80$^{m^2}$, e a outra mede 30$^{m^2}$; qual será o volume, sabendo-se que a altura do tronco mede 12^{m}.

20 — Calcular o volume d'um tetraedro regular cuja aresta mede 5^{m}.

21 — Calcular a superficie d'um tetraedro regular cuja aresta mede 6^{m}.

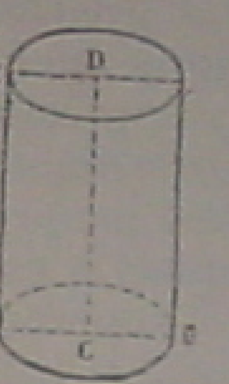
22 — Calcular a superficie do octaedro regular cuja aresta mede 3^{m}.

23 — Calcular o volume do octaedro regular cuja aresta mede 5^{m}.

7ᴬ PARTE

Cylindro

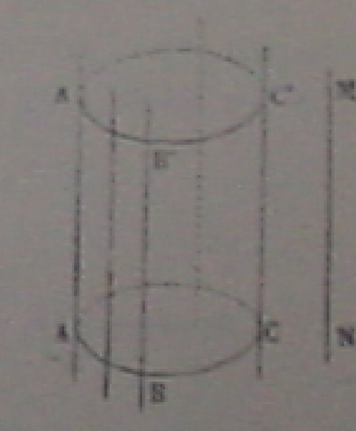
Chama-se CYLINDRO RECTO DE BASE CIRCULAR ao solido formado pela revolução d'um rectangulo ACDK em torno d'um de seus lados CD.



Os lados AC, DK, perpendiculares ao eixo CD, descrevem dois circulos iguaes e parallelos : são as BASES DO CYLINDRO; e CD é a ALTURA. O lado AK forma a SUPERFICIE LATERAL DO CYLINDRO.

Em geral, SUPERFICIE CYLINDRICA é a superficie formada por uma recta AA' chamada GERATRIZ, que se move parallelamente a uma direcção dada MN, e acompanhando uma curva ABC chamada DIRECTRIZ.

Quando a directriz é uma curva fechada cortando a superficie cylindrica segundo dois planos parallelos ABC, A'B'C' encontrando todas as geratrizes, o solido comprehendido entre estes dois planos chama-se CYLINDRO.



Quando as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases, o cylindro é recto ; no caso contrario, elle é obliquo.

Em uma superficie de revolução, a secção, feita por um plano perpendicular ao eixo, chama-se ***secção parallela.***

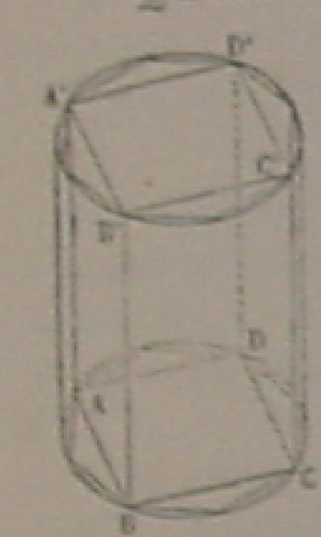
A secção, feita por um plano que passe pelo eixo, chama-se *meridiana*.

Uma superficie é *planificavel* quando póde desdobrar-se n'um plano; no caso contrario é *empenada*.

—

Dois cylindros rectos de base circular são semelhantes quando suas alturas são proporcionaes aos raios das bases, isto é, quando são formados por rectangulos semelhantes girando em torno de dois lados homologos.

Quando, n'uma das bases d'um cylindro recto circular se inscreve um polygono regular e se constróe sobre este polygono regular um prisma da mesma altura que o cylindro, diz-se que o prisma é INSCRIPTO no cylindro e reciprocamente o cylindro é CIRCUMSCRIPTO ao prisma.



Dobrando illimitadamente o numero de lados do polygono da base d'um prisma inscripto, a superficie lateral d'este augmenta e tem por limite a superficie convexa do cylindro; analogamente, o volume do prisma d'um numero infinitamente grande de faces infinitamente estreitas tem por limite o volume do cylindro circumscripto.

Vamos, pois, considerar o cylindro recto circular como limite d'um prisma inscripto quando o numero de lados da base augmenta infinitamente.

—

Area do cylindro recto circular

Theorema 162.—A superficie lateral d'um cylindro recto circular é igual ao producto da circumferencia da base pela altura (figura precedente).

Com effeito, a superficie lateral d'um prisma recto é igual ao perimetro da base pela altura: mesmo no caso da base ter um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos.

No limite, passamos ao cylindro, e a sua superficie lateral ainda será o producto do perimetro da base pela altura.

Logo, chamando r o raio e h a altura, temos:

$$S \text{ lateral} = 2 \pi r h$$

A' superficie lateral, accrescentando as areas das bases, teremos a superficie total: logo,

$$S \text{ total} = 2 \pi r h + \pi r^2 + \pi r^2$$

$$S \text{ total} = 2 \pi r h + 2 \pi r^2$$

$$S \text{ total} = 2 \pi r (h + r)$$

—

Volume do cylindro recto circular

Theorema 163. — O volume do cylindro recto circular é igual ao producto da area da base pela altura (mesma figura).

O volume do prisma recto é igual ao producto da area do polygono da base pela altura.

No limite, a base é um circulo e o solido é um cylindro, cujo volume é

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

—

Theorema 164. — As superficies lateraes de cylindros semelhantes estão na mesma razão que os quadrados das alturas ou dos raios das bases; os volumes estão na mesma razão que os cubos das alturas ou dos raios das bases.

Sejam C, C', dois cylindros semelhantes; h, h', suas alturas; r, r', os raios das bases; temos:

$$\frac{h}{h'} = \frac{r}{r'} \qquad 1)$$

1º designando por S e S' as superficies lateraes dos dois cylindros semelhantes, temos:

$$S = 2 \pi r h$$

$$S' = 2 \pi r' h'$$

ou

$$\frac{S}{S'} = \frac{r}{r'} \times \frac{h}{h'}$$

e, por causa da relação (1)

$$\frac{S}{S'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}$$

2º designando por V e V', os volumes dos dois cylindros semelhantes, temos:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V' = \pi r'^2 h'$$

ou

$$\frac{V}{V'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'}$$

e, por causa da relação (1)

$$\frac{V}{V'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{h^3}{h'^3}$$

NOTA.—As superficies totaes de dois cylindros semelhantes tambem estão na razão dos quadrados das alturas ou dos raios das bases.

—

Area e volume do cylindro de base não circular

—

A superficie lateral d'um cylindro recto de base

não circular é igual ao producto do perimetro da base pela altura.

O volume do cylindro recto de base não circular é igual ao producto da area da base pela altura.

—

Area e volume d'um cylindro qualquer

A superficie lateral d'um cylindro qualquer é igual ao producto do perimetro da secção recta pela geratriz.

O volume d'um cylindro qualquer é igual ao producto da area da secção recta pela geratriz.

—

Area e volume do tronco de cylindro de revolução

A superficie lateral do tronco de cylindro de revolução é igual ao producto da circumferencia da base pelo eixo do tronco.

Tronco de cylindro de revolução é a porção d'um cylindro recto comprehendido entre a base e uma secção plana não parallela á base.

No tronco de cylindro de revolução, o eixo é igual á semi-somma de duas geratrizes diametralmente oppostas.

—

O volume do tronco de cylindro de revolução é igual ao producto da area da base pelo eixo.

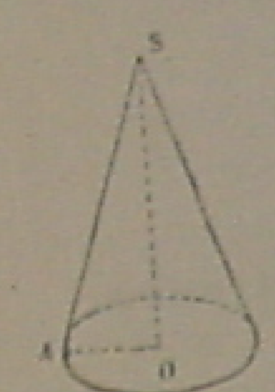
—

Volume do tronco de cylindro obliquo

O SEU VOLUME É IGUAL AO PRODUCTO DA AREA DA SECÇÃO RECTA PELO EIXO

Cône

Chama-se CÔNE RECTO DE BASE CIRCULAR ao solido formado pela rotação d'um triangulo rectangulo SAO em torno d'um catheto SO.



O outro catheto descreve um circulo que é a BASE do cône.

O ponto S é o VERTICE do cône.

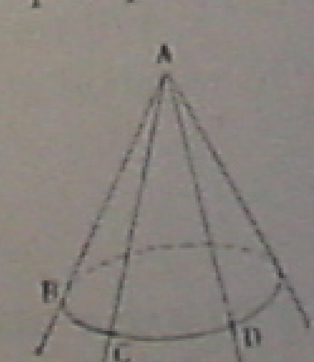
O lado SO é o EIXO ou a ALTURA do cône, e a hypotenusa SA é o LADO ou APOTHEMA do cône.

E' esta hypotenusa que, girando em torno do eixo SO, forma a SUPERFICIE LATERAL ou CONVEXA do cône.

Qualquer secção d'um cône recto de base circular por um plano parallelo á base é um circulo.

A secção por um plano que passa pelo eixo d'um cône recto de base circular é um triangulo duplo do triangulo gerador.

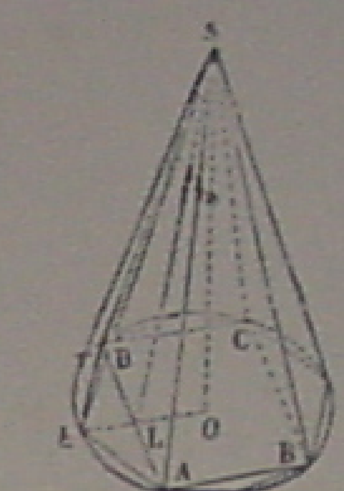
Em geral, SUPERFICIE CÔNICA é a superficie formada por uma recta AB, chamada GERATRIZ, que passa por um ponto fixo A, e se move apoiada sobre uma curva dada chamada DIRECTRIZ.



Quando a diretriz é uma curva fechada e corta a superficie conica por um plano BCD, que encontre todas as geratrizes d'um mesmo lado do vertice, o solido comprehendido entre este plano e a superficie cônica é um CÔNE. Tem por BASE o plano BCD e por ALTURA a distancia do vertice S á base.

O cône, sendo circular, e a recta que une o vertice ao centro da base sendo perpendicular ao plano da base, o cône é RECTO; no caso contrario, o cône é OBLIQUO.

Dois cônes rectos de base circular são semelhantes quando suas alturas são proporcionaes aos raios das bases.



Inscrevendo-se na base d'um cône recto SOK de base circular um polygono regular qualquer, e construindo uma pyramide que tenha por vertice o vertice S do cône e por base o polygono ABCD, esta pyramide será regular: será INSCRIPTA no cône, e reciprocamente o cône será CIRCUMSCRIPTO á pyramide;

Dobrando infinitamente o numero de lados do polygono de base da pyramide, o apothema SL (altura de qualquer um dos triangulos lateraes) aproxima-se cada vez mais do apothema SK do cône; a superficie lateral da pyramide aproxima-se cada vez mais da superficie do cône, e o volume da pyramide aproxima-se do volume do cône.

Podemos, pois, considerar o cône como sendo o limite d'uma pyramide quando o numero de lados de sua base augmenta infinitamente.

O cône póde ser considerado uma pyramide de um numero infinitamente grande de faces lateraes infinitamente estreitas.

O TRONCO DE CÔNE DE REVOLUÇÃO COM BASES PARALLELAS é a porção do cône de revolução comprehendida entre a base e uma secção parallela á base.

O tronco de cône de revolução com bases parallelas é o limite para o qual tende um tronco de pyramide regular quando o numero de suas faces lateraes augmenta infinitamente; póde ser considerado como sendo um tronco de pyramide regular d'um numero infinitamente grande de faces infinitamente estreitas.

—

Area e volume do cône recto circular

Theorema 165.— A superficie lateral d'um cône recto de base circular é igual ao producto da circumferencia da base pela metade do apothema do cône.

A superficie lateral da pyramide regular sendo igual ao producto do perimetro da base pelo apothema da pyramide, no limite, a superficie lateral do cône recto de base circular será igual ao producto da circumferencia da base pelo apothema.

Chamando r o raio da base e l o apothema, temos:

$$S \text{ lateral} = \frac{2 \pi r \cdot l}{2} = \pi r$$

Logo, a superficie total será:

$$\therefore S \text{ total} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$$

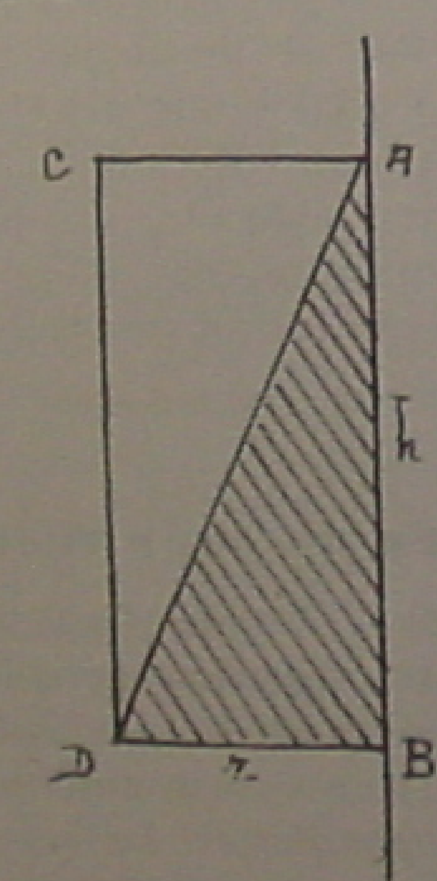
—

Theorema 166. — O volume do cône de revolução é igual ao terço do producto da base por altura.

Considerando o cône recto como sendo o limite d'uma pyramide regular d'um numero infinitamente grande de faces infinitamente estreitas, temos logo:

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$

Um cône qualquer é o terço do cylindro de mesma base e de mesma altura.



$$V \text{ cylindro ABCD} = \pi r^2 h$$

$$V \text{ cône ABD} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

———

O volume formado pela rotação do triangulo ACD em torno de AB é igual aos $\frac{2}{3}$ do cylindro formado pela rotação do rectangulo ABCD em torno do mesmo eixo AB.

Com effeito, do volume do cylindro, subtrahindo o volume do cône, temos:

$$\pi r^2 h - \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3 \pi r^2 h}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{2 \pi r^2 h}{3}$$

logo,

$$V (ACD) = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

—

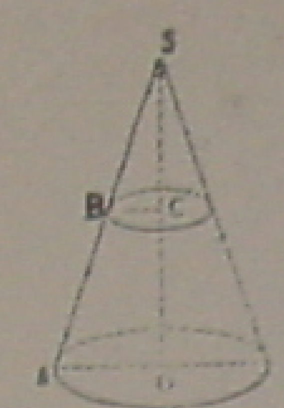
As superficies lateraes de dois cônes semelhantes estão na mesma razão que os quadrados das alturas, dos raios das bases, ou dos apothemas. Os volumes estão na mesma razão que os cubos das alturas, dos raios das bases, ou dos apothemas.

—

Tronco de cône

Cortando um cône recto de base circular SOA por um plano BC parallelo á base, a parte do solido comprehendida entre a base e a secção, chama-se TRONCO DE CÔNE DE BASES PARALLELAS. Os circulos OA, BC, são as bases do tronco, OC é a ALTURA e AB é o APOTHEMA.

Podemos considerar o tronco de cône como formado pela rotação do trapezio ABCO em torno do lado OC perpendicular ás bases.



As bases OA e BC do trapezio formam dois circulos que são as bases do tronco, o lado AB forma a superficie lateral ou convexa do tronco do cône.

—

Area e volume do tronco de cône

Theorema 167.— A superficie lateral do tronco de cône de revolução é igual ao producto da semi-somma das circumferencias das bases pela geratriz.

Chamando r e r' aos raios das bases e l a geratriz, temos:

$$S_l = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \times l$$

$$S_l = \pi (r + r') l$$

E' o producto da circumferencia média pela geratriz.

Chamando r'' o raio da circumferencia média, temos:

$$S_l = 2\pi r'' l$$

A superficie total seria:

$$S_t = \pi r^2 + \pi r'^2 + \pi (r + r') l$$

$$S_t = \pi r^2 + \pi r'^2 + 2\pi r'' l$$

$$S = \pi (r^2 + r'^2 + 2 r'' l)$$

—

Theorema 168. — O tronco de cône é equivalente

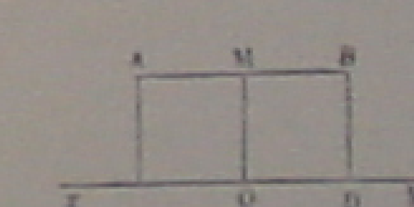
á somma de tres cônes de mesma altura que o tronco, tendo respectivamente por bases as bases do tronco e sua média geometrica.

$$V = (\pi r^2 + \pi r'^2 + \pi r r') \frac{h}{3}$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r'^2 + r r')$$

—

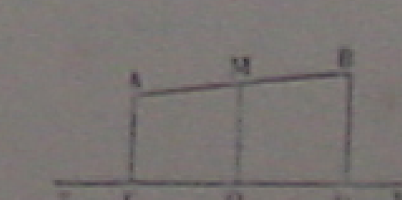
Fazendo girar em torno d'um eixo XY uma recta limitada AB situada no mesmo plano do que o eixo e d'um mesmo lado do eixo, a superficie que ella forma tem por medida o producto da linha AB pela circumferencia tendo como raio a perpendicular traçada do seu meio M sobre o eixo.



1º Supponhamos AB parallela ao eixo:

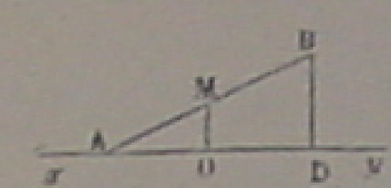
$$\text{Sup. AB} = AB \times 2\pi \times OM$$

2.º Supponhamos AB obliquo ao eixo, sem encontral-o:



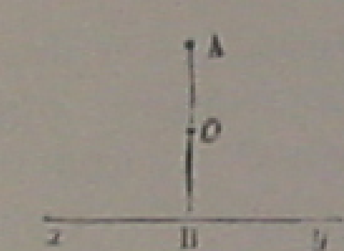
$$\text{Sup. AB} = AB \times 2\pi \times OM$$

3.º Supponhamos que uma das extremidades da recta AB esteja situada sobre o eixo XY:



$$\text{Sup. AB} = AB \times 2\,\pi \times OM$$

NOTA.— Obteriamos ainda a mesma expressão si a recta fosse perpendicular ao eixo:



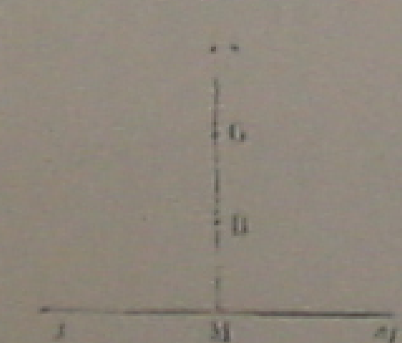
$$\text{Sup. AB} = \pi \times AB^2$$

mas

$$AB = 2 \times OB$$

logo,

$$\text{Sup. AB} = AB \times 2\,\pi \times OB$$



$$\text{Sup. AB} = \pi\,(AM^2 - BM^2)$$

mas

$$AM^2 - BM^2 = (AM + BM)\,AB$$

e

$$AM = AO + OM,\ BM = OM - OB$$

logo,

$$AM + BM = 2 \times OM$$

e

$$\text{Sup. AB} = AB \times 2\,\pi \times OB$$

Esphera

A ESPHERA é o logar geometrico dos pontos do espaço que distam de um ponto fixo, chamado CENTRO, d'uma distancia constante chamada RAIO.

Todos os raios d'uma mesma esphera são iguaes.

DIAMETRO é uma linha recta que atravessa a esphera de lado a lado, passando pelo centro: é o dobro do raio.

Todos os diametros d'uma mesma esphera são iguaes.

PLANO TANGENTE á esphera é um plano que toca a esphera n'um só ponto: O PONTO DE CONTACTO.

Duas ESPHERAS são TANGENTES quando suas superficies têm um só ponto commum.

CIRCULO MAXIMO é a secção feita na esphera por um plano que passa pelo centro.

CIRCULO MENOR é a secção feita na esphera por um plano que não passa pelo centro.

UM POLYEDRO É INSCRIPTO n'uma esphera quando todos os seus vertices estão situados sobre a superficie da esphera.

UM POLYEDRO É CIRCUMSCRIPTO a uma esphera quando todas as suas faces são tangentes á superficie da esphera.

O CYLINDRO CIRCUMSCRIPTO a uma esphera é o cylindro gerado por um quadrado circumscripto a um circulo maximo.

CÔNE EQUILATERO CIRCUMSCRIPTO á esphera é o cône gerado por um triangulo equilatero circumscripto a um circulo maximo.

ANGULO DE DUAS CURVAS é o angulo de suas tangentes no ponto de intersecção.

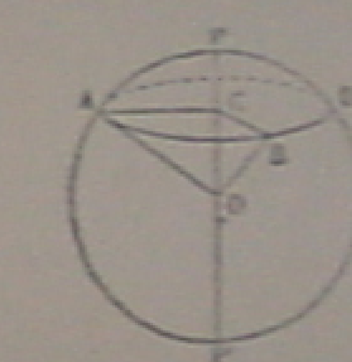
Diz-se que duas curvas se cortam ORTHOGONALMENTE quando suas tangentes no ponto de intersecção são perpendiculares uma á outra.

ANGULO ESPHERICO OU ANGULO DE DOIS ARCOS DE CIRCULOS MAXIMOS é o angulo das tangentes a esses dois arcos no ponto de intersecção. Os arcos de circulos maximos chamam-se lados do angulo, e o seu ponto de intersecção é o vertice do angulo.

ANGULO DE DOIS ARCOS DE CIRCULOS MAXIMOS é o diedro formado pelos seus planos.

Theorema 169. — Uma secção plana feita n'uma esphera é um circulo.

Seja ABD a secção feita na esphera O por um plano.



Do ponto O traço a perpendicular OC sobre o plano secante, e as rectas OA, OB, OD,... aos differentes pontos da intersecção da esphera com o plano: estas rectas OA, OB, OD,... são iguaes, como raios d'uma mesma esphera, mas, são obliquas iguaes em relação á perpendicular OC; logo, afastam-se igualmente do pé da perpendicular, e, as distancias CA, CB, CD,... são iguaes. Os pontos A, B, D,... da intersecção da esphera com o plano distam do ponto C d'uma distancia constante: logo, pertencem a um circulo cujo centro é o ponto C.

O centro C d'um circulo da esphera e o centro O da esphera estão situados na mesma perpendicular ao plano do circulo. Prolongando OC até seu encontro com a esphera em P e em P', estes dois pontos são chamados os PÓLOS do circulo ABD.

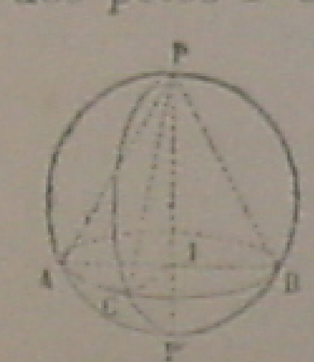
Em geral, chamam-se PÓLOS d'um circulo (maximo ou minimo) ás extremidades do diametro da esphera traçado perpendicularmente ao plano do circulo considerado.

Por dois pontos tomados sobre a superficie d'uma esphera póde-se traçar um circulo maximo e um só; pois, estes dois pontos e o centro da esphera determinam um plano e um só.

No caso dos dois pontos, considerados sobre a superficie da esphera, estarem em linha recta com o centro, ha uma infinidade de circulos maximos passando pelos dois pontos.

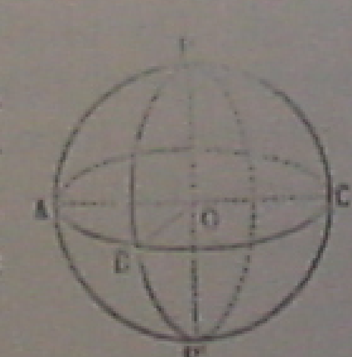
—

Theorema 170. — Todos os pontos da circumferencia d'um circulo ABC da esphera distam igualmente dos polos P e P' desse circulo.



Tracemos as rectas PA, PB, PC,... do pólo P aos varios pontos da circumferencia ACB; unamos IA, IB, IC,... estas ultimas rectas são todas iguaes, como raios d'um mesmo circulo; logo as obliquas PA, PB, PC,... que se afastam igualmente do pé I da perpendicular são iguaes.

Demonstrar-se-ia, d'um modo analogo, que os pontos A, B, C,... do circulo considerado distam igualmente do pólo P'.



Considerando os pólos P e P' d'um circulo maximo, e traçando os raios OA, OB, OC,... d'este circulo maximo, os angulos rectos POA, POB, POC,... são angulos centraes: têm por medida os arcos PA, PB, PC,... Estes arcos são quartas partes de circumferencia, são QUADRANTES.

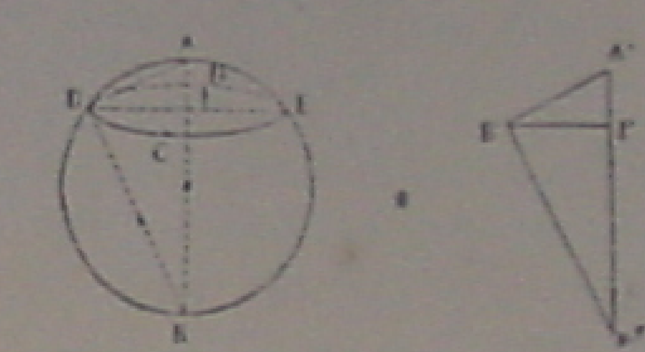
—

Problema. — Sendo dada uma esphera, determinar o seu raio.

Do ponto A, como pólo, com uma abertura qualquer de compasso espherico, traço o circulo BCE sobre a esphera dada. Sobre esta circumferencia tomo tres pontos B, C, D, dos quaes messo as distancias rectilineas por meio do compasso espherico.

Traço, sobre um plano, um triangulo tendo por lados estas distancias BC, CD e DB.

Determino o raio do circulo circumscripto a este triangulo: é o raio BI do circulo BCD.

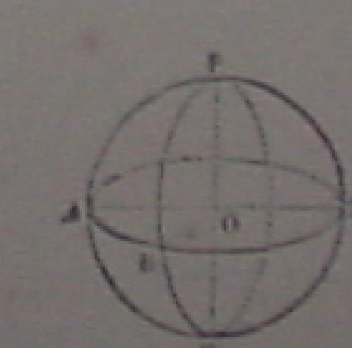


Traço uma recta illimitada A'K': n'um ponto arbitrario I' d'esta recta illimitada, traço uma perpendicular I'B' = IB.

Do ponto B' como centro e com um raio = AB, traço um arco de circulo que encontra a recta illimitada em A'. Une-se A'B' e traça-se B'K' perpendicular sobre A'B'. Temos assim o triangulo rectangulo A'B'K', cuja hypotenusa é o diametro procurado.

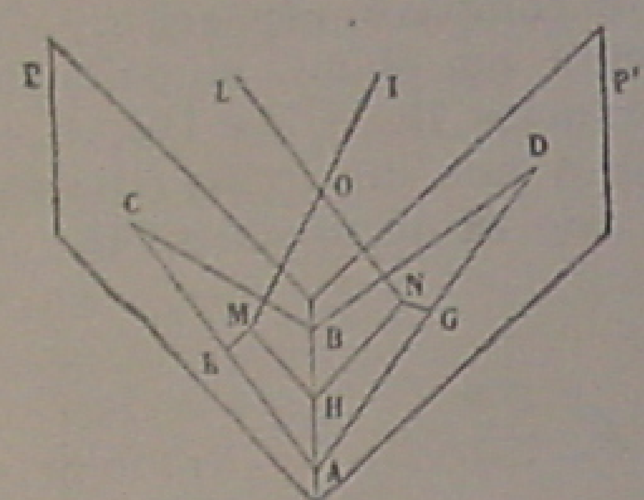
—

O angulo de dois arcos de circulos maximos PA e PB tem por medida o arco do circulo maximo AB descripto de seu vertice P como pólo e comprehendido entre seus lados.



—

Theorema 171. — Por quatro pontos A, B, C, D, não situados no mesmo plano, podemos traçar uma esphera e uma só.



Unamos AB, AC, AD, BC, BD.

No plano ABC, tracemos, no meio de AB, a perpendicular HM, e no meio de AC, a perpendicular KM.

HM e KM cortam-se n'um ponto M, centro do circulo circumscripto ao triangulo ABC, No ponto M, traço a perpendicular MI sobre o plano P do triangulo ABC.

Esta recta MI é o logar geometrico dos pontos equidistantes de A, B e C.

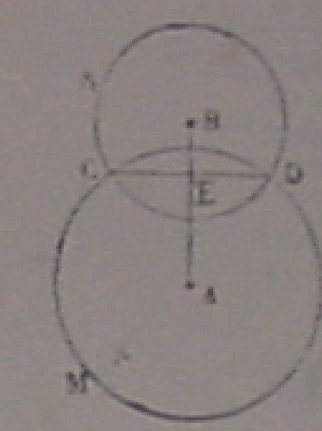
D'um modo analogo, determino NL perpendicular em N ao plano P' do triangulo ABD.

O ponto O, de encontro das duas perpendiculares MI e NL, equidista de A, B, C e D; logo, é o centro d'uma esphera que passa pelos quatro pontos dados A, B, C e D.

Esta esphera é a unica que passa pelos pontos A, B, C e D, pois as perpendiculares MI e NL encontram-se n'um ponto, e n'um só.

—

Theorema 172.— Quando duas espheras cortam-se, sua intersecção é um circulo, cujo plano é perpendicular á recta que une seus centros respectivos, e cujo centro está situado sobre esta recta.



Pela recta AB, que une os centros das duas espheras que se cortam, tracemos um plano: este plano corta as espheras segundo dois circulos maximos, cujas circumferencias encontram-se em C e em D.

Fazendo girar os dois semi-circulos em torno de AB, cada semi-circumferencia formará a superficie d'uma das espheras, e o ponto C descreverá uma circumferencia cujos pontos serão communs ás duas espheras: a intersecção das duas espheras é, pois, um circulo.

O raio EC d'este circulo, sendo perpendicular sobre AB, o plano do circulo será perpendicular á recta que une os centros das duas espheras consideradas.

—

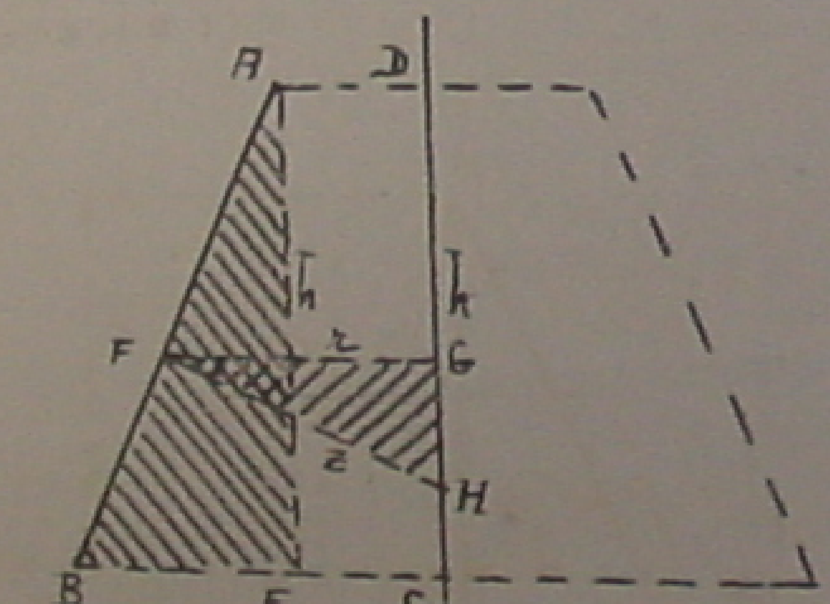
NOTA.— Duas espheras pódem occupar cinco posições, relativas uma á outra. Pódem ser *exteriores*, *tangentes exteriormente*, *secantes*, *tangentes interiormente*, *interiores*.

Area da Esphera

Theorema 173. — A area da superficie formada por uma recta girando em torno d'um eixo (situado no mesmo plano) se obtem multiplicando a projecção da recta sobre o eixo pela circumferencia que tem como raio a perpendicular traçada pelo meio da geratriz e terminada no eixo.

Supponhamos que a recta esteja d'um só lado do eixo.

Seja a recta AB, não parallela ao eixo CD.



A superficie formada é o tronco de cône tendo AB como geratriz e CD como altura.

$$S = 2\,\pi\,FG \times AB = 2\,\pi\,r\,l \qquad 1)$$

Seja FH = z a perpendicular traçada em F, meio de AB; tracemos AE parallela e igual a DC.

Os triangulos rectangulos ABE e GFH são semelhantes (lados respectivamente perpendiculares e dirigidos no mesmo sentido); logo,

$$\frac{AB}{FH} = \frac{AE}{FG} \text{ ou } \frac{l}{z} = \frac{h}{r}$$

ou

$$l\,r = z\,h$$

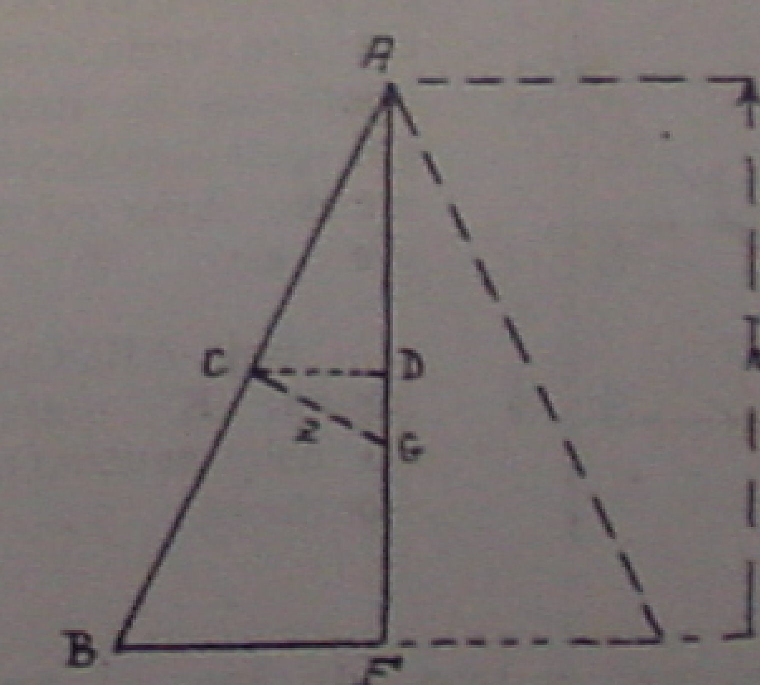
Substituindo na formula 1), vem:

$$2\,\pi\,r\,l = 2\,\pi\,z\,h$$

logo,

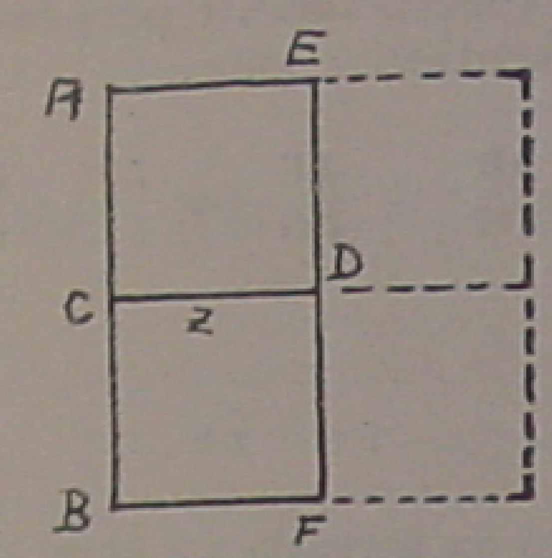
$$S = 2\,\pi\,z\,h$$

Si a aresta AB encontra o eixo, a superficie formada é um cône.



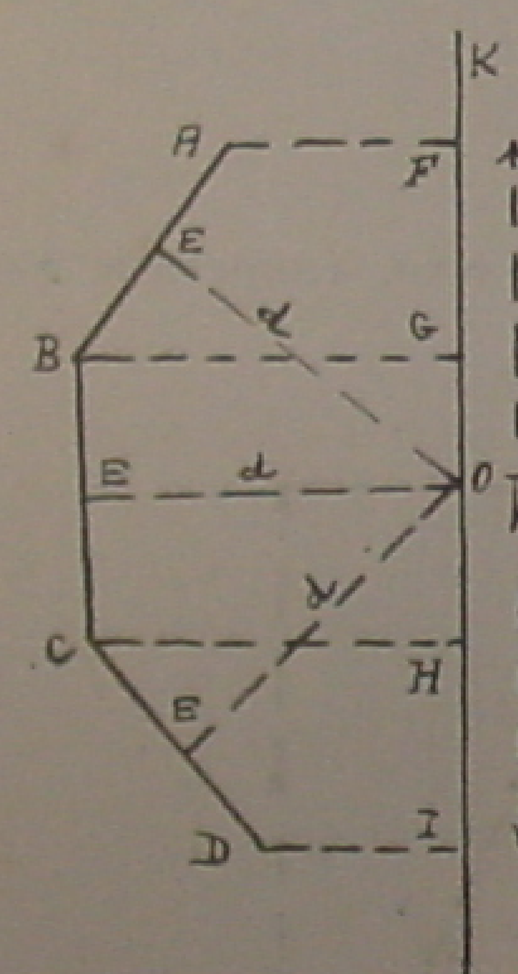
$$S = 2\,\pi\,CD \times AB = 2\,\pi\,CG \times AF = 2\,\pi\,z\,h$$

Si a recta AB é parallela ao eixo, a superficie formada é um cylindro



$$S = 2\,\pi\ CD \times EF = 2\,\pi\ z\ h$$

—



Theorema 174. — Si uma linha polygonal regular gira em torno de um eixo situado no seu plano e passando pelo seu centro, a area da superficie girada é igual ao producto da circumferencia que teria como raio o apothema da linha polygonal pela projecção d e s t a mesma linha polygonal sobre o eixo.

Seja ABCD a linha polygonal, KV o eixo passando pelo centro O, e OE o apothema.

AB descreve um tronco de cône, cuja area lateral é

$$2\,\pi\ OE \times FG.$$

D'um modo analogo a area da superficie formada por BC é igual a

$$2\,\pi\ OE \times GH$$

e a de CD é

$$2\,\pi\ OE \times HI$$

Logo, a area da superficie formada pela linha polygonal toda será

$$S = 2\,\pi\ OE \times FG + 2\,\pi\ OE \times GH + 2\,\pi\ OE \times HI$$

$$S = 2\,\pi\ OE\ (FG + GH + HI) = 2\,\pi\ OE \times FI$$

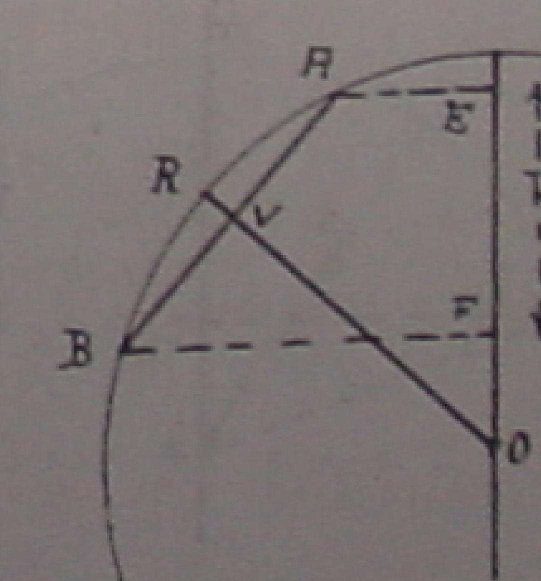
Chamando d o apothema e h a projecção da linha polygonal sobre o eixo, temos:

$$S = 2\,\pi\ d \times h$$

—

Zôna

Chama-se ZÔNA a porção da superficie da esphera formada pelo arco AB girando em torno d'um diametro.



Considerando a corda AB: si ella girasse em torno de OE formaria uma superficie cuja area seria:

$$S = 2\,\pi\ VO \times FE = 2\,\pi\ d \times h$$

Mas, podemos considerar o arco AB como limite d'uma linha polygonal regular d'um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos: a area da superficie formada por essa linha polygonal no limite, seria

$$S = 2\,\pi\, r\, h$$

pois, o apothema foi crescendo á medida que o numero de lados da linha polygonal foi augmentando, e no limite passou a ser o raio r.

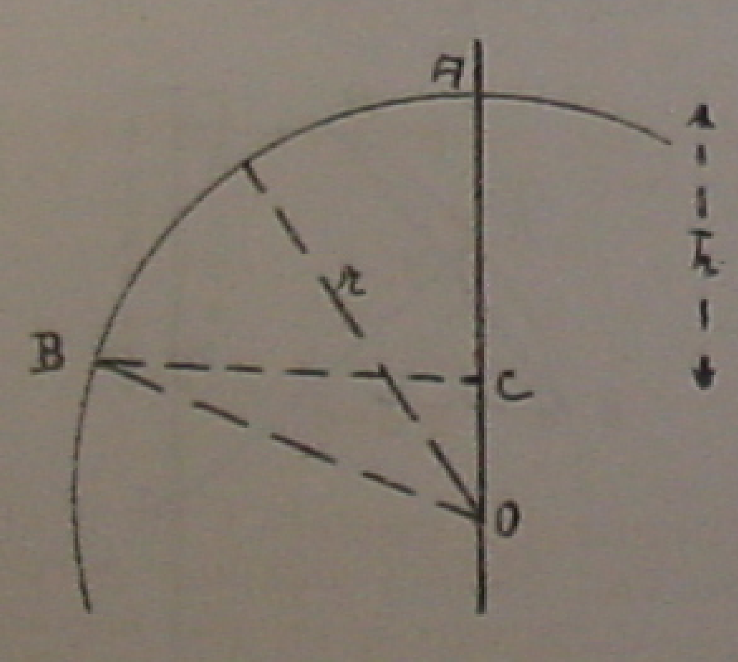
Logo,

$$S = 2\,\pi\, r\, h$$

—

Calotta

No caso em que o arco AB tenha uma das suas extremidades sobre o eixo, a superficie formada é chamada CALOTTA.



A area do calotta, analogamente ao que acabamos de estudar, é

$$S = 2\,\pi\, r\, h$$

—

Esphera

Si o arco AB fosse de 180° começando em A no eixo, e terminando em B, tambem no eixo, a superficie formada seria uma esphera.

$$S = 2\,\pi\, r\, h = 2\,\pi\, r \times 2\,r = 4\,\pi\, r^2$$

$$S = 4\,\pi\, r^2$$

A AREA DA ESPHERA É IGUAL AO PRODUCTO DE SUA CIRCUMFERENCIA PELO SEU DIAMETRO

—

Notando que

$$d = 2\,r$$

e

$$d^2 = 4\,r^2$$

substituindo, vem:

$$S = \pi\, d^2$$

E' A AREA DA ESPHERA EM FUNCÇÃO DO SEU DIAMETRO.

—

Fuso

Considerando uma espher i e um diametro qualquer, traçando um circulo maximo perpendicular a este diametro, dividindo o circulo maximo em 360 partes iguaes e pelos pontos de divisão traçando planos que passem pelas extremidades do diametro primitivo, formaremos 360 partes iguaes, chamadas vezes.

—

O fuso é a porção da esphera comprehendida entre dois semi circulos maximos de diametro commum.

O angulo do fuso é o diedro formado pelos planos dos circulos maximos que comprehendem o fuso.

Um fuso designa-se pelo seu angulo.

—

A esphera toda valendo $4\pi r^2$, um fuso de um grão valerá 360 vezes menos, ou

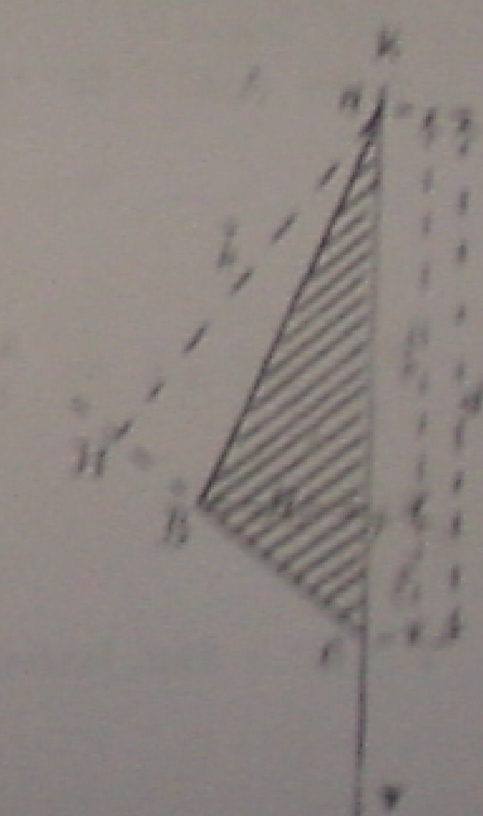
$$\text{fuso } 1^\circ = \frac{4\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2}{90}$$

e

$$\text{fuso } n^\circ = \frac{4\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi r^2 n}{90}$$

Volume da Esphera

Consideremos um eixo KV, e um triangulo ABC, com o lado AC situado sobre o eixo: propomo-nos de calcular o volume formado pelo triangulo girando em torno do eixo.



Traçando BT perpendicular sobre KV, dividimos o nosso triangulo ABC em dois triangulos parciaes, o triangulo ABT e o triangulo TBC.

Ora, o volume formado por ABC girando em torno do eixo KV, é igual á somma dos volumes formados respectivamente pelos triangulos ABT e TBC girando em torno do mesmo eixo KV.

$$\text{Vol. ABT} = \text{cône} = \pi\, r^2 \frac{m}{3}$$

$$\text{Vol. TBC} = \text{cône} = \pi\, r^2 \frac{n}{3}$$

$$\text{Vol. ABC} = \text{vol. ABT} + \text{vol. TBC}$$

$$\text{Vol. ABC} = \pi\, r^2 \frac{m}{3} + \pi\, r^2 \frac{n}{3} = \frac{\pi\, r^2}{3}(m+n)$$

$$\text{Vol. ABC} = \frac{\pi\, r^2}{3} a = \frac{\pi\, r\, r\, a}{3}$$

Ora,

$$r \times a = 2 \text{ Sup. ABC} = \text{BC} \times h$$

logo,

$$\text{Vol. ABC} = \frac{\pi\, r}{3} \text{ BC} \times h \quad \text{ou} \quad \frac{h}{3} \pi\, r \text{ BC}$$

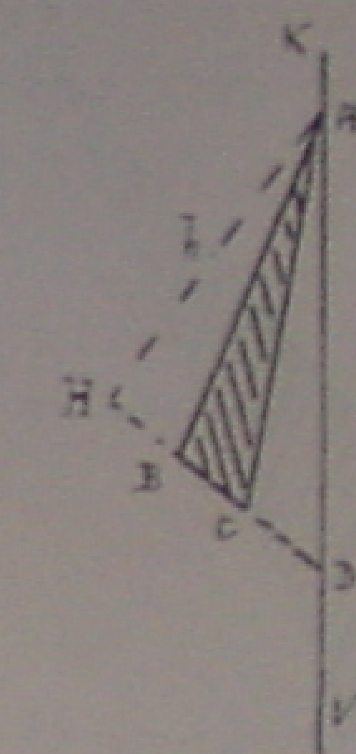
Mas,

$$\pi \times r \times \text{BC} = \text{Sup. lateral cône BC}$$

logo,

$$\text{Vol. ABC} = \frac{h}{3} \text{Sup. BC}$$

Si o triangulo girador tivesse sómente um ponto A commum com o eixo, teriamos



$$\text{Vol. ABC} = \text{vol. ABD} - \text{vol. ACD}$$

Ora,

$$\text{Vol. ABD} = \frac{h}{3} \text{ sup. BD}$$

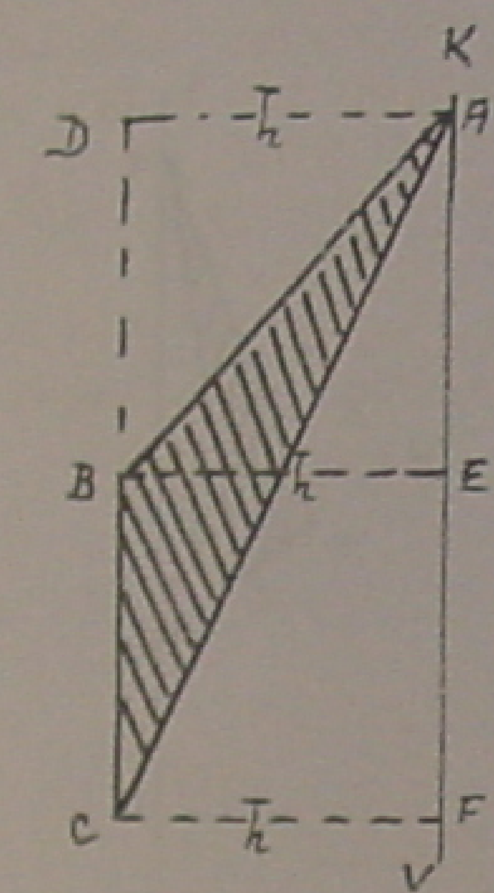
$$\text{Vol. ACD} = \frac{h}{3} \text{ sup. CD}$$

logo,

$$\text{Vol. ABC} = \frac{h}{3} (\text{sup. BD} - \text{sup. BC})$$

$$\text{Vol. ABC} = \frac{h}{3} \text{ sup. BC}$$

Vamos agora suppôr que o lado BC do triangulo fosse parallelo ao eixo.



$$\text{Vol. ABC} = \text{vol. ADC} - \text{vol. ADB}$$

$$\text{Vol. ADC} = \frac{2}{3}\,\pi\,h^2\,\text{AF}$$

$$\text{Vol. ADB} = \frac{2}{3}\,\pi\,h^2\,\text{AE}$$

logo,

$$\text{Vol. ABC} = \frac{2}{3}\,\pi\,h^2\,(\text{AF} - \text{AE})$$

$$\text{Vol. ABC} = \frac{2}{3}\,\pi\,h^2\,\text{EF}$$

Notando que

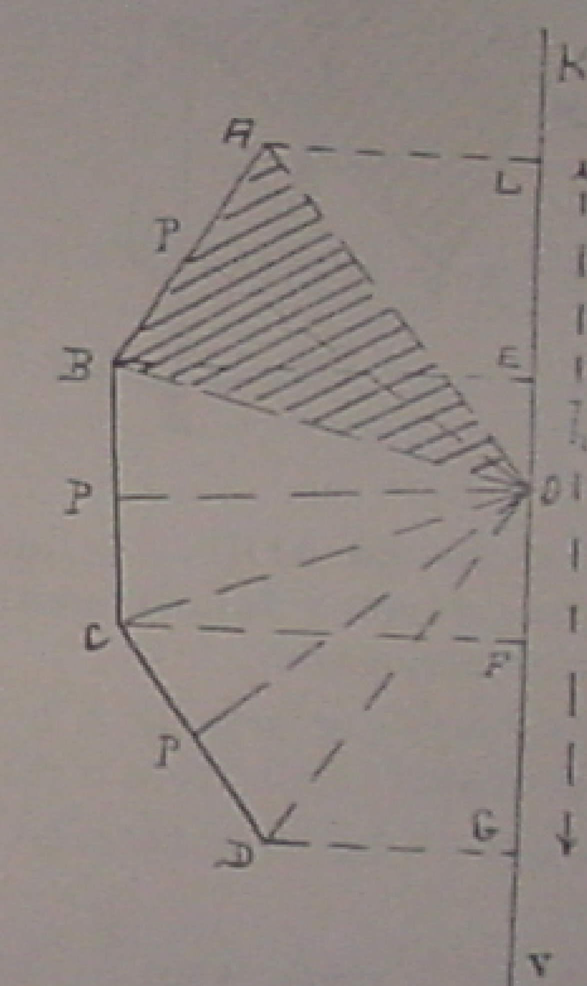
$$2\,\pi\,h \times \text{EF ou } 2\,\pi\,h \times \text{BC} = \text{Sup. BC}$$

achamos

$$\text{Vol. ABC} = \frac{h}{3} \times 2 \times \pi \times h \times \text{EF} = \frac{h}{3}\,\text{Sup. BC}$$

SI UM SECTOR POLYGONAL REGULAR GIRA EM TORNO D'UM EIXO TRAÇADO NO SEU PLANO PELO SEU CENTRO, O VOLUME GERADO É IGUAL AO TERÇO DO PRODUCTO DA SUPERFICIE QUE DESCREVE A LINHA POLYGONAL PELO APOTHEMA.

Seja um sector polygonal ABCD regular, girando em torno de um eixo KV, situado no seu plano e passando pelo centro O da linha polygonal considerada.



$$\text{Vol. AOB} = \frac{\text{OP}}{3} \times \text{Sup. AB}$$

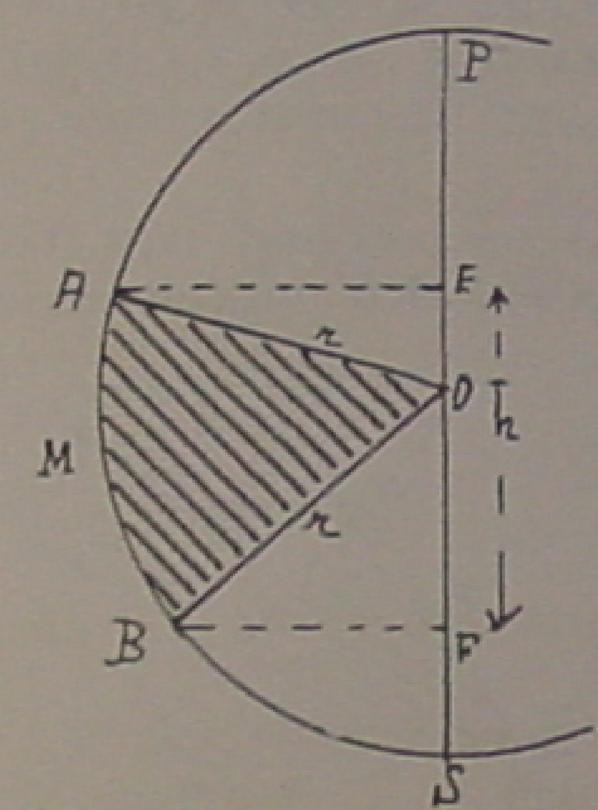
$$\text{Vol. BOC} = \frac{\text{OP}}{3} \times \text{Sup. BC}$$

$$\text{Vol. COD} = \frac{\text{OP}}{3} \times \text{Sup. CD}$$

$$\text{Vol. total} = \frac{\text{OP}}{3}\,\text{Sup. ABCD}$$

Volume do sector espherico

é igual ao terço do producto da zôna correspondente a este sector pelo raio.



Seja o sector circular AOB ; é o limite d'um sector polygonal d'um numero infinitamente grande de lados infinitamente pequenos.

A linha polygonal que iria de A a B tende para o arco AB e o apothema tende para o raio.

Logo, pelo que já foi demonstrado,

$$V = \frac{r}{3} \times \text{Sup. AMB}$$

Notando que

$$\text{Sup. AMB} = 2\,\pi\,r\,h$$

achamos

$$V = \frac{r}{3}\,2\,\pi\,r\,h = \frac{2}{3}\,\pi\,r^2\,h$$

—

Si o arco AB, considerado, começasse em P, no

eixo, o volume formado pela rotação do sector PMS em torno do eixo seria uma esphera.

Neste caso, $h = 2\,r$.

Temos, pois,

$$V = \frac{2}{3}\,\pi\,r^2 \times 2r = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

é o volume da esphera.

O VOLUME DA ESPHERA É IGUAL AO TERÇO DO PRODUCTO DE SUA SUPERFICIE PELO RAIO.

—

Unha ou Cunha espherica

é a porção da esphera comprehendida entre a superficie espherica e os planos de dois semi-circulos. (Tambem é chamada LUNULA).

Dividindo uma esphera em 360 partes iguaes, por meio de planos passando por um mesmo diametro, teremos dividido a esphera em 360 unhas de um grão.

Uma unha de um grão vale, pois, 360 vezes menos do que toda a esphera ; vale, pois,

$$\frac{\frac{4}{3}\,\pi\,r^3}{360} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \times \frac{1}{360}$$

e uma unha de n grãos valerá

$$\frac{\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,n}{360} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \times \frac{n}{360}$$

O diametro $d = 2\,r$; logo, $d^3 = 8\,r^3$; substituindo na formula

$$\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

do volume da esphera, em funcção do raio, achamos

$$\frac{4}{3}\pi\ \frac{d^3}{8}=\frac{4\ \pi\ d^3}{24}=\frac{\pi\ d^3}{6}$$

é o volume da esphera em funcção do diametro.

Tambem podemos estabelecer a formula do volume da unha em funcção do diametro, teremos :

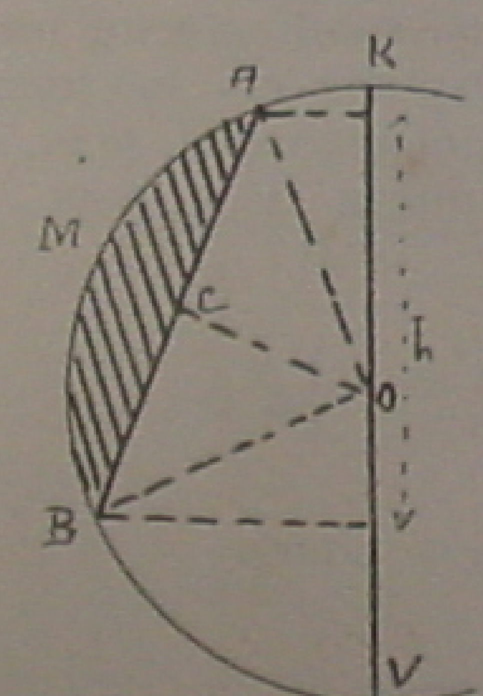
$$\frac{\frac{4}{3}\pi\ r^3\ n}{360}=\frac{\frac{n\ \pi\ d^3}{6}}{360}=\frac{1}{6}\ \pi\ d^3\times\frac{n}{360}$$

—

Annel espherico

é o volume formado pelo segmento circular AMB girando em torno d'um diametro KV.

$$\text{Vol. AMB} = \text{vol. sector AOB} - \text{vol. tr. AOB}$$



$$\frac{2}{3}\ \pi\ r^2\ h - \frac{2}{3}\ \pi\times OC^2\times h =$$

$$\frac{2}{3}\ \pi\ h\ (r^2 - OC^2) = \frac{2}{3}\ \pi\ h\ AC^2$$

$$= \frac{2}{3}\ \pi\ \frac{1}{4}\ AB^2\ h = \frac{1}{6}\ \pi\ AB^2\times h$$

$$\text{Vol. AMB} = \frac{1}{6}\ \pi\ AB^2\ h$$

—

Si a corda AB é parallela ao eixo KV, notamos que AB = h ; logo, neste caso,

$$\text{Vol. AMB} = \frac{1}{6}\ \pi\ h^3$$

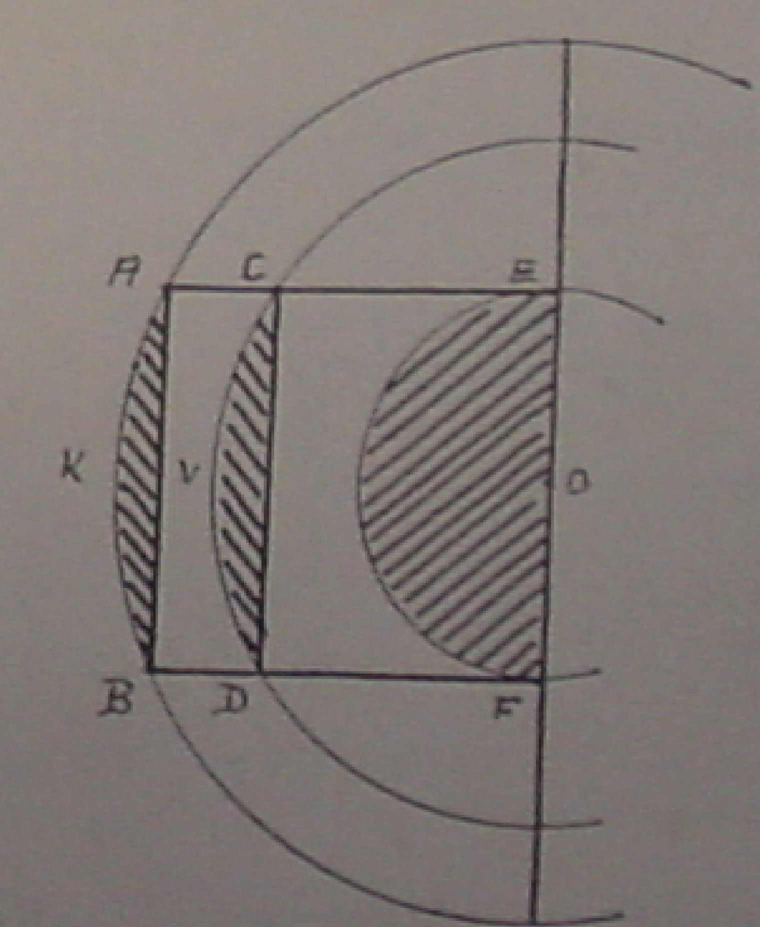
Si o segmento corresponde a um arco de 180°, h = 2 r = d ; temos :

$$\frac{1}{6}\ \pi\ d^3 = \frac{1}{6}\ \pi\times 8\times r^3 = \frac{8}{6}\ \pi\ r^3 = \frac{4}{3}\ \pi\ r^3$$

é o volume da esphera.

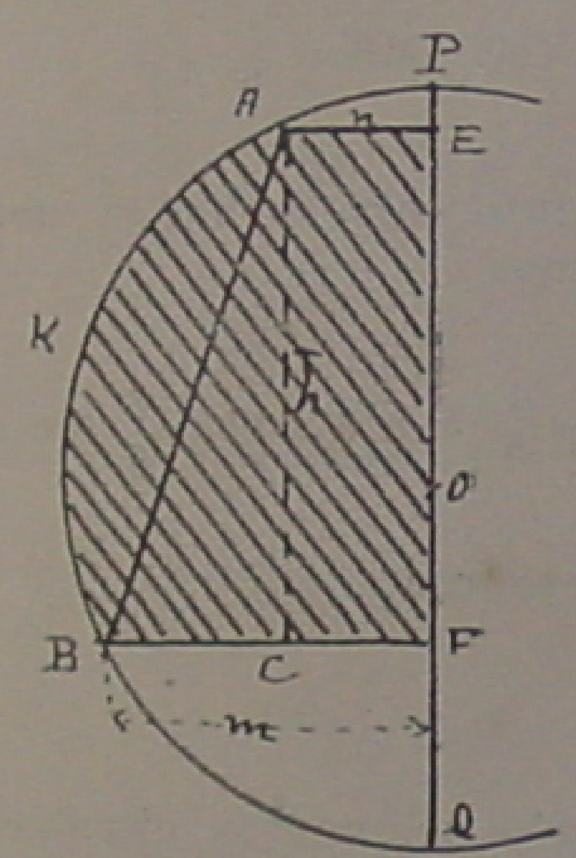
—

Considerando segmentos circulares AKB, CVD



concentricos, e taes que AB e CD sejam iguaes e parallelas ao eixo, os volumes formados são equivalentes á esphera que teria EF como diametro.

Segmento espherico de duas bases



$$\frac{1}{6}\pi AB^2 h = \frac{1}{6}\pi h (AC^2 + BC^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi h \left[h^2 + (m - n)^2\right] = \text{Vol. AKB}$$

é o volume do annel espherico:

$$\frac{1}{3}\pi h (m^2 + n^2 + mn) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi h (2 m^2 + 2 n^2 + 2 m n)$$

é o volume do tronco de cône formado por ABEF girando em torno de PQ.

Logo, o volume do segmento espherico será:

$$\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{6}\pi h (m^2 + n^2 - 2mn$$

$$+ 2m^2 + 2n^2 + 2mn) =$$

$$+ \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{6}\pi h (3m^2 + 3 n^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{3}{6}\pi h (m^2 + n^2) =$$

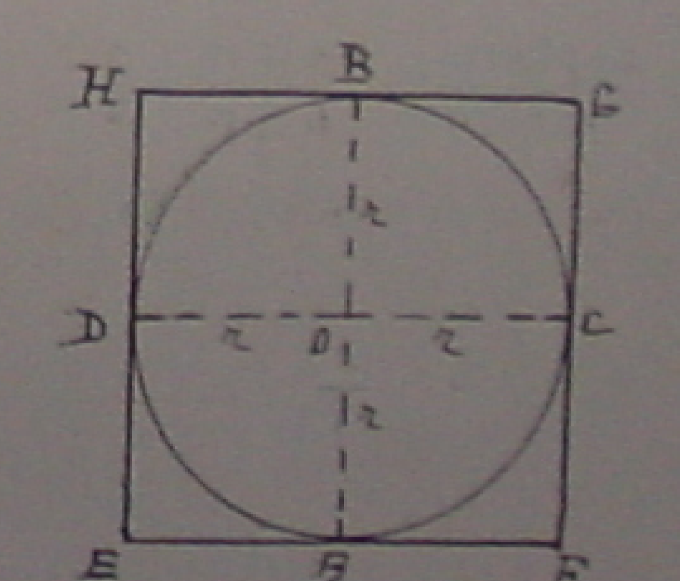
$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h (m^2 + n^2)$$

Segmento espherico de uma base

Neste caso $n = o$, e a formula que acabamos de deduzir reduz-se a:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h m^2$$

Theorema 175. — (**d'Archimedes.**) — Os volumes da esphera e do cylindro circumscripto estão na razão de 2 para 3.



$$\text{Vol. esphera} = \frac{4\,\pi\,r^3}{3}$$

$$\text{Vol. cylindro} = \pi\,r^2 \times 2r = 2\,\pi\,r^3$$

logo,

$$\frac{\text{Vol. esphera}}{\text{Vol. cylindro}} = \frac{\frac{4\,\pi\,r^3}{3}}{2\,\pi\,r^3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

—

AS AREAS DA ESPHERA E DO CYLINDRO CIRCUMSCRIPTO ESTÃO NA RAZÃO DE 2 PARA 3.

$$\text{Esphera} = 4\,\pi\,r^2$$

$$\text{Cylindro} = 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r \times 2r = 6\,\pi\,r^2$$

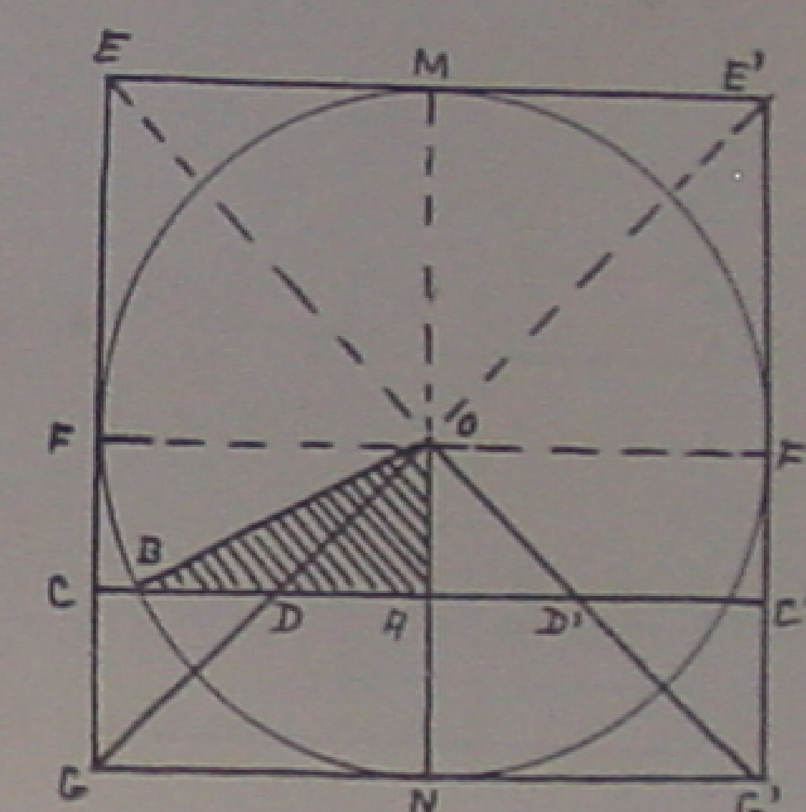
logo,

$$\frac{\text{Esphera}}{\text{Cylindro}} = \frac{4\,\pi\,r^2}{6\,\pi\,r^2} = \frac{2}{3}$$

—

1° Theorema dos tres corpos redondos

Seja O a esphera, GEE'G' o cylindro circumscripto á esphera e GOG' o cône.



Tracemos um plano secante CC'

A SECÇÃO ESPHERICA É IGUAL Á SECÇÃO CYLINDRICA MENOS A SECÇÃO CÔNICA.

O triangulo GNO é isoceles, logo GN = NO, e DA = AO.

No triangulo BOA, temos:

$$AB^2 = BO^2 - AO^2$$

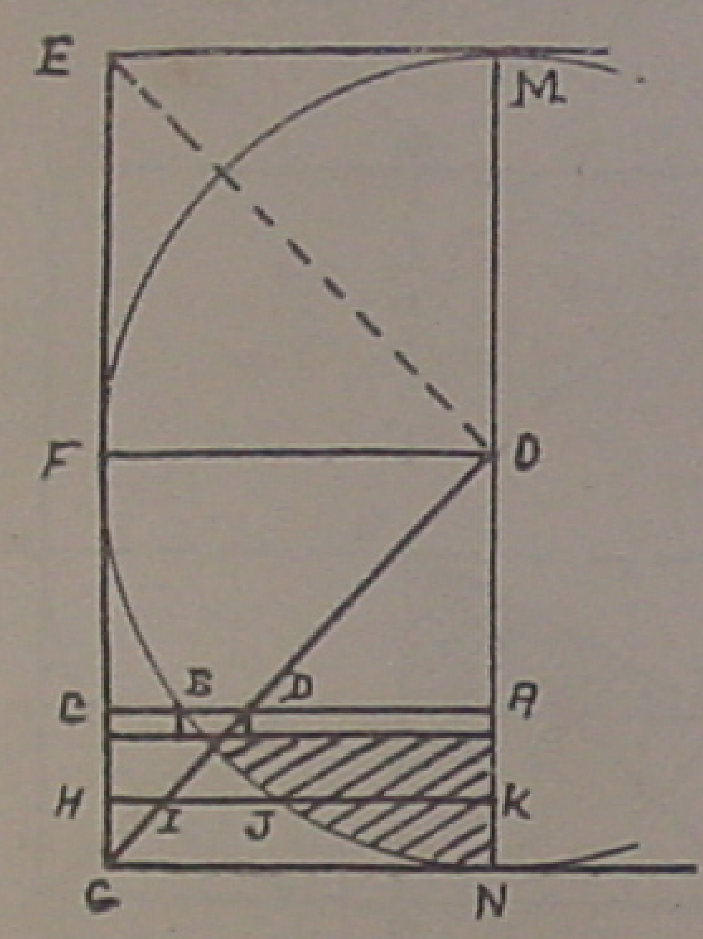
$$\text{mas } BO = OF = AC$$

logo,

$$\pi \times AB^2 = \pi \times AC^2 - \pi \times AD^2$$

2° Theorema dos tres corpos redondos

Consideremos duas secções parallelas aproxima-



das, em CA : supponhamos que fosse h a altura dessas secções. Teremos :

$$\pi\, AB^2\, h = \pi\, AC^2\, h - \pi\, AD^2\, h$$

Esta relação é exacta, seja qual fôr o numero de planos secantes ; logo, no limite, sommando todos os elementos analogos a

$\pi\, \overline{AB}^2\, h$, $\pi\, \overline{AC}^2\, h$, $\pi\, \overline{AD}^2\, h$, respectivamente, teremos :

$$\Sigma\, \pi\, AB^2\, h = \Sigma\, \pi\, AC^2\, h - \Sigma\, \pi\, AD^2\, h$$

O VOLUME DA ESPHERA É IGUAL Á DIFFERENÇA ENTRE O VOLUME DO CYLINDRO CIRCUMSCRIPTO E O VOLUME DO CÔNE INSCRIPTO.

$$\pi\, r^2 r - \frac{\pi\, r^2 r}{3} = \pi\, r^3 - \frac{\pi\, r^3}{3} = \frac{2\, \pi\, r^3}{3}$$

é a metade do volume da esphera. O seu volume total será, pois,

$$\frac{4}{3}\, \pi\, r^3$$

formula esta, que já estabelecemos.

Triangulos esphericos

TRIANGULO ESPHERICO é a porção da superficie da esphera limitada por tres arcos de circulos maximos.

Os arcos que limitam o triangulo espherico são os seus LADOS. Os ANGULOS do triangulo espherico são os angulos formados pelos seus lados. Os VERTICES são as intersecções dos lados.

POLYGONO ESPHERICO é a parte da superficie da esphera comprehendida entre muitos arcos de circulos maximos.

Um polygono espherico é CONVEXO quando um arco de circulo maximo não póde cortar o seu perimetro em mais de dois pontos.

Um POLYEDRO ESPHERICO é a porção da esphera limitada por muitos arcos de circulos maximos.

PYRAMIDE ESPHERICA é a porção da esphera comprehendida entre um polygono espherico e as faces do angulo solido obtido unindo os seus vertices ao centro da esphera.

Dois triangulos esphericos são POLARES um do outro quando os vertices do primeiro são os pólos respectivos dos lados do segundo, e reciprocamente quando os vertices do segundo são os pólos respectivos dos lados do primeiro.

Dois triangulos esphericos são SUPPLEMENTARES quando os angulos do primeiro têm para supplementos respectivos os lados do segundo, e reciprocamente quando os angulos do segundo têm para supplementos respectivos os lados do primeiro.

Um triangulo espherico póde ser RECTANGULO, ISOCELES, EQUILATERO, ESCALENO.

O triangulo rectangulo rectilineo não podia ter mais de um angulo recto, o triangulo espherico póde ter DOIS e até TRES ANGULOS RECTOS: chamam-se então bi-rectangulo e tri-rectangulo, respectivamente.

—

EM TODO TRIANGULO ESPHERICO, UM LADO QUALQUER É MENOR DO QUE A SOMMA DOS DOIS OUTROS.

Porque os lados do triangulo espherico considerado são os arcos que medem os angulos das faces do triedro correspondente. Ora, já vimos que, em todo triedro, uma face qualquer é menor do que a somma das duas outras.

EM TODO POLYGONO ESPHERICO, UM LADO QUALQUER É MENOR DO QUE A SOMMA DE TODOS OS OUTROS,

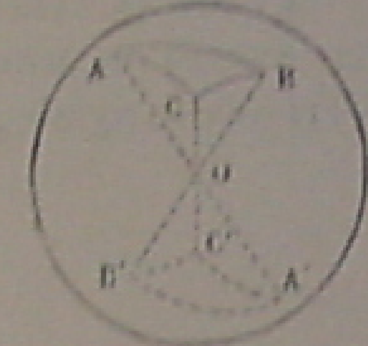
—

A SOMMA DOS TRES LADOS D'UM TRIANGULO ESPHERICO É MENOR DO QUE UMA CIRCUMFERENCIA DE CIRCULO MAXIMO.

—

Prolongando os raios OA, OB, OC, traçados pelos vertices d'um triangulo espherico ABC, até seu encontro em A', B' e C' com a superficie da esphera, obtemos os vertices A', B' e C' d'um segundo triangulo espherico, correspondente a um triedro OA'B'C' symetrico do triedro OABC.

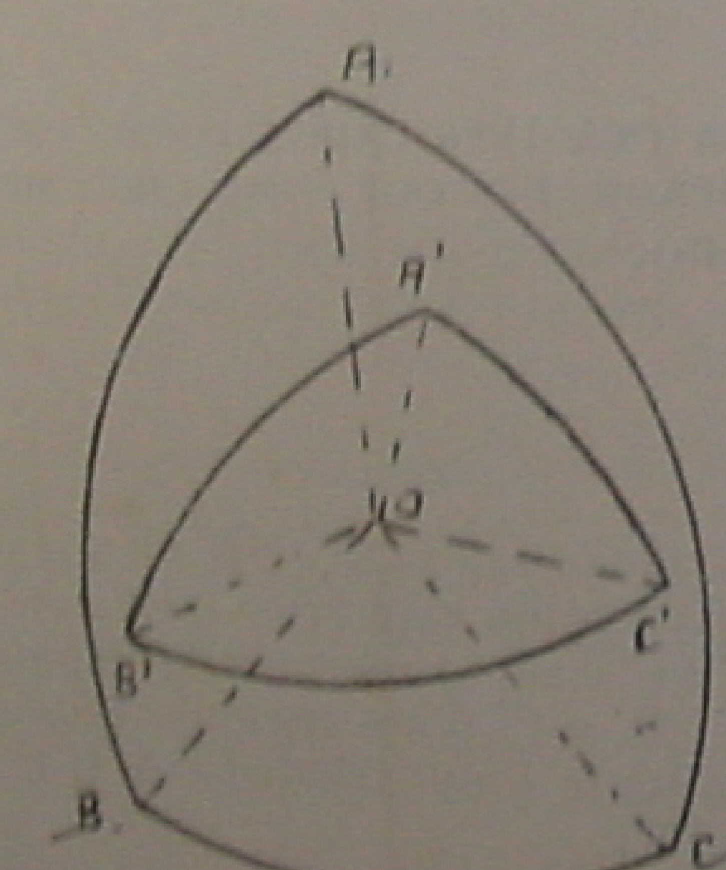
Os dois triangulos esphericos ABC, A'B'C, são symetricos: os seus elementos são todos respectivamente iguaes; entretanto, não são superponiveis; salvo o caso dos triangulos serem isoceles, porque então os triedros,



tendo duas faces iguaes, são superponiveis.

—

Um triangulo espherico A'B'C' é POLAR d'um outro triangulo espherico ABC, quando os pontos A, B e C são respectivamente os pólos dos lados B'C', A'C', e A'B' do outro, com a condição que o vertice A' esteja do mesmo lado que o vertice A, em relação ao lado BC, que o vertice B' esteja do mesmo lado que o vertice B, em relação ao lado AC, e que o vertice C' esteja do mesmo lado que o vertice C em relação ao lado AB.



Reciprocamente, o triangulo ABC é o POLAR do triangulo A'B'C'.

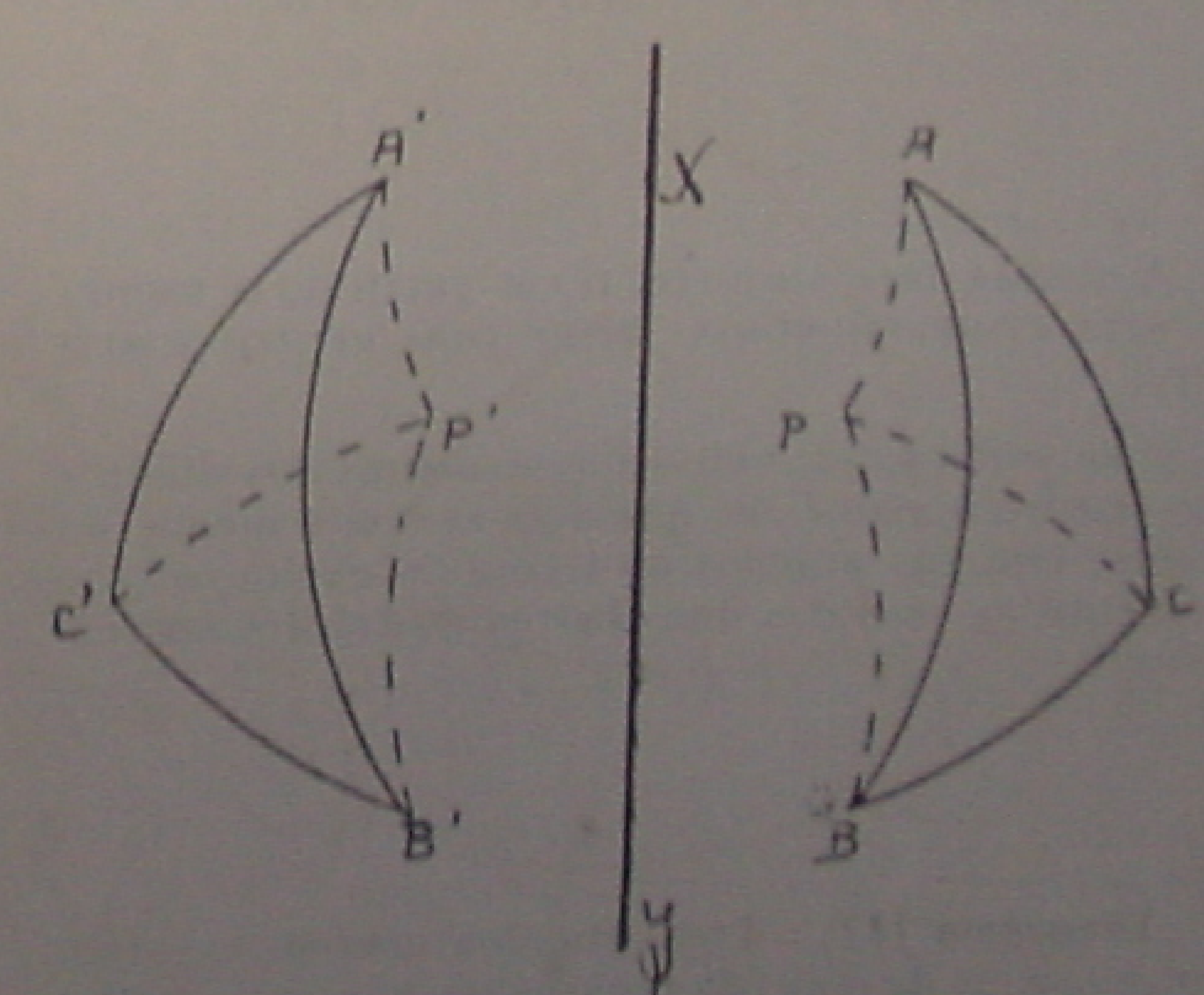
Os dois triedros OABC e OA'B'C', que correspondem aos triangulos considerados, são triedros supplementares; pois, os intervallos A'B e A'C sendo quadrantes, OA' é perpendicular ao plano BOC; pelo mesmo motivo, OB' é perpendicular ao plano AOC, e OC' ao plano AOB.

D'ahi resulta que cada angulo d'um dos triangulos ABC, A'B'C', é o supplemento do lado opposto do outro triangulo.

—

Theorema 176.— Dois triangulos esphericos symetricos são equivalentes.

Sejam ABC e A'B'C', dois triangulos esphericos symetricos, e P, o pôlo do circulo minimo que passa pelos pontos A, B e C; tracemos os arcos de circulos maximos PA, PB e PC. Tracemos o arco de circulo maximo C'P', que forma o angulo A'C'P' = ao angulo ACP; tomemos o arco C'P' = ao arco CP, e tracemos os arcos de circulos maximos A'P' e B'P'.



Os triangulos ACP e A'C'P' são iguaes: o angulo A'C'P' = ao angulo ACP, o lado AC = ao lado A'C' e ao lado CP = ao lado C'P'; logo, o angulo APC = ao angulo A'P'C', e o lado AP = ao lado A'P'.

Ora, os angulos ACB e A'C'B' são iguaes, como oppostos aos lados iguaes AB e A'B'.

Si subtrahissemos os angulos iguaes ACP e A'C'P', os restos, isto é, os angulos PCB e P'C'B' seriam iguaes.

Os lados PC e BC, sendo respectivamente iguaes aos lados P'C' e B'C', os triangulos PCB e P'C'B' têm todos os seus elementos iguaes; logo, o lado PB = ao lado P'B'.

Os triangulos PAB e P'A'B' têm, pois, os lados respectivamente iguaes; logo, são iguaes.

Os triangulos iguaes ACP e A'C'P', são isoceles e superponiveis, logo têm a mesma area.

O mesmo acontece aos triangulos PCB e P'C'B', e tambem aos triangulos APB e A'P'B'.

Logo, a area do triangulo ABC, igual á somma das areas dos triangulos APC e BPC, diminuida da area do triangulo APB, é igual á area do triangulo A'B'C', a qual vale A'C'P' + B'C'P' — A'P'B'.

—

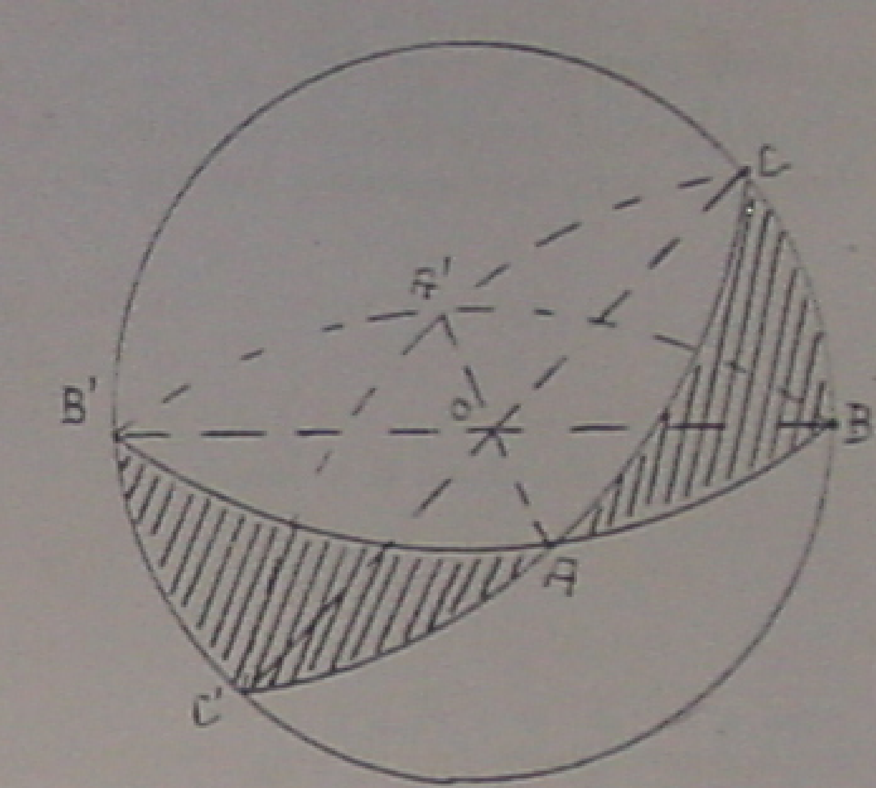
A SOMMA DOS ANGULOS D'UM TRIANGULO ESPHERICO ESTÁ COMPREHENDIDA ENTRE DOIS RECTOS E SEIS RECTOS.

Com effeito, já vimos que a somma dos diedros d'um triedro é maior do que dois rectos e menor do que seis. Ora, os angulos do triangulo espherico são justamente as medidas dos diedros do triedro correspondente.

—

Theorema 177.—Tres circulos maximos cortando-se, a somma de dois triangulos oppostos pelo vertice

equivale ao fuso total comprehendido entre esses dois arcos.



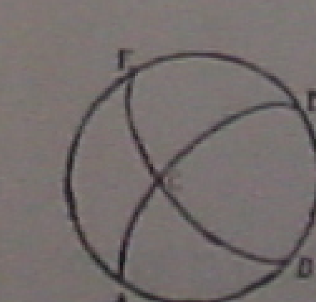
Sejam os triangulos ABC e AB'C' oppostos pelo vertice.

Já sabemos que o triangulo ABC equivale ao triangulo A'B'C'; logo:

AB'C' + ABC = AB'C' + A'B'C' = fuso AB'C'A'

—

Theorema 178.—A area d'um triangulo espherico está para a area da esphera, como o excesso da somma dos angulos do triangulo sobre dois angulos rectos, está para oito angulos rectos.



Seja ABC um triangulo espherico; tracemos a circumferencia do circulo maximo correspondente ao lado AB, e prolonguemos os lados AC e CB até seu encontro com essa circumferencia em E e em D.

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} ABC + BCD = \text{fuso } A \\ ABC + ACE = \text{fuso } B \\ ABC + ECD = \text{fuso } C \end{array}\right\}$$

Sommando membro a membro, e notando que a somma dos seis triangulos excede á superficie da meia esphera do dobro do triangulo ABC, temos:

$$ABC + \frac{1}{2} \text{ Sup. esphera} =$$

$$= \text{fuso } A + \text{fuso } B + \text{fuso } C$$

ou

$$ABC = \frac{\text{fuso } A + \text{fuso } B + \text{fuso } C}{2} -$$

$$- \frac{1}{4} \text{ sup. esphera}$$

Dividindo os dois membros d'esta igualdade pela superficie da esphera, e substituindo a razão de cada fuso sobre a superficie da esphera, pela razão do angulo do fuso sobre quatro rectos, temos (designando por A, B e C as razões dos angulos do triangulo A B C sobre o angulo recto):

$$\frac{ABC}{\text{Sup. esphera}} = \frac{A + B + C - 2}{8}$$

NOTA. — Substituindo a superficie da esphera por oito vezes a area d'um triangulo tri-rectangulo T, temos:

$$\frac{ABC}{T} = A + B + C - 2$$

A quantidade $A + B + C - 2$ é chamada *excesso espherico* do triangulo.

Tomando por unidade de superficie o triangulo tri-rectangulo ou a oitava parte da superficie da esphera, um triangulo terá por medida *a razão do seu excesso espherico sobre o angulo recto.*

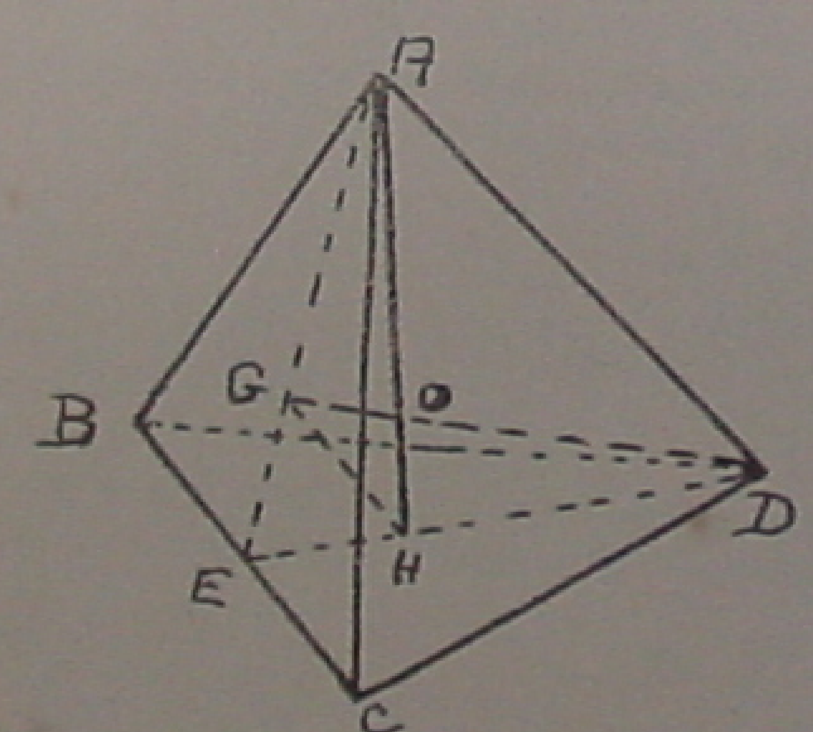
NOTA — *A area d'um polygono espherico convexo está para a area da esphera como o excesso da somma dos angulos d'esse polygono sobre tantas vezes dois angulos rectos quantos são os lados menos dois está para oito angulos rectos.*

Polyedros regulares

Problema. — Calcular o raio R e apothema r de um polyedro regular em funcção da aresta a.

Tetraedro. — Tracemos AE e DE, medianas das faces ABC e DBC, AH e DG, de modo que seja $EG = \frac{1}{3}$ EA e $EH = \frac{1}{3}$ ED; o ponto O, de encontro destas duas rectas, é o centro das duas espheras, a circumscripta e a inscripta, portanto

$$R = OA = OD, \ r = OH = OG$$



Os triangulos EGH e EAD são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{1}{3}$, logo $GH = \frac{1}{3}$ AD; dos tri-

angulos tambem semelhantes OGH e OAD tiramos portanto

$$OG = \frac{1}{3} \ OD \ \text{ou} \ r = \frac{1}{3} R \ \text{ou} \ R = 3r$$

Do triangulo rectangulo AOG, tiramos

$$\overline{AO}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{OG}^2$$

porém

$$AO = R, \ AG = \frac{2}{3} AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \ OG = r$$

logo

$$R^2 = \frac{a^2}{3} + r^2$$

ou, substituindo R por 3 r,

$$9r^2 = \frac{a^2}{3} + r^2 \quad \text{ou} \quad 8r^2 = \frac{a^2}{3}$$

donde

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

$$R = 3r = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6} \qquad (1)$$

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{6} \qquad (2)$$

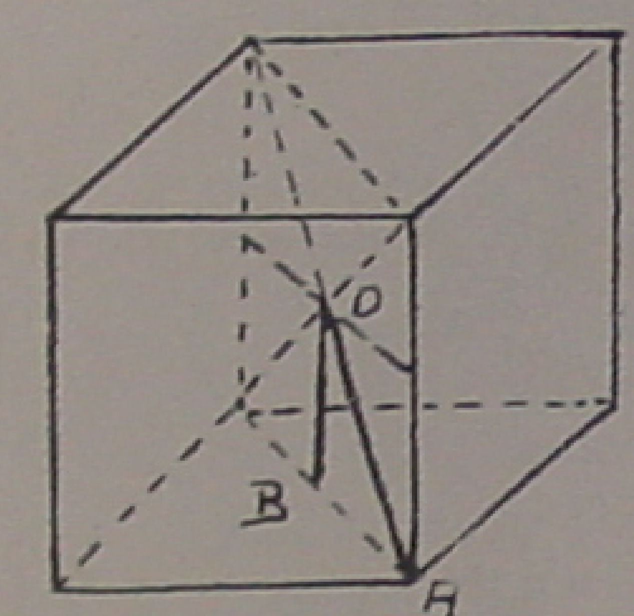
Hexaedro ou cubo. — O centro das espheras circumscripta e inscripta é o ponto de encontro das diagonaes, de modo que o raio é metade da diagonal e o apothema é metade do lado.

Assim, temos

$$R = OA, \; r = OB$$

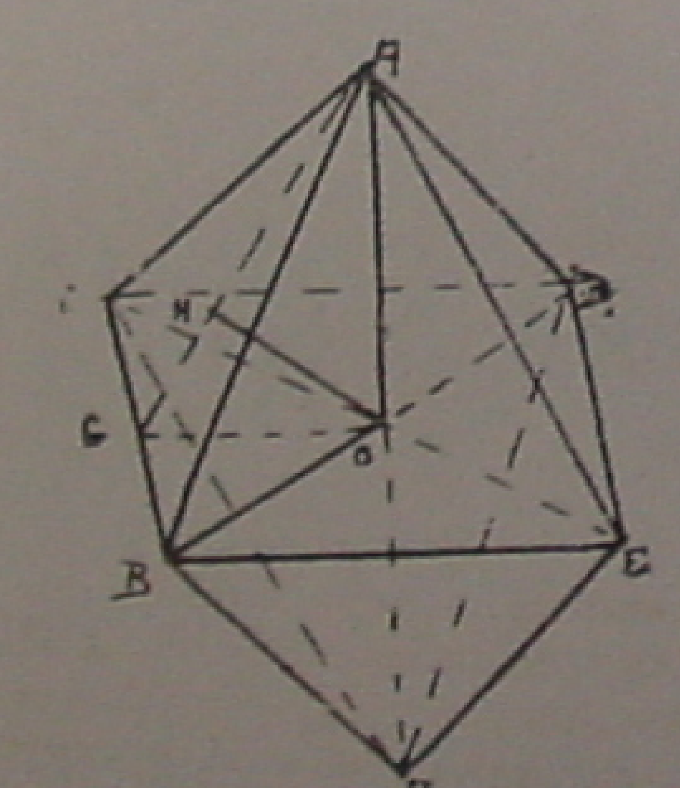
ou

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad r = \frac{a}{2}$$



$$\begin{cases} r = \frac{a}{2} & (3) \\ R = \frac{a}{2}\sqrt{3} & (4) \end{cases}$$

Octaedro. — O centro das espheras circumscripta



e inscripta é o ponto O, de encontro das rectas BD e CE, logo

$$R = OA = OB, \; r = OH$$

Do triangulo rectangulo isoceles AOB, tiramos

$$\overline{AB}^2 = 2\,\overline{OA}^2 \text{ ou } a^2 = 2R^2$$

donde

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Do triangulo rectangulo AOH, tiramos

$$\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{AH}^2 \text{ ou } R^2 - r^2 = \overline{AH}^2$$

Mas

$$AH = \frac{2}{3}AG = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

logo

$$R^2 - r^2 = \frac{a^2}{3} \text{ donde } r^2 = R^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}$$

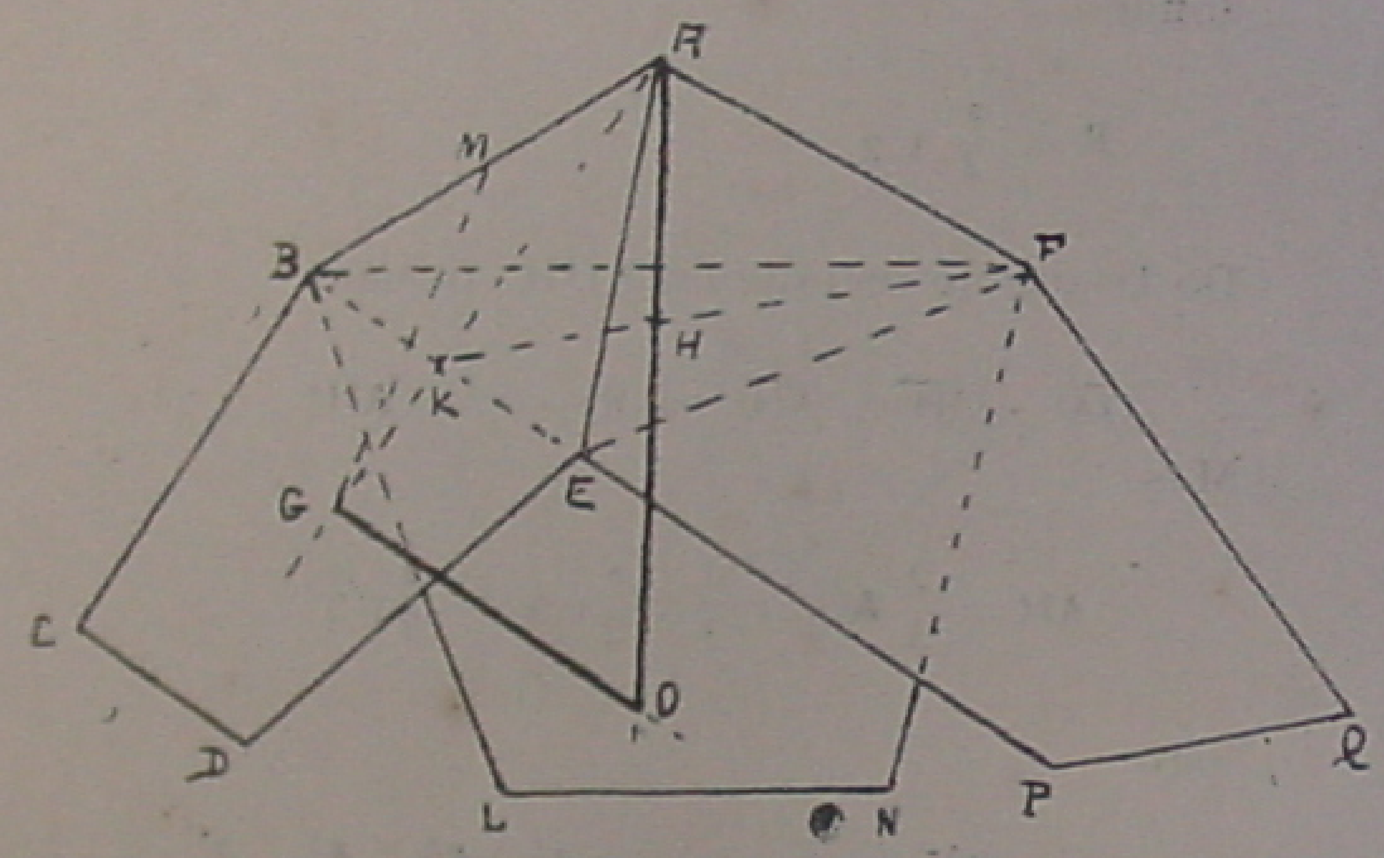
portanto

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

$$\begin{cases} a = \frac{a}{6}\sqrt{6} & (5) \\ R = \frac{a}{2}\sqrt{2} & (6) \end{cases}$$

Dodecaedro. — Seja ABEF um angulo solido formado pelas tres faces ABCDE, ABLNF e AEPQF do dodecaedro, grupadas em torno do vertice A. Seja G o centro de uma das faces e H e centro do triangulo equilatero BEF ; as duas rectas HO e GO, perpendiculares aos planos da face e do triangulo e tiradas pelos respectivos centros, encontram-se no ponto O, que é o centro das duas espheras a circumscripta e a inscripta; assim

$$R = OA, \quad r = OG$$



Dos triangulos semelhantes OGA e AHK, tiramos.

$$\frac{OA}{OG} = \frac{AK}{HK} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{r} = \frac{AK}{HK}$$

Do triangulo rectangulo AKB, tiramos

$$AK = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BK}^2}$$

Do triangulo equilatero BEF, tiramos

$$HK = \frac{1}{3}\ KF = \frac{1}{3}\ BK\sqrt{3}$$

logo

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BK}^2}}{\frac{1}{3}\ BK\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\overline{AB}^2 - \overline{BK}^2}{\frac{\overline{BK}^2}{3}}} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{r} = \sqrt{3\left(\frac{AB}{BK}\right)^2 - 3}$$

Sendo M o meio de AB, temos, em virtude da semelhança dos triangulos rectangulos ABK e AGM, que têm um angulo commum em A,

$$\frac{AB}{BK} = \frac{AG}{GM}$$

Mas AG é o raio e GM é o apothema da face ABCDE, portanto

$$GM = \frac{AG}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

logo

$$\frac{AB}{BK} = \frac{AG}{\frac{AG}{4}(\sqrt{5}+1)} = \frac{4}{\sqrt{5}+1} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{BK} = \sqrt{5} - 1$$

portanto

$$\frac{R}{r} = \sqrt{3(\sqrt{5}-1)^2 - 3} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$$

Do triangulo rectangulo AGO, tiramos

$$\overline{OA}^2 - \overline{OG}^2 = \overline{AG}^2 \quad \text{ou} \quad R^2 - r^2 = \overline{AG}^2$$

Mas, sendo AG o apothema do pentagono de lado a, aresta do solido, temos

$$\overline{AG}^2 = \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})$$

logo

$$R^2 - r^2 = \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})$$

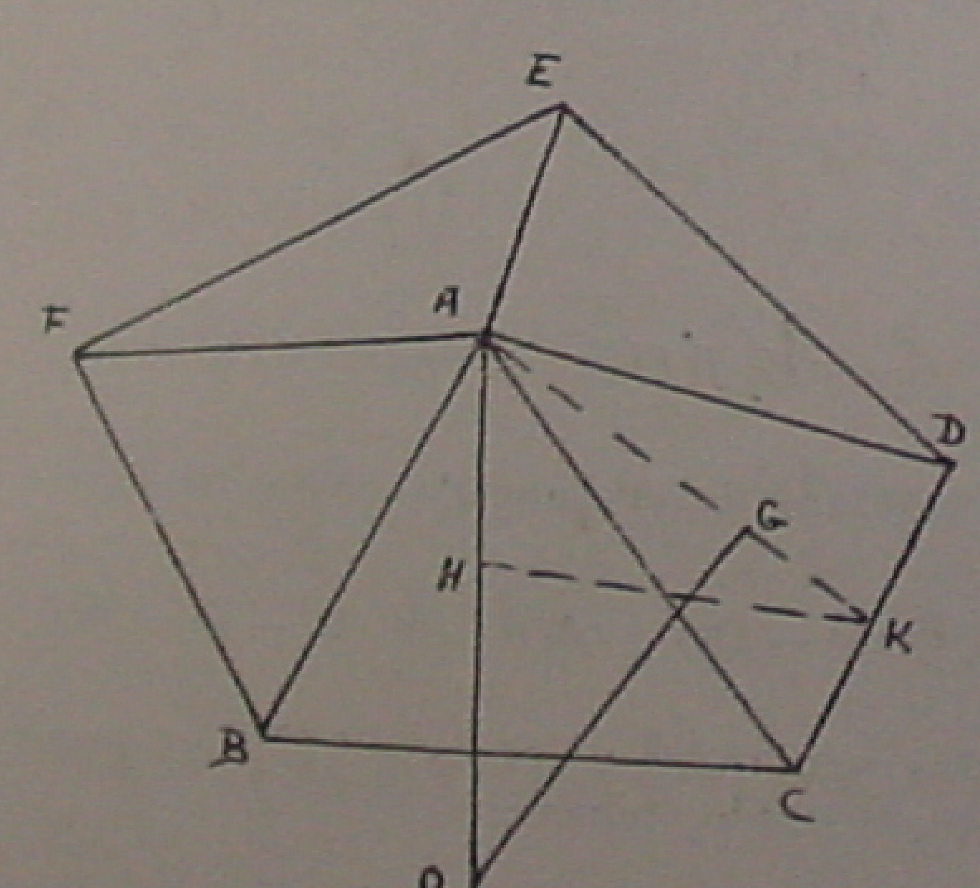
Agora, para obtermos R e r, basta resolver o systema

$$\begin{cases} \dfrac{R}{r} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}} \\ R^2 - r^2 = \dfrac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5}) \end{cases}$$

Obtemos facilmente

$$\begin{cases} r = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} & (7) \\ R = \dfrac{a}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{3}) & (8) \end{cases}$$

Icosaedro. — Seja ABCDEF um angulo solido formado pelas cinco faces ABC, ..., AFB, do icosae-



dro, grupadas em torno do vertice A. Seja G o centro de

uma das faces e H o do pentagono BCDEF; as rectas AO e GO, perpendiculares aos planos dos dois polygonos e tiradas pelos respectivos centros, encontram-se no ponto O, que é o centro das duas espheras, portanto

$$R = OA$$
$$r = OG$$

Dos triangulos rectangulos AOG e AHK, semelhantes por terem um angulo commum, tiramos

$$\frac{R}{r} = \frac{AK}{HK}$$

mas

$AK = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, por ser a mediana do triangulo

$HK = \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$, por ser o apothema do pentagono;

logo

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1} \quad \text{ou} \quad \frac{R}{r} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$$

Do triangulo rectangulo AOG, tiramos

$$R^2 - r^2 = \overline{AG}^2$$

mas

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad \overline{AG}^2 = \frac{a^2}{3}$$

logo,

$$R^2 - r^2 = a^2$$

Resolvendo, pois, o systema

$$\begin{cases} \dfrac{R}{r} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}} \\ R^2 - r^2 = \dfrac{a^2}{3} \end{cases}$$

achamos facilmente

$$\begin{cases} r = \dfrac{a}{12}(3\sqrt{3} + \sqrt{15}) & (9) \\ R = \dfrac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} & 0 \end{cases}$$

—

Problema. — Calcular a AREA S de um polyedro regular: a) em funcção da aresta a; b) em funcção do apothema r; c) em funcção do raio R.

—

Formula geral. — Designando por n o numero de faces e por s a area de uma das faces, temos

$$S = n\,s$$

Tetraedro. — O tetraedro tem 4 faces, que são triangulos equilateros, de lado a, logo

$$n = 4 \qquad s = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

portanto

$$S = 4 \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$$

ou

$$S = a^2\sqrt{3}$$

Das formulas (1) e (2) tiramos

$$a = 2\,r\sqrt{6} = \frac{2\,R}{3}\sqrt{6} \qquad \text{(I)}$$

portanto

$$a^2 = 24\,r^2 = \frac{8}{3} \times R^2 \qquad \text{(II)}$$

logo

$$S = 24\,r^2\sqrt{3} = \frac{8}{3}\,R^2\sqrt{3} \qquad \text{(III)}$$

Então

$$\begin{cases} S = a^2\sqrt{3} & (11) \\ S = 24\,r^2\sqrt{3} & (12) \\ S = \dfrac{8}{3}\,R^2\sqrt{3} & (13) \end{cases}$$

—

Hexaedro ou cubo. — O cubo tem 6 faces, que são quadrados de lado a, logo

$$n = 6 \quad s = a^2$$

portanto

$$S = 6\,a^2$$

Das formulas (3) e (4) tiramos

$$a = 2\,r = \frac{2}{3}\,R\sqrt{3} \qquad \text{(III)}$$

portanto

$$a^2 = 4\,r^2 = \frac{4}{3}\,R^2 \qquad \text{(IV)}$$

logo

$$S = 6 . 4 r^2 = 6 . \frac{4}{3} R^2$$

ou

$$S = 24 r^2 = 8 r^2$$

Então

$$\begin{cases} S = 6 a^2 & (14) \\ S = 24 r^2 & (15) \\ S = 8 R^2 & (16) \end{cases}$$

—

Octaedro. — O octaedro tem oito faces, que são triangulos equilateros, de lado a, logo

$$n = 8 \qquad S = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

porlanto

$$S = 8 \times \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = 2 a^2 \sqrt{3}$$

ou

$$S = 2 a^2 \sqrt{3}$$

Das formulas (5) e (6) tiramos

$$a = r \sqrt{6} = R \sqrt{2} \qquad \text{(V)}$$

portanto

$$a^2 = 6 r^2 = 2 R^2 \qquad \text{(VI)}$$

logo

$$S = 2 . 6r^2 . \sqrt{3} = 2 . 2 R^2 \sqrt{3}$$

ou

$$S = 12 r^2 \sqrt{3} = 4 R^2 \sqrt{3}$$

Então

$$\begin{cases} S = 2 a^2 \sqrt{3} & (17) \\ S = 12 r^2 \sqrt{3} & (18) \\ S = 4 R^2 \sqrt{3} & (19) \end{cases}$$

—

Dodecaedro. — O dodecaedro tem 12 faces, que são pentagonos regulares de lado a, logo

$$n = 12 \qquad s = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

portanto

$$S = 12 \times \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

ou

$$S = 3 a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Das formulas (7) e (8) tiramos

$$a = r \sqrt{2 (25 - 11\sqrt{5}} = \frac{R}{3} \sqrt{6 (3 - \sqrt{5})}$$

portanto

$$a^2 = 2r^2 (25 - 11 \sqrt{5}) = \frac{2}{3} R^2 (3 - \sqrt{5}) \qquad \text{(VIII)}$$

logo

$$S = 3 \times 2r^2 (25 - 11\sqrt{5}) \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} =$$

$$= 3 \times \frac{2}{3} R^2 (3 - \sqrt{5}) \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

ou

$$S = 30 r^2 \sqrt{2 (65 - 29\sqrt{5})} = 2 R^2 \sqrt{10 (5 - \sqrt{5}}$$

Então

$$\begin{cases} S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} & (20) \\ S = 30r^2\sqrt{2\,(65 - 29\sqrt{5})} & (21) \\ S = 2R^2\sqrt{10\,(5 - \sqrt{5})} & (22) \end{cases}$$

—

Icosaedro.— O icosaedro tem 20 faces, que são triangulos equilateros, de lado a, logo

$$n = 20 \qquad s = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

portanto

$$S = 20 \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

ou

$$S = 5a^2\sqrt{3}$$

Das formulas (9) e (10) tiramos:

$$a = r\sqrt{6(7 - 3\sqrt{5})} = \frac{R}{5}\sqrt{10\,(5 - \sqrt{5})} \qquad (IX)$$

portanto

$$a^2 = 6r^2\,(7 - 3\sqrt{5}) = \frac{2}{5}R^2\,(5 - \sqrt{5}) \qquad (X)$$

logo

$$S = 5 \times 6r^2\,(7 - 3\sqrt{5}) \times \sqrt{3} = 5 \times \frac{2}{5}R^2\,(5 - \sqrt{5})\sqrt{3}$$

ou

$$S = 30r^2\,(7\sqrt{3} - 3\sqrt{15}) = 2R^2\,(5\sqrt{3} - \sqrt{15})$$

Então

$$\begin{cases} S = 5a^2\sqrt{3} & (23) \\ S = 30\,r^2\,(7\sqrt{3} - 3\sqrt{15}) & (34) \\ S = 2R^2\,(5\sqrt{3} - \sqrt{15}) & (25) \end{cases}$$

—

Problema.— Calcular o VOLUME V de um polyedro regular: a) em funcção da aresta a; b) em funcção do apothema r: c) em funcção do raio R.

—

Formula geral. — O volume de um polyedro regular é igual a um terço do producto de sua área por seu apothema.

Designando o volume por V, a área por S e o apothema por r, temos:

$$V = \frac{Sr}{3}$$

Para deduzir esta formula basta decompôr o polyedro em pyramides iguaes, tendo para vertice commum O CENTRO e para base as FACES do polyedro, a altura destas pyramides é o apothema do polyedro.

Designando por v o volume de uma destas pyramides e n o numero de faces do polyedro, temos:

$$V = n\,v$$

mas, o volume de uma pyramide é igual a um terço da área da base, que designaremos por s, multiplicada pela altura, logo

$$v = \frac{1}{3}\,sr$$

donde

$$V = \frac{1}{3}\, n \times s \times r$$

porém

$$n \times s = S$$

logo

$$V = \frac{1}{3}\, Sr \quad \text{ou} \quad V = \frac{Sr}{3}.$$

—

Tetraedro.— No tetraedro temos:

$$S = a^2 \sqrt{3} = 24r^2 \sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

logo

$$V = \frac{1}{3} .\, a^2 \sqrt{3} .\, \frac{a}{12}\sqrt{6} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

ou

$$V = \frac{1}{3}\, 24r^2 \sqrt{3} .\, r = 8\, r^3 \sqrt{3}$$

e como

$$a = \frac{2\,R}{3}\sqrt{6} \quad \text{(formula I)},$$

portanto

$$a^3 = \frac{16}{9}\, R^3 \sqrt{6}$$

virá tambem

$$V = \frac{1}{12} .\, \frac{16}{9}\, R^3 \sqrt{6}\, \sqrt{2} = \frac{8}{27}\, R^3 \sqrt{3}$$

Então

$$\begin{cases} V = \dfrac{a^3}{12}\sqrt{2} & (26) \\ V = 8r^3 \sqrt{3} & (27) \\ V = \dfrac{8}{27}\, R^3 \sqrt{3} & (28) \end{cases}$$

—

Hexaedro ou cubo.— No cubo, temos:

$$S = 6\, a^2 = 24\, r^2$$

$$r = \frac{a}{2}$$

logo,

$$V = \frac{1}{3} \times 6\, a^2 \times \frac{a}{2} = a^3$$

ou

$$V = \frac{1}{3}\, 24\, r^2\, r = 8\, r^3$$

e como,

$$a = \frac{2}{3}\, R \sqrt{3},$$

portanto

$$a^3 = \frac{8}{9}\, R^3 \sqrt{3}$$

virá tambem

$$V = \frac{8}{9}\, R^3 \sqrt{3}$$

Então

$$\begin{cases} V = a^3 & (29) \\ V = 8\,r^3 & (30) \\ V = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3} & (31) \end{cases}$$

—

Octaedro.— No octaedro, temos

$$S = 2a^2 \sqrt{3} = 12\,r^2 \sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{6} \sqrt{6}$$

logo

$$V = \frac{1}{3}\, 2\,a^2 \sqrt{3}\, \frac{a}{6} \sqrt{6} = \frac{a^3}{3} \sqrt{2}$$

e

$$V = \frac{1}{3} \times 12\,r^2 \sqrt{3} \times r = 4\,r^3 \sqrt{3}$$

e como

$$a = R \sqrt{2} \qquad \text{(form. V),}$$

portanto

$$a^3 = 2\,R^3 \sqrt{2}$$

virá tambem

$$V = \frac{1}{3}\, 2\,R^3 \sqrt{2} = \frac{4}{3} R^2$$

Então

$$\begin{cases} V = \frac{a^3}{3} \sqrt{2} & (32) \\ V = 4\,r^3 \sqrt{3} & (33) \\ V = \frac{4}{3} R^3 & (34) \end{cases}$$

Dodecaedro.— No dodecaedro, temos

$$S = 3\,a^2 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}} = 30\,r^2 \sqrt{2\,(65 - 29 \sqrt{5})}$$

e

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{25 + 11 \sqrt{5}}{10}}$$

logo

$$V = \frac{1}{3}\, 3\,a^2 \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}} \,.\, \frac{a}{2} \sqrt{\frac{25 + 11 \sqrt{5}}{10}} =$$

$$= \frac{a^3}{4} \sqrt{10\,(47 + 21 \sqrt{5})}$$

mas,

$$10\,(47 + 21 \sqrt{5}) = 470 + 210 \sqrt{5} =$$

$$= 225 + 210 \sqrt{5} + 245 =$$

$$= 15^2 + 2 \times 15 \times 7 \sqrt{5} + 7^2 (\sqrt{5})^2 =$$

$$= (15 + 7 \sqrt{5})^2$$

logo

$$V = \frac{a^3}{4} (15 + 7 \sqrt{5})$$

e

$$V = \frac{1}{3} \,.\, 30\,r^2 \sqrt{2\,(65 - 29 \sqrt{5})} \times r = 10\,r^3 \sqrt{2\,(65 - 29 \sqrt{5})}$$

e como

$$a = \frac{R}{3} \sqrt{6\,(3 - \sqrt{5})} \qquad \text{(form. VII),}$$

portanto

$$a^3 = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3\,(9 - 4 \sqrt{5})}$$

logo

$$V = \frac{1}{4} \,.\, \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3\,(9 - 4 \sqrt{5})} \times \sqrt{10\,(47 + 21 \sqrt{5})} =$$

$$= \frac{2}{9} R^3 \sqrt{33\,(3 + \sqrt{5})}$$

Então

$$\begin{cases} V = \dfrac{a^3}{4}\sqrt{10\,(47 + 21\sqrt{5})} & (35) \\ V = 10\,r^3\sqrt{2\,(65 - 29\sqrt{5})} & (36) \\ V = \dfrac{2}{9}\,R^3\sqrt{30\,(3 + \sqrt{5})} & (37) \end{cases}$$

—

Icosaedro. — No icosaedro, temos:

$$S = 5\,a^2\sqrt{3} = 30\,r^2\,(7\sqrt{3} - 3\sqrt{15})$$

$$r = \frac{a}{12}\,(3\sqrt{3} + \sqrt{15})$$

logo

$$V = \frac{1}{3}\cdot 5\,a^2\sqrt{3}\cdot\frac{a}{12}\,(3\sqrt{3} + \sqrt{15}) =$$

$$= \frac{5}{12}\,a^3\,(3 + \sqrt{5})$$

e

$$V = \frac{1}{3}\,30\,r^2\,(7\sqrt{3} - 3\sqrt{15})\,r = 10\,r^3\,(7\sqrt{3} - 3\sqrt{15})$$

e como

$$a = \frac{R}{5}\sqrt{10\,(5 - \sqrt{5})}$$

portanto

$$a^3 = \frac{8}{5}\,R^3\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

temos,

$$V = \frac{5}{12}\cdot\frac{8}{5}\,R^3\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \times (3 + \sqrt{5}) =$$

$$= \frac{2}{3}\,R^3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Então

$$\begin{cases} V = \dfrac{5}{12}\,a^3\,(3 + \sqrt{5}) & (38) \\ V = 10\,r^3\,(7\sqrt{3} - 3\sqrt{15}) & (39) \\ V = \dfrac{2}{3}\,R^3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} & (40) \end{cases}$$

Problemas para resolver

1 — Calcular a superficie lateral d'um prisma hexagonal regular, cuja altura é $6^m,25$ e o lado da base é $0^m,81$.

2 — Calcular a superficie total d'um tetraedro regular, cuja altura é $3^m,62$.

3 — Calcular a area d'um octaedro regular cuja aresta é 6^m.

4 — Calcular a area d'um octaedro regular inscripto n'uma esphera de raio 10^m.

5 — Calcular a area d'um tetraedro regular inscripto n'uma esphera de raio 6^m.

6 — Calcular a area d'um dodecaedro regular, cuja aresta é igual a 3^m.

7 — Calcular a area d'um icosaedro regular, cuja aresta é igual a $2^m,25$.

8 — Calcular a superficie convexa d'um cylindro recto, cuja altura é $3^m,5$, e cujo raio da base é 10^m.

9 — Calcular a altura d'um cylindro recto, cuja superficie é 16^{m2}, e cujo raio da base é $2^m,30$.

10 — Calcular o raio da base d'um cylindro recto, cuja superficie total é 2^{m2}, e a altura 3^m.

11 — Calcular a superficie convexa d'um cône recto, cuja altura é $4^m,5$ e a geratriz $6^m,2$.

12 — Calcular a superficie convexa d'um cône recto, cuja altura é 5^m e o raio da base é 4^m.

13 — Calcular o raio da base d'um cône recto, cuja superficie é 20^{m2}, e altura 6^m.

14 — Calcular a superficie lateral d'um tronco de cône, cujo lado é 14^m, e os raios das bases $8^m,5$ e $4^m,7$.

15 — Sabendo-se que a area lateral d'um tronco de cône é $56^{m2},52$ seu lado 3^m e o raio d'uma das bases 5^m: pede-se o raio da outra base.

16 — Qual é a circumferencia do circulo maximo d'uma esphera que tem 2^{m3} de volume.

17 — Calcular o volume da cunha espherica, cujo diedro é de 31° 25' 4", 2 e o raio da esphera é 5^m.

18 — Sabendo-se que o volume d'um tronco de cône é 820^{m3}, sua altura 6^m e o raio da base inferior 8^m, pede-se para calcular o raio da base superior.

19 — Calcular o volume d'um tronco de cône, cuja altura é 8^m, e cujos raios das bases são 7^m e 4^m.

20 — Calcular as dimensões do litro, sabendo-se que elle tem a forma d'um cylindro recto, cuja altura é o dobro do raio da base.

21 — Calcular a aresta d'um tetraedro regular, cujo volume é 26^{m3}.

22 — Calcular o volume d'uma pyramide regular triangular, cuja aresta é 6^m e o lado da base $2^m,8$.

23 — Calcular o volume d'um prisma recto, que tem por base um triangulo equilatero de $2^m,25$ de lado, e cuja altura é igual ao lado da base.

24 — Qual é altura da zôna espherica, cuja superficie é $2^{m2},45$ e o raio da esphera 3^m.

25 — Calcular a circumferencia d'um circulo maximo, sendo 5^{m2} a superficie da esphera.

26 — Calcular a area do fuso espherico, cujo diedro é de 28° 49' 3", 2 e o raio da esphera 5^m.

27 — Calcular as tres arestas d'um parallelepipedo rectangulo, sabendo-se que ellas são proporcionaes aos numeros 3, 5 e 7, e que o seu volume é 58^{m3}.

28 — Calcular o volume d'um prisma recto cuja altura

$5^{m},25$ e a base um octogono regular de $0^{m},71$ de lado.

29 — Calcular o volume d'um octaedro regular inscripto d'uma esphera de 6^{m} de raio.

30 — Calcular o volume d'um dodecaedro regular, sabendo-se que a aresta é igual a 2^{m}.

31 — Calcular o volume d'um icosaedro regular, cuja aresta é igual a 1^{m}.

32 — Calcular o raio da esphera circumscripta a um tetraedro regular cuja aresta é igual a 2^{m}.

33 — Calcular o volume do sector espherico, cujo raio é $3^{m},2$ e cuja base tem $2^{m},15$ de altura.

34 — Partindo da definição do metro, calcular o raio, a area e o volume da terra supposta espherica.

35 — Calcular o volume d'um tronco de prisma cujá base é um triangulo equilatero inscripto n'um circulo de area de 40^{m2}, e cujas arestas são respectivamente o lado do pentagono regular inscripto n'um circulo de raio de 6^{m}, o lado do decagono regular inscripto n'um circulo cuja area é 50^{m2}, e a 3^{a} aresta é igual ao maior segmento d'uma recta de 15^{m} dividida em meia e extrema razão.

36 — Calcular o volume d'um tronco de prisma, sabendo-se que a area da secção recta é $25^{m2},251$ e que as aresta são 6^{m}, 10^{m}, e 12^{m} respectivamente.

37 — Calcular o volume d'uma esphera inscripta n'um cylindro equilatero de 4^{m} de altura.

38 — Calcular o volume formado por um triangulo equilatero de 1^{m2} de area, girando em torno de um de seus lados.

38 — Calcular o volume do tronco de cône, cuja altura é igual ao lado do pentagono regular estrellado inscripto n'um circulo de 80^{m2} de area, e cujas bases são circulos equivalentes respectivamente á area d'um quadrado inscripto n'um circulo de 20^{m} de raio e á area de um triangulo equilatero cujo lado é o maior segmento d'uma recta de 300^{m} dividida em média e extrema razão.

40 — Calcular o volume e a area do tetraedro regular inscripto n'uma esphera de 10^{m} de raio.

41 — Calcular a area e o volume do tetraedro regular, cuja aresta é igual ao lado do decagono regular inscripto n'um circulo em que o lado do pentagono regular inscripto vale 2^{m}

42 — Calcular a superficie lateral, a superficie total e o volume d'um cône circular recto, cuja altura é 3^{m} e cuja geratriz é igual a 5^{m}.

43 — O volume d'uma esphera sendo igual a 14^{m3}, calcular o volume do cylindro circumscripto a essa esphera.

44 — Sabendo-se que a superficie total d'um cylindro é de 12^{m2}, pede-se para calcular o volume da esphera inscripta n'esse cylindro.

45 — Calcular o volume d'um cône cuja altura é igual ao lado d'um decagono circumscripto n'um circulo no qual está inscripto um triangulo equilatero cuja area é de 104 metros quadrados; o raio da base circular é igual ao lado do pentagono regular estrellado inscripto n'um circulo no qual está inscripto um quadrado cuja diagonal é igual a 20^{m}.

46 — Calcular a superficie d'um octaedro, sabendo-se que a aresta é igual ao lado do octogono regular estrellado inscripto n'um circulo cuja area é 82 metros quadrados.

47 — Calcular o volume do tetraedro regular, sabendo-se que a aresta é igual a 2^{m}.

48 — Calcular a superficie lateral d'uma pyramide regular hexagonal cuja base é inscriptivel n'um circulo de 5^{m} de raio e cuja altura é de 50^{m}

49 — Calcular o volume do prisma obliquo cuja altura media vale 5^{m} e cuja secção recta tem por medida $8^{m3},35$.

50 — Calcular o volume do tetraedro regular cuja aresta é igual ao lado do pentagono regular estrellado inscripto n'um circulo de 3^{m} de raio.

51 — Calcular a superficie total do tetraedro regular do qual cada face é equivalente ao circulo de 5^m de raio.

52 — Calcular a superficie d'um hexaedro regular, sabendo-se que a aresta é igual ao lado do octogono regular inscripto n'um circulo de area 76 metros quadrados.

53 — Calcular a superficie lateral d'um cône cujo raio da base é o maior segmento d'uma recta de 20^m dividida em média e extrema razão, e cuja altura é o lado d'um hexagono regular inscripto n'um circulo de raio 30^m.

54 — Calcular o volume do cylindro, cuja base tem como raio o lado do triangulo equilatero inscripto n'um circulo de 10^m de raio, e cuja altura é igual ao raio do circulo circumscripto a um quadrado de 50^m de lado.

55 — Calcular o volume d'um cône cujo raio da base é igual ao lado do decagono regular inscripto n'um circulo de 14^m de raio, e cuja altura é o maior segmento d'uma recta de 60^m dividida em média e extrema razão.

56 — Calcular o volume d'um cylindro obliquo cuja geratriz é o lado do decagono regular estrellado inscripto n'um circulo de 40^m de raio, e cuja secção recta é um circulo cujo raio é igual ao lado do pentadecagono regular convexo inscripto n'um circulo de 150^m de raio.

57 — A area d'uma esphera sendo de 81 metros quadrados, pede-se para calcular o volume do octaedro regular inscripto na referida esphera.

58 — O volume d'uma esphera sendo de 147 metros cubicos, pede-se para calcular a area do octaedro regular inscripto na referida esphera.

59 — Calcular o volume do segmento espherico, cujas bases são respectivamente 169^{m2} e 144^{m2}, e cuja

projecção do lado obliquo sobre o diametro é igual a 5^m.

60 — Calcular o volume e a area do icosaedro regular cuja aresta é 6^m.

61 — Calcular o diametro da esphera cuja area equivale á area d'um rectangulo cujos lados são respectivamente: o lado do decagono regular convexo inscripto n'um circulo de raio 5^m, e o apothema do pentagono regular convexo inscripto n'um circulo cuja area vale 25^{m2}.