44 — Calcular o lado do pentagono regular circumscripto a um circulo de raio 15^m.

45 — Calcular o lado do octogono regular inscripto n'um circulo em que o lado do quadrado inscripto é de 9^m.

46 — Calcular o lado do decagono regular inscripto n'um circulo de raio 8^m.

47 — Calcular o lado de um polygono regular de 16 lados inscripto n'um circulo de raio 12^m.

48 — Calcular o raio do circulo circumscripto a um icosagono de perimetro 18^m.

49 — Calcular o apothema de um octogono regular inscripto n'um circulo de raio $3^m,6$.

50 — Rectificar uma circumferencia de raio 20^m.

51 — Qual é o raio de um circulo sendo o comprimento da circumferencia 984^m.

52 — Calcular o raio de um circulo, sendo a semi-circumferencia rectificada igual a $2^m,25$.

53 — Inscrevendo n'uma circumferencia um triangulo equilatero de perimetro 45^m, calcular o comprimento d'esta circumferencia.

54 — Rectificar uma circumferencia circumscripta a um decagono regular de $8^m,3$ de perimetro.

55 — Rectificar uma circumferencia circumscripta a um pentagono regular de apothema $2^m,5$.

56 — Rectificar uma circumferencia circumscripta a um octogono de 3^m de lado.

57 — Calcular o apothema de um pentagono regular sabendo que o lado é equivalente ao perimetro de um triangulo regular de apothema $0^m,6$.

58 — Calcular o lado do pentagono inscripto n'um circulo de raio 7^m.

59 — Calcular o lado do pentagono circumscripto a um circulo de raio 10^m.

60 — Conhecendo os raios de dois circulos, respectivamente 10^m e 3^m, e a distancia 25^m dos seus centros, determinar o ponto da linha dos centros pelo qual passa o eixo radical.

61 — Mesmo problema para circulos de raios 30^m e 7^m, e distancia dos centros de 60^m.

4ª PARTE

Definições

Area de uma figura é a extensão de sua superficie.

Medir a area de uma figura é procurar sua razão com uma area tomada por unidade.

Por exemplo, considerando um parallelogrammo, e tomando como unidade de area o metro quadrado: a area do parallelogrammo é o numero que indica quantas vezes o metro quadrado é contido na superficie do parallelogrammo, isto é, na porção do plano occupada pelo parallelogrammo.

Figuras equivalentes são as que a têm a mesma area, sem por isso terem a mesma forma.

Altura de um parallelogrammo é a perpendicular que mede a distancia de dois lados oppostos da figura: cada um d'estes lados é base do parallelogrammo.

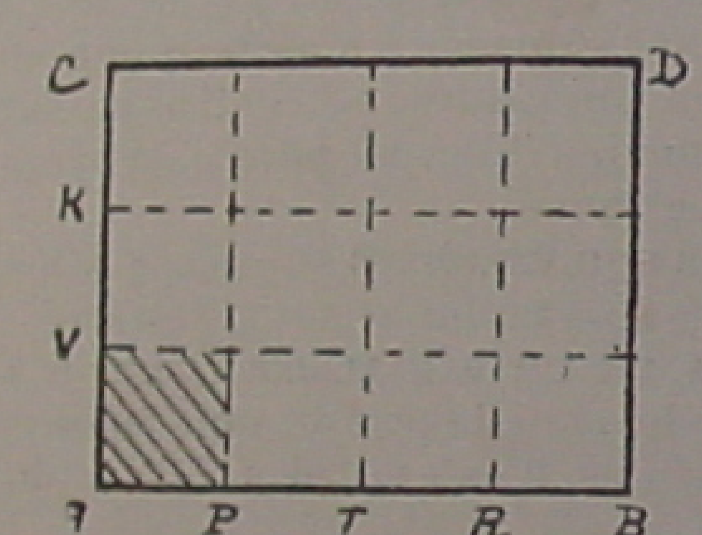
Altura d'um triangulo é a perpendicular traçada de um vertice qualquer sobre o lado opposto (este lado será a base do triangulo).

Altura de um trapezio é a perpendicular que mede a distancia dos dois lados parallelos da figura. Estes dois lados são as bases do trapezio.

Rectangulo

A area de um rectangulo é igual ao producto da base pela altura.

Seja o rectangulo ABCD.



Supponhamos que, na base AB, de A até B, o metro seja contido exactamente um certo numero de vezes, por exemplo 4 vezes; e supponhamos tambem que na altura AC o metro fosse contido exactamente 3 vezes.

Pelos pontos de divisão P, T, R, traço parallelas a AC, e pelos pontos V e K, traço parallelas a AB.

Terei assim decomposto o meu rectangulo em um certo numero de metros quadrados.

Por cima de AB, conto quatro metros quadrados, e estes 4 metros quadrados são repetidos no rectangulo tantas vezes quantas o metro é contido de A até C, isto é, 3 vezes.

Logo, o rectangulo contem 4·3 metros quadrados,

ou 12 metros quadrados. A sua area é, pois, de 12 metros quadrados. E' o producto da base pela altura.

Em geral, si a unidade de comprimento fosse contida m vezes na base e h vezes na altura, a area do rectangulo seria o producto de m por h.

Pode tambem acontecer que a unidade não seja contida um numero de vezes exacto na base ou na altura; n'este caso toma-se como unidade um sub-multiplo da unidade primitiva, e si essa não servir, toma-se uma unidade ainda menor.

Em todos os casos a area do rectangulo (seja qual fôr a unidade adoptada) será sempre o producto da base pela altura.

$$S = b \cdot h$$

Exemplo: calcular a area de um rectangulo de base $= 3^m,25$ e de altura $= 1^m,7$?

Sabemos que

$$S = b \cdot h = 3.25 \times 1.7$$

A difficuldade toda consiste em bem representar o producto.

Lembremo-nos (da arithmetica) que um metro quadrado corresponde a 100 decimetros quadrados, o decimetro quadrado a 100 centimetros quadrados, o centimetro quadrado a 100 millimetros quadrados, e assim por diante.

Nos dados do problema a base é avaliada em centimetros e a altura em decimetros. — Transformemos a altura em centimetros: teremos:

$$S = b \times h = 3.25 \times 1.70$$

que nos dá: 6.5250

logo a area do nosso rectangulo será de 6 metros quadrados, 52 decimetros quadrados e 50 centimetros quadrados.

Theorema 89. — Dois rectangulos de mesma altura são proporcionaes ás suas bases.

Sejam os rectangulos S_1 e S_2, com a mesma altura h, sendo as bases respectivamente b_1 e b_2.

Sabemos que

$$S_1 = b_1 h$$

e

$$S_2 = b_2 h$$

dividindo membro a membro achamos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 h}{b_2 h} = \frac{b_1}{b_2}$$

—

Theorema 90. — Dois rectangulos de mesma base são proporcionaes ás suas alturas.

Sejam os dois rectangulos S_1 e S_2, com a mesma base b, sendo as alturas respectivamente h_1 e h_2.

Temos

$$S_1 = b . h_1$$
$$S_2 = b . h_2$$

logo

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

—

Theorema 91. — Dois rectangulos quaesquer são proporcionaes aos productos de suas bases pelas suas alturas.

Sejam b_1 e b_2, h_1 e h_2, as bases e as alturas respectivas de dois rectangulos S_1 e S_2.

Imaginemos um terceiro rectangulo S_3 que tivesse b_1 por base e h_2 por altura.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1 h_1}{b_1 h_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Comparando S_3 e S_2 achamos

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Multiplicando estas duas ultimas igualdades membro a membro, achamos:

$$\frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{S_3}{S_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{b_1}{b_2}$$

ou

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1 b_1}{h_2 b_2}$$

Si S_2 fosse unidade de superficie, h_2 seria $= 1$, e $b_2 = 1$, logo:

$$\frac{S_1}{1} = \frac{h_1 b_1}{1}$$

ou $$S_1 = h_1 b_1$$

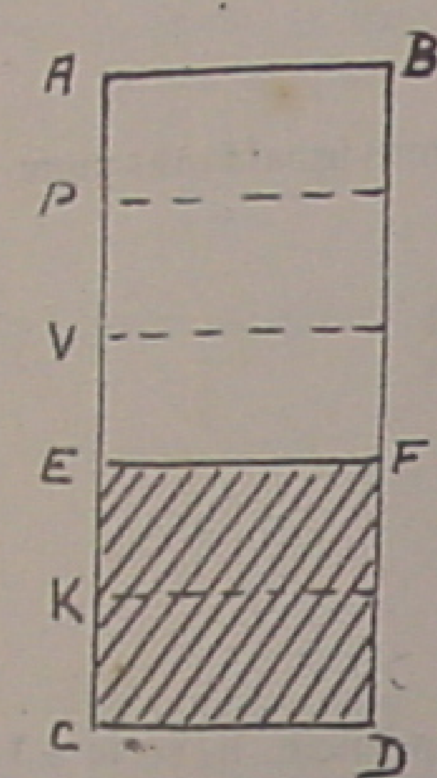
O que confirma o que já dissemos logo no principio — a area do rectangulo é igual ao producto da base pela altura.

Quadrado. — O quadrado é um rectangulo cuja base é igual á altura. Logo a area do quadrado é igual ao producto da base pela altura, é igual ao producto de dois numeros iguaes.

A area do quadrado é pois igual ao quadrado do lado.

Exemplo. — A area de um quadrado de 1m,2 de lado $= (1,2)^2 = 1,44$. A area é pois de 1 metro quadrado e 44 decimetros quadrados.

Theorema A—Dois rectangulos de mesma base estão na mesma razão que as alturas.



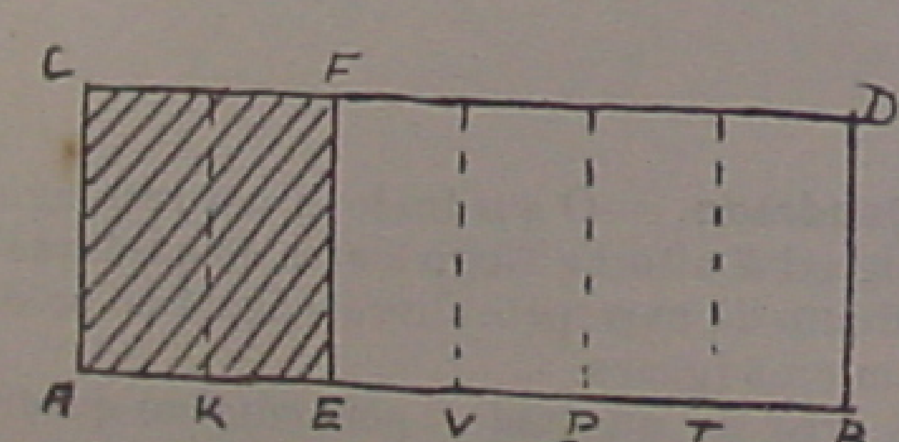
Sejam os dois rectangulos ABCD e EFCD, com a mesma base CD. As alturas são respectivamente CA e CE. Supponhamos que entre CA e CE haja uma medida commum contida exactamente 5 vezes em CA e 2 vezes em CE. Pelos pontos de divisão K, V e P, traçando parallelas a CD, determino 5 rectangulos iguaes. Ora, ABCD e EFCD contêm respectivamente 5 e 2 d'esses rectangulos, logo

$$\frac{ABCD}{EFCD} = \frac{5}{2}$$

NOTA.—No caso em que a medida CK, escolhida, não fosse contida um numero exacto de vezes em AC e em EC, tomariamos medidas cada vez menores até que achassemos uma que fosse contida exactamente entre AC e EC, ou que a differença fosse tão pequena que podesse ser considerada como nulla.

—

Theorema B—Dois rectangulos de mesma altura estão na mesma razão que as bases.



Sejam os dois rectangulos ABCD e AEFC, com a mesma altura AC, e tendo respectivamente AB e AE como base.

Seja AK, uma medida contida exactamente 6 vezes em AB e 2 vezes em AE.

Traçando as parallelas a AC pelos pontos de divisão K, V, P e T, formamos 6 rectangulos iguaes.

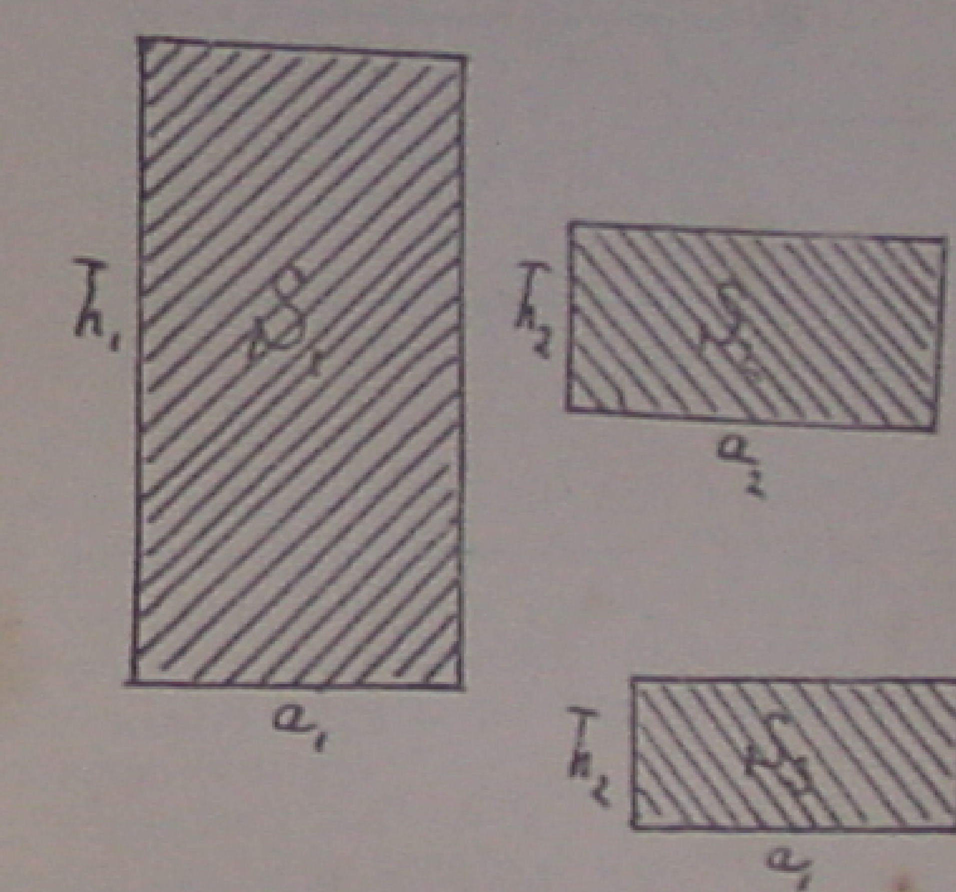
Ora, ABCD e AECF contêm respectivamente 6 e 2 desses rectangulos, logo

$$\frac{ABCD}{EFCD} = \frac{6}{2}$$

NOTA.—No caso em que a unidade escolhida, AK não fosse contida um numero exacto de vezes em AB e AE, procederiamos como no theorema precedente.

—

Theorema C.—Dois rectangulos estão na razão dos productos das suas bases pelas suas alturas.



Sejam os dois rectangulos S_1 e S_2. Imaginemos um terceiro rectangulo S_3 com a base a_1 do primeiro e a altura h_2 do segundo.

Já vimos que

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{h_1}{h_2}$$

e

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

logo

$$\frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{S_3}{S_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{a_1}{a_2}$$

ou

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 h_1}{a_2 h_2}$$

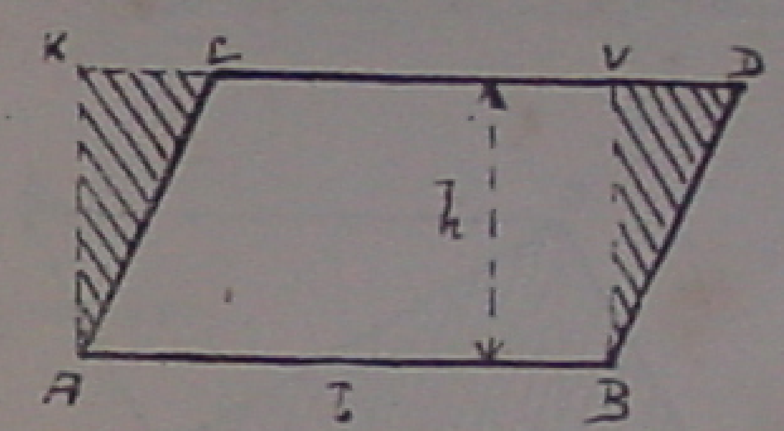
Sendo $a_2 = 1$ e $h_2 = 1$, o rectangulo S_2 será $= 1$, será a unidade de superficie. Logo

$$S_1 = a_1\ h_1$$

Parallelogrammo

Seja o parallelogrammo ABCD.

Pelos pontos A e B, traço as perpendiculares AK e BV. Estas perpendiculares encontram CD em K e em V.



Os triangulos ACK e VBD têm o lado AC = ao lado BD como lados oppostos de parallelogrammo ; o lado AK = ao lado BV como parallelas comprehendidas entre parallelas, e os angulos em A e em B iguaes, por terem os lados respectivamente parallelos e dirigidos no mesmo sentido.

Os triangulos AKC e BVD são, pois, iguaes pelo segundo caso d'igualdade dos triangulos.

Da figura total tirando BVD, sobra o rectangulo ABVK. Da figura total tirando AKC, sobra o parallelogrammo ABCD.

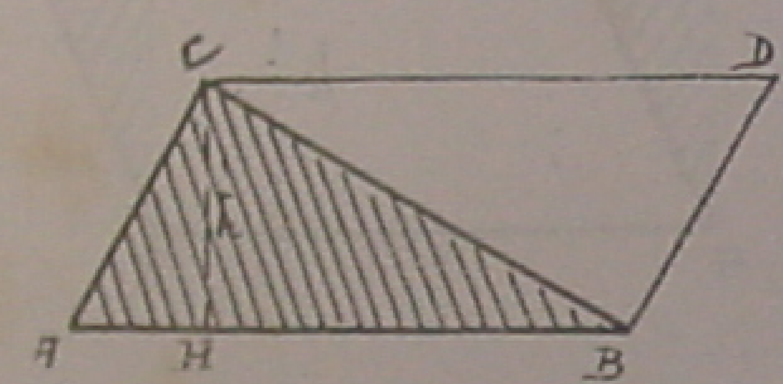
Logo a porção do plano occupada pelo parallelogrammo é igual á porção do plano occupada pelo rectangulo.

A area do parallelogrammo é igual á area do rectangulo de mesma base e de mesma altura.

$$S = b + h$$

Triangulo

Consideremos o parallelogrammo ABCD. Tracemos a diagonal CB. Os dois triangulos ABC e BCD



são iguaes, e cada um d'elles é a metade do parallelogrammo todo.

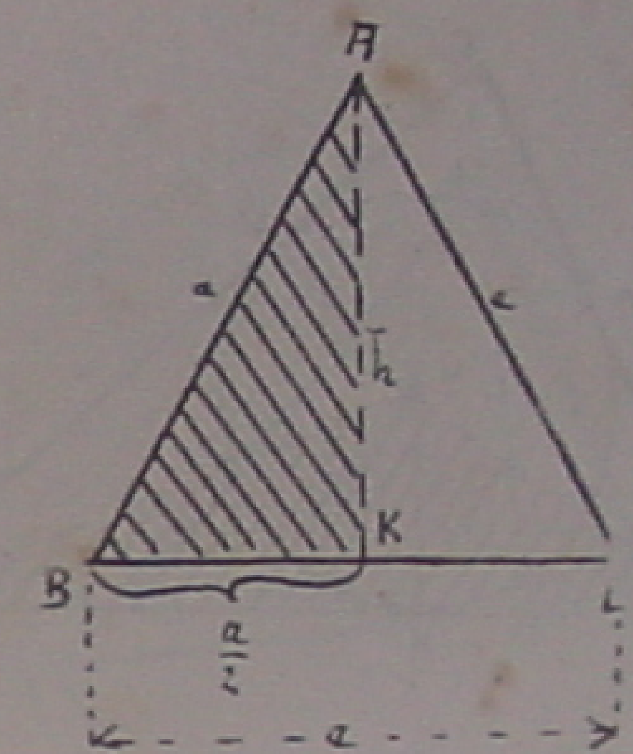
Logo a area do triangulo é igual a metade da area do parallelogrammo de mesma base e mesma altura.

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

NOTA. — Todos os triangulos de mesma base e de mesma altura, são equivalentes.

A parallela á base AB pelo vertice C, é o logar geometrico dos vertices dos triangulos equivalentes ao triangulo ABC.

Triangulo equilatero. — Seja o triangulo equilatero ABC.



Sabemos que

$$S = \frac{ah}{2} \qquad (1)$$

Notando que, no triangulo equilatero, AK altura, tambem é mediana, vêmos que

$$BK = \frac{a}{2}$$

Resolvendo o triangulo rectangulo ABK, achamos:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

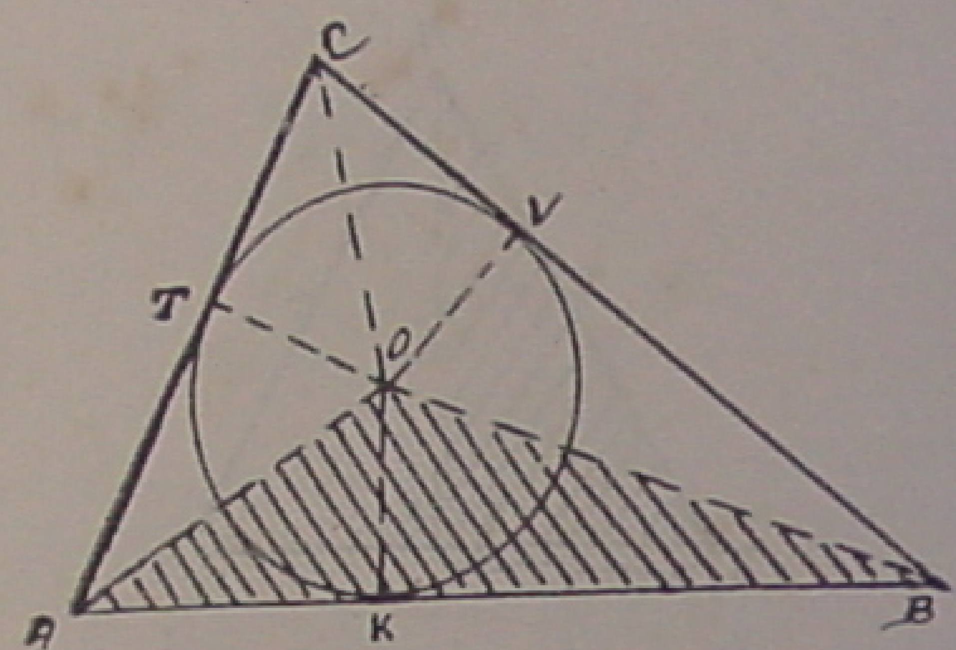
$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Substituindo este valor de h na formula (1), achamos:

$$S = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Triangulo em funcção do raio do circulo inscripto.— Seja o tringulo ABC e o circulo O inscripto.



As rectas OK, OV e OT são as alturas dos triangulos AOB, BOC e AOC, logo

$$\left.\begin{aligned} AOB &= AB\,\frac{OK}{2} \\ BOC &= BC\,\frac{OV}{2} \\ COA &= AC\,\frac{OT}{2} \end{aligned}\right\}$$

mas $OK = OV = OT = r,$

e $ABC = AOB + BOC + COA$

logo $ABC = AB\,\frac{r}{2} + BC\,\frac{r}{2} + AC\,\frac{r}{2}$

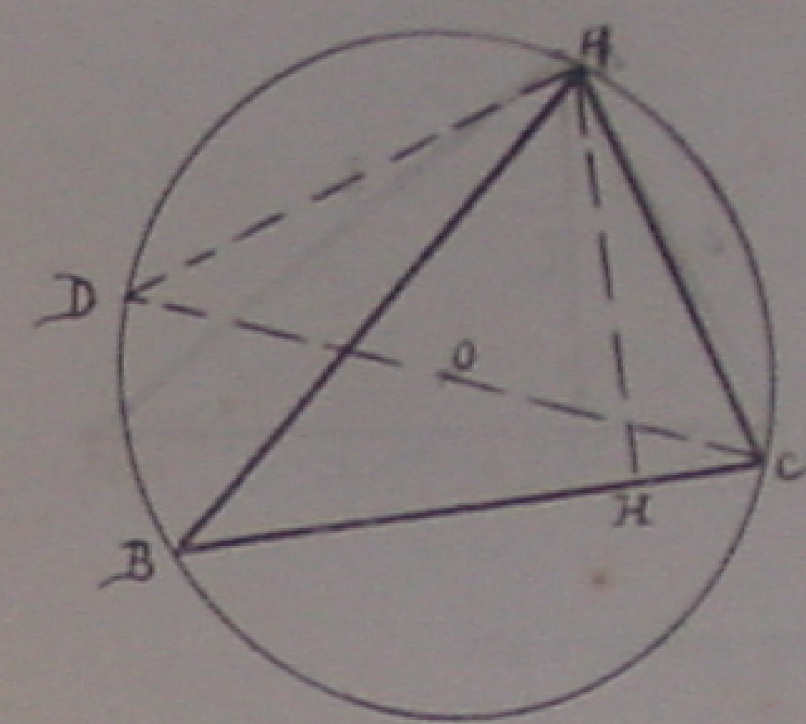
$$ABC = \frac{r}{2}\,(AB + BC + AC)$$

Chamando ao perimetro do triangulo 2p , temos:

$$ABC = \frac{r}{2}\,2p$$

ou $ABC = r.\,p$

Triangulo em funcção do raio do circulo circumscripto. — Já vimos na terceira parte, (pag. 183, th. 85) que,



$$bc = 2rh$$

$$abc = 2rah$$

$$abc = 2r2S$$

$$abc = 4rS$$

logo $S = \frac{abc}{4r}$

e $r = \frac{abc}{4S}$

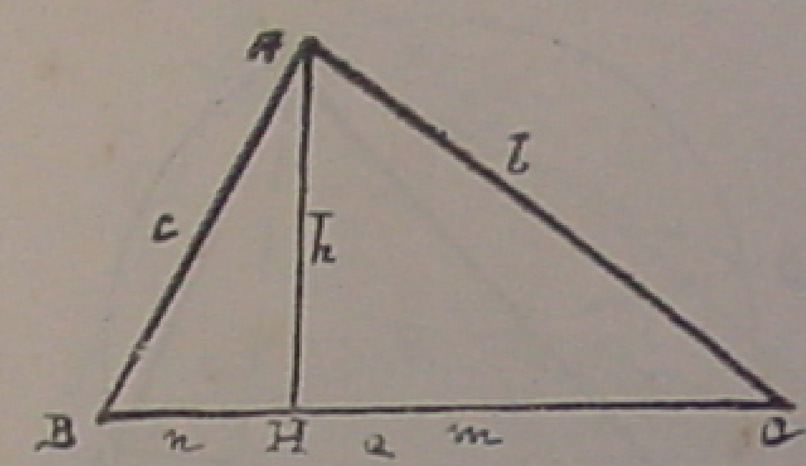
—

Triangulo em funcção dos tres lados. — Seja o triangulo ABC. Já sabemos que

$$S = \frac{ah}{2}$$

logo

$$S^2 = \frac{a^2h^2}{4}$$



Tambem sabemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2am$$

$$m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$m^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} \qquad (1)$$

Ora

$$h^2 = b^2 - m^2$$

Substituindo n'esta formula m^2 pelo valor achado em (1), temos :

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\,(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{[(a + b)^2 - c^2]\,[c^2 - (a - b)^2]}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(a + b + c)\,(a + b - c)\,(c + a - b)\,(c - a + b)}{4a^2}$$

fazendo $a + b + c = 2p$

deduzimos

$$a + b + c - 2a = 2p - 2a$$
$$b + c - a = 2\,(p - a)$$

$$a + b + c - 2b = 2p - 2b$$
$$a + c - b = 2\,(p - b)$$

$$a + b + c - 2c = 2p - 2c$$
$$a + b - c = 2\,(p - c)$$

logo

$$h^2 = \frac{2\,p\,2\,(p - c)\,2\,(p - b)\,2\,(p - a)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{16p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{4\,p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}{a^2}$$

e finalmente

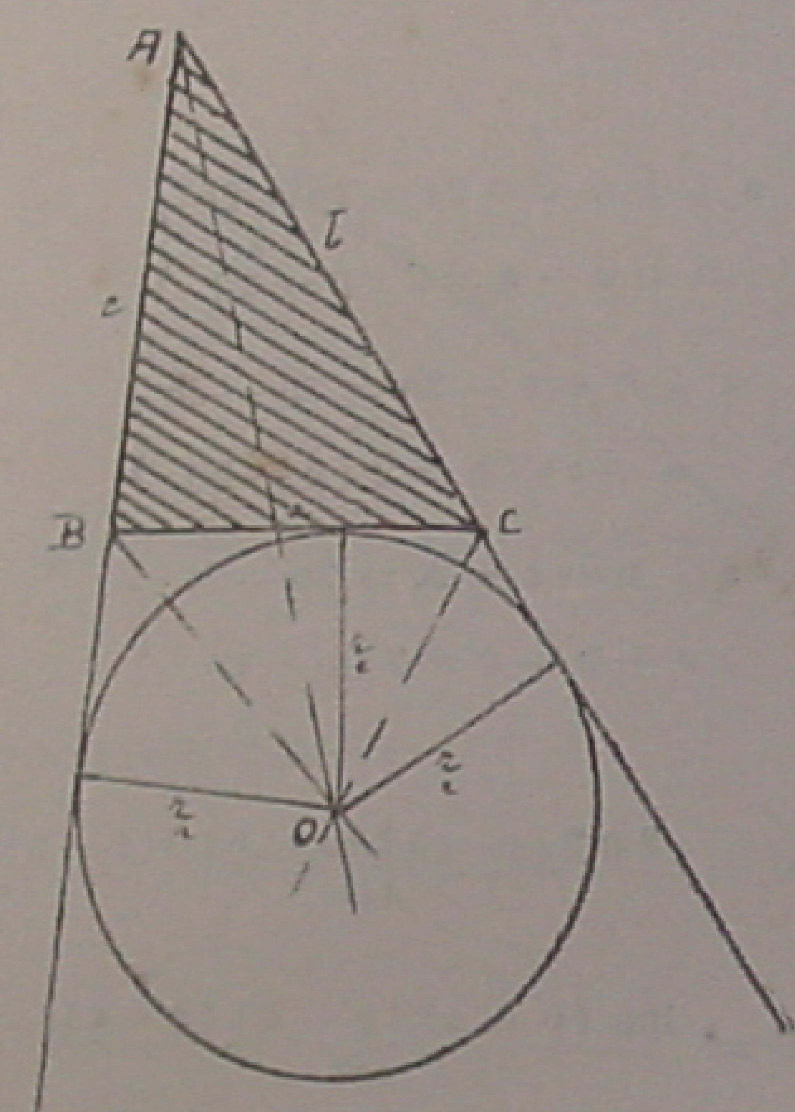
$$S^2 = \frac{a^2h^2}{4} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{4p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}{a^2}$$

ou $S^2 = p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)$

e

$$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

Triangulo em funcção do raio d'um dos circulos ex-inscriptos. — Seja o triangulo ABC.



Consideremos o centro O do circulo ex-inscripto tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC.

O triangulo ABC pode ser considerado como a somma dos dois triangulos AOB e AOC, diminuida do triangulo BOC.

Ora, esses tres triangulos AOB, AOC e BOC, têm a mesma altura r (o raio do circulo ex-inscripto) e suas bases são respectivamente os lados a, b e c do triangulo ABC, logo:

$$S = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} - \frac{ar}{2}$$

ou

$$S = (b + c - a) \frac{r}{2}$$

Ora, já vimos que:

$$b + c - a = 2(p - a)$$

logo

$$S = 2(p - a) \frac{r}{2}$$

ou $$S = (p - a) r$$

D'um modo analogo, achariamos a area do triangulo ABC em funcção dos raios dos dois outros circulos ex-inscriptos.

Chamando r_a ao raio do circulo ex-inscripto tangente ao lado a, chamando r_b ao raio do circulo ex-inscripto tangente ao lado b, e chamado r_c ao raio do circulo ex-inscripto tangente ao lado c, teriamos:

$$S = (p - a) r_a \quad (1)$$
$$S = (p - b) r_b \quad (2)$$
$$S = (p - c) r_c \quad (3)$$

Já vimos que a area do triangulo em funcção do raio do circulo inscripto é:

$$S = pr \quad (4)$$

Multiplicando membro a membro as quatro igualdades (1), (2), (3) e (4) temos:

$$p(p - a)(p - b)(p - c)\, r\, r_a\, r_b\, r_c = S^4 \quad (5)$$

Mas, já vimos que:

$$\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = S$$

logo $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$

Na igualdade (5), temos pois:

$$S^2 r\, r_a\, r_b\, r_c = S^4$$

ou $$r\, r_a\, r_b\, r_c = S^2$$

ou $$S = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}$$

A area d'um triangulo é igual á raiz quadrada do producto dos raios do circulo inscripto e dos tres circulos ex-inscriptos.

—

Triangulo em funcção das tres alturas.

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c$$

$$a = \frac{2S}{h_a},\ b = \frac{2S}{h_b},\ c = \frac{2S}{h_c}$$

$$a + b + c = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c}$$

$$\frac{a+b+c}{2} = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

$$a + b - c = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} - \frac{2S}{h_c}$$

$$\frac{a+b-c}{2} = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$$

$$a - b + c = \frac{2S}{h_a} - \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c}$$

$$\frac{a-b+c}{2} = S\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

$$\frac{b+c-a}{2} = S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)$$

logo

$$p = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

$$p - a = S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)$$

$$p - b = S\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

$$p - c = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = S^4\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$$

$$\frac{1}{S^2} = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$$

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

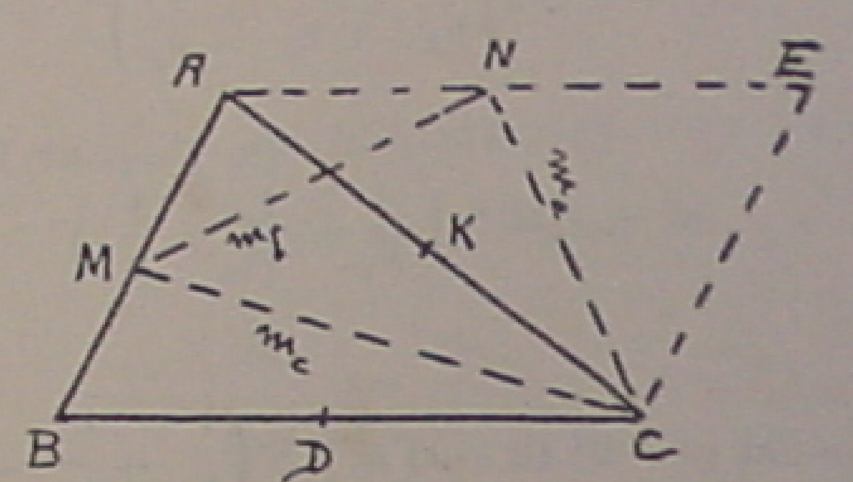
—

Triangulo em funcção das tres medianas. — A area de um triangulo tendo para lados as tres medianas de um triangulo dado é igual a 3/4 da area deste ultimo.

Seja o triangulo ABC, cuja area designamos por S. Tracemos AE parallela a BC, e CE parallela a AB. A area do parallelogrammo ABCE é igual a 2S.

Sendo M o meio de AB, N o meio de AE, as rectas CM, MN e NC serão as medianas do triangulo

ABC. E' facil verificar que, sendo D e K os meios dos lados BC e AC, será MN = BK e CN = AD.



Designamos a area do triangulo MNC, cujos lados são as medianas de ABC, por S_1, e sejam:

$$AB = c,\ AC = b,\ BC = a$$

$$CN = AD = m_a$$

$$MN = BK = m_b$$

$$CM = m_c$$

temos na figura

area ABCE = area MNC + area BCM + area CEN + area AMN

mas

area ABCE = 2S

area MNC = S_1

area BCM = $\frac{S}{2}$ } porque têm a mesma altura que o triangulo ABC e metade da base deste por base.

area CEN = $\frac{S}{2}$ }

area AMN = $\frac{S}{4}$ } porque sua base e sua altura são iguaes á metade da base e altura do triangulo ABC.

Então

$$2S = S_1 + \frac{S}{2} + \frac{S}{2} + \frac{S}{4}$$

$$8S = 4S_1 + 2S + 2S + S$$

$$3S = 4S_1$$

$$S_1 = \frac{3}{4}S$$

o que queriamos provar

A area do triangulo MNC em funcção dos tres lados, designando por k o semi-perimetro, é:

$$S_1 = \sqrt{k(k - m_a)(k - m_b)(k - m_c)}$$

donde

$$\frac{3}{4}S = \sqrt{k(k - m_a)(k - m_b)(k - m_c)}$$

ou

$$S = \frac{3}{4}\sqrt{k(k - m_a)(k - m_b)(k - m_c)}$$

tal é a formula da area do triangulo ABC em funcção de suas tres medianas, onde k é a semi-somma d'ellas, isto é:

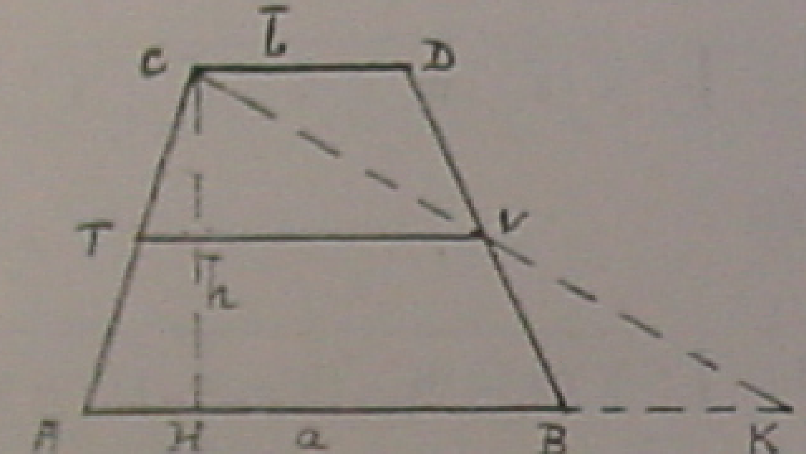
$$k = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$$

Substituindo k pelo seu valor, temos:

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)}$$

Trapezio

A area do trapezio é igual á semi-somma das bases pela altura.— Seja o trapezio ABCD, cujas bases são a e b e cuja altura é h.



Prolonguemos AB até K, de modo que BK seja igual a b.

Unindo CK, formamos o triangulo ACK. Vou demonstrar que este triangulo ACK é equivalente ao trapezio ABCD.

Notemos que os triangulos CDV e BKV são iguaes; têm CD = BK por construcção, o angulo C = ao angulo K como alternos internos, e o angulo D = ao angulo B pelo mesmo motivo; logo são iguaes.

Si, da figura total, tiramos o triangulo CDV, fica o triangulo ACK; si da figura total, tiramos o triangulo BKV, fica o trapezio ABCD; logo o trapezio ABCD é equivalente ao triangulo AKC.

A area do triangulo AKC é:

$$S = \frac{AK \cdot h}{2} \text{ ou } \frac{(AB + BK)\,h}{2}$$

ou

$$S = \frac{a + b}{2}\,h$$

Esta será, pois, a area do trapezio.

Si, pelo ponto V, traçassemos a parallela VT ás bases, essa parallela seria igual á semi-somma das bases.

Com effeito, V dividindo CK ao meio (pela igualdade dos triangulos CDV e BKV) e VT sendo parallela á base AK, o ponto T estará forçosamente no meio de AC. Os triangulos TCV e ACK são semelhantes e

$$\frac{CT}{CA} = \frac{CV}{CK} = \frac{TV}{AK} = \frac{1}{2}$$

logo TV é a metade de AK,

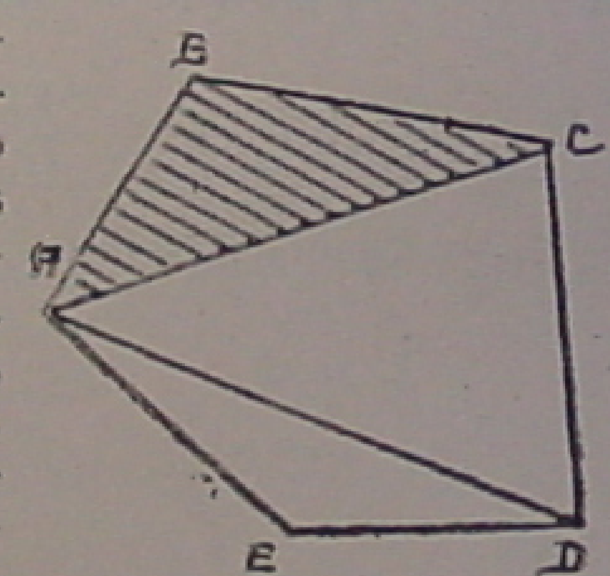
$$TV = \frac{AK}{2} = \frac{a + b}{2}$$

é a semi-somma das bases.

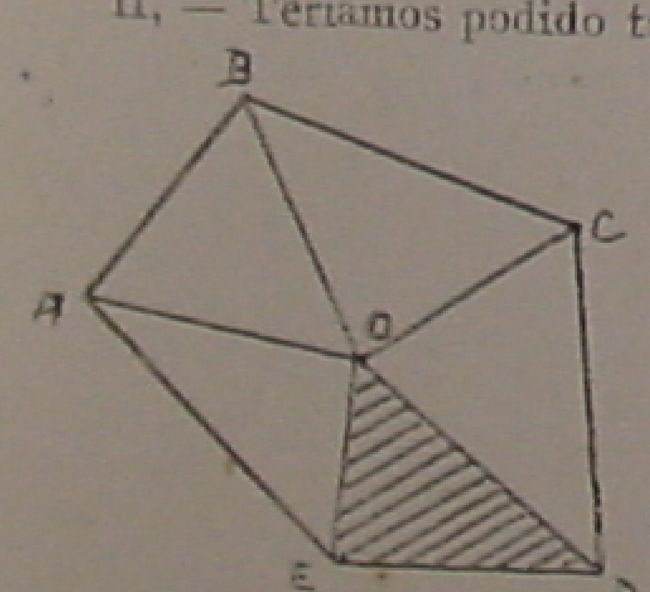
Polygonos

Para calcular as areas dos polygonos decompomol-os em triangulos. A somma das areas dos triangulos componentes nos dará a area do polygono.

I. — Podemos, por um dos vertices, A por exemplo, traçar todas as diagonaes, e teremos decomposto o nosso polygono em tantos triangulos quantos são os lados do polygono menos 2. Si o polygono tem n lados, formamos n — 2 triangulos. Determinamos as areas d'esses n — 2 triangulos, e, sommando-as, teremos a area do polygono.

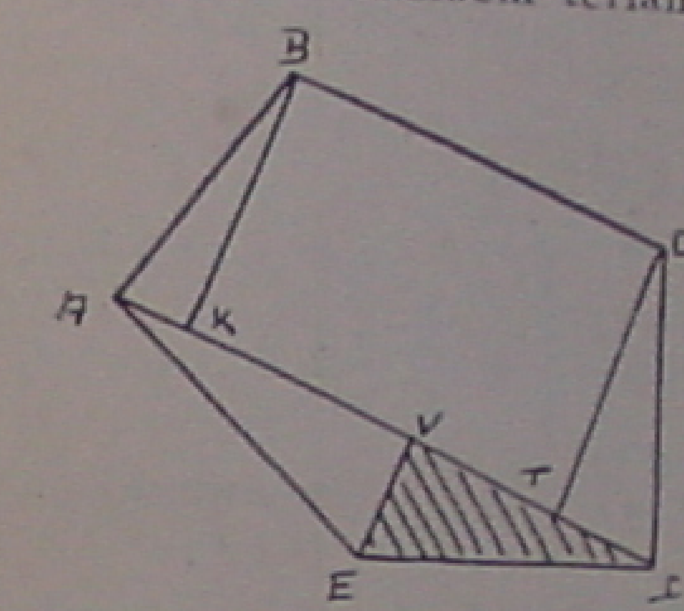


II. — Teriamos podido tomar um ponto O no interior do polygono: unindo O aos vertices do polygono, formamos um certo numero de triangulos igual ao numero de lados do polygono.



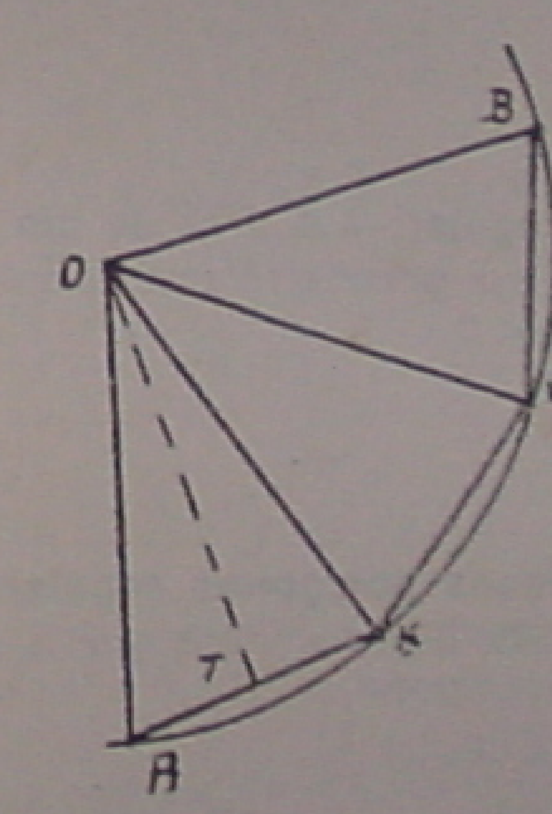
Sommando as areas d'esses triangulos componentes, teremos a area do polygono.

III. — Tambem teriamos podido traçar a diagonal AD e projectar os outros vertices do polygono sobre essa diagonal. Formamos assim um certo numero de triangulos e de trapezios dos quaes calculamos as areas.



A somma d'essas areas será a area do polygono.

Sector polygonal regular. — Seja o sector polygonal regular, OAKVB. Seja O o centro e OT o apothema.



A figura pode ser decomposta em triangulos taes que AKO, tendo todos a mesma base (lados do sector polygonal regular) e a mesma altura (o apothema).

Sommando as areas d'esses triangulos, teremos a area do sector polygonal regular.

$$\left.\begin{aligned} AKO &= \frac{AK \cdot OT}{2} \\ OKV &= \frac{KV \cdot OT}{2} \\ OVB &= \frac{VB \cdot OT}{2} \end{aligned}\right\}$$

Ora $$AK = KV = VB$$

logo

$$AKVBO = \text{perimetro } AKVB \cdot \frac{\text{apothema}}{2}$$

Em geral, a area de um sector polygonal regular é igual ao semi-producto do perimetro polygonal pelo apothema.

—

Polygono regular.— A area de um polygono regular é igual ao seu perimetro multiplicado pelo apothema dividido por 2.

—

Area de alguns polygonos regulares (em funcção do raio do circulo circumscripto). Já vimos que $S = p \cdot A$ (semi-perimetro pelo apothema,

$$\text{ou} \quad S = \frac{na}{2} . A$$

sendo n o numero de lados do polygono, a o lado e A o apothema.

Triangulo equilatero:

$$n = 3, \quad a = r\sqrt{3}, \quad A = \frac{r}{2}$$

logo

$$S = \frac{3}{2}\, r\sqrt{3}\, \frac{r}{2} = \frac{3}{4}\, r^2\sqrt{3}$$

Quadrado:

$$n = 4, \quad a = r\sqrt{2},\ A = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

logo

$$S = \frac{4}{2}\, r\sqrt{2}\ \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2} = 2r^2$$

Pentagono

$$n = 5, \quad a = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\ A = \frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

logo

$$S = \frac{5}{2} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

$$S = \frac{5}{16}\, r^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5} + 1)$$

$$S = \frac{5}{8}\, r^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Hexagono:

$$n = 6, \quad a = r, \quad A = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

logo

$$S = \frac{6}{2} \cdot r\, \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\, r^2 \sqrt{3}$$

Octogono:

$$n = 8,\quad a = r\sqrt{2-\sqrt{2}},\ A = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

logo

$$S = \frac{8}{2} r\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$S = 2r^2\sqrt{4-2} = 2r^2\sqrt{2}$$

Circulo

Si dobrassemos o numero de lados do polygono dado, até termos um polygono com um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos, o perimetro do ultimo polygono estaria tão approximado quanto quizessemos do perimetro da circumferencia, e o apothema approximar-se-hia do raio; logo n'este caso limite:

$$S = 2\pi r\ \frac{r}{2} = \pi r^2$$

logo a area do circulo é igual ao quadrado do seu raio pela quantidade constante π.

—

Sector circular. — Si o circulo todo vale πr^2, um sector circular de 1° valerá 360 vezes menos ou

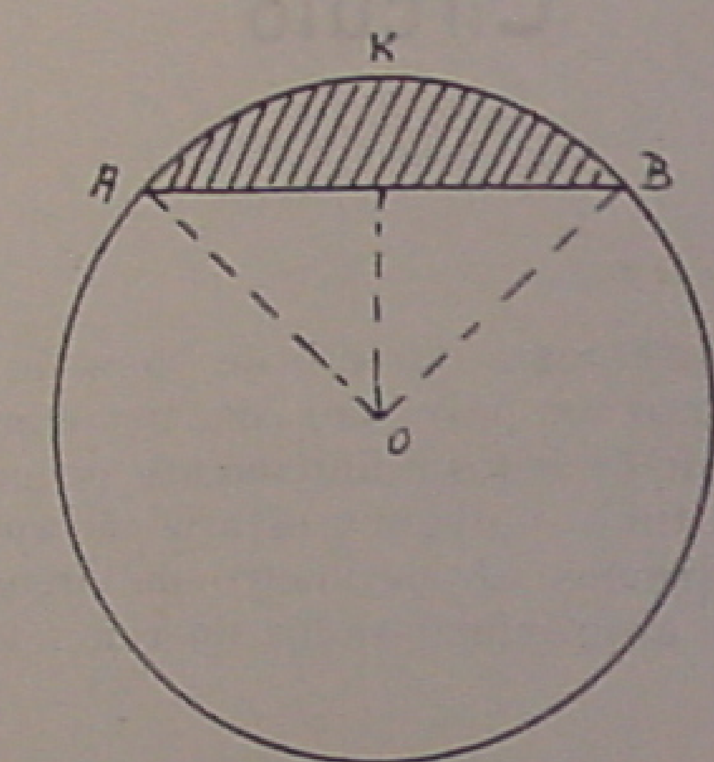
$$\text{sector } 1^\circ = \frac{\pi r^2}{360}$$

e um sector de n° valerá

$$\text{sector } n^\circ = \frac{\pi r^2 n}{360}$$

—

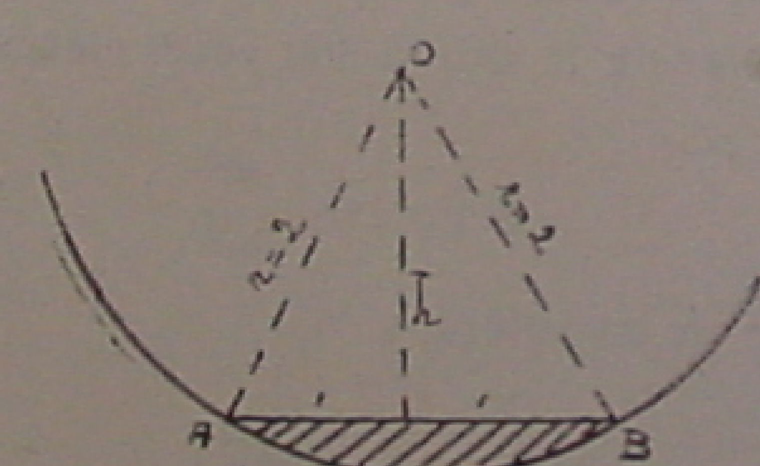
Segmento de circulo. — Para calcular a area de um segmento de circulo, basta determinar a area do sector circular correspondente, e d'elle subtrahir a area do triangulo que tem por base a corda do segmento.



segmento AKB = AKBO — ABO.

—

EXERCICIO. — Calcular o segmento do arco de 60°, o raio sendo = 2.



$$\text{sector} = \frac{n\pi r^2}{360} = \frac{60 \cdot 3,1416 \cdot 4}{360}$$

$$= \frac{12,5664}{6} = 2,0944$$

$$\text{triangulo AOB} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot h}{2} = h$$

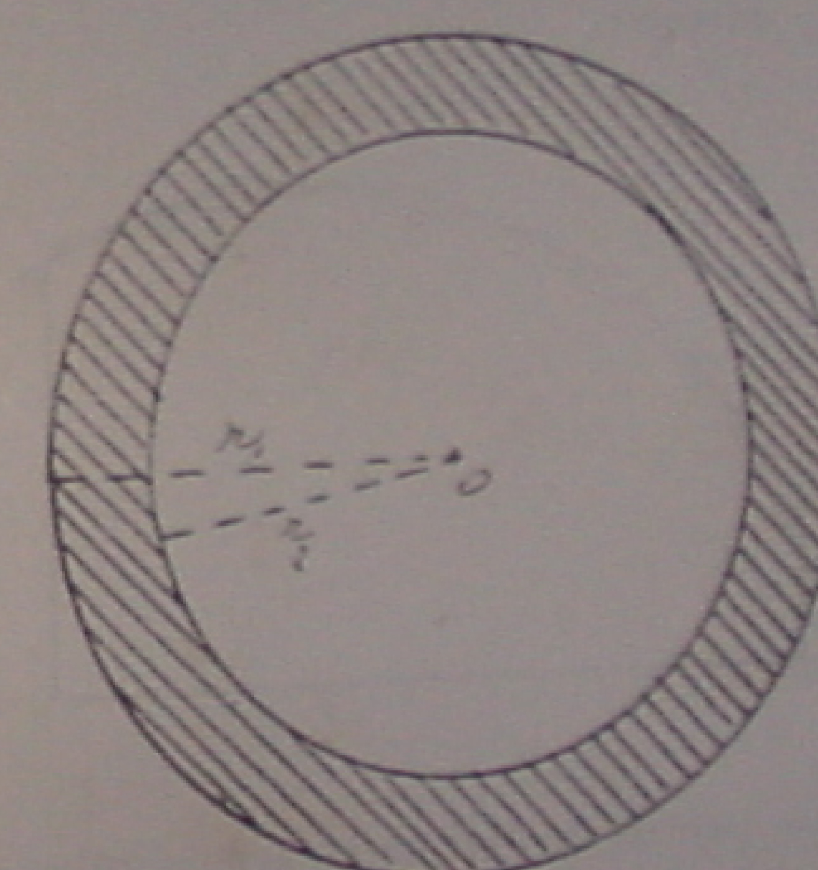
$$h^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$h = \sqrt{3} = 1,73$$

$$\text{segmento} = 2,0944 - 1,73 = 0,3644$$

—

Corôa. — A area do circulo exterior é πr_1^2, a do circulo interior é πr_2^2, logo a area da corôa é:



$$S = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$$

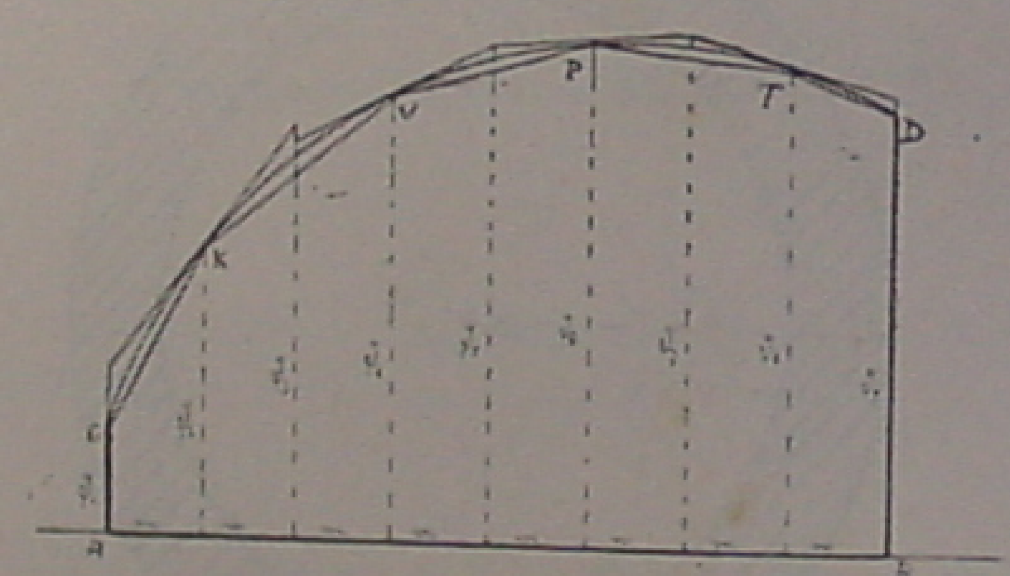
ou

$$S = \pi \left(r_1^2 - r_2^2 \right)$$

Formula de Poncelet

Tem por fim determinar a area de uma supercie comprehendida entre uma linha recta AB, uma curva qualquer e as ordenadas baixadas das extremidades da curva sobre a linha recta.

Dividamos AB em um numero par de partes iguaes, em 8, por exemplo.



Pelos pontos de divisão tracemos ordenadas y_2, y_3, y_4, ... y_8.

Unamos CK, KV, VP, PT e TD e tracemos as tangentes em K, V, P e T.

Formamos um certo numero de trapezios, uns com um lado inscripto na curva, e outros com um lado circumscripto.

A area que desejamos avaliar estará comprehendida entre a somma das areas dos trapezios inscriptos e a dos trapezios circumscriptos.

A somma dos trapezios inscriptos é

$$\frac{1}{2}m(y_1+y_2)+m(y_2+y_4)+m(y_4+y_6)+m(y_6+y_8)+\frac{1}{2}m(y_8+y_9)$$

ou

$$m\left(\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2+y_2+y_4+y_4+y_6+y_6+y_8+\frac{1}{2}y_8+\frac{1}{2}y_9\right)$$

Sommando e subtrahindo:

$$\frac{1}{2}y_2 \text{ e } \frac{1}{2}y_8$$

vem:

$$m\left[2\left(y_2+y_4+y_6+y_8\right)+\frac{1}{2}\left(y_1+y_9\right)-\frac{1}{2}\left(y_2+y_8\right)\right]$$

$$\text{ou} \quad m\left(2P+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}E'\right) \qquad (1)$$

representando por P a somma das ordenadas de ordem par, por E a somma das ordenadas extremas e por E' a somma da segunda e da penultima ordenadas.

A somma dos trapezios circumscriptos é:

$$2my_2+2my_4+2my_6+2my_8$$

$$\text{ou} \quad 2m\,(y_2+y_4+y_6+y_8)$$

$$\text{ou} \quad 2mP \qquad (2)$$

A media das duas sommas (1) e (2) é:

$$S=\frac{m\left(2P+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}E'\right)+m\,2P}{2}$$

$$S=\frac{m\left(\frac{4P}{2}+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}E'\right)+m\left(\frac{4P}{2}\right)}{2}$$

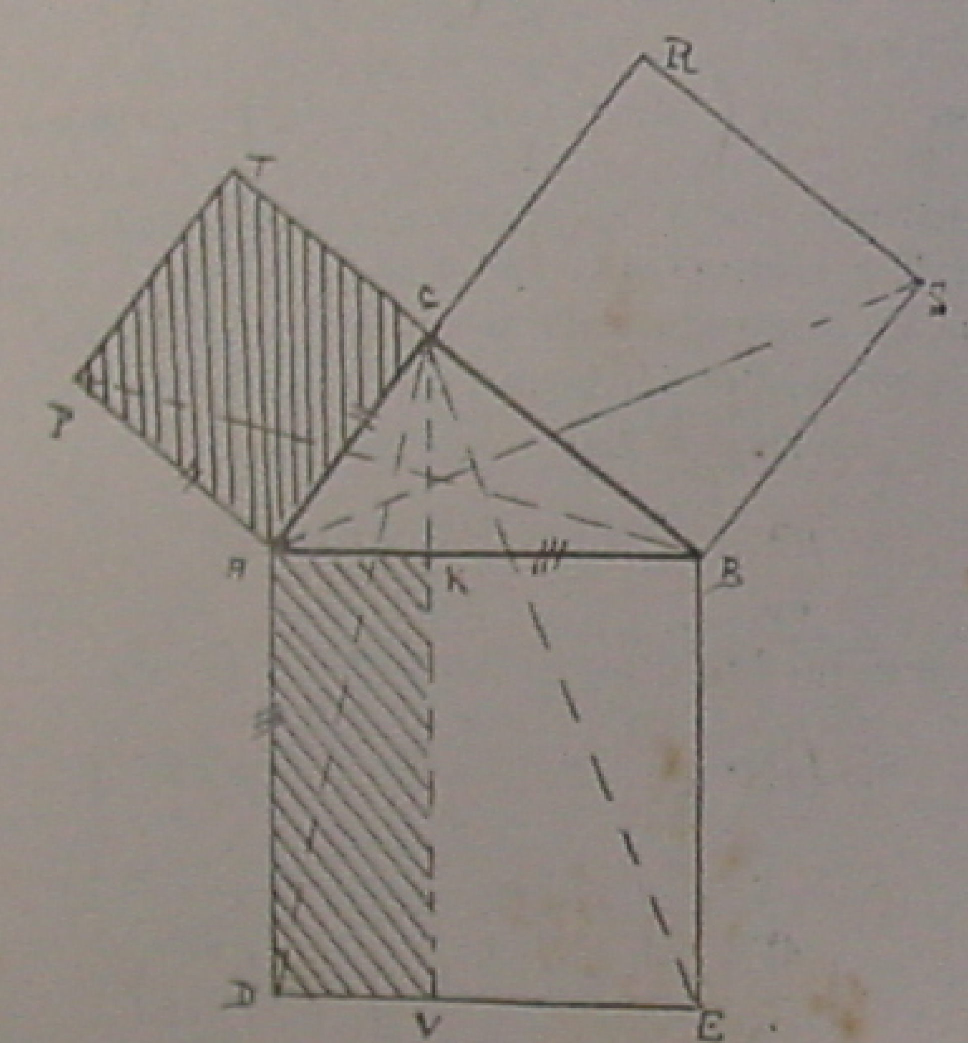
$$S=\frac{m\left(\frac{4P}{2}+\frac{4P}{2}+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}E'\right)}{2}$$

$$S=\frac{\frac{m}{2}\left(8P+E-E'\right)}{2}=\frac{m}{4}(8P+E-E')$$

$$S=m\left(2P+\frac{1}{4}E-\frac{1}{4}E'\right)$$

Equivalencia das figuras

Theorema 92.—(de Pythagoras, Philosopho grego, nascido em Samos, VI seculo a. J. C.).— Em todo triangulo rectangulo o quadrado construido sobre a hypotenusa é equiva-



lente á somma dos quadrados construidos sobre os cathetos.

Seja o triangulo ABC. Vou demonstrar que:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

Do vertice C traço a perpendicular sobre a hypotenusa e prolongo-a até seu encontro em V com DE. Traço PB e CD.

Os dois triangulos PAB e CAD têm o lado AP= ao lado AC, o lado AB = ao lado AD e os angulos em A iguaes, como constando de um angulo recto e mais uma parte commum: os dois triangulos PAB e CAD são, pois, iguaes.

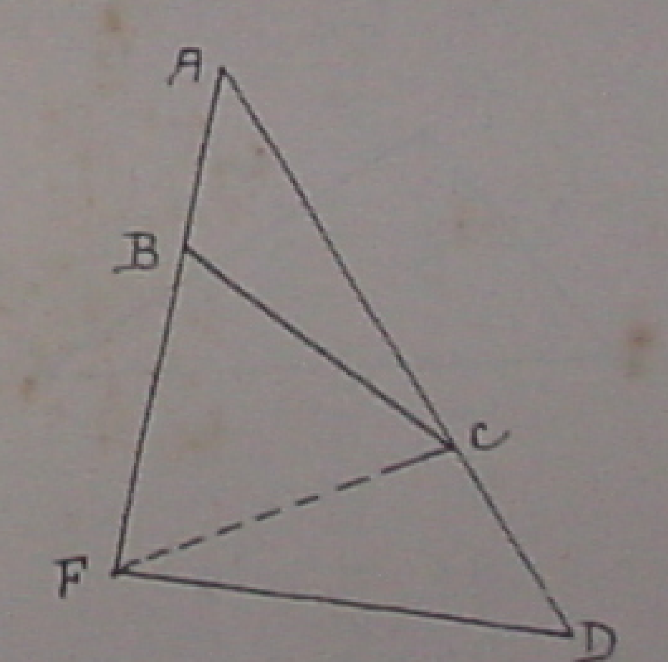
O triangulo ADC tem por base AD e por altura AK, o rectangulo AKVD tem a mesma base e a mesma altura do que o triangulo ADC. Logo o triangulo é equivalente á metade do rectangulo.

D'um modo analogo, o triangulo PAB é equivalente á metade do quadrado ACTP.

Traçando as rectas CE e AS, demonstrariamos d'um modo analogo que o rectangulo KBEV é equivalente ao quadrado CBSR.

Logo, a somma dos dois rectangulos, isto é, o quadrado construido sobre AB é equivalente á somma dos quadrados construidos sobre AC e sobre CB.

Theorema 93.—Dois triangulos que tem um angulo igual, estão entre si na mesma razão que os productos dos lados que comprehendem o angulo igual.



$$\frac{ABC}{AFC} = \frac{AB}{AF}$$

$$\frac{ACF}{ADF} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{ABC}{AFC} \cdot \frac{ACF}{ADF} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AD}$$

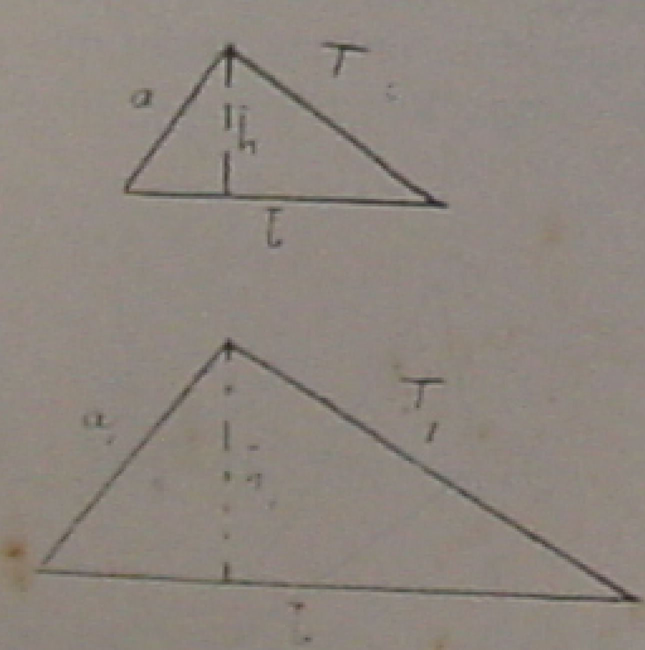
$$\frac{ABC}{ADF} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AD}.$$

—

NOTA: — Quando o angulo ABC é igual ao angulo ADF as rectas BC e FD são *anti-parallelas*.

—

Theorema 94. — Dois triangulos semelhantes estão entre si na mesma razão que os quadrados dos lados ou das linhas homologas.



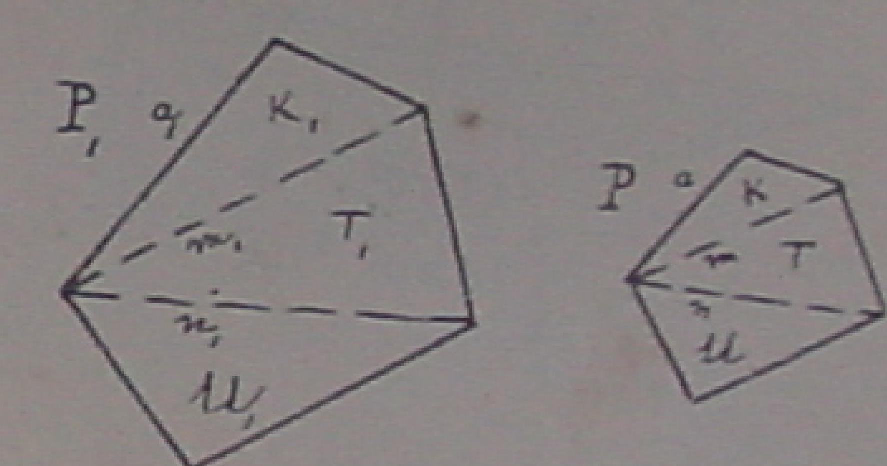
$$\frac{T}{T_1} = \frac{\frac{1}{2}\,b\,h}{\frac{1}{2}\,b_1\,h_1} = \frac{b\,h}{b_1\,h_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{a}{a_1} \\[2ex] \dfrac{h}{h_1} = \dfrac{a}{a_1} \end{array}\right\} \quad \frac{bh}{b_1 h_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$$

logo

$$\frac{T}{T_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$$

Theorema 95. — Dois polygonos semelhantes estão entre si na mesma razão que os quadrados dos lados ou das linhas homologas.



$$\frac{K}{K_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{m^2}{m_1^2}$$

$$\frac{T}{T_1} = \frac{m^2}{m_1^2} = \frac{n^2}{n_1^2}$$

$$\frac{U}{U_1} = \frac{n^2}{n_1^2}$$

logo

$$\frac{a^2}{a_1^2} = \frac{m^2}{m_1^2} = \frac{n^2}{n_1^2}$$

$$\frac{K}{K_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{U}{U_1}$$

$$\frac{K + T + U}{K_1 + T_1 + U_1} = \frac{P}{P_1} = \frac{K}{K_1} = \cdots = \frac{a^2}{a_1^2} = \cdots$$

Theorema 96. — Dois polygonos regulares d'um mesmo numero de lados, estão entre si na mesma razão que os quadrados dos raios ou os quadrados dos apothemas.

—

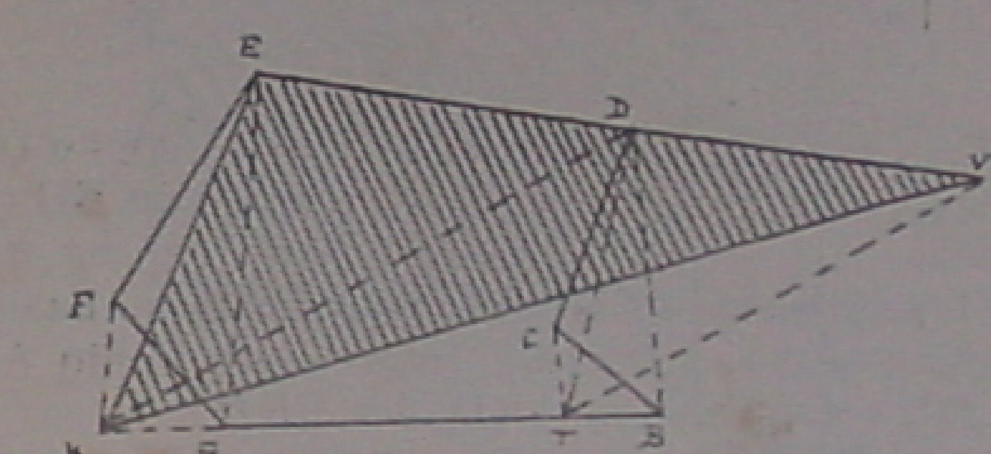
Theorema 97. — Dois circulos quaesquer estão entre si como os quadrados dos raios, ou como os quadrados dos diametros.

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\pi r^2}{\pi r_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}$$

$$\frac{S}{S_1} = \frac{1/4\,\pi\, d_1^2}{1/4\,\pi\, d_1^2} = \frac{d^2}{d_1^2}$$

Problemas

Transformar um polygono em um triangulo equivalente.



Seja o o polygono ABCDEF. Traço a diagonal EA, e pelo ponto F traço FK parallela a EA : uno EK: o triangulo EAF é equivalente ao triangulo EKA.

Nosso polygono e, pois, agora, KBCDE (tem um lado menos do que o polygono primitivo).

Traço a diagonal DB, e CT parallela a DB ; uno TD : o triangulo CTD é equivalente ao triangulo CTB.

O nosso polygono KTDE ainda tem um lado de menos.

Traço a diagonal KD, e TV parallela a KD ; uno KV : o triangulo KVD é equivalente ao triangulo KTD.

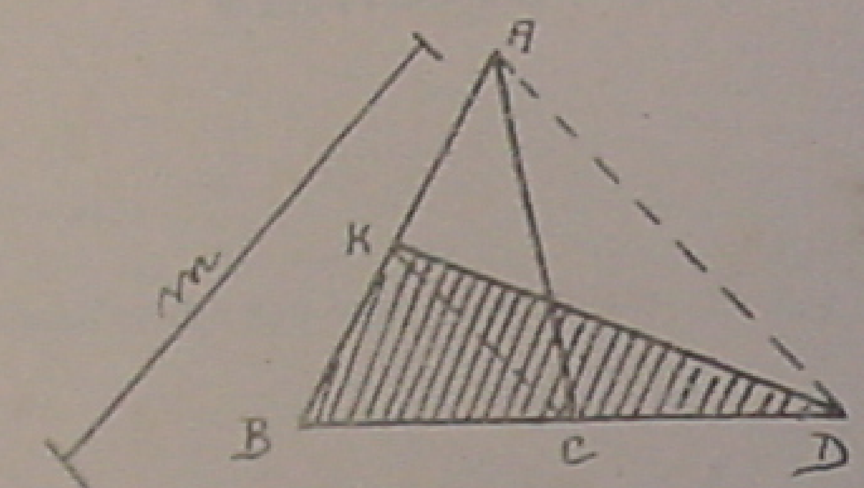
Fica o triangulo KVE, equivalente ao polygono dado ABCDEF.

—

Transformar um triangulo ABC em um outro equivalente, porém tendo um angulo commum com o primeiro e uma base dada = m.

Prolongo BC até D, de modo que BD = m. Uno DA. Traço CK parallela a DA. Uno KD.

BKD é o triangulo procurado.



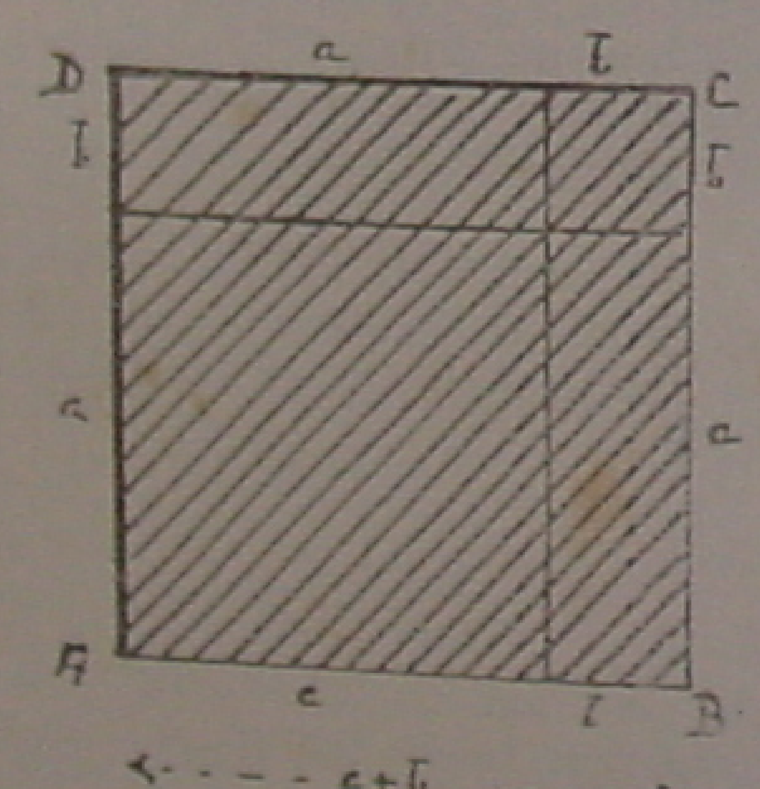
Com effeito, o triangulo BKD tem, com o triangulo dado, o angulo B commum: tem a base BD = m, desejada.

Os triangulos AKD e ACD têm a mesma base AD e a mesma altura: da figura total subtrahindo ACD, fica ABC, e subtrahindo AKD, fica BKD.

Logo BKD é equivalente a ABC.

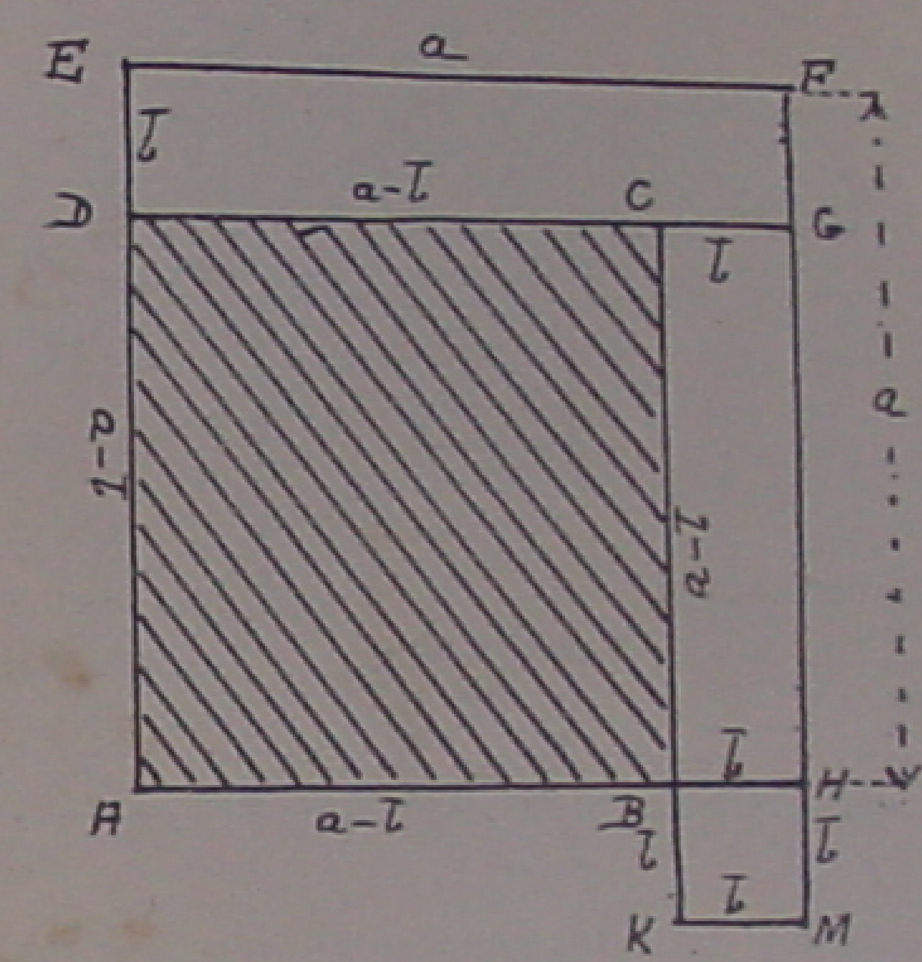
Demonstrar graphicamente que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



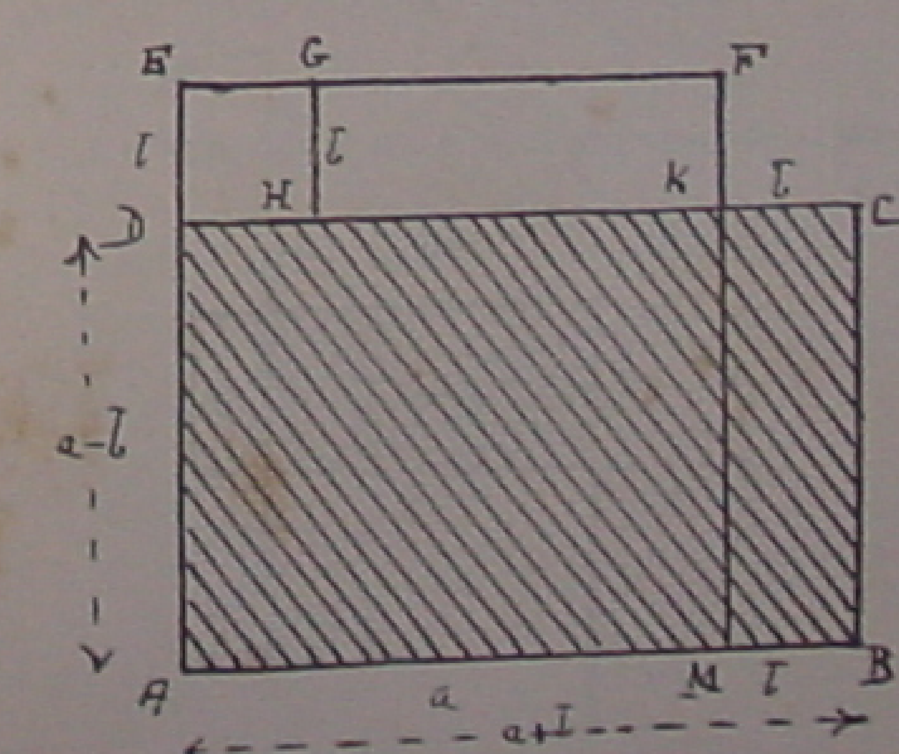
Demonstrar graphicamente que

$$(a - b^2) = a^2 - 2ab + b^2$$

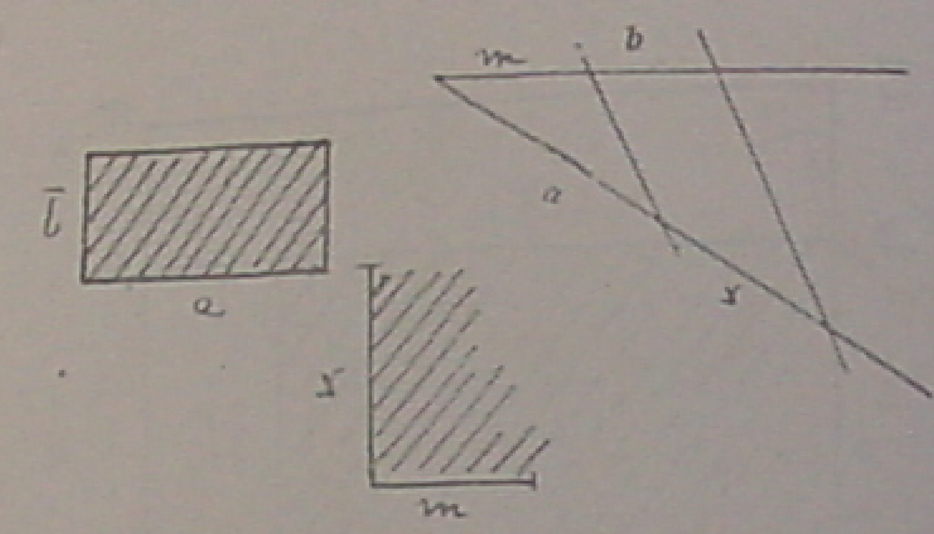


Demonstrar graphicamente que

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



Sobre uma recta dada m, construir um rectangulo equivalente a um rectangulo dado ab.



E' preciso que

$$mx = ab$$

logo

$$\frac{m}{a} = \frac{b}{x}$$

—

Si a figura dada fosse um quadrado, teriamos:

$$mx = a^2$$

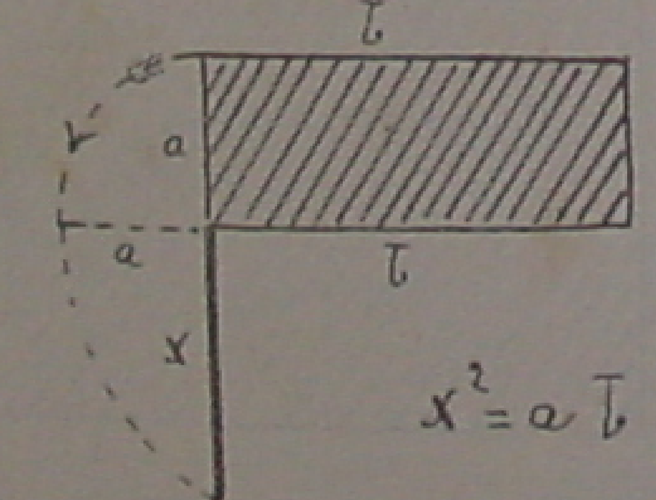
ou

$$\frac{m}{a} = \frac{a}{x}$$

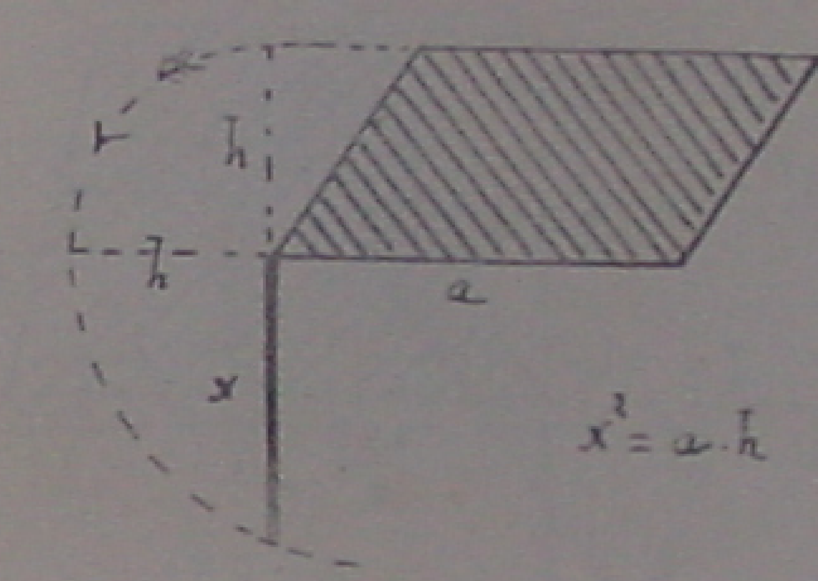
e teriamos de calcular a terceira proporcional.

—

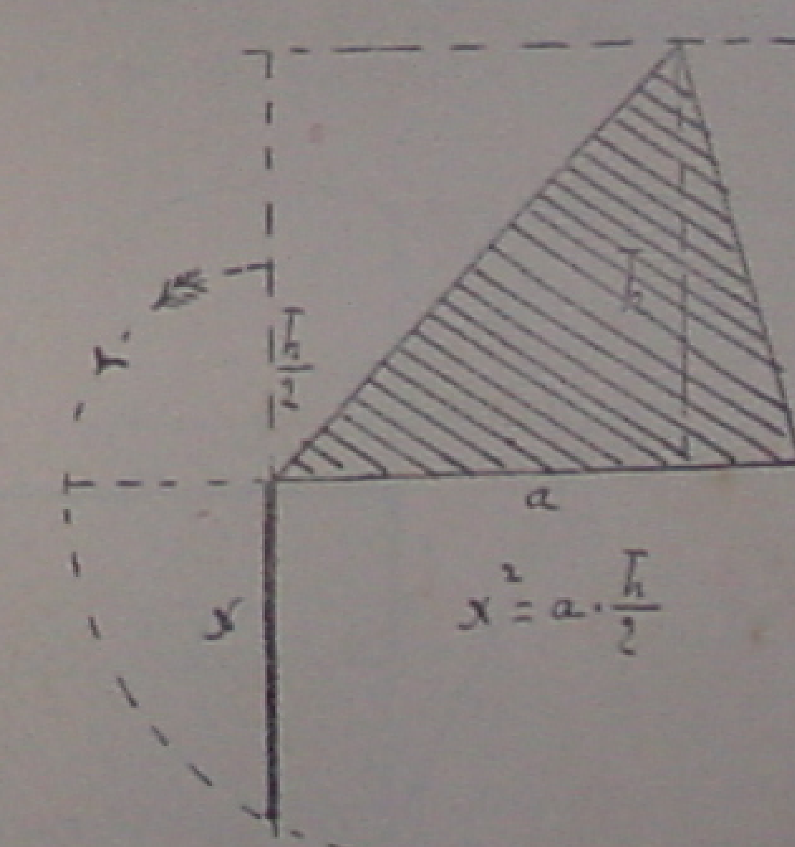
Construir um quadrado equivalente a um rectangulo dado.



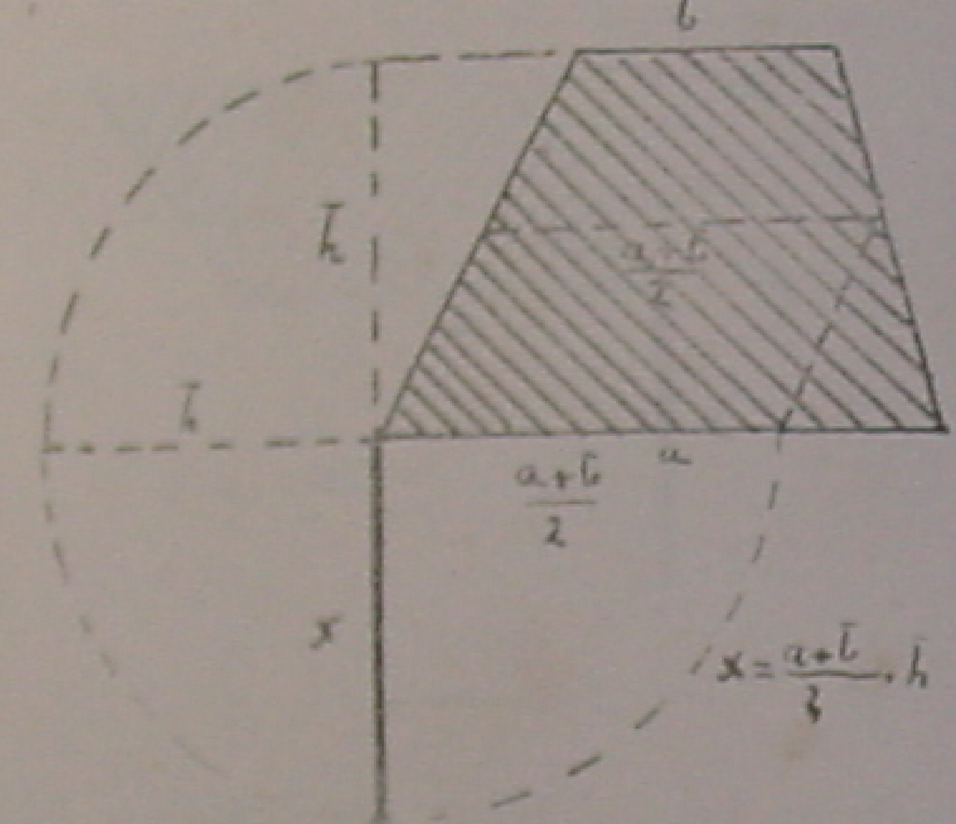
Construir um quadrado equivalente a um parallelogrammo dado.



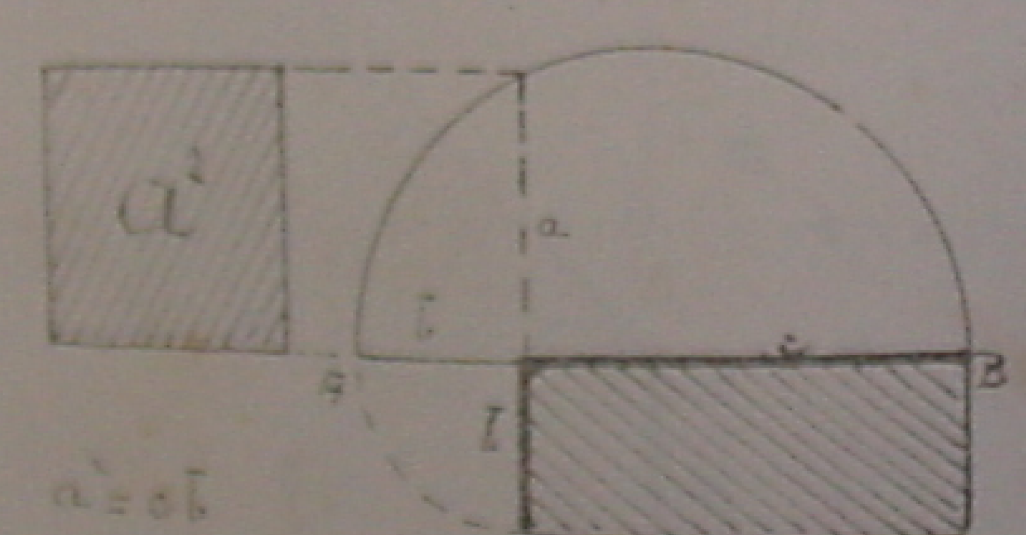
Construir um quadrado equivalente a um triangulo dado.



Construir um quadrado equivalente a um trapezio dado.

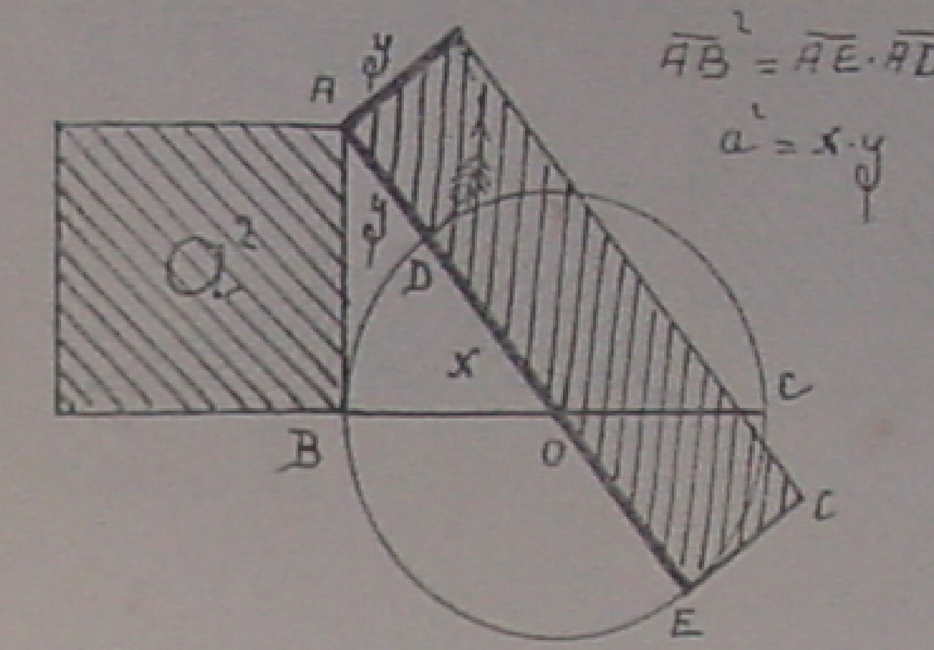


Construir um rectangulo, conhecendo sua area e a somma de seus lados.

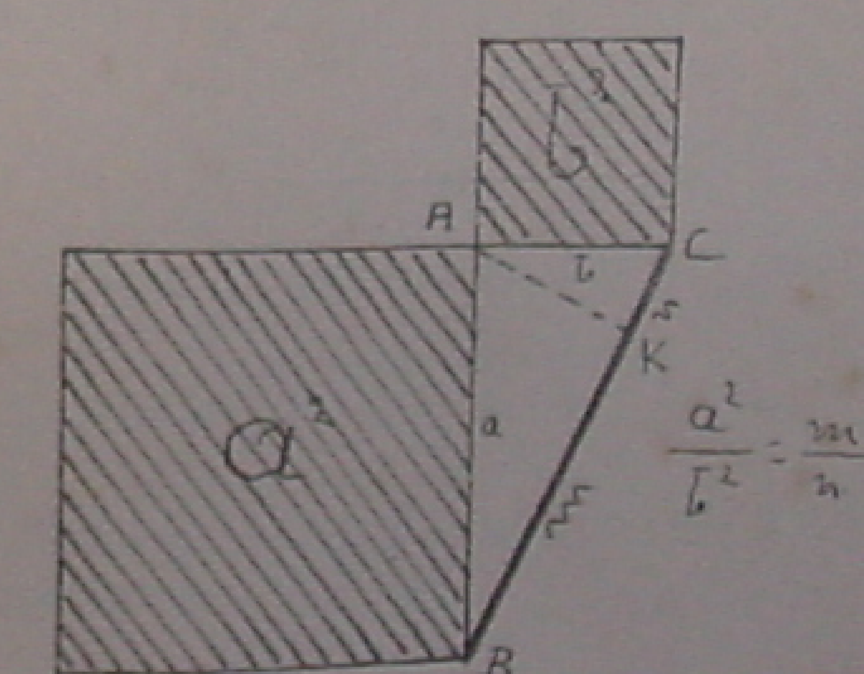


Sendo a., o quadrado que representa a area dada e AB a somma dos lados adjacentes do rectangulo.

Construir um rectangulo, conhecendo sua area a^2, e a differença de seus lados BC.

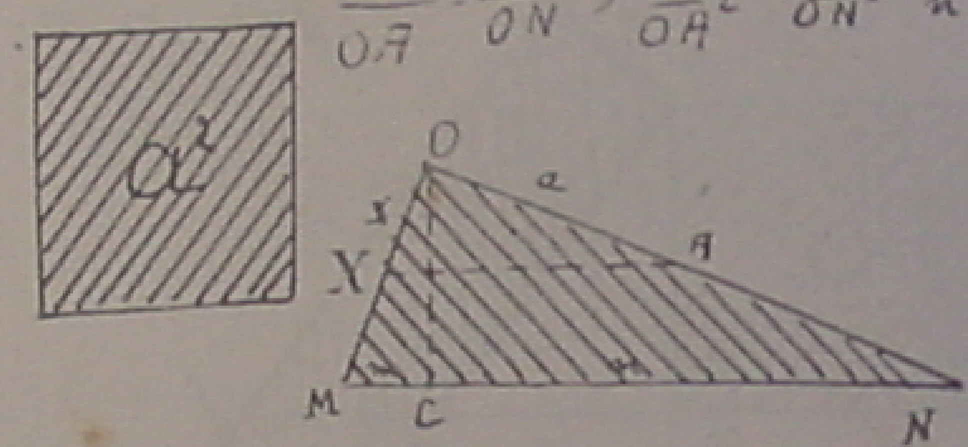


Determinar duas rectas que estejam entre si na mesma razão que dois quadrados dados.



Construir um quadrado que esteja para um quadrado dado a^2 na mesma razão que duas linhas dadas m e n.

$$\frac{OX}{OA}=\frac{OM}{ON}, \quad \frac{\overline{OX}^2}{\overline{OA}^2}=\frac{\overline{OM}^2}{\overline{ON}^2}=\frac{m}{n}$$



Formulas

Rectangulo, $S = bh$.

Parallelogrammo, $S = bh$.

Triangulo :

$$S = \frac{bh}{2}$$

Triangulo equilatero, em funcção do lado a :

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Triangulo, em funcção do raio do circulo inscripto :

$$S = pr$$

Triangulo, em funcção do raio do circulo circumscripto :

$$S = \frac{abc}{4r}$$

Triangulo, em funcção dos tres lados :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Triangulo, em funcção do raio d'um dos circulos ex-inscriptos :

$$\left.\begin{array}{l} S = (p-a)\,r_a \\ S = (p-b)\,r_b \\ S = (p-c)\,r_c \end{array}\right\}$$

analogamente

e

$$S = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}$$

Trapezio,

$$s = \frac{a + b}{2}\, h$$

Circulo,

$$S = \pi\, r^2$$

sector circular,

$$S = \frac{\pi r^2 n}{360}$$

Corôa,

$$S = \pi \left(r_1^2 - r_2^2 \right)$$

Triangulo em funcção das tres alturas :

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

Triangulo em funcção das tres medianas :

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)}$$

Formula de Poncelet,

$$S = m\left(2P - \frac{1}{4}E - \frac{1}{4}E' \right)$$

Problemas para resolver

1 — Calcular a area d'um triangulo isoceles, cujo lado é 4^m e a base $2^m,3$.

2 — Calcular a area d'um triangulo isoceles que tem cada um dos lados iguaes igual ao dobro da base e cuja altura é $5^m,23$.

3 — Calcular a area d'um triangulo cujos lados são respectivamente 3^m, 4^m e 5^m.

4 — Construir um rectangulo conhecendo sua area $S = a^2$, e a somma de seus lados c e d.

5 — Calcular a area d'um rectangulo, sabendo-se que a diagonal mede 6^m, e que os lados estão na razão 3/4.

6 — Calcular o valor da diagonal d'um rectangulo, sabendo-se que a sua area é de 12^m, e que os lados estão na razão 2/5.

7 — Calcular a area d'um quadrilatero cuja maior diagonal é igual a $16^m,90$, e cuja distancia dos dois outros vertices a essa diagonal tem por comprimentos respectivos $5^m,2$, e $6^m,7$.

8 — Calcular a area de um circulo circumscripto a um quadrado de lado 10^m.

9 — Construir um quadrado equivalente ao triplo de um rectanglo dado.

10 — Calcular a area d'um triangulo rectangulo e isoceles, cuja hypotenusa é igual a $0^m,61$.

11 — Calcular a area d'um triangulo rectangulo, sendo um catheto igual a 15^m, e a perpendicular traçada do vertice do angulo recto sobre a hypotenusa igual a 8^m.

12 — Calcular os cathetos d'um triangulo rectangulo, sendo a sua hypotenusa igual a 50^m, e sua area igual a 300^m.

13 — Calcular a area d'um triangulo equilatero cujo lado é igual a $3^m,1$.

14 — Calcular a area d'um triangulo equilatero cuja altura é $2^m,25$.

15 — Calcular a area d'um triangulo equilatero inscripto n'um circulo de raio 5^m.

16 — Calcular a area d'um triangulo rectangulo inscripto n'um circulo de raio $2^m,72$, e que tem um catheto duplo do outro.

17 — Calcular a area d'um trapezio isosceles, cujas bases têm 8^m e 5^m, e o lado 4^m.

18 — As duas bases de um trapezio isosceles têm 32^m e 12^m, e o seu lado tem 17^m. Calcular a area do triangulo total que se forma prolongando os lados não parallelos até se encontrarem.

19 — Calcular a area do quadrado inscripto n'um circulo de raio $3,^m2$.

20 — Calcular a area do pentagono regular inscripto n'um circulo de raio $4^m,25$.

21 — Calcular a area do hexagono regular inscripto no circulo de raio igual a $3^m,4$.

22 — Calcular a area do octogono regular inscripto no circulo de raio igual a 5^m.

23 — Calcular a area de um pentagono circumscripto a um circulo de raio igual a 10^m.

24 — Calcular a area do circulo cujo raio é igual $4^m,25$,

25 — Calcular a area do circulo cuja circumferencia é igual a $12^m,3$.

26 — Calcular o raio do circulo cuja area é igual a $9^m,32$.

27 — Calcular a area d'um circulo, sendo $3^m,25$ o comprimento da corda subtendida pelo arco de 120°

28 — Calcular a area do circulo inscripto n'um triangulo equilatero de lado igual a $6^m,2$.

29 — Calcular a area do circulo inscripto n'um hexagono de lado igual 7^m.

30 — Calcular o excesso da area de um circulo sobre a do hexagono regular inscripto, sendo o raio igual a 4^m.

31 — Calcular a area comprehendida entre dois circulos concentricos, cujos raios são respectivamente 8^m e 12^m.

32 — Calcular os raios de dois circulos, sabendo-se que a differença das suas areas é de 1000^m, e que a differença dos seus raios é de 6^m.

33 — Calcular a area do sector, cujo arco é de 15° 16' 18'' e o raio é igual a 0,203.