8ª PARTE

Definições

Quando os pontos d'uma curva são symetricos dois a dois em relação a uma recta traçada no plano da curva, esta recta toma o nome de EIXO DE SYMETRIA.

Um eixo de symetria d'uma curva divide-a em duas partes iguaes.

Chama-se CENTRO d'uma curva um ponto tal que, toda recta unindo dois pontos da curva e passando por elle, n'elle seja dividida em duas partes iguaes.

VERTICE de uma curva é o ponto em que o eixo encontra a curva.

DIAMETRO de uma curva é a LINHA que passa pelos meios de todas as cordas parallelas a uma certa direcção.

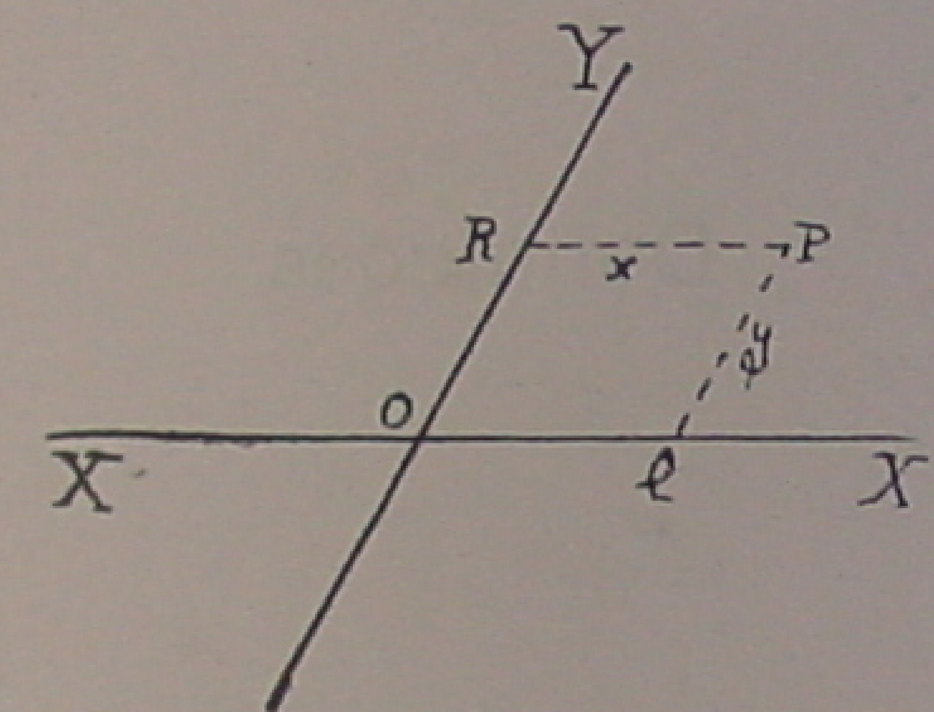
ASYMPTOTA de uma curva é uma linha que se approxima indefinidamente da curva sem nunca attingil-a.

NORMAL é a perdendicular á tangente no ponto de contacto.

CORDA DOS CONTACTOS é a recta que une os pontos de contacto de duas tangentes.

Uma curva plana é convexa quando não póde ser cortada por uma recta em mais de dois pontos.

Coordenadas. — Para determinar a posição d'um ponto no plano, traçamos, por este ponto parallelas a duas rectas formando um angulo qualquer, e chamados EIXOS DAS COORDENADAS.

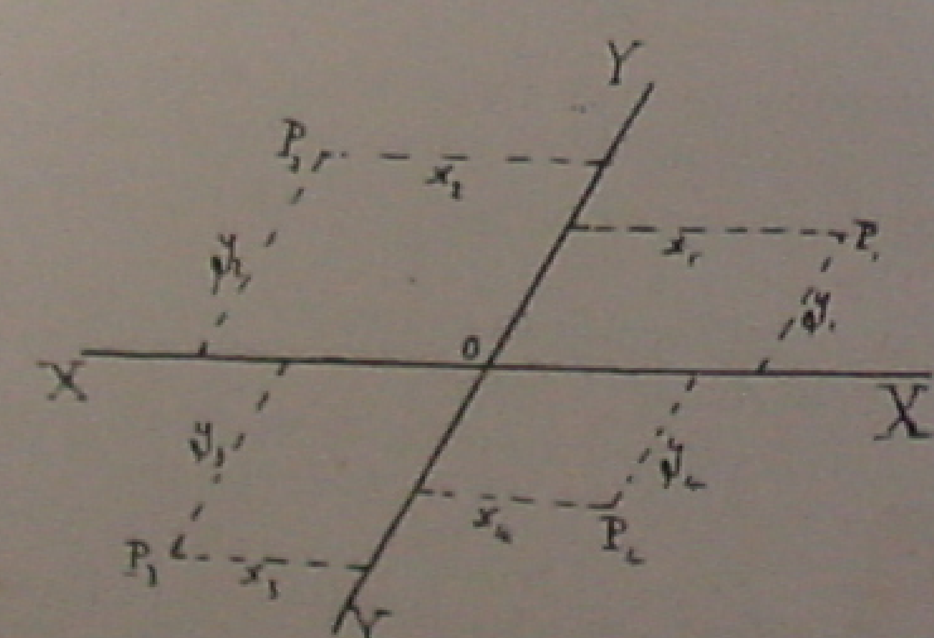


A posição d'um ponto P qualquer estará perfeitamente determinada pelas parallelas PQ e PR aos eixos Y e X. PQ ou y chama-se a ORDENADA e PR ou x chama-se ABCISSA. Os segmentos x e y são as COORDENADAS do ponto P.

O ponto O de encontro dos dois eixos de coordenadas, chama-se PONTO ORIGEM.

Todas as distancias á DIREITA de YY são POSITIVAS, e as distancias á ESQUERDA de YY são NEGATIVAS.

Todas as distancias PARA CIMA de XX são POSITIVAS, e as distancias PARA BAIXO SÃO NEGATIVAS.



As coordenadas de

P_1 são $\begin{cases}+x_1\\+y_1\end{cases}$

P_2 são $\begin{cases}-x_2\\+y_2\end{cases}$

P_3 são $\begin{cases}-x_3\\-y_3\end{cases}$

P_4 são $\begin{cases}+x_4\\-y_4\end{cases}$

Todo ponto situado sobre o eixo dos X tem sua ordenada igual a zero.

Todo ponto situado sobre o eixo dos YY tem sua abcissa igual a zero.

O ponto situado sobre o ponto origem tem sua ordenada e sua abcissa iguaes a zero.

COORDNADAS ORTHOGONAES. Quando os eixos XX e YY são perpendiculares um ao outro, elles são chamados EIXOS ORTHOGONAES.

EQUAÇÃO D'UMA CURVA é a relação constante que existe entre as coordenadas de qualquer um de seus pontos.

———

Linha recta

A equação d'uma linha recta é da forma

$$y = a\,x + b$$

Supponhamos, em primeiro logar, que b seja igual a zero, teremos:

$$y = a\,x$$

é uma linha recta que passa pelo ponto origem.

—

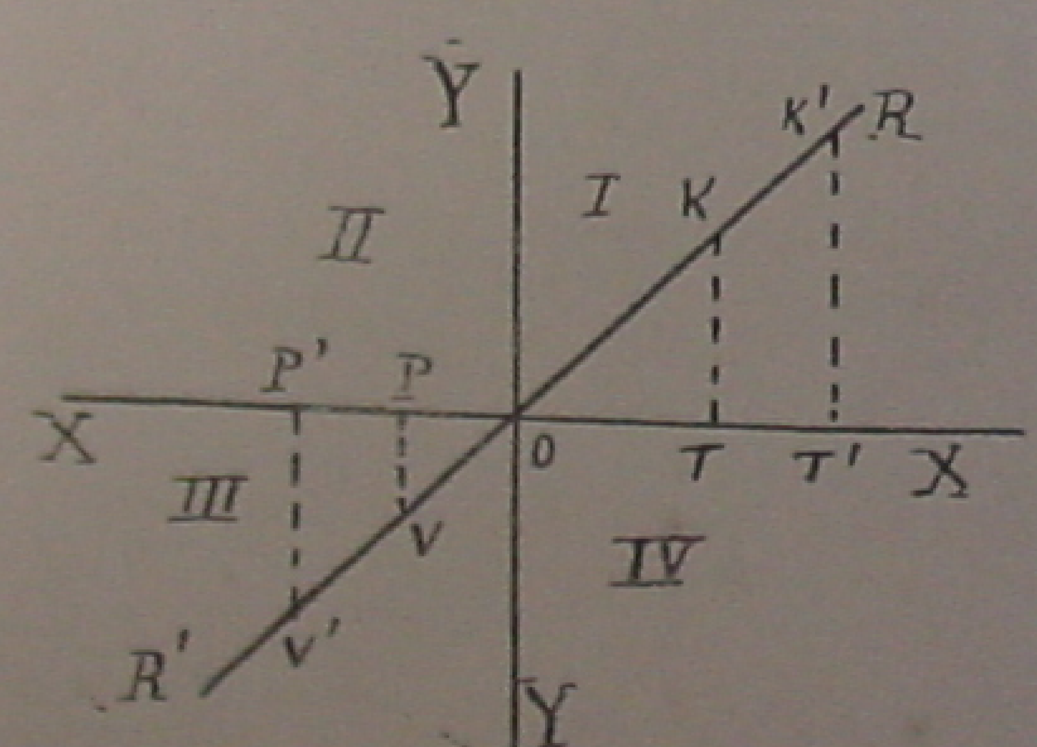
1º Caso. $a > o$.

Fazendo $x = o$, temos $y = o$, logo a linha passa pelo ponto origem.

Attribuindo a x varios valores positivos e negativos $+OT, +OT', \ldots -OP, -OP', \ldots$ e sejam

$$+TK, +T'K', \ldots -PV, -P'V', \ldots$$

os valores correspondentes de y, para os pontos K, K', ... V, V', ... da linha desconhecida.



temos por hypothese

$$KT = a \times OT, \quad K'T' = a \times OT', \ldots$$

$$-VP = -a \times OP, \quad -V'P' = -a \times OP', \ldots$$

Vê-se que os pontos K, K', ... estão do primeiro angulo dos eixos, e que os pontos V, V', ... estão no terceiro angulo dos eixos.

Vou demonstrar que os pontos K, K', ... estão em linha recta como ponto O.

Com effeito,

$$\frac{KT}{OT} = \frac{K'T'}{OT} = a$$

os dois triangulos rectangulos OKT e OK'T' são semelhantes, pois, têm um angulo igual comprehendido entre lados proporcionaes, e os angulos agudos KOT, K'OT', são iguaes; mas, OT e OT' são dirigidos na direcção da semi-recta OX; OK e OK' estão no primeiro angulo dos eixos; logo, as duas semi-rectas OK e OK', situadas d'um mesmo lado de OY, por cima de OX, e fazendo com OX angulos iguaes, coincidem.

Os pontos O, K, K', ... estão, pois, situados sobre uma mesma semi-recta indefinida OR.

Os pontos V, V', ... tambem estão situadas sobre uma mesma semi-recta OR', e OR' está no prolongamento de RO.

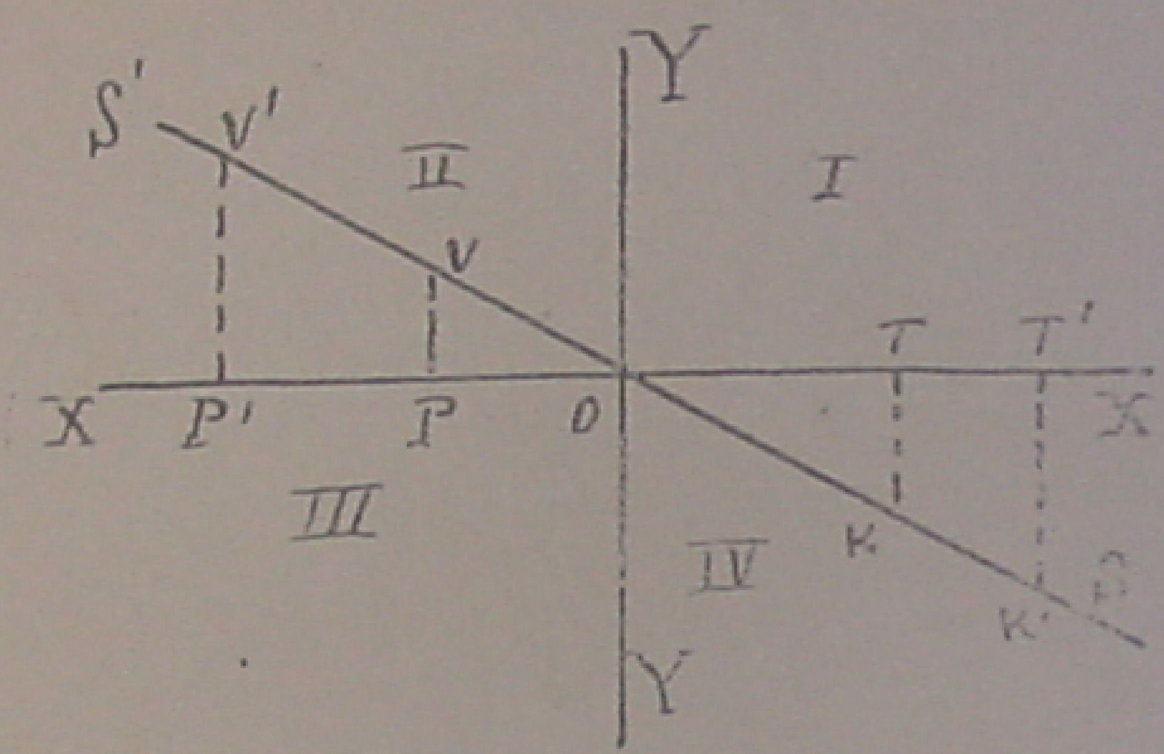
Logo, todos os pontos cujas coordenadas verificam a equação

$$y = a\,x$$

estão situadas sobre uma linha recta indifinida R'OR, passando pelo ponto origem O.

—

2° Caso. $a < o$



A recta acha-se então no 2° e no 4° angulo.
A demonstração é analoga á que acabamos de dar.

Vamos agora estudar

$$y = a\,x + b \qquad 1)$$

Esta equação ainda representa uma linha recta, mas, que não passa pelo ponto origem.

Na equação

$$y = a\,x + b$$

podemos attribuir valores quaesquer a x.

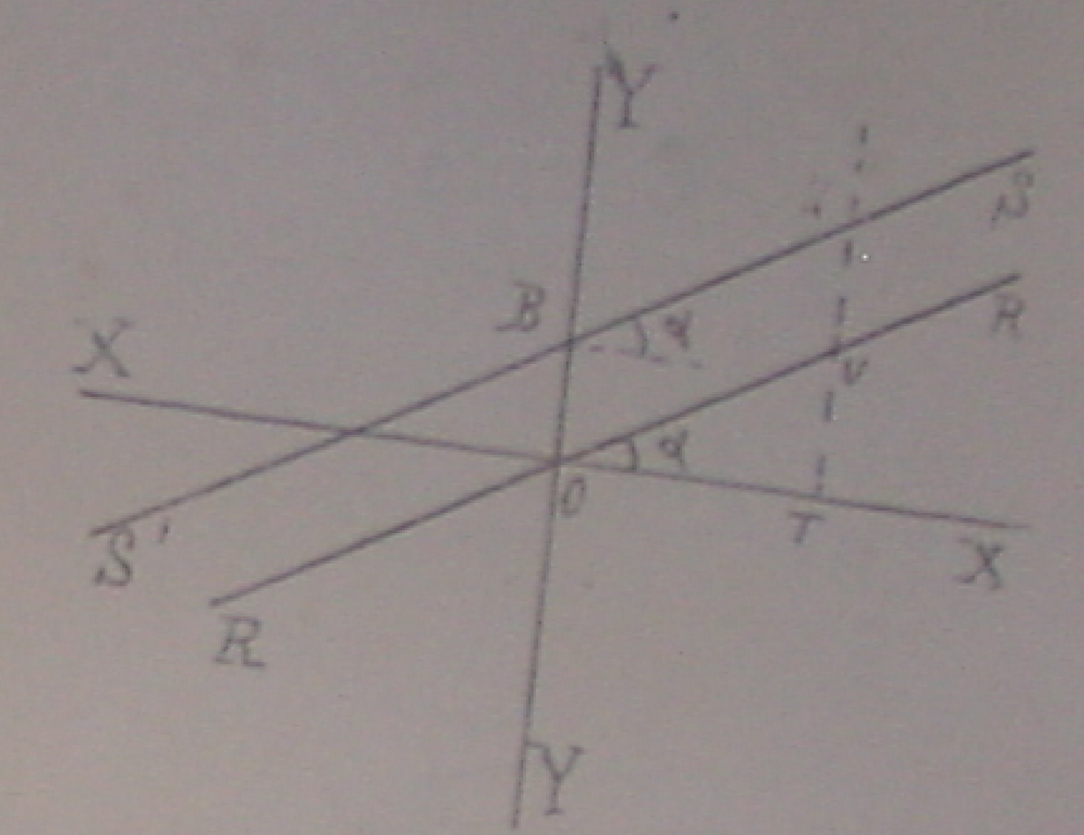
Seja y_1, o valor que tem n'esse caso ax ; temos :

$$y_1 = a\,x \qquad 2)$$

logo

$$y = y_1 + b \qquad 3)$$

Para obter-se o valor de y, correspondente a um



valor qualquer de x, basta augmentar algebricamente y_1 da quantidade constante b.

Todos os pontos, cujas coordenadas satisfazem á equação 1), estão situadas sobre uma recta SS', parallela á ROR.

A recta SS' encontra o eixo dos Y em um ponto B, tal que o segmento OB é igual a b, pois, para $x = o$, a equação 1) dá $y = b$.

O coefficiente b, chama-se ORDENADA NO PONTO ORIGEM.

O coeficiente a, de x, na equação

$$y = a\,x + b$$

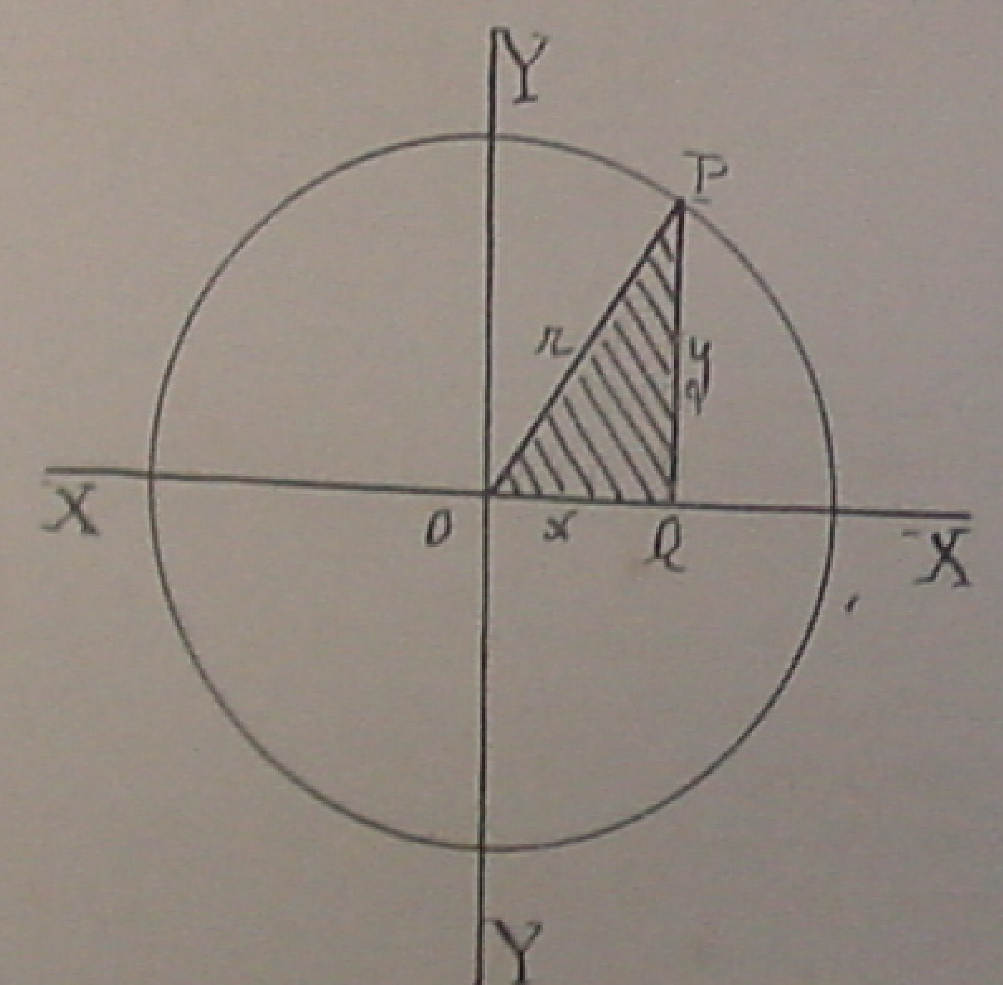
chama-se COEFFICIENTE ANGULAR da recta.

$$a = \frac{VT}{OT} = tg\,\alpha$$

O coefficiente angular d'uma recta é, pois, a tangente trigonometrica do angulo que faz a direcção positiva do eixo dos X com a parallela á recta dada traçada pelo ponto origem.

Circulo

Seja um circulo O. Tomemos



o ponto O por ponto origem.

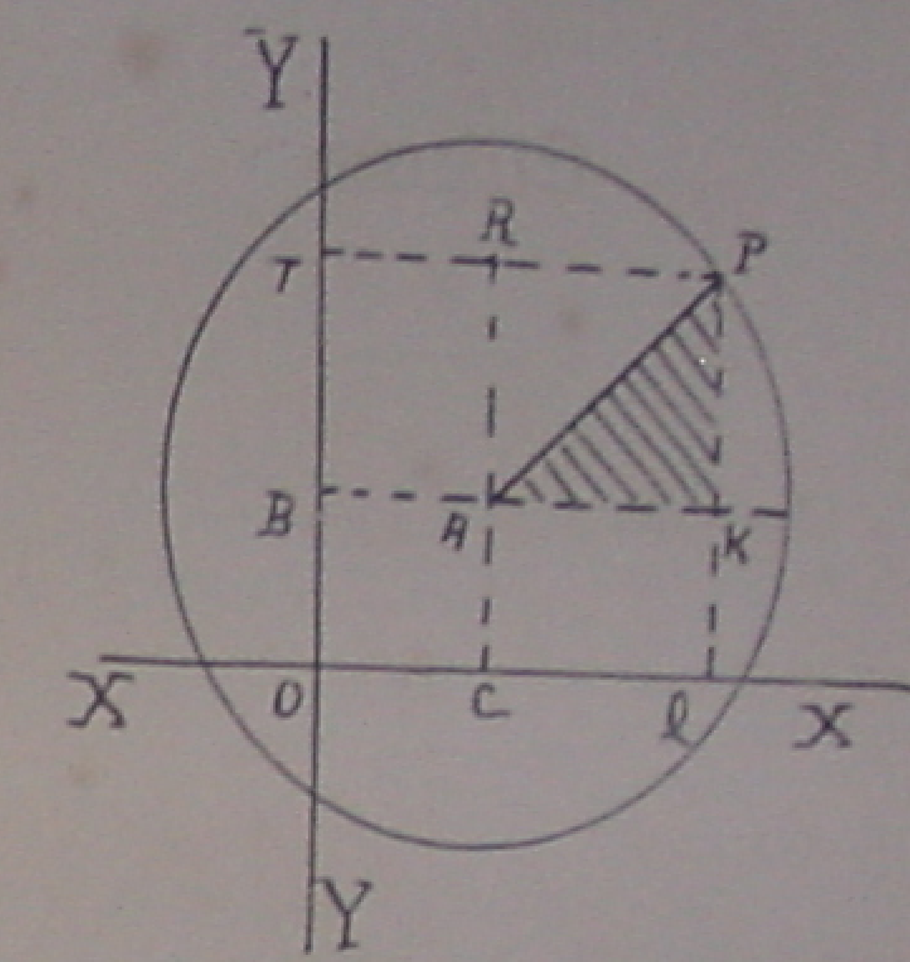
Seja P, um ponto qualquer de circumferencia O. Temos

$$r^2 = x^2 + y^2$$

E' a equação da circumferencia, quando o centro coincide o ponto origem.

—

Supponhamos agora que o ponto origem não coincida com o centro A do circulo dado.



Designando por x e y as coordenadas do ponto P, e por ζ e η as coordenadas do centro A, temos:

$$AP^2 = AK^2 + KP^2$$

$$r^2 = CQ^2 + BT^2$$

$$r^2 = (OQ - OC)^2 + (OT - OB)^2$$

$$r^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2$$

E' a equação da circumferencia, quando o centro não coincide com o ponto origem.

Ellipse

E' o logar geometrico dos pontos do plano cuja somma das distancias a dois ponto, fixos, chamados FOCOS, é constante.

As distancias de qualquer ponto d'uma ellipse aos focos chamam-se RAIOS VECTORES.

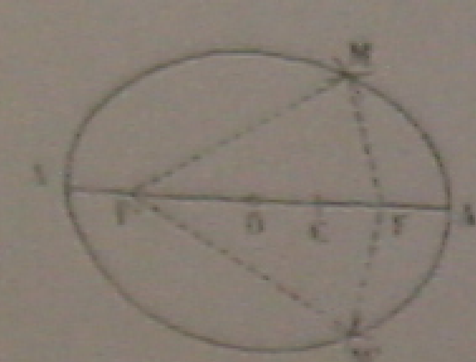
A distancia que separa os dois focos chama-se DISTANCIA FOCAL.

Toda recta que corta uma ellipse é uma SECANTE.

Analogamente ao que vimos (na 2ª parte) em relação á circumferencia, o limite d'uma secante, quando um de seus pontos de intersecção ficando fixo, o outro approxima-se cada vez mais do primeiro, é a TANGENTE.

—

CONSTRUIR UMA ELLIPSE POR PONTOS, CONHECENDO OS FOCOS F E F', E A SOMMA CONSTANTE 2A DOS RAIOS VECTORES A UM PONTO QUALQUER DA CURVA.



Unamos FF', e, a partir o do meio O de FF', tomemos as distancias OA, OA' iguaes a a.

Os pontos A, A', assim obtidos, pertencem á curva, pois $OA + OA' = 2a$.

Tomo um ponto qualquer C, ENTRE F E F'. Com raios respectivamente iguaes a CA e a CA', e F e F' como centros, traço arcos que cortam-se em M e em M'. Estes dois pontos pertencem á curva, pois

$$MF + MF' = AC + CA' = 2a$$

$$M'F + M'F' = AC + CA' = 2a$$

Tomando varios pontos analogos a C, ENTRE F e F', determino outros pontos da curva.

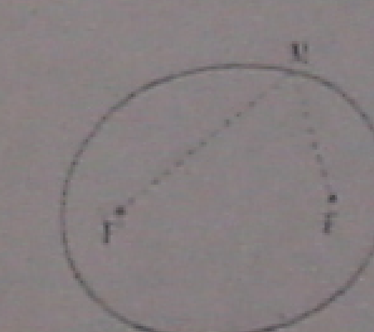
Basta unil-os por uma linha continua e teremos a nossa ellipse.

E' indispensavel que o ponto C seja tomado entre F e F'; pois, si assim não fosse, a distancia FF' dos centros dos dois arcos de circulo tendo CA e CA' como raios, seria menor do que a differença dos raios, e os arcos não se cortariam.

—

Tambem podemos traçar uma ellipse com um barbante igual a 2 a.

Ligamol-o em F e em F', e façamos escorregar a ponta d'um lapis em M, de modo a conservar o barbante bem esticado.



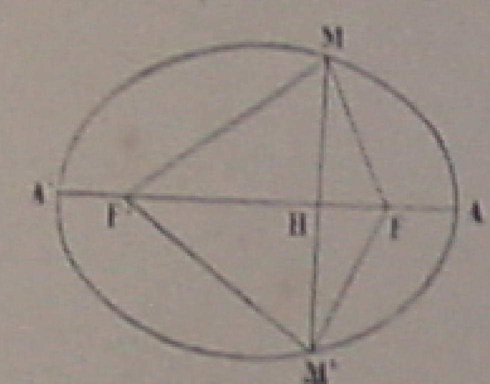
Formamos assim uma ellipse; pois, em qualquer ponto M, temos sempre

$$MF + MF' = 2a$$

—

Theorema 179. — A ellipse tem dois eixos de symetria.

Sejam F e F', os focos d'uma ellipse, e A e A' os pontos da curva situados sobre a linha recta que passa pelos focos.



Quero demonstrar que AA' é um eixo de symetria.

Seja M um ponto da curva. De M traço a perpendicular sobre AA' e tomo M'H = MH.

M' é o symetrico de M, em relação á recta AA'.

Ora, FM = FM', como obliquas que se afastam igualmente do pé H da perpendicular; d'um modo analogo F'M = F'M'.

Mas, M sendo um ponto de curva, temos:

$$FM + M'F = 2a$$

logo,

$$FM' + M'F' = 2a$$

e M' é um ponto da curva.

AA' é, pois, um eixo de symetria. Chamam-n'o GRANDE EIXO.

O circulo, que tem 2 a como raio e um dos focos como centro, chama-se CIRCULO DIRECTOR.

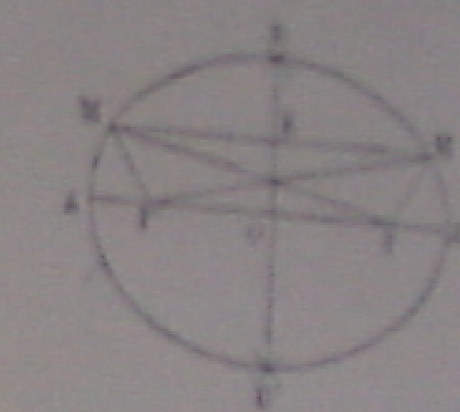
A ellipse tem 2 circulos directores.

O circulo que tem 2 a como diametro e o meio de AA' como centro, chama-se CIRCULO PRINCIPAL.

—

Dos pontos F e F' como centros, com um raio = a,

traço arcos de circulo, que se cortam em B e em B'. Unindo BB' teremos um outro eixo de symetria, o PEQUENO EIXO.



Seja M um ponto da curva.

Traço a perpendicular MK sobre BB' e prolongo até M', de modo que MK = KM'.

O ponto M' é o symetrico de M, relativamente á recta BB'.

Unamos MF, MF', M'F e M'F'.

Prova-se facilmente que os quadrilateros KOFM e KOF'M' são iguaes; logo,

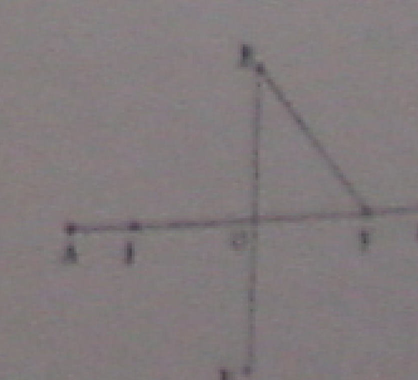
$$FM + MF' = FM' + M'F'$$

e o ponto M' é um ponto da curva.

BB' é, pois, um eixo de symetria.

—

Unindo F a B formamos o triangulo FOB; designando FF' por 2c, AA' por 2a, e BB' por 2b, temos:



$$b^2 = a^2 - c^2$$

relação que permitte calcular a distancia focal FF' d'uma ellipse, da qual os dois eixos são conhecidos.

Notemos que, na ellipse, 2a é sempre maior do que 2e,

$$2a > 2e$$
$$a > e$$
$$a^2 > e^2$$
$$a^2 - e^2 > 0$$

Seja

$$a^2 - e^2 = b^2$$

b^2 sendo uma quantidade positiva: teremos:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

é a *excentricidade da ellipse*.

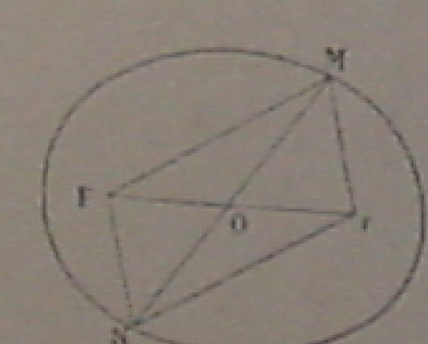
—

Theorema 180. — A ellipse tem um centro na intersecção de seus eixos.

Seja M um ponto da curva.

Unamos MO e prolonguemos até N, de modo que MO = ON.

Unindo MF e NF', NF e MF', formamos um quadrilatero, cujas diagonaes cortam-se ao meio........ (MO = ON); logo, esse quadrilatero é um parallelogrammo, e



$$MF' = NF, \quad MF = NF'$$

Mas, o ponto M é um ponto da curva e

$$MF + MF' = 2a$$

como,

$$NF + NF' = MF + MF'$$

tambem será

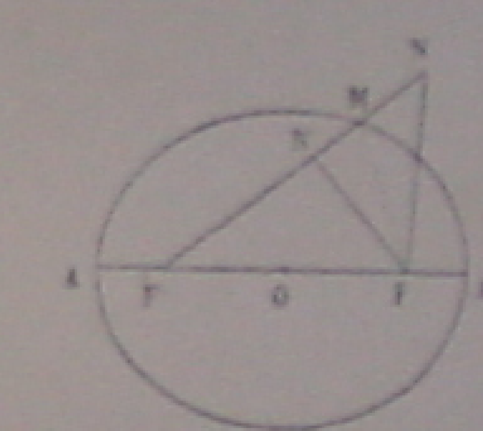
$$NF + NF' = 2a$$

e o ponto N será um ponto da curva.

Logo, o ponto O é o centro da curva.

—

Theorema 181. — Um ponto N, sendo exterior á ellipse, a somma de suas distancias aos focos é maior do que 2a.



Com effeito,

$$MF < MN + NF$$

Accrescentando F'M a ambos os membros d'esta ultima desigualdade, temos:

$$F'M + MF < F'M + MN + NF$$

ou

$$F'M + MF < F'N + NF$$

Logo,

$$F'N + NF > F'M + MF$$

ou

$$F'N + NF > 2a$$

—

Theorema 182. — Um ponto N', sendo inferior á ellipse, a somma de suas distancias aos focos é menor do que 2 a (figura precedente).

Com effeito,

$$N'F < N'M + MF$$

sommando F'N' a ambos os membros d'esta ultima desigualdade, temos:

$$F'N' + N'F < F'N' + N'M + MF$$

ou

$$F'N' + N'F < F'M + MF$$

e

$$F'N' + N'F < 2a$$

—

DETERMINAR OS PONTOS DA INTERSECÇÃO D'UMA RECTA CD COM UMA ELLIPSE DADA PELOS SEUS FOCOS F E F', E SEU GRANDE EIXO AA'.

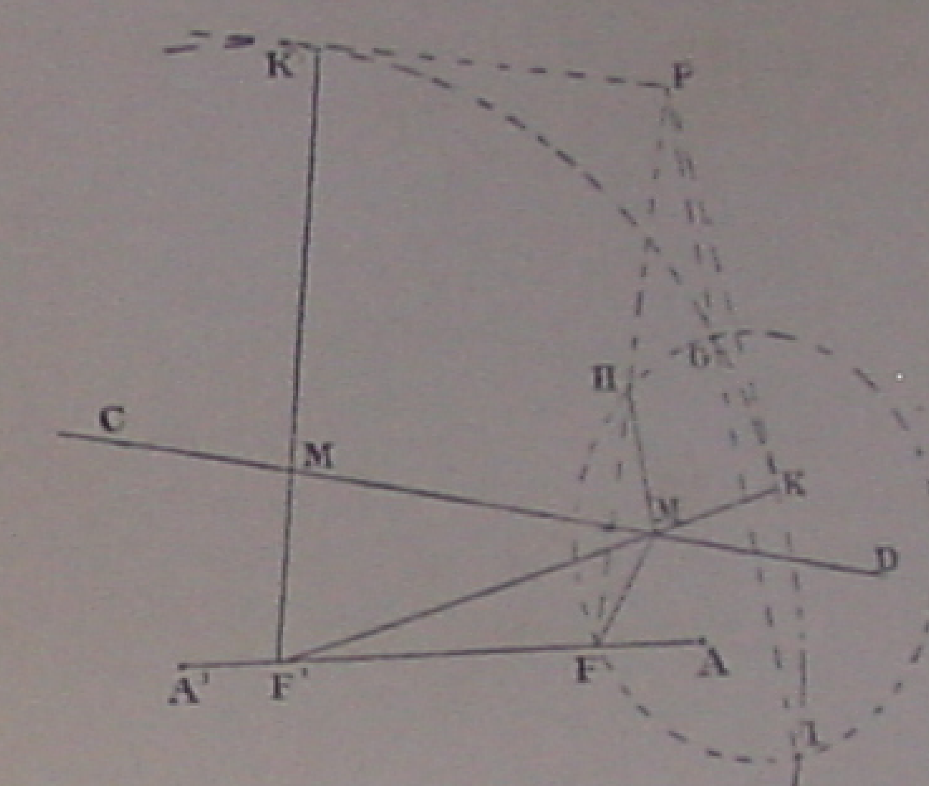
Seja M um dos pontos procurados. Determinemos o symetrico H do foco F relativamente á recta CD.

Tracemos o raio vector F'M e prolonguemol-o até K, de modo que MK = MF.

F'K é o raio do circulo director com centro em F'.

O ponto M é equidistante dos tres pontos H, F e K: é o centro do circulo passando por F e por H, e tangente ao circulo director.

Para resolver o problema, traçamos uma circumferencia qualquer que passe pelos pontos F e H, e que circulo director em dois pontos G e I.



Unamos IG e prolonguemos até encontrar FH prolongada, em P. Do ponto P traço as tangentes ao circulo director: os pontos de contacto K e K', unidos a F', determinarão os pontos M e M' em que a recta dada CD corta a ellipse.

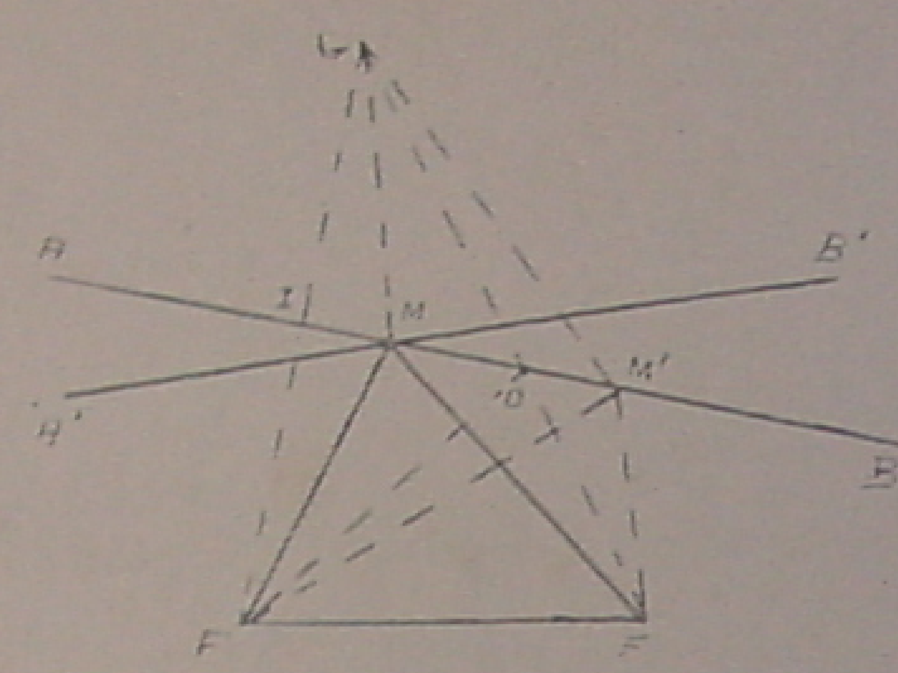
—

NOTA.— Si o ponto H, symetrico de F, estivesse situado sobre o circulo director, a recta CD seria tangente á ellipse, e obter-se-ia o ponto de contacto, unindo F' ao symetrico de F.

Si o ponto P estivesse no interior do circulo director, a recta CD passaria por fóra da ellipse.

—

Theorema 183. — A tangente á ellipse forma angulos iguaes com os raios rectores do ponto de contacto.



Seja AB uma secante que corte a ellipse em M e em M'; tracemos, por um dos focos, F' por exemplo, uma perpendicular sobre AB e prolonguemol-a de modo que $IG = F'I$. Unamos GF, OF'; seja O o ponto de encontro de GF com AB.

O triangulo OGF' é isoceles, e o angulo $GOI =$ ao angulo IOF'; mas, os angulos GOI, M'OF são iguaes, como oppostos pelo vertice; logo, os angulos IOF' e M'OF são iguaes.

A recta sendo secante, e M e M' sendo os pontos de intersecção com a ellipse, o ponto O estará sempre situado entre M e M'. Unindo MF, MF', MG, M'F, M'F', M'G, temos $MF, = MG$; logo, $MF + MG = 2a$; d'um modo analogo, $M'F' = M'G$ e $M'F + M'G = 2a$.

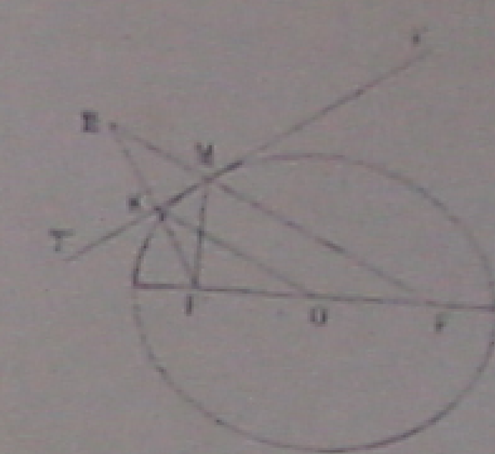
As linhas quebradas FMG e FM'G são iguaes; logo, os seus vertices M e M' estarão situados cada um d'um lado da recta GF, que une suas extremidades.

O ponto O está, pois, situado entre M e M'.

A secante, girando em torno do ponto M, será tangente no limite, e tomará a posição A'B'.

Ora, o ponto O, devendo estar entre M e M', coincidirá agora com o ponto M, de contacto; e, os angulos A'MF' e B'MF são iguaes.

TRAÇAR UMA TANGENTE A' ELLIPSE POR UM PONTO DADO SOBRE A CURVA.



Seja M, o ponto da ellipse, pelo qual queremos traçar uma tangente.

Traço os raios vectores FM e F'M; prolongo FM.

A bissectriz do angulo HMF' será a tangente procurada.

Pois,

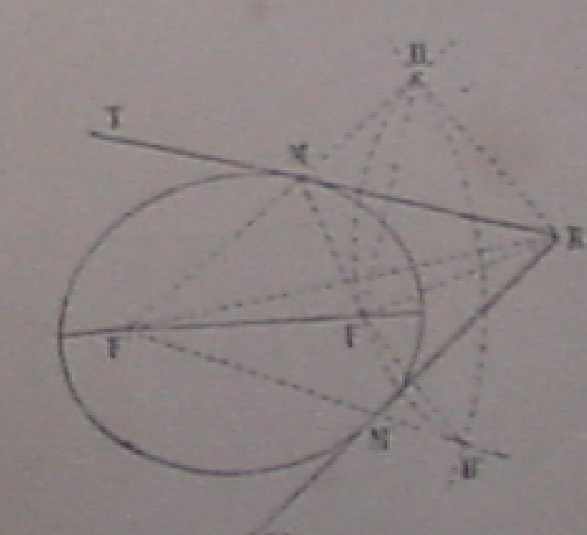
$$HMK = TMF$$

$$HMK = KMF'$$

logo, $$KMF' = TMF$$

A recta TT' forma angulos iguaes com os raios vectores; logo, é tangente á curva.

TRAÇAR UMA TANGENTE A' ELLIPSE POR UM PONTO DADO FÓRA DA CURVA.



Seja R o ponto dado.

Traço o circulo director com centro em F, e um circulo com centro em R e com RF como raio. Estes dois circulos cortam-se em H e em H' Unindo FH e F'H', e traçando as perpendiculares ao meio de FH e F'H', FH', estas perpendiculares passarão pelo ponto R e serão as duas tangentes que podemos traçar pelo ponto R á ellipse.

Os pontos de contacto são determinados pela intersecção de F'H e F'H' com a ellipse.

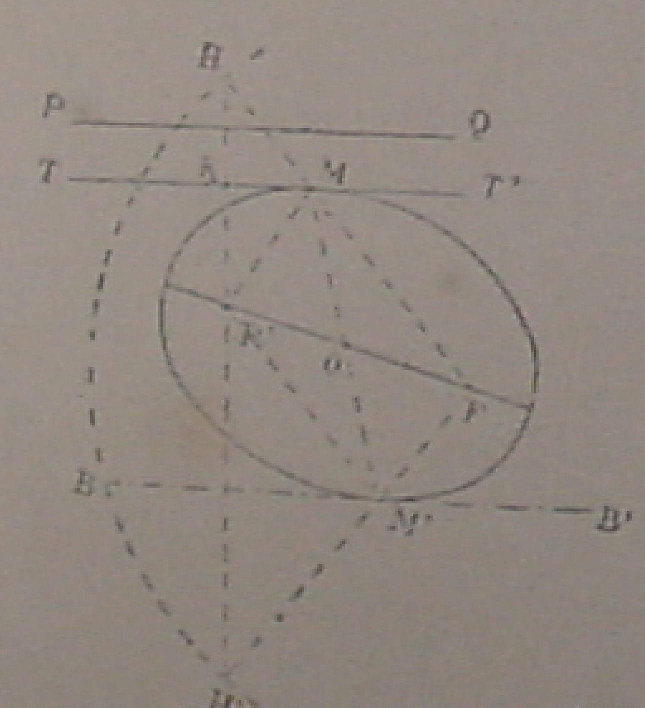
RF é igual RH, e RH é perpendicular sobre FH; tambem MH = MF; logo, os angulos HMR e FMR são iguaes. Ora os angulos HMR e TMF' são iguaes, como oppostos pelo vertice; logo, os angulos RMF e TMF' são iguaes.

TR, fazendo angulos iguaes com os raios vectores MF e MF', é tangente.

D'um modo analogo, demonstra-se que RT' tambem é tangente.

—

TRAÇAR UMA TANGENTE Á ELLIPSE, PARALLELAMENTE A UMA DIRECÇÃO DADA.



Seja PQ a direcção dada.

Traço, pelo foco F', uma perpendicular sobre PQ. Traço o circulo director com centro em F. Este circulo encontra a perpendicular HH' á direcção dada, em H e em H'.

As perpendiculares traçadas no meio de F'H e no

meio de F'H', são as tangentes á ellipse dada, parallelas á direcção dada.

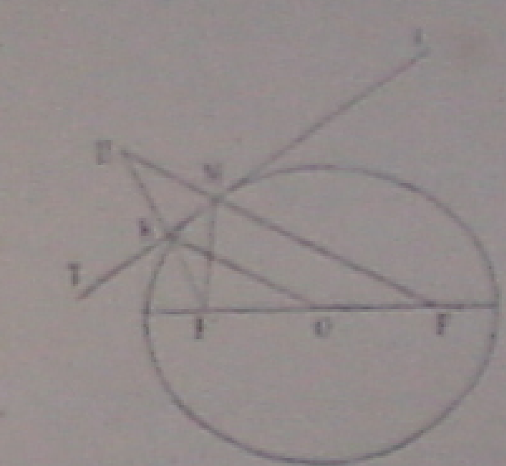
Os pontos de contacto são determinados pelo encontro de FH e de FH', com a ellipse.

—

NOTA. — A recta MM' que une os pontos de contacto passa pelo centro da curva.

—

Theorema 184. (La Hire) — O logar geometrico das projecções dos focos d'uma ellipse sobre as tangentes á curva, é um circulo tendo o grande eixo por diametro (circulo principal).



Prolongo FM, de modo que MH = MF'. A tangente TT' é perpendicular sobre o meio de HF'. Unindo OK, notamos que OK é igual á metade de FH.

Ora, FH = FM + MH = FM + MF' = 2a.

Logo, OK = a. O ponto K, pé da perpendicular traçada do foco F' sobre a tangente TT', é, pois, um ponto do circulo principal.

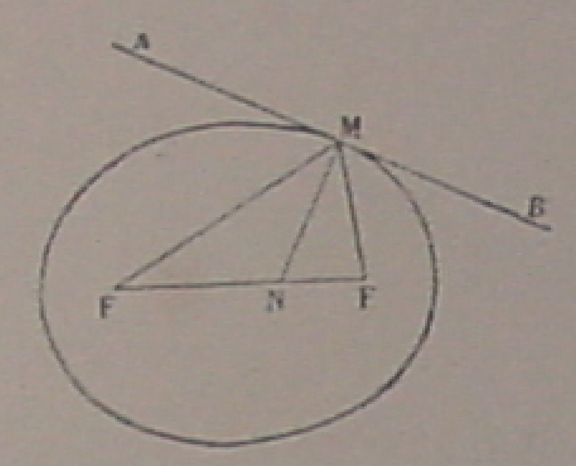
—

O LOGAR GEOMETRICO DOS SYMETRICOS D'UM FOCO DA ELLIPSERELATIVAMENTE ÁS TANGENTES Á CURVA É O CIRCULO DIRECTOR QUE TEM O OUTRO FOCO COMO CENTRO.

Pois, F'K sendo igual a KH, vêmos logo que FH = 2a.

—

Theorema 185.— A normal n'um ponto da ellipse é bissectriz do angulo formado pelos raios vectores d'este ponto.



Com effeito, os angulos BMF e AMF' sendo iguaes, os seus complementos NMF e NMF' tambem o serão.

Na ellipse, em geral, quando nos referimos a uma TANGENTE, entendemos a porção da tangente (illimitada) comprehendida entre o ponto de contacto e o prolongamento do grande eixo.

NORMAL é a porção da normal (illimitada) comprehendida entre o ponto de contacto e o grande eixo.

A projecção da tangente, sobre o grande eixo, chama-se SUB-TANGENTE.

A projecção da normal, sobre o grande eixo, chama-se SUB-NORMAL.

Theorema 186.—(**de Courcelles**).—A projecção d'um circulo é uma ellipse.

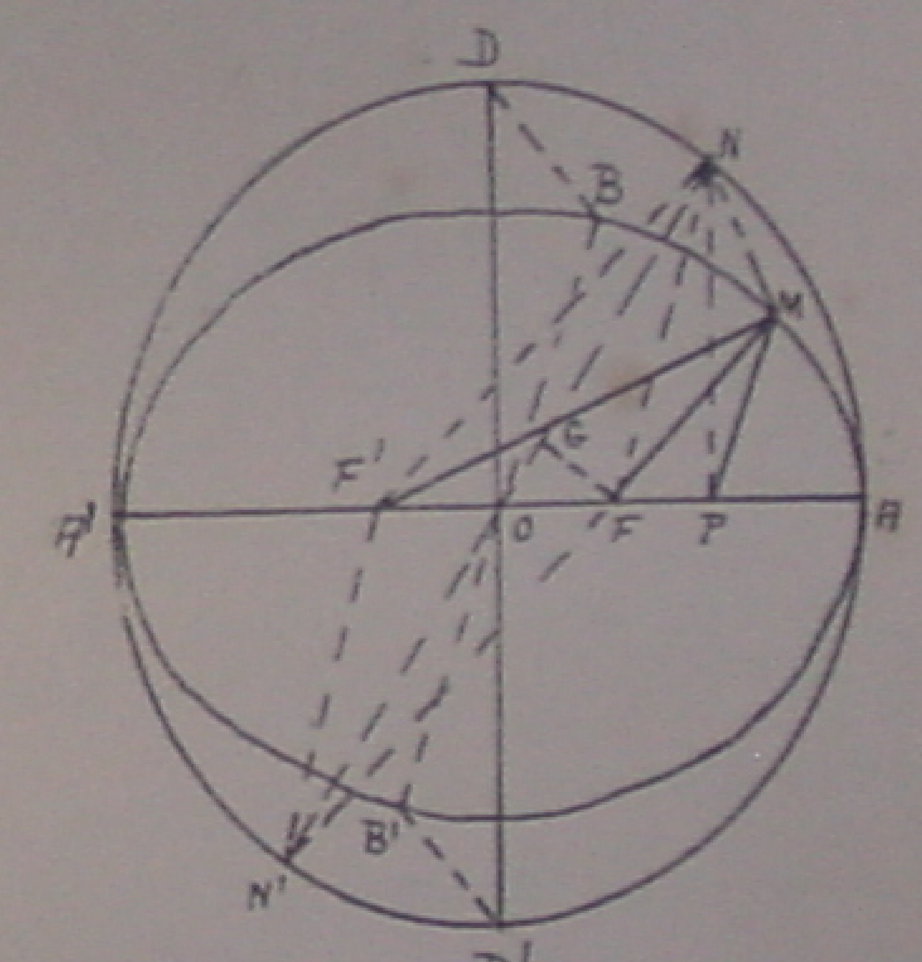
Tomemos um plano que passe pelo centro O; seja AA' a intersecção do circulo e do plano sobre o qual elle se projecta.

Pelo centro O, tracemos o plano DOB perpendicular sobre AA': por um ponto qualquer N, do circulo, tracemos o plano NPM, perpendicular ao diametro AA': n'estes dois planos, pelos pontos D e N, tracemos as perpendiculares DB e NM sobre o plano de projecção. Os pontos B e M pertencem á curva; DO,

BO, NP, MP, são perpendiculares sobre a intersecção AA', pois, este diametro é perpendicular aos planos DOB, NPM.

Levemos o tamanho DB de O em F e F', unamos M, projecção d'um ponto qualquer da circumferencia, aos pontos F e F': é preciso demonstrar que

$$MF + MF' = 2a$$



Do ponto F, tracemos a perpendicular FG sobre o diametro NN', e unamos NF e NF'. A linha NM é perpendicular ás rectas MP, MF, MF', que passam pelo seu pé M e estão no plano de projecção.

Os triangulos rectangulos DBO e NMP são semelhantes, porque seus lados são respectivamente parallelos: logo, temos:

$$\frac{NM}{DB} = \frac{NP}{DO}$$

ou

$$NM = \frac{DB \cdot NP}{DO} \qquad (1$$

O dobro da area do triangulo ONF exprime-se por:

$$FG \cdot ON \quad \text{ou por} \quad OF \cdot NP$$

logo

$$FG \cdot ON = OF \cdot NP$$

ou

$$FG = \frac{OF \cdot NP}{ON} \qquad (2$$

Os segundos membros das igualdades (1 e (2 têm o mesmo valor, porque DB = OF por construcção, e DO = ON; logo, MN = FG.

Os triangulos rectangulos NMF e NGF têm a hypothenusa commum e um catheto igual, NM = FG; logo, são iguaes; e MF = NG. (3

No parallelogrammo NFN'F', os lados F'N e FN' são iguaes; os triangulos rectangulos NMF' e FGN' são iguaes, porque NM = FG e têm as hypothenusas iguaes (F'N = N'F); logo MF' = GN'. (4

Sommando as igualdades 3) e 4), temos:

$$\begin{array}{c} MF = NG \\ MF' = GN' \\ \hline MF + MF' = NG + GN' \end{array}$$

mas

$$NG + GN' = AA' = 2a,$$

quantidade constante.

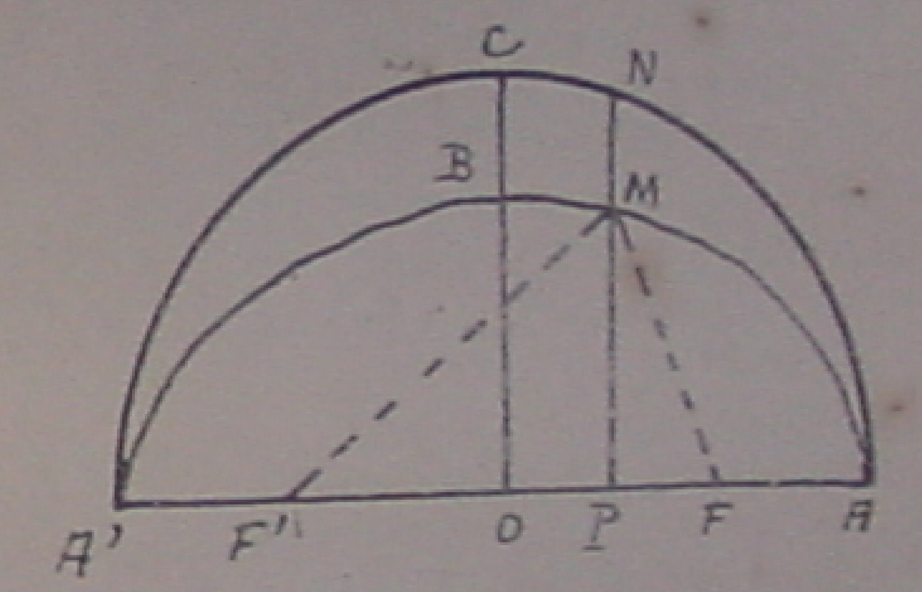
A curva é, pois, uma ellipse, tendo F e F' como fócos, AA' como grande eixo, e BB' como pequeno eixo.

O pequeno eixo é a projecção do diametro DD' perpendicular á intersecção AA' dos planos.

Theorema 187. — Sobre o grande eixo d'uma ellipse, como diametro, traçamos uma circumferencia; as ordenadas correspondentes da ellipse e da circumferencia estarão na razão do pequeno eixo da ellipse para o grande.

Sejam MP e NP duas ordenadas correspondentes d'uma ellipse e d'um circulo tendo por diametro o grande eixo AA' da ellipse.

Unamos MF, MF' e seja OA = a, OB = b, OF = c, OP = d, MF = r, MF' = r'.



Os triangulos rectangulos PMF e PMF' dão

$$MP^2 = r^2 - (c-d)^2 = r'^2 - (c+d)^2$$

ou

$$r'^2 - r^2 = (c+d)^2 - (c-d)^2 = 4\,c\,d$$

ou

$$(r' - r)\,(r' + r) = 4\,c\,d$$

mas

$$r' + r = 2\,a$$

logo

$$r' - r = \frac{2\,c\,d}{a}$$

Conhecendo r' + r e r' − r, deduzimos:

$$r = a - \frac{cd}{a} = \frac{a^2 - cd}{a}$$

logo

$$\overline{MP}^2 = \frac{(a^2 - cx)^2}{a^2} - (c - x)^2$$

ou, reduzindo ao mesmo denominador:

$$\overline{MP}^2 = \frac{(a^2 - c^2)(a^2 - x^2)}{a^2}$$

mas

$$a^2 - c^2 = b^2$$

$$a^2 - x^2 = (a + x)(a - x) = A'P \times AP$$

logo

$$\overline{MP}^2 = \frac{b^2}{a^2} \times A'B \times AP$$

Notemos, porém, que, NP sendo perpendicular sobre o diametro AA', temos:

$$\overline{NP}^2 = A'P \times AP$$

logo

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{NP}^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

ou

$$\frac{MP}{NP} = \frac{b}{a}$$

Theorema 188. — A área d'uma ellipse é media proporcional entre as áreas de dois circulos traçados com seus eixos como diametros respectivos.

Tracemos sobre o grande eixo AA' d'uma ellipse, uma semi-circumferencia, e inscrevemos uma serie de cordas AN, NN', ...; tracemos as perpendiculares NP, N'P', ... e unimos AM, MM', ...

Teremos assim formado na semi-ellipse, e no

semi-circulo uma serie de triangulos e trapezios correspondendo-se dois a dois.

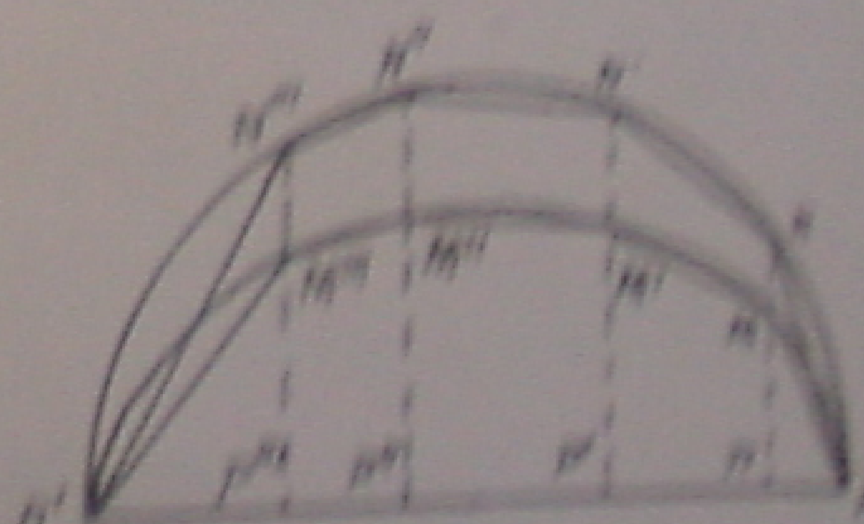
As areas d'essas figuras estão entre si na razão $\frac{b}{a}$.

Com effeito, os triangulos AMP, ANP têm a mesma altura AP e estão na razão de suas bases MP, NP, isto é, na razão $\frac{b}{a}$; d'um modo analogo, os trapezios MM'PP', NN'PP', que têm a mesma altura PP', estão na razão

$$\frac{MP + M'P'}{NP + N'P'}$$

mas

$$\frac{MP}{NP} = \frac{M'P'}{N'P'} = \frac{b}{a}$$



d'onde

$$\frac{MP + M'P'}{NP + N'P'} = \frac{b}{a}$$

logo

$$\frac{MM'PP'}{NN'PP'} = \frac{b}{a}$$

e assim por diante.

A somma dos triangulos e dos trapezios inscriptos na semi-ellipse estão, pois, com a somma dos triangulos e dos trapezios do semi-circulo, na razão $\frac{b}{a}$

Isto tambem será exacto quando o numero das cordas inscriptas fôr infinitamente grande, isto é, quando as sommas dos triangulos e dos trapezios approximarem-se dos seus limites, que são a area da semi-ellipse e do semi-circulo.

Logo

$$\frac{\text{Sup. ellipse}}{\text{Sup. circulo}} = \frac{b}{a}$$

ou

$$\text{Sup.-ellipse} = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi a b$$

—

Equação da Ellipse

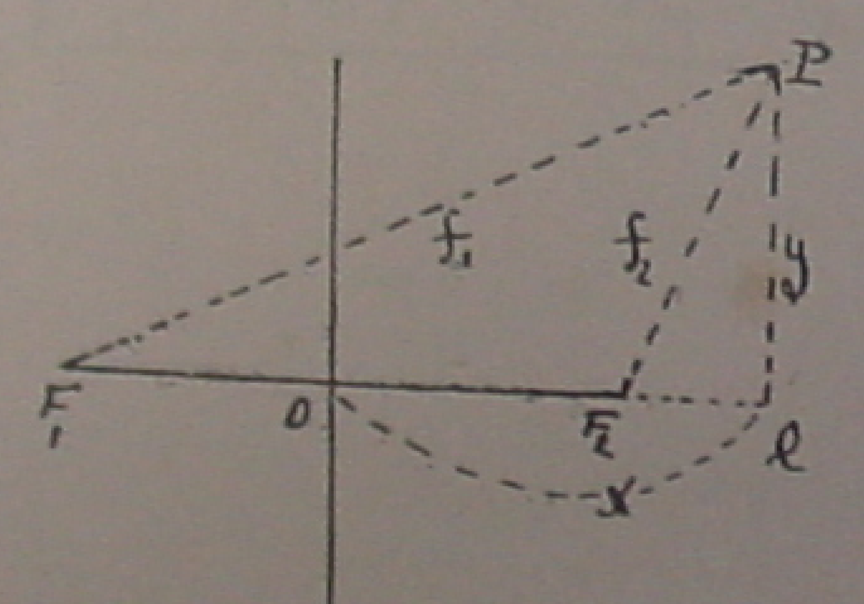
Seja P, um ponto d'uma ellipse, cujos fócos sejam F_1 e F_2, e cujo grande eixo seja 2 a.

Já vimos que

$$f_1 + f_2 = 2a$$

e tambem sabemos que a excentricidade da ellipse é da forma

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$



No triangulo PQF_1, temos

$$f_1^2 = y^2 + (x + e)^2$$

no triangulo PQF_2, temos

$$f_2^2 = y^2 + (x - e)^2$$

logo

$$f_1 = \sqrt{y^2 + (x + e)^2}$$

$$f_2 = \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

mas

$$f_1 + f_2 = 2a$$

logo

$$2a = \sqrt{y^2 + (x - e)^2} + \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

ou

$$\sqrt{y^2 + (x + e)} = 2a - \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

elevando ao quadrado ambos os membros d'esta ultima igualdade, temos:

$$y^2 + x^2 + 2xe + e^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x - e)^2} +$$
$$+ y^2 + x^2 - 2xe + e^2$$

simplificando, vem

$$4xe = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

$$xe = a^2 - a\sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

$$xe - a^2 = -a\sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

$$a^2 - xe = a\sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

elevando ao quadrado, achamos

$$a^4 - 2a^2xe + x^2e^2 = a^2(y^2 + x^2 - 2xe + e^2)$$

$$a^4 - 2a^2xe + x^2e^2 = a^2y^2 + a^2x^2 - 2a^2xe + a^2e^2$$

$$a^4 - a^2e^2 + x^2e^2 - a^2x^2 = a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - e^2) + x^2(e^2 - a^2) = a^2y^2$$

$$a^2 (a - e^2) - x^2 (a^2 - e^2) = a^2 y^2$$

$$a^2b^2 - x^2b^2 = a^2y^2$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

ou

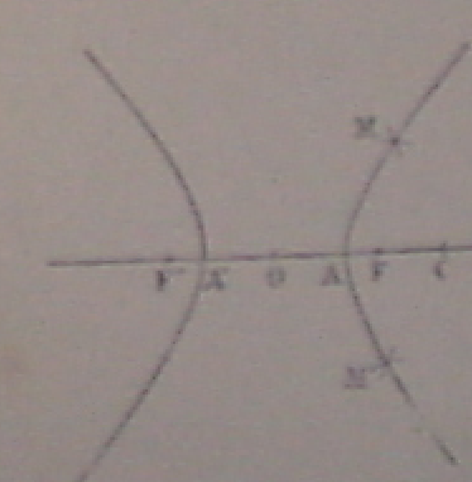
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbole

E' O LOGAR GEOMETRICO DOS PONTOS DO PLANO, CUJA DIFFERENÇA DAS DISTANCIAS A DOIS PONTOS FIXOS, OS FOCOS, É CONSTANTE.

—

CONSTRUIR UMA HYPERBOLE POR PONTOS, CONHECENDO OS FOCOS E A DIFFERENÇA CONSTANTE 2A DOS RAIOS VECTORES.



Une-se os focos FF' e marca-se, a partir de O, meio de FF', dintancias OA = OA' = a. Os pontos A e A' pertencem a hyperbole: com effeito,

$$AF' - AF = A'F - A'F' = 2a$$

$$A'F - A'F' = A'F - AF = 2a$$

Toma-se sobre a recta FF', um ponto C, FORA DOS FOCOS.

Dos focos como centros, com raios respectivamente iguaes a CA e a CA', descrevem-se arcos de circulo, cujas intersecções em M e M', são pontos da hyperbole.

Faz-se variar a posição do ponto C, porém SEMPRE FÓRA DOS FOCOS, e obtem-se outros pontos da curva.

Podemos tomar C á esquerda de F' ou á direita F, até onde quizermos; d'ahi resulta que a hyperbole consta de dois ramos, cortando FF' em A e em A', e extendendo-se indefinitamente para a direita e para a esquerda.

NOTA. — O ponto C não póde ser tomado entre F e F'; porque, si assim fosse, a distancia dos centros dos dois arcos de circulo, de raios CA e CA', seria maior do que a somma dos raios, e não haveria intersecção.

—

A HYPERBOLE TEM DOIS EIXOS DE SYMETRIA.

O primeiro AA', chama-se EIXO TRANSVERSO (fig. precedente).

O segundo eixo, é obtido do modo seguinte: traçam-se, em A e A', perpendiculares a FF'.

Toma-se OF e OF' como raios e O como centro, e traçam-se arcos; estes arcos cortam as perpendiculares a FF' em pontos que, unidos, formam um rectangulo. A distancia dos lados horizontaes d'esse rectangulo, (que passa por O), é o EIXO NÃO TRANSVERSO.

As diagonaes d'esse rectangulo prolongadas, são tangentes á hyperbole em pontos infinitamente afastados: chamam-se ASYMPTOTAS.

—

Na hyperbole, a distancia focal FF' ou 2e, é sempre maior do que o eixo transverso AA' ou 2a logo,

$$2a < 2e$$
$$a < e$$
$$a^2 < e^2$$
$$a^2 - e^2 < O$$

ou

$$a^2 - e^2 = -b^2$$

esta ultima quantidade sendo essencialmente negativa.

D'ahi vem:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

e

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

é a EXCENTRICIDADE da hyperbole.

—

NOTA. — Quando o meio eixo transverso a é igual ao meio eixo não transverso b, a hyperbole é chamada *equilatero*. Neste caso, o rectangulo que, ha pouco, nos deu as asymptotas, passa a ser um quadrado.

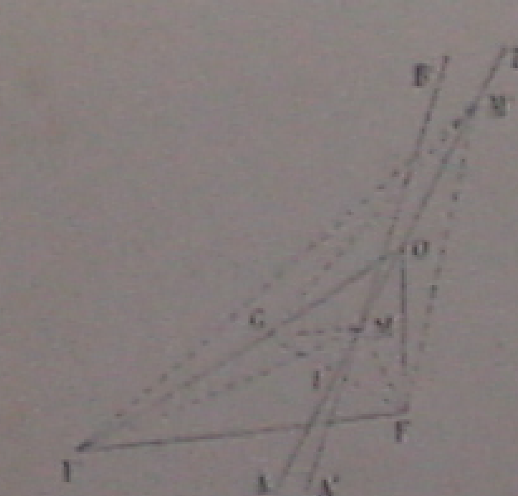
—

A HYPERBOLE TEM UM CENTRO DE SYMETRIA, NO MEIO DO EIXO TRANSVERSO.

Mesma demonstração que no caso da ellipse.

—

Theorema 189. — A tangente á hyperbole é bissectriz do angulo formado pelos raios vectores do ponto de contacto.



Seja a secante AB, cortando a hyperbole em M e em M'.

Do foco F traço a perpendicular FI sobre AB e prolongo até G, de modo que $IG = IF$.

Uno F'G, e prolongo até o ponto O de encontro com a secante.

Os angulos F'OA e AOF são iguaes.

O ponto O sempre está situado entre M e M': com effeito,

$$MF' - MF = 2a$$

$$M'F' - M'F = 2a$$

mas,

$$MG = MF \text{ e } M'G = M'F$$

logo,

$$MF' - MG = 2a$$

$$M'F' - M'G = 2a$$

e

$$MF' - MG = M'F' - M'G \qquad (1)$$

Si o ponto O não estivesse situado entre M e M', a igualdade (1) não subsistiria.

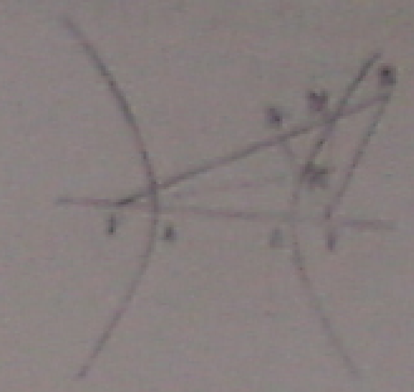
Logo, o ponto O está situado entre M e M'.

Fazendo girar a secante AB em torno do ponto M, até que ella occupe a posição limite A'B' (TANGENTE), o ponto O confundir-se-á com M e com M', e será o ponto de contacto.

Logo, os raios vectores do ponto O formam com a tangente angulos iguaes.

—

Theorema 190. — Para um ponto situado dentro da hyperbole, a differença dos raios vectores é superior ao eixo transverso 2a.



Seja N o ponto interior da curva.

O triangulo NMF dá:

$$NF < NM + MF$$

$$NF' - NF > NF' - NM - MF$$

ou

$$NF' - NF > MF' - MF$$

mas

$$MF' - MF = 2a$$

logo,

$$NF' - NF > 2a$$

—

Theorema 191. — Para um ponto situado fóra da hyperbole, a differença dos raios vectores é inferior a 2a (figura precedente).

Seja N' o ponto exterior á curva.

O triangulo N'M'F' dá:

$$N'F' < F'M' + M'N'$$

$$N'F' - N'F < N'M' + F'M' - N'F$$

$$N'F' - N'F < M'F' - M'F$$

mas,

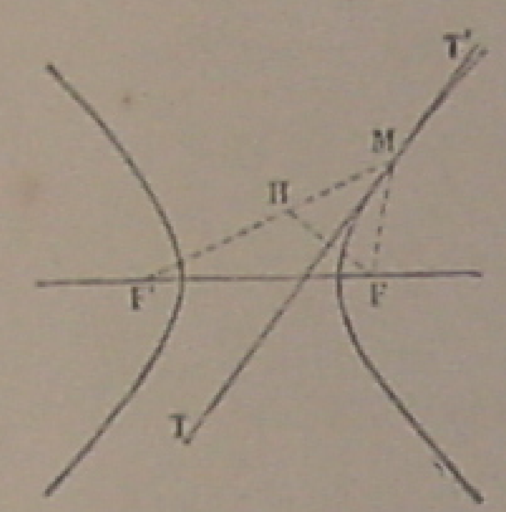
$$M'F' - M'F = 2a$$

logo,

$$N'F' - N'F < 2a$$

—

Traçar uma tangente á hyperbole por um ponto M dado, sobre a curva.



Traço a bissectriz dos raios vectores, FM e F'M: esta bissectriz TT' será a tangente procurada.

—

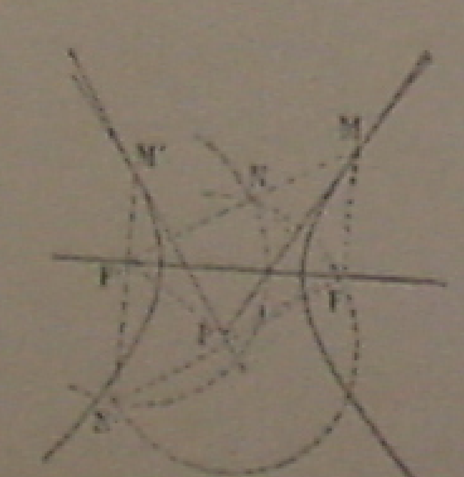
Traçar uma tangente á hyperbole por um ponto P dado, fóra da curva.

Traço o circulo director com centro em F'. (O circulo director da hyperbole tem como centro um dos focos e como raio o eixo transverso).

Uno PF; traço um circulo com centro em P e com raio = PF; assim determino os pontos N e N', de intersecção com o circulo director.

Uno FN: a perpendicular, traçada do ponto P sobre NF, será tangente á hyperbole. Prolongando F'N, determino o ponto M de contacto.

Uno FN': a perpendicular, traçada do ponto P sobre FN', será tangente á hyperbole. Unindo N'F', e prolongando, determino o ponto M' de contacto.



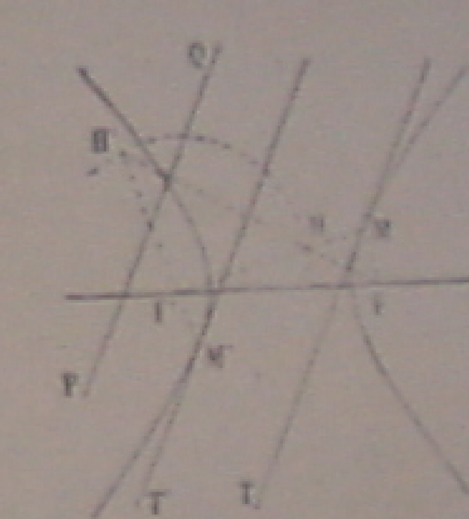
NOTA: — O ponto exterior P estando situado n'um dos angulos das asymptotas, dos quaes o eixo transverso é bissectriz, as duas tangentes têm seus pontos de contacto no mesmo ramo da curva.

O ponto exterior P estando situado n'um dos angulos das asymptotas, dos quaes o eixo não transverso é bissectriz, cada ramo tem uma tangente.

—

Traçar uma tangente á hyperbole parallelamente a uma direcção dada.

Seja PQ a direcção dada.



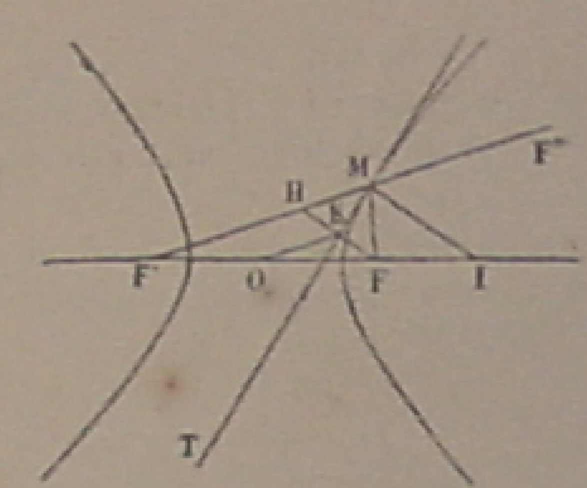
Do foco F, traço a perpendicular sobre PQ. Traço o circulo director com centro em F'. Este circulo director corta a perpendicular sobre PQ em H e em H'.

A perpendicular ao meio de FH será uma tangente á curva; seu ponto de contacto será determinado pelo prolongamento de F'H.

A perpendicular no meio de FH' será uma outra tangente á curva; seu ponto de contacto será determinado pelo prolongamento de H'F'.

—

Theorema 192. — O logar geometrico das projecções dos focos d'uma hyperbole sobre as tangentes á curva é uma circumferencia tendo como diametro o eixo transverso.



Seja a tangente MT: unamos MF e MF': façamos MH = MF: tracemos HF e OK.

No triangulo FHF',

$$OF = OF' \text{ e } KF = KH$$

logo, OK é parallela a F'H e igual á metade de F'H, isto é, igual a $\frac{a}{2}$.

O ponto K, pé da perpendicular traçada do foco F sobre a tangente, pertence, pois, á circumferencia que tem 2 a como diametro (circulo principal).

O LOGAR GEOMETICO DOS SYMETRICOS D'UM FOCO D'UMA HYPERBOLE, RELATIVAMENTE ÁS TANGENTES Á CURVA, É O CIRCULO DIRECTOR TENDO COMO CENTRO O OUTRO FOCO.

NOTA.— A normal á hyperbole é a perpendicular MI sobre a tangente no ponto M de contacto,

A normal goza da propriedade de formar angulos iguaes com o raio vector FM e o prolongamento MF'' do outro.

EQUAÇAO DE HYPERBOLE

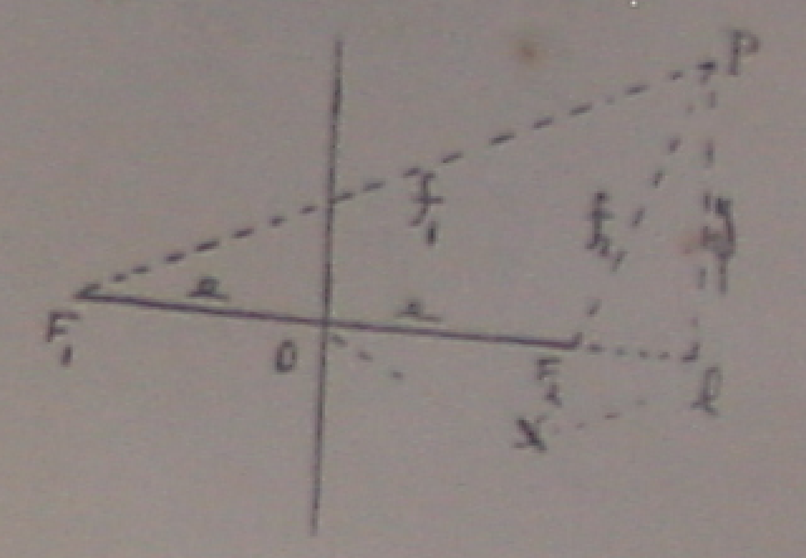
Seja P, um ponto da hyperbole, cujos focos sejam F_1 e F_2, e cujo grande eixo seja 2 a.

Sabemos que

$$f_1 - f_2 = 2a$$

e que a excentricidade da hyperbole é

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Os triangulos F_1PQ e F_2PQ nos fornecem respectivamente

$$f_1 = \sqrt{y^2 + (x + e)^2}$$

e

$$f_2 = \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

logo

$$2a = \sqrt{y^2 + (x + e)^2} - \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

$$\sqrt{y^2 + (x + e)^2} = 2a + \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

$$y^2 + x^2 + 2ex + e^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x - e)^2} + y^2 + x^2 - 2ex + e^2$$

$$4ex = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

$$ex = a^2 + a\sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

$$ex - a^2 = a\sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

$$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2(y^2 + x^2 - 2ex + e^2)$$

$$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2$$

$$a^2(a^2 - e^2) = x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2$$

ou notando que na hyperbole

$$a^2 - e^2 = -b^2$$

vem ;

$$-a^2b^2 = -b^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

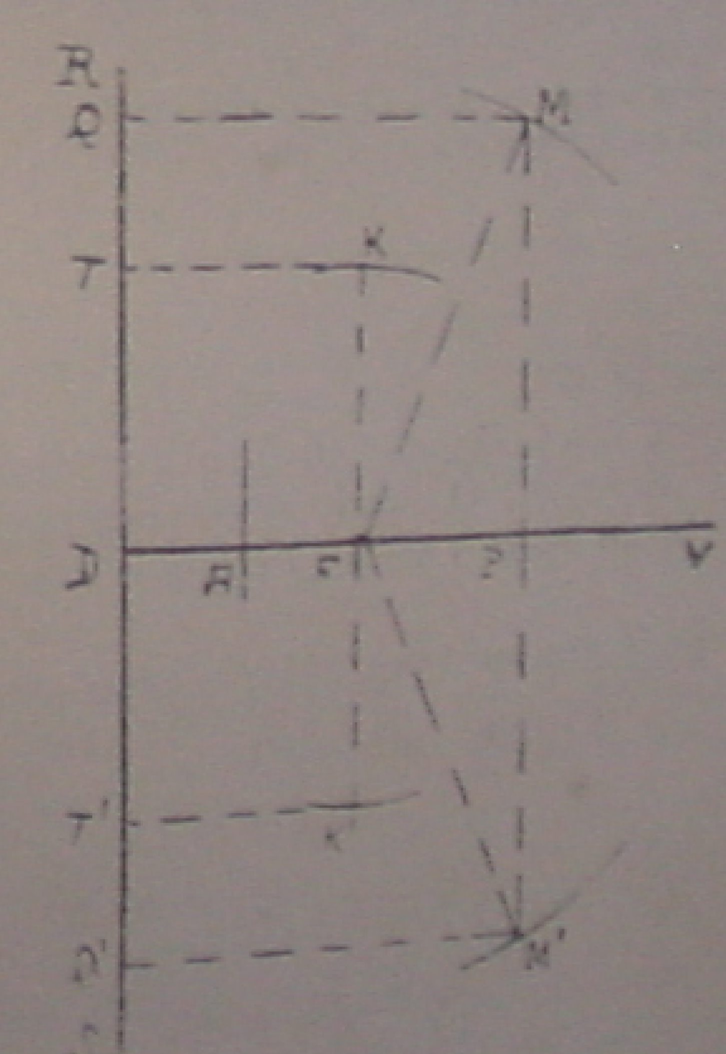
$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parabola

E' o logar geometrico dos pontos do plano que distam igualmente d'um ponto fixo, chamado FÓCO, e d'uma recta fixa, chamada DIRECTRIZ.

TRAÇAR UMA PARABOLA POR PONTOS.



Seja F o fóco, e RS a directriz. Traço, pelo fóco F, a perpendicular VD sobre RS. VD é o EIXO da parabola.

O meio de DF, o ponto A, pertence á curva; pois, AF = AD.

O ponto A é o VERTICE da parabola.

Traço em F, a perpendicular sobre o eixo, e tomo $FK = FK' = FD$.

A distancia FD chama-se PARAMETRO da parabola.

Os pontos K e K' são pontos da curva, pois $FK = FD = KT$ e $FK' = FD = K'T'$.

Tomo um ponto P qualquer, a partir de A, e traço uma perpendicular neste ponto.

Com PD como raio e F como centro, traço arcos, que cortam a perpendicular em M e M': estes ultimos pontos tambem são pontos da parabola: pois,

$$PD = MF = MQ$$

$$PD = M'F = M'Q'$$

Tomando varios pontos analogos a P, e fazendo a mesma construcção, determino quantos pontos quizer. Unindo esses pontos por uma linha continua, terei uma parabola.

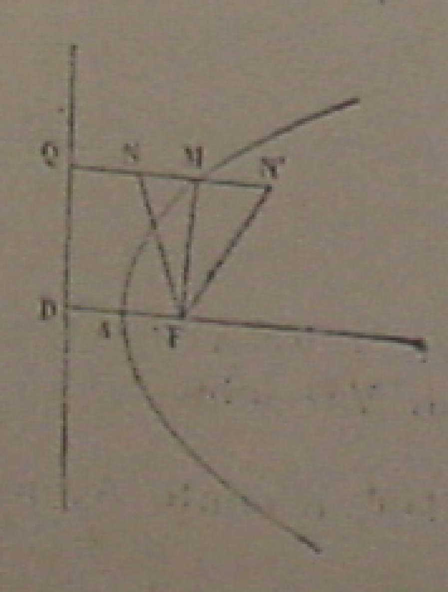
Podemos tomar o ponto P a partir de A, na direcção do fóco, á direita ou á esquerda de F, pouco importa.

—

Theorema 193. — Um ponto sendo exterior a uma parabola, sua distancia ao fóco é maior do que a distancia á directriz. O ponto sendo interior á curva, sua distancia ao fóco é menor do que a distancia á directriz.

1º Seja N um ponto exterior á parabola; temos:

$$NF > MF - MN$$



mas,

$$MF = MQ$$

logo,

$$NF > NQ$$

2º Seja N' o ponto interior á parabola; temos:

$$N'F < MF + MN'$$

mas,

$$MF = MQ$$

logo,

$$N'F < MQ + MN'$$

$$N'F < N'Q$$

—

A PARABOLA PODE SER CONSIDERADA COMO O LIMITE PARA O QUAL TENDE UMA ELLIPSE, QUANDO UM DE SEUS FÓCOS FICANDO FIXO, O OUTRO AFASTA-SE PARA O INFINITO.

O circulo director da ellipse, passa a ser a directriz da parabola.

O circulo principal passa a ser tangente á parabola no vertice.

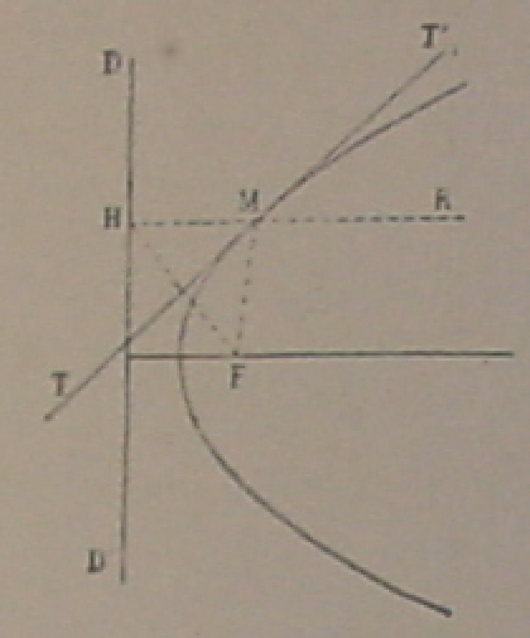
As propriedades da ellipse são, pois, exactas, no limite, isto é, quando a ellipse transformou-se em parabola.

—

A TANGENTE Á PARABOLA FORMA ANGULOS IGUAES COM O RAIO VECTOR E A PARALLELA AO EIXO PELO PONTO DE CONTACTO.

—

TRAÇAR UMA TANGENTE Á PARABOLA POR UM PONTO M DADO SOBRE A CURVA.



Tendo traçado o raio vector FM e a recta MH perpendicular sobre a directriz DD', basta traçar a bissectriz do angulo HMF. será a tangente á parabola no ponto M.

Para obter-se a normal, bastaria traçar pelo ponto M a perpendicular á tangente TT'.

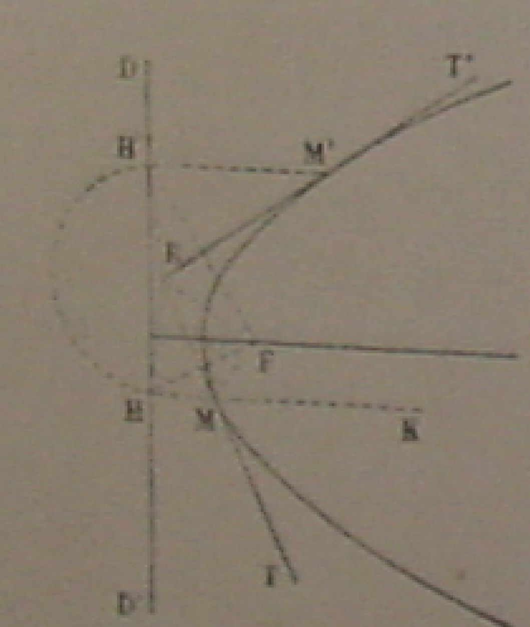
—

Traçar uma tangente á parabola, por um ponto R exterior á curva.

Descrevo com R como centro e RF como raio um circulo que corta a directriz em H e em H'.

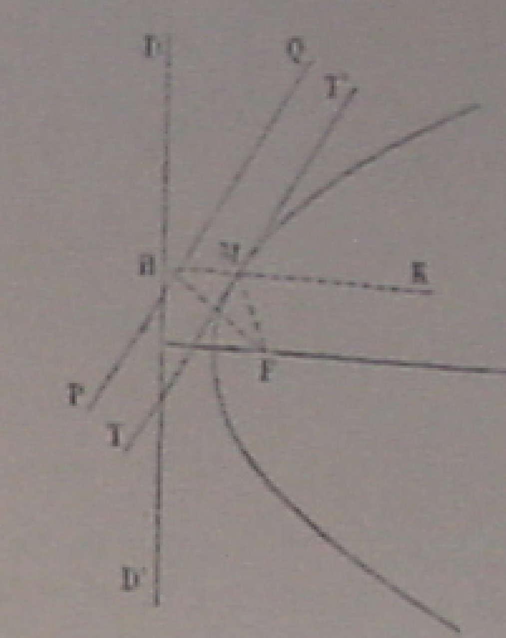
Pelos pontos H e H', traço as parallelas HM e H'M' ao eixo,

Determino assim os pontos M e M', de contacto, das tangentes RT e RT'.



—

Traçar uma tangente á parabola, parallelamente a uma direcção dada PQ.



Do foco F, traço a perpendicular sobre PQ. Esta perpendicular encontra a directriz em H.

A perpendicular ao meio de FH é a tangente procurada.

Pelo ponto H, traçando a parallela HK ao eixo determino o ponto M de contacto.

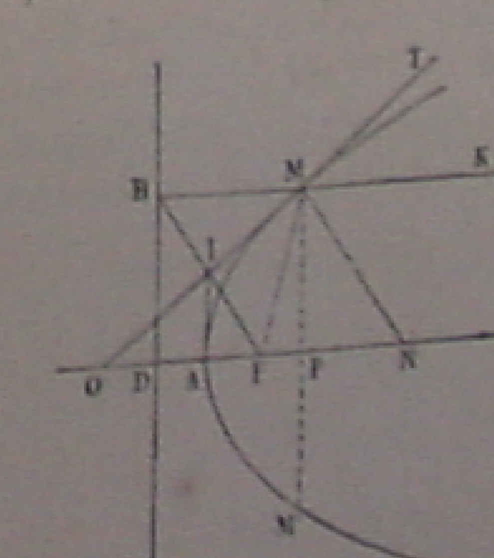
—

O logar geometrico das projecções do fóco d'uma parabola sobre as tangentes á curva, é a perpendicular ao eixo, no vertice da parabola.

—

Theorema 194. — Na parabola, a sub-normal é constante e igual ao parametro, isto é, á distancia DF do fóco á directriz.

Seja MN, a normal do ponto M.



A distancia PN, projecção de MN sobre o eixo, é chamada SUB-NORMAL.

Os triangulos HDF, MPN são iguaes, como tendo $DH = MP$, o angulo $D =$ ao angulo P (como rectos), e o angulo $DHF =$ ao angulo PMN (lados respectivamente parallelos).

Logo,

$$PN = DF$$

—

NOTA.— A distancia OP, projecção da tangente MO sobre o eixo, chama-se *sub-tangente*; é igual a **2AP**.

Com effeito,

$$IA = \frac{DH}{2} = \frac{MP}{2}$$

e, em consequencia da semelhança dos triangulos AOI e OMP, temos:

$$OA = \frac{OP}{2}$$

donde,

$$OP = 2AP$$

Logo, o vertice da parabola divide a sub-tangente ao meio.

—

Theorema 195.— O quadrado da perpendicular MP, d'um ponto M qualquer da curva sobre o eixo AN, está n'uma razão constante com a distancia do vertice A a essa perpendicular (figura precedente).

$$\left.\begin{aligned} OF &= MF = MH = DP \\ OF - AF &= DP - AD \\ OA &= AP \end{aligned}\right\}$$

$$OP = 2AP$$

$$\left.\begin{aligned} HM &= FN \\ HM &= DP \end{aligned}\right\}$$

$$FN = DP$$

$$\left.\begin{aligned} FN - FP &= DP - FP \\ PN &= DF \end{aligned}\right\}$$

No triangulo rectangulo OMN, temos:

$$MP^2 = OP \times PN$$

$$MP^2 = 2AP \times DF = 2DF \times AP$$

logo,

$$\frac{MP^2}{AP} = 2DF = 2p = \text{constante}$$

—

NOTA.—A curva representativa do trinômio do 2.º grão é sempre uma parabola.

Seja P, um ponto da curva representativa do trinômio,

$$y = ax^2 + bx + c$$

Sejam x e y suas coordenadas.

Já sabemos, pela algebra, que o trinômio do 2º grão é uma funcção continua.

O coefficiente de x^2 sendo positivo, a funcção varia de $+\infty$, para $x = -\infty$, passa por um valor minimo $\frac{4ac - b^2}{4a}$, para a abcissa $-\frac{b}{2a}$, e torna a crescer até $+\infty$, para $x = +\infty$.

Seja OX e OY os eixos de coordenadas. Pelo ponto P, traço PS, parallela a OX.

Seja T, o ponto minimo da curva. Traço, pelo ponto T, a parallela OX.

Se conseguirmos demonstrar que

$$\frac{PA^2}{TA} \text{ constante,}$$

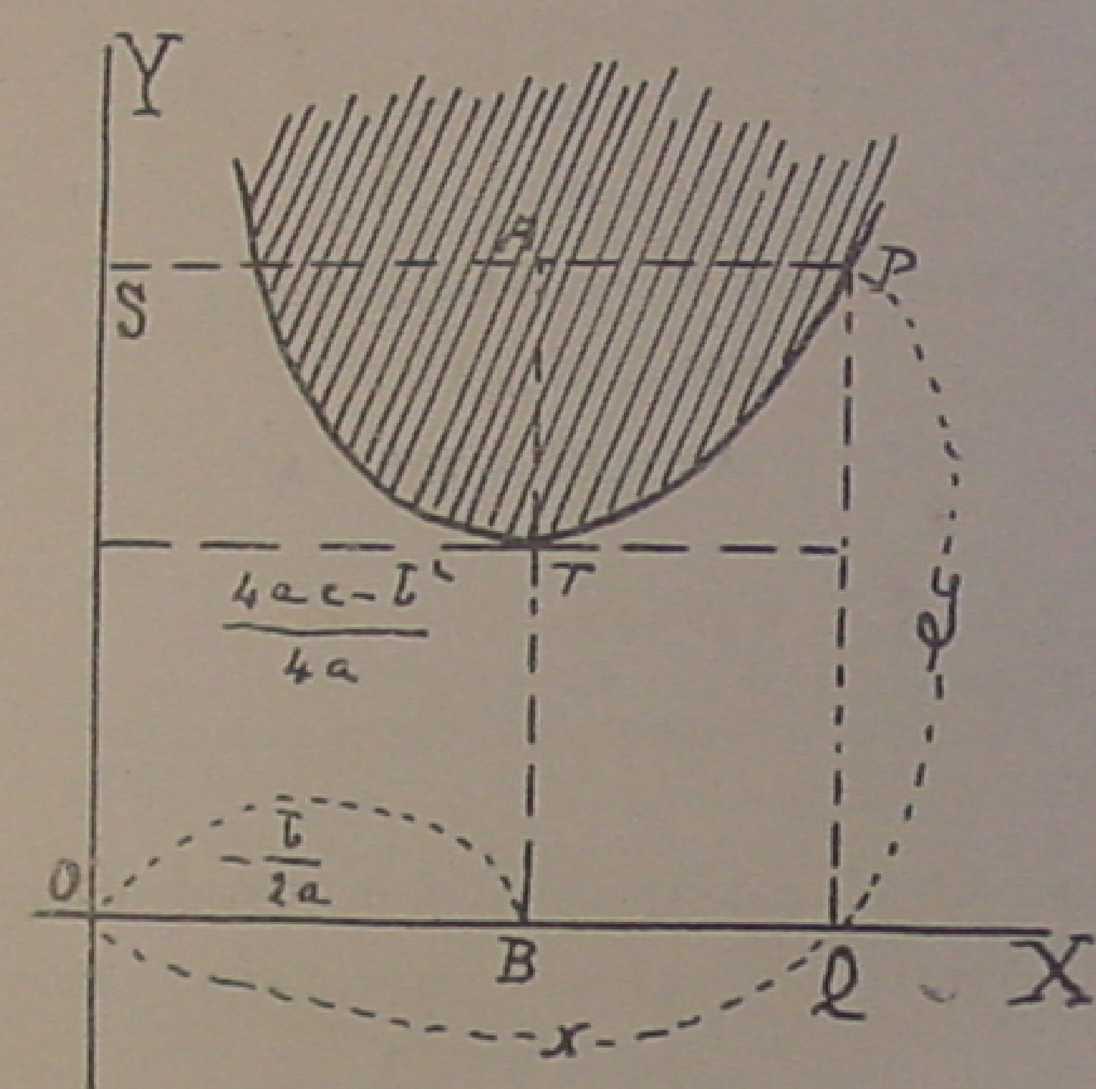
teremos demonstrado que a curva é uma parabola.

Com effeito,

$$PA = PS - AS = OQ - OB = x + \frac{b}{2a}$$

$$PA^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

e



$$y = a\,x^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

logo

$$TA = AB - TB = PQ - TB$$

$$TA = y - \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$TA = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] - \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$TA = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} - \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$TA = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

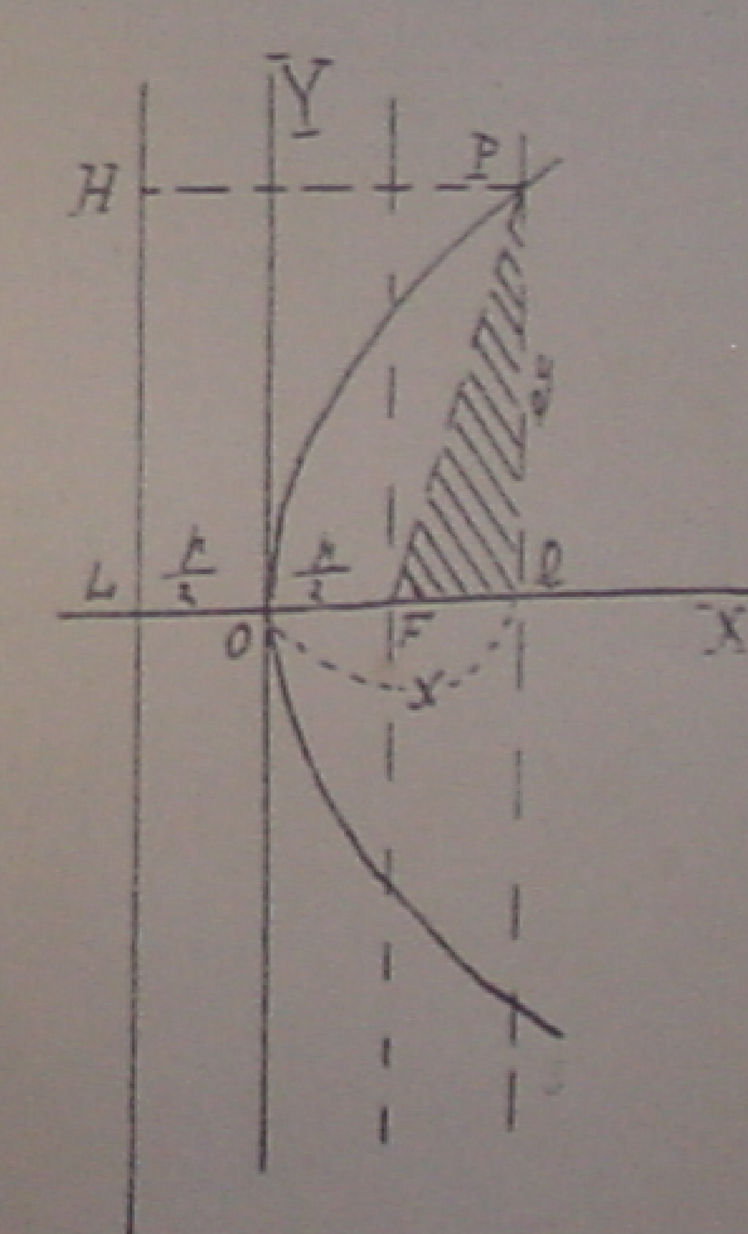
logo

$$\frac{PA^2}{TA} = \frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{1}{a} = \text{constante}$$

—

Equação da Parabola

Seja P, um ponto de curva, x e y suas coordenadas.



$$PH = x + \frac{p}{2}$$

$$PF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$PH^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$PH^2 = PF^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

As tres curvas que acabamos de estudar: a *ellipse*, a *hyperbole* e a *parabola*, são chamadas *secções conicas*.

I.— A *ellipse* é a intersecção de um cône de revolução com um plano obliquo ao eixo e que encontra todas as geratrizes d'um mesmo lado do vertice.

II—A *hyperbole* é a intersecção d'um cône de revolução com um plano obliquo ao eixo e que encontra as duas folhas do cône.

III.— *Parabola* é a intersecção d'um cône de revolução com um plano parallelo a uma das geratrizes.

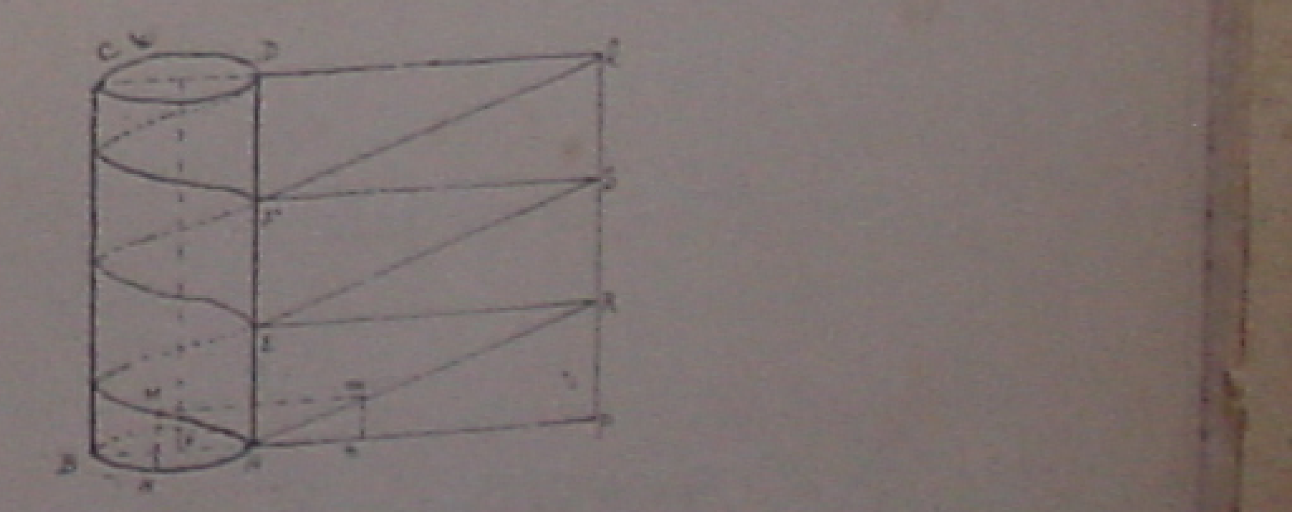
Algumas curvas notaveis

HELICE

Consideremos um cylindro ABCD recto e de base circular, e APQD um rectangulo tendo por altura uma das geratrizes do cylindro e por base uma recta igual á circumferencia da base do cylindro rectificada.

Tendo dividido a altura AD em partes iguaes AE, EF, FD, e traçadas as diagonaes AR, ES, FR dos rectangulos formados traçando ER e FS parallelas a AP, enrola-se o plano do rectangulo sobre a superficie lateral do cylindro, as diagonaes AR, ES, FQ formarão a curva chamada HELICE.

Cada parte da curva formada por uma diagonal é uma ESPIRA e a distancia AE comprehendida entre duas espiras consecutivas, é chamada ALTURA OU PASSO DA HELICE.



Chama-se ORDENADA d'um ponto M da helice, a perpendicular MN traçada d'este ponto sobre o plano da base do cylindro.

A porção AN da circumferencia da base, comprehendida entre a origem A da helice e o pé da ordenada do ponto M, chama-se ABSCISSA CURVILINEA d'este ponto.

O ponto M estando situado na segunda, na terceira, ... espira, a abscissa curvilinea seria a mesma AN augmentada de uma, duas, ... circumferencias.

—

Theorema 196. — A ordenada d'um ponto qualquer M da HELICE é proporcional á abscissa curvilinea d'este ponto (fig. precedente).

O ponto M é a posição tomada sobre a superficie do cylindro por um ponto m da diagonal AR, cuja distancia mn á base do rectangulo é igual a MN; a abscissa curvilinea é, pois, igual a An.

Dos triangulos semelhantes Amn e ARP, deduzimos:

$$\frac{mn}{RP} = \frac{An}{AP} \text{ ou } mn = An.\frac{RP}{AP}$$

Chamando h o passo de helice, r o raio de base do cylindro, temos, substituindo mn e An pelos respectivos valores MN e arco An:

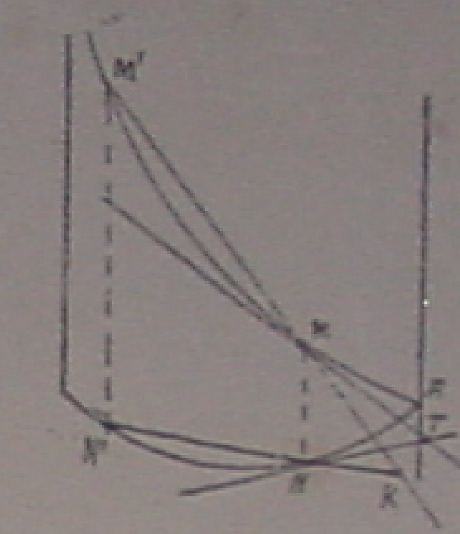
$$MN = \text{arco } AN.\frac{h}{2\pi r}$$

notando que $2\pi r$ é uma constante.

—

Theorema 197. — A sub-tangente á helice é igual á abscissa curvilinea do ponto de contacto.

Chama-se SUB-TANGENTE a recta NT comprehendida entre o pé N da ordenada MN do ponto de contacto d'uma tangente MT e o ponto T em que a tangente encontra o plano da base do cylindro.



Para provar que NT = arco AN consideremos uma secante M'MK, tracemos as ordenadas MN e M'N', unamos NN' e prolonguemos até o encontro da secante no ponto K.

Os triangulos semelhantes MNK e M'N'K dão:

$$\frac{NK}{N'K} = \frac{MN}{M'N'}$$

logo

$$\frac{NK}{N'K - NK} = \frac{MN}{M'N' - MN}$$

mas

$$N'K - NK = \text{corda } NN'$$

$$M'N' = \text{arco } AN'.\frac{h}{2\pi r}$$

$$MN = \text{arco } AN.\frac{h}{2\pi r}$$

Substituindo e simplificando, achamos:

$$\frac{NK}{\text{corda } NN'} = \frac{\text{arco } AN}{\text{arco } NN'}$$

logo

$$KK = \text{arco } AN.\frac{\text{corda } NN'}{\text{arco } NN'}$$

Notemos que, quando a secante gira em torno do ponto M para tornar-se tangente, a razão

$$\frac{\text{corda } \overline{NN'}}{\text{arco } \overline{NN'}}$$

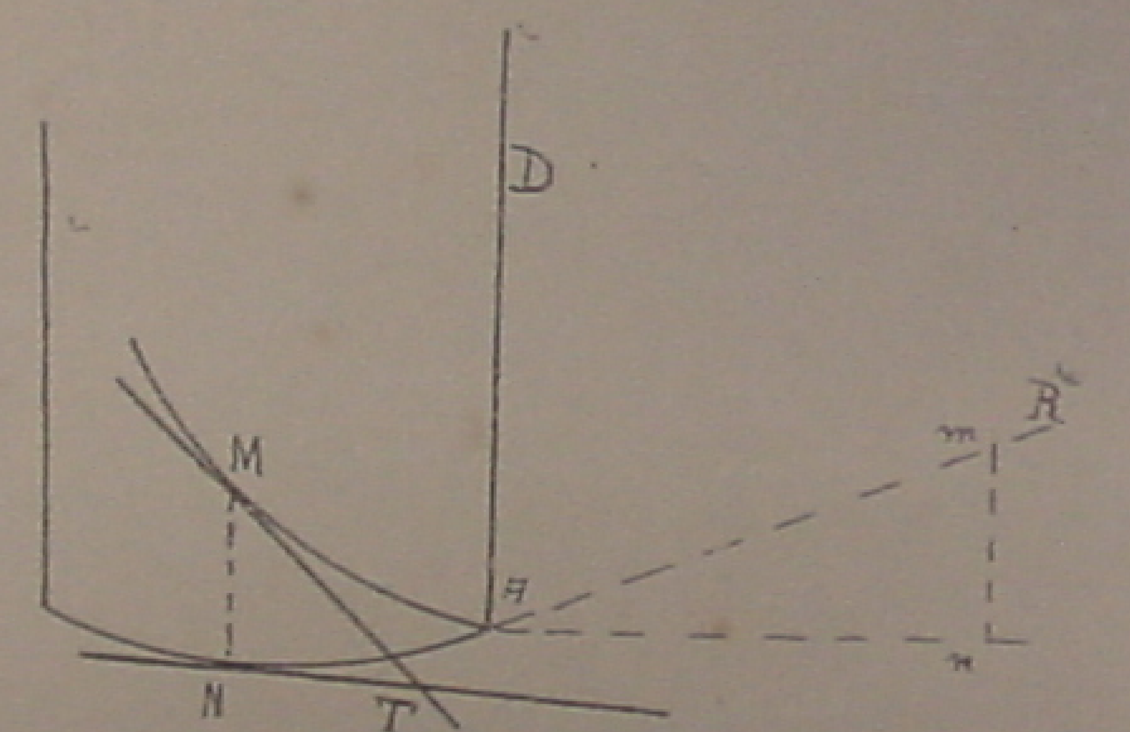
tende para 1.

Logo, quando MK passou a ser a tangente MT, e a linha NK a sub-tangente NT:

$$NT = \text{arco } AN.$$

—

Theorema 198.— A tangente á helice forma um angulo constante com a geratriz do cylindro traçada pelo ponto de contacto.



Seja TM uma tangente, MN a geratriz que passa pelo ponto de contacto, NT a sub-tangente, e m o ponto da diagonal geratriz AR que passa a ser o ponto M da helice.

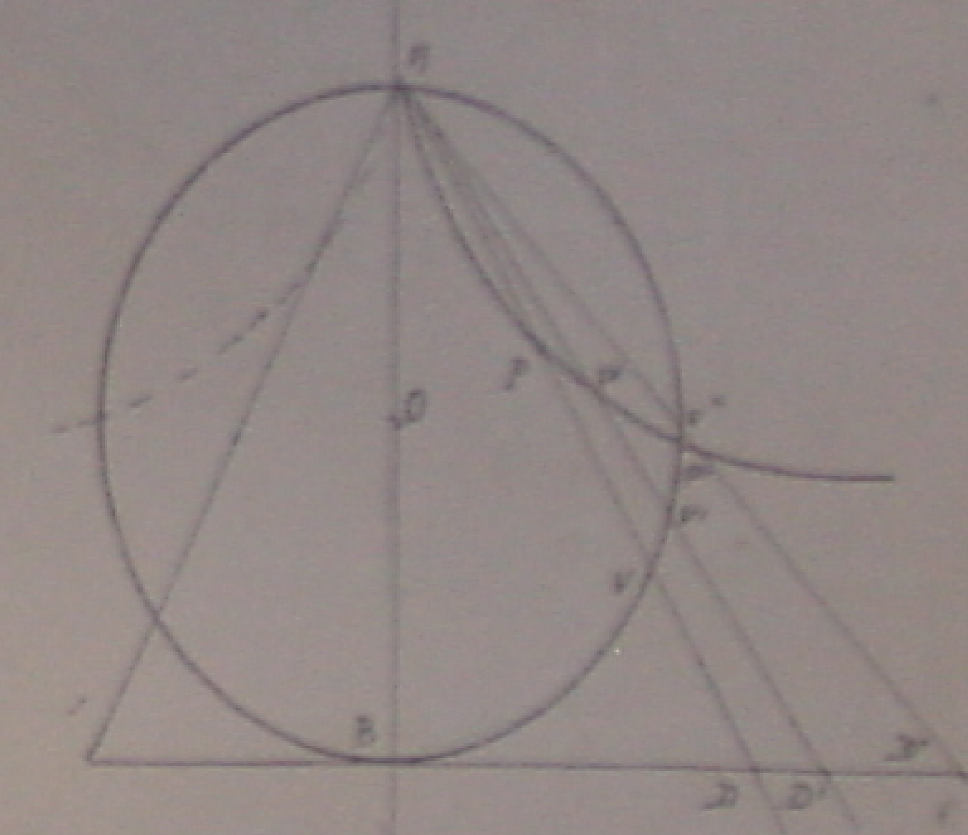
Os triangulos MNT e Amn são iguaes : são rectangulos em N e em n, têm o lado MN = ao lado mn, e o lado NT = ao arco AN = An. Logo, o angulo NMT = ao angulo Amn, isto é, um angulo constante.

—

Cissoide

Seja um circulo O, um diametro AB, e a tangente em B.

Traço, pelo ponto A uma recta qualquer AD, levo a medida VD em AP; o logar geometrico do ponto P é uma curva chamada CISSOIDE.



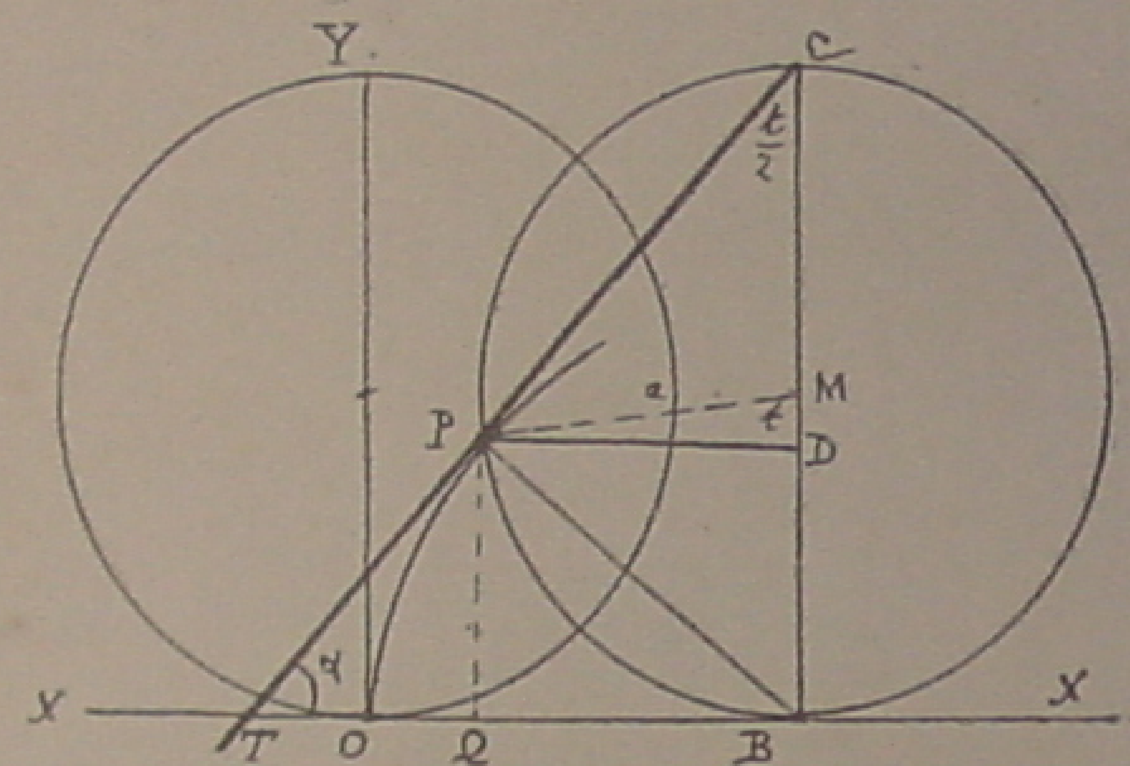
O ponto A é um ponto de reversão.

A tangente ao circulo O, traçada pelo extremo B do diametro AB, é ASYMPTOTA da cissoide.

—

Cycloide

E' o logar geometrico d'um ponto d'um circulo que rola SEM ESCORREGAR sobre uma recta illimitada.



$$OB = TB = at$$

$$\text{sen } t = \frac{PD}{PM} = \frac{PD}{a} \quad PD = a \text{ sen } t$$

$$\cos t = \frac{MD}{PM} = \frac{MD}{a} \quad MD = a \cos t$$

$$x = OP = OB - QB = at - PD$$

$$x = at - a \text{ sen } t = a\,(t - \text{sen } t)$$

$$y = PQ = MB - MD = a - a \cos t$$

$$y = a\,(1 - \cos t)$$

logo

$$x = a\,(t - \text{sen } t)$$

$$y = a\,(1 - \cos t)$$

são as equações da cycloide.

—

Epicycloide

E' o logar geometrico d'um ponto d'um circulo que rola SEM ESCORREGAR sobre um outro circulo dado.

—

Hypocycloide

E' o logar geometrico d'um ponto d'um circulo que rola SEM ESCORREGAR por dentro d'um circulo dado.

———

Problemas de Geometria dados em prova escripta no Collegio Pedro II

1919

---

1 — Dado o rectangulo ABCD, construir um rectangulo semelhante a elle e de area dupla.

2 — Calcular a area d'um triangulo cujos lados são respectivamente iguaes a 5^m, 6^m e 7^m.

3 — Calcular a area e o volume d'uma esphera inscripta em um cubo de aresta 1^m.

4 — Um triangulo rectangulo tem para lados 3^m, 4^m e 5^m. Calcular a altura correspondente á hypotenusa, e os segmentos determinados pela altura sobre a hypotenusa.

5 — Calcular a aresta d'um cubo cujo volume seja os $^3/_4$ d'um outro cubo cuja aresta é $3^m\ ^1/_2$.

6 — Em uma esphera de $1^m,2$ de raio, calcular a area d'uma zôna cuja altura é $0^m,45$.

7 — Um triangulo tem por lados 5^m, 7^m e 8^m. Determinar a altura d' um parallelogrammo de base 12^m e equivalente a esse triangulo.

8 — Calcular o volume d'um tronco de prisma triangular recto, cuja base é um triangulo equilatero de lado 4^m e cujas arestas lateraes medem 5^m, 6^m e 7^m.

9 — Calcular a area do circulo circumscripto a um quadrado cuja diagonal é igual a 1 2.

10 — Dado o triangulo ABC, rectangulo em A, tira-se uma parallela ED a AC; ED tem 5^m e é a terça parte de AC. Suppondo BD = 12^m, qual é a area do circulo circumscripto.

11 — Dado um rectangulo e unindo-se os meios dos lados, obtem-se um losango e 4 triangulos. Pede-se: 1° - a relação entre o losango e o rectangulo; 2° - entre o losango e um dos triangulos; 3-° entre um dos triangulos e o rectangulo.

12 — Calcular o volume do cône circumscripto ao tetraedro regular cuja aresta mede 10^m.

13 — Si fizermos um segmento rectilineo AB, dividido em 13 partes iguaes, girar em torno do terceiro ponto, determinar a relação existente entre os arcos descriptos pelos extremos.

14 — Si unirmos os meios dos lados d'um losango, este fica dividido em um rectangulo e quatro triangulos; pede-se a relação existente entre a area do rectangulo e a do losango.

15 — Determinar a area e o volume d'um tronco de cône de revolução de bases parallelas, cujos raios das bases medem respectivamente 5^m e 3^m e cuja geratriz mede 7^m.

16 — Achar a relação numerica entre os contornos e as arestas d'um circulo e do triangulo equilatero inscripto.

17 — Unindo-se os meios dos lados consecutivos d'um quadrado, obtem-se um outro quadrado. Determinar as relações numericas entre os contornos e entre as areas dos dois quadrados.

18 — Calcular a area e o volume d'uma pyramide quadrangular regular, em que o lado da base é igual á aresta da pyramide e mede 4^m.

19 — Si tiramos por cada um dos vertices d'um triangulo uma parallela ao lado opposto, formaremos

um triangulo circumscripto ao primeiro. Pede-se a relação entre as areas e os perimetros d'esses dois triangulos.

20 — Calcular a area do decagono regular inscripto em um circulo cujo raio é igual a 5^m.

21 — Calcular o volume d'um prisma regular de base hexagonal inscripto em um cylindro de revolução cujo raio da base é igual a 4^m e a altura 12^m.

22 — Dado um polygono em que um dos lados mede $16^m,5$, calcular o lado homologo d'um polygono semelhante que valha os $^3/_5$ do primeiro.

23 — Calcular a area do corpo gerado por um triangulo equilatero de 4^m de lado, girando em torno de um de seus lados.

24 — Calcular o volume d'um tetraedro regular cuja aresta é igual á diagonal do quadrado inscripto no circulo de area 314 metros quadrados.

25 — Um triangulo tem por lados 3^m, 4^m e 5^m, pede-se os raios das circumferencias inscripta e circumscripta.

26 — Qual a relação entre as areas d'um hexagono regular inscripto e um quadrado circumscripto n'um circulo de raio 10 metros.

27 — Uma pyramide tem a base quadrada e 4 metros de lado com 18 de altura. Ao terço do vertice faz-se uma secção parallela á base. Pede-se o volume do tronco de pyramide.

28 — Em um quadrado cujo perimetro é 16 metros, descreve-se uma semi-circumferencia sobre um lado como diametro. Calcular a area limitada pelo arco e pelos outros lados do quadrado.

29 — Calcular a area d'um tronco de cône gerado pela revolução d'um trapezio rectangulo cujo lado obliquo mede 12 metros e cujas bases são respectivamente 6 metros e 8 metros.

30 — Calcular a aresta d'um tetraedro regular equivalente á somma de dois outros tetraedros regulares cujas arestas são 4^m e 5 metros.

31 — Calcular a somma dos angulos internos do polygono regular que tem 9 diagonaes.

32 — Calcular a area d'um circulo circumscripto a um quadrado cuja area é $2^{m2},88$.

33 — Calcular o volume do cône equilatero que inscreve uma esphera de area $12^{m2},66$.

34 — Calcular a area d'um triangulo equilatero cujo lado é 2 metros.

35 — Calcular a area d'um trapezio cujos lados são 5, 8, 6 e 7 metros.

36 — Calcular a area e o volume do parallelepipedo rectangular em que cada diagonal mede 10 metros, e duas dimensões medem respectivamente 3 e 4 metros.

37 — Uma pyramide recta tem por base um quadrado com 2 metros de lado e para altura a geratriz d'um cône (recto) de revolução, cuja altura é 3 metros, e cuja circumferencia da base mede $126^m,56$. Pede-se o volume da referida pyramide.

38 — Em um circulo de raio 100 metros, determinar, em gráos, a medida dos angulos inscriptos em um arco de 130 metros.

39 — Avaliar a area d'um losango, cujas diagonaes são 5^m e 6 metros.

40 — Calcular a aera total e o volume d'uma pyramide hexagonal regular, cuja altura mede 10 metros, e cujo lado da base mede 6 metros.

41 — Determinar a area do circulo equivalente ao hexagono regular inscripto no circulo de area $3^{m2},14$.

42 — Achar o volume d'um octaedro regular cuja aresta mede 5 metros.

43 — D'um ponto situado a 5 metros d'um circulo,

cujo raio é 10 metros, tira-se uma tangente a esse circulo. Pede-se o comprimento da tangente.

44 — Calcular a area d'um triangulo, cujos lados são $0^m,4$, $0^m,7$ e $0^m,6$.

45 — Calcular a area da superficie total e o volume do cylindro gerado pela revolução do rectangulo ABCD em torno do lado AB, sabendo-se que AB mede 30 metros e que a area de ABCD é igual a 600 metros quadrados.

46 — Calcular a area do sector circular cujo angulo central mede 12°, suppondo-se o raio igual a 1 metro.

47 — Calcular a area total do parallelepipedo rectangulo que tem dor base um quadrado de lado $0^m,3$, e sabendo-se que a diagonal da face lateral mede $0^m,5$.

48 — Calcular o volume da cunha espherica de 12° em uma esphera cuja area é 1256 metros quadrados.

49 — Achar a area d'um sector circular correspondente ao arco de 90°, sabendo-se que o raio é igual a $0^m,25$.

50 — Achar a relação numerica entre o volume d'uma esphera e o d'um cône de areas equivalentes.

51 — Calcular a area total e o volume d'um tronco de cône de revolução, cujas bases têm por raios 6^m e 10 metros, e cuja altura mede 8 metros.

52 — Em um triangulo cujos lados medem respectivamente 18, 15 e 11 metros, calcular as partes em que fica dividido o lado de 18 metros pela bissectriz do angulo opposto.

53 — Calcular o volume de um cône cuja altura é a diagonal d'um quadrado de 10 metros de lado, e cujo raio da base é a aresta d'um cubo de 513 metros cubicos.

54 — Calcular a area do trapezio cujas bases são 4

e 8 metros, e cujos lados não parallelos são 3 e 5 metros.

55 — Calbular a area total d'um tronco de cône de revolução de bases parallelas, cuja altura mede 4 metros, e cujas bases têm por raios respectivamente 8^m e 5 metros.

56 — Calcular o volume d' um tetraedro regular circumscripto a uma esphera cujo raio é igual a $1^m,5$.

57 — Determinar os lados e as alturas d'um triangulo rectangulo em que a hypotenusa fica dividida, pela altura correspondente, em segmentos que medem respectivamente 24^m e 6 metros.

58 — Calcular as areas dos quadrados inscripto e circumscripto a uma circumferencia que, rectificada, é igual a $1^m,57$.

59 — Construir um tetraedro semelhante a um tetraedro dado, e que seja os $^2/_5$ do primeiro.

1920

1 — Seja ABC, um triangulo, e DE uma parallela ao lado BC. Suppondo $AB = 18^m$, $AD = 6^m$ e $AC = 12^m$, pede-se para calcular AE e EC.

2 — Calcular a area do trapezio cujas bases medem respectivamente 8^m e 6^m, e cuja altura mede $3^m,5$.

3 — Dois angulos adjacentes AOC e COB têm seus lados exteriores em linha recta. O angulo AOC mede 128°40'. Pede-se para calcular o angulo formado pela bissectriz OM do angulo COB com o lado OB.

4 — Seja um circulo de raio 5^m. Por um ponto B, exterior ao circulo, traça-se uma secante que passa pelo centro do circulo, e uma tangente BT. Sabendo-se que a parte exterior da secante mede 8^m, pede-se, para calcular a tangente.

5 — O lado d' um hexagono regular vale $2^m,4$. Pede-se a area.

6 — Sendo 1130976^{m^2} a area d'uma esphera, pede-se o valor do raio.

7 — N'um circulo de raio 5^m, determinar o comprimento d'um arco de $23^m,30'$.

8 — O volume d' uma esphera é de $113^{m^3},04$: pede-se o diametro.

9 — Achar a area d'uma corôa circular, sabendo-se que o raio da pequena circumferencia mede 3^m, e que a metade da corda da grande, tangente á pequena, mede 4^m. (As duas circumferencias têm o mesmo centro.

10 — O apothema d'um hexagono regular vale 2^m ; pede-se a area.

11 — Um prisma hexagonal regular tem de altura 12^m, e lado de base 6^m ; pede-se o volume.

12 — D'um ponto A, exterior a uma recta, traça-se uma perpendicular AB e duas obliquas AE e AF. Sabendo-se que $AB = 4^m$, $BE = 3^m$ e $BF = 5^m$, pede-se os comprimentos das obliquas AE e AF.

13 — Calcular a area da corôa formada por dois circulos de mesmo centro O, sabendo-se que o diametro do pequeno circulo mede 5^m, e que a differença entre o diametro do grande circulo e o do pequeno vale 3^m.

14 — A area d'uma esphera vale $3^{m^2},1416$, pede-se o volume.

15 — N'um circulo de raio 1, tem-se um arco de comprimento 1. Pede-se o angulo central correspondente.

16 — Calcular o lado do quadrado equivalente ao rectangulo cuja area é de $90^{m^2},10$.

17 — N'um triangulo ABC, traça-se a bissectriz AD do angulo A. Sendo os lados AC e AB respectivamente iguaes a 4^m e 8^m, pedem-se os segmentos determinados sobre o lado CB pela bissectriz AD.

18 — N'um triangulo rectangulo ABC, a hypotenusa BC vale vale 29^m. Traçando a perpendicular AH do vertice A sobre BC, determina-se um segmento $BH = n = 15^m\frac{6}{29}$; pedem-se os cathetos AB, CA e a altura AH.

19 — Calcular a area d'um triangulo cujos lados são $a = 1^m,4$, $b = 1^m,2$ e $c = 1^m$.

20 — A superficie total d'um cubo vale $13^{m^2},5$. Pede-se o seu volume e o comprimento da diagonal.

21 — Os segmentos d'uma corda valem respectivamente 9^m e 6^m. Traça-se um diametro AB, que corte a corda dada n'um ponto E, distante do centro de $3\sqrt{2}$.
Pede-se o diametro AB.

22 — Sendo $AB = 1^m$ o lado do hexagono regular inscripto ; calcular CE, lado do hexagono regular circumscripto.

23 — Calcular a area do octogono regular inscripto n'um circulo de raio $= 10^m$.

24 — O diametro AB da base superior d'um tronco vale 6^m. A aresta BD do tronco vale 25^m, e a altura vale 24^m. Pede-se a area do circulo da base inferior.

25 — A altura d'uma pyramide regular quadrada vale $2^m,4$; o lado do quadrado da base vale $1^m,4$. Pede-se a area lateral e total.

26 — A obliqua $EF = 3\sqrt{2}$, em relação ás parallelas AB e CD. O angulo EFD, da obliqua com uma das rectas parallelas CD, é de 45°. Pede-se para calcular EG, perpendicular de E sobre CD.

27 — N'um triangulo, cujos lados são 3^m, 4^m e 5^m, calcular o raio do circulo circumscripto.

28 — Uma recta $AB = 1 + \sqrt{5}$: pede-se o valor de AC, sendo C o ponto que divide a recta em media e extrema razão.

29 — As diagonaes d'um losango valem respectivamente $8^m,5$ e $6^m.3$: pede-se a area e o perimetro do losango.

30 — O lado de um decagono regular vale 3^m. Pede-se o apothema.

31 — Calcular a area d'um hexagono regular cujo apothema vale $1^m.7$.

32 — A diagonal d'um quadrado vale $2^m.3$: pedem-se a area, o apothema e o perimetro da quadrado.

33 — Tres planos parallelos são cortados por uma secante em A, B e C, de tal modo que $AB = 6^m.4$ e $BC = 3^m.5$.

Uma outra secante, que corta os tres planos em D, E e F, mede, de D a F, $25^m.6$. Pedem-se os segmentos DE e EF.

34 — Os lados d'um triangulo ABC valem $AB = 6^m$, $AC = 5^m$ e $BC = 11^m$. Toma-se $AD = 4^m$ e traça-se DE parallela a BC. Pede-se AE, CE e DE.

35 — Os lados d'um triangulo valem respectivamente 7^m, 5^m e 10^m. A bissectriz d do angulo formado pelos dois primeiros lados determina sobre o terceiro dois segmentos x e y.

Pedem-se os segmentos x e y, e o valor da bissectriz d, sabendo-se que $bc = d^2 + xy$.

36 — A diagonal d'um rectangulo vale $1^m.7$ e a sua area total vale $1^{m^2}.2$. Pedem se os lados.

37 — Seja um circulo de raio $= 10^m.5$ e dois diametros orthogonaes AB e CD.
Calcular a area do segmento formado pela corda AC.

38 — Calcular a area d'um quadrilatero ABCD, sa-

bendo-se que os lados valem respectivamente 9^m, 7^m, 5^m e 11^m, e que uma diagonal vale 14^m.

39 — A area d'uma esphera vale $3^{m^2},14$. Pede-se o volume.

40 — A base d'um parallelepido é um rectangulo cujos lados valem $2^m,1$ e 2^m. A diagonal d'este rectangulo é igual á altura do parallelepido. Pede-se a superficie total e o volume.

41 — A base d'um prisma obliquo é um quadrado cujo raio vale $1^m,2$. A aresta lateral vale $3^m,5$ e a projecção d'um dos vertices cae no centro do quadrado de base inferior. Pede-se o volume.

42 — A area de um trapezio vale 690^{m^2}, a altura $18^m,4$ e a base inferior vale $54^m,48$. Pede-se a base superior.

43 — A base d'um parallelepipedo é um rectangulo cujos lados valem $0^m,5$ e $0^m,2$. A diagonal do parallelepipedo vale $1^m,4$. Pede-se a superficie total e o volume.

44 — A base menor d'um trapezio isoceles vale $4^m,6$. os lados iguaes valem $1^m,8$, e a sua projecção sobre a base vale $0^m,5$. Pede-se a area do trapezio;

45 — Um prisma hexagonal regular tem o raio da base igual a $1^m,2$ e a aresta lateral igual ao diametro da base. Pede-se a superficie total.

46 — Calcular a area d'um decagono regular cujo perimetro vale $61^m,8$.

47 — O maior segmento d'uma recta dividida em media e extrema razão é $3^m,09$. Pede-se o valor da recta.

48 — Calcular a area do parallelogrammo cuja base AB vale $9^m,25$ e cujo angulo formado pelo prolongamento de AB com o lado BC adjacente vale

45°, e sabendo-se que a projecção de BC sobre AB prolongada vale $3^m,3$.

49 — A area d'uma esphera vale $7^{m2},85$. Pede-se a area d'uma zôna cuja altura $= 0^m,5$.

50 — Um circulo tem $62^m,8$ de circumferencia. Que raio deve ter outro circulo para que a sua area seja dupla da do primeiro.

51 — Conhecendo 3 angulos d'um pentagono, respectivamente iguaes a 98°35, 87°42' e 95°32'; pede-se para calcular os dois outros angulos, sabendo-se que são iguaes.

52 — N'uma esphera de diametro $1^m,5$, um sector espherico é limitado por uma zôna cuja altura vale 5/8 do raio.

Pede-se o volume do sector.

53 — O perimetro d'uma circumferencia de circulo vale $21^m,98$: pede-se a area do circulo.

54 — Calcular a area d'um triangulo isoceles, que tem os lados iguaes valendo o dobro da base, sendo a altura igual a $2^m,36$.

55 — Calcular o volume d'uma pyramide triangular regular, sendo o raio do circulo circumscripto á base $= 1^m,5$ e a altura da pyramide $= 2^m,4$.

56 — Sendo $62^{m2},8$ a area d'um sector circular de 10^m de raio, calcular o angulo central correspondente.

57 — N'um pentagono ABCDE, o angulo A = 95°32', o angulo C = 70°53' e o angulo D = 102°39'; pedem-se os angulos B e E, sabendo-se que elles são iguaes.

58 — N'um triangulo ABC, o lado AB $= 1^m,5$, BC $= 2^m,7$ e AC $= 2^m,4$.

Pelo ponto D, tomado sobre AB a uma distancia

$0^m,5$ de A, traça-se DE parallela a BC. Pedem-se as areas dos triangulos semelhantes ABC e ADE.

59 — Os lados d'um triangulo são 8^m, 6^m e 10^m; pede-se para calcular os lados d'um triangulo semelhante ao primeiro, e tal que o perimetro do primeiro esteja para o perimetro do segundo na razão de 2 para 1.

60 — Calcular a area d'um trapezio ABCD, cujas bases AB e CD valem 6^m e 10^m, e cujos lados não parallelos AC e BD valem 3^m e 5^m. Determinar a altura h do triangulo CAE, cujos lados são conhecidos por ser AE parallela a BD.

61 — Calcular o lado CB d'um triangulo ABC, sabendo-se que o lado AC vale $0^m,5$, que a altura relativa ao vertice C vale $0^m,3$, e a projecção de CB sobre AB vale $0^m,25$.

62 — Calcular a area lateral e o volume d'um tronco de cylindro que tem as geratrizes oppostas AC $= 14^m,2$ e DB $= 18^m,4$. O diametro AB da base obliqua vale 13^m e sua projecção sobre a maior geratriz vale 5^m.

63 — A base d'um parallelepipedo recto é um rectangulo cujos lados valem $0^m,2$ e $0^m,5$. A diagonal do polyedro vale $1^m,5$. Pede-se a altura do polyedro e a area total.

64 — Calcular o lado do quadrado equivalente a um hexagono regular, cujo raio do circulo circumscripto é igual a 10^m.

65 — N'um triangulo ABC, o lado AB vale 5^m, o lado AC vale 9^m e o lado BC vale 12^m. Traça-se a bissectriz AD, e, pelo ponto D, traça-se DE parallela a AB. Pedem-se os lados do triangulo DCE.

66 — Os lados d'um triangulo ABC valem 18^m, 15^m e 24^m. A distancia AD, tomada sobre o lado AB, vale 10^m. Traça-se DE, parallela a BC, e traça-se a bissectriz AF, até seu encontro em F com DE.

Pede-se para calcular DF e EF.

67 — Os planos P e Q são parallelos, e o plano do triangulo ABC é perpendicular a ambos, O vertice B está no plano P, e o lado AC no plano Q. Os lados do triangulo valem $AB = 18^m$, $BC = 11^m$ e $AC = 14^m$.
Pede-se a distancia BD dos dois planos.

68 — Sendo 8^m, o raio do circulo circumscripto a um triangulo equilatero, calcular a area do quadrado equivalente ao triangulo.

INDICE

INDICE

1ª PARTE

2ª PARTE

3ª PARTE

4ª PARTE

5a PARTE

6a PARTE

7a PARTE

8ª PARTE

ERRATA

Na pagina 123, na quinta linha, lêr:
... os t iangulos AKV e ABC são semelhantes..

Na pagina 128, na sexta linha, lêr:

$$(KVPT) = \frac{KP}{KT} : \frac{VP}{VT}$$

Na pagina 129, na nona linha, lêr:
Uno KR e VS, e...

Na pagina 230, na ultima linha, lêr:

$$\frac{S_1}{S} = \ldots$$

Na pagina 235, na ultima linha, lêr:

$$S = b \times h$$

EDITORA
A GRANDE LIVRARIA
LEITE RIBEIRO
Sêde e officinas typographicas:
Ruas Bethencourt da Silva, 15, 17 e 19
(Antiga Santo Antonio)
e 13 de Maio, 74 e 76
RIO DE JANEIRO