

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CAMADA LIMITE TURBULENTA COM TROCA  
DE CALOR SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

LUTERO CARMO DE LIMA

Florianópolis, junho de 1979.

## A G R A D E C I M E N T O S

- A FUFMT pelo suporte financeiro.
- Ao Prof. Hyppólito do Valle Pereira Filho, pela orientação e transferência de seus conhecimentos de turbulência.
- Ao Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira que corroborou a obtenção das equações deste estudo e auxiliou-me na revisão conceitual.
- Ao DPD da UFSC na pessoa de Jaime Realino Fontanella.
- Aos Colegas Charamba e Wilson Ferreira.

À meus  
pais, sogros,  
esposa e filha

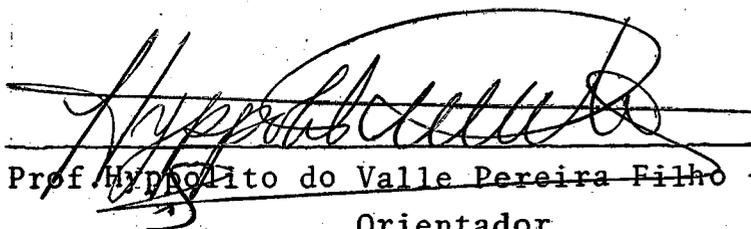
CAMADA LIMITE TURBULENTA COM TROCA  
DE CALOR SOBRE SUPERFÍCIES CURVAS

LUTERO CARMO DE LIMA

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de

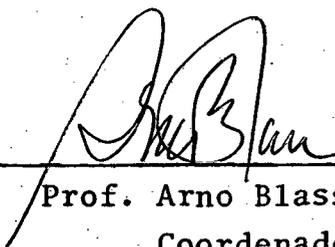
"MESTRE EM ENGENHARIA"

especialidade: Engenharia Mecânica, área: Termodéctica, e aprova  
da em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.



---

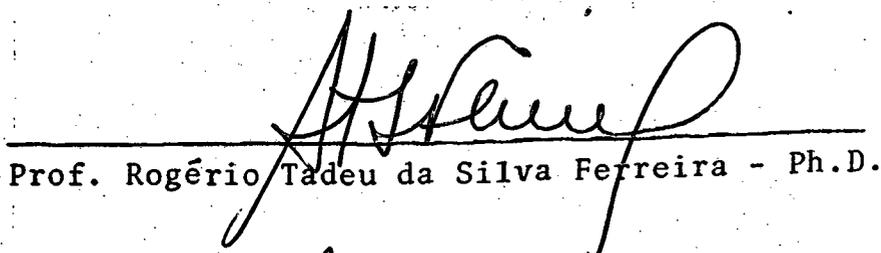
Prof. Hypólito do Valle Pereira Filho - Ph.D.  
Orientador



---

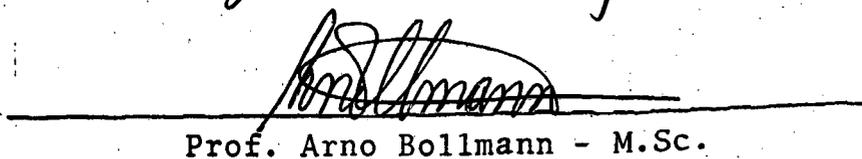
Prof. Arno Blass - Ph.D.  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



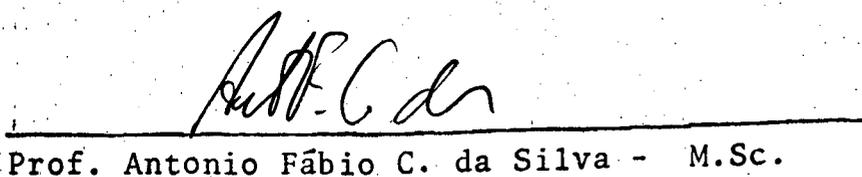
---

Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira - Ph.D.



---

Prof. Arno Bollmann - M.Sc.



---

Prof. Antonio Fábio C. da Silva - M.Sc.

## Í N D I C E

NOMENCLATURA .....	01
RESUMO .....	03
ABSTRACT .....	04
I - INTRODUÇÃO .....	05
II - FORMULAÇÃO GERAL .....	08
2.1. Equações Gerais .....	09
2.2. Hipóteses de Fechamento .....	13
2.3. Transformação por Similaridade .....	16
III - PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL .....	19
3.1. Discretização .....	19
IV - ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	25
4.1. Resultados Obtidos .....	26
4.2. Discussão dos Resultados Obtidos .....	26
4.3. Perfis e Dados Iniciais .....	31
4.4. Conclusões .....	32
BIBLIOGRAFIA .....	34
APÊNDICES:	
A-1 - Processo de média .....	36
A-2 - Análise de Ordem de Grandeza .....	37
B - Adimensionalização .....	39
C - Discretização .....	41
D - Relação dos Gráficos .....	46
E - Listagem do Programa Utilizado .....	100

$A_j, B_j, C_j, D_j$	Funções da equação da energia na forma de diferenças finitas.
$C_f$	Coefficiente de fricção.
$C_p$	Calor específico a pressão constante.
$f$	Fator de curvatura, $f = R(x) / (R(x) + y)$
$K_p, K_o$	Constantes da expressão para a viscosidade turbulenta.
$\ell$	Comprimento de mistura.
$N$	Máximo valor de $j$
$R(x)$	Raio local da superfície curva.
$U_\infty(x)$	Velocidade do escoamento potencial.
$u, v$	Componente de velocidade.
$T$	Temperatura
$u', v', T'$	Flutuações de velocidades e temperatura.
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{T}$	Componentes da velocidade e temperatura médias.
$St$	Número de Stanton = $q / \rho U_\infty C_p (T_p - T_f)$
$Re$	Número de Reynolds = $\frac{V_\infty L}{\nu}$
$V$	Velocidade normal transformada.
$Pr_r$	Número de Prandtl = $\frac{\nu}{\alpha}$
$Pr_t$	Número de Prandtl turbulento.
$q$	Fluxo de calor local por unidade de área.
$u^*$	Velocidade de fricção.

$u^+$	Velocidade adimensionalizada ( $\bar{u}/u^*$ )
AT	Diferença de temperatura entre a parede e do escoamento. potencial ( $T_p - T_\infty$ )
x	Coordenada ao longo da linha de corrente.
y	Coordenada perpendicular à parede.
$y^+$	Coordenada adimensionalizada ( $Yu^*/\nu$ )
a	Difusibilidade térmica.
$\epsilon_m$	Viscosidade turbulenta
$\epsilon_H$	Difusibilidade térmica turbulenta.
$\mu$	Viscosidade dinâmica.
$\nu$	Viscosidade cinemática.
$\rho$	Densidade.
$\xi, \eta$	Coordenadas adimensionais transformadas.
$\gamma$	Fator de intermitência.
$\delta$	Espessura da camada limite
$-\rho \overline{u'v'}$	Tensor de Reynolds.
$\tau$	Tensor
K	Condutividade Térmica

### NOTAÇÃO

$\infty$	Condição de escoamento livre
( ) <sub>f</sub>	Condição de escoamento livre
( ) <sub>p</sub>	Condição na parede
( ) <sub>l</sub>	Condição laminar
( ) <sub>t</sub>	Condição turbulenta
( ) <sub>tt</sub>	Condição turbulenta total
( ) <sub><math>\delta</math></sub>	Condição segundo a espessura da camada limite

RESUMO

As equações da camada limite, em escoamentos turbulentos incompressíveis bidimensionais, são solucionadas por um método implícito de diferenças finitas.

Foram utilizados os conceitos de Viscosidade Turbulenta para a eliminação do termo tensor-de-Reynolds e de uma Difusibilidade Térmica Turbulenta para a eliminação da média do produto das flutuações de velocidade e de temperatura.

Feitas as simplificações próprias da camada limite e substituindo-se as relações do modelo turbulento obteve-se um sistema de três equações diferenciais, não lineares, acopladas em coordenadas curvilíneas.

O modelo foi aplicado a três tipos de superfícies: plana, côncava e convexa.

Os resultados, em comparação com dados experimentais, são muito bons.

ABSTRACT

The boundary layer equations for turbulent incompressible and two-dimensional flows are solved by an implicit difference method.

An eddy-viscosity concept is used to eliminate the Reynolds shear-stress term, and an eddy-thermal diffusivity concept is used to eliminate the time mean of the product of fluctuating velocity and temperature.

After some appropriate simplifications in the turbulent model concerning the boundary-layer, a system of three two-dimensional, coupled partial differential equations in curvilinear coordinates was derived.

The model was used in three surface types: flat, concave and convex.

In general, the agreement with the experiments is quite good.

## INTRODUÇÃO

O estudo da camadas limite turbulenta é de grande importância pela necessidade de se conhecerem acuradamente o coeficiente de fricção, transferência de calor e ponto de separação do escoamento em numerosos problemas, tais como em projeto de embarcações, turbomáquinas, trocadores de calor e de veículos aeroespaciais. Por esta razão, depois das bases plantadas por Prandtl em 1904, muitos métodos tem sido desenvolvidos para o cálculo da camada limite turbulenta.

Depois da introdução do anemômetro de fio quente para medições de perfis de velocidade média e de suas flutuações, um enorme número de experimentos foram realizados para determinar as características da camada limite turbulenta sob várias condições. Embora o problema geral da turbulência ainda não esteja resolvido, estas investigações tem ampliado enormemente o conhecimento da estrutura do escoamento turbulento. Elas contribuíram para a formulação das leis, que descrevem a distribuição de quantidades importantes de uma camada limite turbulenta, tais como perfis de velocidade, tensor de cisalhamento e coeficiente de fricção.

Muito menos sabe-se sobre o fenômeno turbulento de transferência de calor. À parte de inúmeras determinações de coeficientes de transporte térmico em condições diversas, o número de medições de perfis de temperatura e de suas flutuações é ainda mais restrito.

As teorias mais recentes tentam dar soluções acuradas para a equação da energia, assumindo uma distribuição de velocidade conhecida. Entretanto, a equação da energia somente pode ser resolvida quando for solucionado seu termo de transferência turbulenta. Descrevendo as transferências de momento e de calor como Viscosidade Turbulenta ( $\epsilon_m$ ) e Difusibilidade Térmica Turbulenta ( $\epsilon_h$ ), respectivamente, pode-se introduzir um Número de Prandtl Turbulento ( $Pr_t$ ) como sendo a razão entre estes termos de transferências turbulentas.

Na maioria das vezes, atribuiu-se ao  $Pr_t$  o valor unitário, conforme analogia de Reynolds, ou  $Pr_t$  aproximadamente 0.9.

Conforme observações de Blom <sup>(1)</sup>, o comportamento geral do  $Pr_t$  é um problema ainda não solucionado, daí justificando a necessidade de sua determinação mais acurada.

Spalding e Patankar <sup>(11)</sup> aplicaram técnicas numéricas para soluções simultâneas das equações do movimento e da energia. Eles usaram o conceito de comprimento de mistura de Prandtl com uma variação linear próximo a parede e um valor constante na camada externa para relacionar o tensor local ao gradiente de velocidade e sugeriram um valor constante para o  $Pr_t$  de modo a solucionar a equação da energia.

Os problemas investigados neste trabalho compreendem o escoamento turbulento sobre uma placa plana e superfícies côncava e convexa com curvatura longitudinal suave, em regime permanente, bidimensional, incompressível, sem dissipação térmica viscosa e gradientes de pressão.

A diferença de temperatura da parede e do escoamento potencial foi assumida de tal ordem a não influenciar as propriedades do fluido mantidas constantes nesta faixa.

Os cálculos para a placa plana são comparados aos dados experimentais de Wieghardt, Moffat, Kays e Blom, reunidos no trabalho de Wassel e Catton (11).

Wassel e Catton (11) comparam três hipóteses diferentes para o transporte turbulento sendo a que entra em consonância com o presente estudo é a hipótese de turbulência de Van Driest bem como a representação funcional de  $Pr_t$  proposta por Rotta.

Uma vez que o presente trabalho obedece aos procedimentos de diferenciação finita, primeiramente usados por Pereira (7), Charamba (3) e Ferreira (4), o trabalho de Wassel e Catton vem comprovar, já que reúne dados experimentais e os resultados teóricos de Spalding-Patankar e Nee-Kovaszny, a aplicabilidade do modelo matemático proposto pelos pesquisadores acima referidos.

Nos trabalhos de Charamba (3) e Ferreira (4) estuda-se o comportamento da camada limite hidrodinâmica para os casos em que apresentam superfícies curvas côncavas e convexas em escoamentos turbulentos subsônicos.

O presente trabalho, acompanhando todo o procedimento desenvolvido por Charamba (3) na parte hidrodinâmica, estende analogamente o comportamento para a camada limite térmica turbulenta especificamente para superfícies curvas.

A comprovação de todo este desenvolvimento em superfícies curvas baseia-se nos trabalhos experimentais de H. Thomann (10) onde o referido pesquisador, trabalhando com transferência de calor em escoamentos supersônicos, demonstra o acréscimo e decréscimo de aproximadamente 20% na transferência de calor para as superfícies côncavas e convexas, respectivamente, quando comparadas com a superfície plana.

FORMULAÇÃO GERAL

Neste capítulo, são apresentadas as equações diferenciais do problema, bem como a obtenção da equação da energia.

Como uma bem conhecida parte de aproximação da camada limite, assumiu-se que os tensores e os fluxos térmicos são causados por gradientes na direção normal ao escoamento.

Embora o presente trabalho trata com fluxos turbulentos, aparecerão somente os valores médios das variáveis, sendo as flutuações expressas em termos de produtos dos gradientes de velocidade e temperatura com os coeficientes de trocas efetivos. A vantagem desta formulação é que ela empresta às equações a mesma aparência como se fossem da camada limite laminar.

Foi desprezado o efeito das forças de campo em presença das forças de inércia, de viscosidade e de contato.

A figura 1 apresenta o sistema de coordenadas adotado. Como a proposição é determinar o escoamento incompressível também sobre superfícies curvas, há necessidade de um sistema de referência compatível com esta situação. O sistema de coordenadas empregado é tal que o eixo dos  $x$  segue a superfície curva tangencialmente e o eixo dos  $y$  a ela é normal em cada ponto.

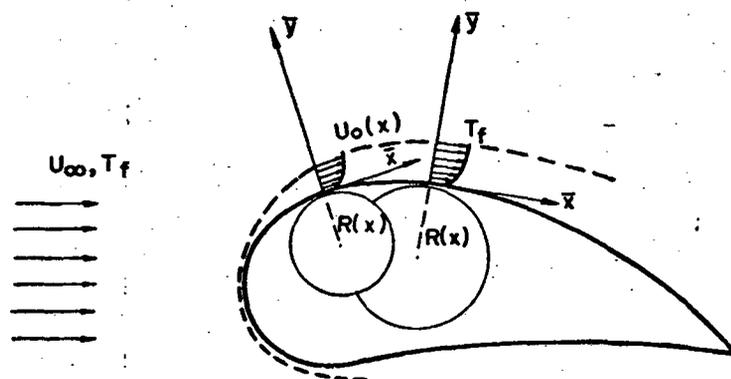


Fig. 1 - Sistema de coordenadas numa superfície curva.

### 2.1. Equações Gerais

Para escoamentos laminar e turbulento, em regime permanente, as equações da Continuidade, Navier-Stokes e da Energia, conforme Schlichting (9), receberam as contribuições de curvatura correspondentes.

Neste estudo, é somente apresentado a formulação para a equação da Energia, uma vez que as equações da Continuidade e de Navier-Stokes foram formuladas simultaneamente por Charamba (3) e Ferreira (4).

Portanto tem-se as seguintes equações:

Equação da Continuidade,

$$f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{f}{R} v = 0 ; \quad (2.1)$$

Equações da Quantidade de Movimento,

direção x,

$$\begin{aligned}
f u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{f}{R} v u &= - \frac{f}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left| f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\
+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{f}{R} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{f^2}{R^2} u &+ \frac{2f^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \cdot v + \\
+ \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} &\left. \right| ; \quad (2.2)
\end{aligned}$$

direção y,

$$\begin{aligned}
f u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{f}{R} u^2 &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \right. \\
- \frac{2f^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + f^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &- \frac{f^2 v}{R^2} + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} u - \\
- \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} &\left. \right| e \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Equação da Energia,

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left| f u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right| &= K \left| f^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \right. \\
+ y \frac{f^3}{R^2} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dR}{dx} + \frac{f}{R} \frac{\partial T}{\partial y} &\left. \right| \quad (2.4)
\end{aligned}$$

sendo  $\mu\Phi$ , a parte dissipativa, desprezada devido os casos ora em discussão também não considerá-la, e por sua contribuição ser de baixa ordem.

$$f(x,y) = \frac{R(x)}{R(x) + y} \quad (2.5)$$

onde  $R(x)$ , raio de curvatura na superfície.

O sistema curvilíneo ora apresentado descreve as variáveis instantâneas do escoamento turbulento. No entanto, devido ao caráter randômico de tais variáveis, houve-se por bem decompor-las nos seus valores médios e flutuações, ou seja, genericamente a grandeza  $\omega$  compõe-se de  $\bar{\omega}$  e  $\omega'$ .

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' , \\ v &= \bar{v} + v' , \\ p &= \bar{p} + p' , \\ \rho &= \bar{\rho} \quad (\text{escoamento incompressível}) \quad e \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \tag{2.6}$$

Substituindo-se as relações acima nas equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4), depois de processadas as médias, conforme apresentadas no Apêndice "A", as equações dos escoamentos médio tornar-se-ão:

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \frac{\bar{v}}{R} = 0 ; \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{u} \bar{v} &= - \frac{f}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \left| f^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \right. \\ &+ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{v} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \left| \right. \\ &- f \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{2f}{R} \overline{u'v'} ; \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
& f \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - f \frac{\bar{u}^2}{R} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left| \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right. + \\
& + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2f^2}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + f^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \bar{u} + \frac{f^3}{R^2} y \frac{dR}{dx} \\
& \cdot \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right| - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - f \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{f}{R} (\overline{v'^2} - \overline{u'^2}) ; \quad e \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left| f \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{v'T'})}{\partial y} + f \frac{\partial (\overline{u'T'})}{\partial x} \right. + \\
+ \left. \frac{f}{R} \overline{v'T'} \right| = K \left| f^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + y \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right. + \\
+ \left. \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right| \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Está apresentado no Apêndice "A" o estudo da ordem de grandeza dos termos das equações do sistema acima.

Portanto, uma vez reduzidas, pelo estudo da ordem de grandeza, as equações em discussão tornam-se:

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{v} = 0 ; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
& f \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{u} \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \quad e \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\rho c_p \left[ f \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = k \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{T} \right) -$$

$$- \rho c_p \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{v'T'} \right) - \rho c_p \frac{f}{R} \left( \overline{v'T'} \right) \quad (2.13)$$

sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$\text{para } y = 0, \quad \bar{u} = \bar{v} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{T} = \bar{T}_p \quad \text{e}$$

$$\text{para } y \rightarrow \delta, \quad \bar{u} \rightarrow U_\infty \quad \text{e} \quad \bar{T} \rightarrow T_\infty \quad (2.14)$$

Sendo  $\delta$  assumida como a distância da parede ao ponto onde a velocidade média difere da velocidade potencial em 1%.

## 2.2. Hipóteses de Fechamento

Constata-se nas equações (2.12) e (2.13) os termos  $\overline{u'v'}$  e  $\overline{v'T'}$  de dupla correlação.

Segundo proposta de Boussinesq, o tensor turbulento  $\overline{u'v'}$ , resultante da dupla correlação das flutuações de velocidades, foi substituído por  $\epsilon_m \frac{\partial u}{\partial y}$ , sendo  $\epsilon_m$  viscosidade turbulenta.

Diferente de  $\mu$ , viscosidade molecular,  $\epsilon_m$  não é uma propriedade do fluido, sendo, por outro lado, uma propriedade do estado local de turbulência.

Seu valor varia de ponto a ponto no escoamento, sendo determinado pela estrutura da turbulência no ponto em questão.

A introdução de  $\epsilon_m$  constitui um ponto de referência para a construção de um modelo de turbulência, no entanto resulta

a tarefa de expressar a viscosidade turbulenta em termos de quantidade conhecidas ou calculáveis.

A hipótese que se assemelha melhor a uma generalização racional de  $\epsilon_m$ , na região perto da parede, foi proposta por Van Driest.

Conforme Pereira <sup>(7)</sup> e Charamba <sup>(3)</sup>, utilizou-se, neste trabalho, a seguinte expressão de Van Driest para  $\epsilon_m$ , na região perto da parede:

$$(\epsilon_m)_p = K_1^2 y^2 |1 - \exp(-y/A)|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (2.15)$$

onde A, uma constante dada por:

$$A = 26 \cdot \nu \left[ \frac{\tau_p}{\rho} \right]^{-1/2} \quad (2.16)$$

Conforme Charamba <sup>(3)</sup>, o modelo para  $\epsilon_m$ , na região longe da parede é:

$$(\epsilon_m) = K_2 U_\infty(x) \delta^* \gamma, \quad (2.17)$$

sendo  $\delta^*$ , espessura de deslocamento, na forma:

$$\delta^* = \int_0^\infty f \left( 1 - \frac{\bar{u}}{U_\infty(x)} \right) dy \quad e$$

$\gamma$  fator de intermitência, aproximado pela seguinte fórmula

$$\gamma = \left[ 1 + 5.5 \left( \frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1} \quad (2.19)$$

O fator de intermitência  $\gamma$ , apresentado por Klebanoff (3), é uma aproximação muito conveniente para a função-erro da viscosidade turbulenta.

As constantes  $K_1$  e  $K_2$  nas fórmulas da viscosidade turbulenta dependem da definição da espessura da camada limite  $\delta$ . Como nos estudos de Charamba (3) e Cebéci (2), atribuiu-se às constantes  $K_1$  e  $K_2$  os valores 0.40 e 0.0168, respectivamente, com base na  $\delta$  definida à velocidade de 99% em  $U_\infty(x)$ .

Como extensão da proposição de Boussinesq, analogamente à viscosidade turbulenta, à dupla-correlação  $(\overline{v'T'})$  relacionou-se uma outra função  $\epsilon_H$ , difusibilidade térmica turbulenta, da seguinte forma:

$$(\overline{v'T'}) = - \epsilon_H \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (2.20)$$

Seguindo a analogia de Reynolds,  $\epsilon_H = \epsilon_m$ , entretanto conforme trabalhos de Spalding (11) e Blom (1), a viscosidade turbulenta  $\epsilon_m$  e a difusibilidade térmica turbulenta  $\epsilon_H$  interrelacionam-se pela expressão funcional  $Pr_t$ , número de Prandtl turbulento, i.e.:

$$Pr_t = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_H} \quad (2.21)$$

Resultados experimentais indicam que  $Pr_t$  não é uma constante na camada limite e sim uma função da distância da parede.  $Pr_t$  é determinado pelas medições dos perfis de velocidade e temperatura na camada limite.

Os dados experimentais de Blom (1) mostram que os valores de  $Pr_t$  divergem amplamente para um mesmo  $Pr$ .

Entretanto, procurando acompanhar a tendência de uma faixa comum dentro das discrepâncias dos dados experimentais, Rotta propôs a seguinte expressão para o número de Prandtl turbulento:

$$Pr_t = 0.95 - 0.45 (Y / \delta)^2 \quad (2.22)$$

No que se refere ao cálculo de transferência de calor, constata-se que a expressão (2.22) apresenta contribuição de baixa ordem em relação a  $Pr_t = 0.9$ .

### 2.3. Transformação por Similaridade

A importância da transformação resume-se na seguinte observação de Pereira (7): "Para se conter a razão crescente da espessura da camada limite ao longo do escoamento, e também para se manter o número de espaçamentos na direção  $y$  constante, utilizou-se um tipo (apresentado a seguir) de transformação por similaridade".

Defeniram-se então:

$$u = \frac{\bar{u}}{U_\infty(x)} ; \quad v = \frac{\bar{v}}{U_\infty(x)} \quad e \quad \theta = \frac{T - T_f}{T_p - T_f} \quad (2.23)$$

E as variáveis independentes sendo:

$$\xi(x) = \int_0^x \frac{U_\infty(x)}{v} dx \quad (2.24)$$

$$\eta(x, y) = y \frac{U_\infty(x)}{v(2\xi)^n}, \quad (2.25)$$

sendo  $n$  função de  $\xi$  e  $\delta$  e, conforme Schlichting <sup>(9)</sup>,  $n$  varia entre 0.5 e 0.8. Neste trabalho o valor que se compatibilizou melhor com os resultados esperados foi 0.5

Portanto, com as novas variáveis acima assim definidas, conforme Apêndice B, as equações em pauta tornar-se-ão:

$$(2\xi)^{2n} f \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + (2\xi)^n u f \frac{n}{\xi} + \frac{fv}{R\eta} = 0; \quad (2.26)$$

$$(2\xi)^{2n} f u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\epsilon \pi}{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{f}{R\eta} u \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{f}{R\eta} u \right] \quad (2.27)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{v}{(2\xi)^{2n}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{K}{v \rho c_p} \frac{v}{(2\xi)^n U_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{T_\infty}{\Delta T} \frac{f}{R} \theta \right] + \frac{v}{U_\infty (2\xi)^n} \frac{\epsilon H}{v} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{T_\infty}{\Delta T} \frac{f}{R} \theta \right] - \frac{f}{R} \theta \quad (2.28)$$

onde

$$R\eta = \frac{U_\infty(x) R}{(2\xi)^n v} e$$

$$v = \frac{V}{(2\xi)^n} - v \frac{(2\xi)^n}{U_\infty} f_u \frac{\partial \eta}{\partial x} . \quad (2.29)$$

## CAPÍTULO III

PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL3.1. Discretização

A camada limite apresenta gradientes acentuados de velocidade e temperatura nas proximidades da parede, portanto é conveniente que se escolha uma malha variável, principalmente na direção normal ao escoamento, para se constatarem tais gradientes. (Ver Fig. 2).

Julgou-se que o espaçamento entre os pontos  $n_j$ 's deva respeitar a progressão geométrica:

$$\Delta n_j = BK \cdot \Delta n_{j-1} , \quad (3.1)$$

e  $BK$ , conforme pesquisas de Charamba (3) e Ferreira (7), foi atribuído o valor 1,03.

O espaçamento na direção  $\xi$  também pode respeitar uma progressão geométrica, especificamente se a superfície analisada admite raio de curvatura pequeno.



$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \eta} \right]_{i+1/2, j} = \frac{F_{i+1, j+1} - F_{i+1, j-1} + F_{i, j+1} - F_{i, j-1}}{2(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ M \frac{\partial F}{\partial \eta} \right]_{i+1/2, j} = M_{i+1/2, j+1/2}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{(F_{i+1, j+1} - F_{i+1, j})}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - M_{i+1/2, j-1/2} \\ & \cdot \frac{(F_{i+1, j} - F_{i+1, j-1})}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + M_{i+1/2, j+1/2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\cdot \frac{(F_{i, j+1} - F_{i, j})}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - M_{i+1/2, j-1/2}$$

$$\cdot \frac{(F_{i, j} - F_{i, j-1})}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})}$$

Introduzindo as expressões (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) nas equações (2.16), (2.17) e (2.18), tais equações adquirem a forma tridiagonal linear genérica

$$A_j F_{i+1, j+1} + B_j F_{i+1, j} + C_j F_{i+1, j-1} = D_j \quad (3.7)$$

e os coeficientes  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$  e  $D_j$  assumem expressões próprias para cada equação segundo apresentado no Apêndice "C".

A solução da expressão tridiagonal 3.7 pode ser

genericamente apresentada como

$$F_{i+1,j} = G_j \cdot F_{i+1,j+1} + g_j, \quad (3.8)$$

sendo

$$G_j = - \frac{A_j}{B_j + C_j \cdot G_{j-1}} \quad e \quad (3.9)$$

$$g_j = \frac{D_j - C_j g_{j-1}}{B_j + C_j G_{j-1}}, \quad (3.10)$$

sendo as fórmulas (3.9) e (3.10) sujeitas à condição de contorno na parede: para  $U_1 = 0$  e  $\theta_1 = 1$  tem-se  $G_1 = 0$  e  $g_1 = 0$  (3.11)

O processo de marcha para a resolução da expressão (3.7) exige o conhecimento de perfis iniciais tanto para velocidade e para temperatura sendo apresentados no Apêndice "D".

Como a camada limite cresce ao longo do escoamento, a quantidade de pontos na direção  $y$  deve também variar para acompanhar este crescimento. A condição de contorno superior é  $\bar{u} = U_\infty(x)$  quando  $y \rightarrow \delta$  ou  $u_\delta = 0.99$ , sendo  $\delta$  a espessura da camada limite quando a velocidade  $u$  atinge 99% de  $U_\infty(x)$ .

Ao tampo da camada limite, a condição física abaixo deve ser satisfeita:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_\delta} \leq \varepsilon'_\delta, \quad (3.12)$$

onde  $\varepsilon'_\delta$  é um critério de erro especificado da ordem de  $10^{-4}$ .

A expressão (3.12), em diferenças finitas, torna-se:

$$u_{i+1,N} - u_{i+1,N-1} \leq \Delta\eta_{N-1} \cdot \varepsilon'_\delta \quad (3.13)$$

sendo N o número máximo de espaçamentos.

Aplicando (3.8) em (3.7), considerando que  $\eta = \eta_\delta$  quando  $u_\delta = 0.99$ , tem-se, depois da substituição em (3.13), a seguinte condição:

$$u_\delta (1 - G_{N-1}) - g_{N-1} \leq \Delta\eta_{N-1} \cdot \varepsilon'_\delta \quad (3.14)$$

A cada estação, a computação prossegue até que seja satisfeita a condição (3.14) e deste modo, está determinado o novo valor de N.

Uma vez conhecido o conjunto  $u_{i+1,j}$ , recalcula-se  $V_{i+1/2,j}$  a partir da equação da continuidade. Recomeça-se o cálculo até que  $u_{i+1,j}$  adquira a convergência ditada pelo seguinte critério:

$$\left[ \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{p,k} - \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{p,k-1}}{\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{p,k-1}} \right] \leq \varepsilon'_p \quad (3.15)$$

sendo p denotando a parede, k iteração e  $\varepsilon'_p$  critério de erro da ordem de  $10^{-3}$ .

A equação da energia não sofreu procedimento iterativo pelo fato de, uma vez iterados os perfis  $u_{i+1,j}$  e  $V_{i+1/2,j}$ , ela não apresenta não-linearidades.

A seguir, para se ter uma visão global do método numérico usado para o cálculo da camada limite turbulenta, é apresentado um fluxograma do programa usado.

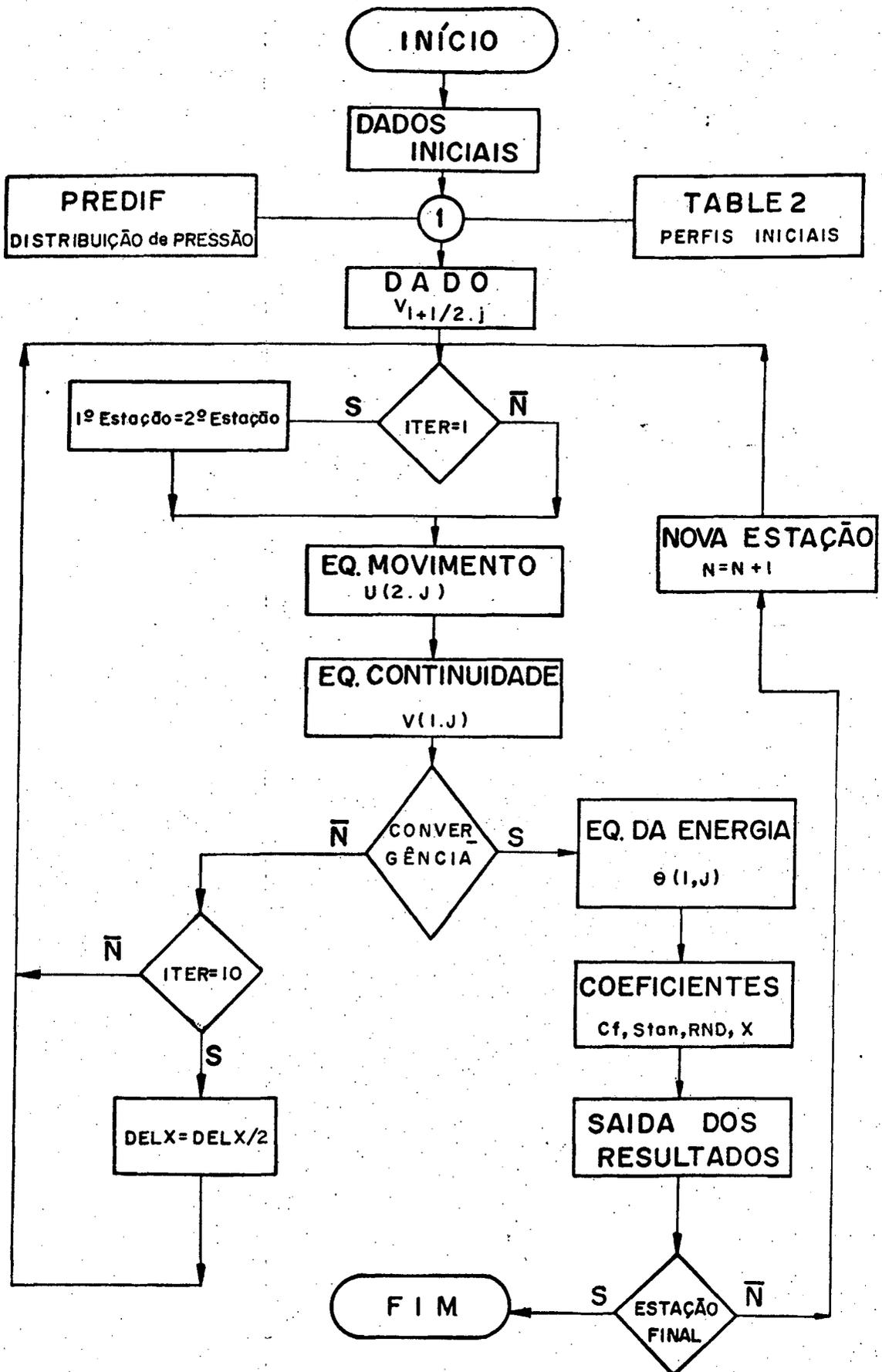


Fig. 3 - Fluxograma do programa utilizado

## CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Com o surgimento das máquinas modernas de computação e de métodos numéricos apropriados, tornou-se possível obter resultados satisfatórios para as características importantes de uma camada limite turbulenta com troca de calor, tais como perfis de velocidade, tensores de cisalhamento, coeficientes de fricção locais, perfis de temperatura, número de Prandtl turbulento e números de Stanton locais.

Por outro lado, por causa do limitado conhecimento dos processos envolvidos, sobretudo na região próxima da parede, o problema em escoamentos turbulentos persiste tanto fenomenologicamente quanto matematicamente e em consequência ainda não é possível solução exata para as equações da camada limite turbulenta.

Para se avaliar a eficiência do modelo numérico desenvolvido neste trabalho, os resultados são comparados com dados experimentais.

No caso da placa plana, os resultados são comparados com os dados experimentais de Wieghardt, Moffat e Kays, referenciados no trabalho de Wassel e Catton (11).

Nos casos das superfícies curvas convexa e côncava, os resultados são avaliados considerando as observações experimentais de Thomann (10).

#### 4.1. Resultados Obtidos

Utilizando a sub-rotina (7) (PLOTTR 2), é a seguinte a relação de diagramas apresentados no Apêndice D:

$\frac{\bar{u}}{U_\infty}$	VERSUS	$y/\delta$	(Gráfico G1)
$\theta$	VERSUS	$y/\delta$	(G1)
$u^+$	VERSUS	$\text{Log}_{10}(y^+)$	(G2)
$\tau_\ell$	VERSUS	$y^+$	(G3)
$\tau_t$	VERSUS	$y^+$	(G3)
$\tau_{tt}$	VERSUS	$y^+$	(G3)
		para $y^+ \leq 60$	
$\tau_p$	VERSUS	$y/\delta$	(G4)
$\tau_t$	VERSUS	$y/\delta$	(G4)
$\tau_{tt}$	VERSUS	$y/\delta$	(G4)
$\epsilon_H$	VERSUS	$y/\delta$	(G5)
$Pr_t$	VERSUS	$\text{Log}_{10}(y^+)$	(G6)
FLUXO CONV. TURBULENTO	VERSUS	$y/\delta$	(G7)
$C_f$	VERSUS	$X_{\text{metros}}$	(G8)
Stanton	VERSUS	$R_{ex}$	(G9)

#### 4.2. Discussão dos resultados obtidos

Os resultados deste estudo são apresentados nas distâncias .68348m, .98249m e 1.218m para a placa plana e .92m e 1.04m para as superfícies curvas.

- Os perfis de velocidade e temperatura médios adimensionalizados são apresentados no conjunto de figuras G-1. Constatou-se que em todas as estações a camada limite térmica apresentou-se menor do que a camada limite hidrodinâmica. Este fato justifica a evidência experimental de Blom <sup>(1)</sup> de que o transporte de calor e de momento não são similares.

- Os resultados para o perfil de velocidade universal ( $u^+$  em função de  $\log(y^+)$ ) são apresentados no conjunto de figuras G-2. No caso da placa plana, o modelo manteve-se em boa concordância com os dados experimentais de Wisghardt <sup>(11)</sup>.

Os perfis para as superfícies curvas se mantiveram com valores aproximados ao da placa plana.

- Nos conjuntos de figuras G-3 e G-4, foram plotadas as distribuições de tensões próximo a parede e ao longo de toda a espessura da camada limite. Constata-se em todos os casos uma região universal perto da parede onde os resultados são similares.

- Os perfis de Difusibilidade Térmica Turbulenta, em função de  $y/\delta$ , são mostrados no conjunto de figuras G-5.

Os resultados das superfícies curvas diferem dos resultados da placa plana a partir de  $y/\delta = .12$ .

- O conjunto de figuras G-6 representa o número de Prandtl Turbulento ( $Pr_t$ ).

Na estação 1.2815m, para a placa plana, a distribuição de  $Pr_t$  é comparada com os dados experimentais de Blom<sup>(1)</sup>. Na região próxima a parede ( $30 < y^+ \leq 100$ ) constatou-se muita concordância com os dados experimentais de Blom<sup>(1)</sup>. Na região superior da camada limite ( $y^+ > 100$ ) surge diferença da ordem de 10% em relação aos dados experimentais. Uma vez que na região externa os gradientes de temperatura são muito pequenos, estes valores de  $Pr_t$  admitem um efeito também pequeno para os cálculos dos perfis de temperatura.

Nos casos de superfícies curvas, as distribuições de  $Pr_t$  não oferecem diferenças realçáveis em relação a distribuição de  $Pr_t$  para a placa plana.

- No conjunto de figuras G-7 estão apresentados os Fluxos Convectivos Turbulentos em função de  $y/\delta$ .

A expressão usada para o Fluxo Convectivo Turbulento é

$$\overline{v\theta} = \epsilon_H (\partial \bar{T} / \partial y).$$

Constata-se nas figuras que o fluxo de calor em todas as superfícies analisadas atingem seu máximo na região próxima a parede ( $y/\delta = .1$ ).

- No conjunto de figuras G-8 são apresentados os Coeficientes de Fricção locais. Para a placa plana, os resultados são comparados com os dados experimentais de Wieghardt<sup>(11)</sup>. A diferença entre os valores calculados e os dados experimentais varia na faixa de 10 a 20%.

Os Coeficientes de Fricção locais calculados para a superfície côncava apresentam um acréscimo máximo de aproximadamente 30% em relação aos calculados para a placa plana.

Os Coeficientes de Fricção locais calculados para a superfície convexa apresentam um decréscimo máximo de 10% em relação aos calculados para a placa plana.

As observações de Thomann<sup>(10)</sup> constataam: um acréscimo máximo de 20% dos Coeficientes de Fricção locais para a superfície côncava em relação aos da placa plana; e um decréscimo máximo de 20% dos Coeficientes de Fricção locais para a superfície convexa em relação aos da placa plana.

- No conjunto de figuras G-9 são apresentados os Coeficientes de Troca de Calor locais, Números de Stanton, em relação aos Números de Reynolds locais.

Para a placa plana, os resultados são comparados com os dados experimentais de Moffat e Kays<sup>(11)</sup>. A diferença entre os valores calculados e os dados experimentais é de aproximadamente 20%.

Os Números de Stanton locais para a superfície côncava apresentam um acréscimo máximo de aproximadamente 25% em relação aos calculados para a placa plana.

Os Números de Stanton locais para a superfície convexa apresentam um decréscimo máximo de aproximadamente 15% em relação aos calculados para a placa plana.

As observações de Thomann<sup>(10)</sup> constataam: um acréscimo máximo de 20% dos Coeficientes de Troca de Calor locais para a superfície côncava em relação aos da placa plana; e um decréscimo máximo de 20% dos Coeficientes de Troca de Calor locais

para a superfície convexa em relação aos da placa plana.

De uma maneira geral, examinando os resultados obtidos no presente trabalho, pode-se concluir que a potencialidade do método é satisfatória. Naqueles valores para os quais foi possível compará-los com dados experimentais já existentes e também nos outros parâmetros, o método apresenta uma capacidade de previsão do desenvolvimento da camada limite extraordinariamente eficaz. Quão eficaz realmente o método é, só poderá realmente ser avaliado com precisão se futuramente houver o estudo experimental do escoamento aqui numericamente analisado.

Durante o processo de desenvolvimento do algoritmo numérico, teve-se em mente a intenção de manter a estrutura de programação já existente. Assim as principais diferenças entre o algoritmo numérico utilizado nesse trabalho e aquele usado em Charamba<sup>(3)</sup> e Ferreira<sup>(4)</sup> são a inclusão da equação da Energia. Como o teste de convergência é realizado basicamente na equação da Conservação da Quantidade de Movimento, da qual obtem-se a velocidade média do escoamento, não existe a necessidade de iterar a equação da Energia. Este fato vem a explicar o porque da pouca variação no tempo de computação. Naturalmente houve um acréscimo no tempo de computação em relação a aquele apresentado no trabalho de Charamba<sup>(3)</sup>. Como a finalidade do presente trabalho não é especialmente a análise do programa de computação, não houve maior cuidado quanto a eficácia do algoritmo, o qual foi suposto já otimizado nos trabalhos anteriores.

### 4.3. Perfis e Dados Iniciais

Perfil inicial de velocidade:

$$u^+ = y^+ \quad \text{e} \quad u = u^+ \cdot u^*/U_\infty \quad \text{para } y^+ < 7$$

$$u^+ = 11,08 \cdot \log y^+ - 2,3636 \quad \text{e} \quad u = u^+ \cdot u^*/U_\infty \quad \text{para } 7 \leq y^+ \leq 30$$

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \quad \text{e} \quad u = u^+ \cdot u^*/U_\infty \quad \text{para } y^+ > 30$$

Perfil inicial de temperatura:

$$\theta = 1 - (y/\delta)^{1/7} \quad (5).$$

Dados iniciais:

$$X_0 = 0,0914 \text{ m}$$

$$U_\infty = 10 \text{ m/s}$$

$$\Delta\eta_1 = 0,035$$

$$a = 1,035 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$n = 0,5$$

$$\delta = 0,01436 \text{ m}$$

$$R = 0,30 \text{ m}$$

$$T_\infty = 19,2^\circ\text{C}$$

$$T_p = 20,0^\circ\text{C}$$

$$P_r = 0,72$$

$$\nu = 15,10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

#### 4.4. Conclusões

O objetivo do presente estudo foi avaliar o modelo matemático proposto por Pereira<sup>(7)</sup> para a solução da camada limite turbulenta com troca de calor.

Procurando ampliar o raio de aplicabilidade do referido modelo, a pesquisa ora em discussão, baseada nos estudos de Charamba<sup>(3)</sup> e Ferreira<sup>(4)</sup>, estende a formulação para cálculos da camada limite em superfícies suavemente curvas.

Uma vez que o método numérico desenvolvido apresenta característica tridiagonal, os parâmetros iniciais para a solução do sistema de equações são de importância fundamental.

Os cálculos para a placa plana foram comparados com dados experimentais de Wieghardt, Moffat e Kays e apresentaram discrepâncias na faixa de 10 a 20%.

Com relação às superfícies curvas, este estudo, baseado nas observações experimentais de Thomann<sup>(10)</sup>, também apresentou a mesma faixa de discrepâncias.

Para a solução genérica de superfície curva o modelo matemático deverá sofrer algum refinamento para a melhor precisão dos resultados. Este refinamento poderá ser:

- 1 - Na discretização das equações;
- 2 - No critério de erro que dá o aumento do número de pontos na vertical devido ao crescimento da camada limite;
- 3 - No valor de  $n$ , que nos casos analisados sempre se manteve constante e igual a 0.5. É possível encontrar o  $n$  como função da distância ao longo do escoamento;

4 - No estudo de um perfil inicial para a temperatura melhor do que o perfil de potência proposto por Kays<sup>(5)</sup>; e

5 - Numa formulação para a Difusibilidade Térmica Turbulenta ( $\epsilon_H$ ) independente da Viscosidade Turbulenta ( $\epsilon_m$ ), conforme estudos de Cebeci<sup>(2)</sup>.

No intuito de se ampliar a aplicabilidade deste modelo, são estas as sugestões para trabalhos futuros:

1 - Estudos de escoamentos radiais sobre cilindros circulares para diversos números de Reynolds;

2 - Aplicação do modelo para escoamentos turbulentos em superfícies curvas com gradiente de pressão;

3 - Introdução de transferência de massa no problema ora em discussão;

4 - Analisar escoamentos com controle de camada limite; e

5 - Análise de escoamentos compressíveis.

De um modo geral, o modelo matemático proposto por Pereira<sup>(7)</sup> mostrou-se muito bom para o cálculo da camada limite turbulenta com troca de calor em superfícies curvas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BLOM, J. An experimental determination of the Turbulent Prandtl number in a developing temperature boundary layer, apresentado na 4ª Conferência Internacional de Transferência de Calor, Paris, Versailles, agosto 1970.
- [2] CEBECI, T. Solution of the Incompressible Turbulent Boundary - Layer Equations With Heat Transfer, apresentado no ASME-AICHE Heat Transfer Conference, Minneapolis, 1969, sob número 69-HT-7.
- [3] CHARAMBA, J.C. Um modelo em diferenças finitas para calcular a camada limite turbulenta em superfícies curvas; Tese de Mestrado pela Universidade Federal de Santa Catarina em dezembro de 1978.
- [4] FERREIRA, V. Modelo matemático para a solução da camada limite turbulenta sobre superfícies curvas; Tese de Mestrado pela Universidade Federal de Santa Catarina apresentada em dezembro de 1978.
- [5] KAYS, W.M. Convective Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill, Inc., TMH Edition, 1975.
- [6] MILNE-THOMSON, L.M. Theoretical Hydrodynamics, London, MacMillan & Co. Ltd., 5ª edição, 1968.
- [7] PEREIRA Fº, H.V. A four-equation Model for Numerical Solution of the Turbulent Boundary-Layer; Dissertação de Doutorado pela Universidade de Houston, maio, 1974.
- [8] ROTTA, J.C. Turbulent Boundary Layers In Incompressible Flow, Progress in Aeronaut. Sci., edited by A. FERRI, D. KUCHEMANN and L. STRENE, 1962.
- [9] SCHLICHTING, H. Boundary-Layer Theory. McGraw-Hill, Inc., 6ª edição, 1968.
- [10] THOMANN, H. Effect of Streamwise Wall Curvature on Heat Transfer in a Turbulent Boundary-Layer, J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, part 2, pp. 283-292.

- [11] WASSEL, A.T., e CATTON, I. Calculation of Turbulent Boundary-Layers over Flat Plate with Different Phenomenological Theories of Turbulence and Variable Turbulent Prandtl Number, Int. J. Heat Transfer, Vol. 16, 1973, pp. 1547-1563.

APÊNDICE AA-1 PROCESSO DE MÉDIA

Não é apresentado o processo de média para as equações da continuidade e de Navier-Stokes pelo fato de já ter sido realizado por Charamba (3) e Ferreira (4).

Definidas as variáveis instantâneas como:

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$\rho = \bar{\rho} \quad e$$

$$T = \bar{T} + T',$$

a equação da energia torna-se:

$$\rho c_p \left| f(\bar{u} + u') \cdot \frac{\partial(\bar{T} + T')}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial(\bar{T} + T')}{\partial y} \right| = \quad (A.1)$$

$$K \left| f^2 \frac{\partial^2(\bar{T} + T')}{\partial x^2} + y \frac{f^3 dR}{R^2 dx} \cdot \frac{\partial(\bar{T} + T')}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial(\bar{T} + T')}{\partial y} + \frac{\partial^2(\bar{T} + T')}{\partial y^2} \right|$$

Realizando a média, a equação reduz-se à:

$$\rho c_p \left| f \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + f \overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y}} \right| = \quad (A.2)$$

$$K \left| f^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + y \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right|$$

Sabe-se também que:

$$f \frac{\partial}{\partial x} \overline{(u'T')} = f \overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x}} + f \overline{T' \frac{\partial u'}{\partial x}} \quad ; \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \overline{(v'T')} = \overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y}} + \overline{T' \frac{\partial v'}{\partial y}} \quad (\text{A.4}) \quad e$$

$$f \frac{\partial \overline{(u'T')}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{(v'T')} = f \overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y}} + \overline{T' \left( \frac{\partial v'}{\partial y} + f \frac{\partial u'}{\partial x} \right)} \quad (\text{A.5})$$

Sendo a equação da continuidade

$$f \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{f}{R} v' = 0 \quad \text{conjugada com}$$

$$f \overline{u' \frac{\partial T'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial T'}{\partial y}} = f \frac{\partial \overline{(u'T')}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(v'T')}}{\partial y} + \frac{f}{R} \overline{(v'T')},$$

resulta finalmente a equação da energia na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left| f \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + f \frac{\partial \overline{(u'T')}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{(v'T')} + \frac{f}{R} \overline{(v'T')} \right| = \\ = K \left| f^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + y \frac{f^3}{R^2} \frac{dR}{dx} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right| \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

## A-2 ANÁLISE DA ORDEM DE GRANDEZA

Para o estudo da ordem de grandeza, definiram-se as escalas de grandezas  $L_1$  para a direção X e  $L_2$  para a direção Y. Especificamente para o caso de camada limite:

$$\frac{L_2}{L_1} \lll 1. \quad (\text{A.7})$$

Ao mesmo tempo, admitiu-se para  $R = R(x)$  a mesma ordem de grandeza de  $X$ , i.e.,  $L_1$ .

Sabe-se também que:

$$f(x, y) = \frac{R(x)}{R(x) + y} = \frac{O(L_1)}{O(L_1) + O(L_2)} = \frac{O(L_1)}{O(L_2)} = O(1) \quad (\text{A.8})$$

e

$$O(\overline{v'T'}) = O(\overline{u'T'}) = O(\ell^2) \quad (\text{A.9})$$

Aplicando estas relações à equação da energia tem-se:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left| O(1) \cdot O(\bar{u}) \cdot \frac{O(\bar{T})}{O(L_1)} + O(\bar{v}) \frac{O(\bar{T})}{O(L_2)} + O(1) \cdot \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)} + \right. \\ \left. + \frac{O(\ell^2)}{O(L_2)} + \frac{O(1)}{O(L_1)} \cdot O(\ell^2) \right| = K \left| O(1)^2 \cdot \frac{O(\bar{T})}{O(L_1^2)} + \frac{O(\bar{T})}{O(L_2)} + \right. \\ \left. + O(L_2) \cdot \frac{O(1^3)}{O(L_1^2)} \cdot \frac{O(\bar{T})}{O(L_1)} \cdot \frac{O(L_1)}{O(L_1)} + \frac{O(1)}{O(L_1)} \cdot \frac{O(\bar{T})}{O(L_2)} \right| \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Ainda, considerando tais relações percebe-se que, na presença dos outros termos, os termos  $O(1)^2 \cdot \frac{O(\bar{T})}{O(L_1^2)}$ ,  $O(1) \cdot \frac{O(\ell^2)}{O(L_1)}$  e  $O(L_2) \cdot \frac{O(1^3)}{O(L_1^2)} \cdot \frac{O(\bar{T})}{O(L_1)} \cdot \frac{O(L_1)}{O(L_1)}$  admitem contribuições pouco significativas e daí justificando seus abandono.

Por final, a equação (A.6) se reduz à:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left| f \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right| = K \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{f}{R} \bar{T} \right] - \rho c_p \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'T'}) - \\ - \rho c_p \frac{f}{R} (\overline{v'T'}) \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

APÊNDICE B

ADIMENSIONALIZAÇÃO

Define-se:

$$u = \frac{\bar{u}}{U_\infty(x)} ; \quad v = \frac{\bar{v}}{U_\infty(x)} ; \quad \theta = \frac{\bar{T} - \bar{T}_f}{\bar{T}_p - \bar{T}_f} = \frac{\bar{T} - \bar{T}_f}{\Delta T} ; \quad (\text{B.1})$$

$$\xi(x) = \int_0^x \frac{U_\infty(x)}{v} \cdot dx ; \quad \eta(x,y) = y \frac{U_\infty(x)}{v(2\xi)^\eta} ; \quad (\text{B.2})$$

$$R = \frac{U_\infty(x) R}{(2\xi)^\eta v} \quad (\text{B.3})$$

Sendo a equação da energia:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left[ \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] &= K \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \frac{f}{R} \bar{T} \right] + \\ + \rho c_p \epsilon_H \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \frac{f}{R} \bar{T} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Utilizando as relações (B-1), (B-2) e (B-3) e sabendo que

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{U_\infty}{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} ; \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{U_\infty}{v(2\xi)^\eta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} ; \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\eta}{v} \frac{dU_\infty}{d\xi} - \frac{n}{v} \frac{\eta}{\xi} U_\infty \quad \text{e que}$$

$$\bar{v} = \frac{V}{(2\xi)^\eta} - \frac{\nu(2\xi)^\eta}{U_\infty(x)} f u \frac{\partial \eta}{\partial x}, \text{ a equação torna-se} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{V}{(2\xi)^{2\eta}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= \frac{K}{\nu \rho c_p} \frac{\mu}{U_\infty (2\xi)^\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{T_\infty}{\Delta T} \frac{f}{R} \right. \\ &\left. - \frac{f}{R} \theta \right) + \frac{\nu}{U_\infty (2\xi)^\eta} \frac{\epsilon_H}{\nu} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{T_\infty}{\Delta T} \frac{f}{R} - \frac{f}{R} \theta \right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

APÊNDICE C

DISCRETIZAÇÃO

Discretizando a equação (B.5) em torno de um ponto genérico  $P_{i+1/2,j}$  e utilizando as expressões (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6), a equação, já na forma tridiagonal, torna-se:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{i+1,j+1} & \left| \frac{V_{i+1/2,j} \cdot 0.5}{(2\xi)_{i+1/2}^2 \eta_{i+1/2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{K}{\rho c_p v} \cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^\eta} \right. \\
 & \frac{1}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{K}{\rho c_p v} \cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^\eta} \cdot \frac{f_{i+1/2,j} \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \\
 & - \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^\eta} \cdot \frac{\epsilon_H}{v} \cdot \frac{1}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \\
 & \left. + \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^\eta} \cdot \frac{\epsilon_H}{v} \cdot \frac{1}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \cdot \frac{f_{i+1/2,j} \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \right| + \\
 & + \Theta_{i+1,j} \cdot \left| \frac{f_{i+1/2,j} \cdot U_{i+1/2,j}}{\Delta\xi} + \frac{k}{\rho c_p v} \cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^\eta} \right. \\
 & \cdot \frac{1}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{K}{\rho c_p v} \cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^\eta} \\
 & \cdot \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{K}{\rho c_p v} \cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^\eta} \cdot \frac{0.5 \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2}} \\
 & \left. + \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} + \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} \right| +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{v}{U_{\infty}(2\xi)_{i+1/2}^n} \frac{\epsilon H}{v} i+1/2, j \cdot \frac{1}{\Delta\eta_j \cdot (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} +$$

$$+ \frac{1}{(2\xi)_{i+1/2}} \frac{\epsilon H}{v} i+1/2, j \cdot \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} +$$

$$+ \frac{v}{U_{\infty}(2\xi)_{i+1/2}^n} \cdot \frac{\epsilon H}{v} i+1/2, j \cdot \frac{0.5 \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2}} \cdot$$

$$\cdot \left. \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} + \frac{f_{i, j+1} - f_{i, j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} \right|$$

+

$$\Theta_{i+1, j-1} \cdot \left| \frac{-V_{i+1/2, j} \cdot 0.5}{(2\xi)_{i+1/2}^{2n} \cdot (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{K}{\rho c_p v} \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{v}{U_{\infty}(2\xi)_{i+1/2}^n} \cdot \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{K}{\rho c_p v} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(2\xi)_{i+1/2}} \cdot \frac{f_{i+1/2, j} \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{v}{U_{\infty}(2\xi)_{i+1/2}^n}$$

$$\cdot \frac{\epsilon H}{v} i+1/2, j \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{v}{U_{\infty}(2\xi)_{i+1/2}^n}$$

$$\cdot \frac{\epsilon H}{v} i+1/2, j \frac{f_{i+1/2, j} \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \Big| =$$

$$\Theta_{i,j+1} \cdot \left| \frac{-V_{i+1/2,j} \cdot 0.5}{(2\xi)_{i+1/2}^{2n} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{K}{\rho c_p v} \cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^n} \right.$$

$$\cdot \frac{1}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{K}{\rho c_p v} \cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^n} -$$

$$- \frac{f_{i+1/2,j} \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^n} \frac{\epsilon H}{v} \quad i+1/2,j$$

$$\cdot \frac{1}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^n} \frac{\epsilon H}{v} \quad i+1/2,j \cdot$$

$$\cdot \frac{f_{i+1/2,j} \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \left| + \Theta_{i,j} \cdot \left| \frac{f_{i+1/2,j} \cdot U_{i+1/2,j}}{\Delta\xi} \right. \right.$$

$$- \frac{K}{\rho c_p v} \cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^n} \cdot \frac{1}{\Delta\eta_j (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{K}{\rho c_p v}$$

$$\cdot \frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^n} \cdot \frac{1}{\Delta\eta_{j-1} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{K}{\rho c_p v}$$

$$\cdot \frac{v}{(2\xi)_{i+1/2}^n U_\infty} \cdot \frac{0.5 \cdot 0.5}{R\eta_{i+1/2}} \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} +$$

$$+ \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} - \frac{1}{(2\xi)_{i+1/2}} \frac{\epsilon H}{v} \quad i+1/2,j \cdot$$

$$\frac{1}{\Delta\eta_j(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{\nu}{(2\xi)_{i+1/2}^n U_\infty} \cdot \frac{\epsilon H}{\nu} \quad i+1/2, j$$

$$\frac{1}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} - \frac{\nu}{U_\infty(2\xi)_{i+1/2}^n} \cdot \frac{\epsilon H}{\nu} \quad i+1/2, j$$

$$\frac{0.5 \cdot 0.5}{Rn_{i+1/2}} \left| \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{\Delta\eta_j - \Delta\eta_{j-1}} + \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{\Delta\eta_j - \Delta\eta_{j-1}} \right|$$

+

$$\Theta_{i,j-1} \cdot \left| \frac{V_{i+1/2,j} \cdot 0.5}{(2\xi)_{i+1/2}^{2n} (\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{K}{\rho c_p \nu} \right|$$

$$\frac{\nu}{(2\xi)_{i+1/2}^n \cdot U_\infty} \cdot \frac{1}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} + \frac{K}{\rho c_p \nu}$$

$$\frac{\nu}{U_\infty(2\xi)_{i+1/2}^n} \cdot \frac{f_{i+1/2} \cdot 0.5}{Rn_{i+1/2}} \cdot \frac{1}{(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} +$$

$$+ \frac{\nu}{U_\infty(2\xi)_{i+1/2}^n} \cdot \frac{\epsilon H}{\nu} \quad i+1/2, j \cdot \frac{1}{\Delta\eta_{j-1}(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} +$$

$$+ \frac{1}{(2\xi)_{i+1/2}} \cdot \frac{\epsilon H}{\nu} \quad i+1/2, j \cdot \frac{f_{i+1/2,j} \cdot 0.5}{Rn_{i+1/2}(\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1})} \left| \right.$$

$$+ \left| \frac{T_\infty}{\Delta T} \cdot \frac{K}{\rho c_p \nu} \cdot \frac{\nu}{U_\infty(2\xi)_{i+1/2}^n} \cdot \frac{0.5}{Rn_{i+1/2}} \right|$$

$$\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} + \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} = \frac{T_\infty}{\Delta T}$$

$$\frac{v}{U_\infty (2\xi)_{i+1/2}^n} \frac{\varepsilon H}{v} \theta_{i+1/2,j} = \frac{0.5}{R\eta_{i+1/2}}$$

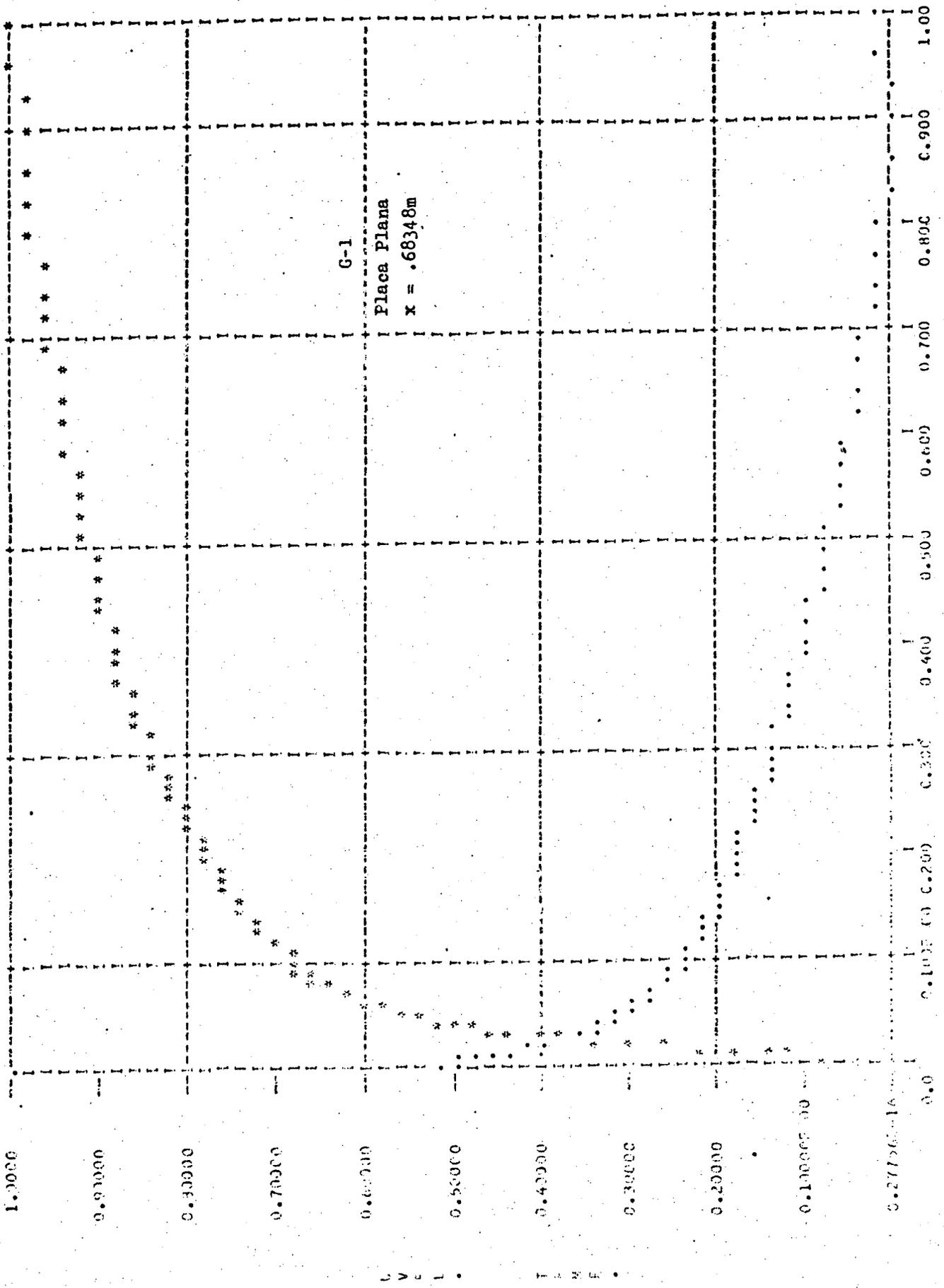
$$\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} + \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{\Delta\eta_j + \Delta\eta_{j-1}} \quad |$$

De uma maneira geral esta longa expressão pode ser re-  
presentada como:

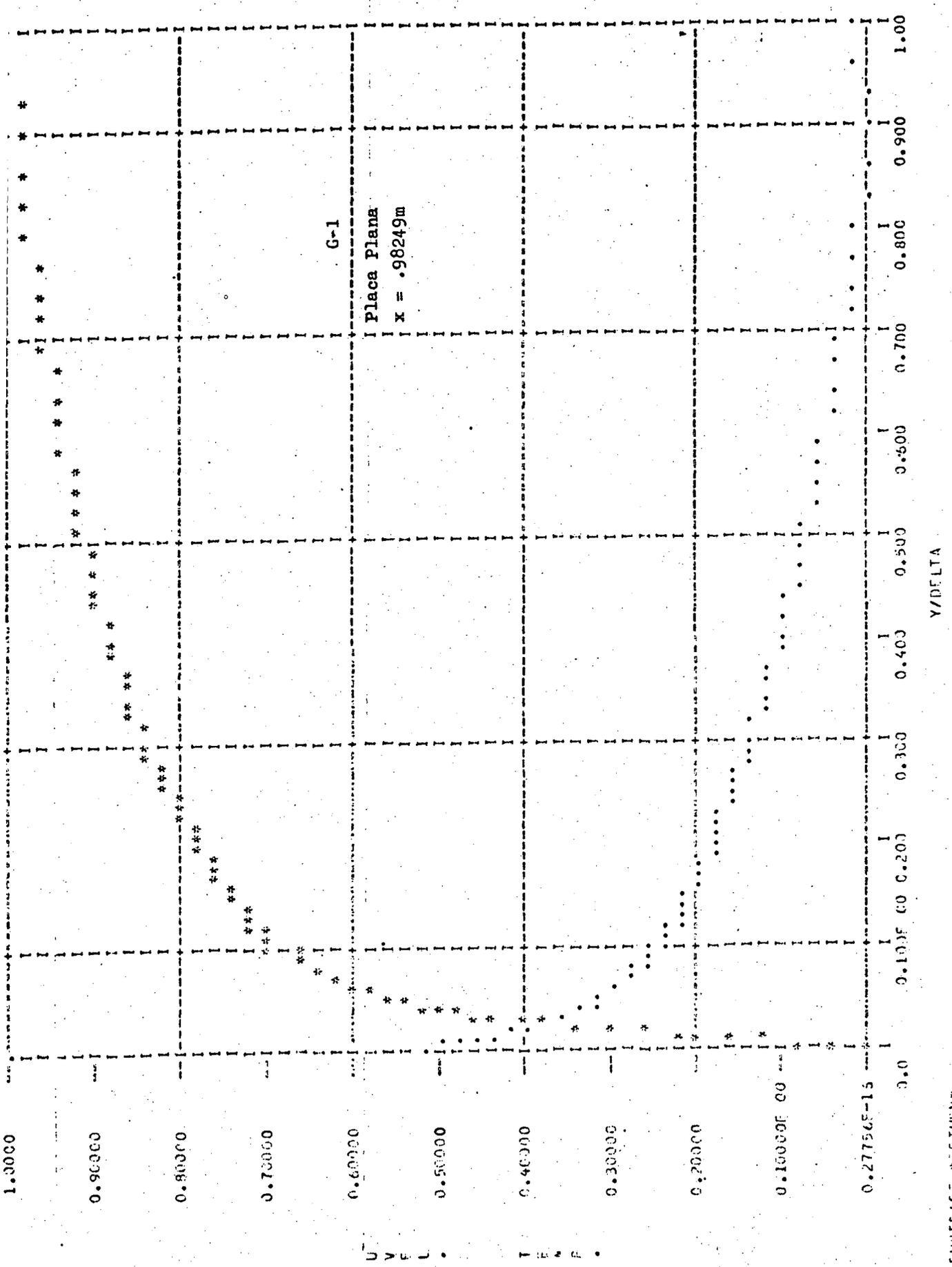
$$A_j \cdot \theta_{i+1,j+1} + B_j \theta_{i+1,j} + C_j \theta_{i+1,j-1} = D_j \quad (C.2)$$

RELAÇÃO DOS GRÁFICOS

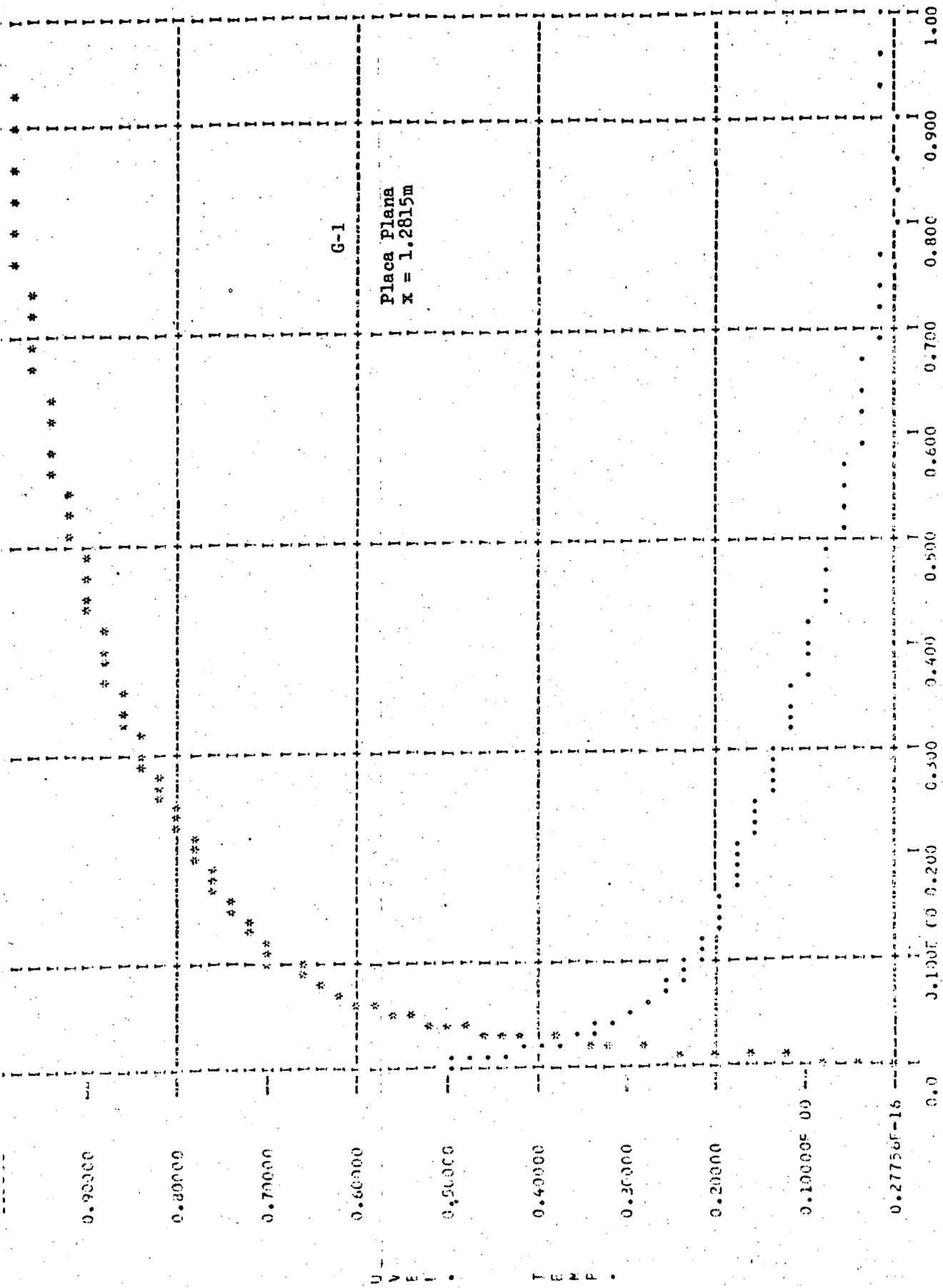
$\frac{\bar{u}}{U_\infty}$	VERSUS	$y/\delta$	(Gráfico G1)
$\theta$	VERSUS	$y/\delta$	(G1)
$u^+$	VERSUS	$\text{Log}_{10}(y^+)$	(G2)
$\tau_\ell$	VERSUS	$y^+$	(G3)
$\tau_t$	VERSUS	$y^+$	(G3)
$\tau_{tt}$	VERSUS	$y^+$	(G3)
		para $y^+ < 60$	
$\tau_p$	VERSUS	$y/\delta$	(G4)
$\tau_t$	VERSUS	$y/\delta$	(G4)
$\tau_{tt}$	VERSUS	$y/\delta$	(G4)
$\epsilon_H$	VERSUS	$y/\delta$	(G5)
$P_{rt}$	VERSUS	$\text{Log}_{10}(y^+)$	(G6)
FLUXO CONV. TURBULENTO	VERSUS	$y/\delta$	(G7).
$C_f$	VERSUS	$X_{\text{metros}}$	(G8)
Stanton	VERSUS	$R_{ex}$	(G9)



Y/DELTA

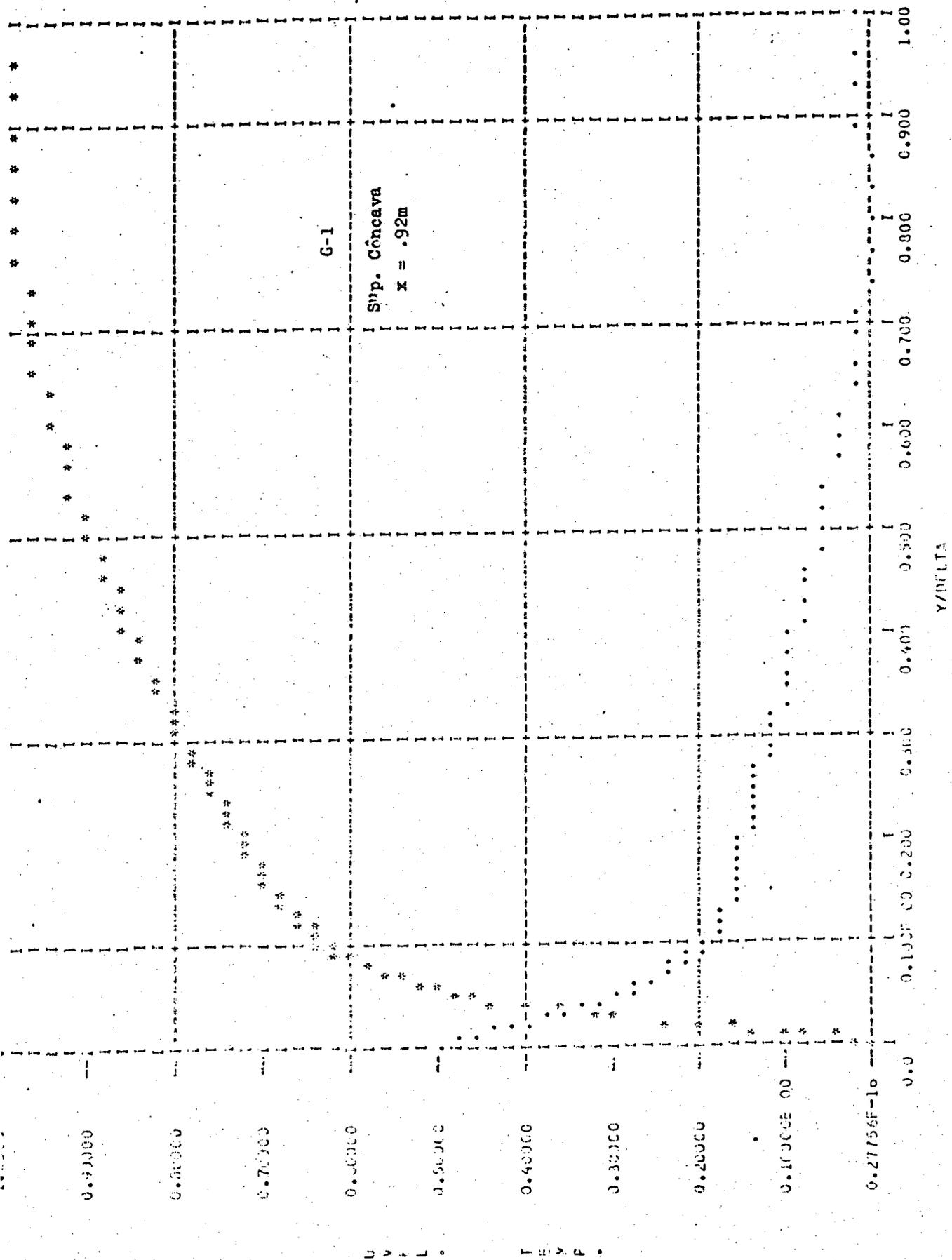


SURFACE PROFILE  
SURFACE PROFILE

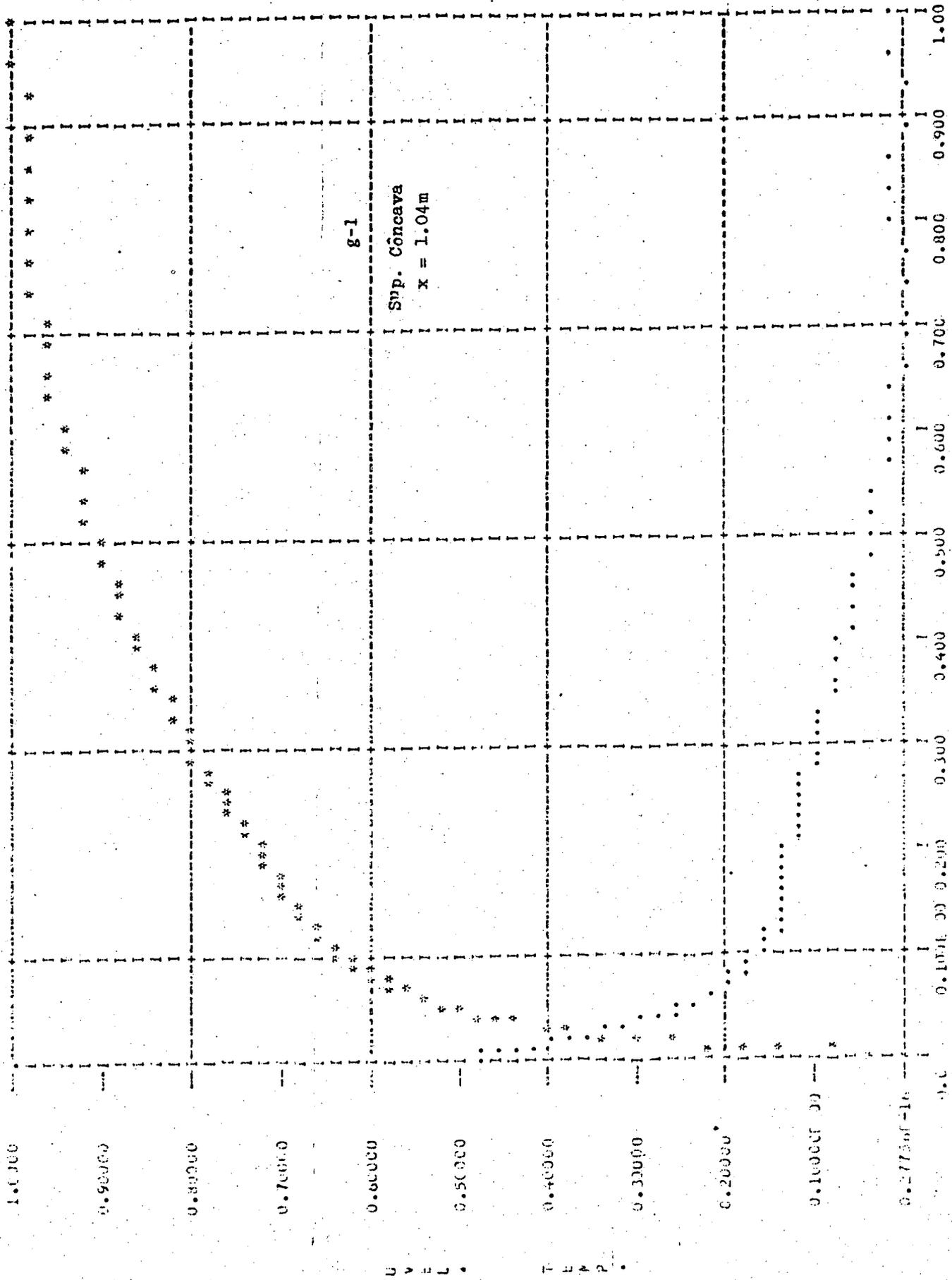


Y/DELTA

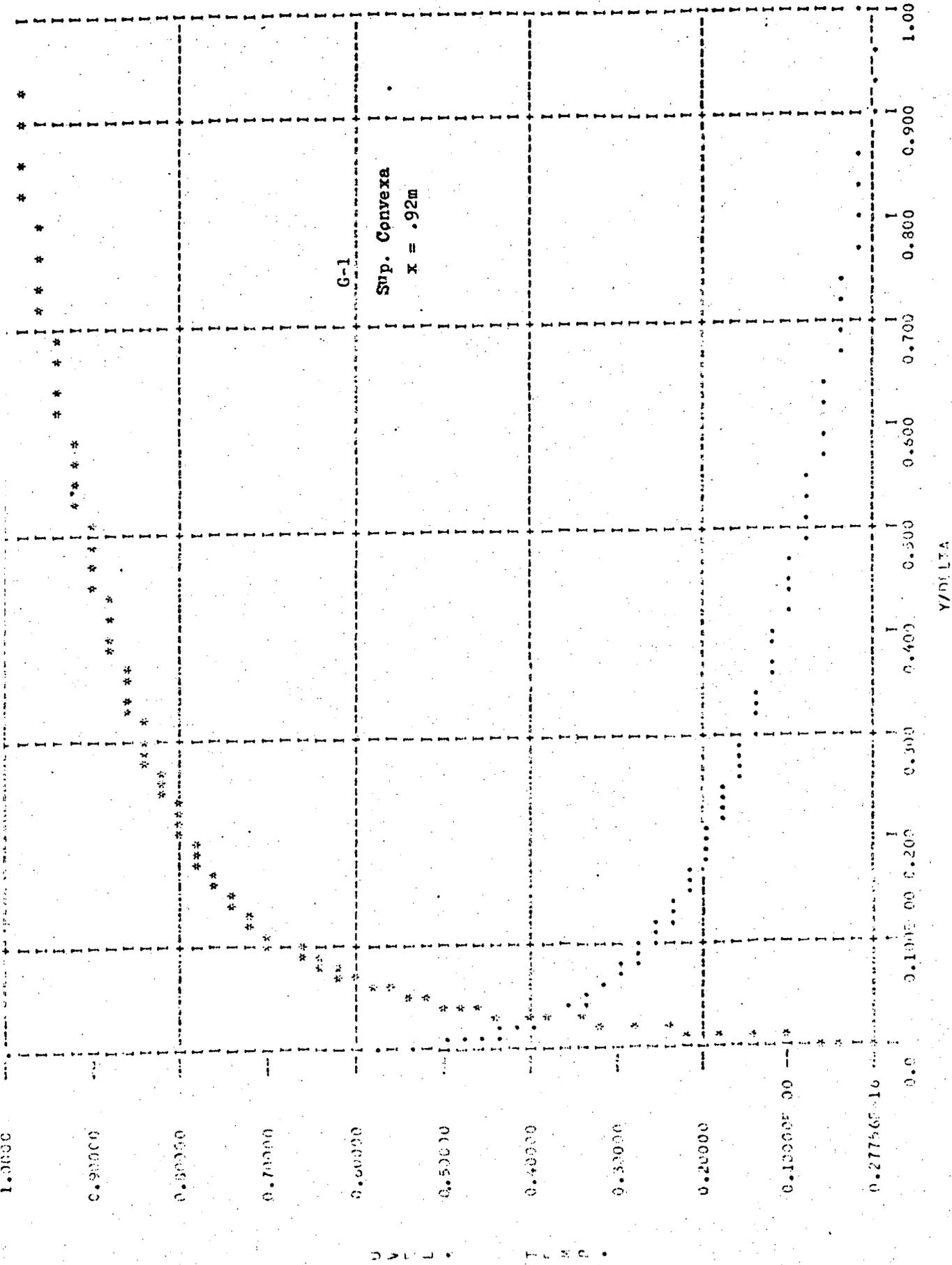
SURFACE POSITION  
SURFACE CODE



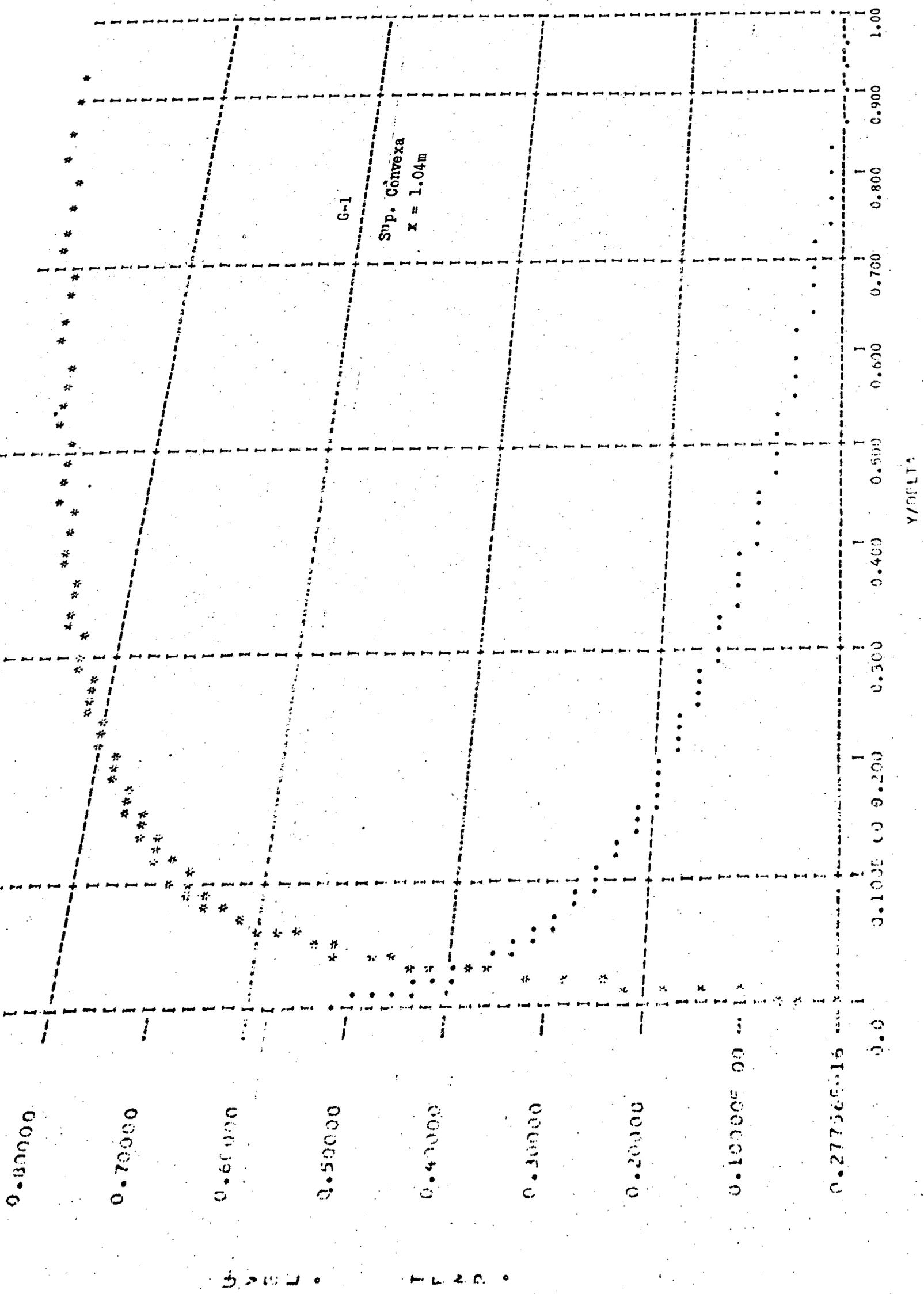
SURF. DE 8.119-MA  
 SURF. DE 4.510-MA  
 SURF. DE 4.510-MA  
 SURF. DE 4.510-MA



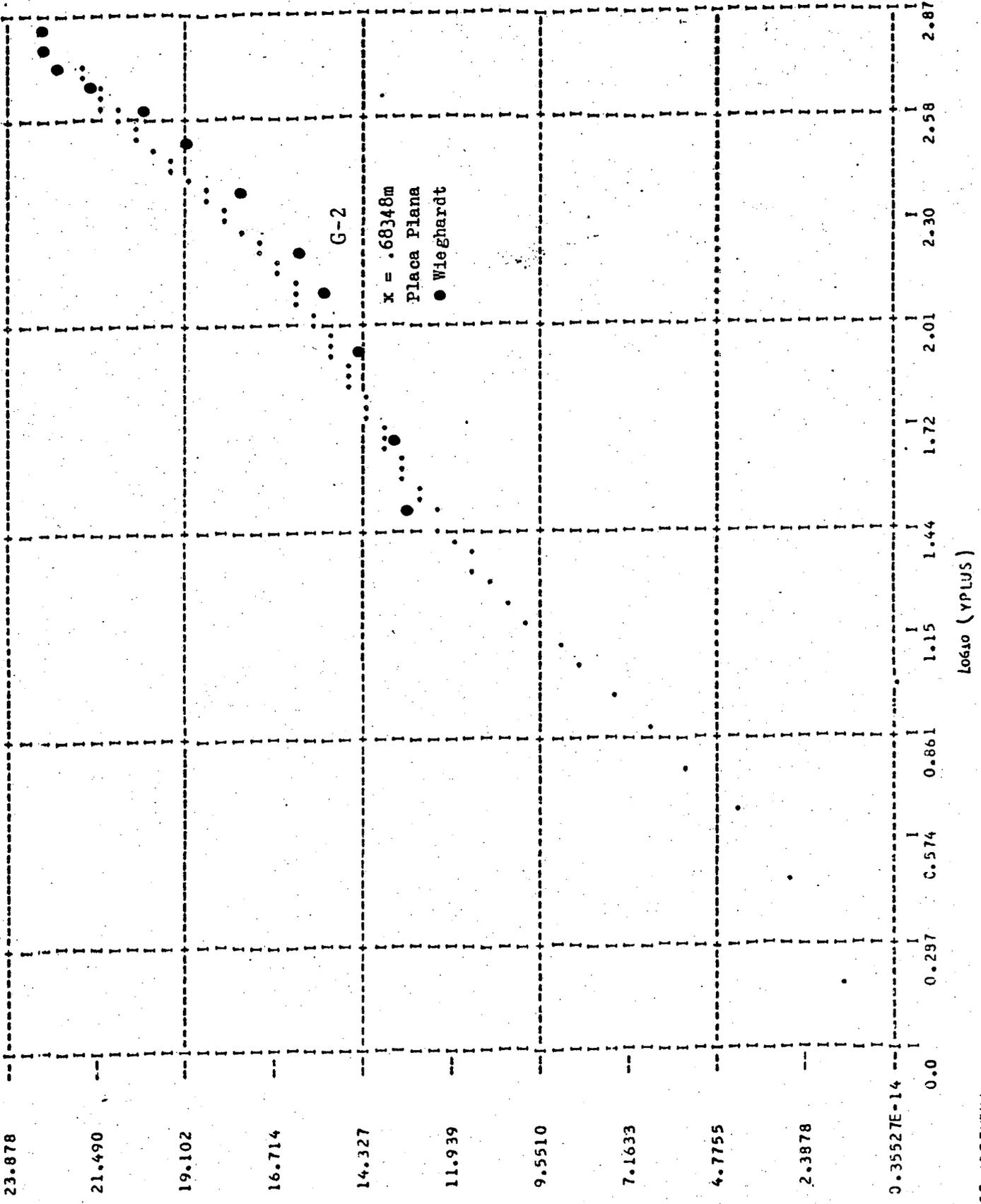
Y/DELTA



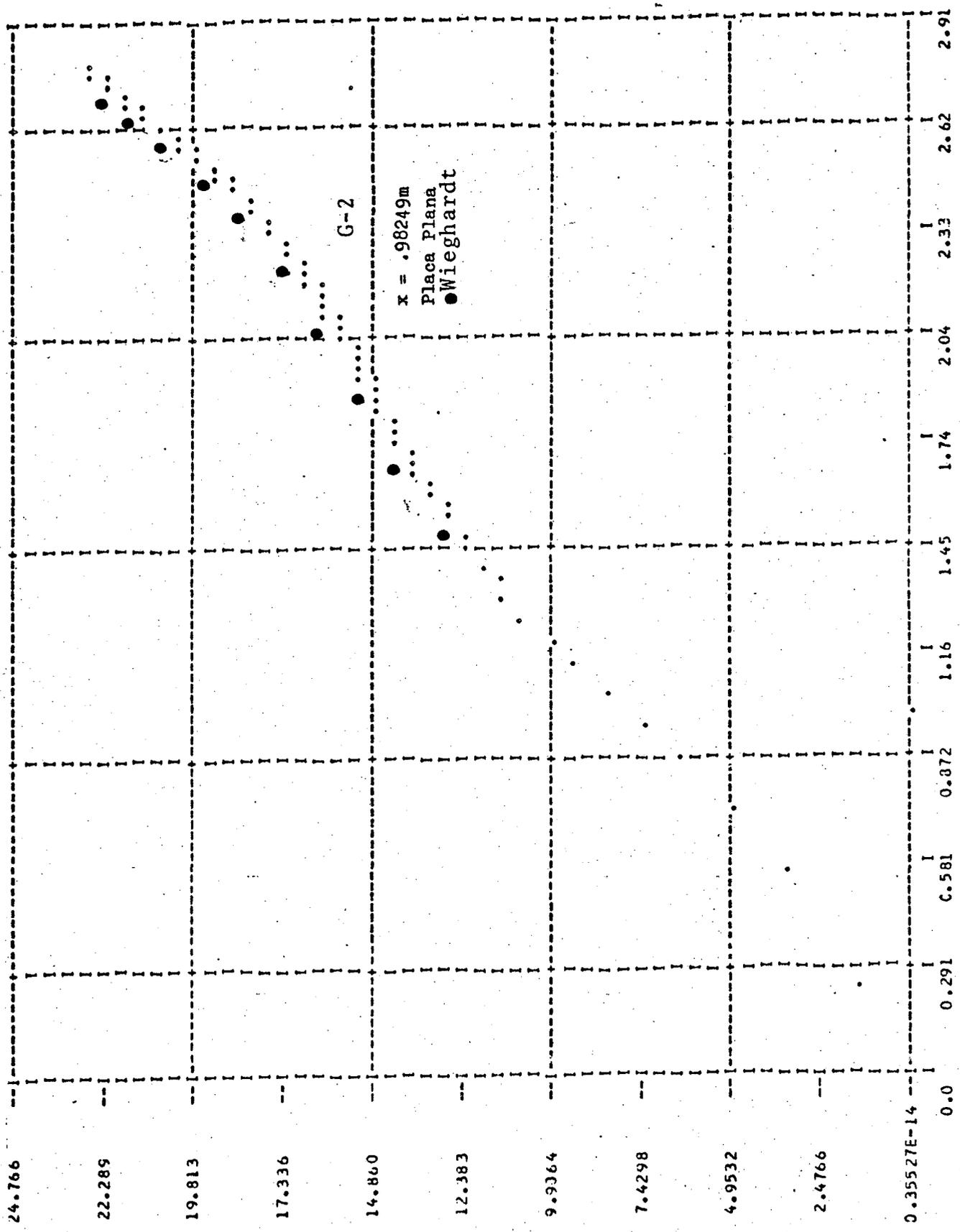
SUBSTRATE WITH ION\*  
SURFACE PLATE 2



SUPERFICIE CONVEXA  
SUPERFICIE PLANA



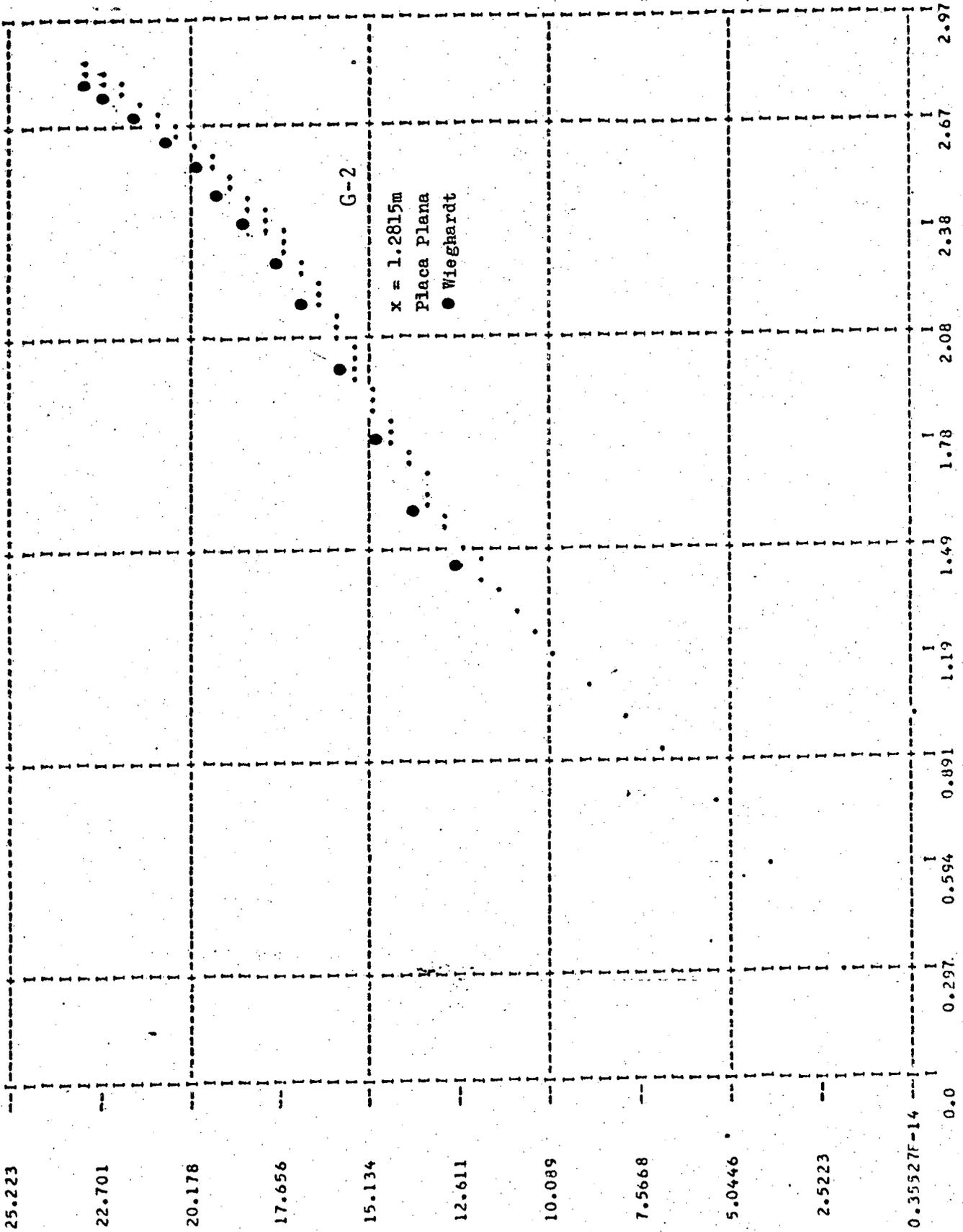
U  
P  
L  
U  
S



U  
P  
L  
U  
S

$\log_{10}(Y PLUS)$

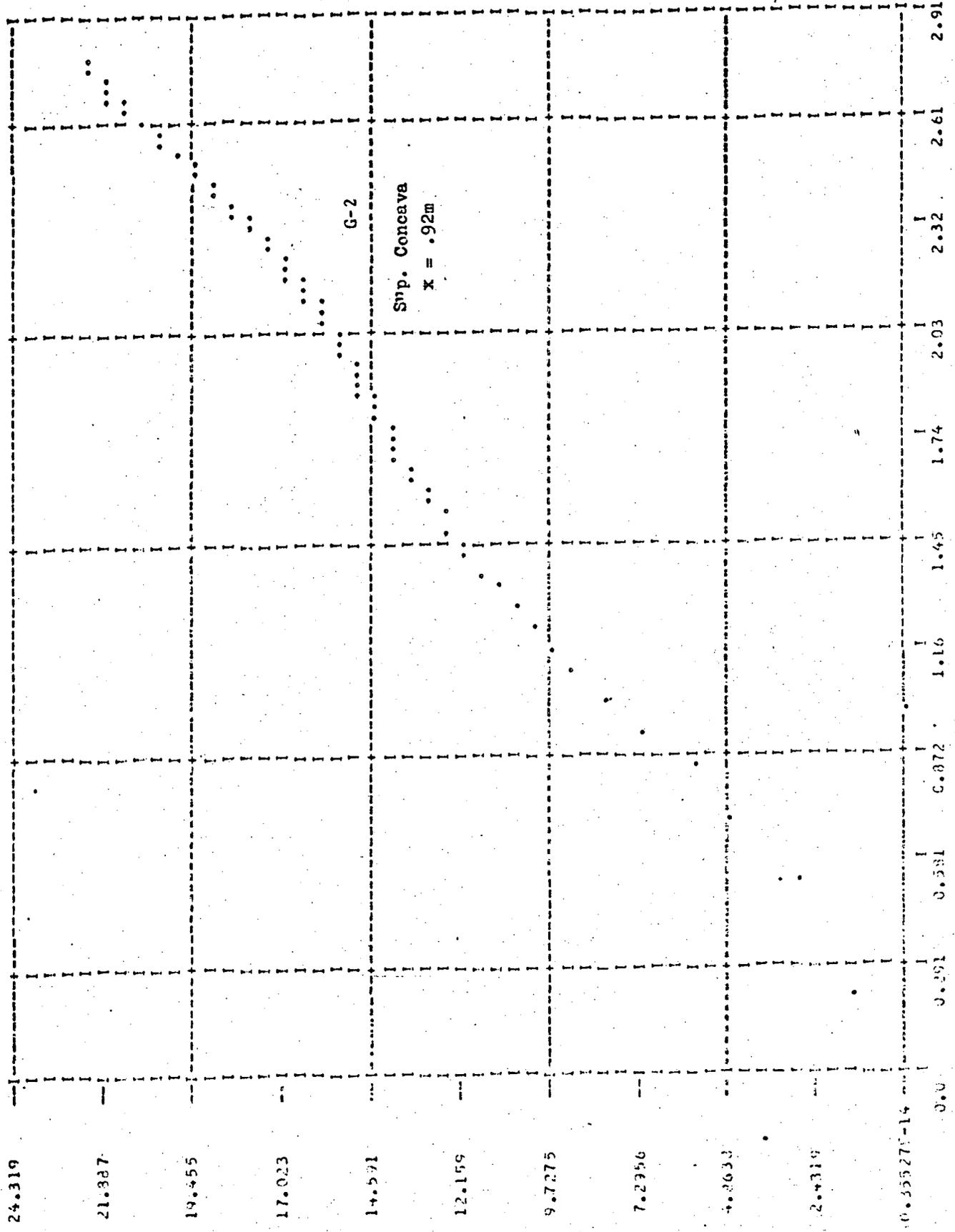
SUBTRACE #RETURN#



U  
P  
L  
U  
S

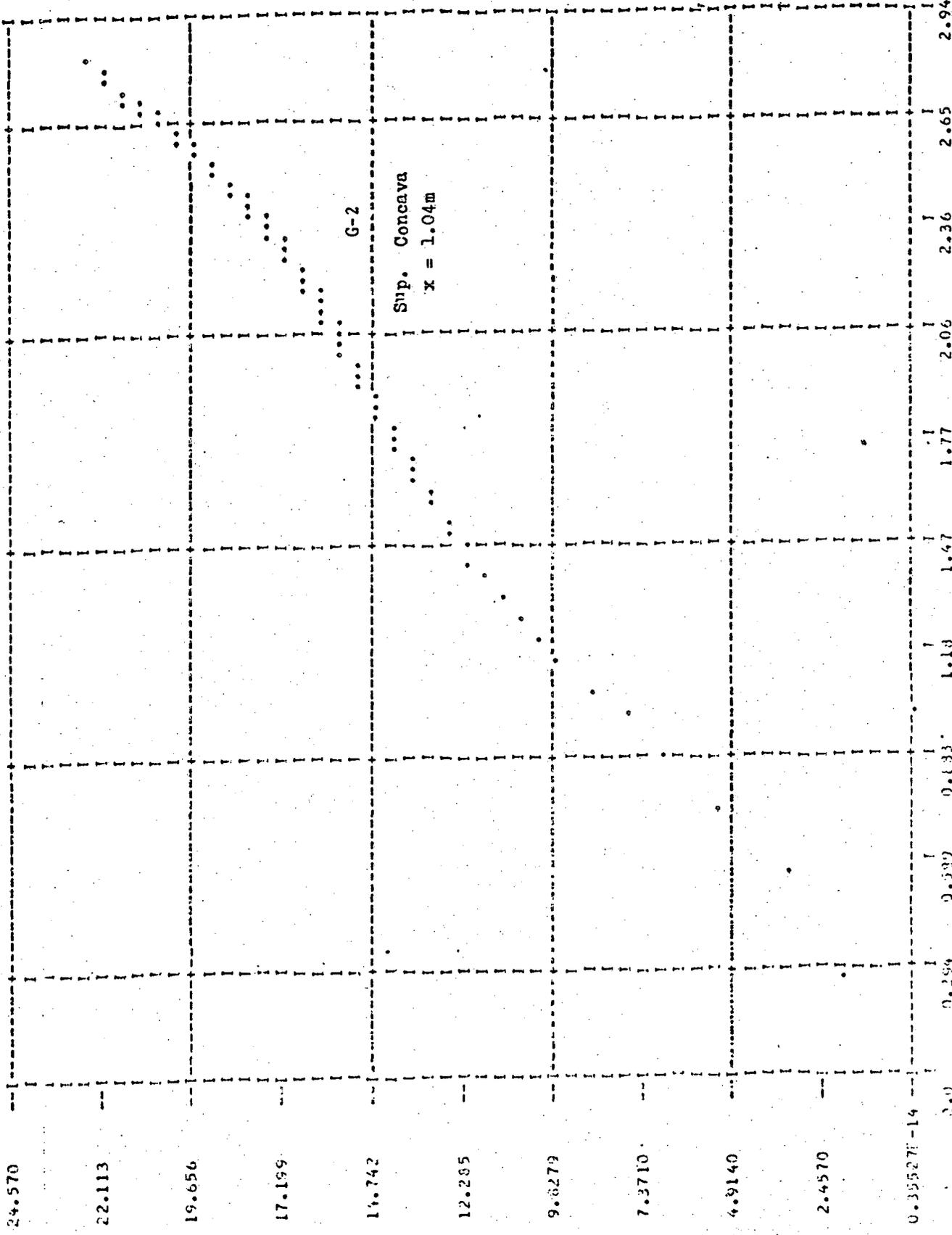
SURFACE #RETURN\*

Log<sub>10</sub>(YPLUS)



P L U S

Log<sub>10</sub>(V PLUS)



U  
P  
L  
U  
S

24.275

21.848

19.420

16.993

14.565

12.138

9.7102

7.2926

4.8551

2.4275

9.35527E-14

0.0

0.298

0.596

0.894

1.19

1.49

1.79

2.09

2.38

2.68

2.98

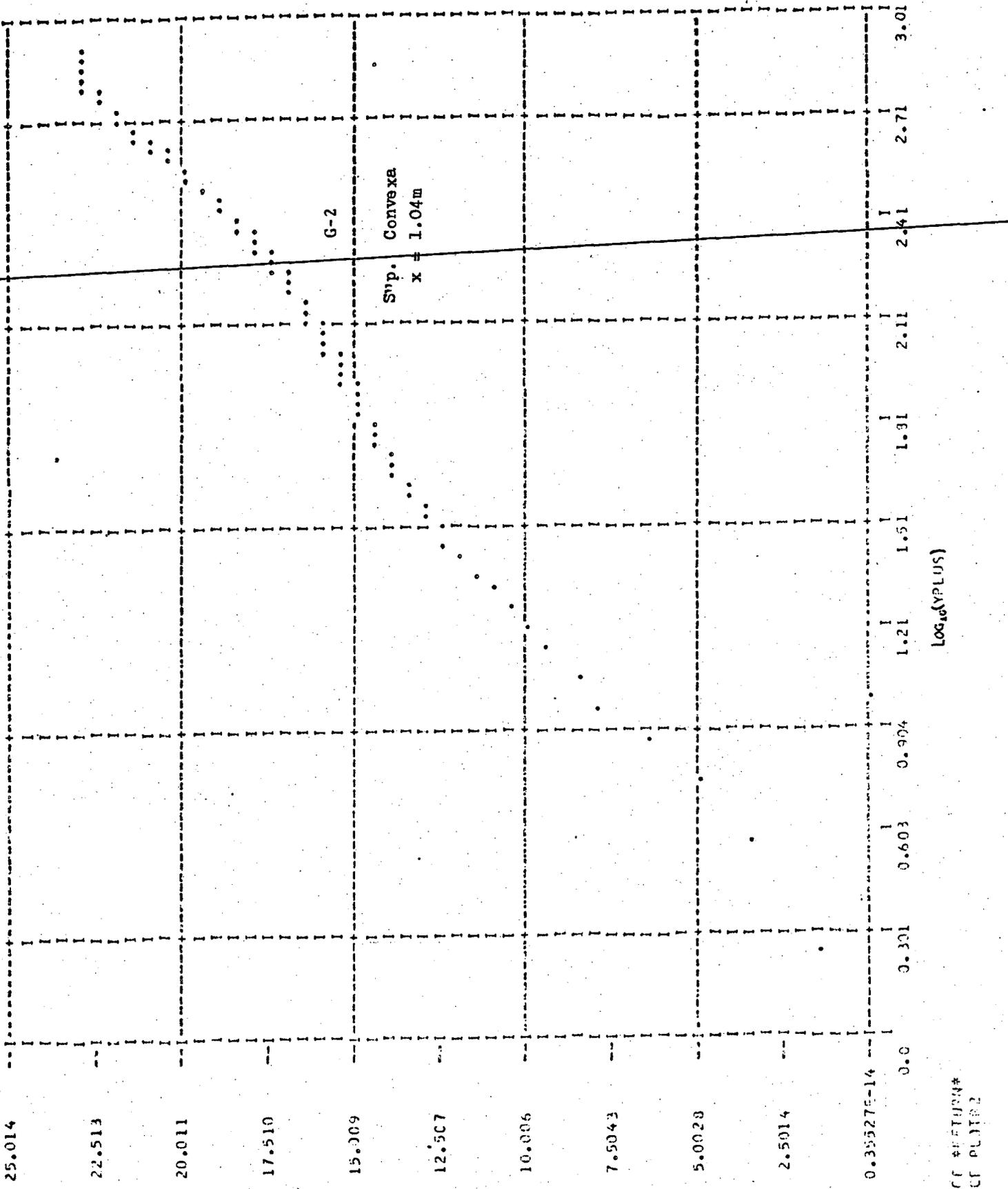
Sup. Convexa  
x = .92m

G-2

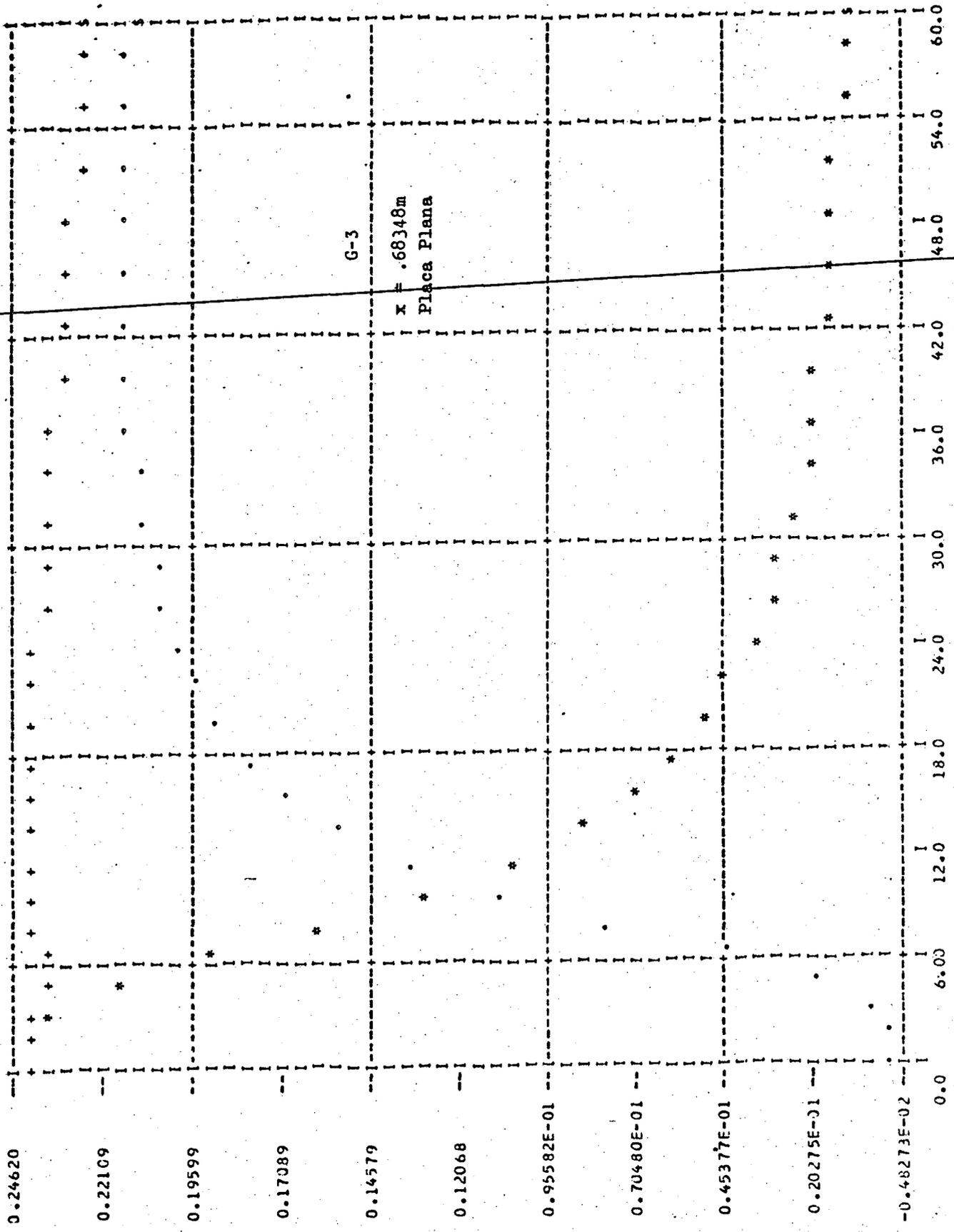
Log10(V PLUS)

U  
P  
L  
U  
S

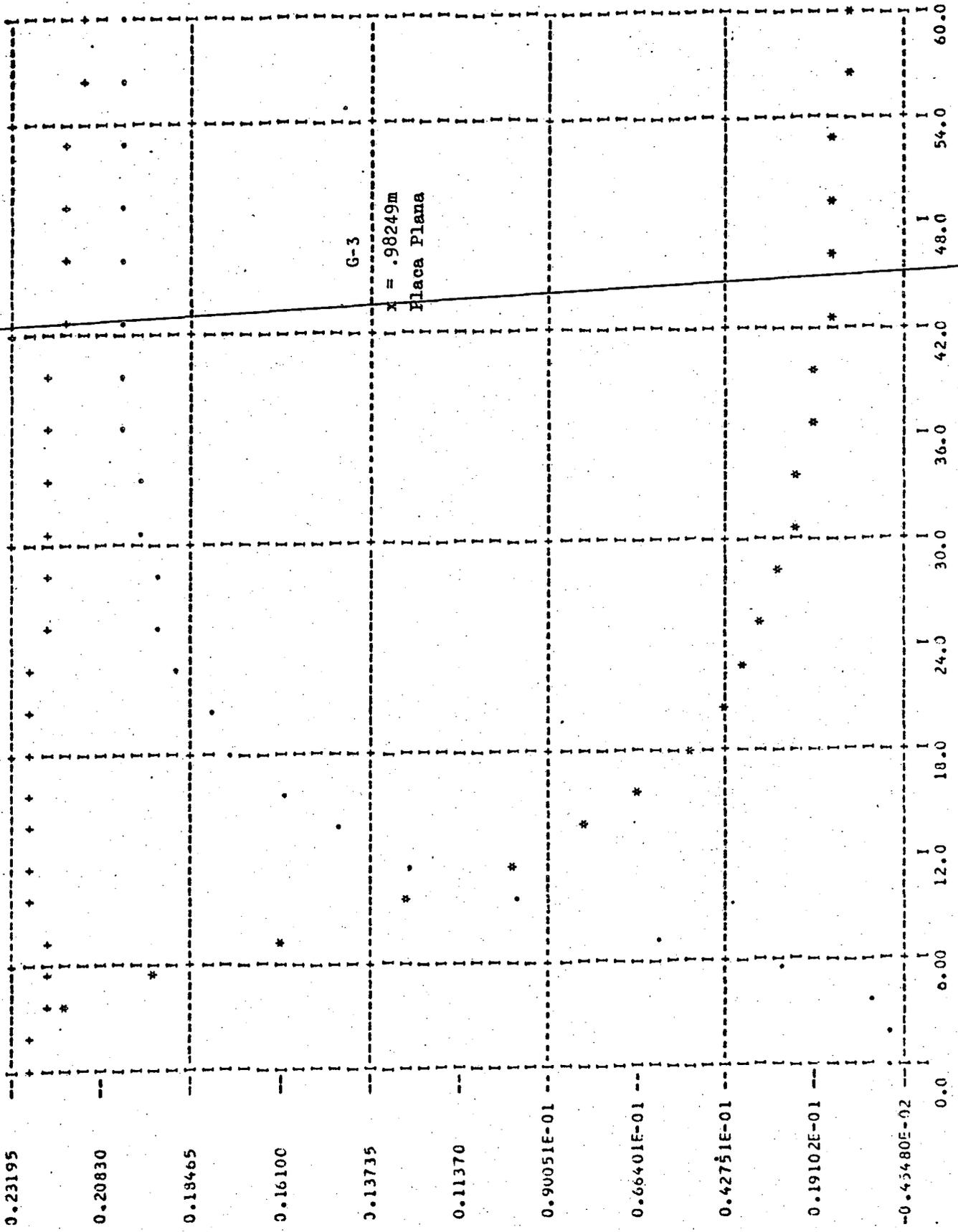
SUATRACE RETURN#  
SUATRACE PLOT#2



U  
P  
L  
U  
S



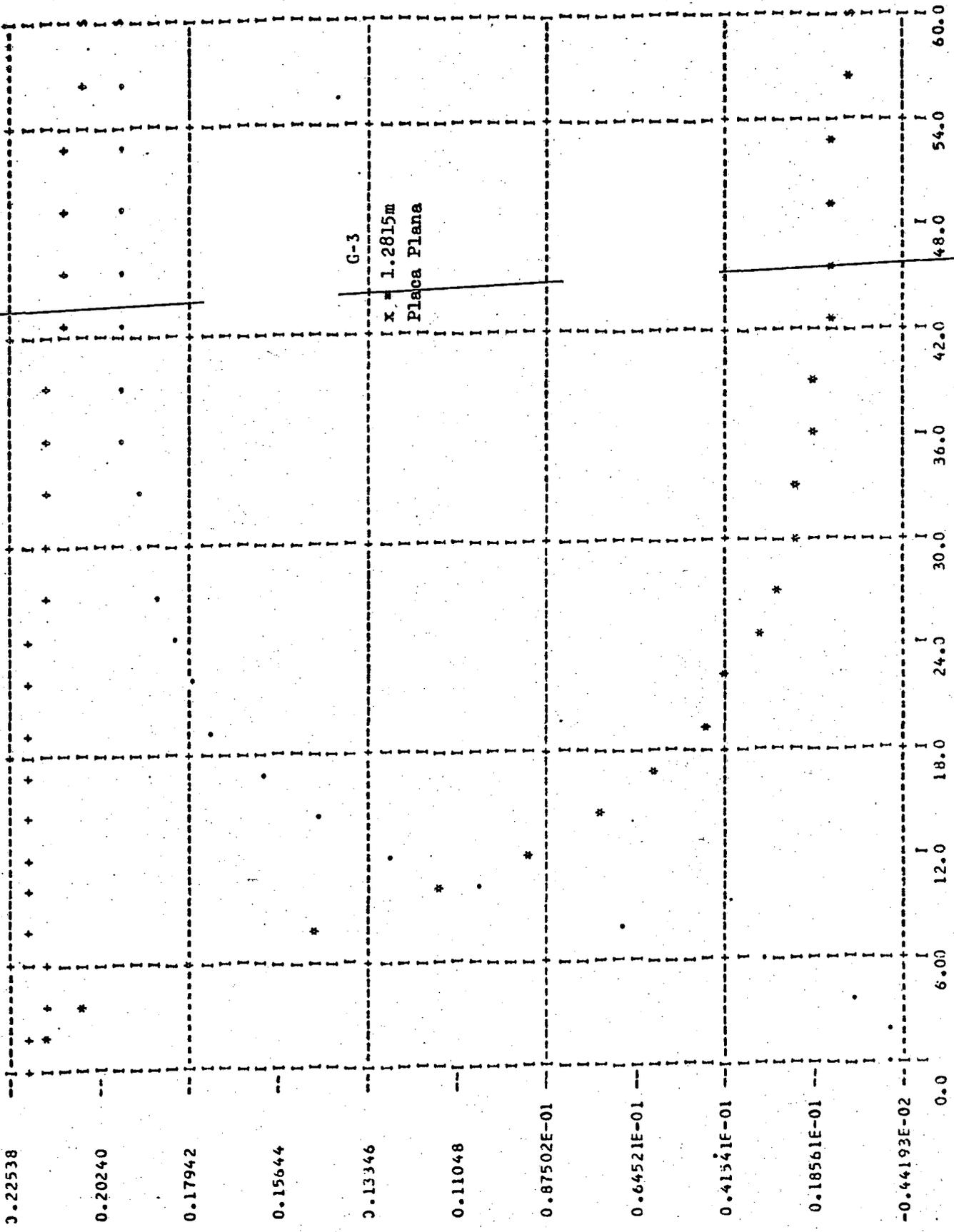
T T U P B  
T T V I S C  
T T O +  
T T A L



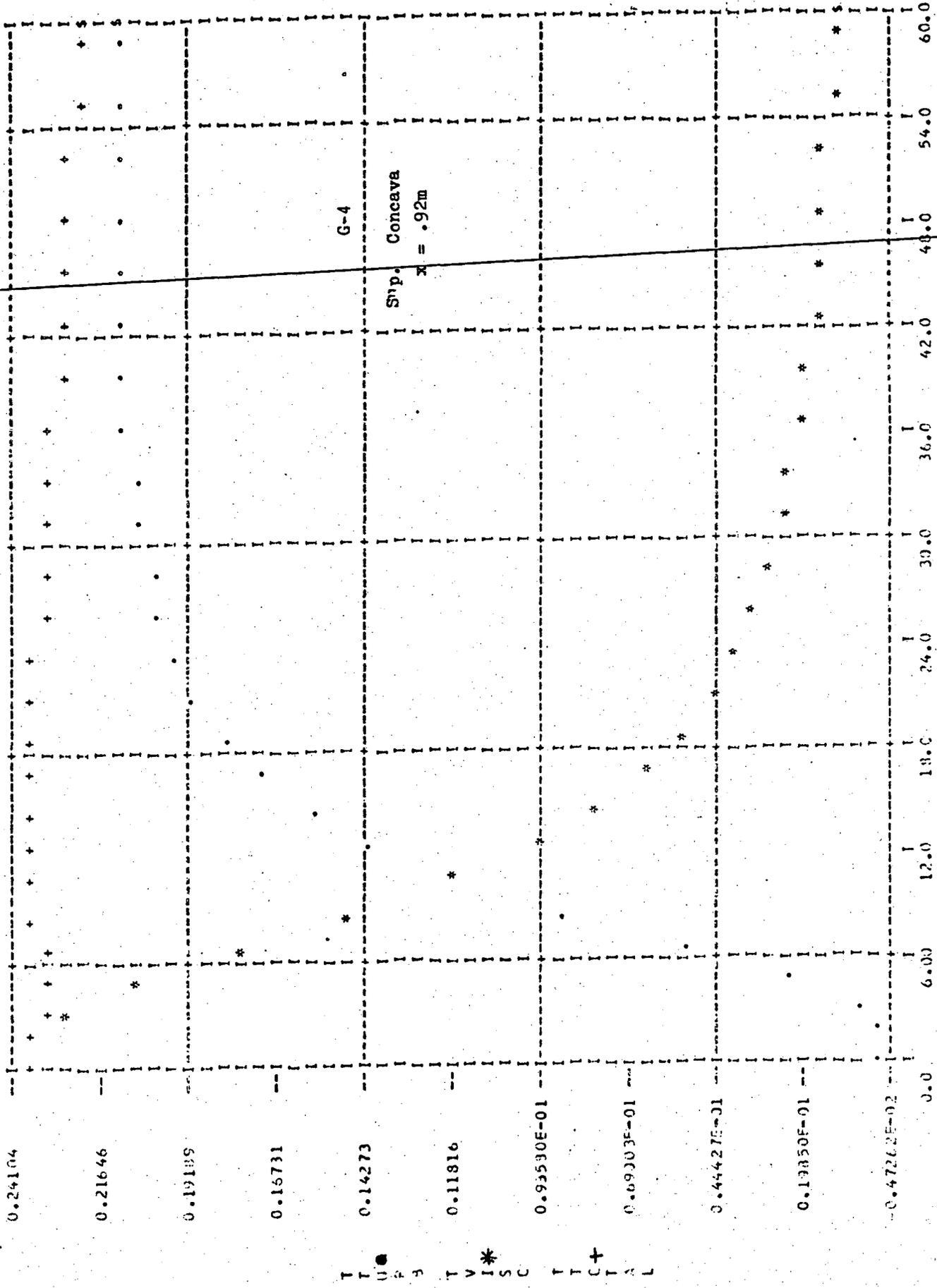
YPLUS

T T U R B T V I S C T T O T T A L

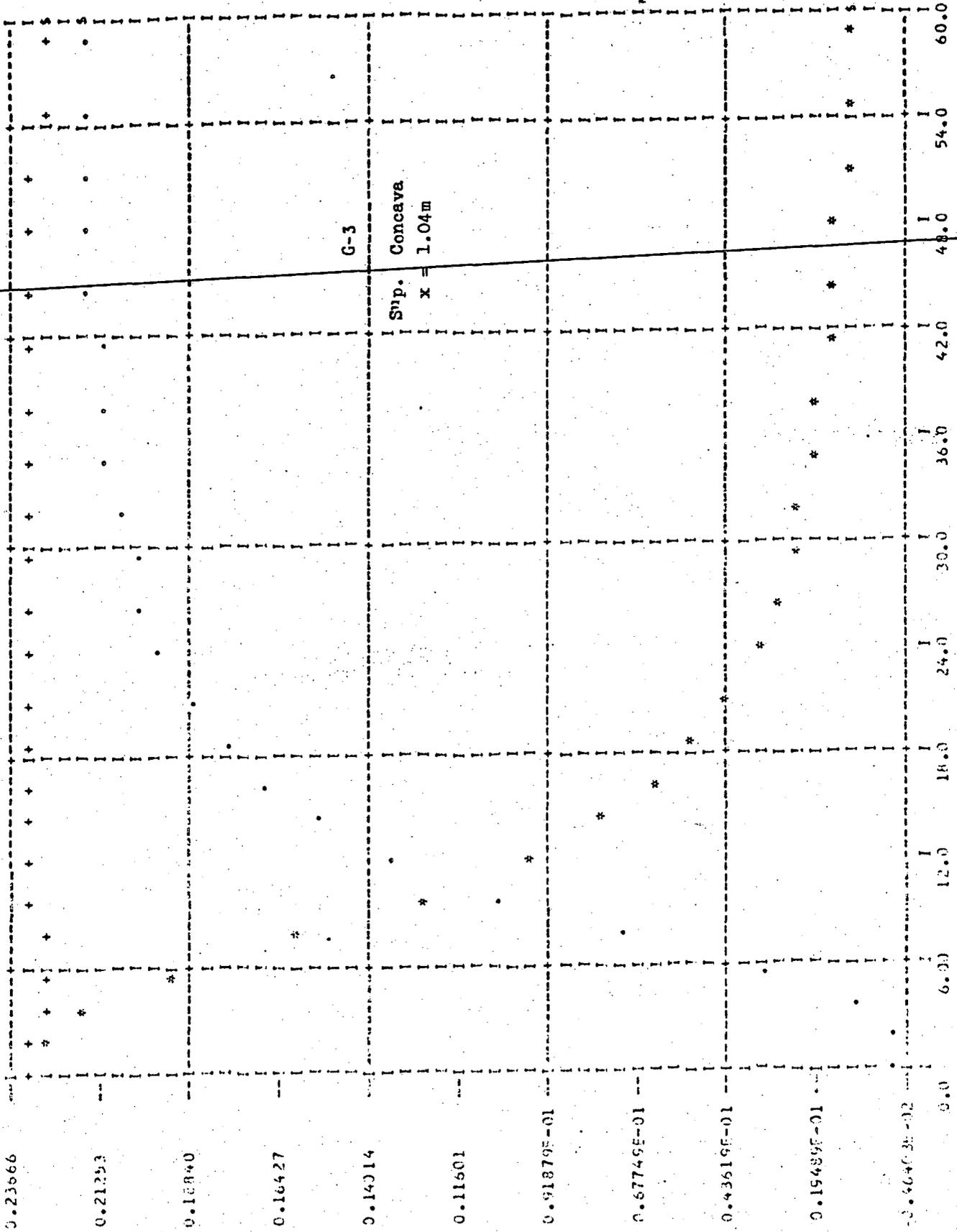
SUBSPACE #FFTURN#



T T U •  
R B  
T V I \*  
S C  
T T C +  
T A L



YPLUS



0.23666

0.21253

0.18340

0.16427

0.14514

0.11601

0.918795-01

0.677495-01

0.436195-01

0.154895-01

0.46493-02

0.0

12.0

18.0

24.0

30.0

36.0

42.0

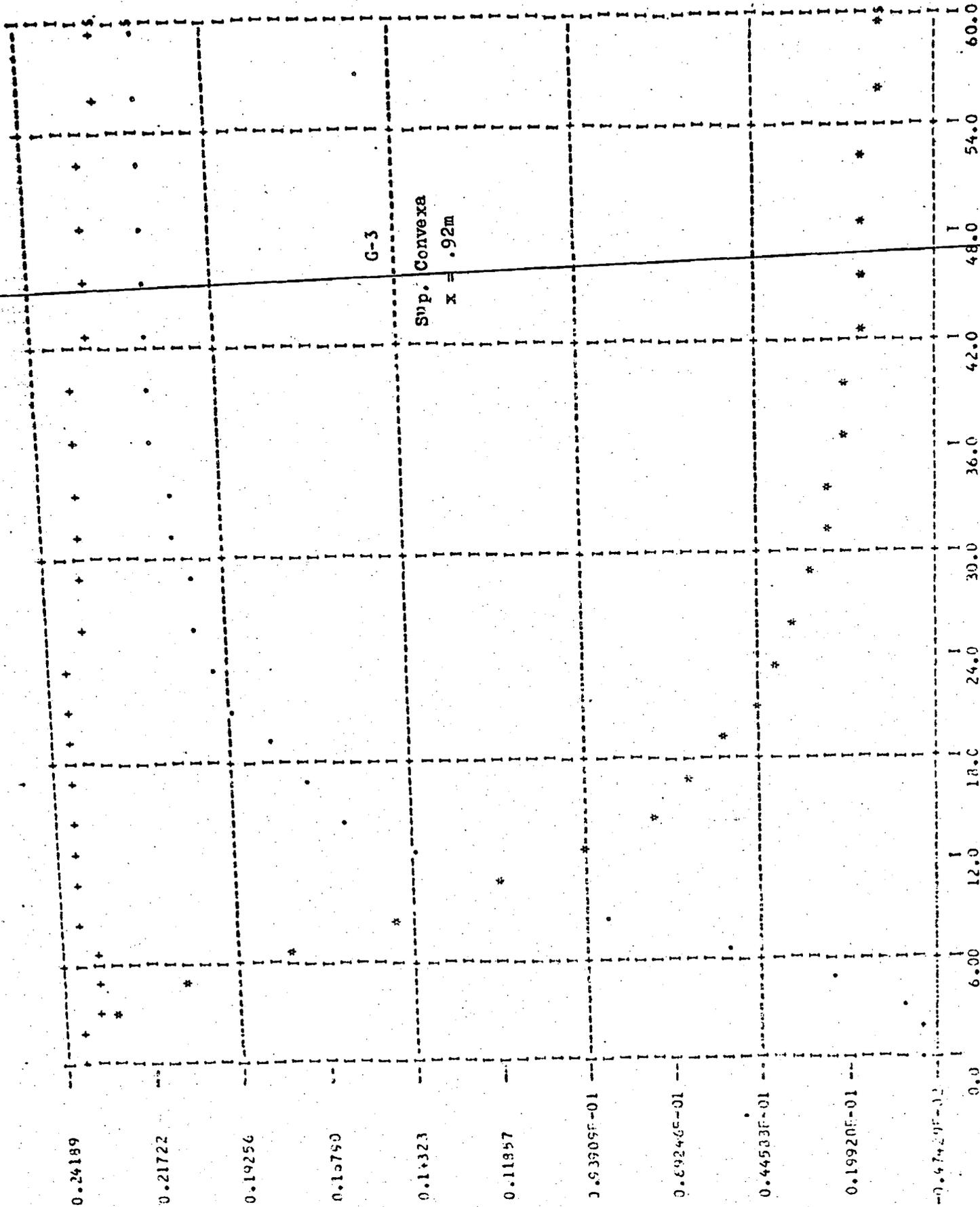
48.0

54.0

60.0

Y PLUS

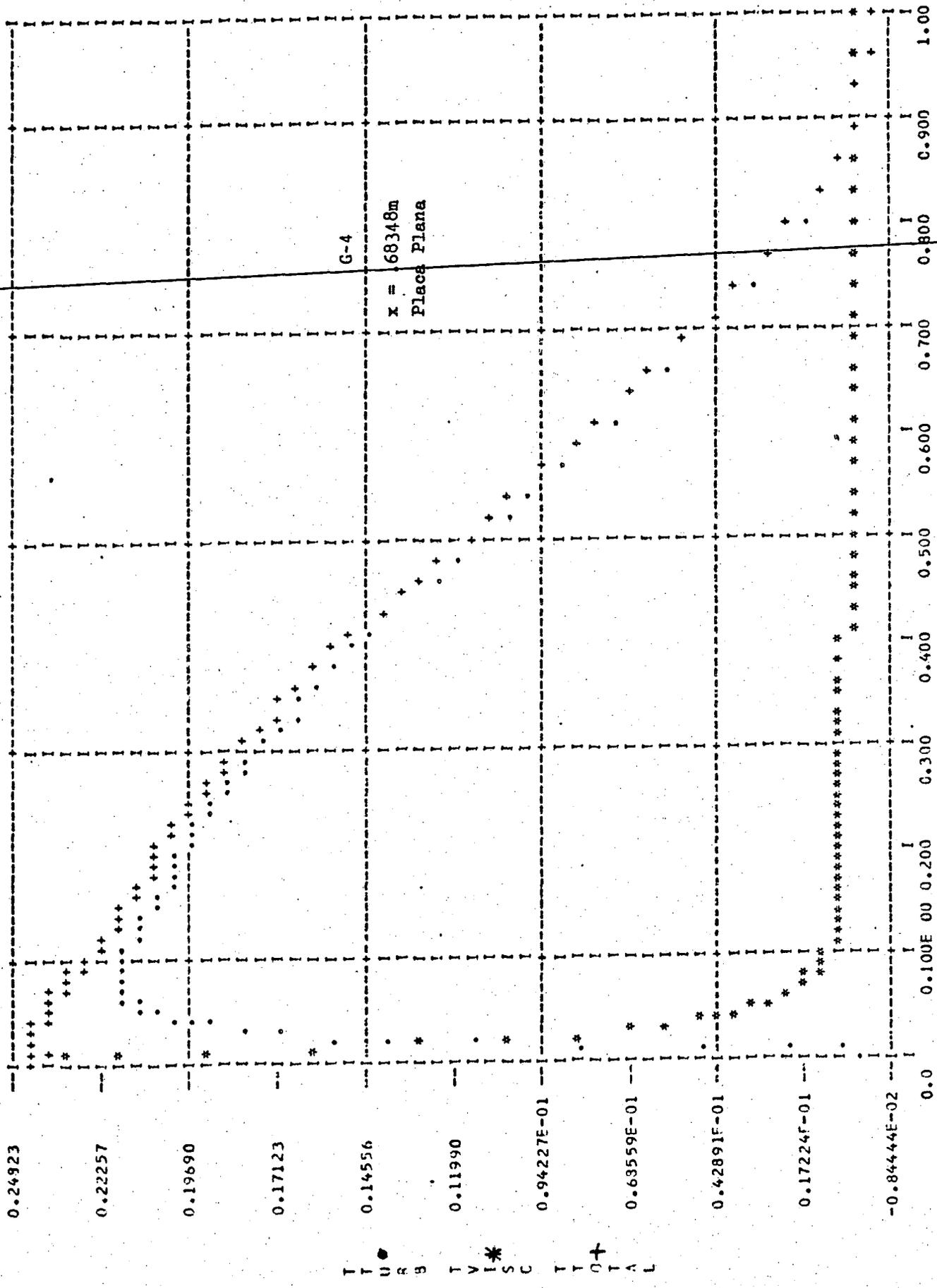
T U  
R B  
T V  
I S  
C  
T T  
O +  
T A  
L



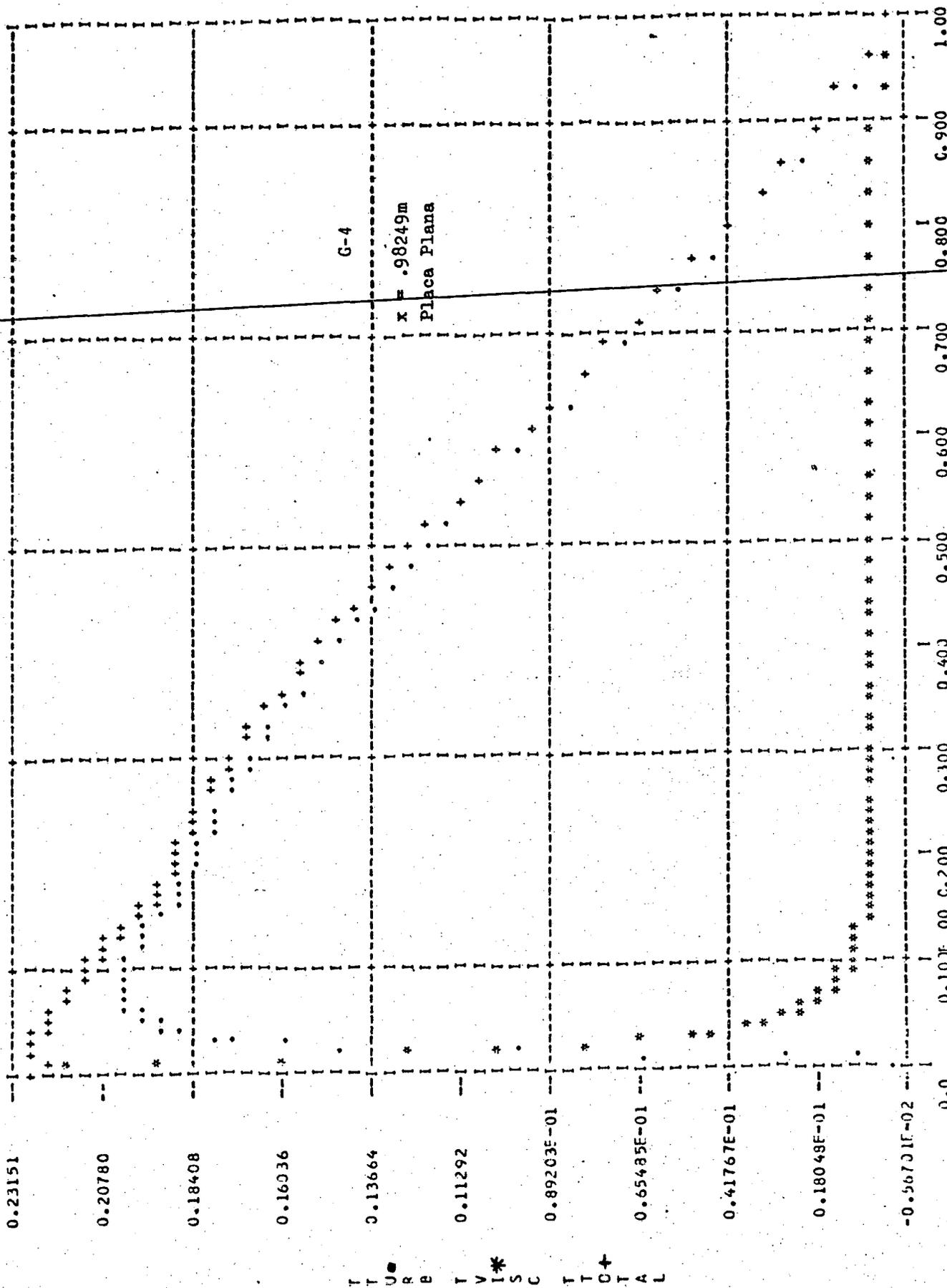
T  
T  
U.  
P  
R  
R  
T  
V  
T  
S  
C  
T  
T  
O  
T  
A  
L

YPLUS





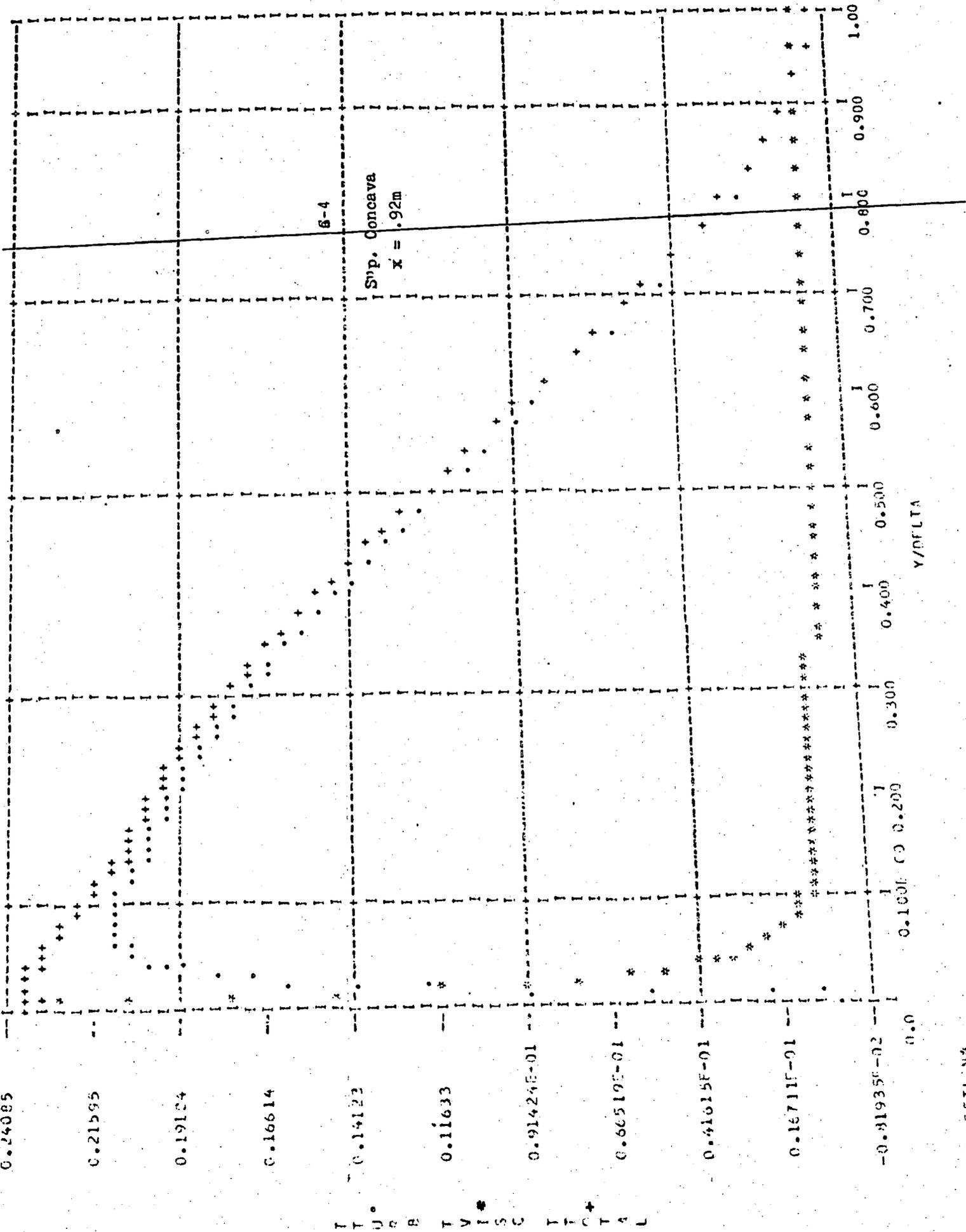
T T U R B  
 T V I \*  
 S C  
 T Y 0 +  
 T A L



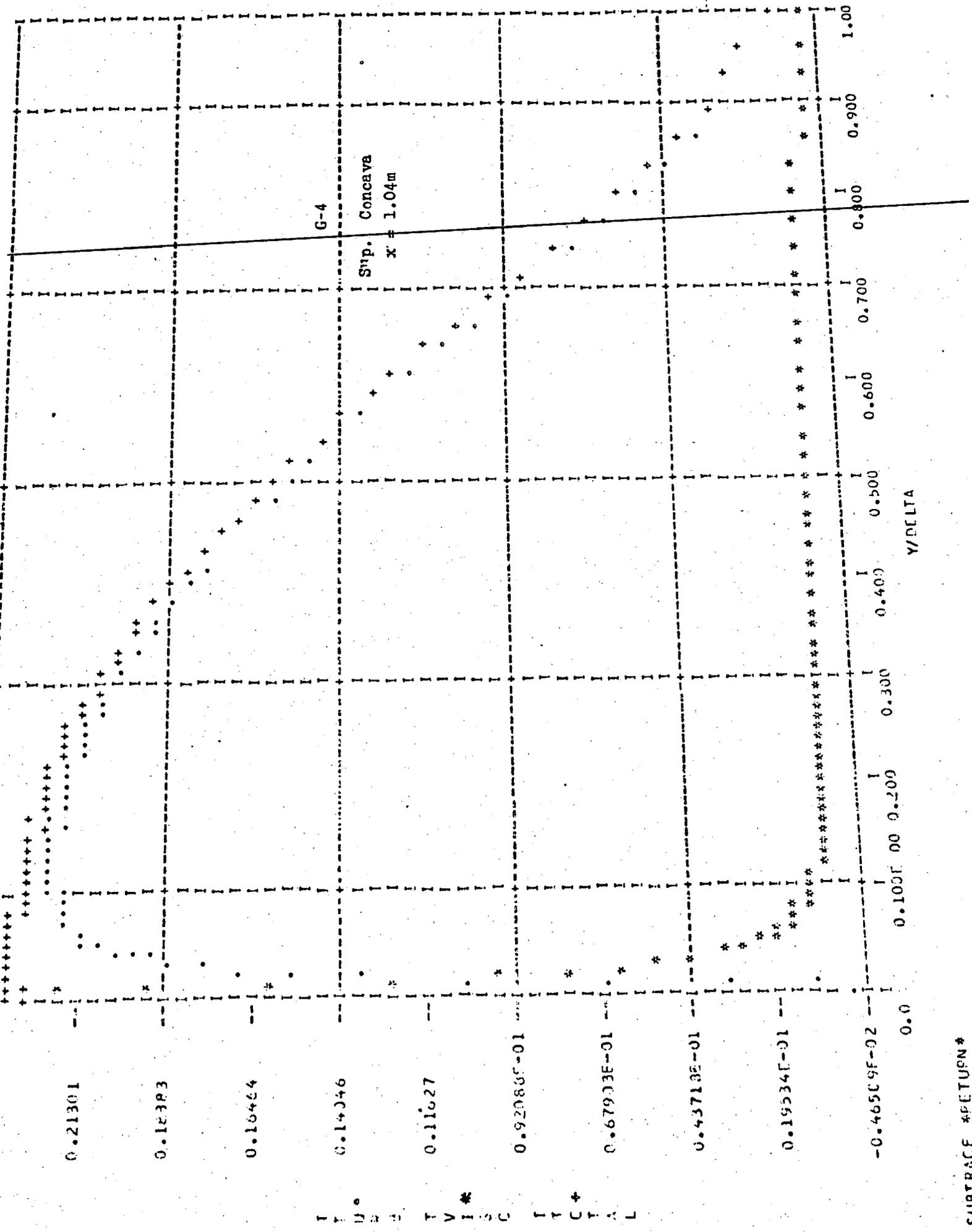
Y/DELTA

SUBTRAC \*6FTURN \*



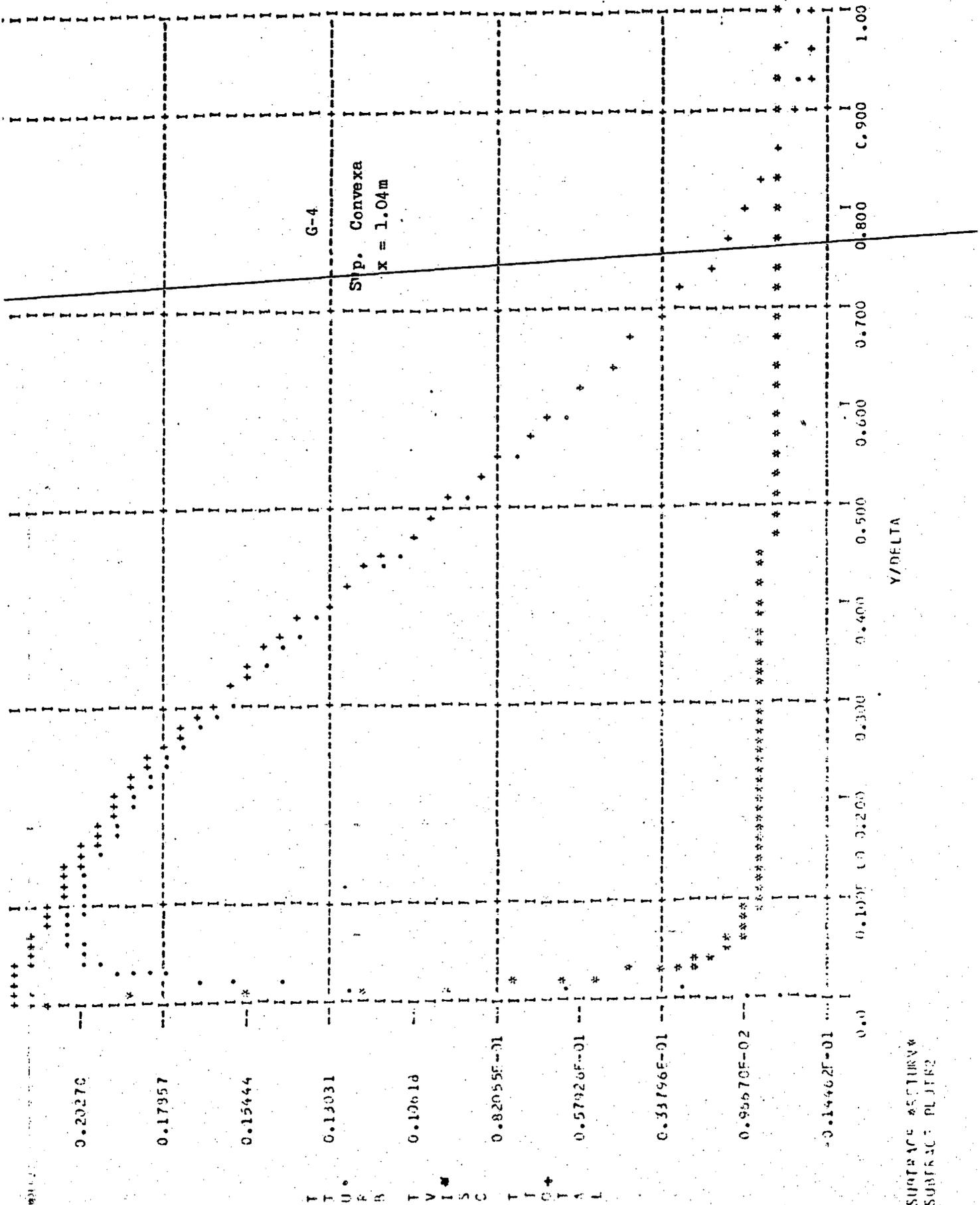


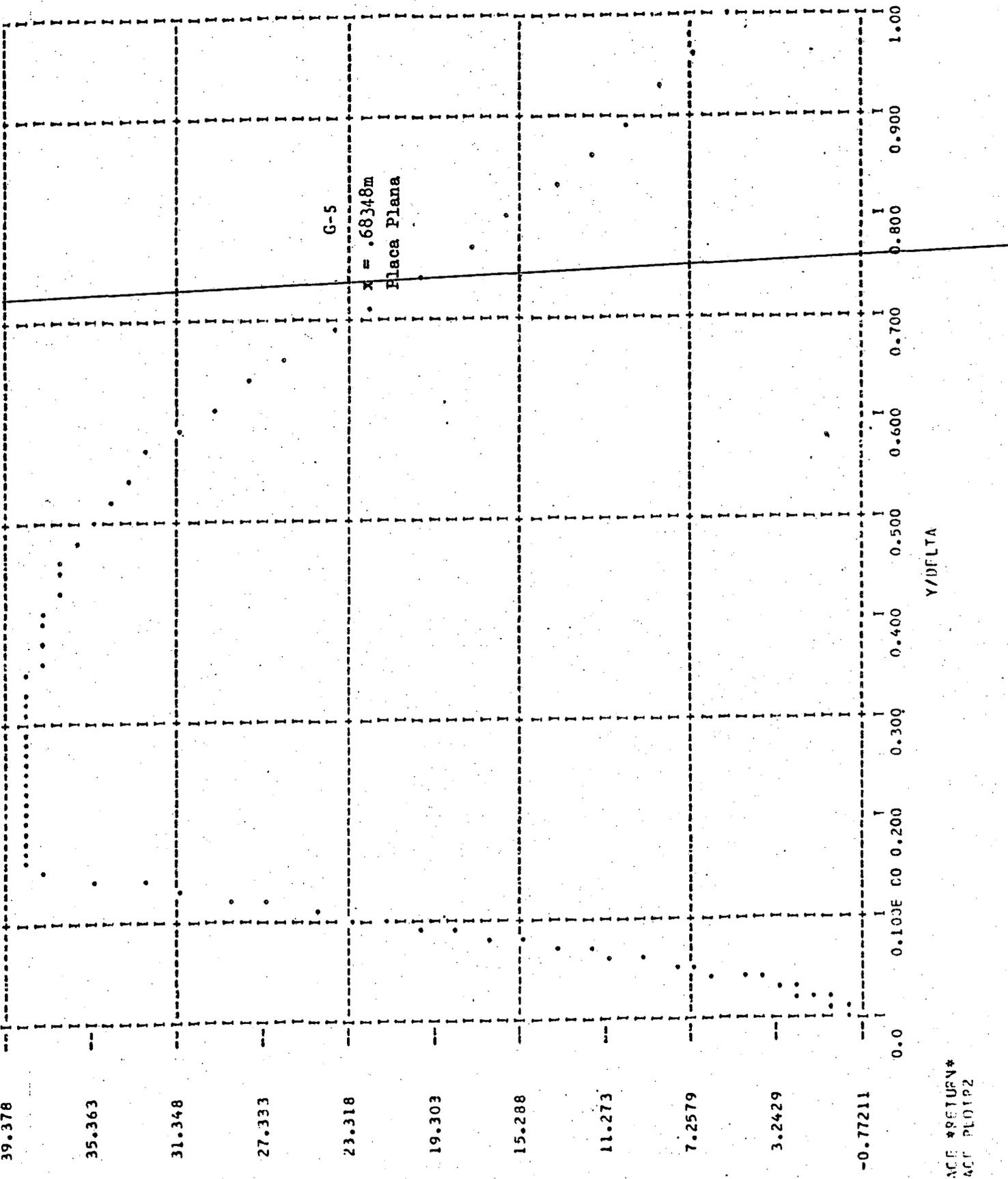
T  
U  
R  
B  
T  
V  
I  
S  
C  
T  
I  
C  
T  
A  
L

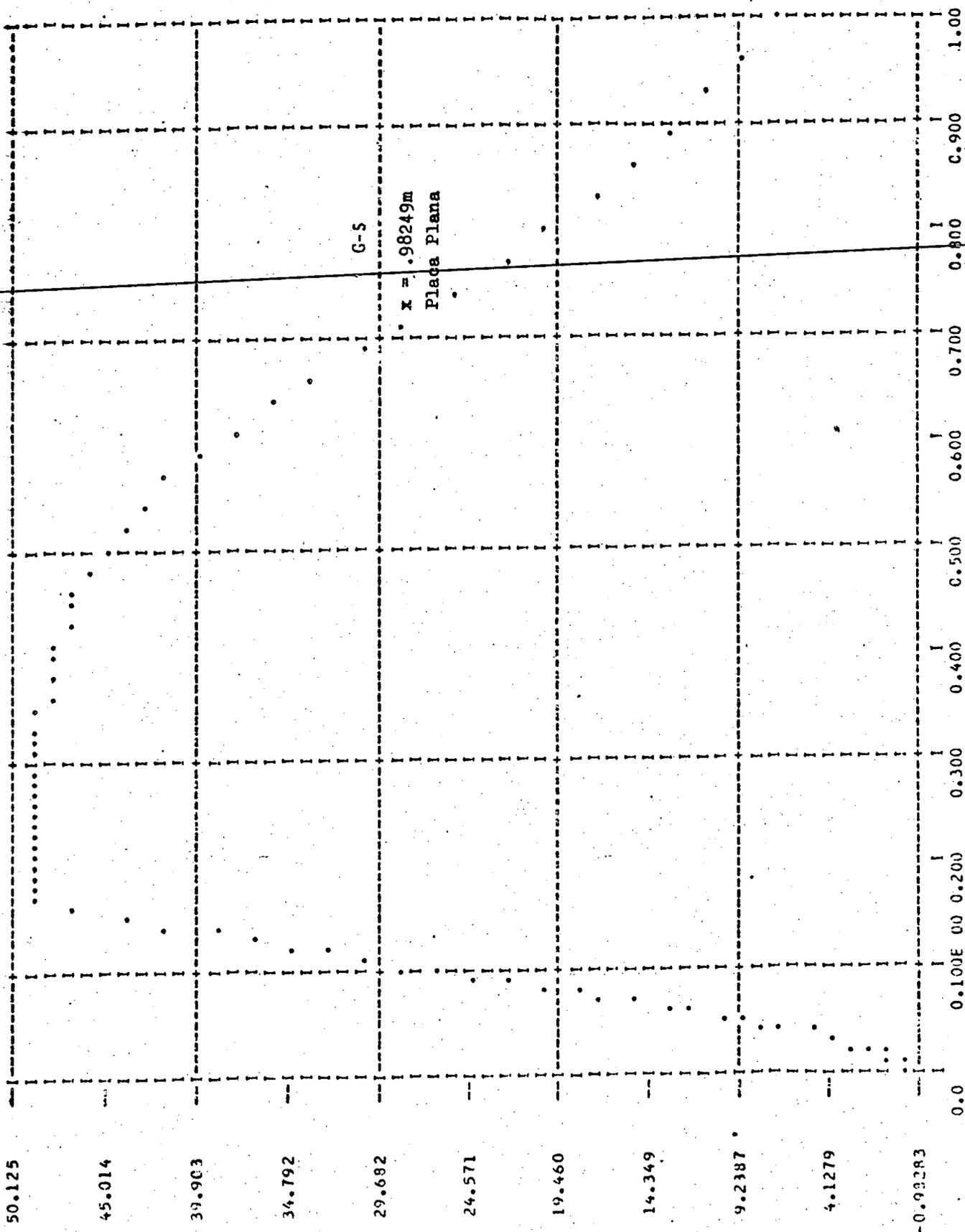


SURFACE \*RETURN\*  
SURFACE PLOT2

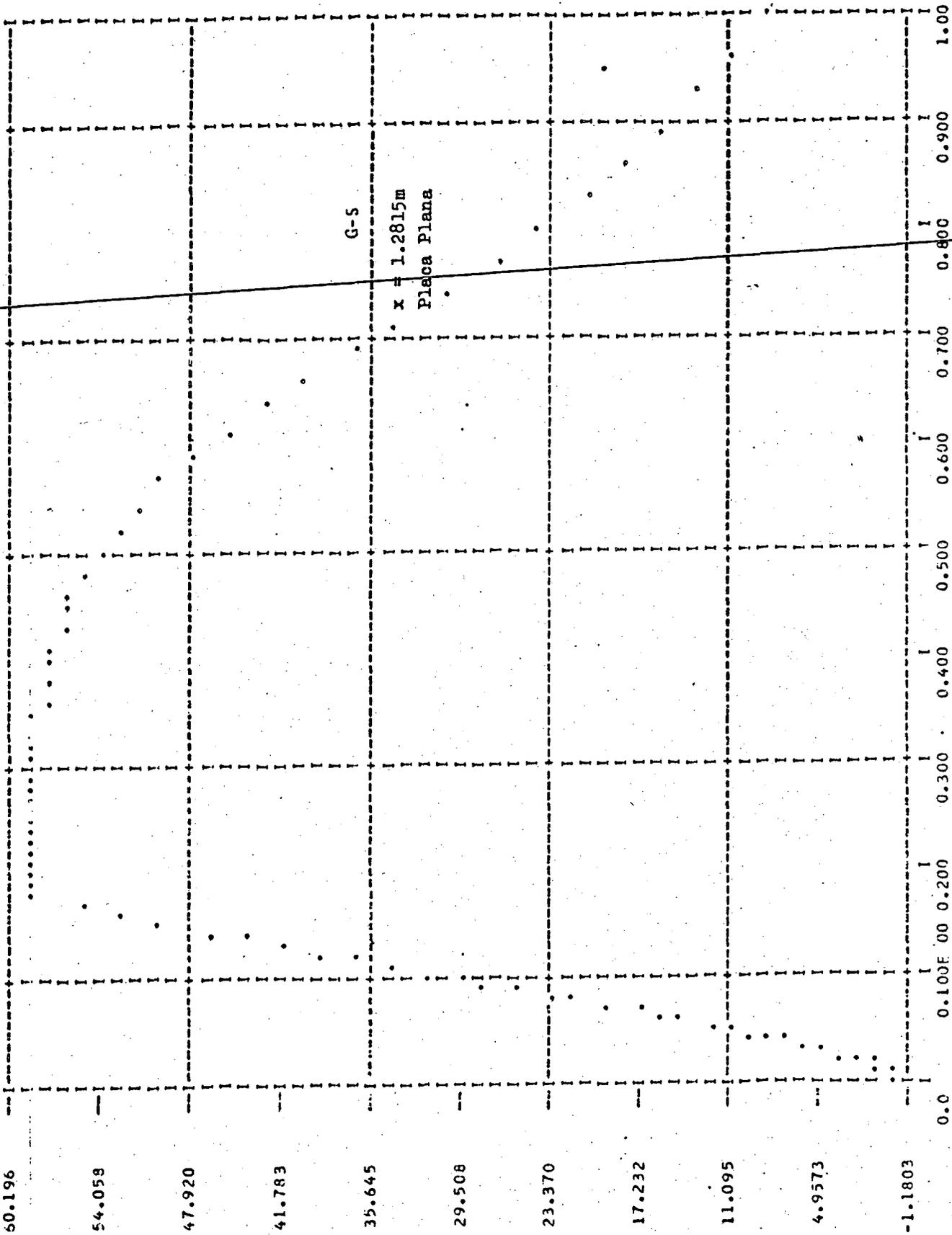






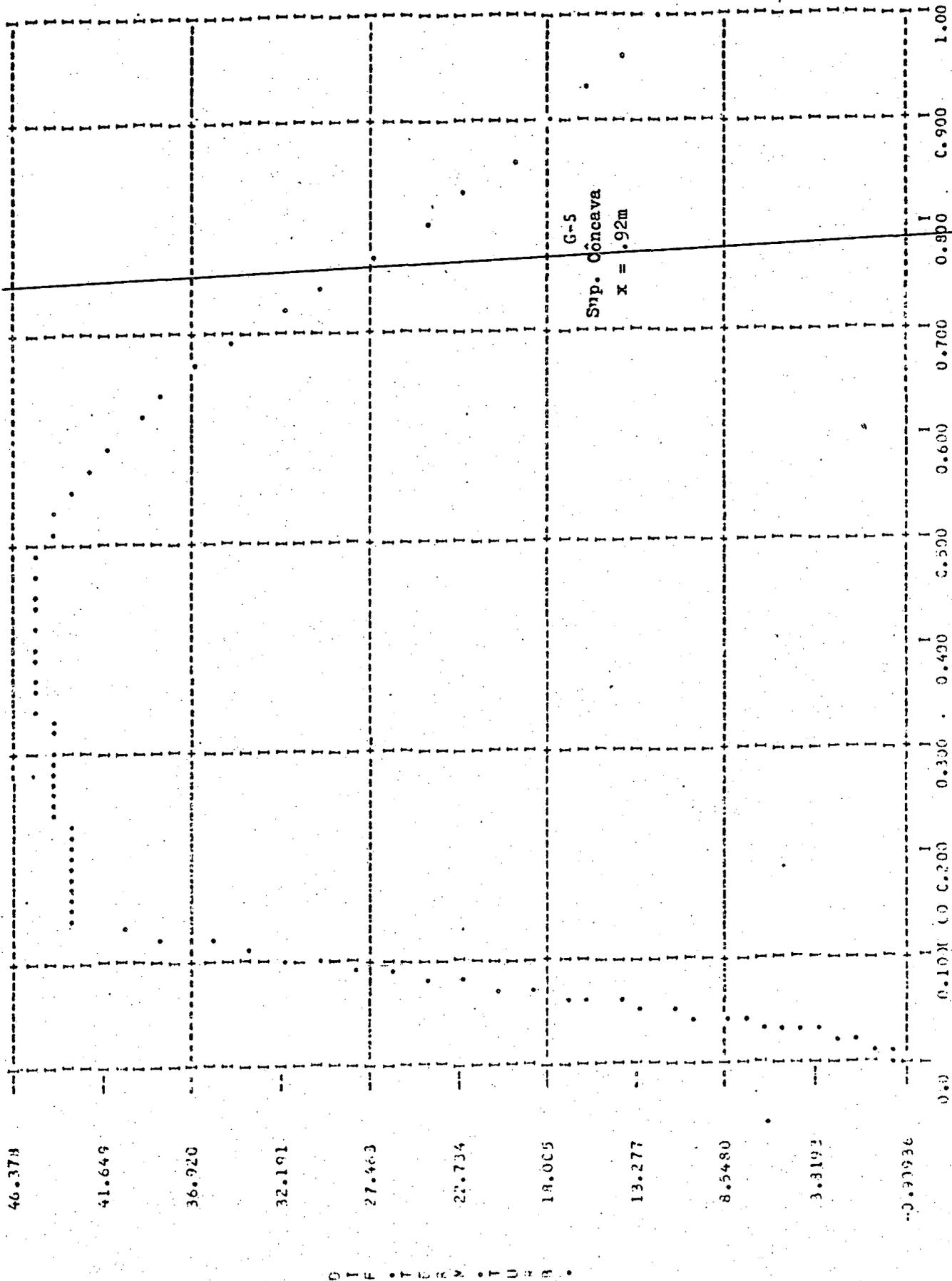


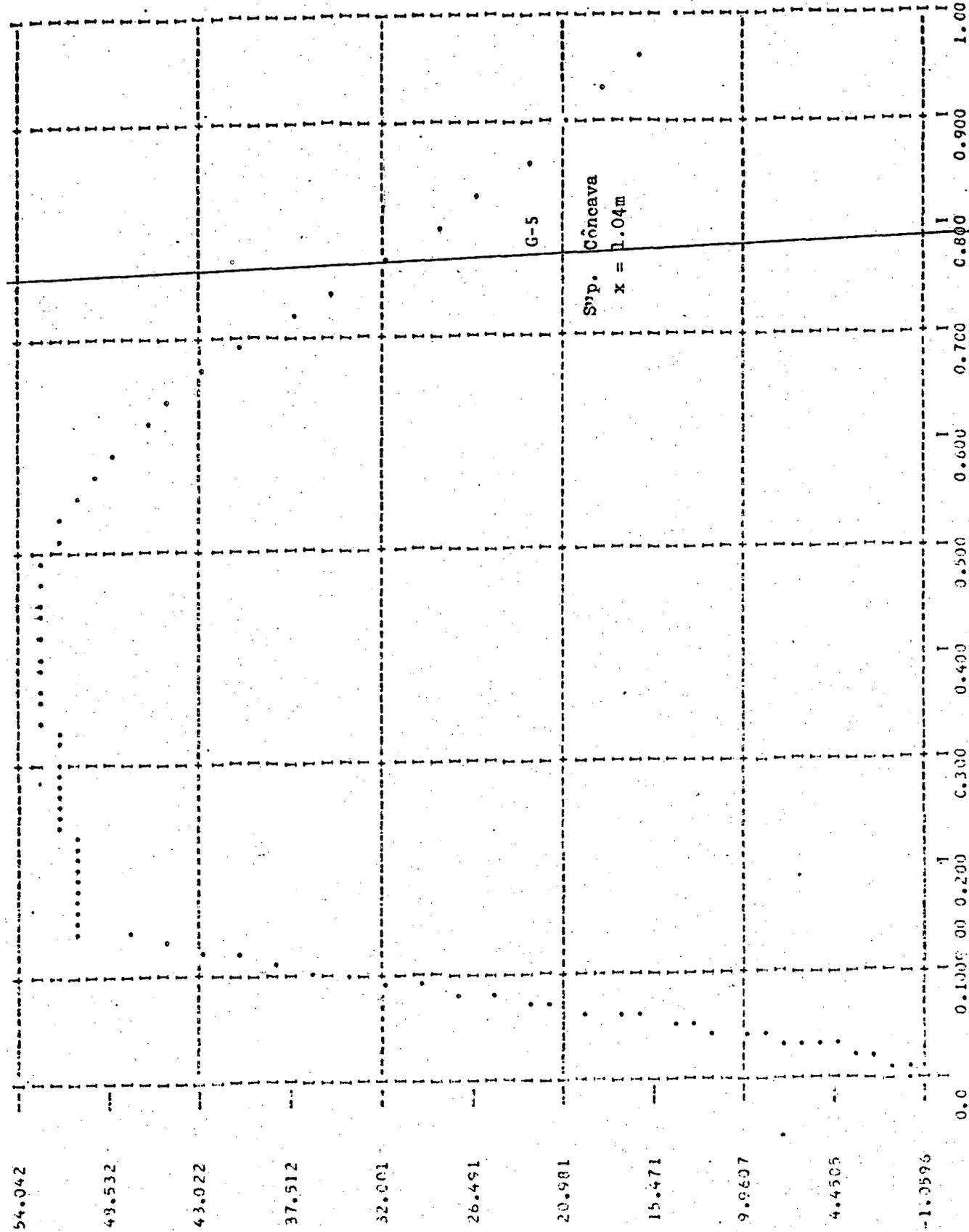
SUBTRACE #RETURNS  
SUBTRACE #1015



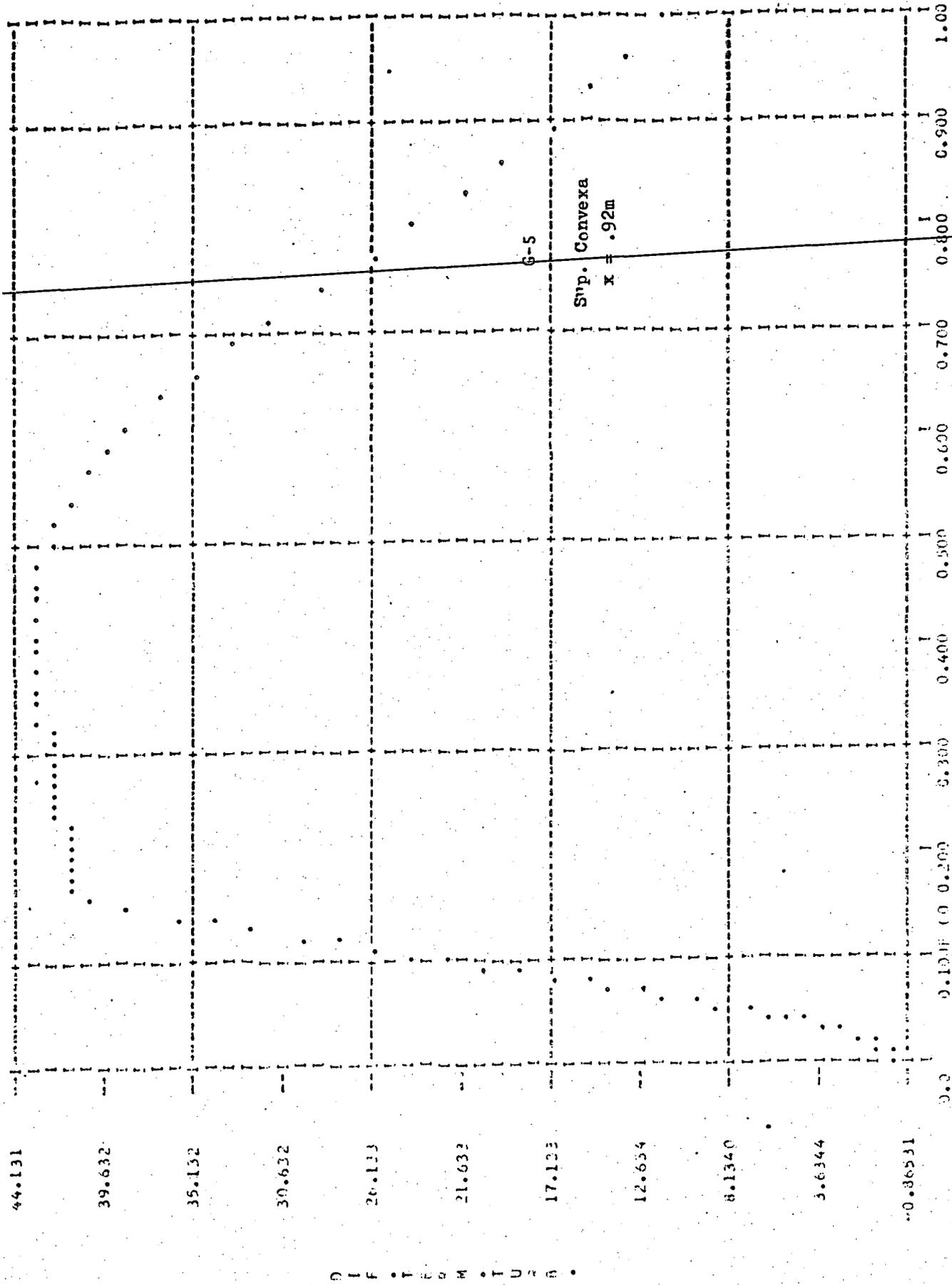
Y/DELTA

DIFFERENCE

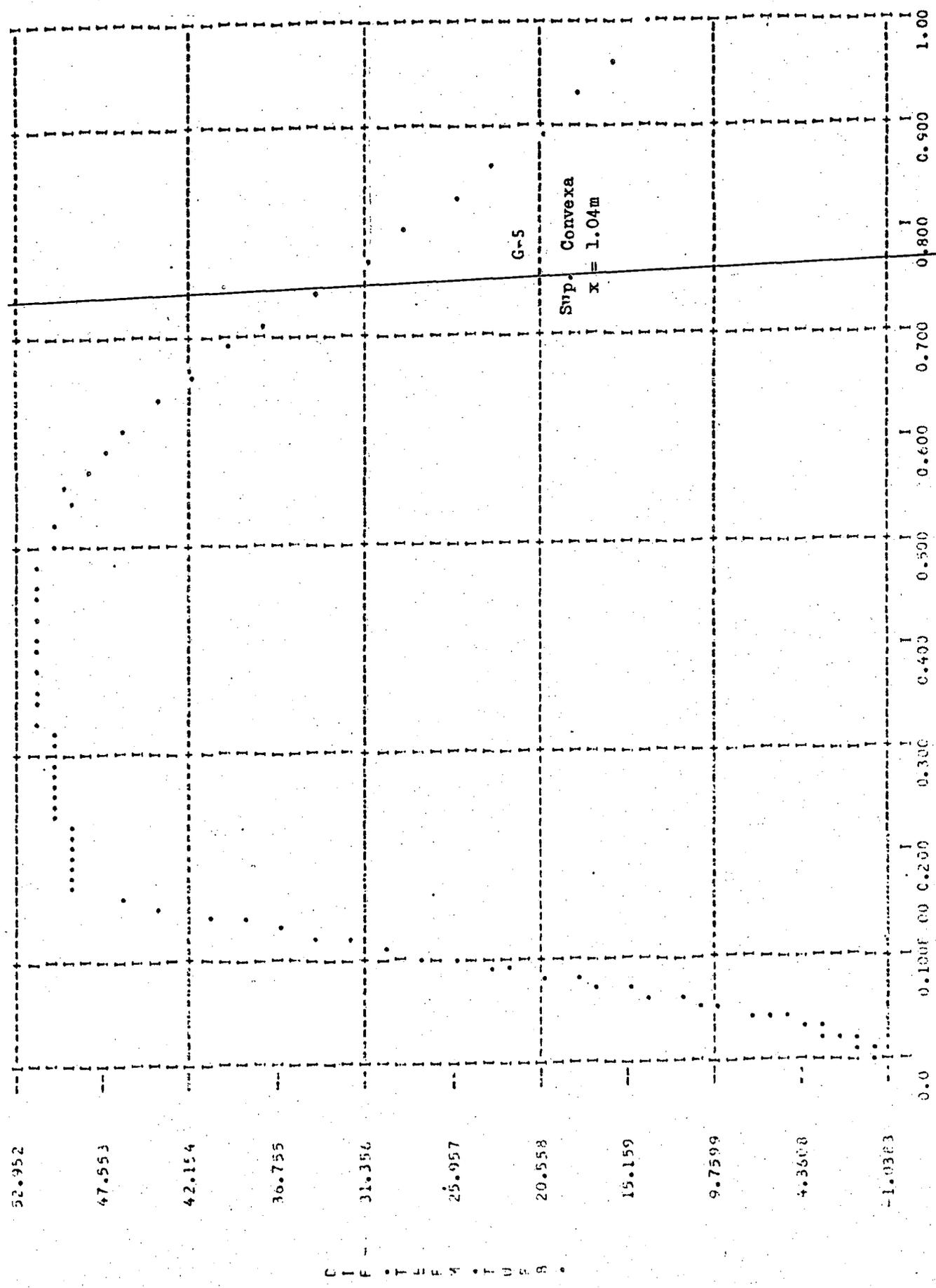




Y/DELTA

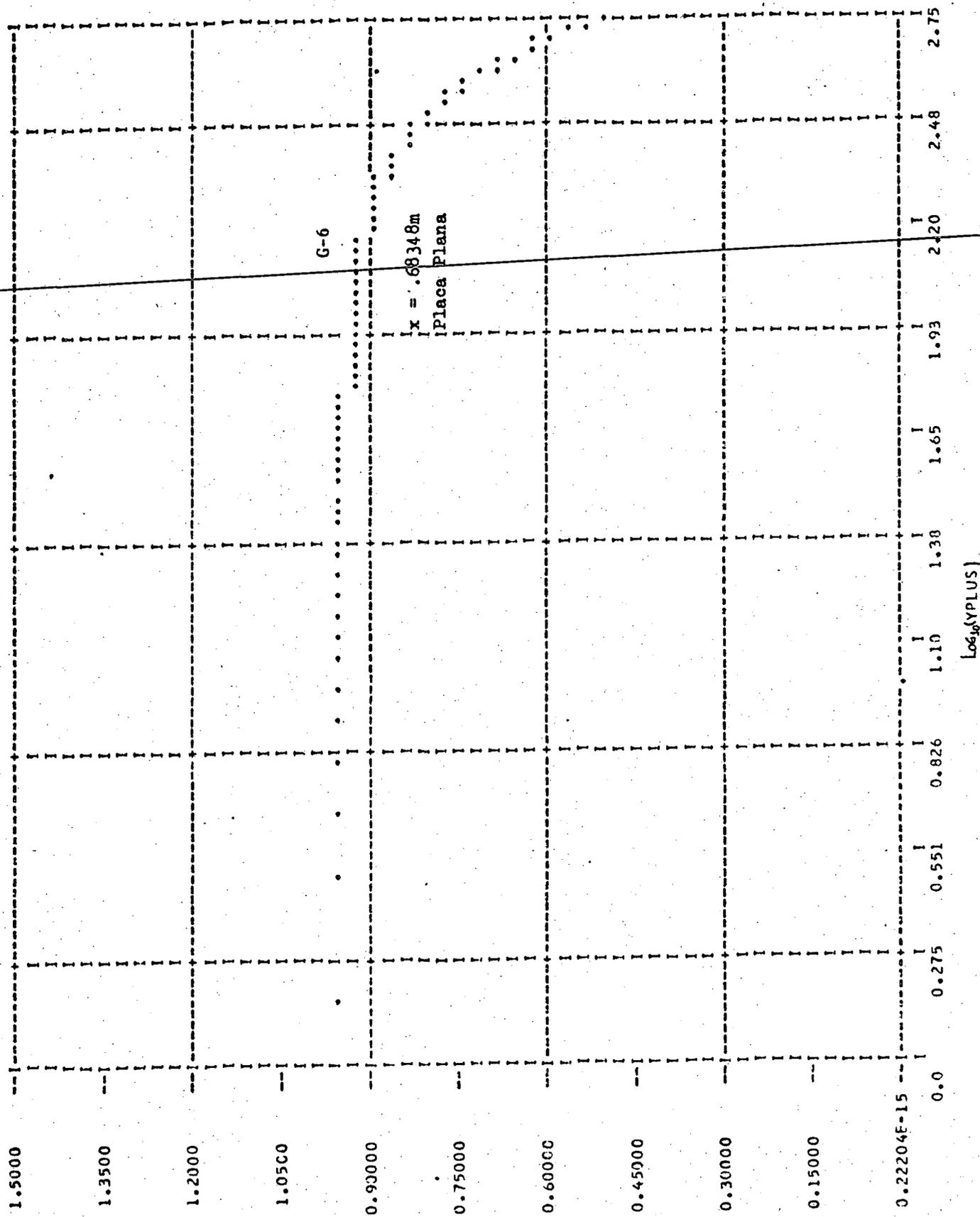


Y/DELTA

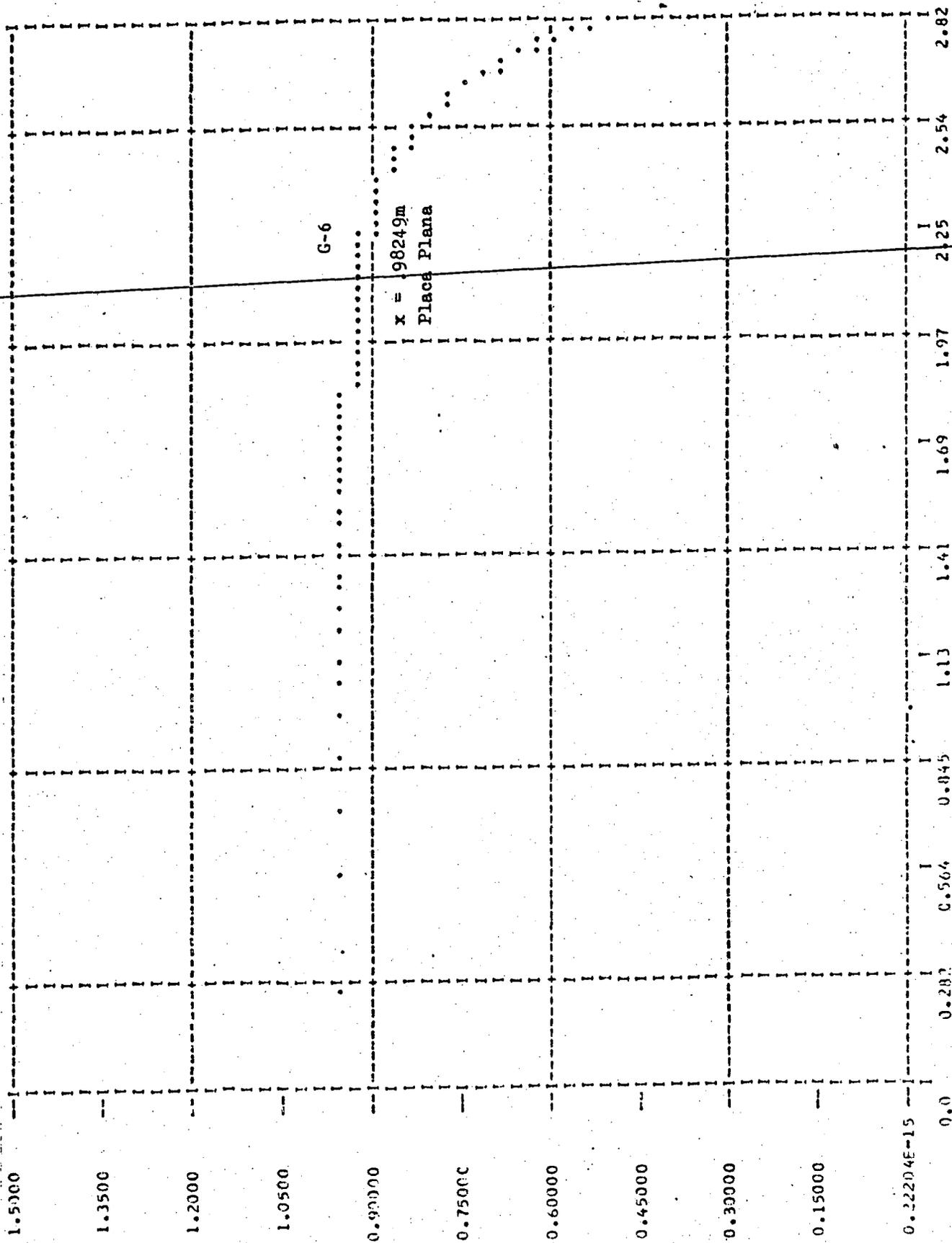


Y/DELTA

SUBTRACE #PRTDUA  
SUBTRACE P121P2

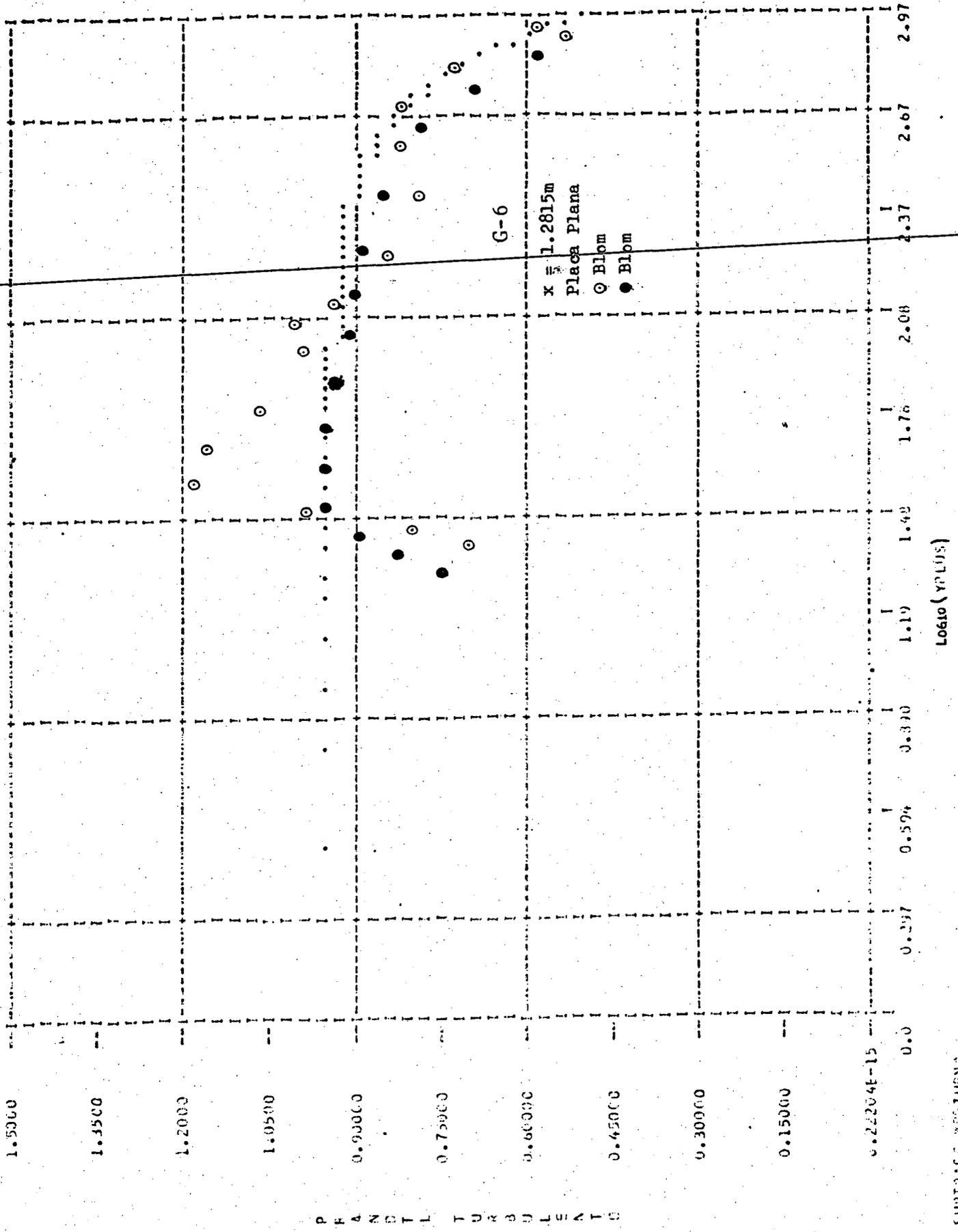


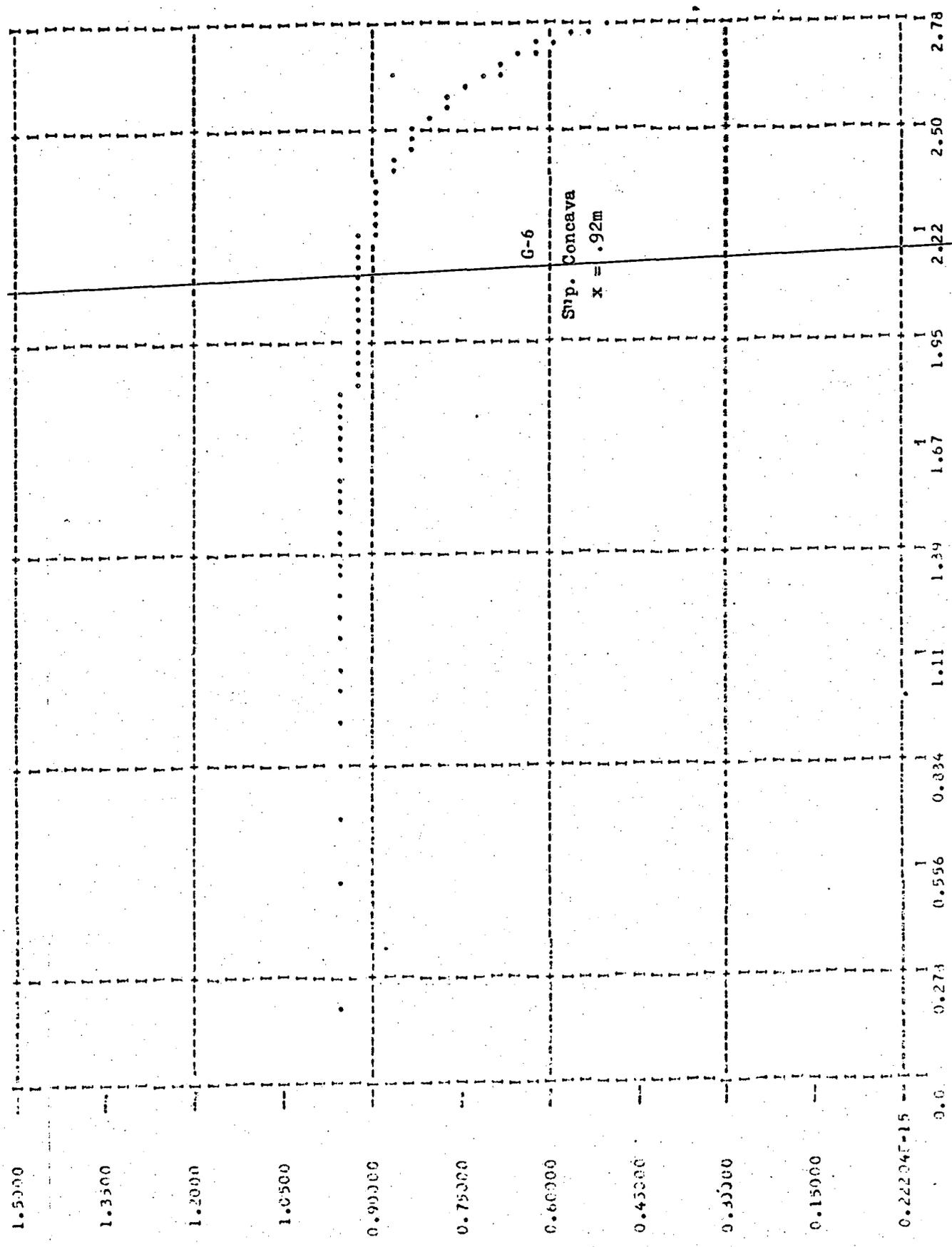
PRANDTLTUBULE



P R A S N D Y L Y U P B U L E N T C

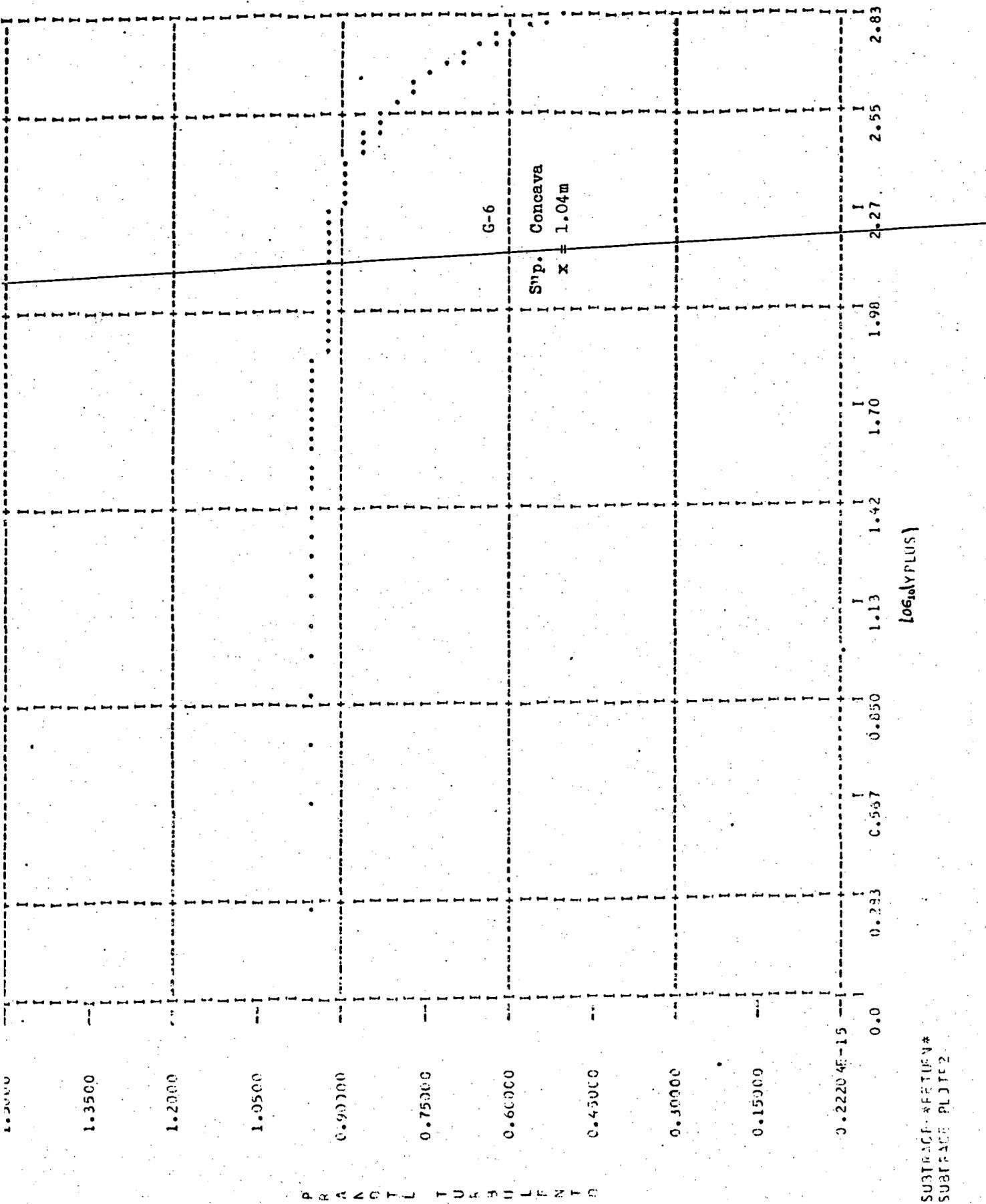
Log10 (YPLUS)

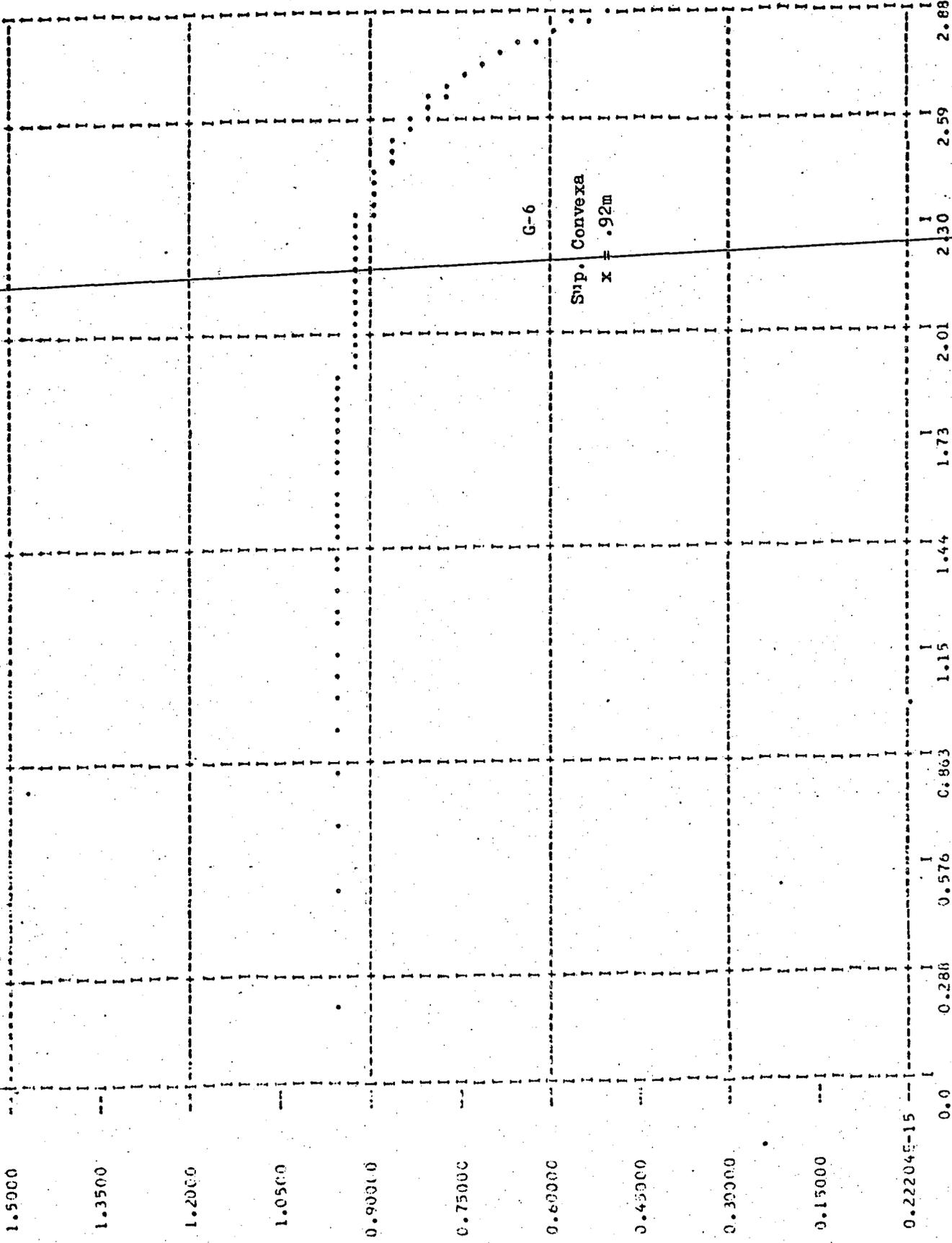




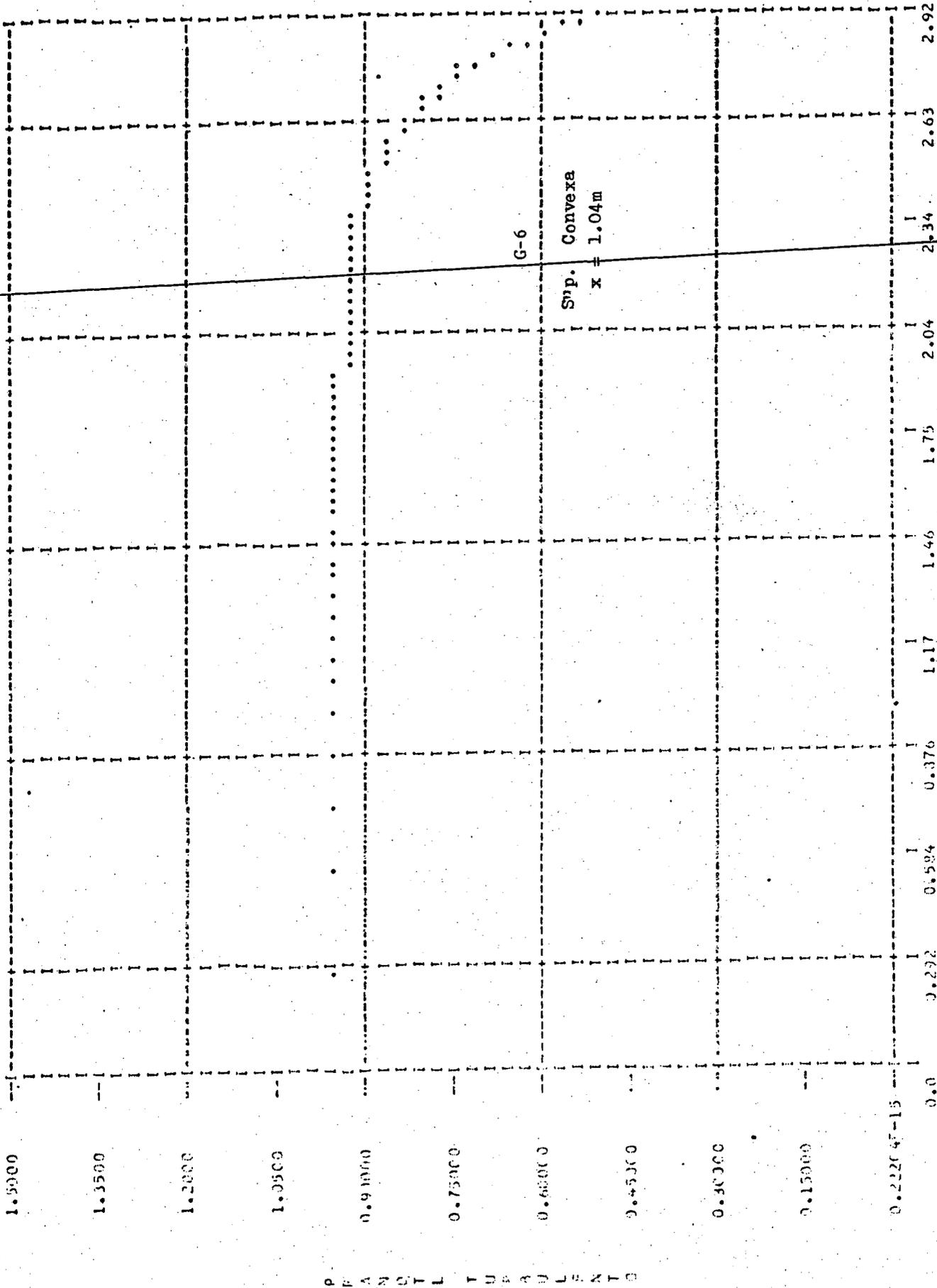
P  
 N  
 T  
 L  
 T  
 U  
 R  
 U  
 L  
 E  
 A  
 T  
 O

$\log_{10}(YPLUS)$

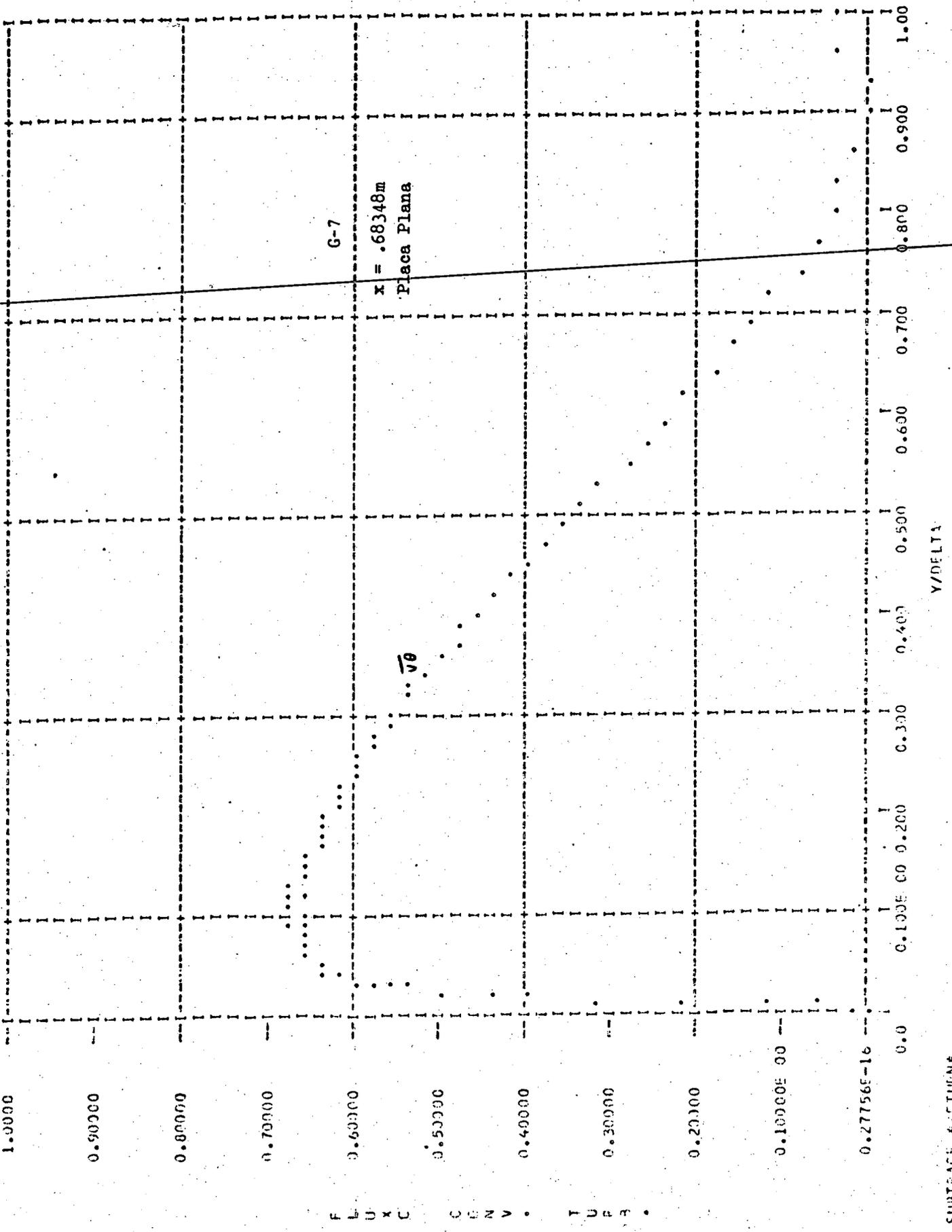




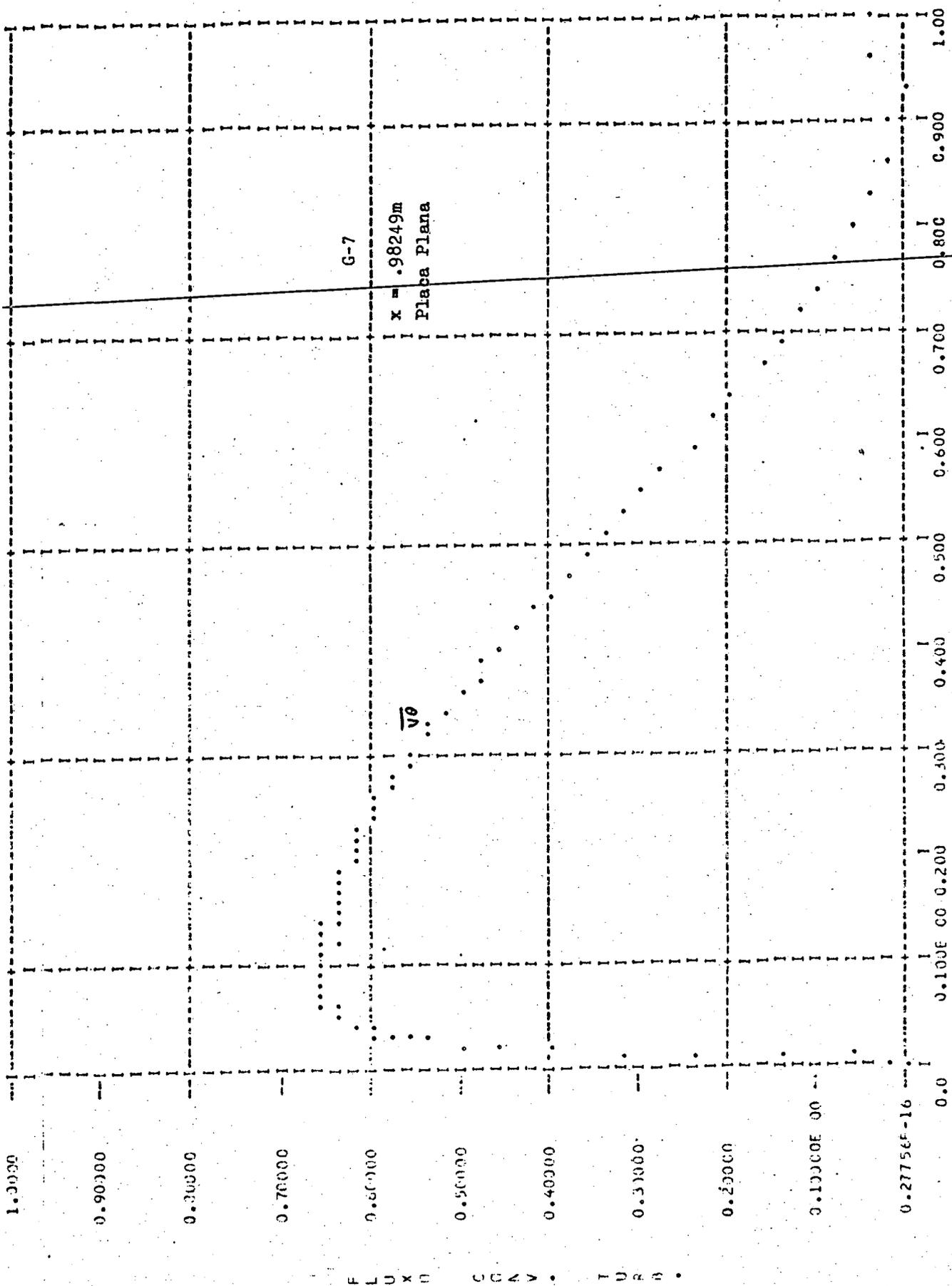
Log<sub>10</sub>(NPLUS)



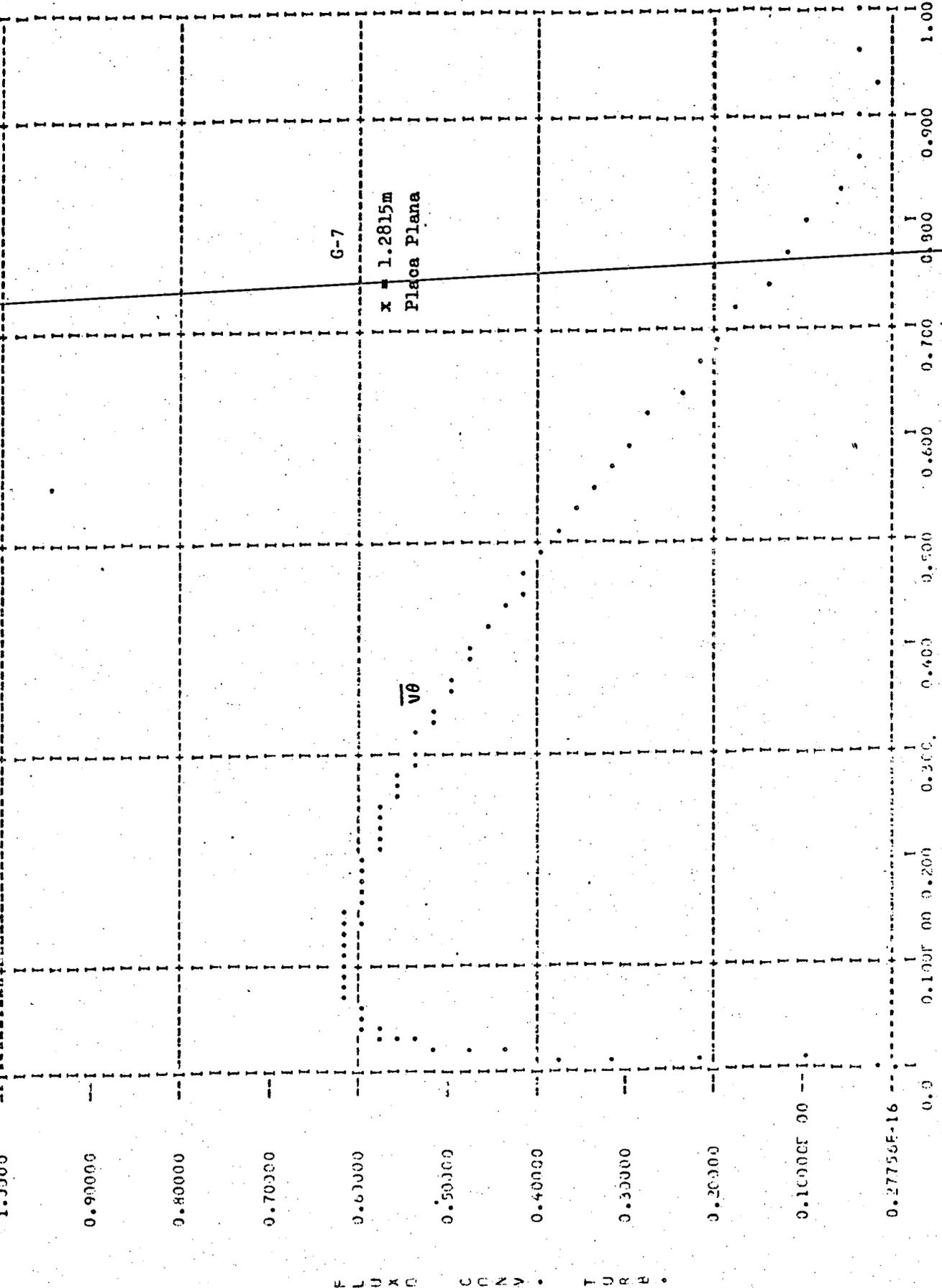
P  
A  
N  
O  
T  
L  
T  
U  
P  
A  
U  
L  
E  
N  
T  
B



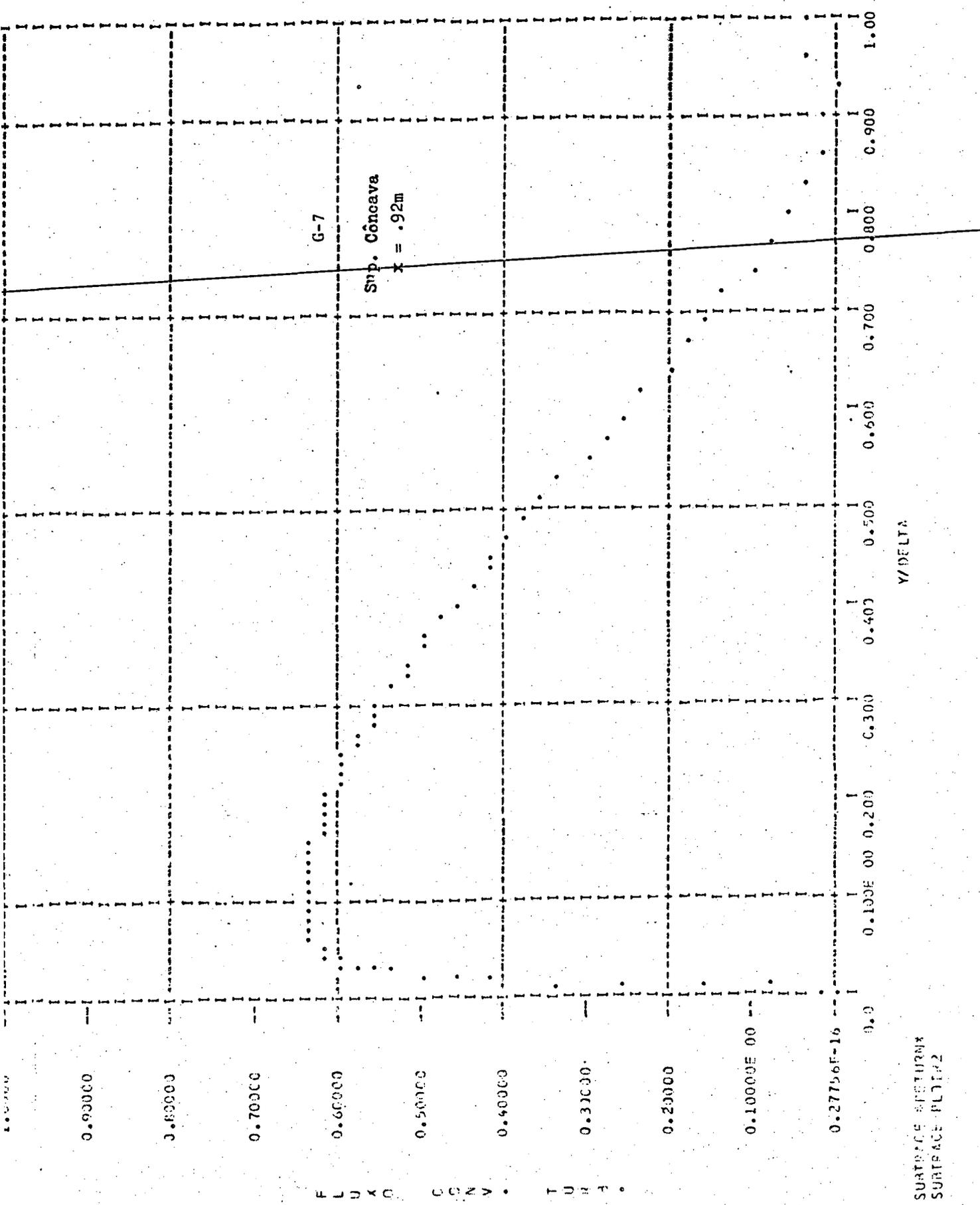
FLEXION  
 T U P B



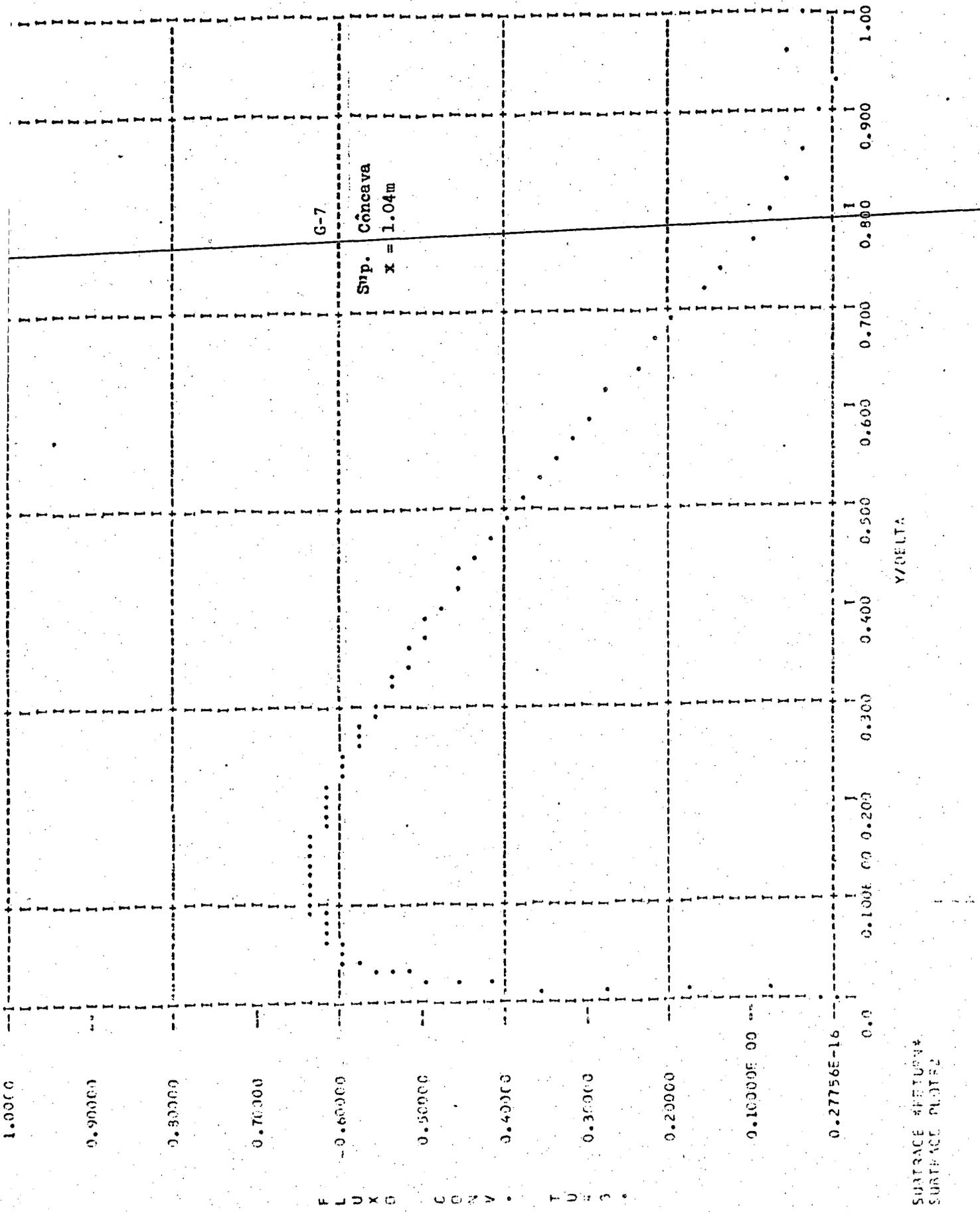
Y/DELTA



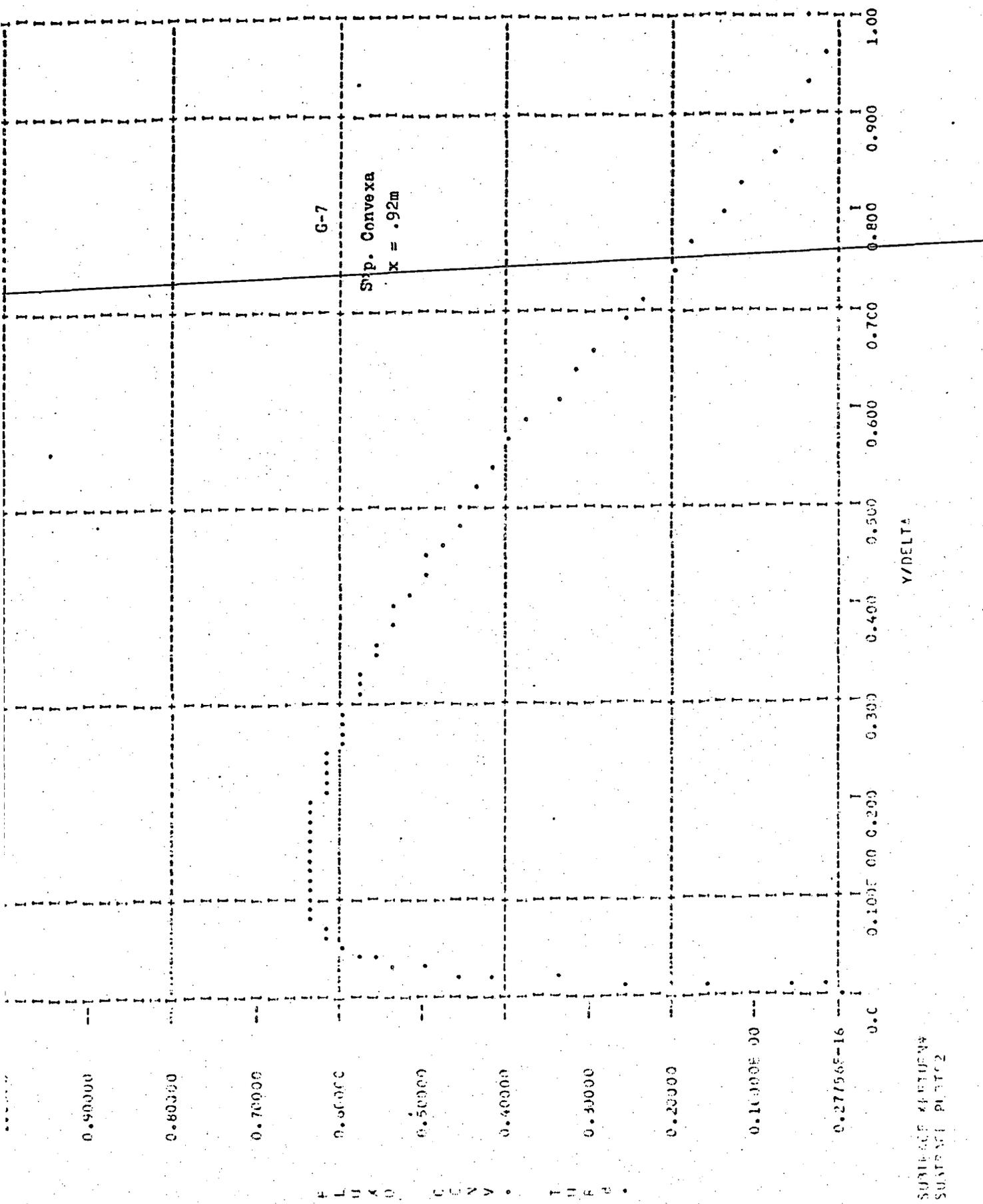
Y/OMTA



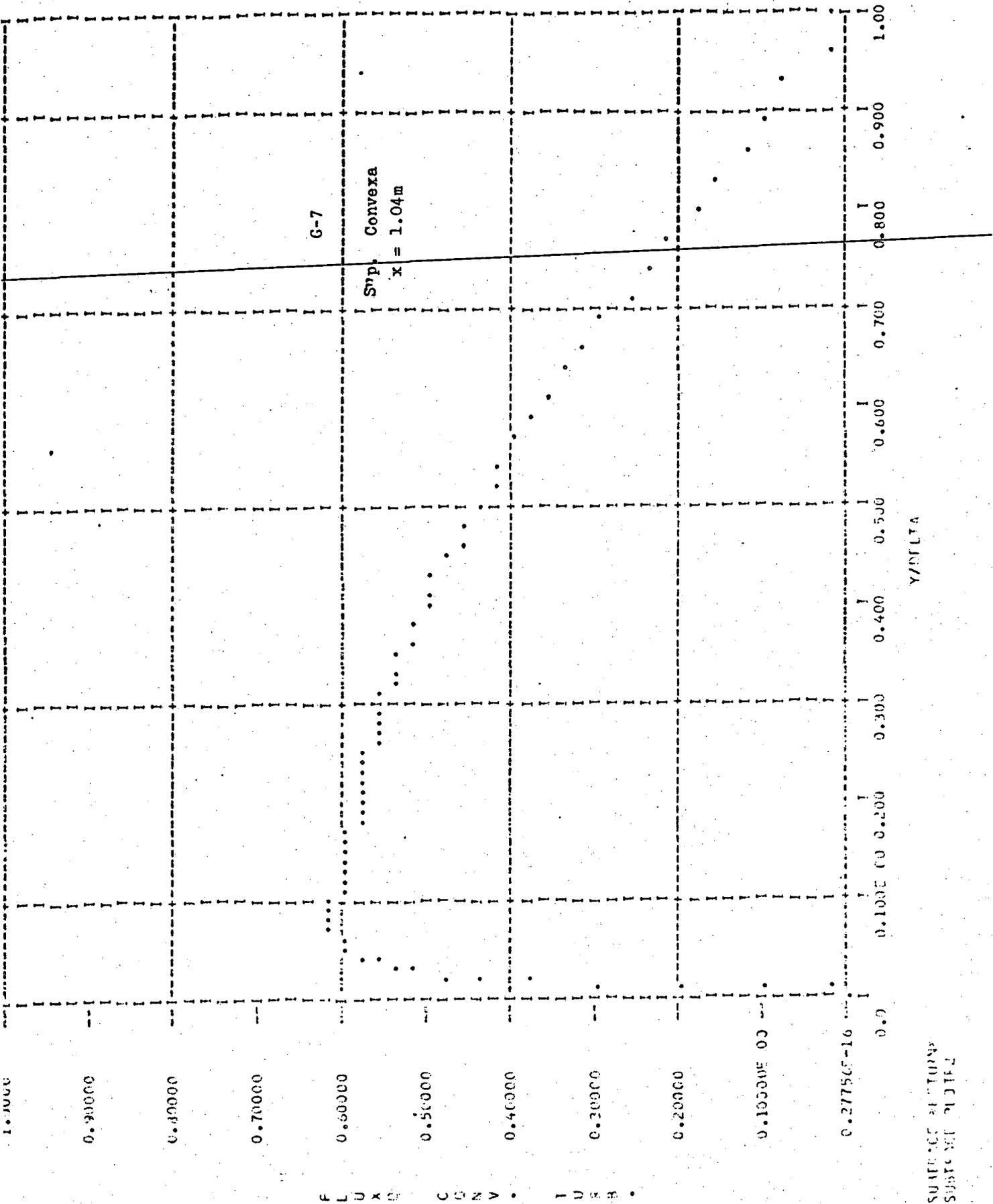
SURFACE RETURN\*  
SURFACE FLUX\*

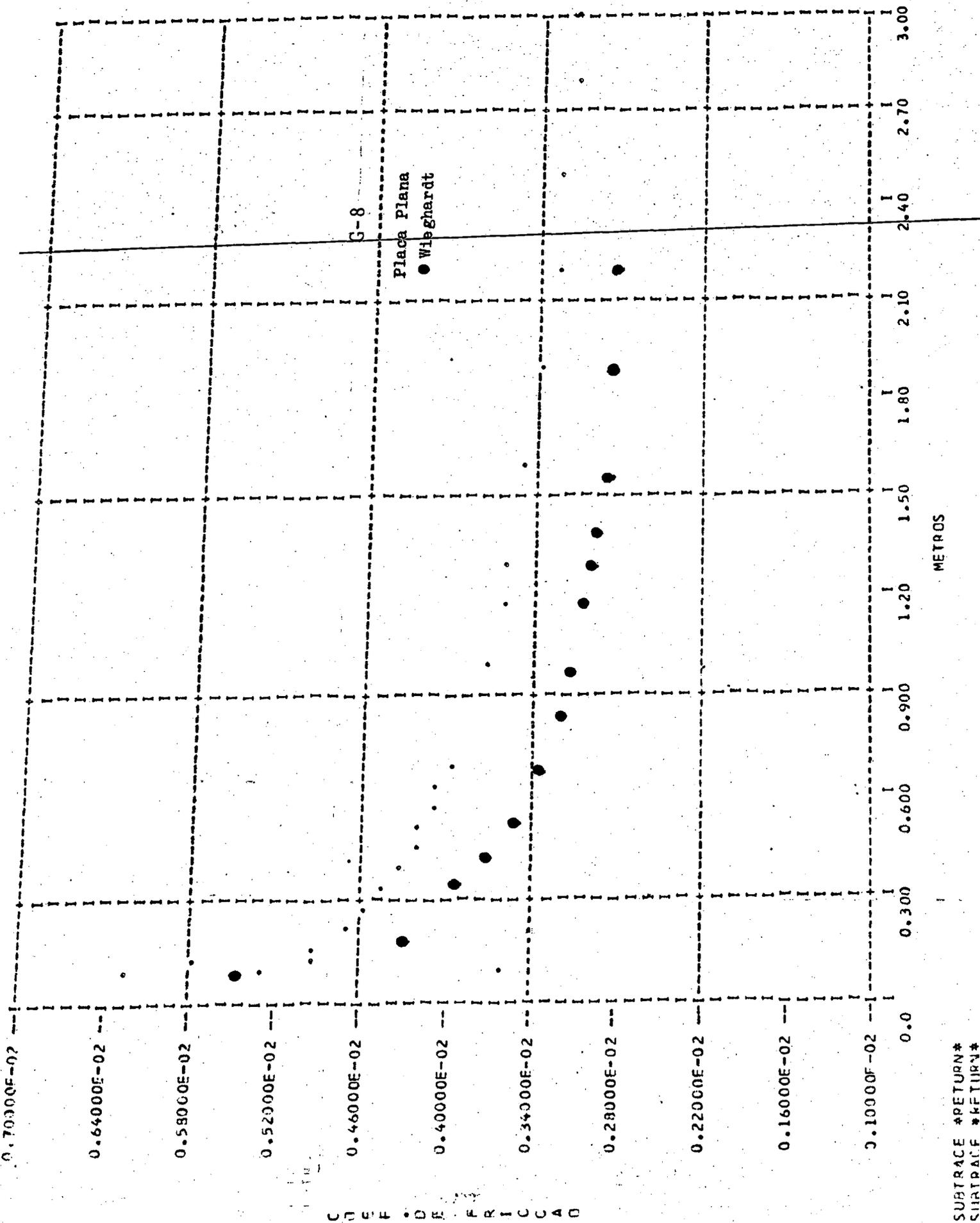


SURFACE #RETURN\*  
SURFACE PLATE

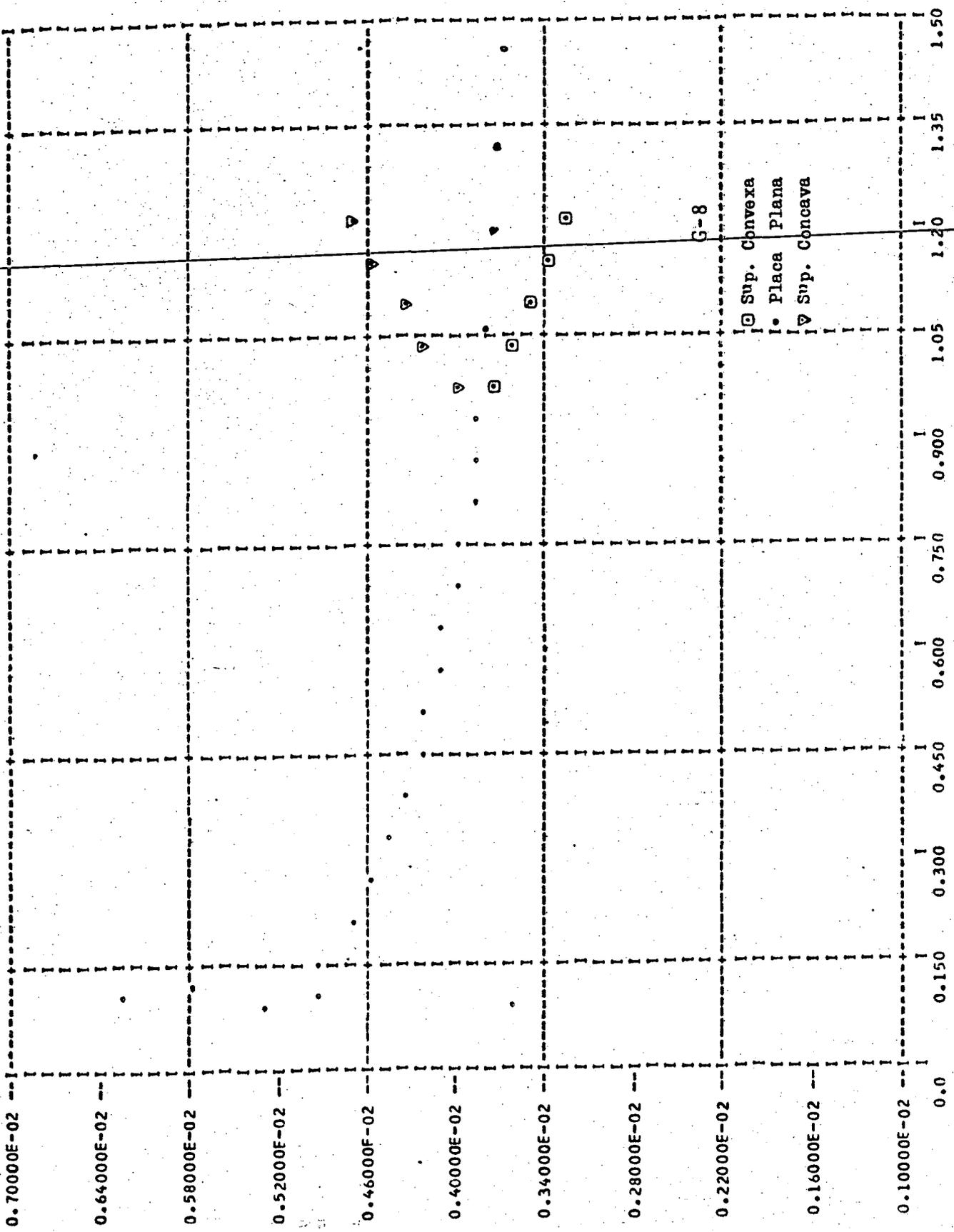


Y/Delta

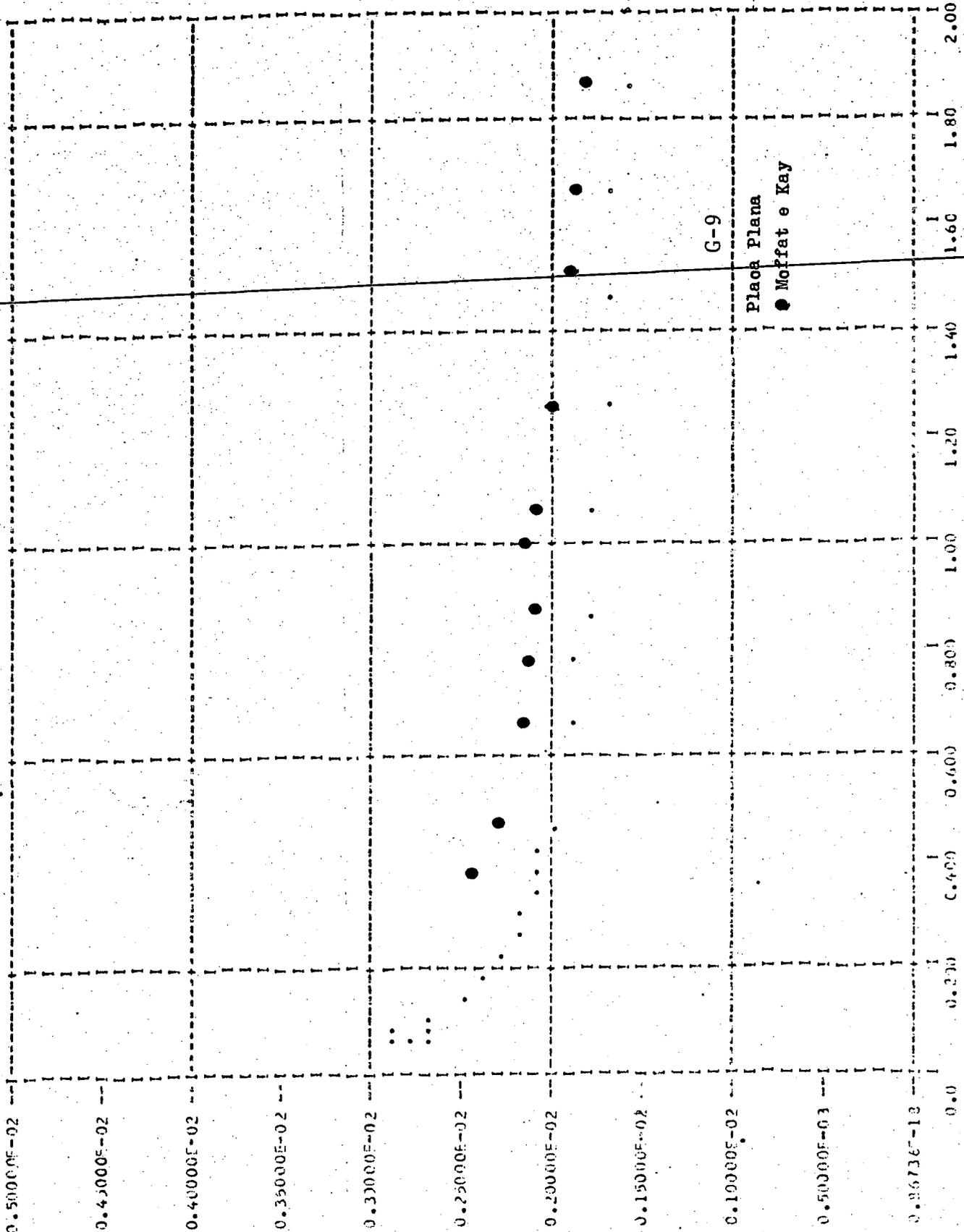




SUBTRACE #RETURN\*  
SURTRACF #RETURN\*



C  
N  
F  
F  
D  
E  
F  
R  
I  
C  
C  
A  
N



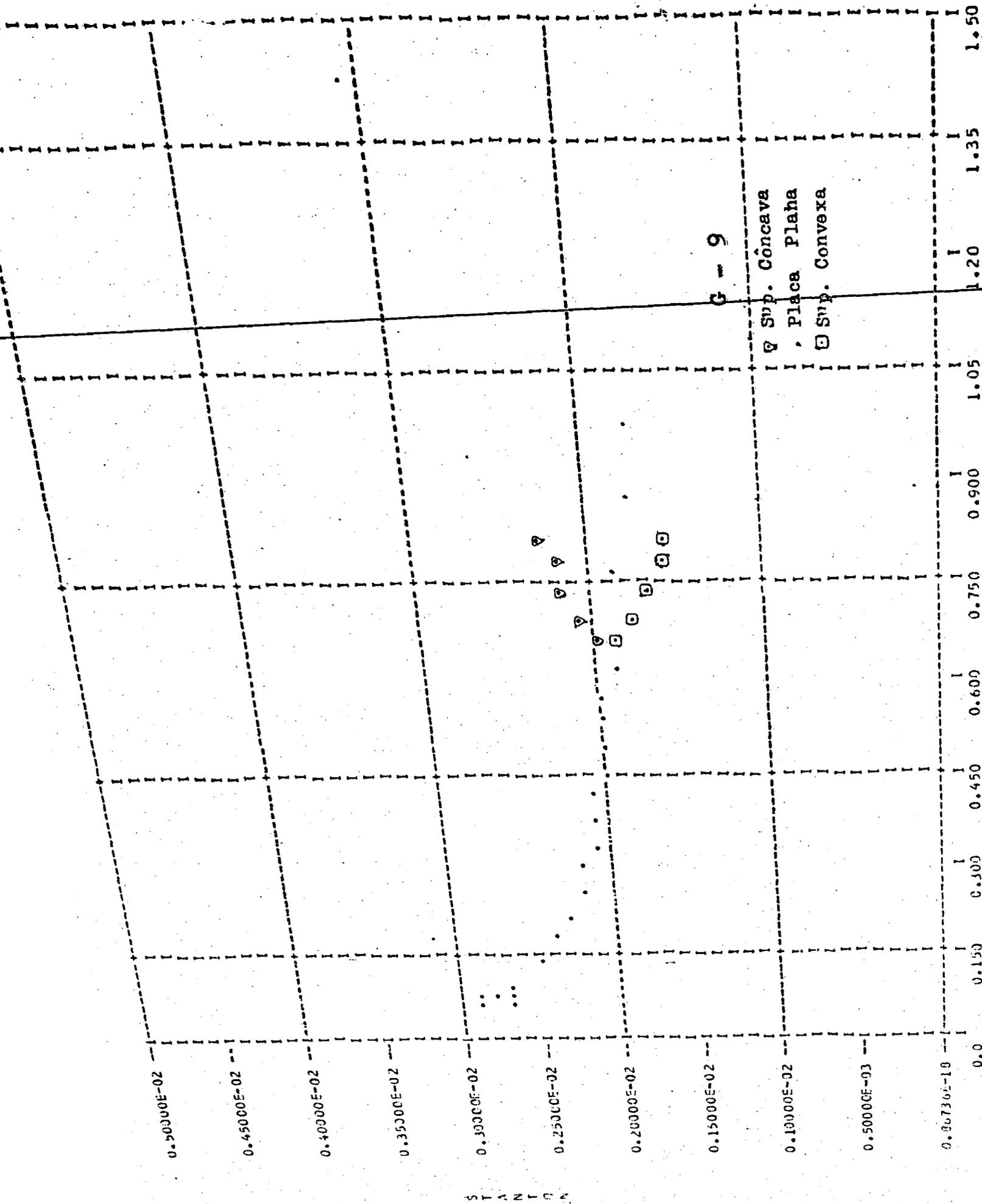
STACN

G-9

Placa Plana

● Moffat e Kay

Fig. 10-6



RE, 10<sup>-6</sup>

APÊNDICE E

LISTAGEM DO PROGRAMA UTILIZADO

Abaixo segue a listagem do programa para aplicação em computador do Centro Tecnológico (IBM-360/40, com 256 K bytes - na memória principal):

```

0001      COMMON UVEL(2,300),YETA(300),DELN(300),VEL(2,300),VA(1,300),TETA(2
1,300),TPLUS(2,300)
0002      COMMON UZERO(2),DERUO(2),RAIO(2)
0003      COMMON EM(2,300),USTAR(2),DELTA(2),ENI(2,300),EH(2,300)
0004      COMMON XCU(50),CFR(50,3),RNB(50,3),SHA(50,4),HF(45,1),YCO(50)
0005      COMMON UPLUS(1,300),YPLUS(300),PRANT(1,300)
0006      COMMON ICY1(24),ICY2(24),ICY5(24),ICY6(24),ICY3(24),ICY4(24),ICY7(
124),ICY8(24),ICY9(24)
0007      DIMENSION EFE(2,300)
0008      DIMENSION EFEMED(300)
0009      DIMENSION PRESM(300)
0010      DIMENSION TSTMT(300)
0011      DIMENSION COOD(30),EDY(30)
0012      DIMENSION ENI(2,300),EN2(2,300),ELE(2,300)
0013      DIMENSION YPOW(300),OPOW(300),OPLUS(300)
0014      DIMENSION G(300),GN(300),UVEW(12),G1(300),GN1(300)
0015      DIMENSION HY(20),YV(20)
0016      DIMENSION SNTEG2(300),SNTEG3(300),SNTEG5(300)
0017      READ(1,305)((ICY1(J),J=1,24)
0018      305  FORMAT(24A1)
0019      READ(1,302)((ICY2(J),J=1,24)
0020      302  FORMAT(24A1)
0021      READ(1,306)((ICY3(J),J=1,24)
0022      306  FORMAT(24A1)
0023      READ(1,307)((ICY4(J),J=1,24)
0024      307  FORMAT(24A1)
0025      READ(1,308)((ICY5(J),J=1,24)
0026      308  FORMAT(24A1)
0027      READ(1,309)((ICY6(J),J=1,24)
0028      309  FORMAT(24A1)
0029      READ(1,310)((ICY7(J),J=1,24)
0030      310  FORMAT(24A1)
0031      READ(1,311)((ICY8(J),J=1,24)
0032      311  FORMAT(24A1)
0033      READ(1,312)((ICY9(J),J=1,24)
0034      312  FORMAT(24A1)
0035      ICDD=0
0036      ICSD=1
0037      NMAX=0
0038      129  RJ=1.2
0039      YPOW(1)=0.0
0040      SNTEG2(1)=0.
0041      SNTEG3(1)=0.
0042      SNTEG5(1)=0.
0043      ICENT=2
0044      IDEG=4
0045      NTOTAL=300
0046      KFIRST=0
0047      INP=0
0048      B1=0.41
0049      B2=C.0168
0050      ETA=15.10E-6
0051      ENBAR=0.5
0052      EPSLON=0.6E-03
0053      DELTA(1)=0.0092
0054      NK=10
0055      USTAR(1)=0.5224
0056      PI=3.141592
0057      NEG=0
0058      ANGLC=1.15197
0059      XIX=ANGLC
0060      RAO(1)=0.25
0061      RAO(2)=0.25
0062      XINO=0.09144
0063      UZERC(1)=10.10
0064      XIO=XINO*UZERO(1)/ETA
0065      RIO=XIO
0066      DELX=4000.
0067      XI=XIO+DELX
0068      X1=XI-DELX
0069      NIN=1
0070      IF(ICDD.EQ.1) GO TO 127
0071      CALL TABLE2(NMAX)
0072      127  AXI=((2.*X1)*ENBAR)
0073      3    RNET=100000.
          X2=XIO*ETA/UZERO(1)

```

```

0075 BK=1.03
0076 M=0
0077 NMMAX=NTOTAL-1
0078 IPOINT=2
0079 ITER=0
0080 VEL(1,1)=0
0081 VECC=0.
0082 DERUO(1)=0.0
0083 DJ 5 J=1,NMMAX
0084 EFE(1,J)=1.0
0085 VEL(1,J)=(LXI**2.0)*YETA(J)*UVEL(1,J)*EFE(1,J)/UZERO(1)*(DERUO(
1)-ENBAR*UZEPO(1)/XIO)
0036 5 CONTINUE
0087 KFIEST=0
0088 M=1
0089 CRIT=0
0090 CRIT=CRIT+0.02
0091 39 CONTINUE
0092 314 NOK=0
0093 EM(1,1)=0
0094 KFIEST=KFIEST+1
0095 IF(KFIEST.EQ.1) GO TO 8
0096 GO TO 10
0097 8 CONTINUE
0098 CSIM=(XI+X1)**(2.*ENBAR)
0099 AXI=((2.*X1)**ENBAR)
0100 UZERO(2)=10.10
0101 DERUO(2)=0.0
0102 VPLUS=UZERO(1)/USTAR(1)
0103 RNET=10000.
0104 RNETA=10000.
0105 REMED=(RNET+RNETA)*0.5
0106 UVEL(1,1)=0.0
0107 SNTEG6=0
0108 DO 51 J=1,NMMAX
0109 UPLUS(1,J)=UVEL(1,J)*UZERO(1)/USTAR(1)
0110 YPOW(J)=(2.*X1)**0.5*YETA(J)*USTAR(1)/UZERO(1)
0111 EFE(1,J)=1.0
0112 EFE(2,J)=1.0
0113 EFEMED(J)=(EFE(1,J)+EFE(2,J))*C.5
0114 TSIM(J)=CSIM*EFEMED(J)
0115 PRESIM(J)=TSIM(J)*(DERUO(1)/UZEPO(1)+DERUO(2)/UZERO(2))*0.5
0116 51 CONTINUE
0117 30 CONTINUE
0118 VEST=0.99
0119 DO 75 J=2,NMAX
0120 OPDW(J)=YPOW(J)-YPOW(J-1)
0121 SIME=(EFE(1,J)*(1.-UPLUS(1,J)/VPLUS)+EFE(1,J-1)*(1.-UPLUS(1,J-1)/V
1PLUS))*0.5*OPDW(J)
0122 SNTEG6=SNTEG6+SIME
0123 75 CONTINUE
0124 NMAX40=NMAX+40
0125 IF(NMAX40.GE.NMMAX) NMAX40=NMMAX-1
0126 NMAX20=NMAX+20
0127 IF(NMAX20.GE.NMMAX) NMAX20=NMMAX-1
0128 NMAX30=NMAX40-1
0129 NMAX70=NMAX40+30
0130 IF(NMAX70.GT.NMMAX) NMAX70=NMMAX-1
0131 NEG=C
0132 ND=M
0133 UVEL(1,1)=0.
0134 UVEL(2,1)=0.
0135 VEL(1,1)=0.
0136 VEL(2,1)=0.
0137 UVEL(1,NMAX+1)=UVEL(1,NMAX)
0138 UVEL(2,NMAX+1)=UVEL(2,NMAX)
0139 DO 73 JN=1,4
0140 YV(JN)=YETA(JN)
0141 HY(JN)=UVEL(1,JN)
0142 73 CONTINUE
0143 CALL DER(HY,YV,FIRST,1,1,4)
0144 SLOPE=FIRST
0145 IF(SLOPE.LT.0)SLOPE=-SLOPE
0146 NNIN=NNIN+1
0147 DO 12 J=NNIN,NMMAX
0148 DELSUM=DELN(J)+DELN(J-1)

```

```

0149      DPLUS(J)=2./((1.+SQRT(1+4*(B1**2)*(YPOW(J)**2)*(1-EXP(-YPOW(J)/26.)
0150      1)**2))
0151      EN1(1,J)=(1./DPLUS(J)-1.)
0152      GAMO=1./((1.+5.5*(ETA*AXI*YETA(J)/(UZERO(1)*DELTA(1)))**6)
0153      EN2(1,J)=B0*VPLUS*SNTEG6*GAMO
0154      IF(EN1(1,J).LE.EN2(1,J))EM(1,J)=EN1(1,J)
0155      IF(EN1(1,J).GT.EN2(1,J))EM(1,J)=EN2(1,J)
0156      12 CONTINUE
0157      DO 9 J=NIN,NMMAX
0158      EM(2,J)=EM(1,J)
0159      UVEL(2,J)=UVEL(1,J)
0160      VEL(2,J)=VEL(1,J)
0161      9 CONTINUE
0162      10 CONTINUE
0163      DELTA(2)=YETA(NMAX)*((2.*XI)**ENBAR)*ETA/UZERO(2)
0164      G(1)=0
0165      GN(1)=0
0166      DO 11 J=NNIN,NMAX70
0167      DELSUM=DELN(J)+DELN(J-1)
0168      VELM=VEL(1,J)
0169      UVM=(UVEL(2,J)+UVEL(1,J))*0.5
0170      UVMJ=0.5*(UVEL(2,J-1)+UVEL(1,J-1))
0171      EMET=0.25*(EM(1,J)+EM(2,J)+EM(1,J-1)+EM(2,J-1))
0172      EMETJ=0.25*(EM(1,J)+EM(2,J)+EM(1,J-1)+EM(2,J-1))
0173      TERA1=VELM/(2.*DELSUM)
0174      TERA2=(1.+EMETJ)/(DELN(J)*DELSUM)
0175      TERA3=(1.+EMET)/(DELN(J-1)*DELSUM)
0176      TERA4=((1.-EM(2,J+1))*EFE(2,J+1)/RNETA)/(2.*DELSUM)
0177      TERA5=((1.-EM(2,J-1))*EFE(2,J-1)/RNETA)/(2.*DELSUM)
0178      TERA6=((1.-EM(1,J+1))*EFE(1,J+1)/RNET)/(2.*DELSUM)
0179      TERA7=((1.-EM(1,J-1))*EFE(1,J-1)/RNET)/(2.*DELSUM)
0180      TERA9=(TSIM(J)*UVM)/DELX
0181      AJ=TERA1-TERA2-TERA4
0182      BJ=TERA9+TERA2+TERA3
0183      CJ=TERA5-TERA1-TERA7
0184      SJM=((UVEL(2,J)**2)*EFE(2,J)+(UVEL(2,J-1)**2)*EFE(2,J-1))*0.5*DELN
0185      1(J)/RNETA
0186      SNTEG2(J)=SNTEG2(J-1)+SJM
0187      SUMM=((UVEL(1,J)**2)*EFE(1,J)+(UVEL(1,J-1)**2)*EFE(1,J-1))*0.5*DEL
0188      N(J)/RNET
0189      SNTEG3(J)=SNTEG3(J-1)+SUMM
0190      DIFER=(SNTEG2(J)-SNTEG3(J))/DELX
0191      SNTEG5(J)=(SNTEG2(J)+SNTEG3(J))*0.5
0192      CURV1=TSIM(J)*DIFER
0193      PRES1=PRESM(J)*(1.-(UVM**2))
0194      CURV2=(CSIM*YETA(J)*ENBAR*(EFEMED(J)**2)*(UVM**2))/(((X1+XI)*0.5*R
0195      1EMED)
0196      PRES2=PRESM(J)*(YETA(J)*EFEMED(J)*(UVM**2)/REMED+2.*SNTEG5(J))
0197      PRECOV=CURV2-CURV1-PRES2+PRES1
0198      DJ=UVEL(1,J+1)*(TERA2-TERA1+TERA6)+UVEL(1,J)*(TERA9-TERA2-TERA3)+U
0199      VEL(1,J-1)*(TERA1+TERA8-TERA7)+PRECOV
0200      G(J)=-AJ/(BJ+CJ*G(J-1))
0201      GN(J)=(DJ-CJ*GN(J-1))/(BJ+CJ*G(J-1))
0202      11 CONTINUE
0203      IF(CRIT.GE.1) GO TO 70
0204      GO TO 72
0205      70 CONTINUE
0206      CRIT=0
0207      NOLD=NMAX
0208      KMAX=NMAX-4
0209      DO 15 J=KMAX,NMAX20
0210      TESTVA=EPSLN*DELN(J)
0211      VALUE=0.99*(1.-G(J))-GN(J)
0212      NMAX=J+1
0213      IF(VALUE.LE.TESTVA) GO TO 18
0214      15 CONTINUE
0215      18 CONTINUE
0216      IF(NMAX.GT.NOLD+3) NMAX=NOLD+1
0217      IF(NMAX.LE.NOLD) NMAX=NOLD
0218      72 CONTINUE
0219      NBACK=-(NMAX-1)
0220      UPREV=UVEL(2,IPOINT)
0221      NM=NIN-1
0222      UVEL(2,NMAX)=0.99
0223      DO 14 NF=NBACK,NM
0224      KF=IABS(NF)

```

```

0220 UVEL(2,KF)=G(KF)*UVEL(2,KF+1)+GN(KF)
0221 14 CONTINUE
0222 VELM=0.
0223 AXI=(2*X1)**ENBAR
0224 DJ 95 J=NNIN,NMAX70
0225 VELT=VELM
0226 DEUVE=(UVEL(2,J)-UVEL(1,J)+UVEL(2,J-1)-UVEL(1,J-1))/(2.*DELX)
0227 JVENT=0.25*(UVEL(2,J)+UVEL(1,J)+UVEL(1,J-1)+UVEL(2,J-1))
0228 EFEM=0.25*(EFE(1,J-1)+EFE(1,J)+EFE(2,J-1)+EFE(2,J))
0229 TERM2=(-FFEM/2.*REMED)+1./DELN(J-1)
0230 TERM1=CSIM*EFEM*(JVENT*ENBAR/(X1-0.5*DELX)+DEUVE)
0231 DENOM=(FFEM/REMED)+0.5+1./DELN(J-1)
0232 VELM=VELT*TERM2/DENOM-TERM1/DENOM
0233 VEL(1,J)=VELM
0234 VA(1,J)=(VEL(1,J)/AXI)-(AXI*UVEL(1,J)*YETA(J)*EFE(1,J)/UZERO(1))*
1DERUD(1)-(ENBAR*UZERO(1)/X1)
0235 95 CONTINUE
0236 CTEST=0.005
0237 IF(ABS(UVEL(2,IPOINT)-UPREV)/UPREV-CTEST.GT.0) GO TO 20
0238 K=K+1
0239 NEQ=1
0240 KFIRST=0
0241 ITER=0
0242 M=M+1
0243 GO TO 21
0244 20 CONTINUE
0245 ITER=ITER+1
0246 IF(ITER.LT.10) GO TO 39
0247 ITER=0
0248 KFIRST=0
0249 XI=XI-DELX
0250 DELX=DELX/2.
0251 XI=XI+DELX
0252 XI=XI-DELX
0253 DO 22 J=NNIN,NMAX
0254 VEL(1,J)=VEL(2,J)
0255 22 CONTINUE
0256 GO TO 39
0257 21 CONTINUE
0258 DO 64 JM=1,4
0259 HY(JM)=UVEL(2,JM)
0260 YV(JM)=YETA(JM)
0261 64 CONTINUE
0262 CALL DER(HY,YV,FIRST,1,1,4)
0263 SLOPE=FIRST
0264 IF(SLOPE.LT.0) SLOPE=-SLOPE
0265 USTAR(2)=SQRT((UZERO(2)**2)*SLOPE/((2.*XI)**ENBAR))
0266 IF(NOK.EQ.1) GO TO 134
0267 IF(DELTA(1).GE.0.019) GO TO 138
0268 GO TO 134
0269 138 CONTINUE
0270 NOK=NOK+1
0271 134 CONTINUE
0272 IF(NC.EQ.1.OR.NO.EQ.2.OR.NO.EQ.3.OR.NO.EQ.4.OR.NO.EQ.5.OR.NO.EQ.10
1.OR.NO.EQ.20.OR.NO.EQ.30.OR.NO.EQ.40.OR.NO.EQ.50.OR.NO.EQ.60.OR.NO
2.EQ.70.OR.NO.EQ.80.OR.NO.EQ.90.OR.NO.EQ.100.OR.NO.EQ.150.OR.NO.EQ.
3130.OR.NO.EQ.200.OR.NO.EQ.250.OR.NO.EQ.300.OR.NO.EQ.350.OR.NO.EQ.4
400.OR.NO.EQ.450.OR.NO.EQ.500) GO TO 26
GO TO 28
0273 26 CONTINUE
0274 INP=INP+1
0275 SEMA=0.0
0276 PRAN=0.72
0277 EH(1,1)=0.0
0278 EH(2,1)=0.0
0279 UPLUS(1,1)=0.0
0280 YPLUS(1)=1.
0281 TPLUS(1,1)=1.
0282 PRANT(1,1)=0.0
0283 DO 133 J=2,NMAX
0284 UPLUS(1,J)=UVEL(1,J)*UZERO(1)/USTAR(1)
0285 PRANT(1,J)=(EXP(.4*UPLUS(1,J))-1-.4*UPLUS(1,J)-(((.4*UPLUS(1,J))*
1*2)/2)-(((.4*UPLUS(1,J))**3)/6)-(((.4*UPLUS(1,J))**4)/24))/EXP(.4
2*UPLUS(1,J))-1-.4*UPLUS(1,J)-(((.4*UPLUS(1,J))**2)/2)-(((.4*UPLUS
3(1,J))**3)/6))
0286 YPLUS(J)=YETA(J)*USTAR(1)*((2.*XI)**ENBAR)/UZERO(1)
0287

```

```

0288. 133 CONTINUE
0289. DO 135 J=2,NMAX
0290. EH(1,J)=EM(1,J)/PRANT(1,J)
0291. EH(2,J)=CH(1,J)
0292. 135 CONTINUE
0293. EH(1,NMAX+1)=EH(1,NMAX)
0294. EH(2,NMAX+1)=EH(1,NMAX)
0295. DO 1414 L = 2,10
0296. SQMA=SQMA+(YPLUS(L)-YPLUS(L-1))/(1/PRAN+EM(1,L))
0297. 1414 TPLUS(1,L)=SQMA
0298. DO 1001 J = 11,NMAX
0299. 1001 TPLUS(1,J)=UPLUS(1,J)+TPLUS(1,10)-UPLUS(1,10)
0300. TETA(1,1)=.99
0301. TETA(1,NMAX)=.01
0302. TETA(1,NMAX+1)=TETA(1,NMAX)
0303. G1(1)=0
0304. GN1(1)=0
0305. DO 142 J = NNIN,NMAX70
0306. DELSUM=DELN(J)+DELN(J-1)
0307. VELM=VEL(1,J)
0308. UVM=(UVEL(2,J)+UVEL(1,J))*0.5
0309. UVMJ=0.5*(UVEL(2,J-1)+UVEL(1,J-1))
0310. EHET=0.25*(EH(1,J)+EH(2,J)+EH(1,J-1)+EH(2,J-1))
0311. EHETJ=0.25*(EH(1,J)+EH(2,J)+EH(1,J+1)+EH(2,J+1))
0312. RND=(AXI*UZERG(1))/ETA
0313. PRAN=0.72
0314. CO1=(1/PRAN)*(1/RND)
0315. CO2=(1/RND)*EHET
0316. CO3=19.2/(20.-19.2)
0317. CO4=CO2*CO3
0318. TERA1=VELM/(2.*DELSUM*CSIM)
0319. TEMP1=DELN(J)*DELSUM
0320. TEMP2=DELN(J-1)*DELSUM
0321. TEMP4=EFEMED(J)/(REMED*DELSUM)
0322. TEMP7=(EFE(2,J+1)-EFE(2,J-1)+EFE(1,J+1)-EFE(1,J-1))/REMED*DELSUM
0323. TERA8=UVM/DELX
0324. AJ1=TERA1-CO1/TEMP1-CO1*0.5*TEMP4+CO2/TEMP1+CO2*0.5*TEMP4
0325. BJ1=TERA8+CO1/TEMP1+CO1/TEMP2-0.5*CO1*TEMP7-CO2/TEMP1-CO2/TEMP
12+CO2*0.5*CO2*TEMP7
CJ1=-TERA1-CO1/TEMP2+CO1*0.5*TEMP4+CO2/TEMP2-CO2*0.5*TEMP4
DJ1=-TERA1+CO1/TEMP1+CO1*0.5*TEMP4-CO2/TEMP1-CO2*0.5*TEMP4
DJ2=TERA8-CO1/TEMP1-CO1/TEMP2+CO1*0.5*CO1*TEMP7-CJ2/TEMP1+CO2/TEMP
12-CO2*0.5*CO2*TEMP7
DJ3=TERA1+CO1/TEMP2-CO1*0.5*TEMP4-CO2/TEMP2+CO2*0.5*TEMP4
DJ4=-CO1*CO3*0.5*TEMP7-CO4*0.5*TEMP7
DTOTA=TETA(1,J+1)*DJ1+TETA(1,J)*DJ2+TETA(1,J-1)*DJ3+DJ4
G1(J)=-AJ1/(BJ1+CJ1*G1(J-1))
GN1(J)=(DTOTA-CJ1*GN1(J-1))/(BJ1+CJ1*G1(J-1))
142 CONTINUE
TETA(2,1)=.99
TETA(2,NMAX)=.01
TETA(2,NMAX+1)=TETA(2,NMAX)
DO 141 NF=NBACK,NM
KF=IABS(NF)
TETA(2,KF)=G1(KF)*TETA(2,KF+1)+GN1(KF)
141 CONTINUE
128 CALL PLOTRI(X1,XI,NMAX,ETA,ENBAR,INP,X2)
28 CONTINUE
X2=X2+2.*ETA*DELX/(UZERG(1)+UZERG(2))
DELX=4000.
XI=XI+DELX
X1=XI-DELX
UZERG(1)=UZERG(2)
DERUD(1)=DERUD(2)
DELTA(1)=DELTA(2)
RSTO(1)=RSTO(2)
DO 25 J=NNIN,NMAX
UVEL(1,J)=UVEL(2,J)
317 TETA(1,J)=TETA(2,J)
25 CONTINUE
111 FORMAT(2X,'ATE AQUI TUDO OK')
CJT1=CJT2
USTAR(1)=USTAR(2)
IF(NG.GT.500) GO TO 140
K=0
GO TO 39
140 CONTINUE
WRITE(3,100)
100 FORMAT(10X,'FINALLY WE GET TO THE END OF IT')
STOP
END

```

```

0001 SUBROUTINE DER(A,Y,FIRST,L,N1,N2)
0002 DIMENSION A(20),Y(20)
0003 FIRST=0
0004 DO 1 I=N1,N2
0005 PROD1=1.
0006 DO 2 J=N1,N2
0007 IF(J.EQ.I) GO TO 2
0008 PROD1=PROD1*(Y(I)-Y(J))
0009 2 CONTINUE
0010 SECCN=0
0011 DO 3 K=N1,N2
0012 IF(K.EQ.I) GO TO 3
0013 PROD2=1.
0014 DO 4 M=N1,N2
0015 IF(M.EQ.K) GO TO 4
0016 IF(M.EQ.I) GO TO 4
0017 PROD2=PROD2*(Y(L)-Y(M))
0018 4 CONTINUE
0019 SECCN=SECCN+PROD2
0020 3 CONTINUE
0021 FIRST=FIRST+(SECCN/PROD1)*A(I)
0022 1 CONTINUE
0023 RETURN
0024 END
0001 SUBROUTINE TABLE2(NMAX)
0002 COMMON UVEL(2,300),YETA(300),DELN(300),VEL(2,300),VA(1,300),TETA(2,300),TPLUS(2,300)
0003 COMMON UZER(2),DEP(2),FA(2)
0004 COMMON EM(2,300),USTAR(2),DELTA(2),ENI(2,300),EH(2,300)
0005 COMMON XCO(50),CFR(50,3),RNB(50,3),SHA(50,4),HF(45,1),YCO(50)
0006 COMMON UPLUS(1,300),YPLUS(300),PRANT(1,300)
0007 COMMON ICY1(24),ICY2(24),ICY3(24),ICY4(24),ICY7(24),ICY8(24),ICY9(24)
0008 B1=0.41
0009 B2=C.0168
0010 Q0=1.2
0011 NTC AL=300
0012 ENBAR=0.5
0013 ETA=15.10E-6
0014 P1=3.141592
0015 UZER(1)=10.10
0016 XIND=0.09144
0017 XIO=XIND*UZER(1)/ETA
0018 BK=1.035
0019 DELN1=0.035
0020 DELN(1)=0.035
0021 DELTA(1)=J.0092
0022 TETA(1,1)=1.0
0023 UVEL(1,1)=0.
0024 YETA(1)=0.
0025 USTAR(1)=0.5224
0026 USTA=USTAR(1)
0027 DEL1=DELN1*USTA*((2.*XIO)**ENBAR)/UZER(1)
0028 IOEG=4
0029 REL=USTAR(1)/UZER(1)
0030 N=34
0031 DELNET=(DELTA(1)*UZER(1))/((2.*XIO)**ENBAR)*ETA)
0032 NNIN=2
0033 DO 2 J=2,NTOTAL
0034 DELN(J)=DELN1*(BK**(J-2))
0035 DELSUM=DELN(J)+DELN(J-1)
0036 YETA(J)=YETA(J-1)+DELN(J)
0037 YPLUS(J)=YETA(J)*USTAR(1)*((2.*XIO)**ENBAR)/UZER(1)
0038 IF(YPLUS(J).LE.7.)UPLUS(1,J)=YPLUS(J)
0039 IF(YPLUS(J).LE.7.)UVEL(1,J)=UPLUS(1,J)*USTAR(1)/UZER(1)
0040 IF(YPLUS(J).GE.7.AND.YPLUS(J).LE.30.)UPLUS(1,J)=11.08*ALOG10(YPLUS(1,J))-2.3036
0041 IF(YPLUS(J).GE.7.AND.YPLUS(J).LE.30.)UVEL(1,J)=UPLUS(1,J)*USTAR(1)/UZER(1)
0042 IF(YPLUS(J).GE.30.)UPLUS(1,J)=2.5*ALOG(YPLUS(J))+5.5
0043 IF(YPLUS(J).GE.30.)UVEL(1,J)=UPLUS(1,J)*USTAR(1)/UZER(1)
0044 NMAX=J
0045 IF(LVEL(1,J).GT.0.98999) GO TO 3
0046 2 CONTINUE
0047 3 CONTINUE
0048 UVEL(1,NMAX)=.99
0049 WRITE(3,16) NMAX
0050 16 FORMAT(1X,15)
0051 DO 5 J=1,NMAX
0052 UETA=(YETA(J)/YETA(NMAX))
0053 TETA(1,J)=.99-UETA**(1./7.)
0054 TETA(1,J)=ABS(TETA(1,J))
0055 IF(J.GE.7)UVEL(1,J)=UETA**(1./7.)
0056 WRITE(3,22) UVEL(1,J)
0057 22 5 FORMAT(1X,F8.6)
0058 CONTINUE
0059 YETA(NTOTAL)=(BK**(NTOTAL-1)-1.)*DELN1/(BK-1.)
0060 NMAX=NMAX+1
0061 NNMAX=NTOTAL-1
0062 DO 4 J=NMAX,NNMAX
0063 DELN(J)=DELN1*(BK**(J-2))
0064 YETA(J)=YETA(J-1)+DELN(J)
0065 UVEL(1,J)=0.99+0.01*(YETA(J)-YETA(NMAX))/(YETA(NTOTAL)-YETA(NMAX))
0066 TETA(1,J)=UVEL(1,J)-.99
0067 4 CONTINUE
0068 RETURN
0069 END

```