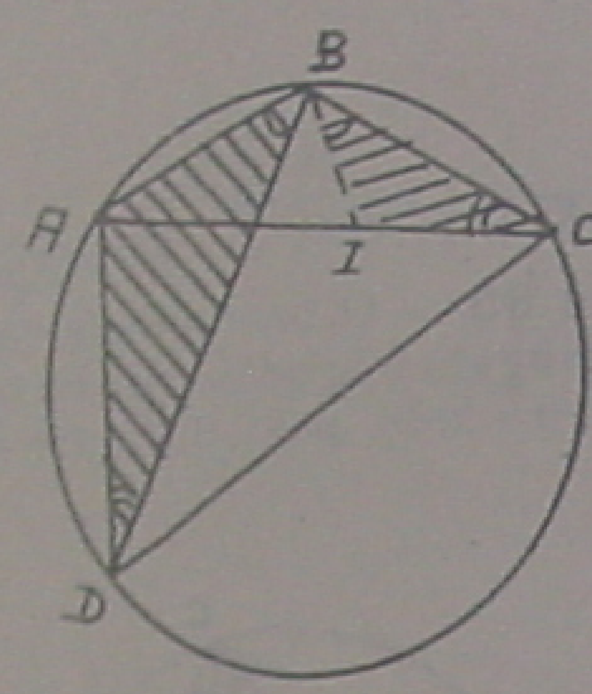
Os triangulos rectangulos CEA e BCD dão a relação :

$$\frac{a}{2r} = \frac{h}{b}$$

ou $ab = 2rh$

Theorema 86. (do quadrilatero inscriptivel) — Em todo quadrilatero inscriptivel, o rectangulo (o producto) das diagonaes é igual á somma dos rectangulos dos lados oppostos.

Seja o quadrilatero ABCD. Tracemos BI tal que o angulo CBI = ABD.

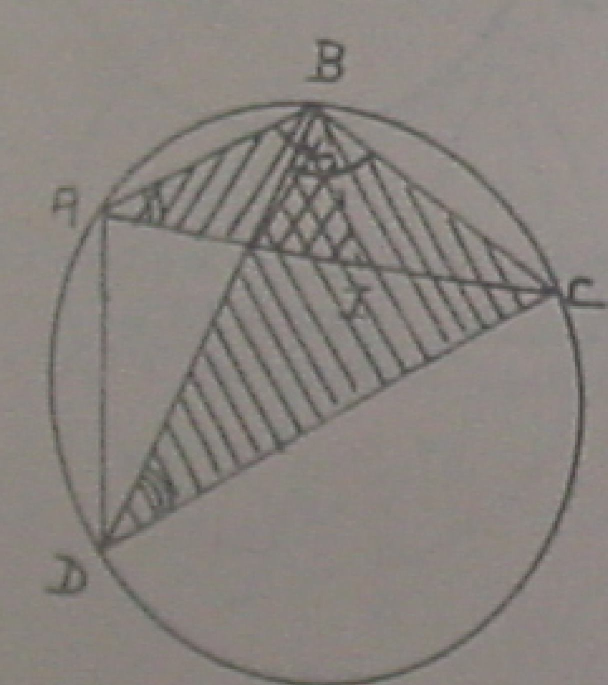


Os triangulos ABD e CBI são semelhantes e dão

$$\frac{AD}{IC} = \frac{BD}{BC}$$

ou

$$AD.BC = BD.IC \qquad (1)$$



Os triangulos semelhantes ABI e BCD. dão

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{DC}$$

ou

$$AB \cdot DC = BD \cdot AI \qquad (2)$$

Sommando (1) e (2), temos:

$$AI.BD + IC.BD = AB.CD + AD.BC$$

mas $(AI + IC)\ BD = AC.BD$

logo

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

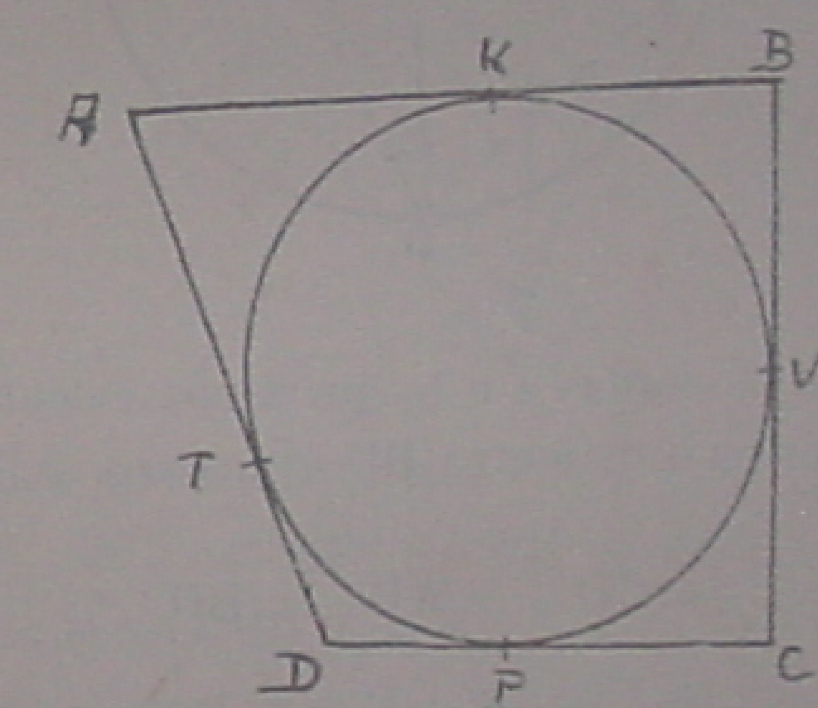
Theorema 87. — Em todo quadrilatero circumscripto ABCD, os lados oppostos dão sommas iguaes.

$$AK = AT$$

$$DP = TD$$

$$PC = CV$$

$$KB = VB$$



Sommando, temos

$$AK + KB + DP + PC = AT + TD + CV + VB$$

ou

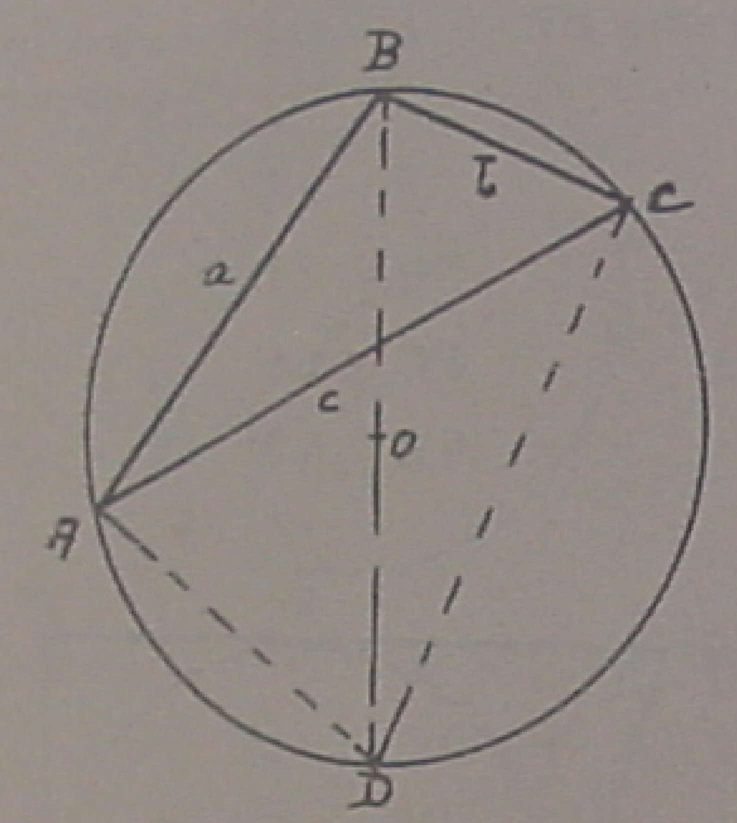
$$AB + DC = AD + CB$$

—

Reciprocamente. — Todo quadrilatero, cujos lados oppostos dão sommas iguaes, é circumscriptivel.

—

Problema — Duas cordas valem respectivamente a e b, pede-se para calcular o valor da corda que subtende a somma dos arcos das cordas dadas.



Sejam as cordas a e b, queremos calcular c.

Tracemos o diametro BD e unamos AD e CD. Temos:

$$a.CD + b.AD = c.BD$$

$$a.CD + b.AD = c.2r$$

logo

$$c = \frac{a.CD + b.AD}{2r}$$

notando que

$$\left.\begin{array}{l} CD^2 = 4r^2 - b^2 \\ AD^2 = 4r^2 - a^2 \end{array}\right\}$$

temos

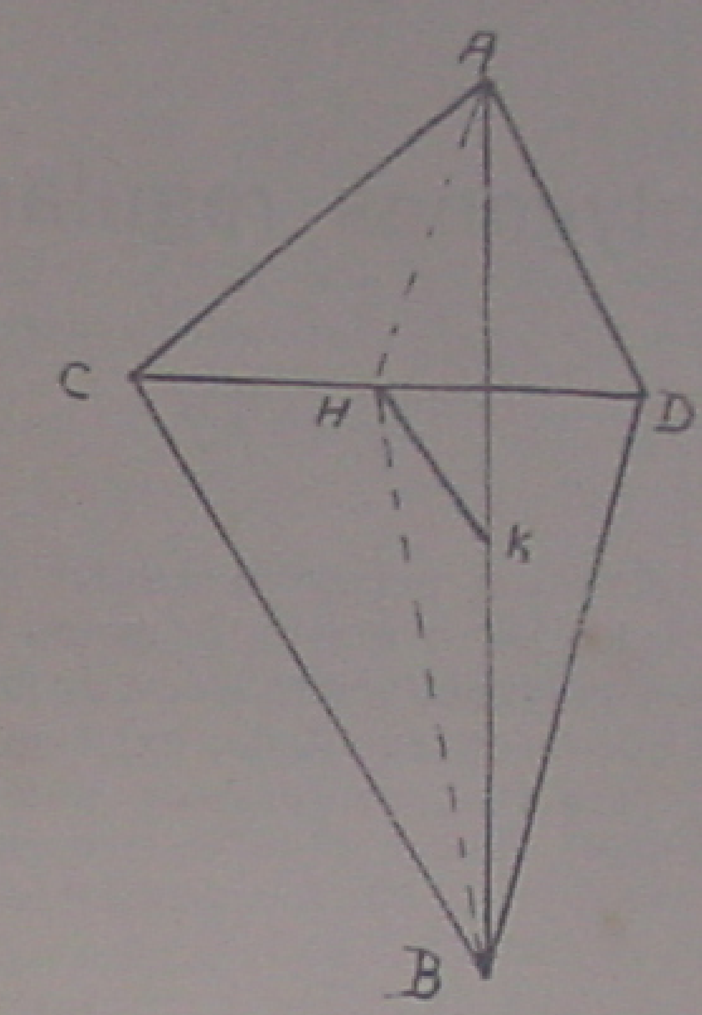
$$\left.\begin{array}{l} CD = \sqrt{4r^2 - b^2} \\ AD = \sqrt{4r^2 - a^2} \end{array}\right\}$$

logo

$$c = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$$

—

Theorema 88 (de Euler). —



No triangulo CAD, temos:

$$(1) \quad AC^2 + AD^2 = 2CH^2 + 2AH^2$$

No triangulo CBD, temos:

$$(2) \quad BD^2 + BC^2 = 2HB^2 + 2CH^2$$

Sommando (1) e (2), temos:

$$AC^2 + AD^2 + BD^2 + BC^2 = 2HB^2 + 2AH^2 + 4CH^2$$

Mas o triangulo AHB nos dá:

$$AH^2 + HB^2 = 2HK^2 + 2AK^2$$

logo

$$2AH^2 + 2HB^2 = 4HK^2 + 4AK^2$$

Notando que

$$\left.\begin{array}{l} AB = 2AK \\ AB^2 = 4AK^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} CD = 2CH \\ CD^2 = 4CH^2 \end{array}$$

temos

$$CA^2 + AD^2 + DB^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 + 4HK^2$$

Polygonos regulares

Sendo dado um polygono regular convexo qualquer, de n lados por exemplo, propomo-nos de determinar quantos polygonos estrellados, do mesmo numero de lados do que o convexo dado, existem.

Basta, para isso, procurar os numeros inteiros menores do que

$$\frac{n}{2}$$

e outros do que 1, primos com n.

Por exemplo, no QUADRADO, polygono regular de 4 lados, n é igual a 4.

Quaes são os numeros inteiros menores do que

$$\frac{4}{2}$$

e outros do que 1, primos com 4?

Não ha.

D'ahi concluimos que não existe quadrado estrellado.

Si tomassemos o PENTADECAGONO, onde n é igual a 15, veriamos que 2, 4 e 7, menores do que

$$\frac{15}{2}$$

são primos com 15. Ha, pois, TRES PENTADECAGONOS ESTRELLADOS.

Tomamos sómente os numeros, primos com n, menores do que

$$\frac{n}{2}$$

porque o numero de combinações de m objectos n a n é igual ao numero de combinações m — n a m — n.

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

No caso do PENTAGONO, só 2 é primo com 5, sendo menor do que

$$\frac{5}{2}$$

Si tivessemos tomado 3, que tambem é primo com 5, teriamos formado o mesmo pentagono estrellado, porém desenhado no sentido contrario do primeiro.

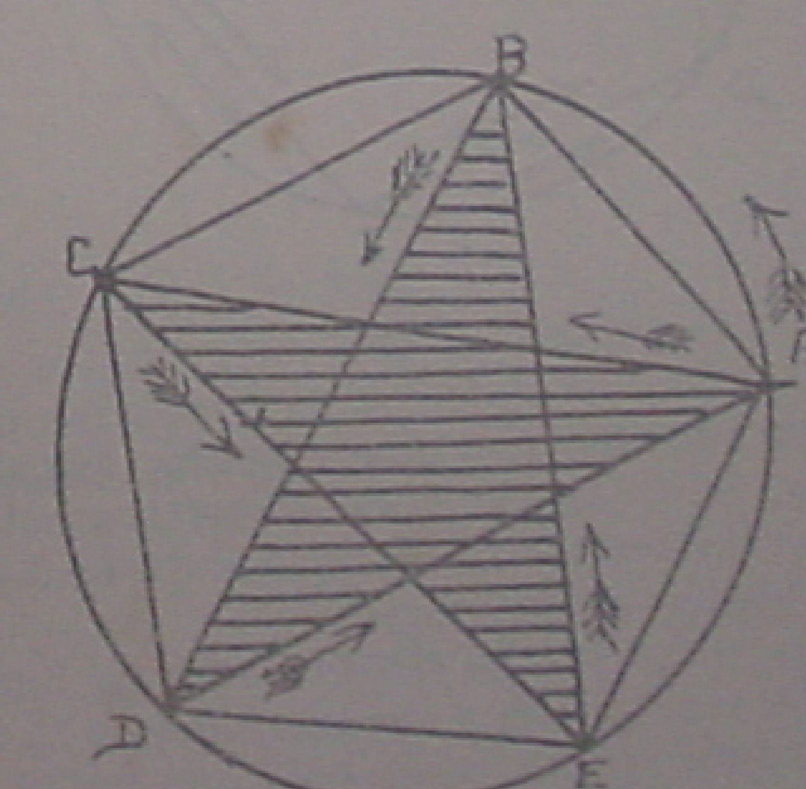
Com effeito

$$C_5^2 = C_5^{5-2} = C_5^3$$

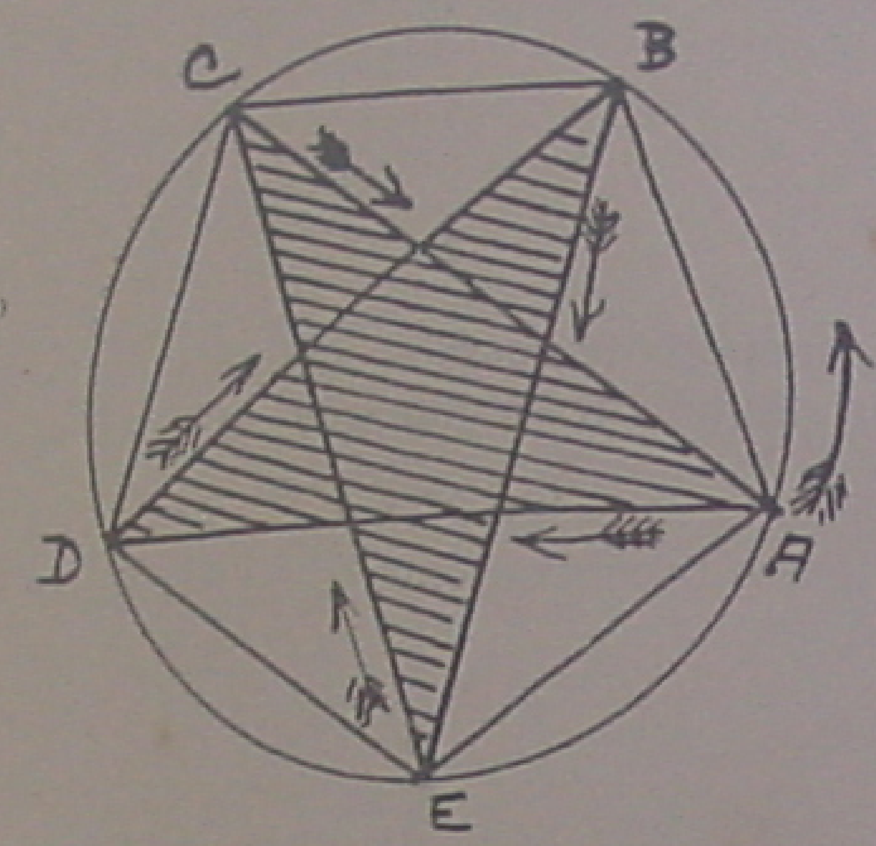
Quanto ao numero 4, que tambem é primo com 5, elle nos fornece simplesmente um pentagono convexo desenhado no sentido contrario do convexo dado.

Com uns desenhos talvez serei mais claro.

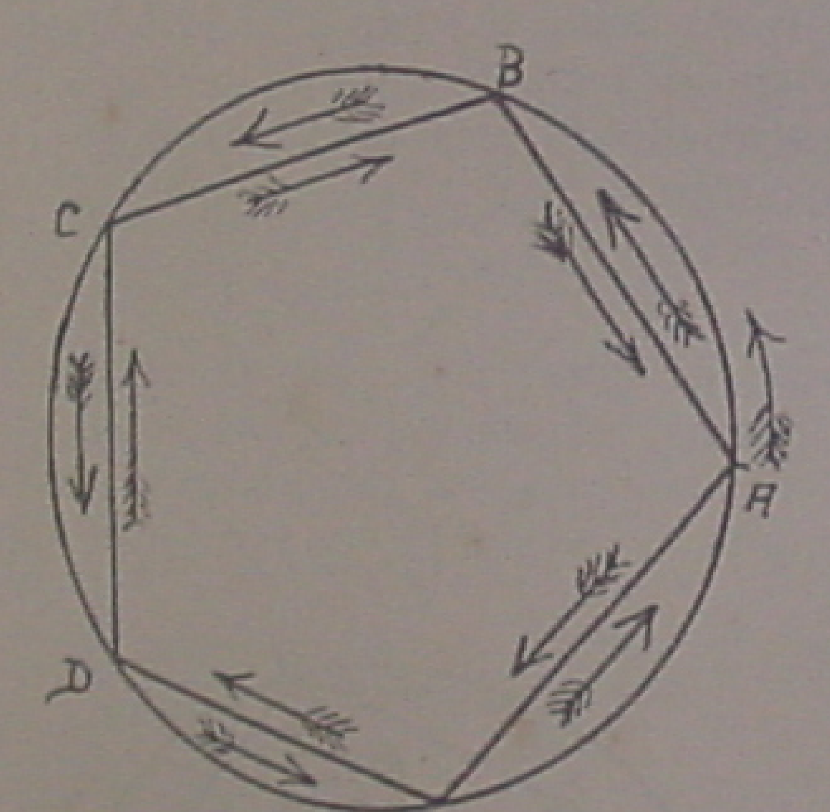
Unindo
2 a 2



Unindo
3 a 3



Unindo
4 a 4



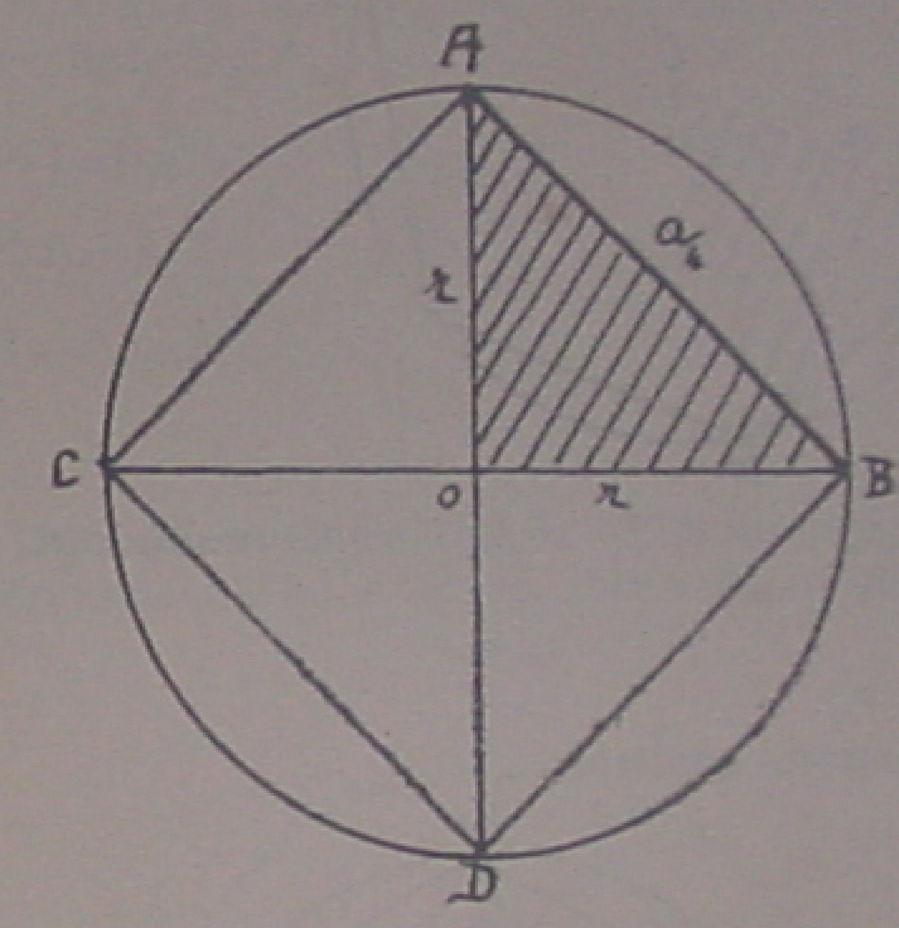
Quadrado. — E' o quadrilatero regular. Para construil-o, basta traçar dois diametros orthogonaes.

Determinamos assim quatro arcos iguaes, que nos fornecem quatro cordas iguaes.

Logo, o nosso quadrilatero tem os lados iguaes; os angulos têm todos a mesma medida, a metade da meia circumferencia: são, pois, rectos. Os vertices estão sobre a circumferencia.

Temos, pois, um quadrilatero regular inscripto, isso é, um quadrado inscripto.

Vamos agora estabelecer a expressão analytica do lado do quadrado em funcção do raio do circulo circumscripto.



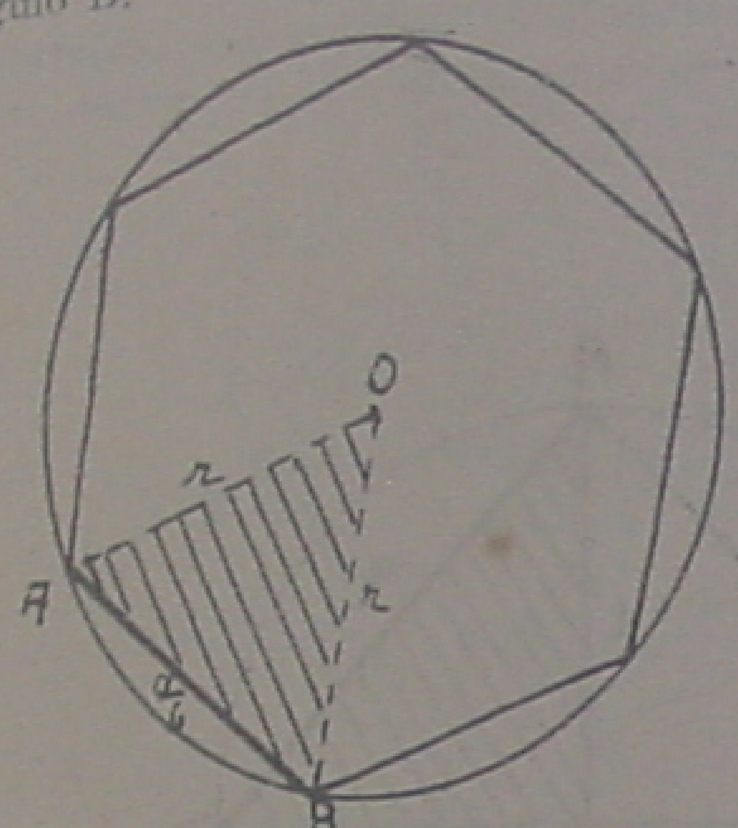
$$a_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

$$a_4 = r\sqrt{2}$$

notemos que $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$

O quadrado não fornece nenhum estrellado, pois, não ha numero inteiro menor do que a metade de 4, e outro do que 1, que seja primo com 4.

Hexagono.— O angulo em O é de 60°, o triangulo AOB é isoceles, logo o angulo A é igual ão angulo B.



Mas

$$A + 60^\circ + B = 180^\circ$$

$$A + B = 180^\circ - 60^\circ$$

$$A + B = 120^\circ$$

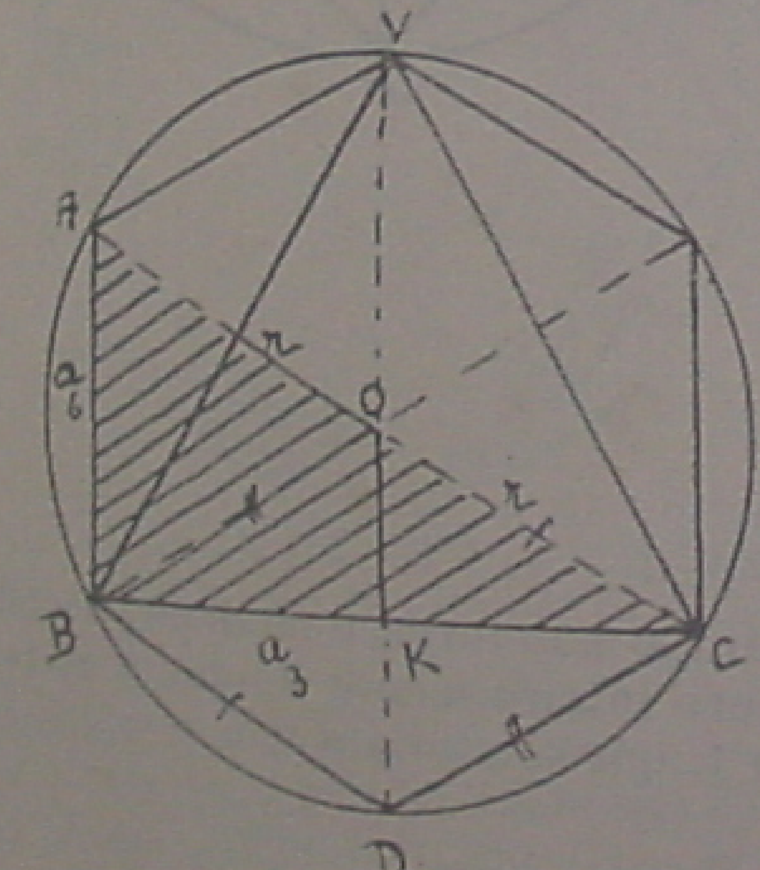
$$2\,A = 120^\circ$$

$$A = 60^\circ = B$$

O triangulo AOB é, pois, equiangulo, logo, equilatero, e AB = AO ou

$$a_6 = r$$

Triangulo equilatero.



$$a_3^2 = (2r)^2 - a_6^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

$$a_3 = r\sqrt{3}$$

notemos que $\sqrt{3} = 1,73205\ldots$

O triangulo equilatero não fornece estrellado.

O APOTHEMA do triangulo equilatero vale a metade do raio.

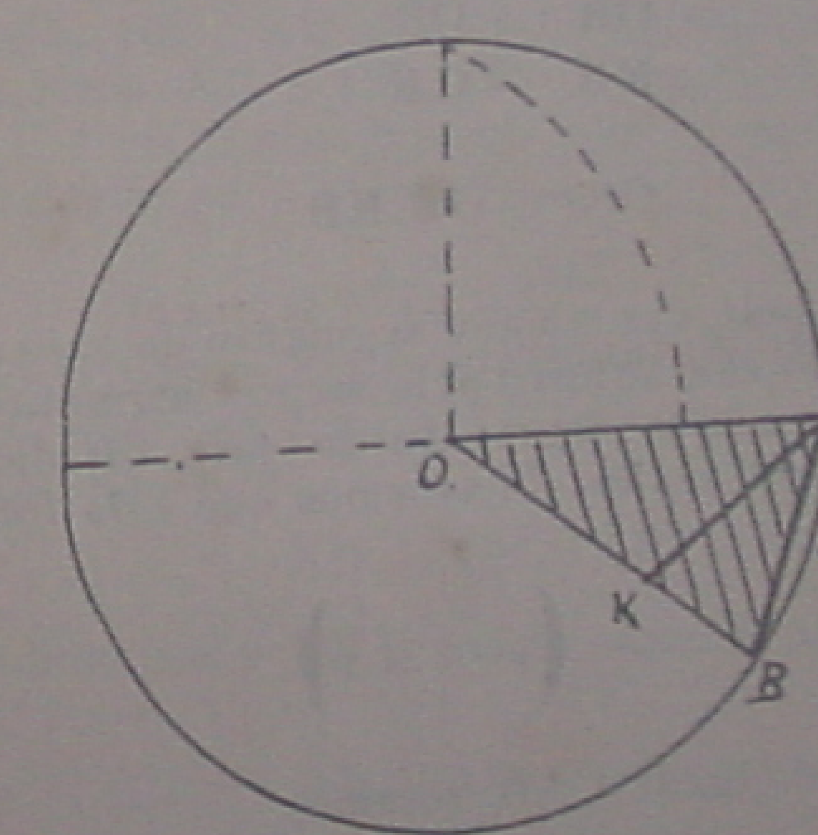
$$OK = \frac{r}{2}$$

pois BOCD é um losango.

A ALTURA vale o triplo do apothema

$$VK = KO + OV = \frac{r}{2} + r = \frac{3r}{2}$$

Decagono. — Seja AB, a decima parte da circumferencia, então a corda AB será o lado do decagono.



O angulo O vale 36° e o triangulo AOB é isoceles.

$$A + B = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

$$B = A = 72^\circ$$

Tracemos a bissectriz do angulo A. O triangulo OAK é isoceles, pois, o angulo OAK vale

$$\frac{72}{2} \text{ ou } 36^\circ$$

e o angulo em O tambem, logo

$$OK = KA$$

O triangulo KAB tambem é isoceles, e

$$KA = AB$$

Mas, já vimos que a bissectriz do angulo de um triangulo determina sobre o lado opposto dois segmentos directamente proporcionaes aos dois outros lados.

logo $$\frac{OK}{KB} = \frac{OA}{AB}$$

ou $$\frac{OK}{KB} = \frac{OB}{OK}$$

ou $$OK^2 = OB.KB$$

Vemos, pois, que o maior segmento do raio é igual ao producto do raio inteiro pelo menor segmento.

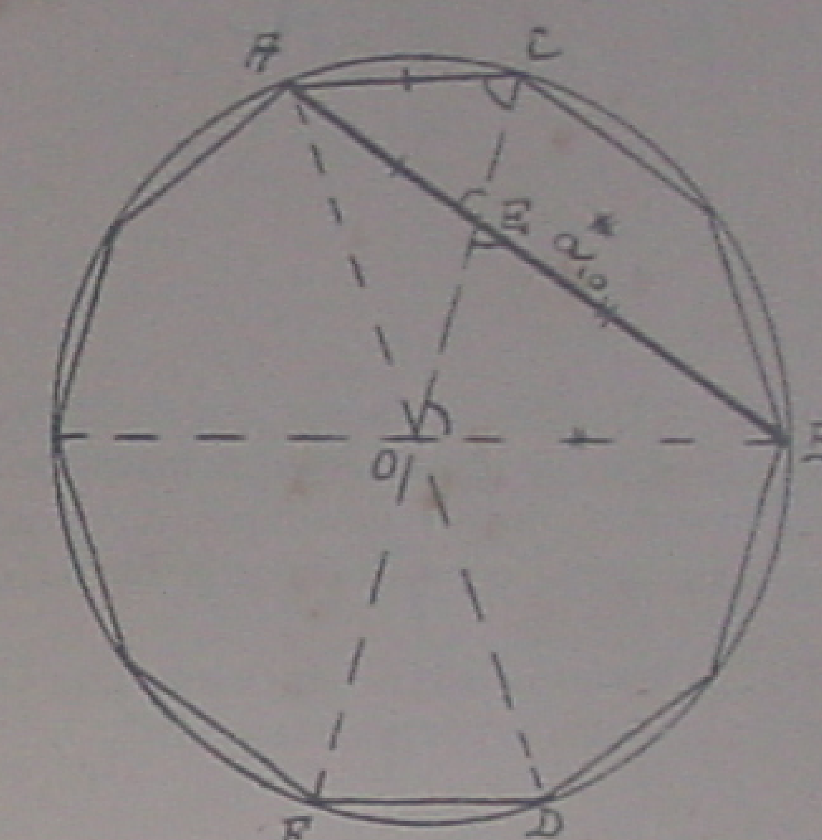
OK é o maior segmento do raio dividido em media e extrema razão. Já sabemos que é da forma

$$\frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

logo, OK sendo igual a AB, teremos

$$AB = a_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Decagono estrellado. — O decagono convexo fornece um estrellado, unindo os vertices do convexo 3 a 3.



Seja, pois, AB o lado do estrellado. Tracemos os diametros AD e CF. No triangulo ACE os angulos em C e em E são iguaes (têm a mesma medida), logo esse triangulo é isoceles, e

$$AE = AC$$

No triangulo EOB, os angulos em E e em O têm a mesma medida: logo EB = OB.

Notando que

$$AB = AE + EB$$

substituindo AE e EB respectivamente por AC e OB, temos:

$$AB = AC + OB$$

Ora, AC é lado do decagono convexo e OB é o raio, logo

$$AB = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) + r = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} + r$$

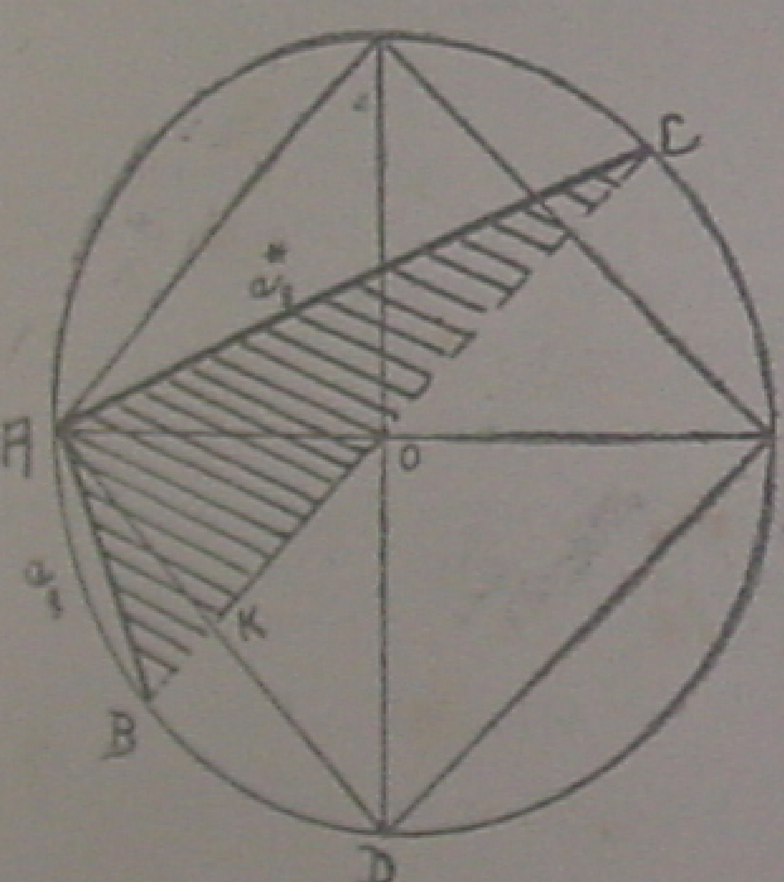
$$AB = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} + \frac{2r}{2} = \frac{r\sqrt{5}}{2} + \frac{r}{2}$$

$$AB = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) = a^{*}_{10}$$

—

Octogono. — Depois de haver construido o quadrado, se traçarmos perpendiculares do centro sobre os lados, determinaremos pontos analogos ao ponto B, que, unidos aos vertices do quadrado nos darão cordas como AB.

AB, BD, ... serão lados d'um octogono. Unindo AC, formamos o triangulo rectangulo ABC.



Ora, já sabemos que

$$AB^2 = BC.BK = BC(BO - OK)$$

$$AB^2 = 2r\,(r - OK) \qquad (1)$$

Mas

$$OK^2 = AO^2 - AK^2$$

$$OK^2 = r^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$OK^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4} = \frac{4r^2 - 2r^2}{4} = \frac{2r^2}{4}$$

$$OK^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$OK = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Substituindo este valor de OK em (1), vem

$$AB^2 = 2r\left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2r^2 - \frac{2r^2}{\sqrt{2}}$$

$$AB^2 = 2r^2 - \frac{2r^2\sqrt{2}}{2} = 2r^2 - r^2\sqrt{2}$$

$$AB^2 = r^2(2 - \sqrt{2})$$

e

$$AB = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = a_8$$

—

Octogono estrellado. — Ha um só octogono estrellado, que se obtem unindo 3 a 3 os vertices do octogono convexo.

AC será, pois, lado do estrellado.

$$AC^2 = BC.KC = BC\,(CO + OK)$$

$$AC^2 = 2r\,(r + OK)$$

Já vimos que

$$OK = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

logo

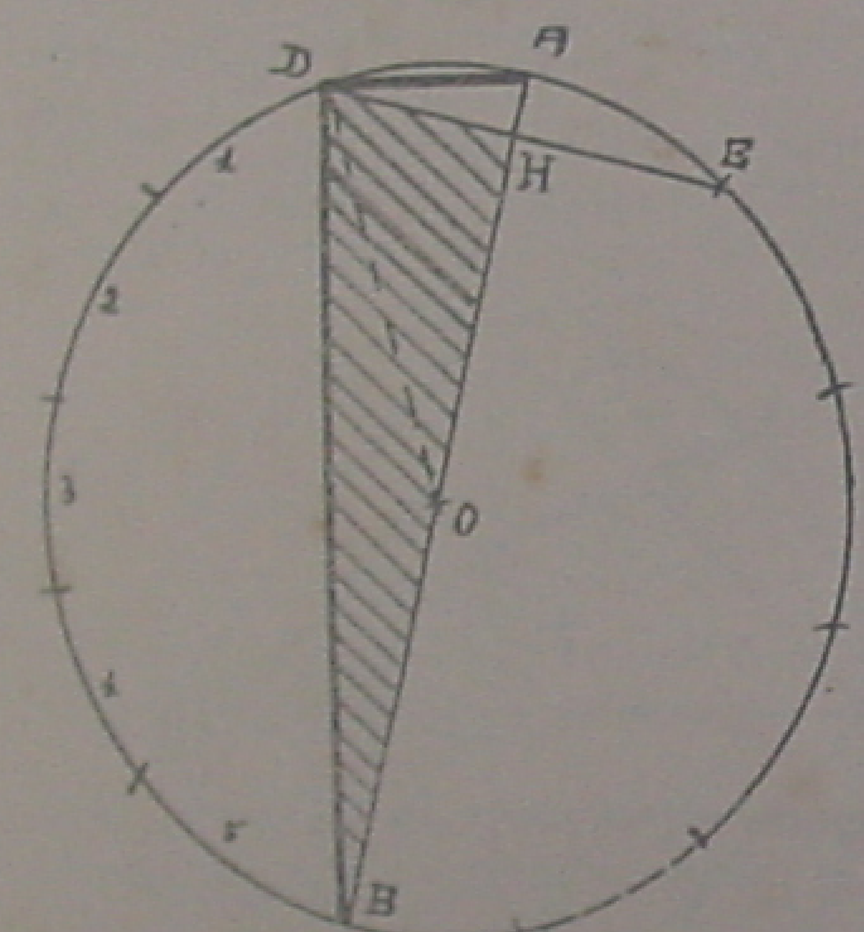
$$AC^2 = 2r\left(r + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2r^2 + \frac{2r^2}{\sqrt{2}}$$

$$AC^2 = 2r^2 + \frac{2r^2\sqrt{2}}{2} = 2r^2 + r^2\sqrt{2}$$

$$AC^2 = r^2(2 + \sqrt{2})$$

$$AC = r\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \overset{*}{a_8}$$

Dodecagono. — Seja DE o lado do hexagono. Tracemos o diametro AB perpendicular sobre DE.



DA será o lado do dodecagono.

Unamos DO.

$$DA^2 = AB.AH = 2r\,(AO - HO)$$

$$DA^2 = 2r\,(r - HO) \qquad (1)$$

Mas

$$HO^2 = DO^2 - DH^2 = r^2 - \left(\frac{DE}{2}\right)^2$$

$$HO^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{4r^2 - r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

$$HO = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Substituindo em (1), vem

$$DA^2 = 2r\left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = 2r^2 - \frac{2r^2\sqrt{3}}{2}$$

$$DA^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3} = r^2(2 - \sqrt{3})$$

$$DA = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} = a_{12}$$

Dodecagono estrellado. — O dodecagono convexo nos fornece um estrellado, unindo os vertices 5 a 5.

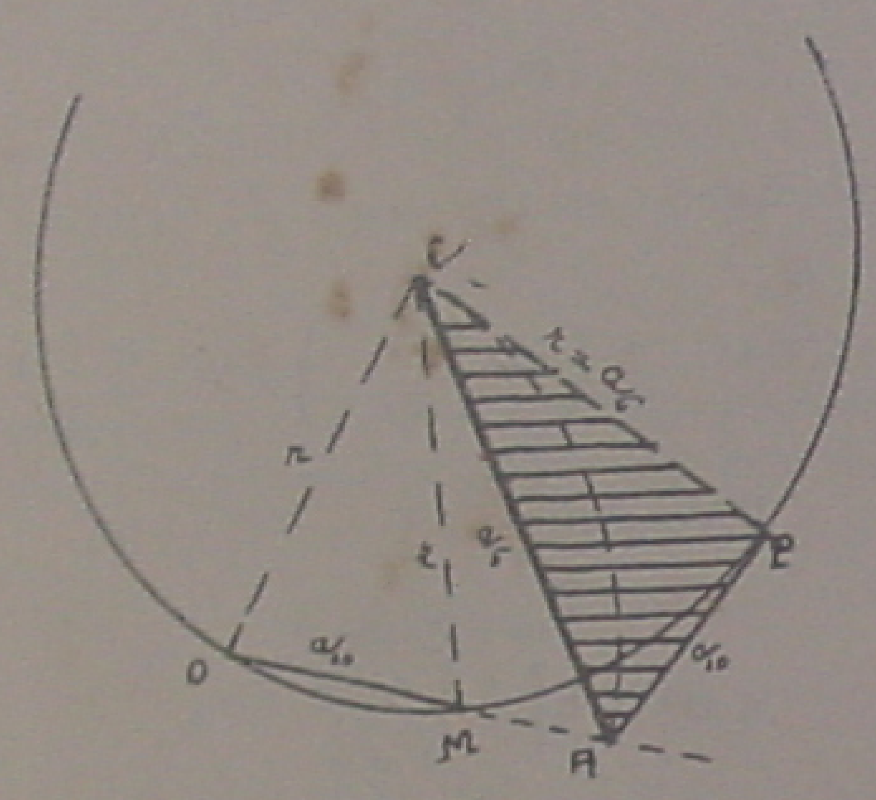
Logo DB será o lado do dodecagono estrellado.

A deducção da expressão analytica do lado do dodecagono estrellado em funcção do raio do circulo circumscripto, é analoga á que acabamos de dar, e achamos

$$\overset{*}{a}_{12} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Pentagono. — Seja o circulo C e o lado OM do decagono convexo.

Unamos CO e CM. O angulo OCM vale a decima parte da circumferencia ou 36° gráos, e como o triangulo OCM é isosceles, os angulos em O e em M valem cada um 72°.



Tomando O como centro e OC como raio e traçando o arco CA, este arco será a medida do angulo COA; valerá, pois, 72°, e a corda CA será o lado do pentagono convexo, visto que 72° é a quinta parte da circumferencia.

Já sabemos que, OM sendo lado do decagono, e OA ou OC o raio do circulo circumscripto:

$$OM^2 = OA.AM$$

Pelo ponto A, traçando a tangente AP, tambem já sabemos que:

$$AP^2 = OA.AM$$

logo $$OM = AP$$

vê-se, pois, que AP é igual ao lado do decagono.

Unindo PC e resolvendo o triangulo rectangulo ACP, temos:

$$CA^2 = CP^2 + PA^2$$

ou

$$CA^2 = r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2$$

$$CA^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right)$$

$$CA^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right)$$

$$CA^2 = \frac{4r^2}{4} + \frac{6r^2}{4} - \frac{2r^2\sqrt{5}}{4}$$

$$CA^2 = \frac{10r^2}{4} - \frac{2r^2\sqrt{5}}{4}$$

$$CA^2 = \frac{r^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right)$$

$$CA = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5$$

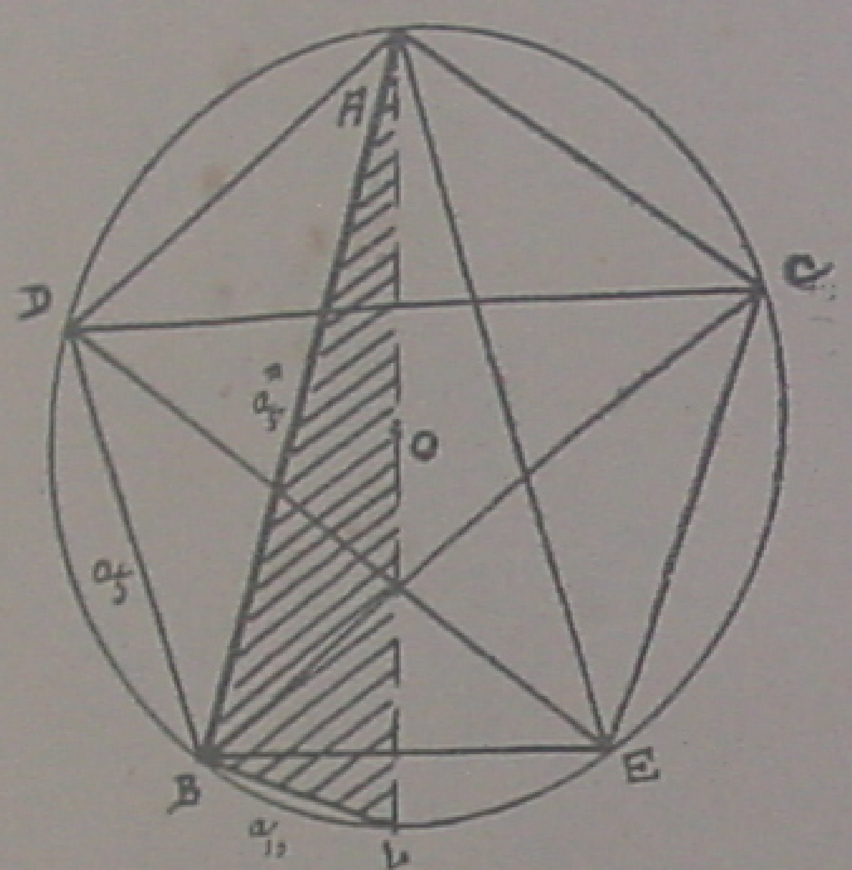
eis ahi a expressão analytica do lado do pentagono convexo em funcção do raio do circulo circumscripto.

Notemos que:

$$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} = 1,17557\ldots$$

logo $$AC = a_5 = r.\ 1,17557\ldots$$

Pentagono estrellado. — Basta unir os vertices do convexo 2 a 2.



BA será o lado do pentagono estrellado.

Traçando o diametro AL, perpendicular sobre BE e unindo BL, temos:

$$BL = a_{10}$$

Resolvendo o triangulo rectangulo BAL, temos:

$$BA^2 = AL^2 - BL^2$$

$$BA^2 = 4r^2 - \left[\frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)\right]^2$$

$$BA^2 = 4r^2 - \frac{r^2}{4}\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right)$$

$$BA^2 = 4r^2 - \frac{6r^2}{4} + \frac{2r^2\sqrt{5}}{4}$$

$$BA^2 = \frac{10r^2}{4} - \frac{6r^2}{4} + \frac{2r^2\sqrt{5}}{4}$$

$$BA^2 = \frac{10r^2}{4} + \frac{2r^2\sqrt{5}}{4}$$

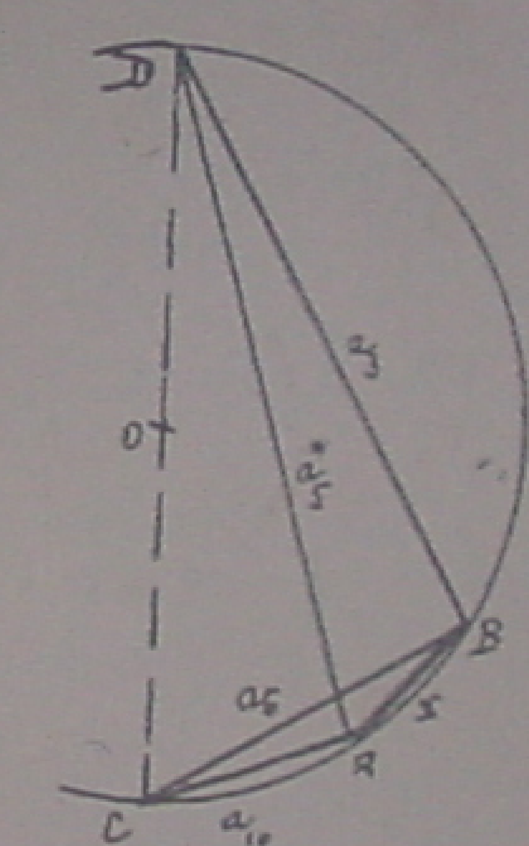
$$BA^2 = \frac{r^2}{4}\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$$

$$BA = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = a_5^{\prime}$$

—

Pentadecagono. — Seja CB o lado do hexagono e CA o lado do decagono.

O arco correspondente ao lado do hexagono vale



60°, e o arco correspondente ao lado do decagono vale 36°.

Logo arco CB = 60°

arco CA = 36°

logo

arco AB = arco CB — arco CA

arco AB = 60° — 36° = 24°

é justamente a 15ª parte de 360. Logo AB é o lado do pentadecagono.

Traçando o diametro CD e unindo DA e DB, formamos um quadrilatero inscripto DCAB, com suas duas diagonaes DA e CB; logo, applicando o theorema do quadrilatero inscriptivel (th. 86).

$$AB.CD + AC.BD = AD.BC$$

ou, notando que

$$AB = x = a_{15}$$

$$CA = a_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$CB = a_6 = r$$

$$DB = a_3 = r\sqrt{3}$$

$$DA = \overset{*}{a_5} = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

vem:

$$x.2r + \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) r\sqrt{3} = r.\frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

logo

$$x = \frac{r.\frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \frac{r}{2} r\sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2r}$$

$$x = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \frac{r}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}$$

$$x = \frac{r\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5} - 1\right)\sqrt{3}\right]}{4} = a_{15}$$

O pentadecagono convexo fornece 3 pentadecagonos estrellados, unindo os vertices do convexo 7 a 7, 4 a 4 ou 2 a 2.

—

Em resumo:

$$a_4 = r\sqrt{2}$$

$$a_6 = r$$

$$a_3 = r\sqrt{3}$$

$$a_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$\overset{*}{a}_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

$$a_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\overset{*}{a}_8 = r\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$a_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\overset{*}{a}_{12} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

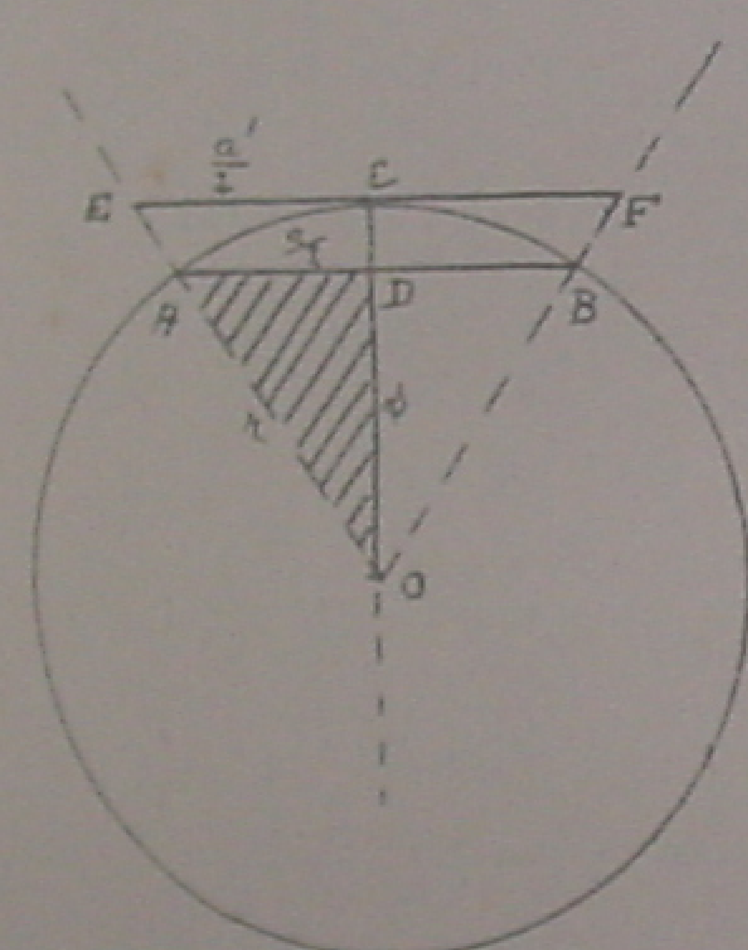
$$a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\overset{*}{a}_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$a_{15} = \frac{r\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5} - 1\right)\sqrt{3}\right]}{4}$$

Calculo de π

Problema. — Conhecendo o raio de um circulo e o lado d'um polygono n'elle inscripto, calcular o lado



do polygono semelhante circumscripto.

Seja $AB = a$, o lado do polygono inscripto; traçando os raios OA e OB e prolongando-os, traçando OD perpendicular sobre AB e pelo ponto C traçando a tangente, a porção da tangente comprehendida entre os prolongamentos dos raios OA e OB, isto é, a porção $EF = a'$, será o lado do polygono circumscripto semelhante ao inscripto dado.

Notemos que os triangulos semelhantes EFO e ABO, nos dão a relação:

$$\frac{a'}{a} = \frac{r}{s}$$

Mas

$$s^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4r^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}\left(4r^2 - a^2\right)$$

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

logo

$$a' = \frac{ar}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

No caso interessante de $r = 1$ temos

$$a' = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}$$

—

Problema — Conhecendo o lado d'um polygono regular inscripto e o raio do circulo circumscripto, calcular o lado do polygono regular inscripto de um numero duplo de lados.

Seja $AB = a$, o lado do polygono regular inscripto. Traçando OC perpendicular sobre AB e unindo AC, temos o lado do polygono regular inscripto de um numero duplo de lados, $AC = a'$.

Unindo AG e AO, o triangulo GAC nos dá:

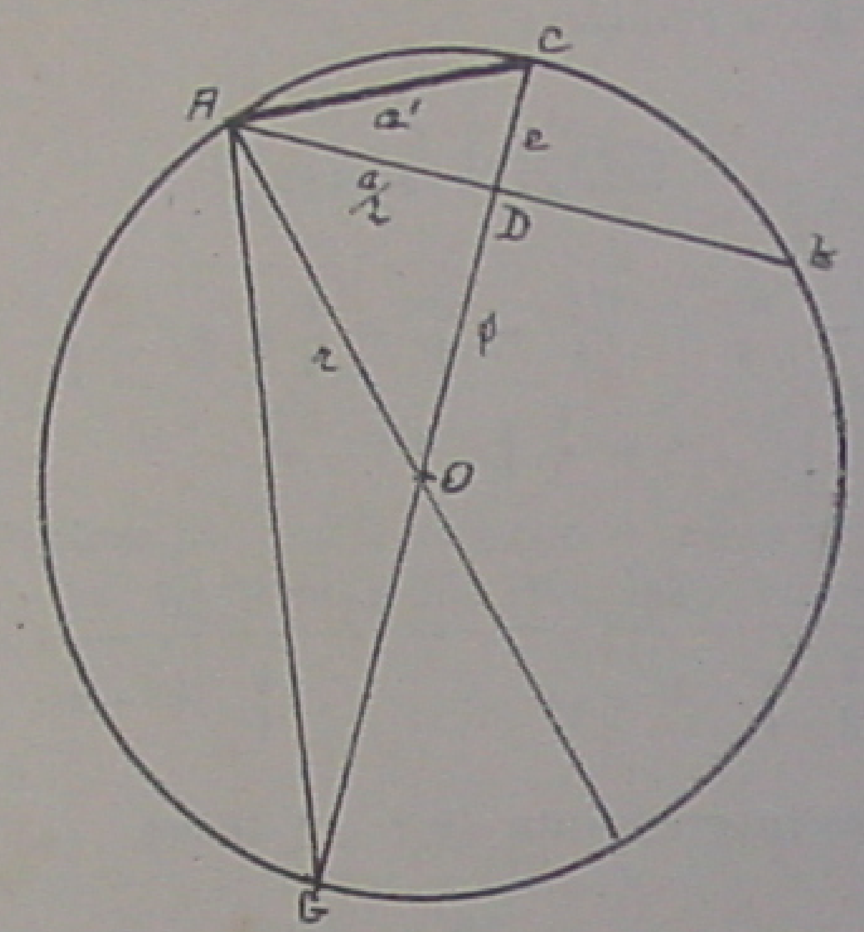
$$a'^2 = 2re = 2r(r - s) = 2r^2 - 2rs$$

$$a' = \sqrt{2r^2 - 2rs}$$

Mas

$$s^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4r^2 - a^2}{4}$$

$$s = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$$



logo

$$a' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

No caso em que r fosse igual a 1, teriamos :

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

—

Problema. — Conhecendo o lado do pentagono

$$a = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

calcular o lado do decagono inscripto no mesmo circulo.

$$a' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})}} =$$

$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{\frac{16r^2}{4} - \frac{10r^2}{4} + \frac{2r^2\sqrt{5}}{4}}} =$$

$$= \sqrt{2r^2 - r\frac{r}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} =$$

$$= \sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1}} =$$

$$= \sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)} =$$

$$= \sqrt{2r^2 - \frac{r^2\sqrt{5}}{2} - \frac{r^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4r^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8r^2 - 2r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{4}} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

logo

$$a' = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

—

CALCULO de π, (processo de Ludolph von Eulen).—Na formula:

$$C = 2\pi r$$

façamos

$$r = \frac{1}{2}$$

teremos;

$$C = 2\pi \frac{1}{2}$$

ou

$$C = \pi$$

Inscrevendo um hexagono no circulo de raio

$$\frac{1}{2}$$

o lado d'esse hexagono será 0,5. Podemos calcular o lado do hexagono circumscripto semelhante ao primeiro e achamos 0, 5 7 7 3 6.

Si dobramos o numero de lados de um e outro polygono, e si para cada um d'elles calculamos o perimetro, constatamos que os perimetros do polygono inscripto e do circumscripto approximam-se da circumferencia á medida que o numero de lados vai augmentando.

Ludolph fez a tabella seguinte:

n	*i*	*c*	*p*	*P*
6	0,50000	0,57736	3,00000	3,46414
12	0,25881	0,26793	3,10582	3,21534
24	0,13052	0,13166	3,13262	3,15965
48	0,06540	0,06555	3,13934	3'14609
96	0,03271	0,03274	3,14103	3,14266
192	0,01636	0,01637	3,14144	3,14170

n indicando o numero de lados dos polygonos inscriptos e seus semelhantes circumscriptos, i os lados dos inscriptos, c os lados dos circumscriptos, p os perimetros dos primeiros e P os perimetros dos segundos.

Com polygonos de 192 lados, Ludolph achou perimetros de

$$3,\ 1\ 4\ 1\ 4\ 4$$

e

$$3,\ 1\ 4\ 1\ 7\ 0$$

Tomando as tres decimaes communs aos resultados, temos um valor approximado de π.

$$\pi = 3,\ 1\ 4\ 1$$

E' por este processo que Ludolph von Eulen achou o numero π com 19 casas decimaes.

$\pi = 3,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 8\ 9\ 7\ 9\ 3\ 2\ 3\ 8\ 5 \ldots$

—

Processo dos perimetros (ou de Archimedes.) Sabemos que

$$C = 2\pi r$$

ou

$$\pi = \frac{C}{2r}$$

Façamos r = 1, então

$$\pi = \frac{C}{2}$$

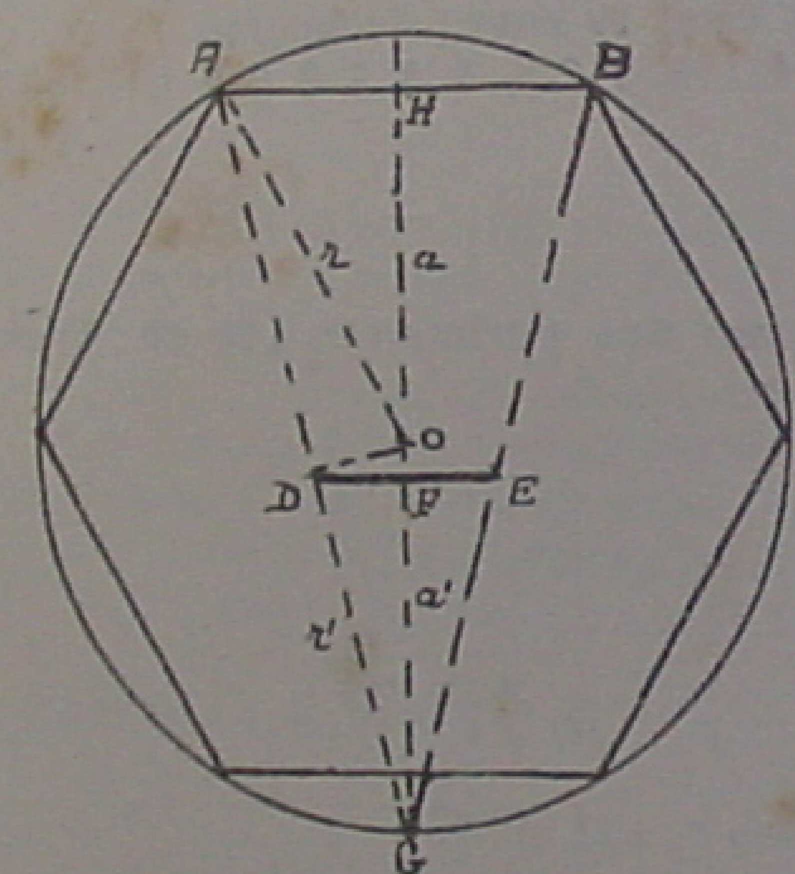
Partindo do quadrado e dobrando o numero de lados successivamente, porém sempre inscriptos no mesmo circulo de raio 1, no limite teremos um polygono de um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos, inscripto n'esse mesmo circulo de raio 1, e cujo perimetro approximar-se-ha da circumferencia circumscripta (raio 1). Bastará dividir por 2 este perimetro approximado da circumferencia, e ter-se-ha um valor approximado de π.

Por esse processo, que é devido a ARCHIMEDES, achou-se:

$$\pi = 3,1415926\ldots$$

com um polygono de 32768 lados.

Processo dos isoperimetros (ou de Descartes). — Conhecendo o apothema e o raio d'um polygono regular podemos calcular o apothema e o raio do polygono regular isoperimetro d'um numero duplo de lados.



$$AD = \frac{AG}{2} \text{ logo } DE = \frac{AB}{2}$$

$$GF = \frac{1}{2} GH = \frac{1}{2}\left(OH + OG \right)$$

$$GF = a' = \frac{a + r}{2}$$

$$r'^2 = GD^2 = GF \cdot GO = a'r$$

$$r' = \sqrt{a'r}$$

Tomando C = 4, teremos:

$$\pi = \frac{4}{2r} = \frac{2}{r}$$

Inscreve-se um quadrado de 4ᵐ de perimetro, o raio é então

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

e o apothema

$$\frac{1}{2}$$

Calcula-se o raio e o apothema do octogono isoperimetro, depois o raio e o apothema do polygono regular de 16 lados, e assim por diante...

O raio tende a diminuir e o apothema a augmentar, e seu limite commum é o raio da circumferencia de 4ᵐ de perimetro. Chamando r este raio, e r_1 e a_1, o raio e o apothema d'um dos polygonos isoperimetros, teremos sempre:

$$r_1 > r > a_1$$

$$\frac{2}{r_1} < \frac{2}{r} < \frac{2}{a_1}$$

$$\frac{2}{r_1} < \pi < \frac{2}{a_1}$$

Toma-se r_1 e a_1 com as decimaes communs, e 2 dividido por esse numero nos dá um valor approximado de π.

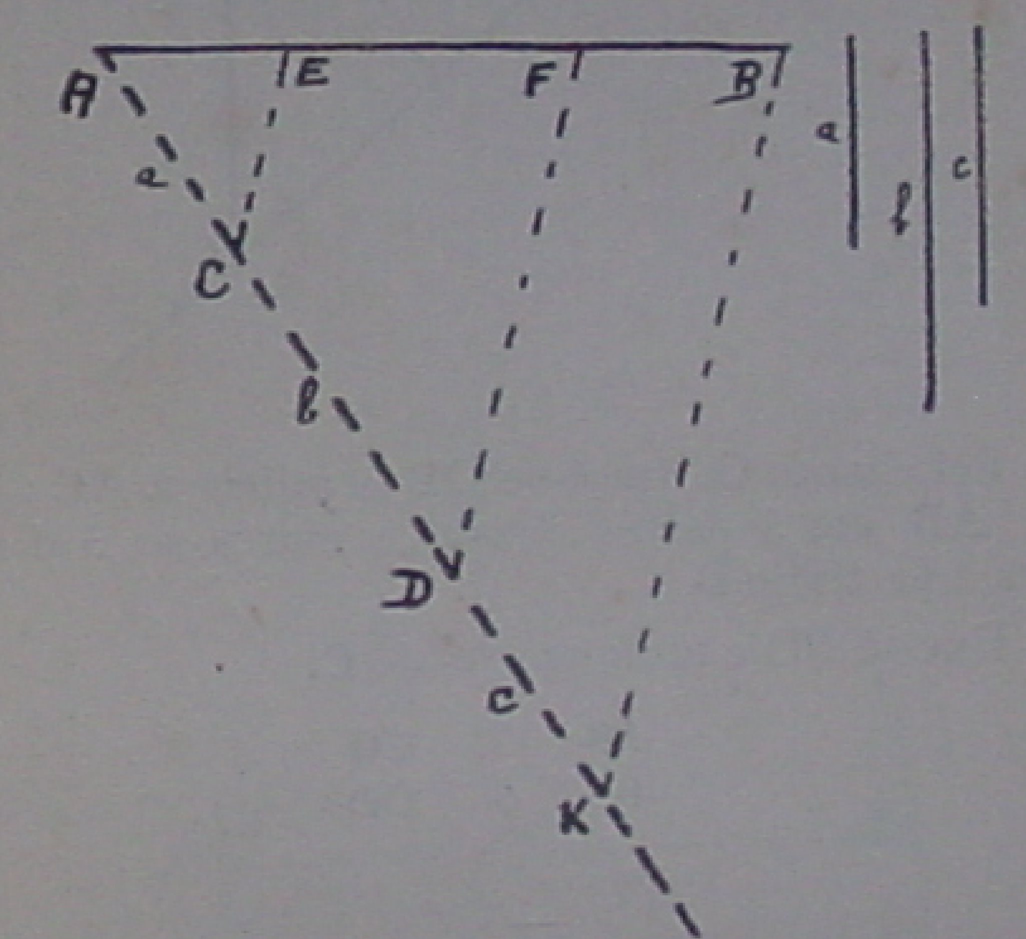
LADOS	APOTHEMAS	RAIOS
4	0, 5 0 0 0 0 0 0	0, 7 0 7 1 0 6 8
8	0, 6 0 3 5 3 3 4	0, 6 5 3 2 8 1 5
.	.	.
.	.	.
.	.	.
8 1 9 2	0, 6 3 6 6 1 9 6	0, 6 3 6 6 1 9 6

logo

$$\pi = \frac{2}{0,6366196} = 3,141593\ldots$$

Alguns problemas

Dividir uma recta em partes proporcionaes a grandezas dadas. — Traça-se uma recta auxiliar AK e



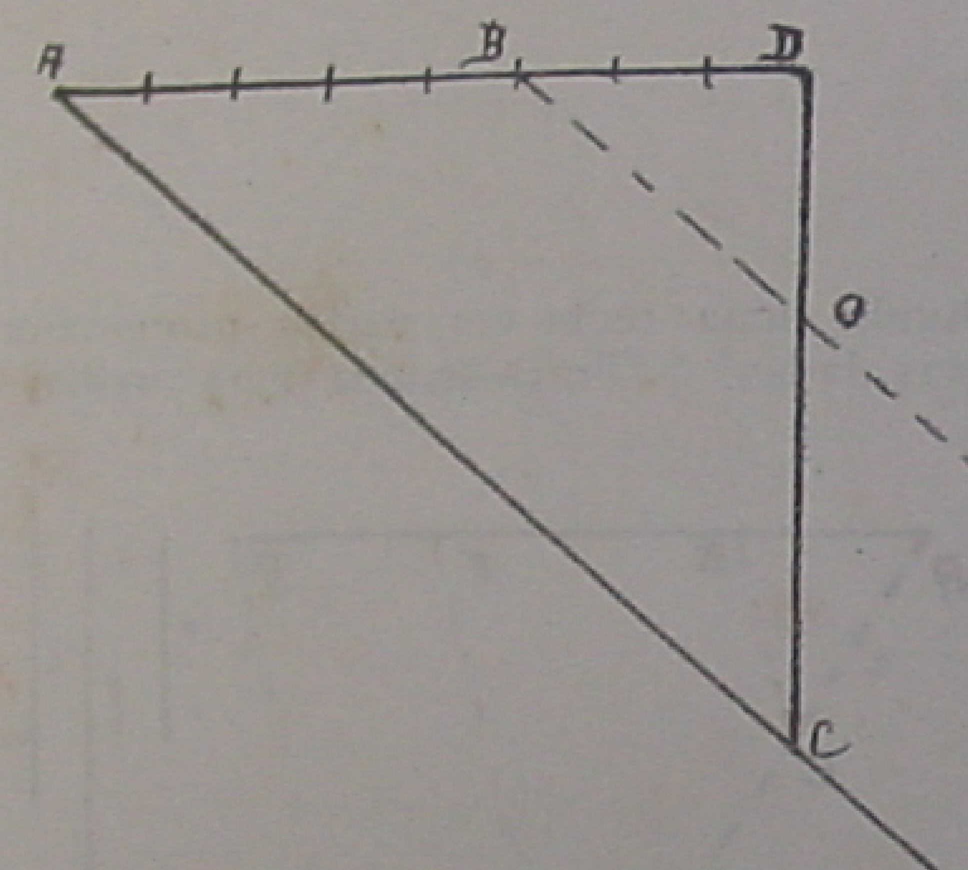
a partir de A mede-se AC = a, CD = b, DK = c.
Une-se KB e traça-se DF e CE parallelas a KB.

a:b:c::AC:CD:DK::AE:EF:FB

Por um ponto dado O, n'um angulo qualquer

A, traçar uma recta que seja dividida n'esse ponto n'uma razão dada, por exemplo:

$$\frac{5}{3}$$



Pelo ponto O, traça-se OB parallela a AC: divide-se AB em 5 partes iguaes e marca-se 3 d'estas partes a partir de B.

Une-se DO e prolonga-se até C.

$$\frac{AB}{BD} = \frac{5}{3} = \frac{CO}{OD}$$

—

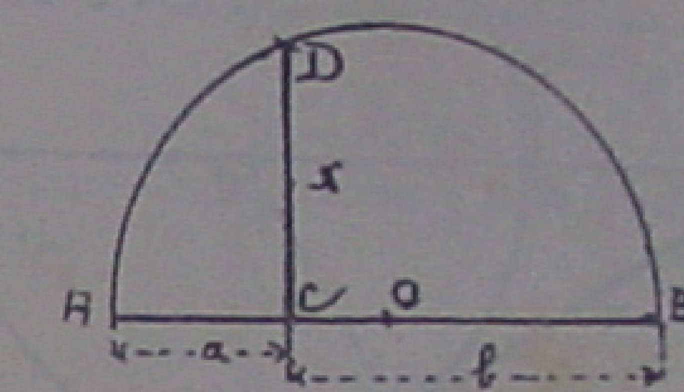
Construir a quarta proporcional a 3 rectas dadas.

Construir a terceira proporcional a 2 rectas dadas.

—

Construir a media proporcional a 2 rectas dadas.

1º processo

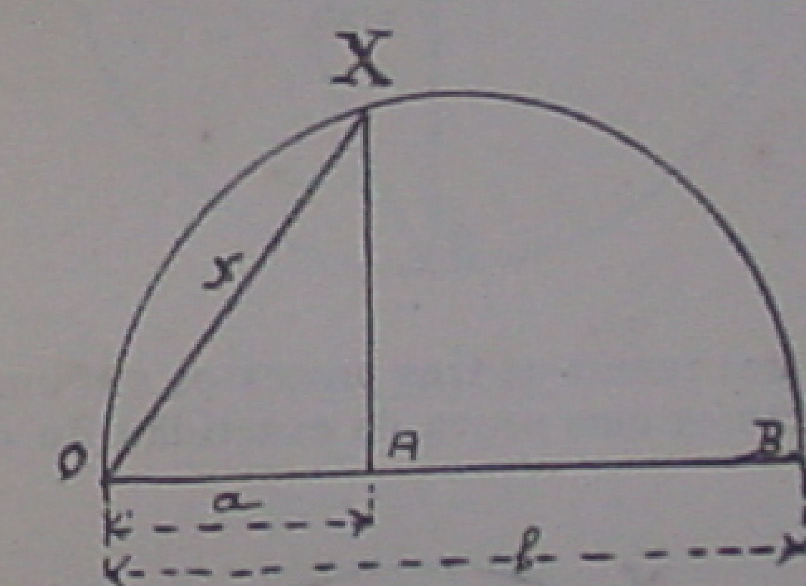


$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

$$x^2 = ab$$

$$x = \sqrt{ab}$$

2º processo

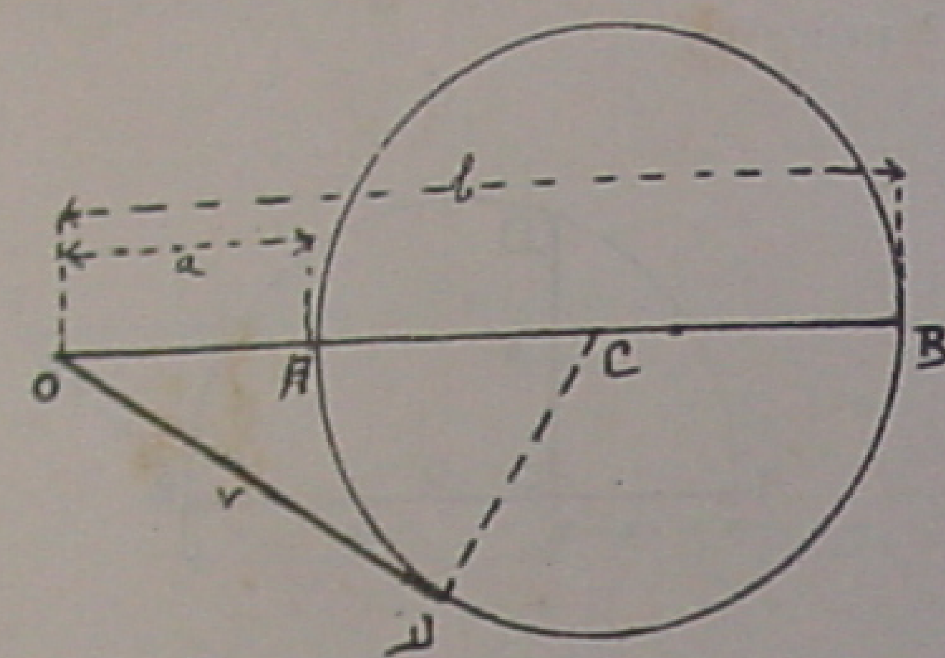


$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OB} \qquad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

$$x^2 = ab$$

$$x = \sqrt{ab}$$

3º processo

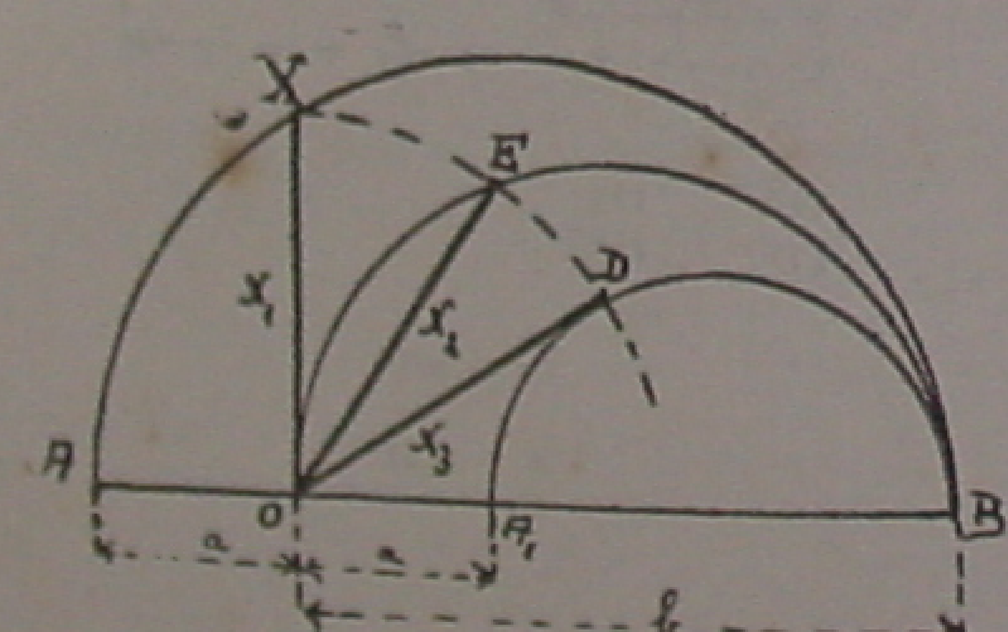


$$\frac{OA}{OD} = \frac{OD}{OB}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

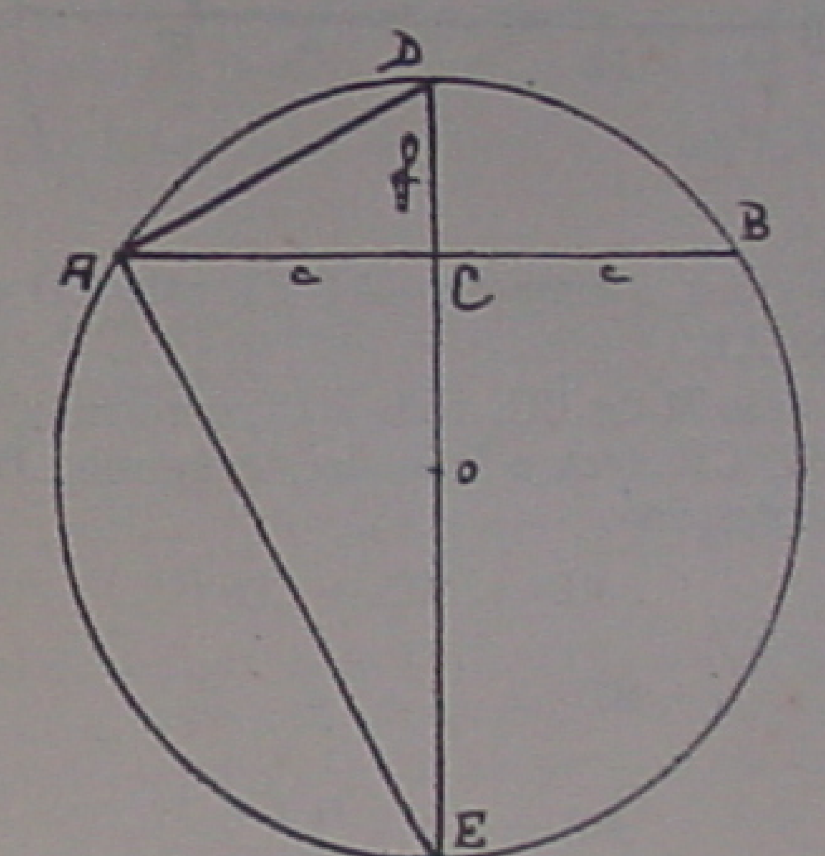
$$x^2 = ab$$
$$x = \sqrt{ab}$$

Podemos reunir os tres processos em uma mesma figura e teremos uma prova da exactidão do desenho.



Os tres pontos D, E e X devem estar no mesmo arco de circulo, tendo O como centro.

Conhecendo uma corda e sua flecha, calcular o raio do circulo.



$$CE \cdot CD = AC^2$$

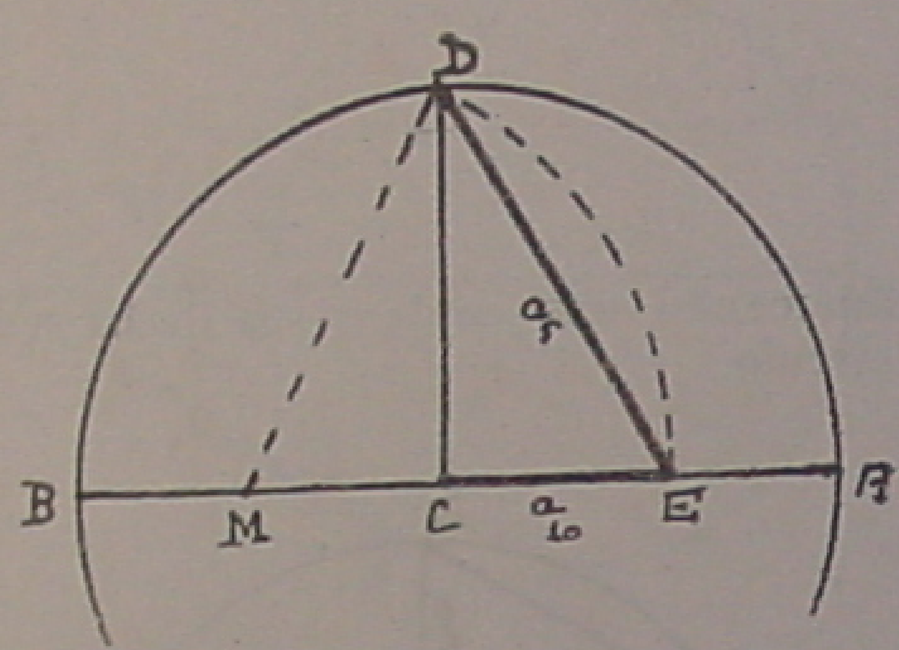
$$(2r - f)\, f = c^2$$

$$2rf - f^2 = c^2$$

$$2r = \frac{c^2 + f^2}{f}$$

$$r = \frac{c^2 + f^2}{2f}$$

Determinar o lado do decagono e do pentagono inscriptos n'um circulo de raio dado r.



Tracemos o diametro AB e o raio CD perpendicular sobre AB.

Do meio M de BC, com MD como raio, tracemos o arco DE. CE será o lado do decagono, DE será o lado do pentagono.

$$MD^2 = MC^2 + CD^2$$

$$MD^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5r^2}{4}$$

$$ME = MD = \frac{r\sqrt{5}}{2}$$

$$CE = ME - MC = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

logo

$$CE = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

é a expressão já conhecida do lado do decagono convexo.

Basta agora resolver o triangulo rectangulo DCE e veremos que

$$DE = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

que é o lado do pentagono.

Problemas para resolver

---

1 — Achar o lado de um polygono regular de 12 lados, circumscripto a um circulo de raio = 4^m.

2 — Dividir uma recta de 60^m em media e extrema razão.

3 — Que relação deve existir entre 4 pontos A, B, C e D de uma recta, para que formem uma divisão harmonica.

4 — Conhecendo o lado do pentagono regular = 6^m, calcular o lado do decagono regular inscripto no mesmo circulo.

5 — Conhecendo o lado do triangulo equilatero = 9^m inscripto n'um certo circulo, calcular o lado do triangulo equilatero circumscripto ao mesmo circulo.

6 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um pentagono de 7^m de lado.

7 — Calcular o apothema de um hexagono regular de 5^m de lado.

8 — Calcular o raio do circulo inscripto n'um decagono regular cujo perimetro = 20^m.

9 — Conhecendo o lado do decagono regular inscripto n'um circulo de raio = 10^m, calcular o perimetro do polygono regular de 24 lados inscripto no mesmo c rculo.

10 — Quanto vale o raio do circulo circumscripto a um pentagono regular estrellado de 8^m de lado.

11 — Calcular o lado do pentadecagono inscripto n'um circulo de raio = 25^m.

12 — D'um certo ponto K, traço uma secante e uma tangente a uma mesma circumferencia O. Sabendo que a tangente vale 4^m e que a parte exterior da secante vale $1^m,2$; quanto valerá a secante inteira.

13 — N'um triangulo rectangulo, o perimetro vale 60^m, e o menor catheto tem 16^m menos do que a hypotenusa. Calcular os tres lados.

14 — Duas cordas se cortam n'um circulo; os dois segmentos de uma são 4^m e 6^m. Quaes são os segmentos da outra corda si o seu comprimento total é de 12.

15 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um decagono regular estrellado de 10^m de lado.

16 — Conhecendo o lado do octogono regular convexo $= 3^m$, calcular o lado do octogono regular estrellado inscripto no mesmo circulo.

17 — Conhecendo o perimetro de um pentagono regular convexo $= 50^m$, calcular o lado do pentagono regular estrellado inscripto no mesmo circulo.

18 — Calcular o apothema d'um quadrado inscripto n'um circulo de raio $= 3^m$.

19 — Calcular a flecha correspondente ao lado do pentagono convexo regular inscripto n'um circulo de raio $= 10^m$.

20 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um pentadecagono convexo regular de perimetro $= 42^m$.

21 — Calcular a altura de um triangulo equilatero inscripto de perimetro $= 9^m$.

22 — O lado de um decagono regular convexo valendo 5^m, calcular o lado do pentagono inscripto no mesmo circulo.

23 — Quanto vale o maior segmento de uma recta de 16^m dividida em media e extrema razão.

24 — Calcular o maior segmento de uma recta de 21^m, dividida em media e extrema razão.

25 — Calcular o lado do triangulo equilatero inscripto n'um circulo de raio $= 10^m$.

26 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um triangulo regular do lado $= 3,6$.

27 — Calcular a bissectriz d'um angulo de um triangulo equilatero inscripto n'um circulo de raio $= 10^m$.

28 — Calcular a bissectriz d'um angulo de um triangulo equilatero inscripto n'um circulo de raio $= 11^m$.

29 — Calcular o raio do circulo inscripto n'um triangulo equilatero de 34^m de perimetro.

30 — Calcular o lado do quadrado inscripto n'um circulo de 3^m de raio.

31 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um quadrado de perimetro $= 20^m$.

32 — Calcular a diagonal d'um quadrado de 10^m de perimetro.

33 — Quanto vale o raio do circulo circumscripto a um quadrado cuja diagonal $= 7^m,2$.

34 — Calcular o raio do circulo inscripto n'um quadrado de 28^m de perimetro.

35 — Calcular o perimetro de um quadrado cuja diagonal $= 7^m,25$.

36 — Calcular o perimetro de um quadrado cujo apothema $= 9^m,2$.

37 — Calcular o lado do decagono regular convexo inscripto n'um circulo de raio $= 26^m$.

38 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um decagono regular estrellado cujo lado $= 6^m,4$.

39 — Calcular o diametro do circulo circumscripto a um decagono regular convexo de perimetro $= 40^m$.

40 — Calcular o lado de um triangulo regular circumscripto a um circulo de raio 10^m.

41 — Calcular o lado de um decagono regular circumscripto a um circulo de raio $2^m,315$.

42 — Calcular o lado do decagono regular circumscripto a um circulo em que o perimetro do decagono regular inscripto tem de comprimento $2^m,2$.

43 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um decagono regular que é circumscripto a um circulo em que o lado do decagono regular inscripto tem de lado 12^m.

44 — Calcular o lado do pentagono regular circumscripto a um circulo de raio 15^m.

45 — Calcular o lado do octogono regular inscripto n'um circulo em que o lado do quadrado inscripto é de 9^m.

46 — Calcular o lado do decagono regular inscripto n'um circulo de raio 8^m.

47 — Calcular o lado de um polygono regular de 16 lados inscripto n'um circulo de raio 12^m.

48 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um icosagono de perimetro 18^m.

49 — Calcular o apothema de um octogono regular inscripto n'um circulo de raio $3^m,6$.

50 — Rectificar uma circumferencia de raio 20^m.

51 — Qual é o raio de um circulo sendo o comprimento da circumferencia 984^m.

52 — Calcular o raio de um circulo, sendo a semi-circumferencia rectificada igual a $2^m,25$.

53 — Inscrevendo n'uma circumferencia um triangulo equilatero de perimetro 45^m, calcular o comprimento d'esta circumferencia.

54 — Rectificar uma circumferencia circumscripta a um decagono regular de $8^m,3$ de perimetro.

55 — Rectificar uma circumferencia circumscripta a um pentagono regular de apothema $2^m,5$.

56 — Rectificar uma circumferencia circumscripta a um octogono de 3^m de lado.

57 — Calcular o apothema de um pentagono regular sabendo que o lado é equivalente ao perimetro de um triangulo regular de apothema $0^m,6$.

58 — Calcular o lado do pentagono inscripto n'um circulo de raio 7^m.

59 — Calcular o lado do pentagono circumscripto a um circulo de raio 10^m.

60 — Conhecendo os raios de dois circulos, respectivamente 10^m e 3^m, e a distancia 25^m dos seus centros, determinar o ponto da linha dos centros pelo qual passa o eixo radical.

61 — Mesmo problema para circulos de raios 30^m e 7^m, e distancia dos centros de 60^m.

4ª PARTE