ou

$$(A + B + C) = 6\,r - (a_1 + b_1 + c_1)$$

Já sabemos que a somma

$$a_1 + b_1 + c_1$$

está comprehendida entre zero e 4 rectos. Logo, a somma

$$A + B + C$$

estará comprehendida entre

$$6\,r - 4\,r \quad e \quad 6\,r - 0$$

ou

$$2\,r \quad e \quad 6\,r$$

—

NOTA. — Este theorema é de maxima utilidade na determinação da somma dos angulos nos triangulos esphericos.

—

PÓDE-SE FORMAR UM ANGULO TRIEDRO COM TRES FACES DADAS, COMQUANTO QUE A MAIOR DAS TRES FACES SEJA MENOR DO QUE A SOMMA DAS DUAS OUTRAS, E QUE A SOMMA DAS TRES FACES SEJA MENOR QUE 4 RECTOS.

6ª PARTE

Os polyedros

Chama-se POLYEDRO ao corpo limitado de todos os lados por planos, que são chamados FACES do polyedro.

As intersecções das faces são as ARESTAS do polyedro. Os pontos de encontro das arestas são os VERTICES.

Os polyedros pódem ter um numero qualquer de faces, a partir de 4: pois, com um menor numero de faces, é impossivel formar um polyedro.

Diz-se que um POLYEDRO é REGULAR quando todas as suas faces são polygonos regulares iguaes, e todos os angulos solidos são iguaes.

Ha sómente cinco polyedros regulares: o de 4 faces, o de 6, o de 8, o de 12 e o de 20. Chamam-se respectivamente tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

E' facil demonstrar que só pódem existir cinco polyedros regulares (baseado sobre principios estabelecidos na 5ª parte destes apontamentos).

Uma face qualquer de um polyedro sendo um polygono, e um polygono não podendo ter menos de tres lados, é claro que, reunindo tres triangulos equilateros iguaes, cujos angulos valem, cada um, 60°, mas, juntando-os de fórma que tres vertices dos triangulos (um de cada um), coincidem n'um mesmo ponto, e que os lados adjacentes a esses angulos coincidem dois a dois —teremos um angulo solido: pois, a somma das tres faces ($3 \times 60° = 180°$) é menor de 4 rectos.

Logo, reunindo triangulos equilateros tres a tres, formamos um polyedro regular: o tetraedro.

D'um modo analogo, reunindo 4 triangulos equilateros, a somma das faces em cada vertice será de $4 \times 60^{\circ}$ ou 240°, que é menor do que 4 rectos.

Logo, reunindo triangulos equilateros quatro a quatro formamos um outro polyedro regular — é o octaedro.

Reunindo triangulos equilateros cinco a cinco formamos o icosaedro regular.

Si unissemos seis triangulos equilateros, as 6 faces que deveriam formar um angulo solido mediriam ao todo $6 \times 60^{\circ}$ ou 360°: logo, não ha angulo possivel.

Podemos, pois, com triangulos equilateros formar sómente o tetraedro, o octaedro e o icosaedro.

Reunindo quadrados tres a tres formamos um polyedro regular, pois, $3 \times 90^{\circ} = 270^{\circ} < 360^{\circ}$.

E' o hexaedro ou cubo.

O quadrado não fórma outro polyedro regular, pois, si unissemos 4 faces, teriamos $4 \times 90^{\circ} = 360^{\circ}$, e não haveria angulo solido.

O pentagono regular, cujo angulo vale 108°, póde formar um polyedro regular. Reunindo 3 pentagonos, teremos $3 \times 108^{\circ} = 324^{\circ}$, que é menor do que 360°.

Logo, pentagonos regulares 3 a 3, formam um polyedro regular: é o dodecaedro.

O exagono regular, cujo angulo mede 120°, já não fórma polyedro regular, nem os outros polygonos de maior numero de lados.

Logo, está bem evidenciado que só existem cinco polyedros regulares: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, formados respectivamente pela reunião de 3, 4 e 5 triangulos equilateros; o hexaedro ou cubo, formado pela reunião de tres quadrados; e o dodecaedro formado pela reunião de 3 pentagonos regulares.

—

Theorema de Euler.—Transcrevo o theorema de Euler, para os estudantes que se interessam por este ponto, e dahi ainda deduziremos a existencia de 5 polyedros regulares, e só 5.

Em qualquer polyedro, o numero de arestas menos o numero de vertices é igual ao numero de faces menos 2.

$$A - V = F - 2$$

Supponhamos que reunissemos successivamente as differentes faces que devem constituir o polyedro. Na primeira face, o numero de arestas é igual ao numero de vertices.

Reunindo a segunda face á primeira, esta segunda face terá com a primeira um lado e 2 vertices communs: logo, introduzira no polyedro uma aresta mais do que vertices.

Collocando a terceira face no seu logar, esta terá com as duas precedentes um lado e dois vertices communs (ou dois lados e tres vertices communs): de todo modo introduz no polyedro uma aresta mais do que vertices.

Em geral, para cada face, até a penultima, o excesso do numero de arestas sobre o numero de vertices augmenta d'uma unidade: a primeira face não introduzindo nenhuma aresta mais do que vertices, quando chegarmos a penultima face, o excesso do numero de arestas sobre o numero de vertices será igual ao numero de faces collocadas menos um. Completando o polyedro com a ultima face, como esta tem todas as suas arestas e todos os seus vertices communs com os precedentes, o excesso do numero de arestas sobre o numero de vertices não muda, e é por conseguinte igual ao numero de faces do polyedro menos dois.

—

Pelo theorema de Euler, sabemos que

$$F + V = A + 2 \qquad 1)$$

Supponhamos um polyedro cujas faces tenham o mesmo uumero de lados, e cujos angulos solidos tenham o mesmo numero de arestas.

Seja l o numero de lados de cada face e a o numero de arestas de cada angulo solido.

O numero de lados de todas as faces será $l\,F$ e o numero de arestas de todos os angulos solidos será $a\,V$. Mas, cada aresta do polyedro, sendo formada por dois lados de faces contiguas, o numero total dos lados das faces é igual ao dobro do numero de arestas do polyedro.

$$2\,A = l\,F$$

Cada aresta do polyedro sendo formada por duas arestas de angulos solidos contiguos, o numero de arestas de todos os angulos solidos será igual ao dobro do numero de arestas do polyedro.

$$2\,A = a\,V$$

Logo,

$$A = \frac{l\,F}{2}, \quad V = \frac{2\,A}{a} = \frac{l\,F}{a}$$

substituindo em 1), temos:

$$F + \frac{l\,F}{a} = \frac{l\,F}{2} + 2$$

ou

$$2\,a\,F + 2\,l\,F = a\,l\,F + 4\,a$$

$$(2\,a + 2\,l - a\,l)\,F = 4\,a$$

$$F = \frac{4\,a}{2\,a + 2\,l - a\,l} \qquad 2)$$

1º fazendo nesta ultima formula

$$l = 3$$

temos:

$$F = \frac{4\,a}{6 - a} \qquad 3)$$

e como o numero F de faces é positivo, sómente poderá ser

$$a = 3,\ 4,\ 5$$

então, a formula 3) dá

$$F = 4,\ 8,\ 20$$

Portanto, os unicos polyedros regulares de faces triangulares são o *tetraedro*, o *octaedro* e o *icosaedro*.

2º fazendo na formula 2)

$$l = 4$$

temos:

$$F = \frac{4\,a}{8 - 2\,a} = \frac{2\,a}{4 - a}$$

d'onde se vê que sómente poderá ser.

$$a = 3$$

e d'ahi

$$F = 6$$

Logo, o unico polyedro regular de faces quadrangulares é o *hexaedro* ou *cubo*.

3º fazendo na formula 2)

$$l = 5$$

temos

$$F = \frac{4\,a}{10 - 3\,a}$$

donde se vê que sómente póde ser

$$a = 3$$

e d'ahi

$$F = 12$$

Logo, o unico polyedro regular de faces pentagonaes é o *dodecaedro*.

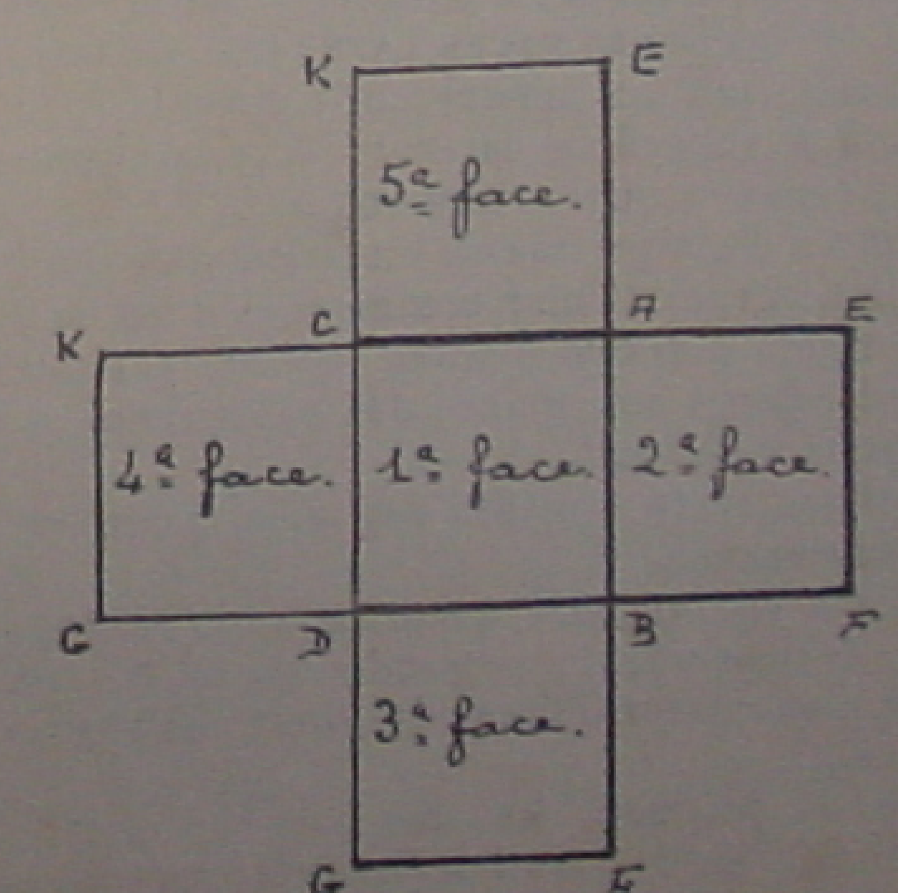
4º Para qualquer valor de l maior do que 5, a formula mostra que devia ser $a < 3$, o que não convem a angulo solido nenhum.

Logo, ha cinco polyedros regulares, e só cinco.

—

Exemplo. — Seja ABCD a base de um hexaedro: tem evidentemente 4 arestas e 4 vertices. Si, a essa base, juntarmos a segunda face ABEF do hexaedro, ella introduz no polyedro as arestas AE, EF e BF, e os vertices E e F

Juntando a terceira face DBGF, ella introduz duas arestas DG e GF e um só vertice G. A quarta face introduz duas arestas GK e KC e um só vertice K. A quinta face introduz uma



só aresta e nenhum vertice. A sexta face vem fechar o polyedro, e não introduz nenhuma aresta nem vertice.

Podemos estabelecer o quadro abaixo;

	arestas	vertices
1ª face	4	4
2ª face	3	2
3ª face	2	1
4ª face	2	1
5ª face	1	0
6ª face	0	0
6 faces	12	8

Notamos que

$$\overset{\text{arestas}}{12} - \overset{\text{vertices}}{8} = \overset{\text{faces}}{6} - 2$$

$$A - V = F - 2$$

o que confirma o theorema de Euler.

—

Um polyedro é chamado CONVEXO quando acha-se inteiramente situado do mesmo lado de qualquer uma de suas faces prolongada illimitadamente.

O PRISMA é o polyedro que tem duas faces iguaes e parallelas, e cujas outras faces são parallelogrammos.

As duas faces iguaes e parallelas, são as BASES do prisma; as outras são as FACES LATERAES; o conjuncto d'estas utlimas forma a SUPERFICIE LATERAL.

Quando á superficie lateral accrescentamos as duas bases, temos a SUPERFICIE TOTAL.

A ALTURA d'um prisma é a distancia das suas duas bases: é uma perpendicular commum ás duas bases.

Um prisma é RECTO quando suas arestas lateraes são perpendiculares aos planos das bases: nos outros casos o prisma é obliquo.

No prisma recto a altura é igual a qualquer uma das arestas lateraes.

O prisma é triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, decagonal,... segundo sua base é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono, um hexagono um decagono...

Entre os prismas, ha uns que são particularmente notaveis, são os parallelepipedos. As suas bases são parallelogrammos.

O parallelepipedo tem as arestas lateraes perpendiculares aos planos das bases.

O parallelepipedo rectangulo é um parallelepipedo recto cujas bases são rectangulos.

Chama-se PYRAMIDE ao polyedro que tem por base um polygono qualquer, e cujas faces lateraes são triangulos tendo um vertice commum, o vertice da pyramide. A altura d'uma pyramide é a perpendicular traçada do vertice sobre o plano da base.

Os triangulos formados pelos planos que convergem para o vertice e limitados no polygono da base, formam a superficie lateral da pyramide. Quando á superficie lateral juntamos a base, temos a superficie total.

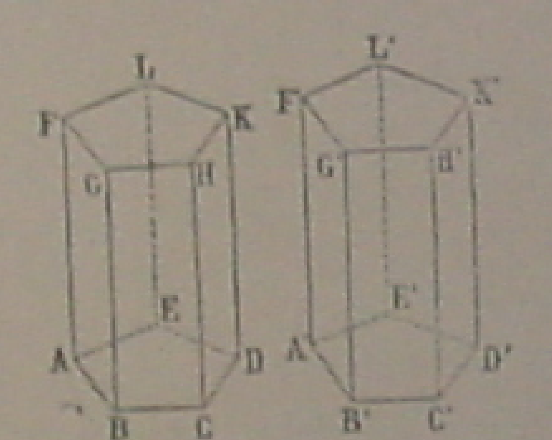
Uma pyramide é triangular, quadrangular, pentagonal,... conforme a sua base é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono...

Dois polyedros são equivalentes quando têm o mesmo volume.

Prismas e parallelepipedos

Theorema 138.—Dois prismas são iguaes quando têm um angulo solido formado por tres faces respectivamente iguaes e semelhantemente dispostas.

Sejam dois prismas ABCDEK, A'B'C'D'E'K', nos quaes as tres faces que formam o angulo solido em A são respectivamente iguaes ás faces que formam o angulo solido em A',e estão semelhantemente dispostas.



Colloco a face ABCDE sobre sua igual A'B'C'D'E'. As tres faces que formam o angulo triedro em A' sendo iguaes ás que formam o angulo em A e semelhantemente dispostas, o angulo triedro A' será igual ao angulo triedro em A.

A aresta A'F' coincidirá com a aresta AF.

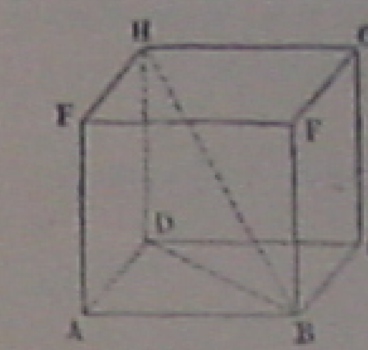
D'um modo analogo B'G' coincidirá com BG, e assim por diante... pois as arestas lateraes são todas parallelas.

Logo, os prismas coindirão em toda sua extensão: serão iguaes.

NOTA. — Dois prismas rectos que têm bases iguaes e mesma altura são iguaes.

—

Theorema. 139,—As faces oppostas d'um parallelepipedo são iguaes e parallelas.



Os parallelogrammos das bases são iguaes e seus planos são parallelos.

Consideremos as faces lateraes oppostas ADEH, BCGF: o lado AE=BF e AD=BC como lados oppostos de parallelogrammo.

Os angulos DAE e CBF têm os lados respect vamente parallelos e dirigidos no mesmo sentido; logo, são igaaes.

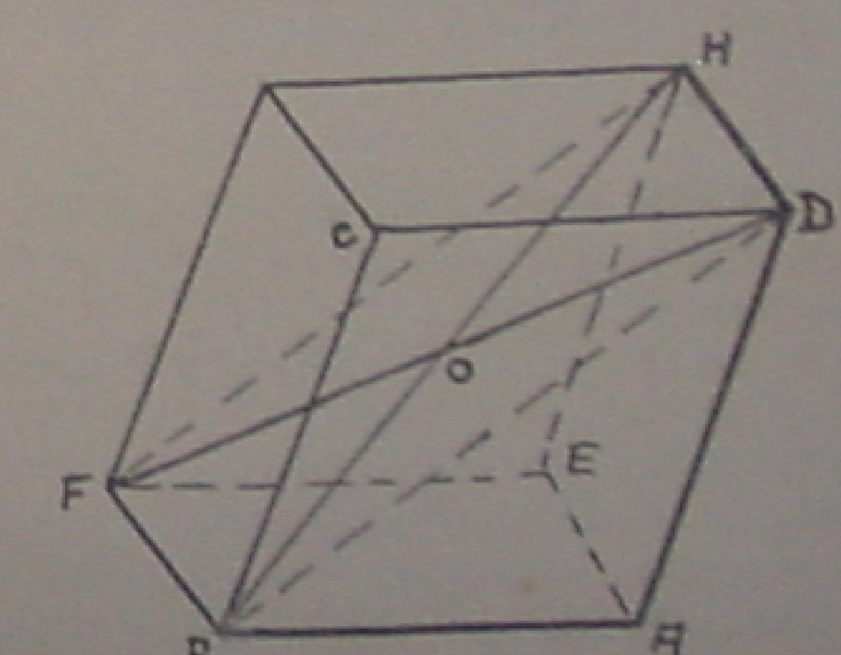
Os parallelogramos ADEH e BCFG são iguaes e seus planos são parallelos.

NOTA.— Duas faces oppostas quaesquer de um parallelepipedo pódem ser consideradas como bases do solido.

—

Theorema 140.— As diagonaes d'um parallelepipedo cortam-se n'um mesmo ponto.

Seja o paralleledipedo.



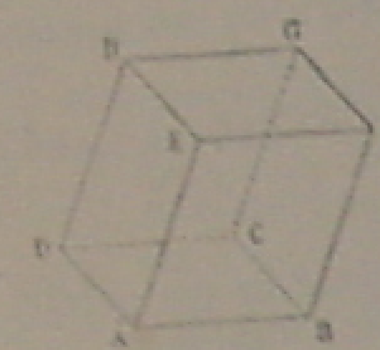
Pelas arestas oppostas BF e DH traço um plano. A figura FBDH será um parallelogrammo: pois, as arestas BF e DH são parallelas, e os lados FH e BD estão situados sobre faces oppostas do parallelepipedo, isto é, parallelas.

Logo, as diagonaes BH e DF cortam-se ao meio.

D'um modo analogo, demonstrariamos que duas quaesquer diagonaes do mesmo parallelepipedo cortam-se no mesmo ponto O.

Esse ponto O é o CENTRO DE FIGURA do parallelepipedo.

—



Theorema 141. — No parallelepipedo rectangulo, o quadrado d'uma diagonal é igual á somma dos quadrados das 3 arestas partindo d'um mesmo vertice:

$$BH^2 = BD^2 + DH^2 \qquad (1)$$

mas

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

ou

$$BD^2 = AD^2 + DC^2$$

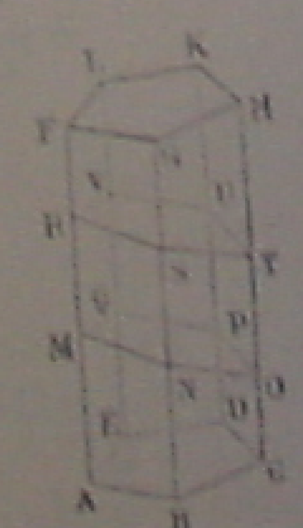
logo, substituindo em (1), temos:

$$BH^2 = AD^2 + DC^2 + DH^2$$

—

Theorema 142. — As secções feitas n'um prisma por planos parallelos que encontram todas as faces lateraes são polygonos iguaes.

Sejam os planos parallelos MO e RT que cortam todas as faces lateraes do prisma.



As rectas MN e RS são parallelas, como intersecções de dois planos parallelos por um terceiro; são iguaes, como parallelas comprehendidas entre parallelas.

D'um modo analogo, NO e ST, OP e TU, etc....

Os dois polygonos MNOPQ e RSTUV, tendo seus lados iguaes e parallelos, terão tambem seus angulos iguaes, logo, serão iguaes.

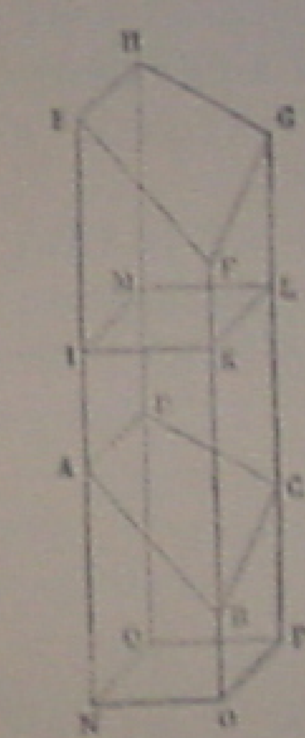
NOTA: — Toda secção feita n'um prisma por um plano parallelo a sua base é igual a essa base.

Chama-se SECÇÃO RECTA d'um prisma, toda secção feita por um plano perpendicular ás arestas lateraes.

—

Theorema 143. — Um prisma obliquo é equivalente a um prisma recto tendo por base a secção recta do prisma obliquo, e por altura uma das arestas lateraes.

Seja o prisma obliquo ABCDH.



Por um ponto I da aresta AE, tracemos o plano IKLM perpendicular sobre AE.

Tomemos IN = AE e pelo ponto N tracemos o plano NOPQ perpendicular á aresta AE.

O solido NOPQL é um prisma recto, pois, suas bases são polygonos iguaes e parallelos, e suas arestas são perpendiculares aos planos das bases. Este prisma tem por base a secção recta e por altura a aresta do prisma obliquo.

Consideremos os dois solidos IKLMH e NOPQD: as faces IKLM e NOPQ são iguaes, as arestas IE = AN, FK = BO, etc... são perpendiculares aos planos dessas faces.

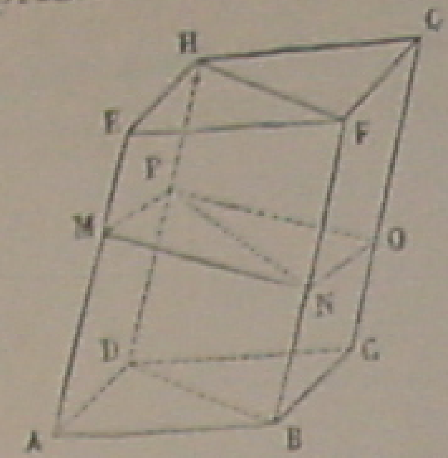
Os dois solidos IKLMH e NOPQD são iguaes.

Si tirarmos da figura total o solido IKLMH, fica o prisma recto. Si tirarmos da figura total o solido NOPQD, fica o prisma obliquo.

Logo, o prisma recto é equivalente ao prisma obliquo.

—

Theorema 144. — O plano que passa por duas arestas oppostas d'um parallelepipedo divide-o em dois prismas triangalares equivalentes.



Tracemos pelas arestas oppostas BF e DH, do parallelepipedo AG, o plano BDFH.

Este plano divide a figura em dois prismas triangulares.

Si o parallelepipedo dado fôr recto, vê-se logo que os dois prismas triangalares são iguaes, como tendo bases iguaes e mesma altura.

Si o parallelepipedo dado fôr obliquo, tracemos a secção recta MNOP. O prisma triangular obliquo ABDH é equivalente ao prisma triangular que tem por base MNP e por altura a aresta AE.

O prisma triangular obliquo DBCG é equivalente ao prisma triangular recto que teria por base NOP e por altura CG.

Já sabemos que MNP = NOP e que AE = CG; logo, os dois prismas triangulares rectos são iguaes: os dois prismas obliquos que lhes são equivalentes tambem serão equivalentes um ao outro.

—

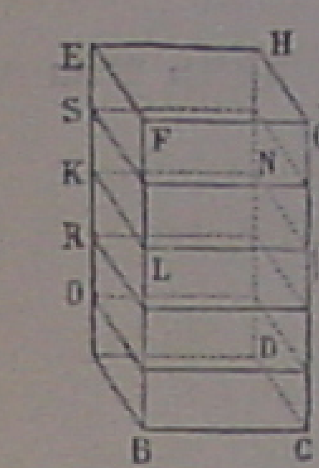
Theorema 145. — Dois parallelepipedos rectangulos de mesma base estão entre si como suas alturas.

Sejam ABCDE e ABCDK dois parallelepipedos rectangulos de mesma base ABCD e tendo por alturas respectivas AE e AK.

Estas alturas tendo uma medida commum contida 5 vezes em AE e 3 vezes em AK, teremos:

$$\frac{AE}{AK} = \frac{5}{3}$$

Divido AE em cinco partes iguaes e pelos pontos de divisão traço planos parallelos á base ABCD.



Formamos 5 parallelepipedos rectangulos iguaes.

O parallelepipedo ACE contém 5 desses parallelepipedos parciaes e o parallelepipedo ACK contém 3 d'elles; logo,

$$\frac{ABCDE}{ABCDK} = \frac{5}{3}$$

d'onde resulta:

$$\frac{ABCDE}{ABCDK} = \frac{AE}{AK}$$

NOTA. — No caso em que as alturas dos dois parallelepipedos rectangulos não admittissem medida commum, procederiamos como na 4ª parte d'estes apontamentos na determinação da area do rectangulo.

—

Theorema 146.—Dois parallelepipedos rectangulos de mesma altura, estão entre si na mesma razão que suas bases.

Sejam P e P' dois parallelepipedos rectangulos tendo a mesma altura h e cujas bases B e B' tenham por dimensões respectivamente a e b, a' e b'.

Imaginemos um terceiro parallelepipedo P'' tendo a mesma altura h do que os dois primeiros e cujas dimensões sejam a e b'.

Os parallelepipedos P e P'' têm uma face cujas dimensões são h e a; ora, podemos considerar essa face como base; logo

$$\frac{P}{P''} = \frac{b}{b'} \qquad 1)$$

D'um modo analogo, os parallelepipedos P'' e P' têm uma face com as dimensões h e b'.

Logo,

$$\frac{P''}{P'} = \frac{a}{a'} \qquad 2)$$

Multiplicando 1) e 2) membro a membro, temos

$$\frac{P}{P''} \cdot \frac{P''}{P'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{a}{a'}$$

ou

$$\frac{P}{P'} = \frac{ab}{a'b'}$$

Ora, já vimos (na 4ª parte) que dois rectangulos estão na mesma razão de que os productos de suas bases pelas suas alturas; logo,

$$\frac{a \cdot b}{a' \cdot b'} = \frac{B}{B'}$$

e, finalmente

$$\frac{P}{P'} = \frac{B}{B'}$$

—

Theorema 147. — Dois parallelepipedos rectangulos quaesquer estão entre si na mesma razão que os productos de suas bases pelas suas alturas.

Sejam P e P' dois parallelepipedos rectangulos: o 1º tendo B por base e h por altura, o 2º tendo B' por base e h' por altura.

Imaginemos um terceiro parallelepipedo rectangulo P'', tendo B' por base e h por altura.

Os parallelepipedos P e P'' dão:

$$\frac{P}{P''} = \frac{B}{B'}$$

Os parallelepipedos P'' e P' dão:

$$\frac{P''}{P'} = \frac{h}{h'}$$

logo

$$\frac{P \cdot P''}{P'' \cdot P'} = \frac{B \cdot h}{B'h'}$$

ou

$$\frac{P}{P'} = \frac{B \cdot h}{B'\,h'}$$

NOTA — Tomando como unidade de volume e de superficie respectivamente o cubo e o quadrado construidos sobre a unidade de comprimento, achamos:

$$\frac{P}{1} = \frac{B \times h}{1 \times 1}$$

ou

$$P = B \times h$$

Logo, o volume do parallelepipedo rectangulo é igual ao producto da sua base pela sua altura.

Designando por a e b as dimensões da base B, a altura h sendo igual á aresta c, temos:

$$P = a \times b \times c$$

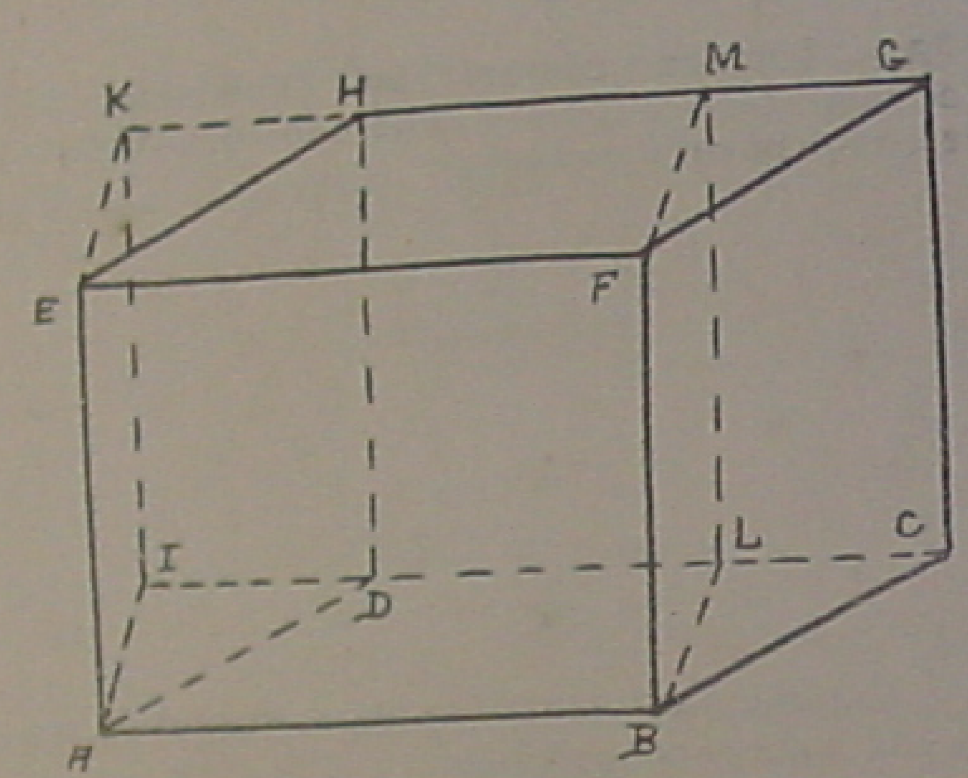
Logo, o volume do parallelepipedo rectangulo é igual ao producto de suas tres dimensões.

E' bom notar que conforme adoptamos como unidade linear o metro, o decimetro, o centimetro,... a unidade de superficie será o metro quadrado, o decimetro quadrado, o centimetro quadrado.... e a unidade de volume será o metro cubico, o decimetro cubico, o centimetro cubico....

—

Theorema 148. — O volume do parallelepipedo recto é igual ao producto da base pela altura.

Seja o parallelepipedo recto ABCDH. Tracemos os planos AK e MB perpendiculares sobre a face ABEF; estes planos encontram a face posterior do parallelepipedo recto em IK e LM respectivamente. Teremos então formado o parallelepipedo rectangulo ABILK.



Ora, os triangulos IAD e LBC são iguaes, por terem um angulo igual comprehendido entre lados respectivamente iguaes. O parallelogrammo ABCD é, pois, equivalente ao rectangulo ABLI.

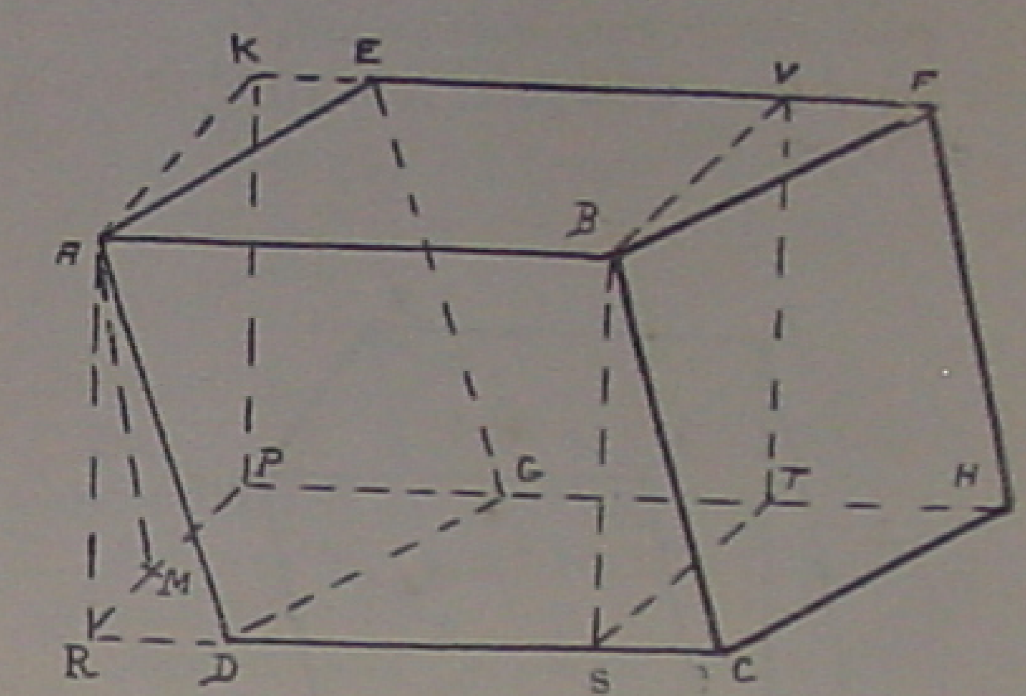
Logo, o parallelepipedo rectangulo e o parallelepipedo recto têm bases equivalentes e mesma altura: são equivalentes.

O volume do parallelepipedo recto é igual ao volume do parallelepipedo rectangulo, o producto da base pela altura.

—

Theorema 149.—O volume d'um parallelepipedo qualquer é igual ao producto da base pela altura.

Seja um parallelepipedo qualquer ABCDEFGH; pelos pontos A e B traço planos AP e BT perpendi-



culares sobre a face ABCD: determino assim um parallelepipedo recto ARBSKPTV.

O prisma dado é equivalente ao prisma recto que tem ARPK por base e AB por altura.

Os volumes d'esses dois prismas são iguaes.

Na secção recta ARPK, a perpendicular AM, sobre RP, tambem será perpendicular ao plano RSTP.

A area da secção recta é

$$RP \cdot AM$$

O volume do prisma recto, e tambem o do prisma obliquo, será, pois,

$$RP \cdot AM \cdot AB$$

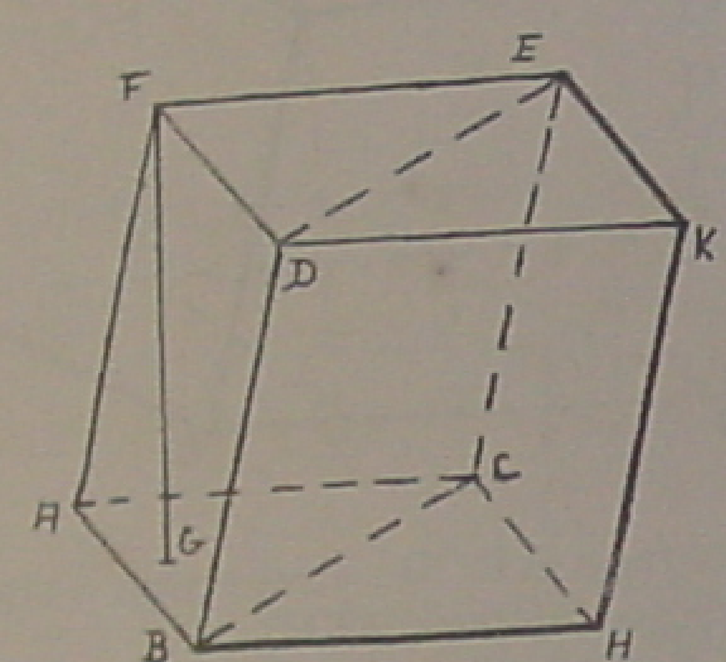
A recta RP da secção recta é perpendicular sobre RS; o parallelogrammo DGHC é equivalente ao rectangulo RSTP, pois essas figuras são respectivamente iguaes ás bases superiores ABEF e ABVK: ora, $RP \times AB$ ou $RP \times DC$ indica a area da base DCGH do prisma obliquo, do qual AM é a altura; logo, o volume do parallelepipedo obliquo é igual ao producto da base pela altura.

—

VOLUME DO PRISMA

Theorema 150. — O volume d'um prisma qualquer é igual ao producto da base pela altura.

Seja um prisma triangular ABCDEF tendo ABC por base e FG por altura.



Formemos o parallelepipedo ABHCKF no qual A é um de seus angulos solidos.

Este parallelepipedo póde ser considerado como composto de dois prismas triangulares tendo por face commum o plano que passa pelas arestas oppostas BD e CE. Os prismas assim formados são equivalentes.

Logo, o prisma triangular considerado é a metade do parallelepipedo; terá, pois, por volume a metade do volume do parallelepipedo.

$$\frac{ABCH \cdot FG}{2}$$

Mas, notando que

$$\frac{ABCH}{2} = ABC$$

vêmos que o volume do nosso prisma triangular é igual ao producto da base ABC pela altura GF.

Pelo que vimos no theorema 142, concluimos que o volume do prisma é igual ao producto da secção recta pela aresta.

Um prisma polygonal qualquer sempre póde ser decomposto em prismas triangulares, por meio de planos traçados por arestas convenientemente escolhidas.

A somma dos volumes d'esses prismas triangulares parciaes nos dará o volume do prisma polygonal.

—

Dois prismas que têm bases equivalentes estão na mesma razão que suas alturas.

Dois prismas que têm alturas iguaes estão entre si como suas bases.

Dois prismas de bases equivalentes e alturas iguaes são equivalentes.

—

AREA DO PRISMA

A SUPERFICIE LATERAL DE UM PRISMA É IGUAL AO PRODUCTO DO PERIMETRO DA SECÇÃO RECTA POR UMA ARESTA LATERAL

Com effeito, as faces lateraes do prisma são parallelogrammos que têm por base uma aresta e por altura um lado do polygono da secção recta.

Sommando todas as faces lateraes, para obter a superficie lateral, acho: a aresta multiplicada pelo perimetro da secção recta.

Si quizessemos a superficie total, sommariamos á superficie lateral as areas dos polygonos das bases.

NOTA. — No prisma recto, a superficie lateral é igual ao producto do perimetro da base pela altura.

Pyramide

Na pyramide é preciso distinguir o APOTHEMA D'UMA FACE DO APOTHEMA DA BASE.

Essas duas linhas são a hypotenusa e um catheto d'um triangulo rectangulo cujo outro catheto é a altura da pyramide.

TRONCO DE PYRAMIDE é a porção d'uma pyramide comprehendida entre a base e uma secção que corte todas as arestas lateraes.

A secção sendo parallela á base, temos o TRONCO DE PYRAMIDE DE BASES PARALLELAS: n'este caso a altura do tronco é uma perpendicular commum ás duas bases.

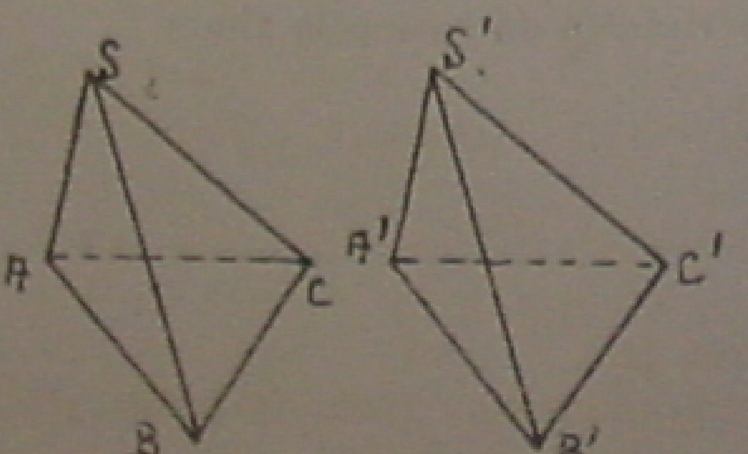
Um TRONCO DE PYRAMIDE REGULAR é a parte d'uma pyramide regular comprehendida entre a base e uma secção parallela á base. No tronco de pyramide regular, as faces lateraes são trapezios iguaes e a altura d'esses trapezios é o apothema do tronco.

Uma pyramide triangular tem tres faces lateraes e a base (que é um triangulo): é, pois, um tetraedro.

Vamos começar estabelecendo alguns casos d'igualdade dos tetraedros.

—

1º caso.— Dois tetraedros são iguaes quando têm uma face igual adjacente a diedros respectivamente iguaes.



Sejam os dois tetraedros ABCS e A'B'C'S', nos quaes a face ASB = á face A'S'B', o diedro SA = ao diedro S'A' e o diedro SB = ao diedro S'B'.

Collocando a face A'S'B' sobre a face ASB, os diedros S'A' e SA sendo iguaes, a face A'S'C' tomará a direcção da face ASC. Mas o diedro S'B' é igual ao diedro SB, e a face B'S'C' tomará a direcção da face BSC.

Logo, S'C' coincidirá com SC, e os triedros coincidindo em toda sua extensão, são iguaes.

—

2º caso.—Dois tetraedros são iguaes quando têm um diedro igual comprehendido entre faces respectivamente iguaes (mesma figura).

Seja o diedro SA = ao diedro S'A' e as faces ASC e ASB respectivamente iguaes ás faces A'S'C' e A'S'B'.

Colloco a face A'S'C' sobre a face ASC; o diedro S'A' sendo igual ao diedro SA, a face A'S'B' tomará a direcção da face ASB, e, como são iguaes, coincidirão.

Logo, a face B'S'C' tambem coincide com BSC, e os dois triedros, coincidindo em toda sua extensão, são iguaes.

—

3º caso.—Dois tetraedros são iguaes quando têm tres faces respectivamente iguaes (mesma figura).

O problema consiste em provar a igualdade de dois diedros, por exemplo S'A' e SA, e voltamos então ao primeiro caso.

A demonstração é analoga á do 3º caso d'igualdade de angulos triedros (na 5ª parte).

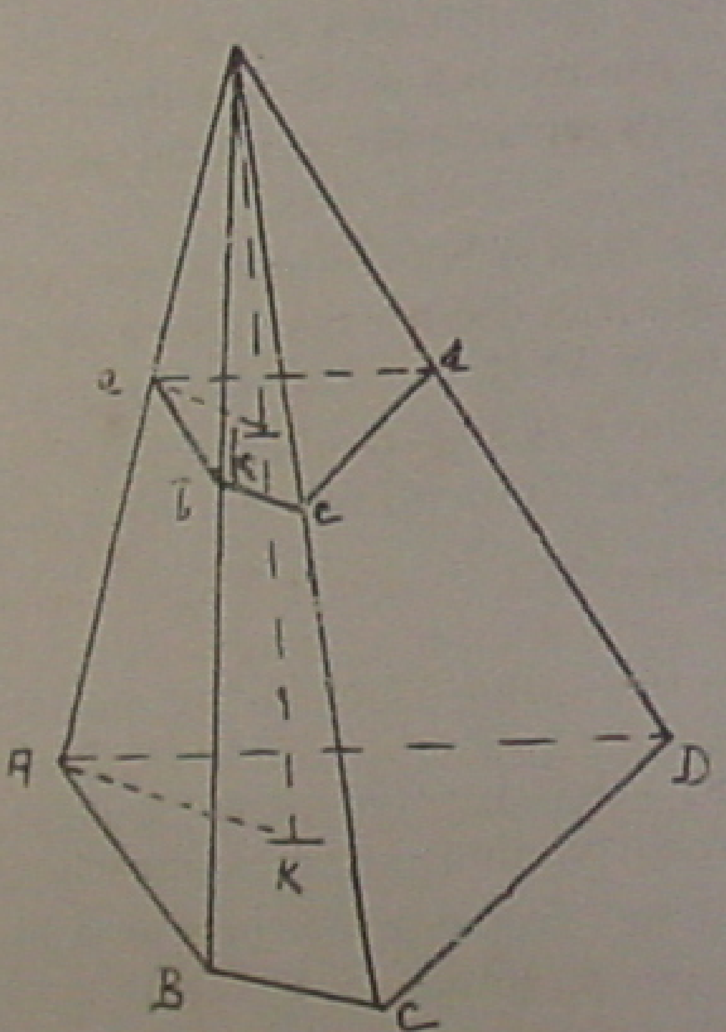
—

Theorema 151. — Dois polyedros iguaes são decomponiveis em um mesmo numero de tetraedros iguaes e semelhantemente dispostos.

Para demonstrar este theorema, basta traçar planos convenientemente escolhidos, porém sempre unindo vertices de angulos respectivamente iguaes; assim, formaremos um mesmo numero de triedros; estes triedros estarão semelhantemente dispostos, e serão respectivamente iguaes (utilizando os casos d'igualdade de tetraedros, já demonstrados).

—

Theorema 152. — Cortando uma pyramide por um plano parallelo á base, formamos uma segunda pyramide semelhante á primeira.



Seja abcd a secção plana parallela á base ABCD.

Os lados AB e ab são parallelos, como intersecção de dois planos parallelos por um mesmo terceiro: d'um modo analogo BC e bc são parallelos, e assim por diante.

Os triangulos aSb e ASB, bSc e BSC, . . . são semelhantes.

Logo

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sb}{SB} = \frac{bc}{BC} = \frac{Sc}{SC} = \ldots$$

d'onde

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \ldots$$

Os angulos dos polygonos em A e em a, são iguaes, pois, seus lados são respectivamente iguaes e dirigidos no mesmo sentido.

Logo, os dois polygonos ABCD e abcd têm seus angulos respectivamente iguaes e seus lados homologos proporcionaes; logo, são semelhantes.

O angulo solido em S é commum ás duas pyramides.— Os angulos solidos em A e em a, são formados por faces respectivamente semelhantes e semelhantemente dispostas; logo, são iguaes. O mesmo se dá com os outros angulos solidos das pyramides.

As duas pyramides são, pois, semelhantes.

—

Theorema 153. — Uma secção plana parallela a base de uma pyramide e o polygono da base da referida pyramide, estão entre si como os quadrados de suas distancias ao vertice da pyramide (figura precedente).

Os triangulos com o vertice em S são semelhantes, e dão:

$$\frac{Sa}{SA} = \frac{ab}{AB} = \frac{Sk}{SK}$$

ou elevando ao quadrado

$$\frac{Sa^2}{SA^2} = \frac{ab^2}{AB^2} = \frac{Sk^2}{SK^2}$$

Mas os polygonos AC e ac são semelhantes; logo:

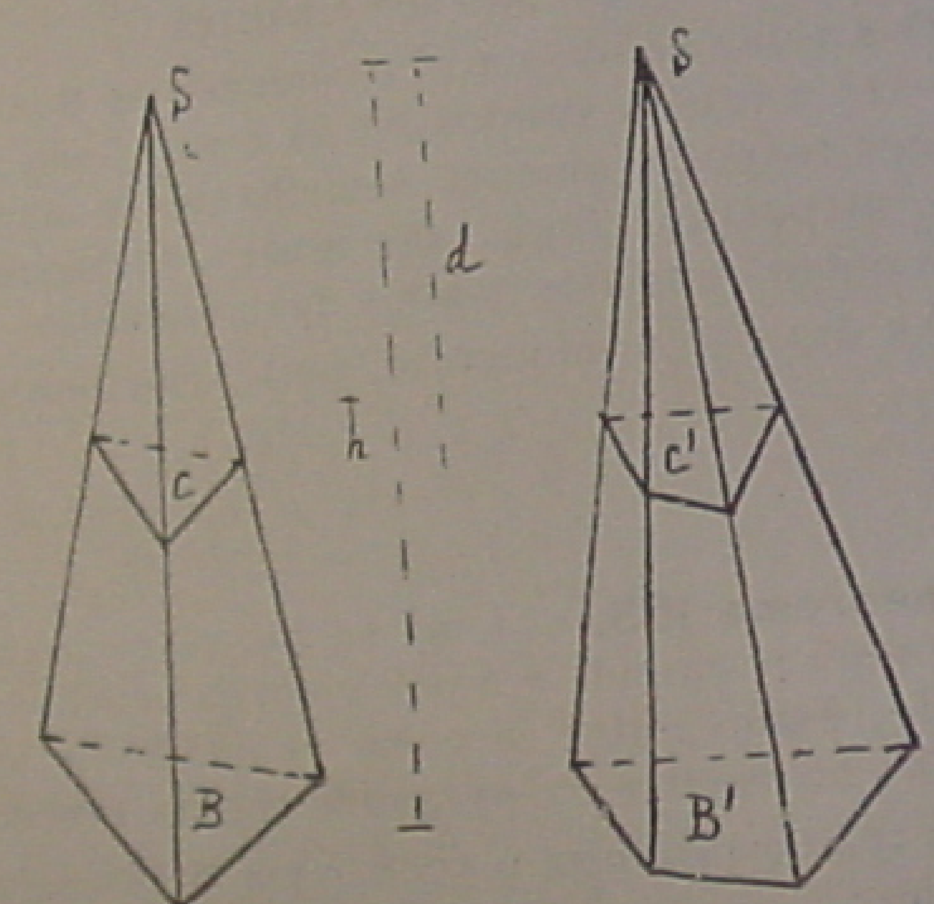
$$\frac{\text{polygouo ac}}{\text{polygono AC}} = \frac{ab^2}{AB^2} = \frac{sk^2}{SK^2}$$

e os polygonos ABCD, abcd estão entre si como os quadrados de suas distancias ao vertice S.

—

Theorema 154. — Duas pyramides de mesma altura, cortadas por planos equidistantes dos respectivos vertices e parallelos ás bases, estão entre si na mesma razão que as bases.

Sejam as duas pyramides S e S', com as bases B e B' sejam as secções planas C e C', parallelas ás bases



e distantes dos respectivos vertices da distancia d.

Seja h a altura das pyramides S e S'.

Já vimos que

$$\frac{C}{B} = \frac{d^2}{h^2}$$

e

$$\frac{C'}{B'} = \frac{d^2}{h^2}$$

logo,

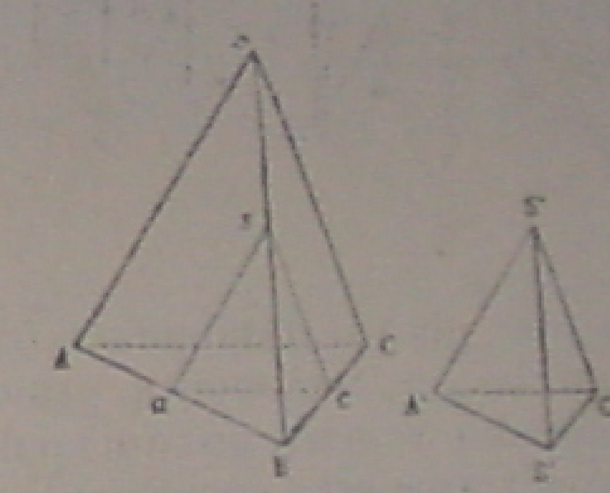
$$\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'}$$

ou

$$\frac{B}{C'} = \frac{B}{B'}$$

—

Theorema 155. — Dois tetraedros que têm um angulo diedro igual comprehendido entre faces respectivamente semelhantes e semelhantemente dispostas, são semelhantes.



Sejam os dois tetraedros SABC e S'A'B'C', nos quaes os diedros SB e S'B' são iguaes, e as faces ABS e CBS respectivamente semelhantes ás faces A'B'S' e C'B'S' e semelhantemente dispostas.

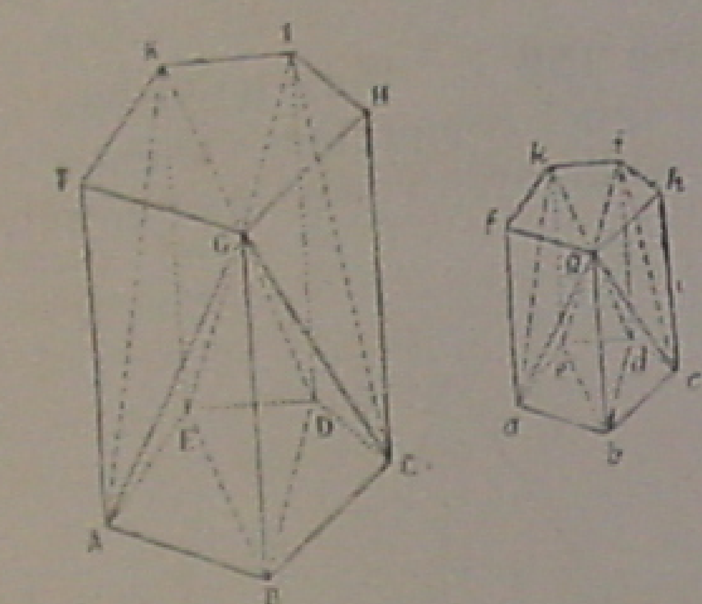
Tomemos na aresta SB a partir de B uma distancia Bs = B'S' e pelo ponto s tracemos o plano asc parallelo á face ASC. Este plano determina uma pyramide saBc semelhante á pyramide SABC. Si compararmos esta pyramide com a pyramide S'A'B'C', notaremos que o diedro Bs é igual ao driedro B'S', a face asB semelhante á face ASB, é igual á face A'S'B', com a qual ella tem os angulos iguaes e o lado BS = B'S'; d'um modo analogo, as faces sBc, S'B'C' são iguaes; e os angulos solides em B' e B, tendo um angulo diedro igual comprehendido entre faces iguaes e semelhantemente dispostas, são iguaes.

Collocando a pyramide S'A'B'C' sobre sacB, ellas coincidirão.

A pyramide S'A'B'C', é igual a saBc, é, pois, semelhante á pyramide SABC.

—

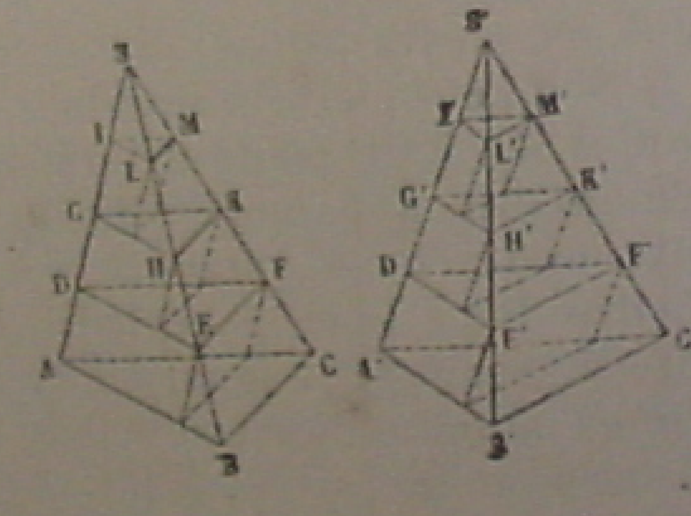
Theoremo 156.—Dois polyedros semelhantes são decomponiveis em um mesmo numero de tetraedros semelhantes e semelhantemente dispostos.



Por meio de planos habilmente traçados, obtemos a decomposição; e facilmente provamos que os tetraedros, em mesmo numero nos dois polyedros semelhantes, são respectivamente semelhantes.

—

Theorema 157.—Duas pyramides triangulares de bases equivalentes e alturas iguaes, são equivalentes.



Sejam as duas pyramides S e S', de mesma altura e de bases equivalentes.

Colloquemos as bases ABC e A'B'C' n'um mesmo

plano e dividamos a altura commum dos dois solidos em um certo numero de partes iguaes; pelos pontos de divisão, tracemos planos parallelos ás bases. Esses planos determinarão secções DEF, D'E'F', GHK, G'H'K'... equivalentes duas a duas, pois, acham-se situadas duas a duas á mesma distancia dos vertices S e S'.

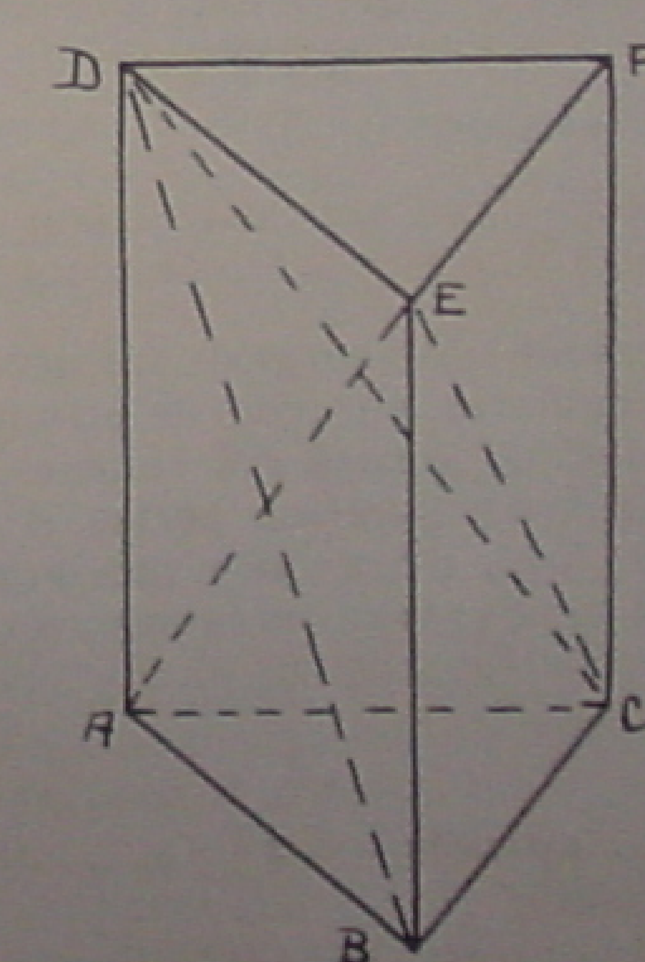
Podemos considerar essas secções como bases de prismas triangulares, tendo como arestas DA, D'A', GD, G'D',...

Estes prismas, em igual numero nas duas pyramides, serão respectivamente equivalentes, pois, têm bases equivalentes e alturas iguaes. Suas sommas tambem serão equivalentes.

Ora, podemos imaginar a altura dividida em um numero infinitamente grande de partes iguaes, e, por conseguinte, teremos um numero infinitamente grande de secções. As sommas d'essas secções são sempre equivalentes, seja qual fôr o numero de prismas que as compõem. Logo, seus limites, isso é, as pyramides, serão equivalentes.

—

Theorema 158.— Um prisma triangular é sempre decomponivel em tres pyramides equivalentes de mesma base e de mesma altura.



Seja o prisma triangular ABCDEF. Traçando o plano EAC, destaco a pyramide ABCE, cuja base é ABC, isto é, a base do prisma, e cuja altura é BE, isto é, a altura do prisma.

Traçando o plano DEC, destaco a pyramide DEFC: ora, a base DEF é igual á base ABC do prisma e a altura FC é a altura do prisma.

Sobra a pyramide DEAC.

Tomando DAC por base, e E por vertice, podemos imaginar que este vertice E escorregue até B, ao longo da aresta EB, parallela á base DAC; a nossa pyramide DACE fica, pois, transformada na pyramide DACB, equivalente. Nesta ultima pyramide podemos considerar a face ABC como base e a aresta AD como altura: teremos então uma pyramide equivalente ás duas já determinadas, isto é, ABCE, DEFC (mesma base e mesma altura).

Logo, o prisma triangular acha-se dividido em 3 pyramides equivalentes, com mesma base (a do prisma) e mesma altura (a do prisma).

Ora, o volume do prisma é igual ao producto da base pela altura: logo, o volume da pyramide será igual ao terço do producto da base pela altura.

$$V_{pyramide} = \frac{B \times h}{3}$$

—

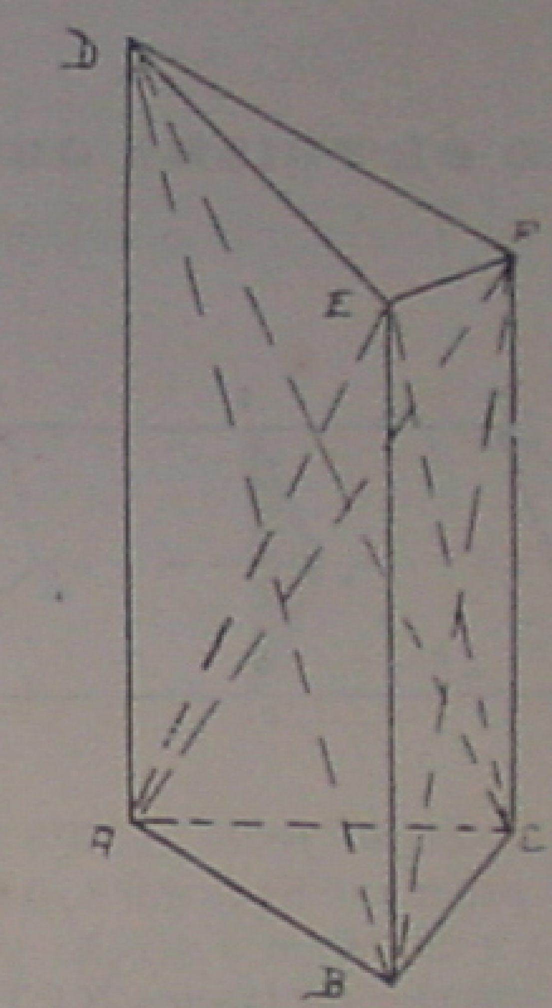
Uma pyramide qualquer póde ser decomposta em pyramides triangulares, por meio de planos convenientemente traçados. A somma dos volumes d'essas pyramides triangulares parciaes perfaz o volume da pyramide dada; logo, O VOLUME D'UMA PYRAMIDE QUALQUER É IGUAL Á TERÇA PARTE DO PRODUCTO DA BASE PELA ALTURA.

$$V_{pyramide} = \frac{B \times h}{3}$$

—

TRONCO DE PRISMA

Consideremos agora o tronco de prisma ABCDE.



Traçando os planos AEC e DEC, formamos as pyramides ABCE, DEFC e DAEC.

Tomaremos a precaução de sempre escrever a lettra do vertice de cada pyramide por ultimo, e, acompanhando as transformações successivas indicadas no quadro seguinte, temos:

ABCE	DEFC	DAEC
	DFCE	DACE
	DFCB	DACB
	FCBD	ABCD
	FCBA	
	ABCF	

Achamos as tres pyramides ABCE, ABCF, ABCD: têm a mesma base e as alturas são respectivamente BE, CF, AD.

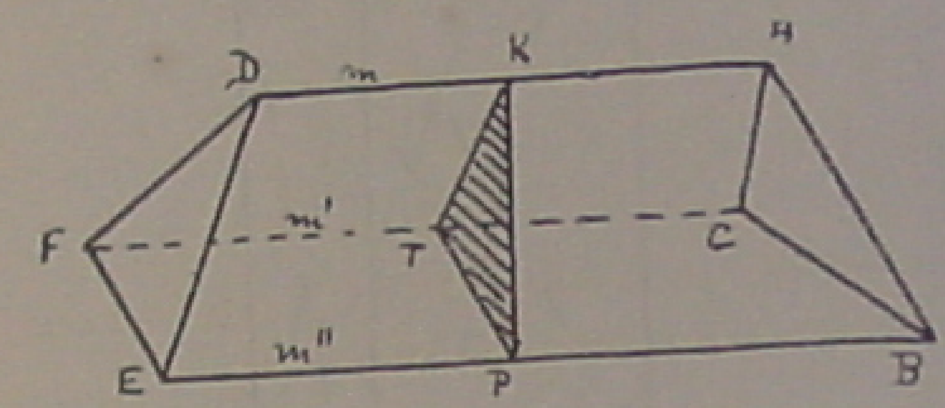
Logo, O VOLUME DO TRONCO DE PRISMA É EQUIVALENTE Á SOMMA DOS VOLUMES DAS TRES PYRAMIDES QUE

TEEM POR BASE A BASE DO PRISMA, E POR ALTURAS RESPECTIVAS AS ARESTAS DO MESMO TRONCO DE PRISMA.

—

TRONCO DE PRISMA OBLIQUO

Vamos agora determinar o volume do tronco de prisma obliquo.



Tracemos a secção recta KPT: decompomos o nosso tronco de prisma obliquo em dois troncos de prisma, tendo por base commum a secção recta KPT.

Seja V' o volume do tronco KPTF, e V'' o volume do tronco KPTC.

Determinando os volumes V' e V'', sommando-os, e designando as arestas lateraes por m, m' e m'', e a secção recta por b, achamos:

$$V = V' + V'' = b\left(\frac{m + m' + m''}{3}\right)$$

Logo, O VOLUME DO TRONCO DE PRISMA OBLIQUO É IGUAL AO PRODUCTO DA SECÇÃO RECTA PELA MEDIA ARITHMETICA DAS ARESTAS LATERAES.

—

TRONCO DE PYRAMIDE

Cortando uma pyramide por um plano parallelo á base, formamos um tronco de pyramide: vamos calcular seu volume.

Seja o tronco de pyramide ABCDEF.

Tracemos o plano AEC. Formamos a pyramide

ABCE, cuja base é ABC ou B' e a altura é a do tronco que designaremos por h.

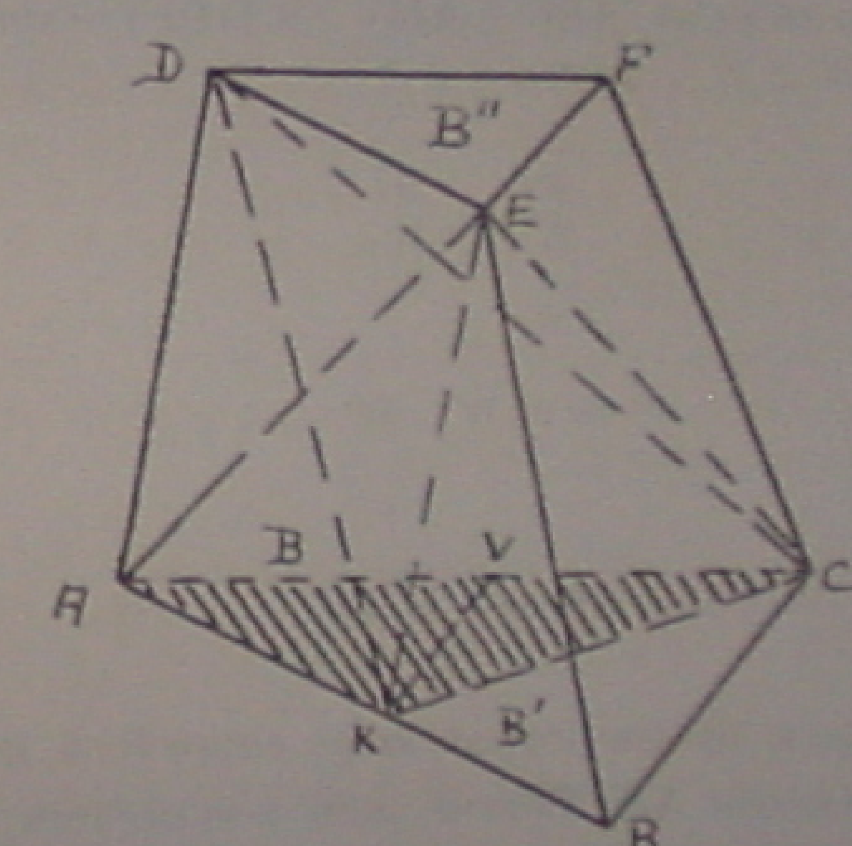
$$\text{Vol. ABCE} = B'\,\frac{h}{3}$$

Traçando o plano DEC, formamos a pyramide DEFC, cuja base é DEF ou B'' e cuja altura é h.

Logo,

$$\text{Vol. DEFC} = B''\,\frac{h}{3}$$

Na terceira pyramide DEAC, podemos considerar E como vertice e teremos DACE.



Transportando o vertice E em K sobre a parallela EK á aresta AD, teremos a pyramide DACK ou AKCD.

Seja KV parallela a BC.

Os triangulos AKV e AKC têm a mesma altura e bases differentes; logo,

$$\frac{AKV}{AKC} = \frac{AV}{AC}$$

D'um modo analogo, os triangulos AKC e ABC, dão

$$\frac{AKC}{ABC} = \frac{AK}{AB}$$

Notemos que KV, sendo parallela a BC, temos

$$\frac{AV}{AC} = \frac{AK}{AB}$$

logo,

$$\frac{AKV}{AKC} = \frac{AKC}{ABC}$$

Designando o triangulo AKC por B e substituindo na ultima relação, ABC e AKV (= DEF) respectivamente por B' e B'', temos:

$$\frac{B''}{B} = \frac{B}{B'}$$

logo,

$$B^2 = B' \cdot B''$$

e

$$B = \sqrt{B' \, B''}$$

B é, pois, média proporcional entre B' e B''.

A pyramide AKCD tem, pois, por volume:

$$\frac{h}{3}\sqrt{B' \cdot B''}$$

O tronco da pyramide ABCDEF, equivalente á somma das tres pyramides ABCE, DEFC e AKCD, terá, pois, por volume:

$$V = \frac{h}{3} B' + \frac{h}{3} B'' + \frac{h}{3}\sqrt{B' \cdot B''}$$

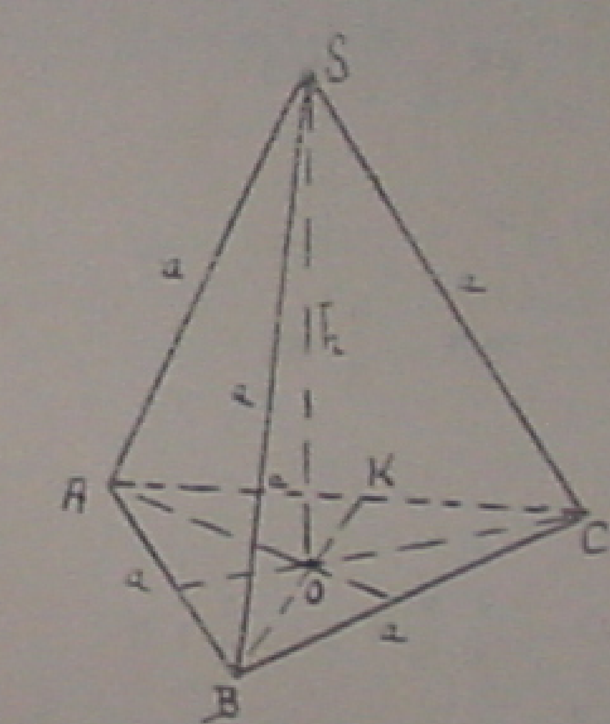
ou

$$V = \frac{h}{3}\left(B' + B'' + \sqrt{B'B''}\right)$$

Logo, o tronco de pyramide é equivalente a tres pyramides que têm por altura commum a altura do tronco, e por bases respectivas as bases do tronco e a média geometrica d'essas bases.

—

Volume do tetraedro regular em funcção da aresta



Seja o tetraedro regular ABSC, cuja aresta é a.

A base ABC é um triangulo equilatero, cuja area é dada pela formula

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Para calcularmos o volume do tetraedro precisamos conhecer a altura h.

Traçando as medianas da base, ellas se encontram n'um mesmo ponto O (pé de altura h) que se acha ás duas terças partes de cada uma das medianas a partir do vertice correspondente.

Logo,

$$BO = \frac{2}{3} BK$$

No triangulo ABK, temos :

$$BK^2 = AB^2 - AK^2$$

$$BK^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$BK = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

Mas já vimos que

$$BO = \frac{2}{3} BK$$

logo,

$$BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$$

No triangulo BOS, temos :

$$SO^2 = BS^2 - OB^2$$

$$SO^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3} \sqrt{3}\right)^2$$

$$SO^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$SO = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Finalmente, o volume do tetraedro

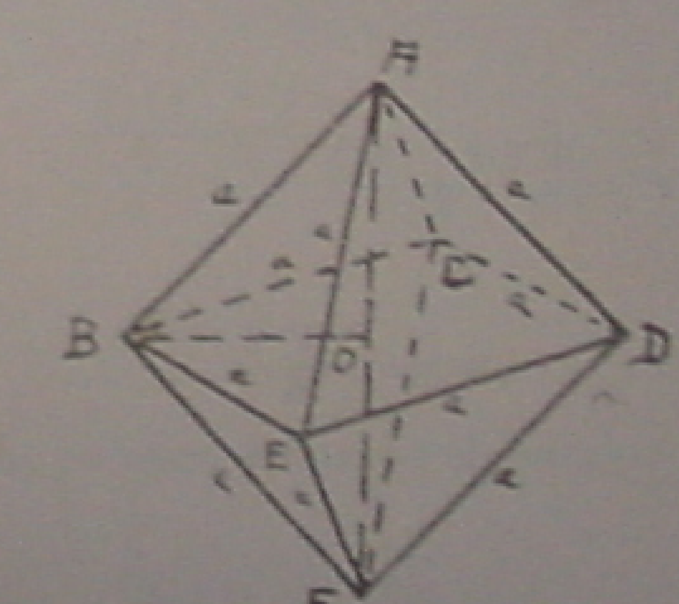
$$V = \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$V = \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{4}}{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Volume do octaedro regular em funcção da aresta

O octaedro compõe-se de duas pyramides quadrangulares; basta, pois, calcular o volume d'uma d'essas pyramides, e, multiplicando por 2, teremos o volume do octaedro.



A pyramide BDECA tem por base o quadrado BECD cujo lado é a: logo, a area d'essa base será a^2.

Resta calcular a altura.

A pyramide BEDCA sendo regular, a projecção do vertice A cahirá no centro O da base. Unindo OB, notamos que é o raio do circulo circumscripto ao quadrado BEDC; logo,

$$OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

No triangulo rectangulo ABO, temos:

$$AO^2 = AB^2 - BO^2$$

$$AO^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

logo

$$AO = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

O volume da pyramide BECDA é

$$V' = \frac{BCDE \cdot AO}{3} = \frac{a^2 \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{3}$$

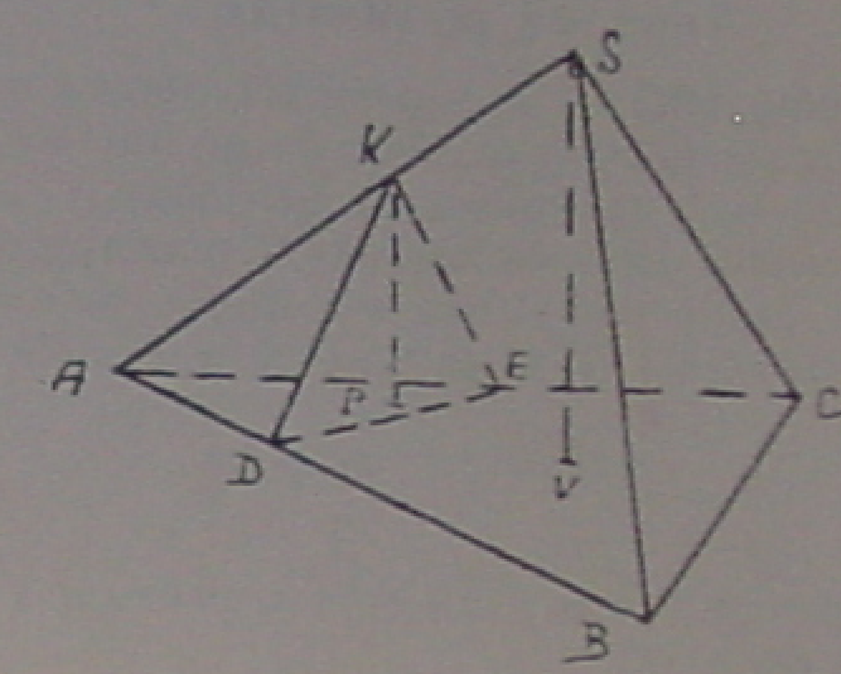
$$V' = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Logo, o volume do octaedro regular será:

$$V = 2 . \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

—

Theorema 159. — Dois tetraedros que têm um angulo solido igual estão entre si na mesma razão



que os productos das arestas que formam este angulo.

Sejam os dois tetraedros ABCS e ADEK, tendo o angulo solido em A commum.

Dois tetraedros estão na mesma razão que os productos das bases pelas alturas.

$$\frac{ABCS}{ADEK} = \frac{ABC \cdot SV}{ADE \cdot KP} \qquad 1)$$

Mas, as bases ABC, ADE têm o angulo A commum; logo, estão entre si como os productos dos lados que formam o angulo igual.

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE} \qquad 2)$$

Notemos que, unindo AP e AV, teriamos os triangulos semelhantes ASV e AKP; logo,

$$\frac{SV}{KP} = \frac{AS}{AK} \qquad 3)$$

Substituindo 2) e 3) em 1), achamos:

$$\frac{ABCS}{ADEK} = \frac{AB \cdot AC \cdot AS}{AD \cdot AE \cdot AK}$$

—

Area da pyramide

Theorema 160. — A superficie lateral d'uma pyramide regular é igual á metade do producto do perimetro da base pelo apothema da pyramide.

Com effeito, as faces lateraes são triangulos isosceles iguaes, tendo por altura o apothema da pyramide e por bases os varios lados da base da pyramide; logo,

$$S = \frac{\text{perimetro} \cdot \text{apothema}}{2}$$

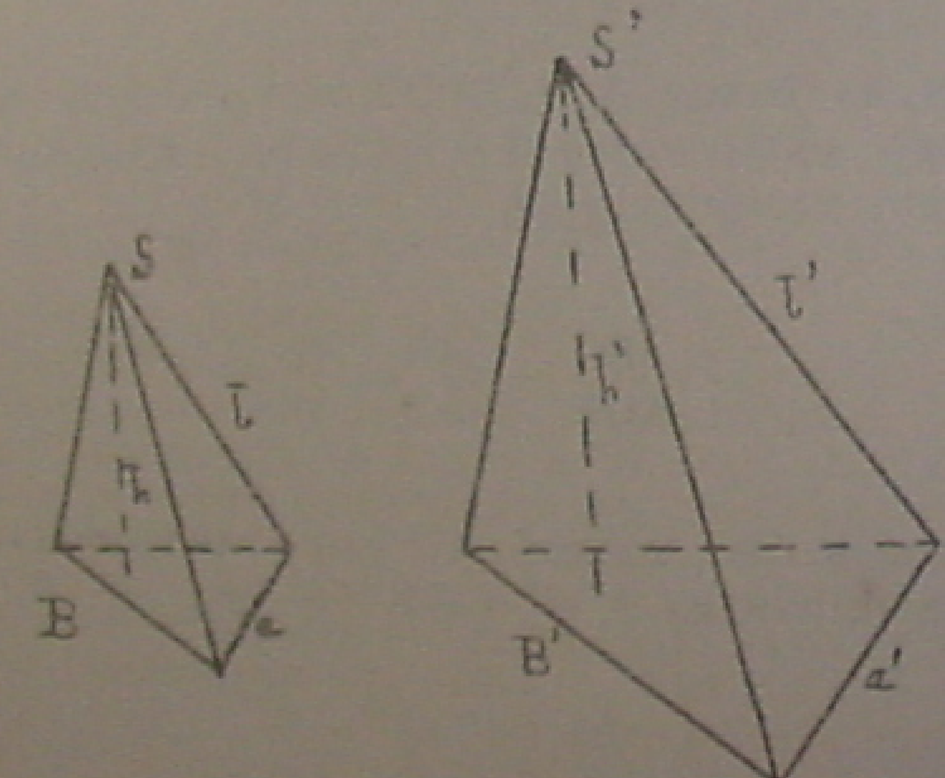
A SUPERFICIE TOTAL É IGUAL Á SUPERFICIE LATERAL MAIS A AREA DA BASE.

A SUPERFICIE LATERAL D'UM TRONCO DE PYRAMIDE REGULAR E' IGUAL AO PRODUCTO DA SEMI-SOMMA DOS PERIMETROS DAS BASES PELO APOTHEMA DO TRONCO.

A SUPERFICIE TOTAL DO TRONCO DE PYRAMIDE E' IGUAL Á SUA SUPERFICIE LATERAL MAIS A SOMMA DAS AREAS DAS BASES DO TRONCO.

—

Theorema 161. — Os volumes de dois polyedros semelhantes estão na mesma razão que os cubos das dimensões homologas.



Sejam os dois tetraedros S e S'.

Seus volumes são respectivamente:

$$\frac{Bh}{3} \text{ e } \frac{B'h'}{3}$$

logo,

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{Bh}{3}}{\frac{B'h'}{3}} = \frac{Bh}{B'h'}$$

Notemos que as bases estão na razão dos quadrados das linhas homologas.

$$\frac{B}{B'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2}$$

e

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

logo, multiplicando, temos:

$$\frac{Bh}{B'h'} = \frac{a^3}{a'^3} = \frac{b^3}{b'^3}$$

e

$$\frac{S}{S'} = \frac{a^3}{a'^3} = \frac{b^3}{b'^3}$$

—

NOTA. — Si tivessemos dois polyedros quaesquer semelhantes, poderiamos decompol-os em tetraedros semelhantes e semelhantemente dispostos, por meio de planos convenientemente escolhidos, e, por um raciocinio analogo, demonstrariamos que estão na razão dos cubos de suas dimensões homologas.

Sejam P e P' dois polyedros semelhantes; supponhamos que fossem divididos em tetraedros respectivamente semelhantes; sejam T_1 T_2 T_3... os tetraedros componentes do polyedro P, e sejam T_1', T_2', T_3'-.. os tetraedros componentes de P' respectivamente semelhantes a T_1, T_2, T_3...

Designando por a, a', b, b', c. c'... as arestas homologas d'esses tetraedros, temos:

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{a^3}{a'_3}$$

$$\frac{T_2}{T'_2} = \frac{b^3}{b'^3}$$

$$\frac{T_3}{T'_3} = \frac{c^3}{c'^3}$$

As arestas homologas de polyedros semelhantes sendo proporcionaes, as segundas razões são iguaes, e

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{T_2}{T'_2} = \frac{T_3}{T'_3} = \ldots$$

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 \div \ldots}{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \ldots} = \frac{T_1}{T'_1} = \frac{a^3}{a'^3}$$

e

$$\frac{P}{P'} = \frac{a^3}{a'^3}$$

Polyedros homotheticos

Unindo um ponto O do espaço aos vertices A, B,... d'um polyedro, e tomando sobre as rectas assim obtidas, ou sobre seus prolongamentos, pontos A', B',... taes que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \ldots = K$$

K, sendo um numero dado; o polyedro, tendo por vertices A', B',... é semelhante ao primeiro si os pontos A', B',... estão sobre as rectas OA, OB,... e é semelhante ou symetrico do primeiro si os pontos A', B',... estão no prolongamento de OA, OB...

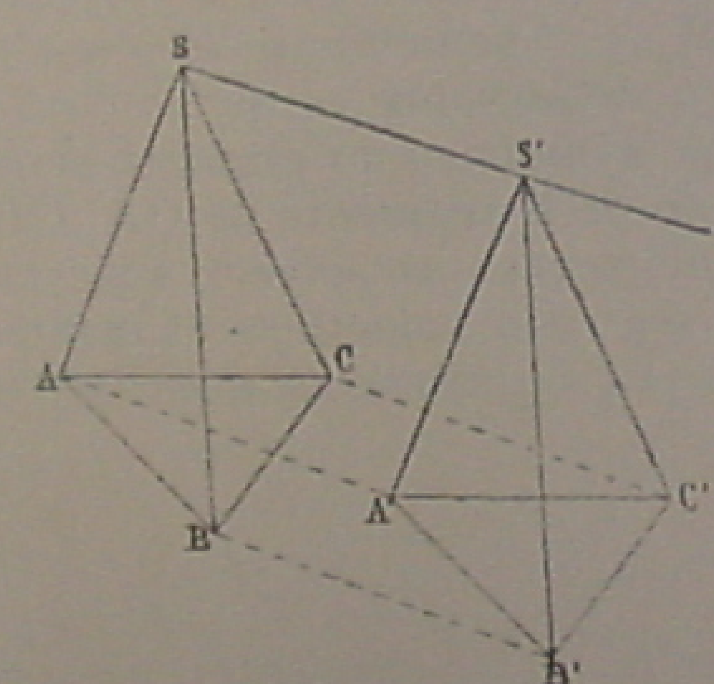
No primeiro caso os polyedros são homotheticos directos e no segundo homotheticos inversos.

O ponto O é o CENTRO DE HOMOTHETIA.

Translação d'uma figura de forma invariavel no espaço

Diz-se que uma figura de forma invariavel está animada d'um movimento de translação no espaço quando ella se move de tal modo que todos os seus vertices descrevam linhas rectas iguaes e parallelas.

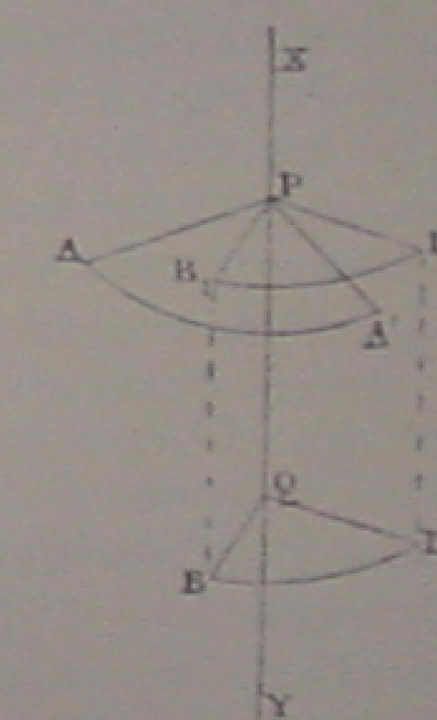
Por exemplo, ABCS, passando para a posição A'B'C'S', houve TRANSLAÇÃO.



Duas figuras iguaes, no espaço, ABCS e A'B'C'S', tendo seus elementos iguaes semelhantemente collocados e duas arestas SA e S'A' iguaes e parallelas, poderão coincidir, transportando uma d'ellas no espaço de modo que seu vertice S, por exemplo, venha collocar-se sobre o vertice correspondente S'.

Rotação em torno d'um eixo

Diz-se que uma figura qualquer, de forma invariavel, está animada d'um movimento de rotação em torno de um eixo, quando cada um de seus pontos descreve um arco de circulo tendo como raio a distancia do ponto ao eixo e por centro o ponto onde esta distancia encont a o eixo.



O plano de cada arco de circulo descripto no movimento é perpendicular ao eixo.

No movimento de rotação em torno d'um eixo, todos os pontos da figura descrevem arcos semelhantes, quando a figura passa da posição inicial a uma outra posição.

Figuras symetricas

Dois pontos A e A' são SYMETRICOS EM RELAÇÃO A UM PONTO O, quando a recta AA', que os une, acha-se dividida pelo ponto O em duas partes iguaes.

Dois pontos são SYMETRICOS EM RELAÇÃO A UM EIXO, quando a recta que os une é perpendicular ao eixo e é por elle dividida ao meio.

Dois pontos são SYMETRICOS EM RELAÇÃO A UM PLANO, quando a recta que os une é perpendicular ao plano e é por elle dividida ao meio,

Duas figuras são symetricas em relação a um ponto, um eixo ou um plano, quando seus pontos são dois a dois symetricos em relação ao ponto, ao eixo ou ao plano, os quaes chamam-se respectivamente CENTRO DE SYMETRIA, EIXO DE SYMETRIA E PLANO DE SYMETRIA.

Duas figuras symetricas d'uma figura dada, em relação a dois centros differentes, são iguaes.

Quando duas figuras são symetricas em relação a um plano, podemos sempre deslocar uma d'ellas de modo a tornal-a symetrica da outra, em relação a um ponto qualquer do plano de symetria.

A figura symetrica de uma linha recta é uma linha recta igual á primeira.

A figura symetrica de um angulo é um angulo igual ao primeiro.

A figura symetrica de um polygono é um polygono igual ao primeiro.

A figura symetrica de um plano é um plano.

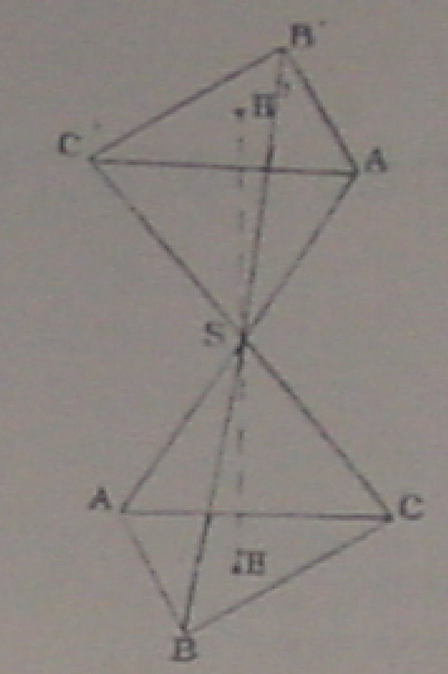
A figura symetrica de un angulo diedro é um angulo diedro igual ao primeiro.

A figura symetrica de um polyedro é um polyedro cujas faces e os diedros são iguaes aos do primeiro, e cujos angulos solidos são symetricos dos angulos solidos homologos do primeiro.

Dois polyedros symetricos são equivalentes.

Comecemos pelo tetraedro ABCS. Formemos

seu symetrico A'B'C'S, em relação ao vertice S como centro de symetria.



Os triangulos ABC, A'B'C' são iguaes como polygonos symetricos, e seus planos são parallelos.

Pelo centro S, tracemos a perpendicular commum a esses dois planos; ella é dividida ao meio em S.

Os dois tetraedros symetricos são equivalentes, pois têm bases e alturas iguaes.

Si tivessemos dois polyedros symetricos, poderiamos decompol-os em um mesmo numero de tetraedros symetricos dois a dois e equivalentes.

Logo, os dois polyedros seriam equivalentes.

Problemas para resolver

1 — Determinar a superficie lateral d'um prisma, sendo o perimetro da secção recta igual a 144^{m2} e sendo a aresta igual a 32^{m}.

2 — Calcular a superficie lateral d'um prisma pentagonal. sendo o lado da base 5^{m} e a altura 40^{m}.

3 — Calcular a superficie lateral d'um prisma recto triangular cuja area da base $= 36^{m2}$. e cuja altura é 10^{m}.

3 — Calcular a superficie total d'um prisma recto pentagonal cuja area da base é 200^{m2} e cuja altura é igual ao lado do quadrado inscripto n'um circulo de raio 60^{m}.

5 — Calcular a superficie total d'um prisma recto cujas bases são octogonos regulares de lado $= 2^{m}$, e cuja altura é o maior segmento de uma recta de 30^{m} dividida em média e extrema razão.

6 — Um prisma recto tem por base um pentagono, cujo lado é igual á diagonal d'um quadrado inscripto n'um circulo de raio 10^{m}, e cuja altura é igual ao diametro do circulo circumscripto a um hexagono de 8^{m} de lado. pede-se para calcular a superficie total.

7 — Calcular a superficie d'uma pyramide cujo perimetro de base $= 25^{m}$, sendo o apothema da pyramide igual a 6^{m}.

8 — Calcular a superficie total d'uma pyramide cuja base é um octogono inscripto n'um circulo de raio 8^{m}. sendo o apothema da pyramide igual ao

lado do dodecagono inscripto n'um circulo de 20^{m} de raio.

9 — Calcular a superficie total d'uma pyramide pentagonal. sendo a area da base $= 120^{m2}$ e o apothema da pyramide igual ao lado do triangulo equilatero inscripto.

10 — Calcular a superficie total d'uma pyramide, cuja base é um pentadecagono de 10^{m} de lado. sendo o apothema da pyramide igual a 25^{m}.

11 — Calcular a superficie total d'uma pyramide hexagonal, sendo a area da base igual a 40^{m2}, e o apothema da pyramide igual á diagonal do quadrado de 8^{m2} de area.

12 — Calcular o volume d'um prisma recto cuja base é de 50^{m2} e cuja aresta mede 10^{m}.

13 — Calcular o volume do prisma obliquo cuja secção recta tem 36^{m2} de area e cuja aresta é igual ao lado do octogono regular inscripto n'um circulo de raio 12^{m}.

14 — Calcular o volume d'uma pyramide cuja area da base é de 60^{m2} e cuja altura é igual ao raio do circulo circumscripto a um pentagono de 6^{m} de lado.

15 — Calcular o volume d'uma pyramide pentagonal cujo lado da base é o maior segmento de uma recta de 60^{m} dividida em média e extrema razão e cuja altura é igual ao diametro de um circulo de 200^{m} de raio.

16 — Calcular o volume d'um tronco de prisma triangular cujo lado da base mede 10^{m}, e cujas arestas lateraes são respectivamente 8^{m}, 12^{m} e 15^{m}.

17 — Calcular o volume d'um tronco de prisma triangular obliquo cuja secção recta mede 45^{m2}, e cujas arestas lateraes são respectivamente 4^{m}, 7^{m}, e 11^{m}

18 — Calcular o volume d'um tronco de pyramide a bases parallelas, sendo estas bases respectivamente de 60^{m} e 90^{m}, e sendo 10^{m} a altura do tronco.

19 — Uma das bases d'um tronco de pyramide mede

80^{m^2}, e a outra mede 30^{m^2}; qual será o volume, sabendo-se que a altura do tronco mede 12^m.

20 — Calcular o volume d'um tetraedro regular cuja aresta mede 5^m.

21 — Calcular a superficie d'um tetraedro regular cuja aresta mede 6^m.

22 — Calcular a superficie do octaedro regular cuja aresta mede 3^m.

23 — Calcular o volume do octaedro regular cuja aresta mede 5^m.

7ª PARTE