5ª PARTE

Plano

Definições. — Chama-se PLANO OU SUPERFICIE PLANA, a uma superficie indefinida tal que por dois quaesquer de seus pontos se lhe póde applicar uma linha recta em qualquer direcção.

Uma recta não póde ter parte n'um plano e parte fóra delle.

Uma recta que tem dois pontos em um plano existe toda nelle.

Si a recta tem só um ponto commum com o plano, diz-se que a recta e o plano se encontram; a recta atravessa o plano. O ponto em que uma recta encontra um plano, chama-se TRAÇO.

DUAS RECTAS QUE SE CORTAM DETERMINAM A POSIÇÃO DE UM PLANO.

TRES PONTOS NÃO EM LINHA RECTA DETERMINAM A POSIÇÃO DE UM PLANO.

Dois planos tendo tres pontos communs não em linha recta coincidem em toda sua extensão indefinida.

Por uma recta dada no espaço póde-se fazer passar uma infinidade de planos.

Por um ponto dado, ou por dois pontos dados no espaço, póde-se fazer passar uma infinidade de planos.

Diz-se que UMA RECTA É PERPENDICULAR A UM PLANO QUANDO É PERPENDICULAR A TODAS AS RECTAS QUE PASSAM PELO SEU PÉ NO PLANO.

Uma recta que não fôr perpendicular a um plano, e não estiver contida nelle, diz-se OBLIQUA ao plano.

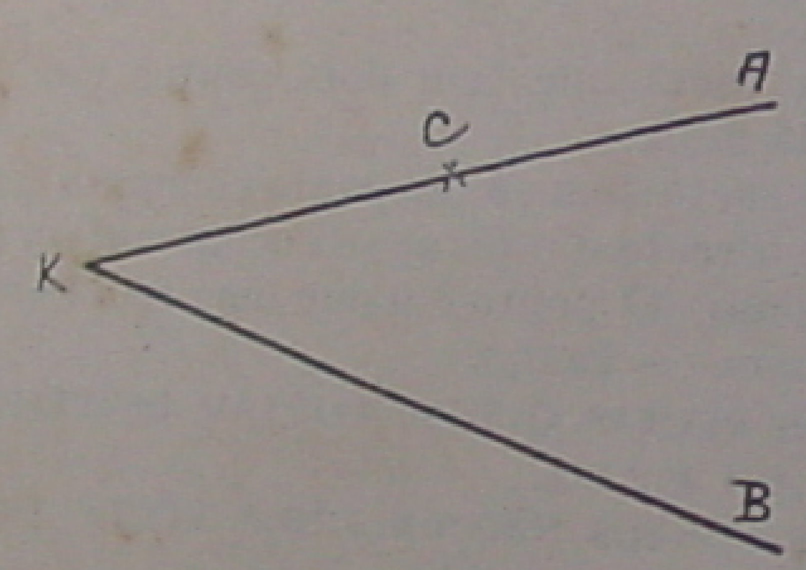
O plano é uma superficie indefinida, entretanto é costume represental-o por um parallelogrammo.

Uma recta e um plano são parallelos quando não se encontram por mais que se os prolongue.

Dois planos são parallelos quando não se encontram por mais que se os prolongue.

Rectas e planos perpendiculares

Theorema 98. — Por duas linhas rectas que se cortam, póde-se fazer passar um plano e um só.



Sejam as rectas KA e KB, que se cortam no ponto K.

Pela recta KB imagino um plano. Faço girar este plano em torno de KB até que encontre um certo ponto C da recta KA. Neste momento elle conterá a recta KA inteira, pois que já passa pelo ponto K. Existe, logo, um plano passando pelas duas rectas dadas.

Este plano é o unico nas condições, porque si fizessemos giral-o em torno de KB, elle deixaria de passar pelo ponto C e não conteria mais a recta KA.

—

Theorema 99. — A intersecção de dois planos é uma linha recta.

A intersecção de dois planos que se cortam é o conjuncto dos pontos que lhes são communs.

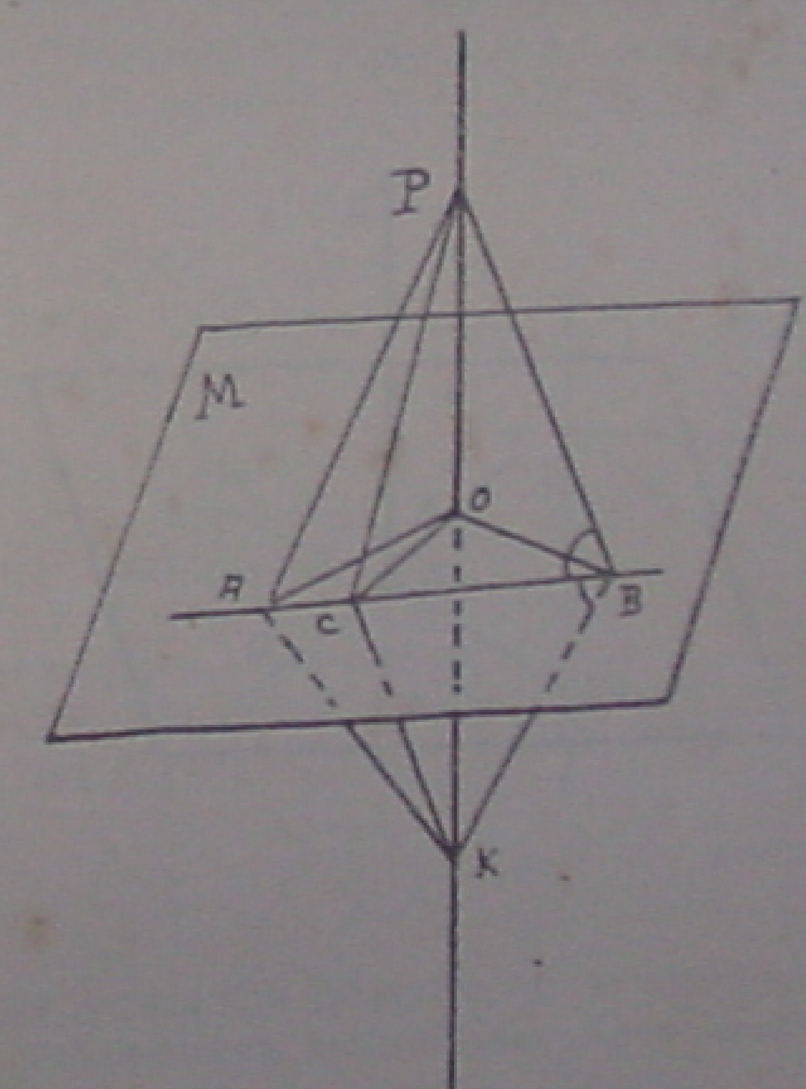
Ora, por tres pontos não em linha recta só se póde traçar um plano: não existem, pois, tres pontos não em linha recta communs aos dois planos considerados. Logo, a intersecção desses dois planos é uma linha recta.

—

Theorema 100. — Uma recta perpendicular a duas outras que passam pelo seu pé n'um plano, é perpendicular a esse plano.

Sejam as duas rectas OA e OB, e a recta PO perpendicular sobre uma e outra: digo que PO é perpendicular ao plano das duas rectas OA e OB.

Basta, para isso, provar que PO é perpendicular sobre qualquer recta OC do plano M. Tracemos ACB,

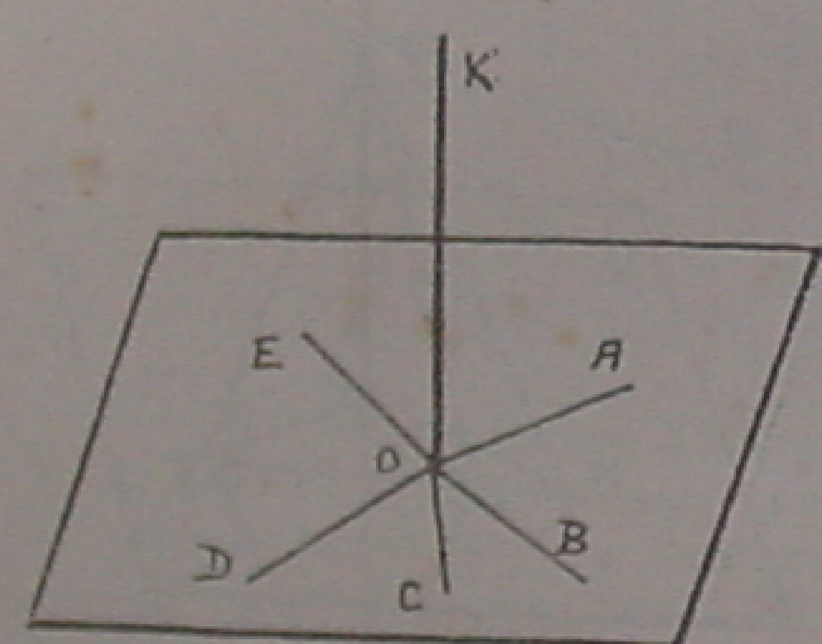


unamos PA, PC, PB; prolonguemos PO para baixo do plano M, até K, de modo que PO = OK; unamos KA, KC e KB.

Os dois triangulos ABP e ABK têm o lado AB commum, o lado AP = ao lado AK, como obliquas afastando-se igualmente do pé O da perpendicúlar AO; d'um modo analogo BP = BK. Logo, os triangulos têm os seus tres lados respectivamente iguaes: são iguaes e seus elementos são respectivamente iguaes: os angulos em B são, pois, iguaes. D'ahi deduzimos que os triangulos CBP e CBK são iguaes: pois, os angulos B são iguaes, os lados BP e BK são iguaes e BC é commum. Logo CP = CK. No triangulo isoceles PCK, a mediana CO é perpendicular sobre PK, e tambem PK perpendicular sobre OC.

A linha PO é, pois, perpendicular sobre qualquer recta OC que passe pelo seu pé no plano, logo é perpendicular ao plano.

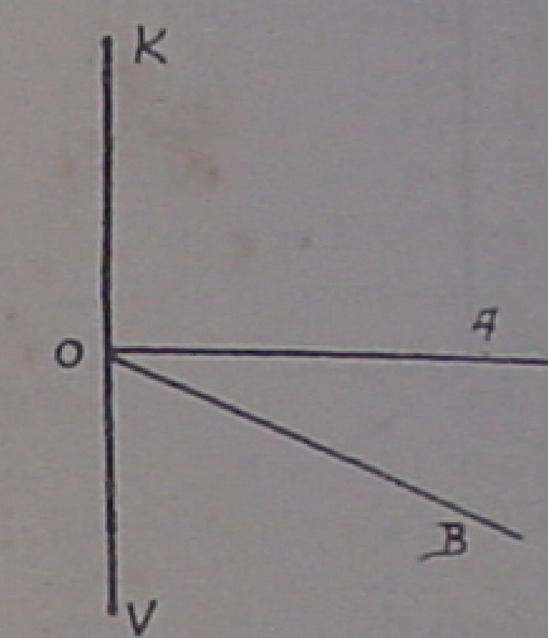
NOTA:— Traçando d'um ponto O d'uma recta dada KO,



varias perpendiculares em direcções differentes, essas perpendiculares estarão todas contidas n'um mesmo plano.

—

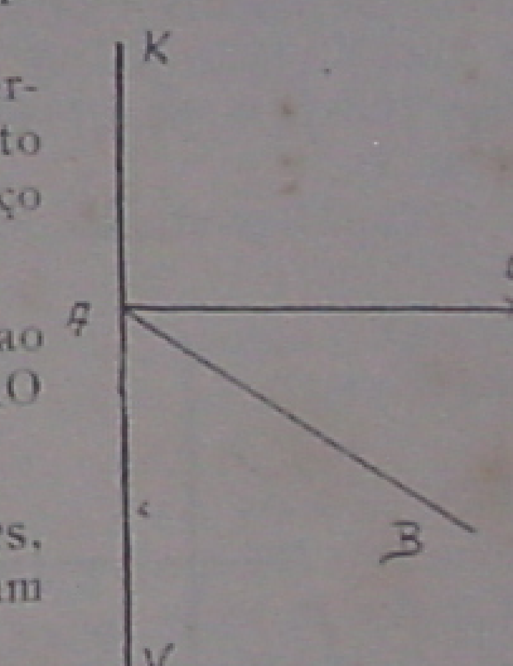
Theorema 101.— Por um ponto O, podemos traçar um plano perpendicular a uma recta KV, e um só.



Tracemos OA e OB, perpendiculares sobre KV, em direcções differentes: OK é perpendicular sobre duas rectas que se cortam; logo é perpendicular ao plano formado por essas duas rectas; e o plano formado por OA e por OB é perpendicular a KV no ponto V.

Pelas duas rectas OA e OB só podemos fazer passar um plano; este plano é, pois, o unico que podemos traçar perpendicularmente a KV e pelo ponto O.

Si o ponto O estivesse fóra da recta KV, demonstrariamos d'um modo analogo que ha sempre um plano e UM só passando por O e perpendicular a KV.



Do ponto O, traço OA perpendicular sobre KV, e do ponto A, n'uma outra direcção traço AB perpendicular a KV.

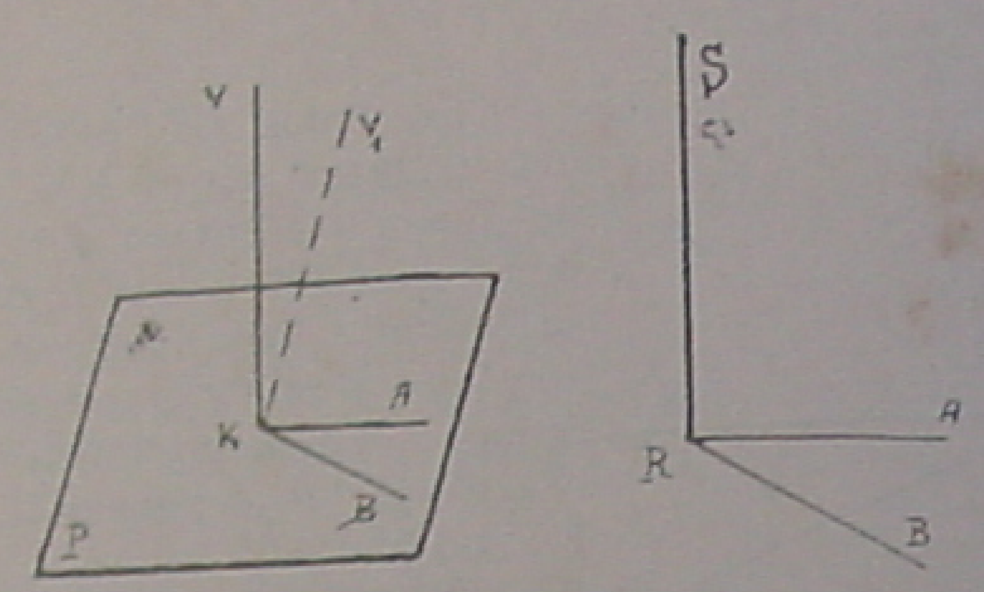
KV será perpendicular ao plano formado pelas rectas AO e AB, e passa pelo ponto O.

E' o unico nessas condições, pois que OA e AB determinam um plano e um só.

—

Theorema 102.— Por um ponto dado K podemos sempre traçar uma perpendicular a um plano, e uma só.

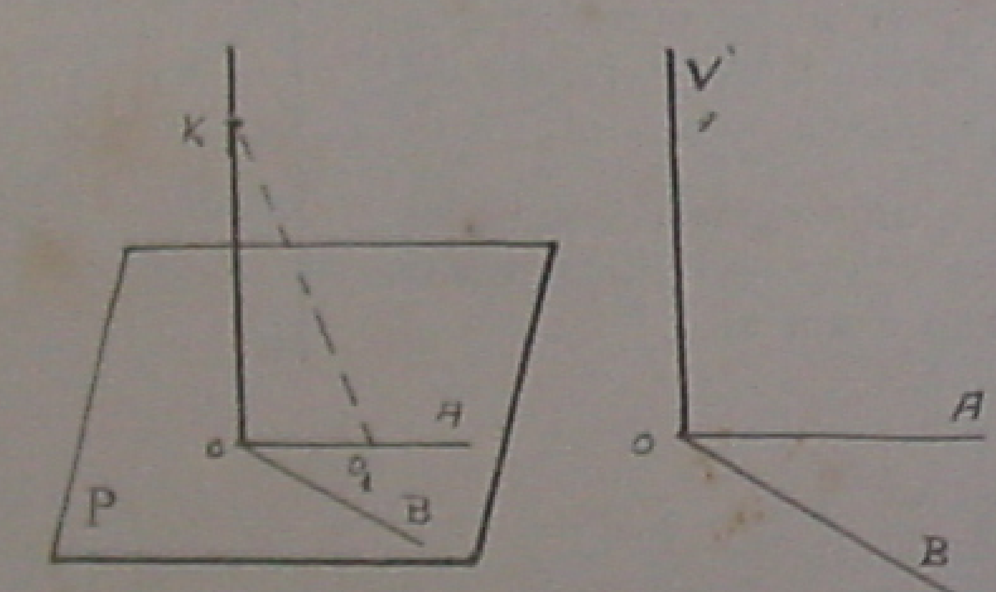
1.º O ponto K está no plano.



Seja o plano P e um ponto K neste plano. Considerando uma recta RS fóra do plano, e do ponto R desta recta, traçando as perpendiculares RA e RB em direcções differentes, a recta RS considerada será perpendicular ao plano formado por RA e RB.

Levando o systema SRAB sobre o plano P, de modo que o plano ARB, coincida com o plano P, e o ponto R com o ponto K, SR perpendicular sobre ARB, occupa então a posição de KV e é perpendicular ao plano P.

2.º O ponto K está fóra do plano.



Do ponto O traço duas perpendiculares OA e OB em direcções differentes.

OV é perpendicular ao plano formado por OA e OB.

Levo o systema VAOB sobre o plano P, de modo que a perpendicular OV ao plano AOB, agora perpendicular ao plano P, passe pelo ponto K.

OK é, pois, perpendicular ao plano P e passa pelo ponto K.

No 1.º caso, bem como no segundo, podemos traçar UMA só perpendicular ao plano P.

1.º Si KV_1 fosse perpendicular sobre o plano P, haveria no plano VKA duas perpendiculares KV e KV_1, a uma mesma recta KA n'um mesmo ponto K, o que é impossivel.

2.º Si KO_1 fosse perpendicular sobre o plano P, haveria no plano KOA, duas perpendiculares KO e KO_1, sobre uma mesma recta OA, d'um mesmo ponto K, o que é impossivel.

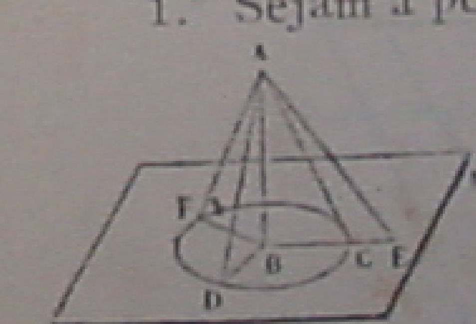
Theorema 103. — D'um ponto A, fóra d'um plano M, traçando, sobre este plano, uma perpendicular e varias obliquas:

1.º A perpendicular é menor do que qualquer obliqua:

2.º Duas obliquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular são iguaes;

3.º De duas obliquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular, a que se afasta mais é a maior.

1.º Sejam a perpendicular AB e a obliqua AC.



No triangulo ABC rectangulo em B, a hypotenusa AC é maior do que o catheto AB.

2.º Sejam as obliquas AC e AD, que se afastam igualmente do pé B da perpendicular, isto é, taes que as rectas BC e BD sejam iguaes.

Os triangulos ABC e ABD são iguaes (um angulo igual entre lados respectivamente iguaes); logo AC = AD.

3.º Sejam as obliquas AD e AE, e supponhamos que a distancia BE seja maior do que BD.

Tomemos sobre BE uma distancia BC = BD e unamos AC.

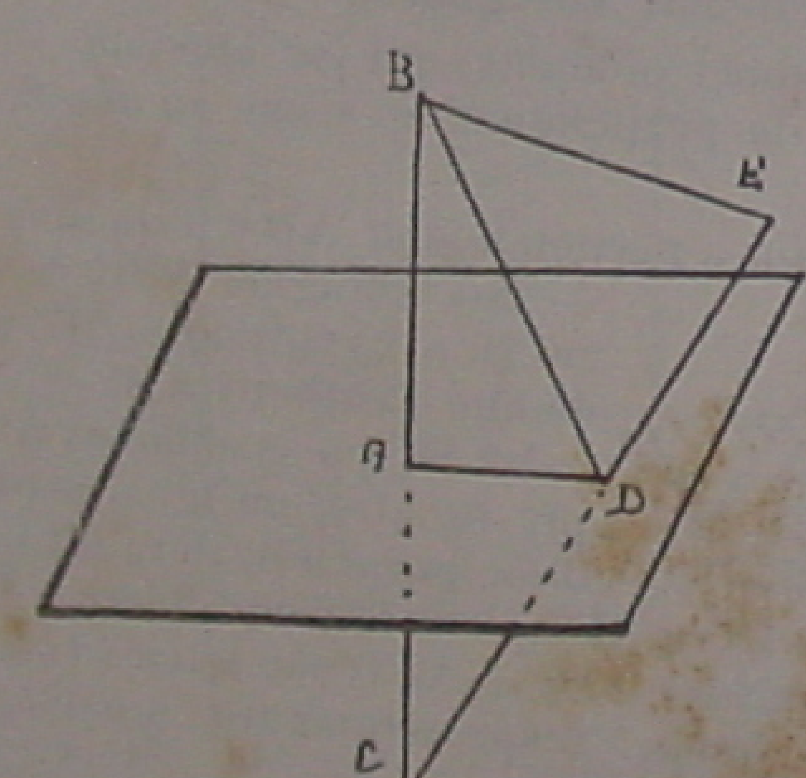
As obliquas AC e AD, que se afastam igualmente do pé da perpendicular, são iguaes; no plano ABE, a obliqua AE é maior do que a obliqua AC, logo é maior do que AD.

NOTA.—O logar geometrico dos pés das obliquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular AB a um plano M, é uma circumferencia tendo como raio a distancia BC do pé da perpendicular ao pé de uma dessas obliquas.

A distancia d'um ponto a um plano é dada pela perpendicular traçada do ponto sobre o plano.

Theorema 104.—O logar geometrico dos pontos do espaço equidistantes de dois pontos dados, é o plano perpendicular ao meio da recta que une os dois pontos.

Sejam B e C, dois pontos dados, e M um plano perpendicular ao meio da recta BC, que une os pontos dados. Queremos demonstrar que todo ponto do plano M dista igualmente dos pontos B e C; e todo ponto situado fóra do plano dista desigualmente de B e C.



1.º Seja D um ponto do plano M; unamos DB.

DC e DA. A recta AD é perpendicular ao meio de BC, logo DB = DC.

2.º Seja E um ponto fóra do plano: unamos EB, EC; a recta CE fura o plano em D, logo DB = DC; mas, no triangulo BDE

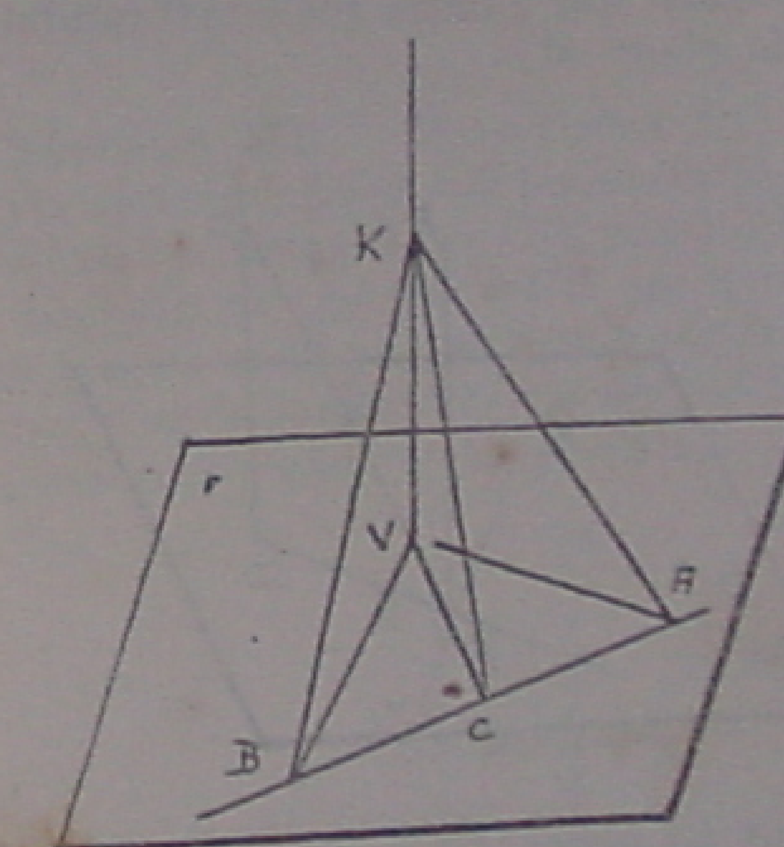
$$BE < ED + DB$$

logo

$$BE < ED + DC$$

$$BE < EC$$

Theorema 105 (das tres perpendiculares). — Si do pé d'uma recta KV perpendicular a um plano M traçamos uma perpendicular VC a uma recta AB situada no plano, e unimos o pé C dessa perpendicular, a um ponto qualquer K da perpendicular KV, a recta KC assim obtida é perpendicular sobre AB.



Tomemos CB = CA. Unamos VA, VB, KA e KB.

Sabemos que VA = VB, logo KA = KB.

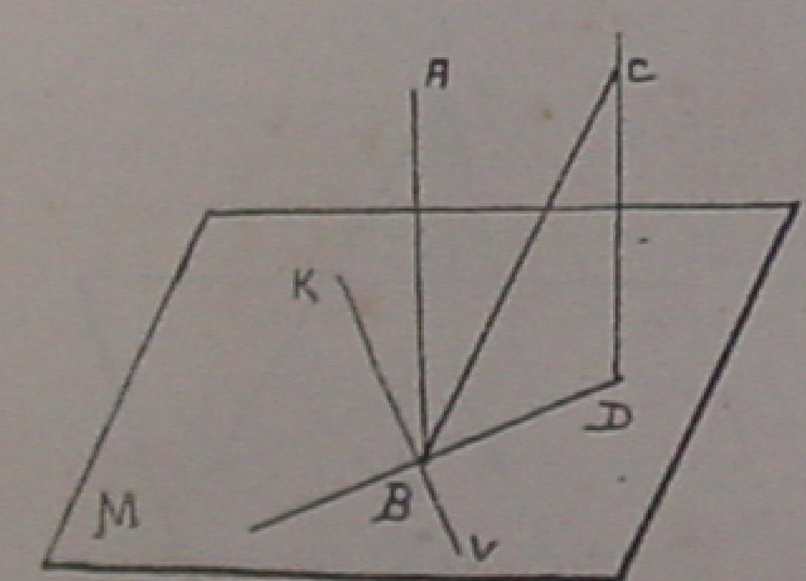
O triangulo BKA e, pois, isoceles; KC sendo mediana, tambem será altura; logo, será perpendicular a AB.

NOTA.—A recta AB, perpendicular ás rectas CV e CK, é perpendicular ao plano VCK.

Rectas e planos parallelos

Theorema 106.—Si duas rectas são parallelas e uma d'ellas é perpendicular a um plano, a outra tambem o é.

Sejam AB e CD duas rectas parallelas, e uma d'ellas, CD por exemplo, perpendicular a um plano M; vamos demonstrar que a outra recta AB tambem é perpendicular ao plano M.



Tracemos no plano M a perpendicular KV á recta BD que une os traços das rectas CD e AB.

Unamos o ponto B e um ponto C qualquer de CD.

Pelo theorema das tres perpendiculares CB é perpendicular a KV, e KV é perpendicular ao plano CBD: a recta AB situada no plano CBD é, pois, perpendicular sobre KV.

A recta CD é, por hypothese, perpendicular ao plano M, logo é perpendicular a DB; AB sendo parallela a CD, tambem será perpendicular a BD. — Logo,

AB perpendicular a KV e a BD, será perpendicular ao plano M.

—

Theorema 107.—Duas rectas AB e CD perpendiculares ao mesmo plano M, são parallelas.

Utilizemos a figura precedente.

As duas rectas AB e CD são perpendiculares sobre BD; para demonstrar que são parallelas, basta provar que estão n'um mesmo plano.

As rectas BD, BC e BA são perpendiculares sobre KV; a primeira, por construcção, a segunda, pelo theorema das tres perpendiculares, a terceira, porque é por hypothese perpendicular ao plano M. Logo, essas tres rectas estão situadas n'um mesmo plano, o qual plano contém CD e AB.

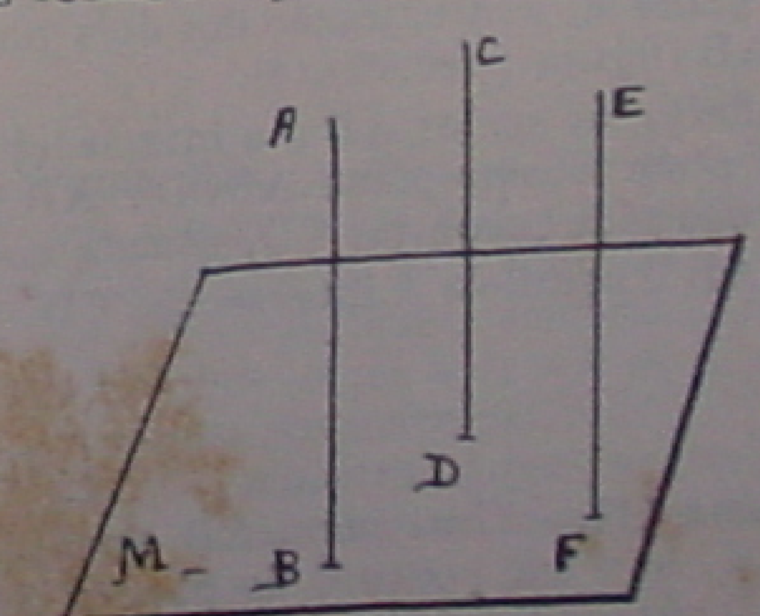
AB e CD são, pois, parallelas.

—

Theorema 108.— Duas rectas AD e CD parallelas a uma terceira são parallelas entre si.

Sejam as rectas AB e CD, parallelas a EF: queremos demonstrar que AB e CD são parallelas.

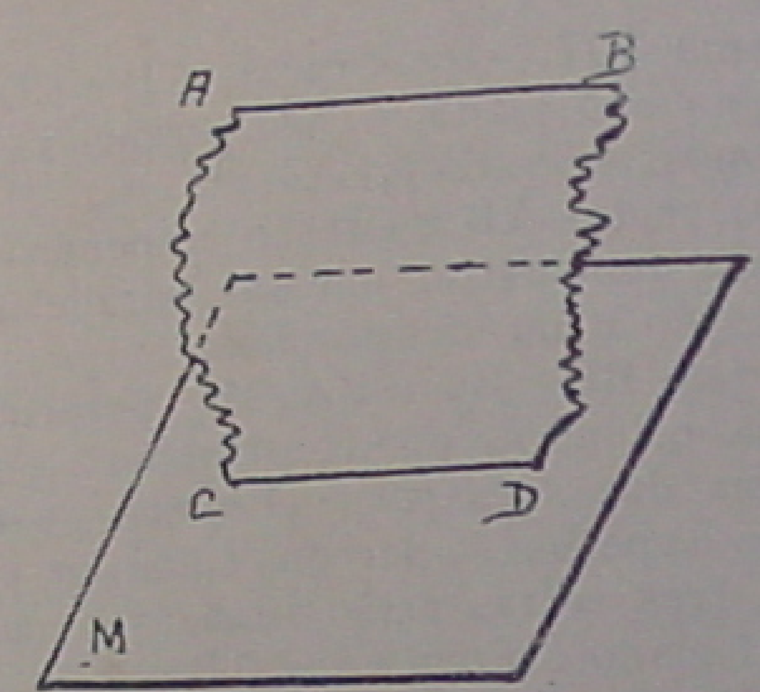
Seja o plano M perpendicular sobre EF. Este plano tambem será perpendicular sobre AB e sobre CD, pois, estas rectas são parallelas a EF.



Logo, as rectas AB e CD, perpendiculares ao mesmo plano M, são parallelas.

—

Theorema 109.—Uma recta AB parallela a uma recta CD situada n'um plano, é parallela a este plano.



O plano ABCD das duas parallelas, corta o plano em CD; a recta AB não póde, pois, encontrar o plano sem encontrar CD; logo, AB é parallela ao plano.

—

Theorema 110.—Si uma recta AB é parallela a um plano M, e, si traçarmos por essa recta um plano que corta o plano M, a intersecção dos dois planos será parallela a AB (figura precedente).

Com effeito, as rectas AB e a intersecção CD estão situadas n'um mesmo plano ABCD; AB parallela ao plano M, não póde encontrar CD, situada no plano M.

Logo AB é parallela á intersecção CD.

—

Theorema 111.— Uma recta AB sendo parallela a um plano M, si d'um ponto C do plano, traçarmos uma recta CD parallela a AB, essa recta CD estará situada no plano (figura precedente).

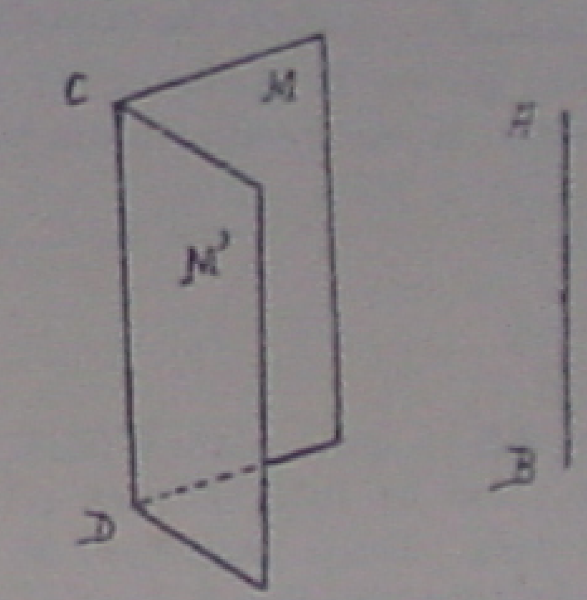
Pelo ponto C e a recta AB, imaginemos um plano: a intersecção desse plano com o plano M será parallela

a AB: logo, essa parallela CD coincidirá com a intersecção.

—

Theorema 112. — Toda recta parallela a dois planos que se cortam é parallela á sua intersecção.

Por um ponto C da intersecção, traçando uma parallela a AB, essa parallela estará situada no plano



M e tambem no plano M': logo, será a intersecção dos dois planos.

—

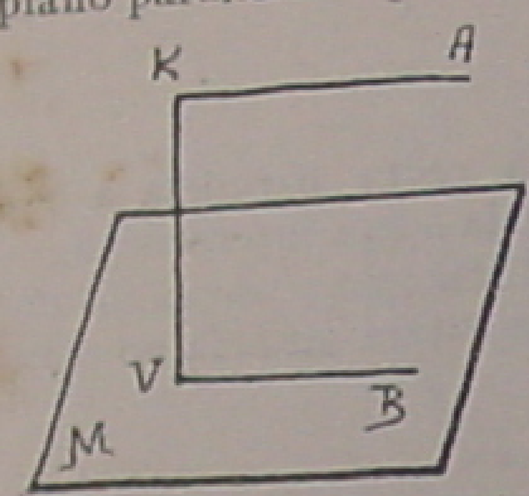
Theorema 113. — Dois planos K e V perpendiculares a uma mesma recta AB, são parallelos.

Si os dois planos K e V não fossem parallelos e tivessem um ponto qualquer commum, por este ponto commum poderiamos traçar dois planos K e V perpendiculares a uma mesma recta AB.

Ora, já foi demonstrado que por um ponto situado fóra de uma recta, póde-se traçar um plano perpendicular a essa recta e UM SÓ.

—

Theorema 114.— O logar geometrico das parallelas a um plano dado M por um ponto dado K é um plano parallelo ao plano M.



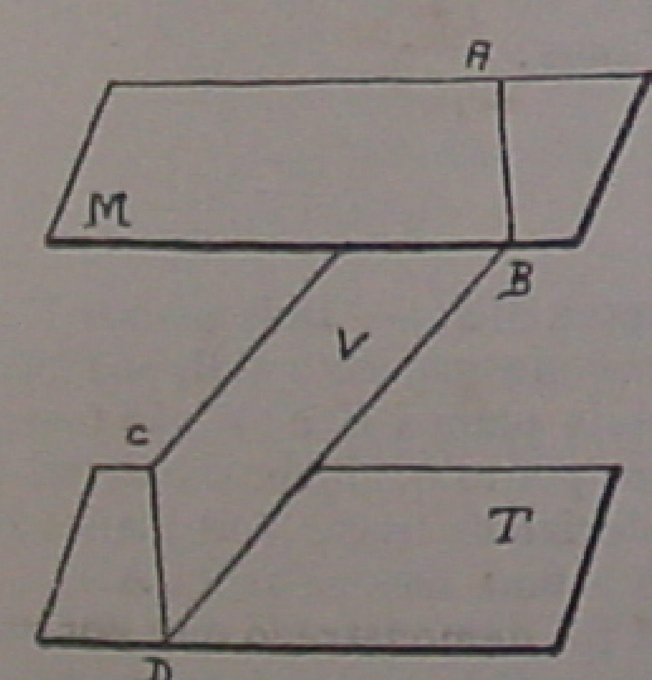
Traço KV perpendicular ao plano M.

KV, perpendicular ao plano M, é perpendicular a todas as rectas que passam pelo seu pé no plano: a cada uma dessas rectas podemos traçar uma parallela pelo ponto K; o conjuncto de todas essas parallelas traçadas pelo ponto K (todas ellas perpendiculares a VK no ponto K) determinará um plano parallelo ao plano M.

—

Theorema 115.— Dois planos parallelos cortados por um terceiro, têm as intersecções parallelas.

Sejam os dois planos parallelos M e T cortados pelo plano V. As intersecções AB e CD estão situadas respectivamente sobre os planos M e T.

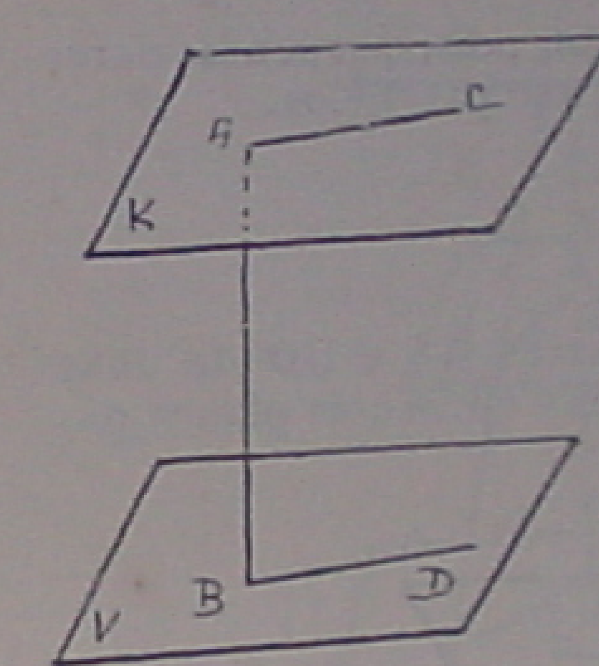


Os planos M e T sendo parallelos, as rectas AB e CD, situadas no mesmo plano V, serão parallelas.

—

Theorema 116.—Dois planos sendo parallelos, toda recta perpendicular a um d'elles tambem o será ao outro.

Seja a recta AB perpendicular ao plano K, quero demonstrar que AB tambem é perpendicular ao plano V parallelo ao plano K.



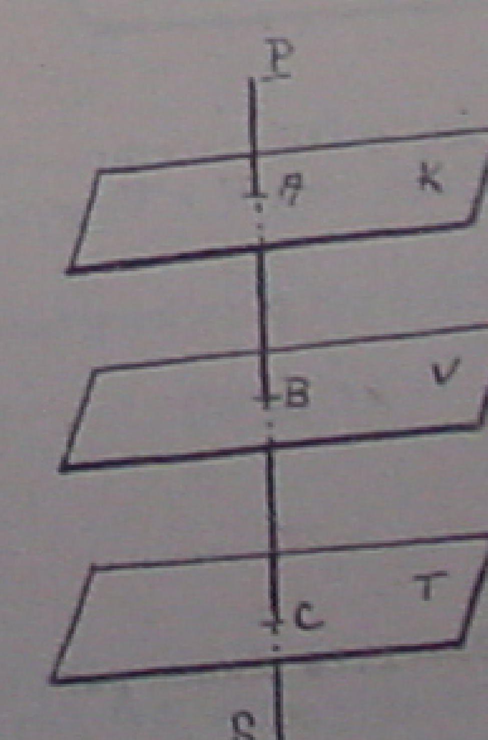
Seja AC uma recta qualquer do plano K. Pelas duas rectas AC e AB imaginemos um plano; este plano cortará o plano V em BD parllela a AC. Logo, AB é perpendicular a BD.

AB é, pois, perpendicular a uma recta qualquer BD passando pelo seu pé no plano; logo, é perpendicular ao plano.

—

Theorema 117.— Dois planos parallelos a um terceiro são parallelos entre si.

Sejam os planos K e V, todos dois parallelos ao plano T: vou provar que são parallelos.



Tracemos a recta PS perpendicular ao plano T.

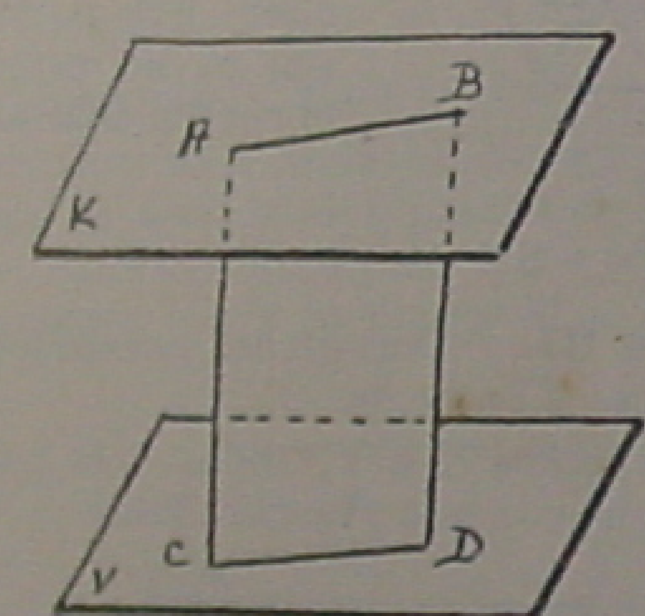
PS será perpendicular ao plano K, pois, por hypothese, K e T são parallelos.

PS será perpendicular ao plano V, pois, por hypothese, V e T são parallelos.

Os dois planos K e V são, pois, perpendiculares a uma mesma recta PS; logo, são parallelos.

—

Theorema 118. — As partes AC e BD de duas rectas parallelas comprehendidas entre dois planos parallelos, são parallelas.



Pelas rectas AC e DB tracemos um plano; as intersecções deste plano com K e V serão as parallelas AB e CD.

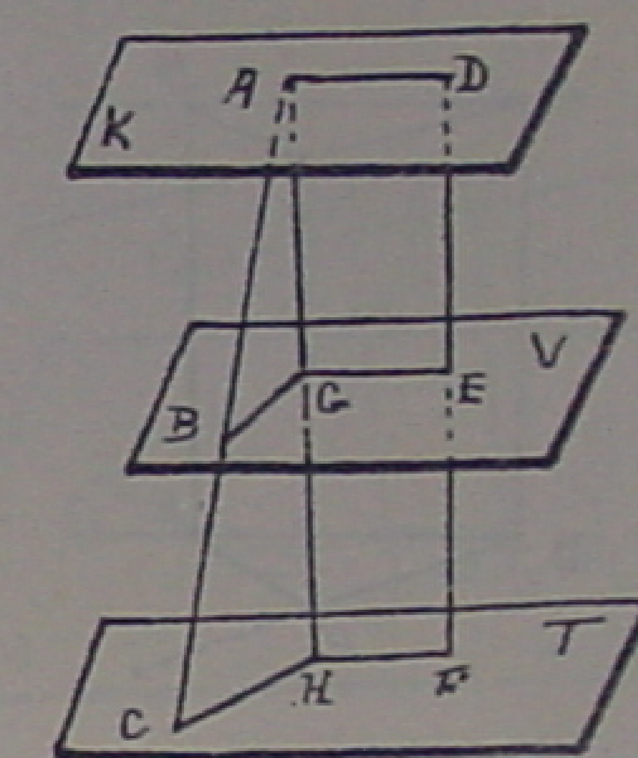
A figura ABCD é um parallelogrammo, e

$$AC = BD$$

—

Theorema 119. — Tres planos parallelos K, V e T determinam sobre duas rectas AC e DF, que os cortam, partes proporcionaes.

Sejam os tres planos parallelos K, V e T, e as rectas AC e DF. Sejam A, B e C os traços da primeira



recta AC respectivamente com os planos K, V e T: sejam D, E e F os traços da segunda recta DF com os mesmos planos K, V e T.

Pelo ponto A, traço AH parallela a DF, já sabemos que $DE = AG$ e $EF = GH$.

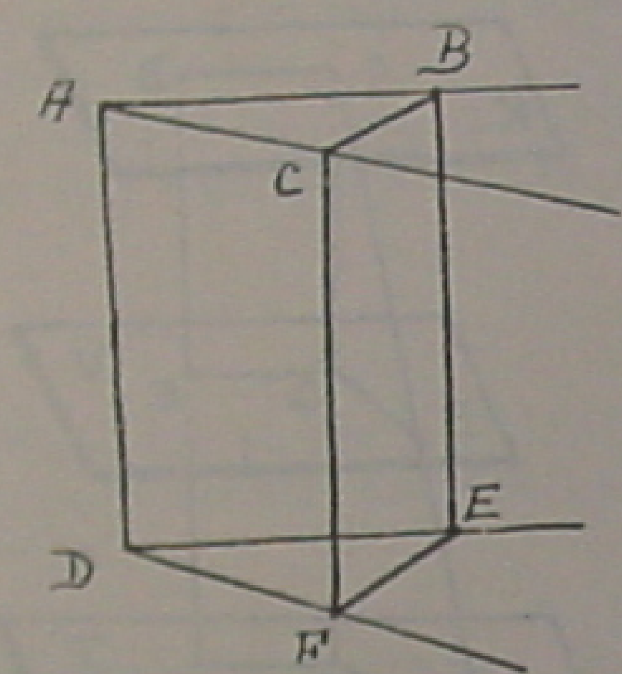
Mas $$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}$$

logo $$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

—

Theorema 120. — Dois angulos não situados no mesmo plano, tendo seus lados respectivamente parallelos e dirigidos no mesmo sentido, são iguaes, e seus planos são parallelos.

Sejam os angulos BAC, EDF cujos lados são parallelos e dirigidos no mesmo sentido.



Tomemos AB = DE, AC = DF ; unamos BC, EF, AD, BE, CF.

A figura ACDF é um parallelogrammo, porque AC é igual e parallelo a DF ; logo, as rectas AD e CF são iguaes e parallelas. D'um modo analogo, ABDE é um parallelogrammo, e AD e BE são iguaes e parallelas.

D'ahi resulta que CF é igual e parallela a BE, e a figura BCFE é um parallelogrammo :

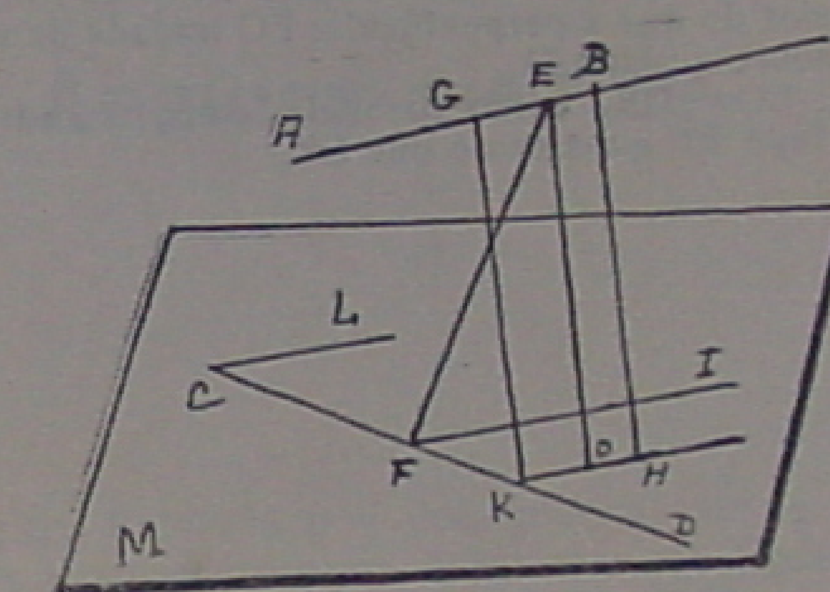
$$BC = EF$$

Os triangulos BAC, EDF, tendo os seus tres lados respectivamente iguaes, são iguaes : e o angulo BAC é igual ao angulo EDF.

O plano BAC é parallelo ao plano EDF ; com effeito, as rectas AB e AC respectivamente parallelas a DE e DF situadas no plano DEF, são parallelas a este plano : AB e AC estão, pois, situadas no plano traçado pelo ponto A parallelamente ao plano EDF.

NOTA. — E' facil constatar que, si os angulos dados tivessem seus lados parallelos e dirigidos em sentido contrario, ainda seriam iguaes ; entretanto, seriam supplementares, si dois de seus lados sendo dirigidos no mesmo sentido, os dois outros fossem dirigidos em sentido contrario.

Theorema 121. — Por duas rectas não situadas no mesmo plano, podemos traçar uma perpendicular e uma só.



1.º Por um ponto C da recta CD traço CL parallela a AB.

Por CD e CL, traço o plano M : esse plano será parallelo a AB:

D'um ponto B da recta AB, traço BH perpendicular ao plano M : pelo pé H d'esta perpendicular traço HK, parallela a AB, até seu encontro em K com CD.

Pelo ponto K traço KG parallela a BH.

A recta KG é perpendicular ao plano M, pois ella é perpendicular a CD e a KH ; esta ultima recta é parallela a AB ; logo, GK é perpendicular a AB.

GK é perpendicular commum a AB e a CD.

2.º Seja EF uma recta differente de GK, e que encontre as duas rectas AB e CD ; traço EO parallela a GK, e FI parallela a AB.

A recta EO é perpendicular ao plano M, pois, sua parallela GK é perpendicular a esse plano ; EF é, pois, obliqua ao plano M e não poderia ser perpendicular ao mesmo tempo ás rectas CD e FI que passam pelo seu pé no plano.

Notando que traçamos FI parallelamente a AB, constatamos que EF não é perpendicular commum a CD e a AB.

NOTA. — GK é a mais curta distancia entre as rectas AB e CD. Com effeito, toda outra recta EF encontrando AB e CD, é maior do que a perpendicular EO traçada de sua extremidade E sobre o plano M.

Ora, EO = GK, como parallelas comprehendidas entre parallelas, logo EF é maior do que GK.

Angulos diedros

A figura formada por dois planos que se encontram, é um ANGULO DIEDRO. A intersecção d'esses dois planos é a ARESTA do diedro, e os planos são as FACES.

Um diedro designa-se pelas duas letras da aresta, ou por meio de quatro letras das quaes as duas extremas representam as faces.

A segunda denominação é necessariamente empregada quando dois ou mais diedros têm a aresta commum.

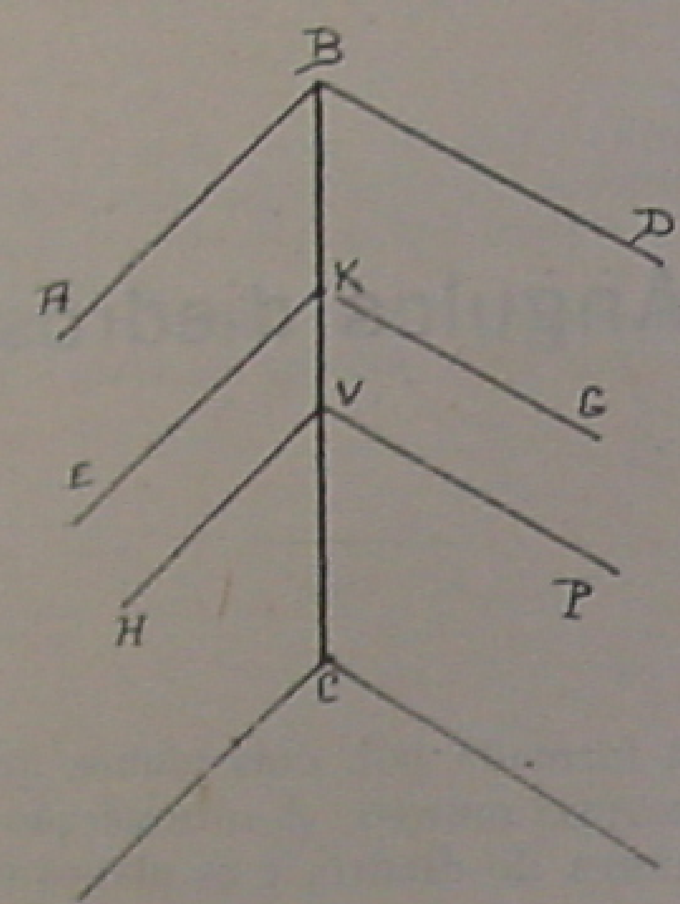
O tamanho de um diedro depende exclusivamente do affastamento de suas faces.

Dois diedros de mesma aresta e uma face intermediaria commum são DIEDROS ADJACENTES.

Quando um plano encontra um outro, de tal modo que o primeiro forme com o segundo dois angulos adjacentes iguaes, diz-se que o primeiro é perpendicular sobre o segundo.

Neste caso os diedros são DIEDROS RECTOS.

Theorema 122. — Si, por dois pontos da aresta de um diedro, traçamos perpendiculares nas faces sobre a aresta, os angulos formados por essas perpendiculares são iguaes.



Com effeito, as rectas KE e VH perpendiculares sobre a aresta, estão no mesmo plano ABC; logo, são parallelas.

D'um modo analogo, KG e VP são parallelas.

Os angulos EKG, HVP têm os lados respectivamente parallelos e dirigidos no mesmo sentido; logo, são iguaes.

NOTA. — O angulo constante formado pelas perpendiculares traçadas por um ponto qualquer da aresta e por cada uma das faces do diedro, é o ANGULO PLANO correspondente ao diedro.

—

Dois angulos diedros sendo iguaes, seus angulos planos são iguaes.

—

Dois angulos planos, correspondentes a dois diedros, sendo iguaes, os angulos diedros são iguaes.

—

Um angulo diedro recto tem por angulo plano um angulo recto.

Reciprocamente, quando o angulo plano correspondente a um diedro é recto, o angulo diedro é recto.

—

Theorema 123. — A razão entre dois angulos diedros é igual á razão entre seus angulos planos.

Sejam os angulos planos CBD e C'B'D' correspondentes aos diedros AB e A'B'; supponhamos que esses angulos planos tenham uma medida commum contida 5 vezes em CBD e 3 vezes em C'B'D', teremos:

$$\frac{CBD}{C'B'D'} = \frac{5}{3}$$

Dividamos os angulos CBD e C'B'D' respectivamente em 5 e em 3 partes iguaes; pelas arestas AB, A'B' e as linhas de divisão tracemos planos. Estes planos dividirão os diedros respectivamente em 5 e em 3 diedros iguaes; teremos, pois:

$$\frac{\text{diedro } AB}{\text{diedro } A'B'} = \frac{5}{3}$$

logo,

$$\frac{\text{diedro } AB}{\text{diedro } A'B'} = \frac{CBD}{C'B'D'}$$

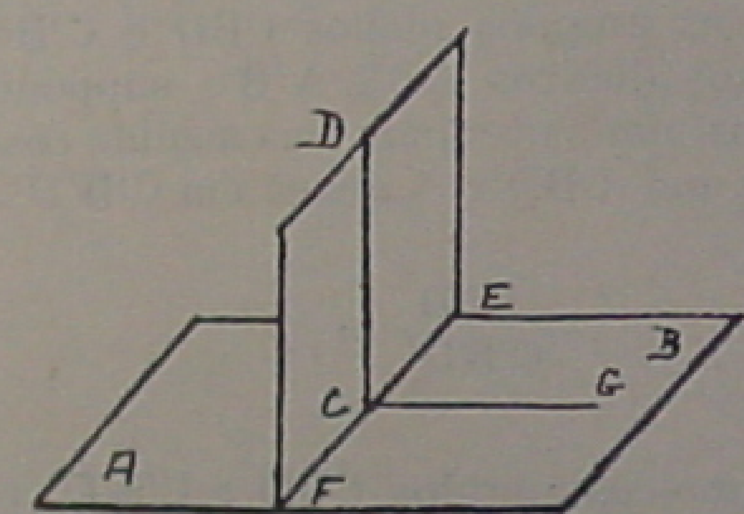
No caso em que os angulos planos não tivessem medida commum, poderiamos empregar o processo já utilisado na medida de angulos centraes (na 2ª parte, pag. 69).

—

UM ANGULO DIEDRO TEM A MESMA MEDIDA QUE O ANGULO PLANO CORRESPONDENTE, SI TOMARMOS POR UNIDADE UM ANGULO DIEDRO QUALQUER E O ANGULO PLANO CORRESPONDENTE.

—

Theorema 124.— Uma recta CD sendo perpendicular a um plano AB, qualquer plano DEF traçado por essa recta será perpendicular ao plano AB.



Pela recta DC traço um plano qualquer DEF, cuja intersecção com o plano AB seja EF.

Do pé C da perpendicular DC traço uma perpendicular CG sobre EF no plano AB. O angulo DCG é um angulo recto, pois, DC sendo perpendicular ao plano AB, é perpendicular a toda recta que passa pelo seu pé no plano. Mas, DCG é o angulo plano do diedro DFEG; iogo, este diedro é recto, e o plano DEF que traçamos por DC é perpendicular ao plano AB.

—

Theorema 125.—Dois planos AB e DEF sendo perpendiculares um ao outro, toda recta CD traçada n'um dos planos perpendicularmente á intersecção dos planos será perpendicular ao outro plano (figura precedente).

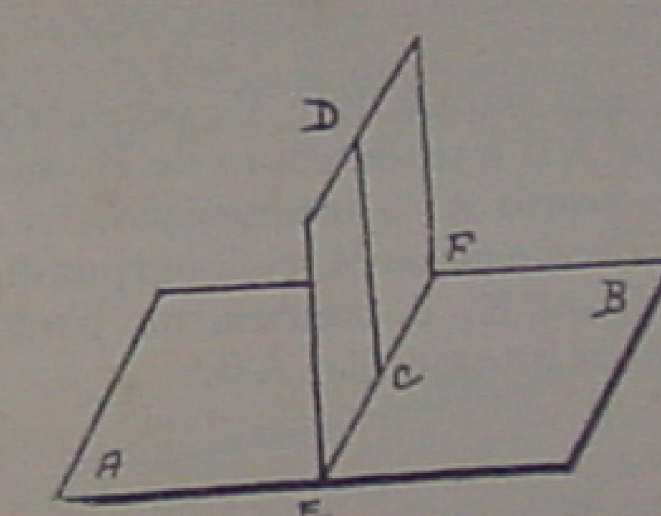
Tracemos no plano AB a recta CG perpendicular

sobre EF; o angulo DCG será o angulo plano do diedro DEFG.

Ora, por hypothese, este diedro é recto; logo, o angulo DCG é recto, e a linha DC, já perpendicular sobre EF, tambem o será sobre CG: logo será perpendicular ao plano AB.

—

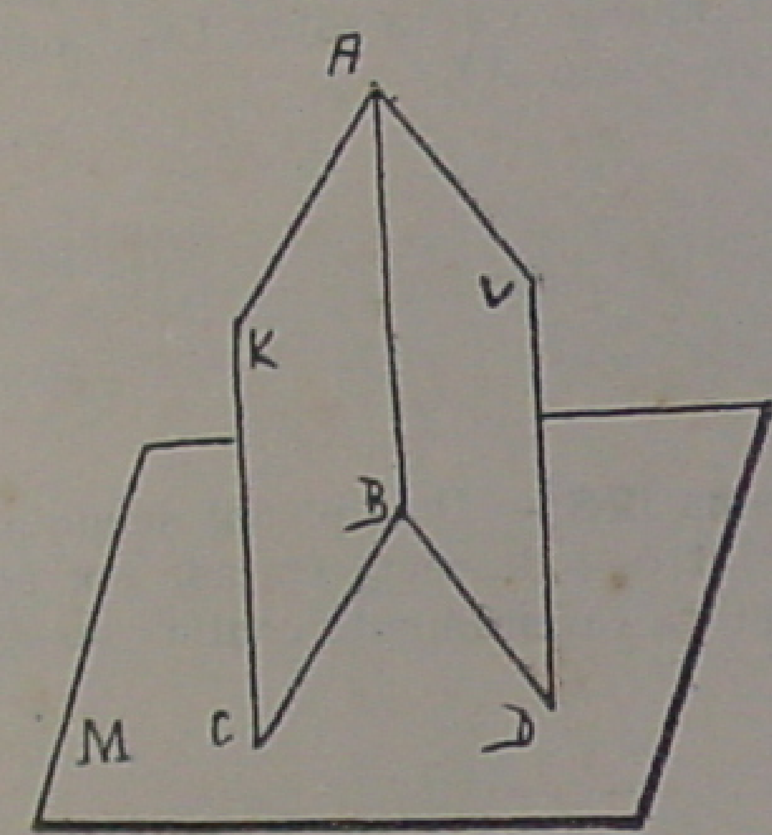
Theorema 126.— Dois planos sendo perpendiculares um ao outro, toda recta traçada por um ponto de um d'elles estará inteiramente contida no outro.



Por um ponto D do plano DEF perpendicular ao plano AB, traço DC perpendicular ao plano AB: esta perpendicular deverá coincidir com a perpendicular traçada do ponto D sobre EF, pois, esta ultima é perpendicular ao plano AB; logo, DC acha-se inteiramente contida no plano DEF.

—

Theorema 127.— A intersecção de dois planos, perpendiculares a um terceiro, é perpendicular a este terceiro.



Sejam os dois planos K e V, perpendiculares ao plano M; e seja AB a intersecção de K com V.

Si por um ponto A da intersecção, traçamos uma perpendicular sobre o plano M, esta perpendicular acha-se contida no plano K, e tambem no plano V; logo, confunde-se com a intersecção AB.

—

Theorema 128.— Um plano e uma recta sendo perpendiculares a um mesmo plano, são parallelos.

—

Theorema 129. —Um plano e uma recta sendo parallelos, todo plano perpendicular á recta tambem o será ao plano.

—

Theorema 130.— O logar geometrico dos pontos equidistantes das duas faces de um angulo diedro, é o plano bissector d'este diedro.

—

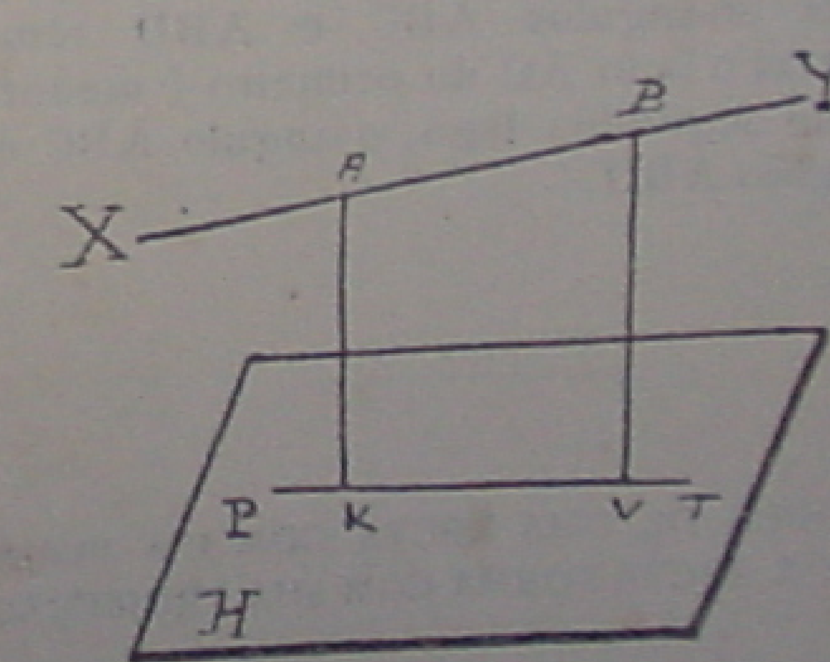
A PROJECÇÃO D'UM PONTO SOBRE UM PLANO É O PÉ DA PERPENDICULAR TRAÇADA D'ESSE PONTO SOBRE O PLANO.

A PROJECÇÃO D'UMA FIGURA É O CONJUNCTO DAS PROJECÇÕES DOS SEUS DIFFERENTES PONTOS SOBRE O PLANO.

—

Theorema 131. — A projecção de uma linha recta sobre um plano é uma linha recta.

AK sendo a projectante d'um ponto A da recta XY, as rectas AY e AK determinam um plano perpendicular ao plano de projecção H e que o corta segundo a recta PT.

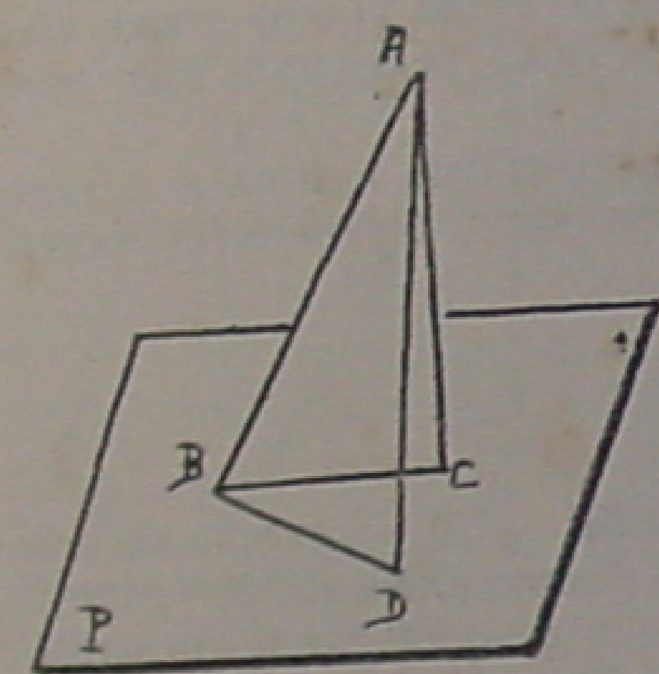


A projectante d'um ponto qualquer B da recta XY estará inteiramente contida n'esse plano, e, logo, terá o seu pé V, sobre PT. Esta recta PT, contendo as projecções de todos os pontos de XY, será a projecção de XY sobre o plano H.

—

Theorema 132. — O menor angulo de uma recta com um plano é o angulo que ella fórma com sua projecção.

Seja a recta AB, o plano P, e BC a projecção de AB sobre o plano P.



Tracemos BD = BC e unamos AD.

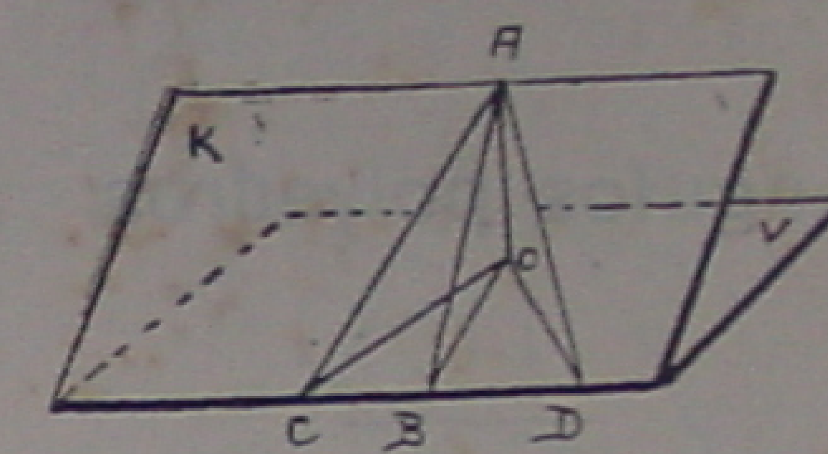
Os dois triangulos ABC e ABD têm o lado BC = BD, mas o lado AC do primeiro é menor do que o lado AD do segundo: logo, o angulo ABC é menor do que o angulo ABD.

—

O ANGULO DE UMA RECTA COM UM PLANO É O ANGULO QUE A RECTA FORMA COM SUA PROJECÇÃO SOBRE O PLANO.

—

Theorema 133. — Uma recta AC movendo-se sobre uma das faces de um diedro em torno de um ponto fixo A, o angulo que elle fórma com sua projecção sobre a outra face é maximo, quando a recta é per-



pendicular sobre a intersecção das faces do diedro.

AB perpendicular sobre a intersecção das duas faces do diedro é a linha de MAIOR DECLIVE.

Angulos polyedros

Angulo polyedro é a figura formada por varios planos concorrentes a um ponto fixo e tendo dois a dois um lado commum.

O ponto fixo chama-se VERTICE do angulo solido, e os angulos planos são as FACES do angulo solido.

Cada lado commum a duas faces é uma ARESTA.

Um angulo solido é CONVEXO quando qualquer secção plana, que encontra todas as arestas, é um polygono convexo.

Prolongando-se as arestas de um angulo solido além do vertice, forma-se um outro angulo solido symetrico do primeiro.

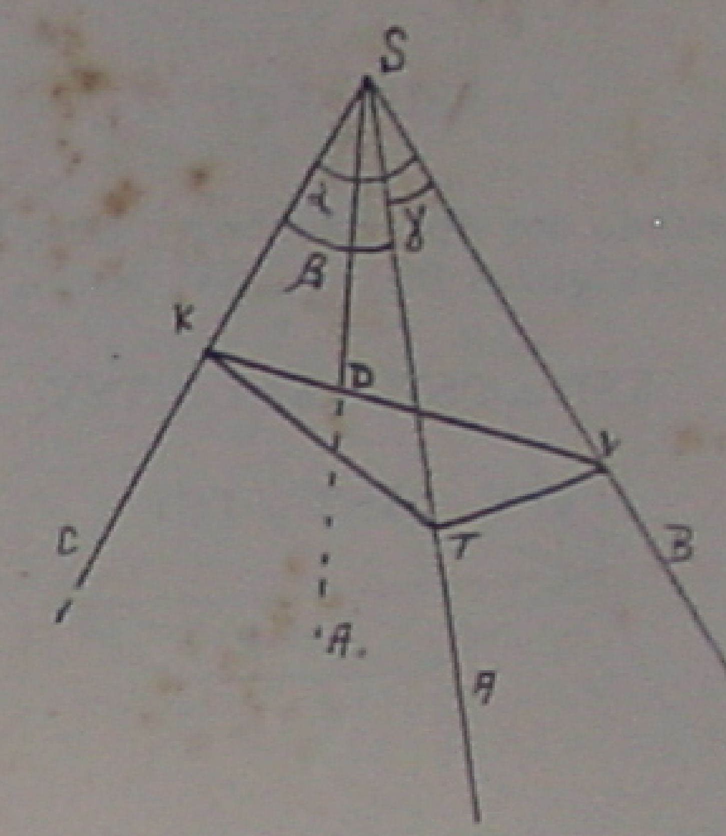
O angulo solido de tres faces chama-se TRIEDRO.

Chamam-se TRIEDROS SUPPLEMENTARES, DOIS TRIEDROS TAES QUE AS FACES DE CADA UM D'ELLES SEJAM OS SUPPLEMENTOS DOS DIEDROS DO OUTRO.

Chamando A, B e C ás arestas de um dietro, e A', B', C', ás arestas de um outro diedro: sendo a, b e c as faces do primeiro, e a', b' e c' as faces do segundo: esses dois triedros serão supplementares quando

$$\begin{aligned} A + a' &= 2r \\ B + b' &= 2r \\ C + c' &= 2r \end{aligned} \qquad \Bigg\| \qquad \begin{aligned} A' + a &= 2r \\ B' + b &= 2r \\ C' + c &= 2r \end{aligned}$$

Theorema 134. — Qualquer face d'um triedro é sempre menor do que a somma das duas outras e maior do que a sua differença.



Seja o angulo triedro SABC.

Queremos provar que uma face qualquer CSB ou α, é menor do que a somma das duas outras CSA + ASB ou $\beta + \gamma$.

Façamos girar a face ASB em torno de SB até que ella venha coincidir com a face posterior: o angulo A_1SB será igual a ASB.

Traçando uma recta qualquer KV sobre a face posterior, seja D o ponto de encontro de SA com KV.

Transportando a medida SD sobre SA a partir de S, determinamos $ST = SD$.

Unamos TK e TV.

Os triangulos DSV e TSV têm o lado SV commum, o lado SD = ao lado ST por constracção, e os angulos em S iguaes: logo, são iguaes, e $DV = VT$.

Mas, no triangulo KVT.

$$KV < KT + TV$$

$$KD + DV < KT + TV$$

ou

$$KD < KT$$

Comparando os dois triangulos KSD e KST, constatamos que o lado SK é commum, SD = ST, mas KD < KT; logo, o angulo KSD é menor do que o angulo KST

$$KSD < KST$$

Sommando aos dois membros d'essa desigualdade as quantidades iguaes DSV e TSV, temos

$$KSD + DSV < KST + TSV$$

ou $$KSV < KST + TSV$$

ou $$\alpha < \beta + \gamma$$

—

Si desta ultima desigualdade, subtrahissemos β, teriamos;

$$\alpha - \beta < \beta + \gamma - \beta$$

ou $$\alpha - \beta < \gamma$$

ou $$\gamma > \alpha - \beta$$

Si tivessemos subtrahido γ, teriamos achado:

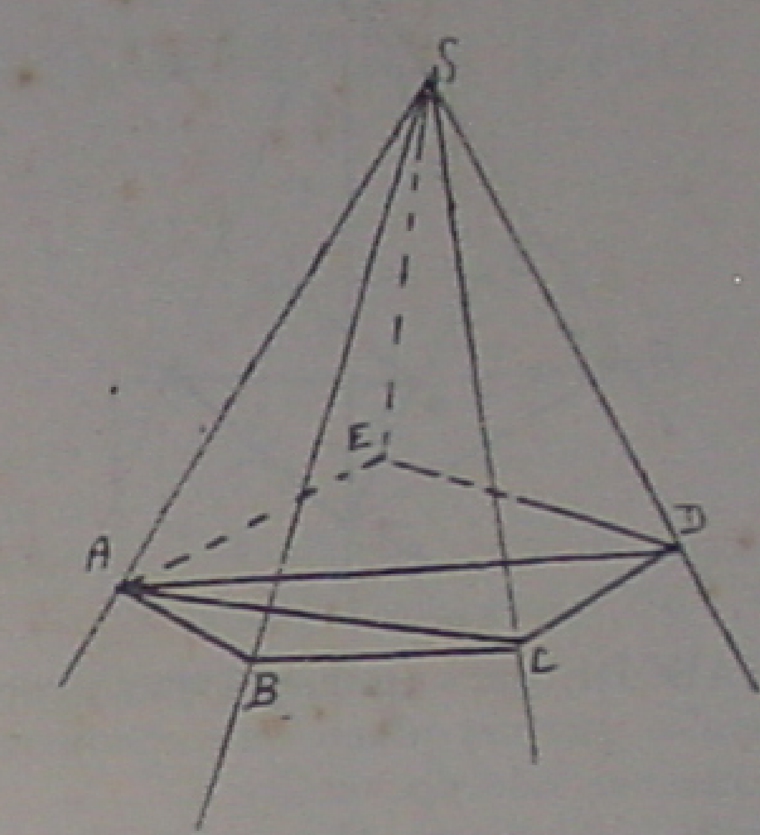
$$\alpha - \gamma < \beta + \gamma - \gamma$$

ou $$\alpha - \gamma < \beta$$

ou $$\beta > \alpha - \gamma$$

—

Theorema 135. — N'um angulo solido qualquer, uma das faces é sempre menor do que a somma de todas as outras.



Seja o angulo solido SABCDE.

Tracemos um plano sector que não seja parallelo a nenhuma das arestas, e seja ABCDE sua intersecção com o angulo polyedro.

Teremos assim decomposto o nosso angulo polyedro em um certo numero de triedros.

$$ASB < BSC + CSA$$

$$ASC < CSD + DSA$$

$$ASD < DSC + ESA$$

Logo,

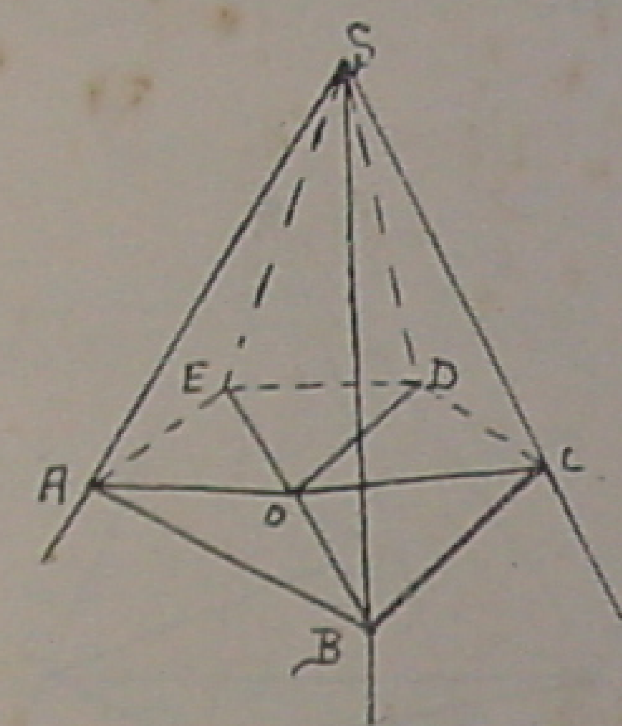
$$ASB < BSC + CSD + DSA$$

e

$$ASB < BSC + CSD + DSE + ESA$$

—

Theorema 136.— A somma das faces de qualquer angulo solido convexo é menor do que 4 rectos.



Seja SABCDE um angulo polyedro convexo.

Cortemol-o por um plano que encontre todas as arestas, do mesmo lado do vertice S.

Tomemos um ponto O no interior da secção ABCDE, e unamol-o aos vertices A, B, C, D e E.

Teremos então, em torno do ponto O, um numero de triangulos igual ao numero de triangulos em torno de S.

A somma dos angulos de cada um d'esses grupos de triangulos é, pois, a mesma.

Considerando o triedro com o vertice em A, temos:

$$BAE < BAS + SAE$$

O triedro com o vertice em B, nos dá

$$ABC < ABS + SBC$$

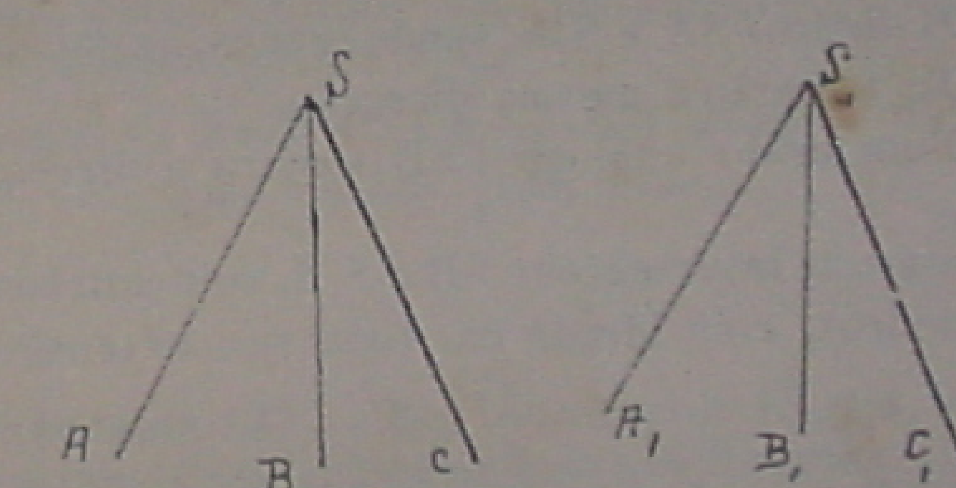
e assim por diante...

Logo, a somma dos angulos na base dos triangulos que têm o vertice em O, é menor do que a somma dos angulos na base dos triangulos que têm o vertice em S. E' preciso, pois, que os angulos em torno do ponto S tenham uma somma menor do que a somma dos angulos em torno de O.

Esta ultima somma sendo de 4 rectos, concluimos que a somma dos angulos em S deve ser menor do que 4 rectos.

Igualdade dos triedros

1.º Caso.— Dois triedros são iguaes quando têm um angulo diedro igual comprehendido entre faces respectivamente iguaes.

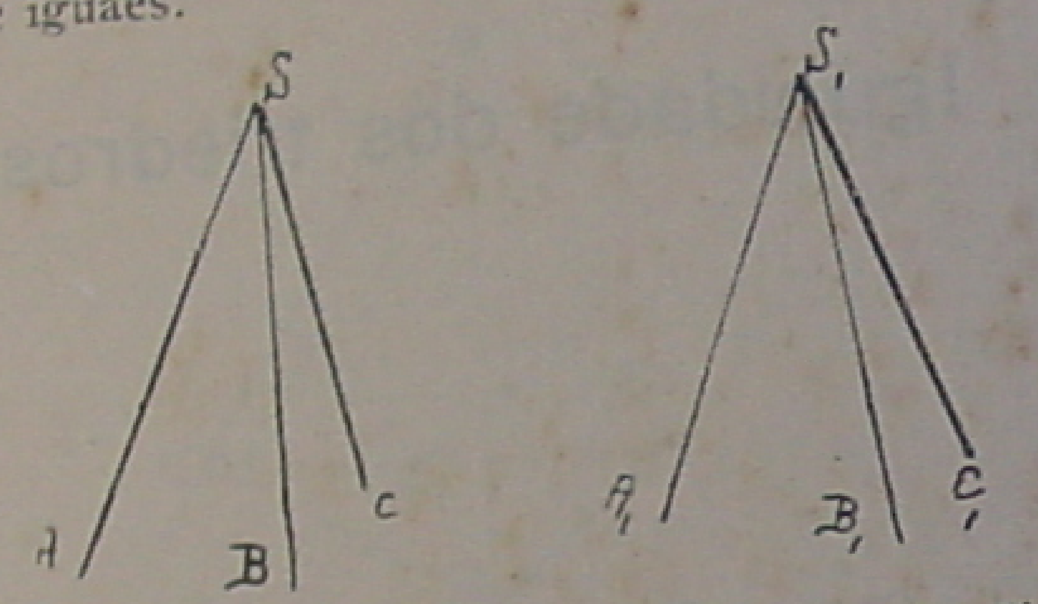


Seja o diedro SB = diedro S_1B_1, a face ASB = á face $A_1S_1B_1$ e a face BSC = á face $B_1S_1C_1$.

Levemos a face $A_1S_1B_1$ sobre a face ASB, de fórma que S_1A_1 coincida com SA, e S_1B_1 com SB. Os diedros S_1B_1 e SB sendo iguaes, a face $B_1S_1C_1$ cahirá sobre BSC, e como essas faces são iguaes, S_1C_1 coincidirá com SC.

Os dois triedros, coincidindo em toda sua extensão, são iguaes.

2.º Caso.— Dois triedros são iguaes quando têm uma face igual comprehendida entre diedros respectivamente iguaes.



Seja a face ASC = á face $A_1S_1C_1$ e os diedros $SA = S_1A_1$ e $SC = S_1C_1$.

Colloco a face ASC sobre $A_1S_1C_1$, de modo que SA coincida com S_1A_1 e SC com S_1C_1.

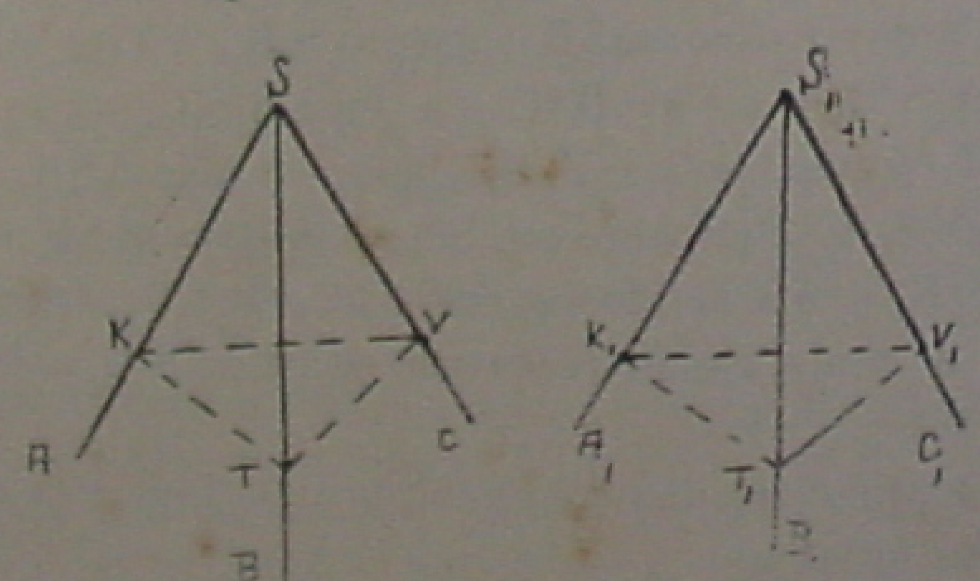
Os diedros SA e S_1A_1 sendo iguaes, as faces ASB e $A_1S_1B_1$ tomarão a mesma direcção.

D'um modo analogo CSB tomará a direeção de $C_1S_1B_1$.

Logo, as intersecções SB e S_1B_1 coincidirão—e os dois triedros, coincidindo em toda sua extensão, são iguaes.

—

3.º Caso.—Dois triedros são iguaes quando têm as tres faces respectivamente iguaes.



Sejam os triedros S e S_1 com as faces respec-

tivamente iguaes. Basta provar a igualdade de dois diedros.

Sobre a aresta SA, tomo um ponto qualquer K, traço as perpendiculares KV sobre SA na face ASC, e KT sobre SA na face ASB. O angulo VKT será o angulo plano do diedro SA.

Tomo $S_1K_1 = SK$ e determino d'um modo analogo, o angulo plano $V_1K_1T_1$ do diedro S_1A_1.

Os dois triangulos rectangulos SKV e $S_1K_1V_1$ têm os angulos em S e S_1 iguaes, e os cathetos SK e S_1K_1 iguaes por construcção; logo são iguaes, e $KV = K_1V_1$.

Analogamente demonstramos que $KT = K_1T_1$.

Os triangulos STV e $S_1T_1V_1$ têm os angulos em S e S_1 iguaes, e os lados $ST = S_1T_1$ e $SV = S_1V_1$; logo, $TV = T_1V_1$.

Logo, os dois triangulos KVT e $K_1V_1T_1$ são iguaes: o angulo K é igual ao angulo K_1.

Ora, estes angulos são justamente os angulos planos dos diedros SK e S_1K_1.

Logo, os diedros SA e S_1A_1 são iguaes.

Os dois triedros são, pois, iguaes.

—

Theorema 137.— Em todo angulo triedro, a somma dos angulos diedros é maior do que 2 rectos e menor do que 6 rectos.

Seja um triedro qualquer S e seja S_1 o triedro supplementar.

Chamando A, B e C aos diedros do primeiro e a_1 b_1 e c_1 ás faces do outro, temos

$$A + a_1 = 2r$$

$$B + b_1 = 2r$$

$$C + c_1 = 2r$$

Sommando

$$(A+B+C)+(a_1+b_1+c_1)=6\ r$$

ou

$$(A + B + C) = 6\,r - (a_1 + b_1 + c_1)$$

Já sabemos que a somma

$$a_1 + b_1 + c_1$$

está comprehendida entre zero e 4 rectos. Logo, a somma

$$A + B + C$$

estará comprehendida entre

$$6\,r - 4\,r \quad e \quad 6\,r - 0$$

ou

$$2\,r \quad e \quad 6\,r$$

—

NOTA. — Este theorema é de maxima utilidade na determinação da somma dos angulos nos triangulos esphericos.

—

PÓDE-SE FORMAR UM ANGULO TRIEDRO COM TRES FACES DADAS, COMQUANTO QUE A MAIOR DAS TRES FACES SEJA MENOR DO QUE A SOMMA DAS DUAS OUTRAS, E QUE A SOMMA DAS TRES FACES SEJA MENOR QUE 4 RECTOS.

6ª PARTE