

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE ANÉIS DE REFORÇO EM CASCAS ESFÉRICAS
FINAS COM BOCAIS RADIAIS CILÍNDRICOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

LUIZ TEIXEIRA DO VALE PEREIRA

DEZEMBRO - 1980

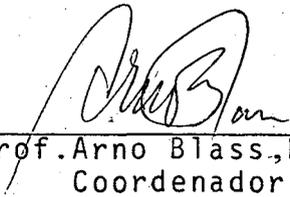
ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE ANÉIS DE REFORÇO EM CASCAS ESFÉRICAS
FINAS COM BOCAIS RADIAIS CILÍNDRICOS

LUIZ TEIXEIRA DO VALE PEREIRA

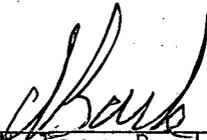
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO
PROJETO MECÂNICO E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO
DE PÓS-GRADUAÇÃO.

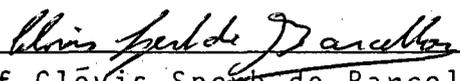


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador



Prof. Nelson Back, Ph.D.
Orientador

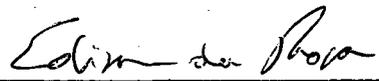
APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFES-
SORES



Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.



Prof. Nelson Back, Ph.D.



Prof. Edison da Rosa, M. Eng. Mec.

À Berê e Meus Pais

Agradecimentos

- Aos companheiros Carlos Alberto de Campos Selke, Antônio Bento Filho e Lauro Cesar Nicolazzi pelas sugestões e constante incentivo;
- Ao companheiro Raul Guenther por colocar a minha disposição os programas computacionais CORTER e CORTERDE;
- À UFSC, por tornar possível a realização deste trabalho.

INDICE

NOTAÇÃO.....	vii
RESUMO.....	viii
ABSTRACT.....	ix
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - Revisão Bibliográfica.....	2
CAPÍTULO 2 - CASCAS ESFÉRICAS FINAS DE PEQUENA CURVATURA.....	3
2.1 - Equações Diferenciais que regem o problema.....	3
2.2 - Solução das Equações Diferenciais.....	11
2.2.1 - Caso Axissimétrico.....	11
2.2.2 - Caso sem Simetria Axial.....	14
CAPÍTULO 3 - BOCAL RÍGIDO CARREGADO AXIALMENTE.....	16
3.1 - Introdução.....	16
3.2 - Determinação das constantes.....	17
CAPÍTULO 4 - MOMENTO FLETOR ATUANDO NO BOCAL RÍGIDO.....	22
4.1 - Introdução.....	22
4.2 - Determinação das Constantes.....	23
CAPÍTULO 5 - ANEL DE REFORÇO NUMA CASCA ESFÉRICA COM UMA FORÇA P APLICADA NUM BOCAL RADIAL CILÍNDRICO RÍGIDO.....	28
5.1 - Introdução.....	28
5.2 - Determinação das Constantes.....	30
CAPÍTULO 6 - ANEL DE REFORÇO NUMA CASCA ESFÉRICA COM UM MO- MENTO EXTERNO M APLICADO NUM BOCAL RÍGIDO CI- LÍNDRICO RADIAL.....	40
6.1 - Introdução.....	40
6.2 - Determinação das Constantes.....	42
CAPÍTULO 7 - ANÁLISE DE UMA CASCA ESFÉRICA FINA COM UMA FOR- ÇA P APLICADA NUM BOCAL RADIAL CILÍNDRICO.....	52
7.1 - Introdução.....	52
7.2 - Determinação das Constantes.....	53
CAPÍTULO 8 - ANEL DE REFORÇO NUMA CASCA ESFÉRICA FINA COM UMA FORÇA P APLICADA NUM BOCAL CILÍNDRICO RA- DIAL.....	61

8.1 - Introdução.....	61
8.2 - Determinação das Constantes.....	62
CAPÍTULO 9 - RESULTADOS E CONCLUSÕES.....	71
9.1 - Comparação da Teoria.....	71
9.2 - Apresentação e Discussão dos Resultados.....	79
9.3 - Conclusões e Sugestões para trabalhos futuros..	96
REFERÊNCIAS.....	97
APÊNDICES.....	99
A - Funções de Bessel e Kelvin.....	99
B - Programa Analisador de Cascas Esféricas (PACE)...	102
C - Manual de Utilização do Programa PACE.....	105

NOTAÇÃO

r	- Distância de um ponto da casca esférica ao eixo vertical de revolução da mesma.
$N_r, N_\theta, N_{r\theta}$	- Tensões de membrana por unidade de comprimento.
Q_r, Q_θ	- Tensões transversais por unidade de comprimento.
$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$	- Deformações específicas.
K_r, K_θ, τ	- Variação de curvatura e rotação.
θ	- Ângulo circunferencial.
R	- Raio médio da esfera.
F	- Função Tensão.
ω	- Função deslocamento radial.
ν	- Coeficiente de Poisson.
D	- Rigidez de flexão da casca esférica.
h	- Espessura da casca esférica na região sem reforço.
E	- Módulo de elasticidade.
ℓ	- Comprimento característico para a região sem reforço.
S	- r/ℓ .
$ber, bei,$	
ker, kei	- Funções de Kelvin.
C_1, C_2, \dots	- Constantes reais.
P, M	- Carregamento Externo.
r_0	- Raio do bocal rígido.
ϕ	- Ângulo meridional.
r^*	- Raio do contorno externo do anel de reforço.
h^*	- Espessura da casca esférica na região de reforço.
S^*	- r/ℓ^* .
ω^*	- Função deslocamento radial para a região de reforço.
m	- r^*/ℓ^*
n	- r^*/ℓ
u	- r_0/ℓ^*
Z	- $(\ell^*/\ell)^{1/2}$
t	- Espessura do bocal cilíndrico.
a	- Raio médio do bocal cilíndrico.
x	- Coordenada meridional no bocal cilíndrico.
V_0, M_0	- Solicitações internas para $x=0$ no bocal cilíndrico.
α	- Inclinação do meridiano.
N	- Rigidez de flexão da casca cilíndrica.
γ	- a/t
ρ	- h/t .

RESUMO

Este trabalho apresenta uma solução analítica para o problema de cascas esféricas finas, com bocais radiais cilíndricos, usando a teoria de cascas finas de pequena curvatura (Hipótese de Reissner).

São determinadas expressões para calcular deslocamentos e tensões somente para a casca esférica, quando é aplicada força axial ou momento fletor no bocal.

Numa primeira aproximação o bocal é considerado rígido, e depois, como sendo uma casca cilíndrica fina. Anéis de reforço são considerados nos dois casos, afim de se analisar a influência destes elementos, o que constitui o objetivo final deste trabalho.

ABSTRACT

This work presents an analytical solution of the problem of thin spherical shells with cylindrical radial nozzles, using the theory of thin shallow shells (Reissner's Hypothesis).

Cases in which the cylindrical radial nozzle becomes infinitely rigid (rigid insert) or flexible are analysed and is developed a digital program for the computation of the displacements and the resultant stresses of the spherical shell.

The effects of reinforcements are analysed when an axial loads or an external moment are applied on the nozzles.

1 INTRODUÇÃO

Embora as soluções numéricas venham sendo cada vez mais difundidas, motivadas pela sua abrangência de casos, a difusão do uso de computadores e principalmente pela possibilidade de resolução de problemas complexos, as soluções analíticas continuam como potentes formas de análise para casos mais simples ou mesmo como termo de comparação de soluções numéricas.

A teoria aqui apresentada é uma simplificação da teoria geral de cascas finas de revolução, conhecida como Hipótese de Reissner, sendo abordada uma solução analítica para este caso.

No estudo de cascas esféricas, esta hipótese introduz simplificações adicionais àquelas da Hipótese de Kirchhoff-Love para cascas finas.

Os casos aqui analisados são todos geometricamente axissimétricos, onde toda a estrutura é considerada como sendo constituída de um mesmo material elástico e isotrópico.

As equações diferenciais obtidas para representar matematicamente o problema físico, consideram o carregamento externo apenas através das condições de contorno, ficando implícito nas constantes de integração.

Neste trabalho são obtidas expressões para o cálculo de deslocamentos e tensões em cascas esféricas finas com bocais radiais cilíndricos, seguindo a metodologia utilizada por Bijlaard [1,2,3], que analisa as equações oriundas da Hipótese de Reissner [4,5], de tal forma que a sua solução se iguale à solução de uma placa circular sobre apoio elástico, estudada por Timoshenko [6].

Com o intuito de facilitar a obtenção dos resultados numéricos para as devidas análises, foi codificado um programa computacional em linguagem FORTRAN (programa PACE), que é apresentado no Apêndice B.

1.1 Revisão bibliográfica

O estudo de cascas de pequena curvatura, segundo Rekach [13], parece ter sido iniciado por H.Aron (1874) quando este, enquanto calculava as variações de curvatura de cascas, desprezou nestas expressões os termos dependentes dos deslocamentos meridional (u_r) e circunferencial (u_θ).

No primeiro congresso de Mecânica Aplicada em 1938, K.Marquerre apresentou os seus resultados no cálculo de cascas de pequena curvatura.

Outro pesquisador que contribuiu para este estudo foi Kh.Mushtari, que usou as simplificações de Aron na aplicação de problemas de estabilidade de cascas, e depois, introduzindo outras simplificações, obteve as equações de equilíbrio para a teoria de cascas de pequena curvatura.

A teoria geral de cascas de pequena curvatura foi desenvolvida primeiramente por V.Z.Vlasov (1944), segundo Rekach, que mostrou também que a solução de cascas, usando esta teoria, era igual a solução de uma placa sobre apoio elástico.

Uma particularização da teoria de Vlasov, conforme exposto na bibliografia disponível, foi efetuada por E.Reissner [4] (1960), para cascas esféricas. Entre outros pesquisadores que abordaram tal particularização estão Harry Kraus [5] e Green and Zerna [10]. Rekach [13] apresenta, além de cascas esféricas de pequena curvatura com várias formas de carregamento, também particularizações da teoria geral para cascas cilíndricas e cascas com a forma de um parabolóide hiperbólico, entre outras.

Usando a teoria de cascas esféricas de pequena curvatura, Bijlaard [1,2,3] analisou o efeito de bocais e anéis de reforço em cascas esféricas finas, sob diversas situações de carregamento.

No presente trabalho, a mesma formulação utilizada por Bijlaard é enfocada com o intuito de gerar dados para a investigação do comportamento de cascas esféricas finas com bocais radiais e reforçadas com anéis.

2 CASCAS ESFÉRICAS FINAS DE PEQUENA CURVATURA

2.1 Equações diferenciais que regem o problema

De acordo com E.Reissner [4] uma casca esférica pode ser considerada de pequena curvatura quando H é menor que um oitavo do diâmetro de base $2a$ (Fig.2.1).

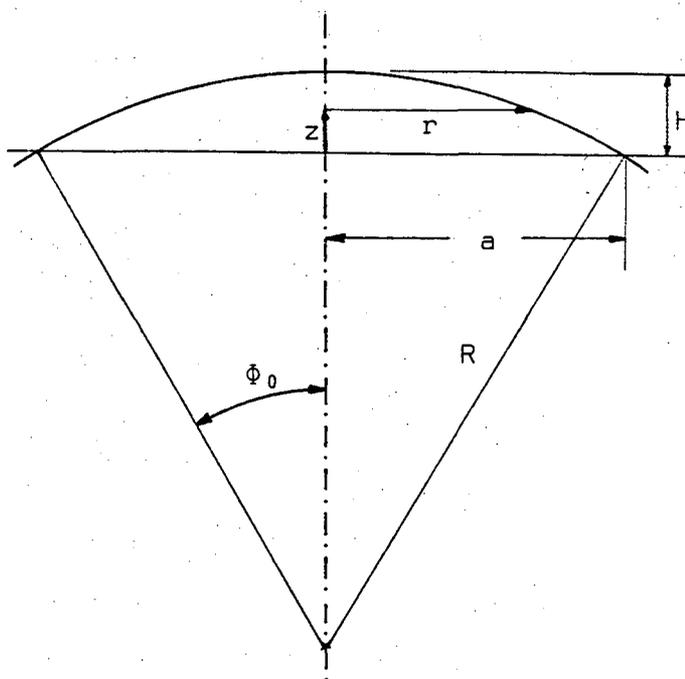


Fig.2.1

Escrevendo-se a variável z como:

$$z = (R^2 - r^2)^{1/2} - (R - H),$$

quando $z = 0$ ($r = a$) tem-se

$$a^2 = 2HR - H^2$$

que para cascas de pequena curvatura é reduzida para

$$a^2 \approx 2 H R$$

Se da equação acima for isolado H e substituído na expressão que define uma casca como sendo de pequena curvatura ($H/2a < 1/8$), tem-se:

$$\frac{a}{R} < \frac{1}{2}$$

ou seja:

$$\phi_0 < 30^\circ,$$

que limita o campo de aplicação da teoria em pauta.

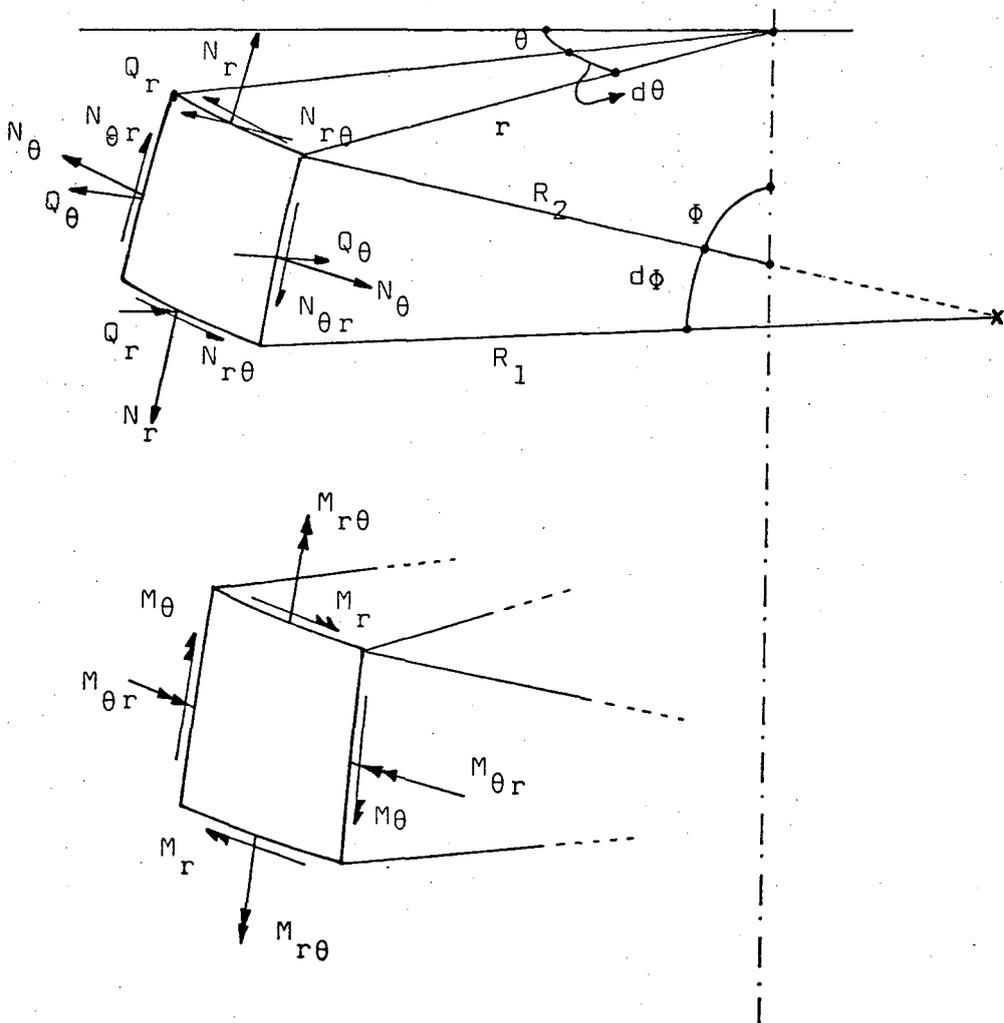


Fig.2.2

Para a obtenção das equações diferenciais que regem o problema de cascas esféricas de pequena curvatura, deve-se introduzir algumas simplificações propostas por Reissner, na teoria geral de cascas finas de revolução.

Desta forma, tomando-se as equações gerais para cascas de revolução dadas por Harry Kraus [5] e fazendo-se $R_1 = R_2 = R$, $A_1 = R$, $A_2 = r$, $\Omega = T = q = 0$ e usando a condição de Gauss para pequenos ângulos ($dr \approx R d\phi$), tem-se:

$$\frac{\partial (r N_r)}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} - N_\theta + \frac{r}{R} Q_r = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (r N_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{r\theta} + \frac{r}{R} Q_\theta = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial (r Q_r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{r}{R} (N_r + N_\theta) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial (r M_r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - M_\theta - r Q_r = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial (r M_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + M_{r\theta} - r Q_\theta = 0 \quad (2.5)$$

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{w}{R} \quad (2.6)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{w}{R} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad (2.8)$$

$$k_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{R} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2.9)$$

$$k_{\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{u_r}{R} - \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_{\theta}}{R} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right) \quad (2.10)$$

$$\tau = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_r}{R} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{u_{\theta}}{R} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right) \quad (2.11)$$

onde as equações (2.9), (2.10) e (2.11) são as expressões para as variações de curvatura e rotação, os índices r e θ referem-se às direções meridional e circunferencial, respectivamente, e w é o deslocamento radial. (Ver Fig.2.2).

De acordo com Reissner, para a análise de cascas esféricas de pequena curvatura, pode-se desprezar os efeitos das tensões cisalhantes resultantes nas direções meridional e circunferencial, no equilíbrio das forças, e também negligenciar a contribuição dos deslocamentos u_{θ} e u_r nas expressões de variação de curvatura. Assim, as equações (2.1), (2.2), (2.9), (2.10) e (2.11) ficam reduzidas a:

$$\frac{\partial (r N_r)}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial (r N_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + N_{r\theta} = 0 \quad (2.13)$$

$$k_r = - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (2.14)$$

$$k_{\theta} = - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.15)$$

$$\tau = - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (2.16)$$

Conforme pode ser visto em [6] as equações (2.12) a (2.16) são idênticas àquelas para placas circulares. Assim, pode-se notar que a Hipótese de Reissner supõe que uma casca esférica de pequena curvatura pode ser tratada como uma placa circular curvada.

Analisando as equações (2.12) e (2.13) pode-se notar que elas são análogas às equações que governam um problema de tensões planas em elasticidade (ver [7]). Então estas equações podem ser satisfeitas se as tensões resultantes são expressas em termos da função tensão F , como segue:

$$N_{\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (2.17)$$

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \quad (2.18)$$

$$N_{r\theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (2.19)$$

Pode-se também notar que as equações (2.6), (2.7) e (2.8) conduzem à seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \epsilon_{\theta}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} = \frac{\nabla^2 w}{R} \quad (2.20)$$

onde ∇^2 é o Laplaciano em coordenadas polares.

Então, substituindo-se as relações tensão-deformação na equação (2.20), vem:

$$\nabla^4 F - \frac{E h}{R} \nabla^2 w = 0 \quad (2.21)$$

Pela substituição de Q_r e Q_{θ} , dadas pelas equações (2.4) e (2.5), na equação de equilíbrio (2.3), vem:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial (r M_r)}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - M_{\theta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial (r M_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + M_{r\theta} \right] - \frac{r}{R} (N_r + N_{\theta}) = 0 \quad (2.22)$$

onde os momentos são dados em termos das variações de curvatura, que para o presente caso são dadas pelas equações simplificadas (2.14), (2.15) e (2.16), como segue:

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (2.23)$$

$$M_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \quad (2.24)$$

$$M_{r\theta} = -D \left[(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.25)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson e $D (= E h^3 / [12(1 - \nu^2)])$ a rigidez de flexão da casca esférica.

Substituindo agora as equações (2.17) a (2.19) e (2.23) a (2.25) em (2.22), obtém-se:

$$\nabla^4 w + \frac{1}{R D} \nabla^2 F = 0 \quad (2.26)$$

As equações (2.21) e (2.26) são as equações que governam a análise de cascas esféricas de pequena curvatura, com as cargas sendo consideradas somente nas condições de contorno.

Resultados adicionais podem ser obtidos pela introdução das equações (2.23) a (2.25) nas equações (2.4) e (2.5), ou seja:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \quad (2.27)$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \quad (2.28)$$

Se o operador ∇^2 for aplicado em (2.26) e substituído pelo valor da expressão (2.21), obtém-se:

$$\nabla^6 w + \frac{h E}{R^2 D} \nabla^2 w = 0 \quad (2.29)$$

Similarmente, pode-se também obter da equação (2.21) a expressão:

$$\nabla^6 F + \frac{h E}{R^2 D} \nabla^2 F = 0 \quad (2.30)$$

A equação (2.29) pode ser escrita na forma equivalente:

$$\nabla^4 w + \frac{w}{\lambda^4} = 0 \quad (2.31)$$

$$\nabla^2 w = 0 \quad (2.32)$$

onde: $\lambda^4 = R^2 D / h E = R^2 h^2 / (12(1 - \nu^2))$, e a solução de (2.29) pode ser escrita como a soma das soluções w_1 , w_2 e w_3 das equações (2.31) e (2.32) (ver [8]).

Comparando (2.31) com a equação para uma placa circular sobre apoio elástico [6], nota-se que se for substituído k/D por $1/\lambda^4$, as equações são idênticas.

Sendo k o módulo do apoio elástico da placa, o seu equivalente para a casca esférica é:

$$k = \frac{D}{\lambda^4} = \frac{h E}{R^2} \quad (2.33)$$

e desta forma, uma casca esférica de pequena curvatura atua como uma placa plana sobre apoio elástico.

Uma melhor compreensão deste comportamento pode ser obtida observando-se que a restrição elástica kw de uma placa plana imaginária fornece uma força radial que deve ser equilibrada pelas componentes, nesta mesma direção, das forças de membrana N_r e N_θ . O equilíbrio de um elemento de casca fornece:

$$kw (R d\phi)(R d\theta) = 2(R d\phi)N_\theta \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) + 2(R d\theta)N_r \operatorname{sen}\left(\frac{d\phi}{2}\right)$$

Como $d\theta/2$ e $d\phi/2$ são pequenos, os seus senos podem ser aproximados dos próprios ângulos na expressão acima, e após algumas simplificações vem:

$$\frac{N_r + N_\theta}{R} = kw \quad (2.34)$$

Substituindo-se nesta expressão as equações (2.17) a (2.19), vem:

$$\nabla^2_F w = \frac{h E}{R} w \quad (2.35)$$

que, ao ser aplicado o operador ∇^2 , transforma-se na equação (2.21).

Isolando-se w da equação (2.35) e substituindo na equação (2.31), vem a expressão (2.26).

Desta forma a solução de placas sobre apoio elástico pode ser transformada para a solução de uma casca esférica fina de pequena curvatura.

2.2 Solução das equações diferenciais

2.2.1 Caso axissimétrico

Reescrevendo-se a equação (2.31) na forma

$$\left[\nabla^2 + \frac{i}{\ell^2} \right] \left[\nabla^2 - \frac{i}{\ell^2} \right] w = 0$$

ela será satisfeita se:

$$\nabla^2 w_1 + \frac{i}{\ell^2} w_1 = 0 \quad (2.36)$$

$$\nabla^2 w_2 - \frac{i}{\ell^2} w_2 = 0 \quad (2.37)$$

Desta forma, a solução geral de (2.29) será a soma das soluções das equações (2.36), (2.37) e (2.32), onde as duas primeiras dessas expressões podem ser identificadas como sendo as equações de Bessel e de Bessel modificada, respectivamente, e por conseguinte têm como solução:

$$w_1 = C_{1a} J_0(s\sqrt{i}) + C_{2a} Y_0(s\sqrt{i}) \quad (2.38)$$

$$w_2 = C_{3a} I_0(s\sqrt{i}) + C_{4a} K_0(s\sqrt{i}) \quad (2.39)$$

$$w_3 = C_5 + C_6 \ln(s) \quad (2.40)$$

onde $s = r/\ell$, J_0 e Y_0 são as funções de Bessel de ordem zero, de primeira e segunda classe, e I_0 e K_0 , as funções de Bessel modificadas de ordem zero, de primeira e segunda classe, respectivamente. Ver Apêndice A.

Quando s é real as funções de Bessel não são necessariamente reais, mas pode-se obter funções reais pela introdução das funções de Kelvin: $ber(s)$, $bei(s)$, $ker(s)$ e $kei(s)$, que são

as partes real e imaginária das funções de Bessel, e a solução geral $w (= w_1 + w_2 + w_3)$ para o caso axissimétrico pode ser escrita como [9, 10]:

$$w = C_1 \text{ber}(s) + C_2 \text{bei}(s) + C_3 \text{ker}(s) + C_4 \text{kei}(s) + C_5 + C_6 \ln(s) \quad (2.41)$$

onde as constantes C_1 a C_6 são reais.

Como as equações (2.29) e (2.30) têm a mesma forma, um raciocínio semelhante fornece a solução geral da equação (2.30) para o caso axissimétrico, ou seja:

$$F = C_7 \text{ber}(s) + C_8 \text{bei}(s) + C_9 \text{ker}(s) + C_{10} \text{kei}(s) + C_{11a} + C_{12a} \ln(s) \quad (2.42)$$

Pela substituição das expressões (2.41) e (2.42) em (2.35) conclui-se que $C_6 = 0$. Simplificações adicionais podem ser obtidas determinando-se relações entre as constantes C_7 a C_{10} e C_1 a C_4 , o que é feito a seguir.

A função $y = I_0(x)$ é uma função que satisfaz a equação diferencial modificada de Bessel de ordem zero:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0 \quad (2.43)$$

Se nesta equação, $I_0(x)$ for substituído por $I_0(s\sqrt{i}) (= \text{ber}(s) + i \text{bei}(s))$ e x por $s\sqrt{i}$, depois de igualar a zero as partes real e imaginária, obtém-se:

$$\nabla^2 \text{ber}(s) = \frac{1}{\ell^2} \left(\text{ber}''(s) + \frac{\text{ber}'(s)}{s} \right) = - \frac{\text{bei}(s)}{\ell^2} \quad (2.44)$$

$$\nabla^2 \text{bei}(s) = \frac{1}{\ell^2} \left(\text{bei}''(s) + \frac{\text{bei}'(s)}{s} \right) = \frac{\text{ber}(s)}{\ell^2} \quad (2.45)$$

sendo que ∇^2 e as plicas referem-se às derivadas com relação a

r e s , respectivamente, pois as derivadas com relação a r e desaparecem por ser o caso axissimétrico.

De maneira similar consegue-se:

$$\nabla^2_{ker}(s) = \frac{1}{\lambda^2} \left(ker''(s) + \frac{ker'(s)}{s} \right) = - \frac{ker(s)}{\lambda^2} \quad (2.46)$$

$$\nabla^2_{kei}(s) = \frac{1}{\lambda^2} \left(kei''(s) + \frac{kei'(s)}{s} \right) = \frac{kei(s)}{\lambda^2} \quad (2.47)$$

Se (2.41) e (2.42) forem substituídas em (2.35), com o auxílio das expressões (2.44) a (2.47) obtém-se relações entre as constantes das equações (2.41) e (2.42), ou seja:

$$C_7 = - \frac{\lambda^2 h E}{R} C_2,$$

$$C_8 = \frac{\lambda^2 h E}{R} C_1,$$

$$C_9 = - \frac{\lambda^2 h E}{R} C_4,$$

$$C_{10} = \frac{\lambda^2 h E}{R} C_3,$$

$$C_{11a} \neq 0,$$

$$C_{12a} \neq 0$$

$$e \quad C_6 = 0$$

que substituídas em (2.42) fornecem:

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_1 \operatorname{bei}(s) - C_2 \operatorname{ber}(s) + C_3 \operatorname{kei}(s) - C_4 \operatorname{ker}(s) + C_{11} + C_{12} \ln(s) \right] \quad (2.48)$$

onde F é a função tensão para o caso axissimétrico.

2.2.2 Caso sem simetria axial

Neste caso a equação (2.31) será satisfeita se:

$$\nabla^2 w + \frac{i}{\ell^2} w = 0 \quad (2.49)$$

Fazendo:

$$w = \sum w_n \cos n\theta \quad (2.50)$$

as derivadas abaixo

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \sum \cos n\theta \frac{\partial w_n}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \sum \cos n\theta \frac{\partial^2 w_n}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \sum w_n (-n^2 \cos n\theta)$$

introduzidas em (2.49), com (2.50), fornecem

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_n}{\partial r} + \left(\pm \frac{i}{\ell^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) w_n = 0 \quad (2.51)$$

com solução:

$$w_n = C_{1a} J_n(s\sqrt{i}) + C_{2a} Y_n(s\sqrt{i}) + C_{3a} I_n(s\sqrt{i}) + C_{4a} K_n(s\sqrt{i}). \quad (2.52)$$

Escrevendo-se as funções de Bessel em termos das funções de Kelvin, para o caso a ser analisado (momento fletor M

aplicado no bocal rígido), $n = 1$ irá satisfazer (2.51).

Utilizando as fórmulas de recorrência para as funções de Kelvin apresentadas no Apêndice A, a solução geral de (2.29) será a soma da solução (2.52), modificada conforme descrito acima, e da solução de (2.32), que é:

$$w = \left[C_1 \text{ber}'(s) + C_2 \text{bei}'(s) + C_3 \text{ker}'(s) + C_4 \text{kei}'(s) + C_5 s + \frac{C_6}{s} \right] \cos \theta \quad (2.53)$$

Como (2.29) e (2.30) têm a mesma forma, de maneira similar pode-se concluir da solução da segunda destas expressões para o caso sem simetria axial, que é:

$$F = \left[C_7 \text{ber}'(s) + C_8 \text{bei}'(s) + C_9 \text{ker}'(s) + C_{10} \text{kei}'(s) + C_{11a} s + \frac{C_{12a}}{s} \right] \cos \theta \quad (2.54)$$

3 BOCAL RÍGIDO CARREGADO AXIALMENTE

3.1 Introdução

Com uma carga P aplicada axialmente ao bocal cilíndrico rígido, o caso em análise reduz-se a um problema axissimétrico e as soluções a serem consideradas (F e w) são as apresentadas pelas expressões (2.41) e (2.48).

As equações (2.17) a (2.19) e (2.23) a (2.25) ficam reduzidas às derivadas com relação a r , pois as com relação a θ desaparecem, por ser o caso axissimétrico, e são reescritas abaixo:

$$N_{\theta} = \frac{d^2 F}{dr^2} \quad (3.1)$$

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \quad (3.2)$$

$$N_{re} = 0 \quad (3.3)$$

$$M_r = -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right] \quad (3.4)$$

$$M_{\theta} = -D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad (3.5)$$

$$M_{re} = 0 \quad (3.6)$$

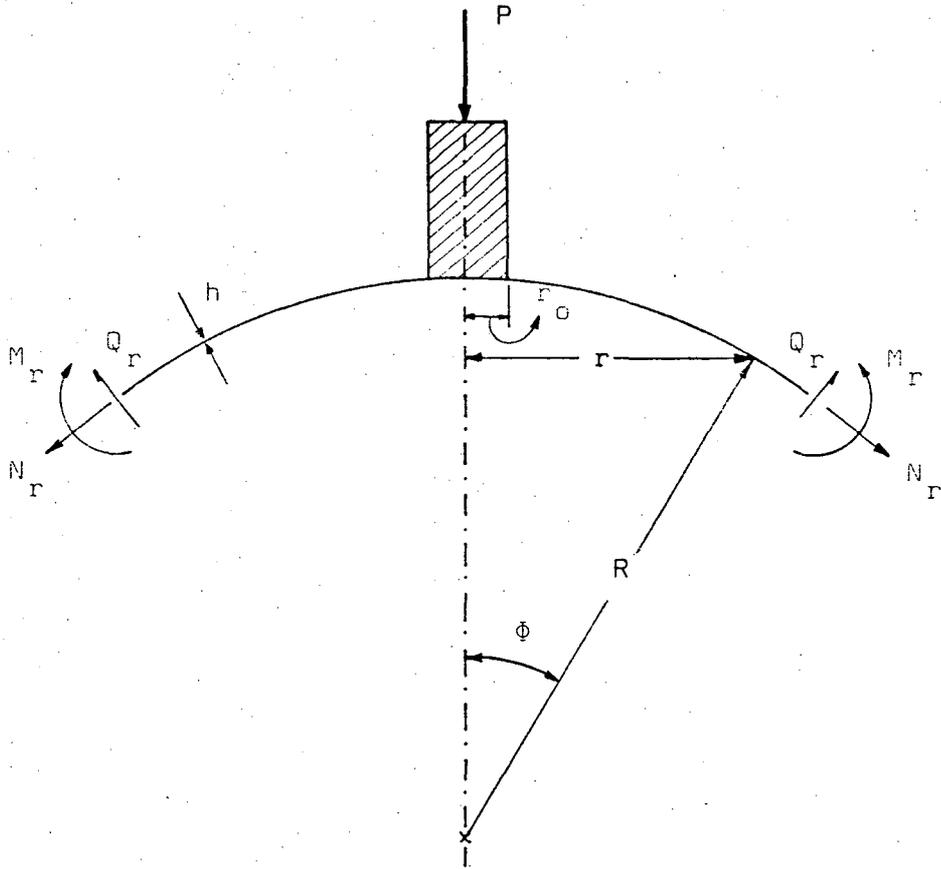


Fig.3.1

3.2 Determinação das constantes

Analisando a fig.3.1 pode-se perceber que a deflexão para grandes valores de r é reduzida a zero. Então, para que (2.41) represente o deslocamento radial w é necessário que as funções $\text{ber}(s)$ e $\text{bei}(s)$, que aumentam seus valores com o aumento da variável r ($s = r/\ell$), não apareçam nesta expressão. Consegue-se isto fazendo $C_1 = C_2 = 0$. Feita uma análise nas equações (3.1) a (3.6) e (2.41) e (2.48), conclui-se que as constantes C_5 e C_{11} são sem efeito. Lembrando ainda que $C_6 = 0$, pode-se reescrever as equações (2.41) e (2.48) na forma:

$$w = C_3 \text{ker}(s) + C_4 \text{kei}(s) \quad (3.7)$$

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \text{kei}(s) - C_4 \text{ker}(s) + C_{12} \ln s \right] \quad (3.8)$$

O problema fica agora reduzido à determinação das constantes C_3 , C_4 e C_{12} , o que é conseguido através das condições impostas pelo modelo analisado.

Para a determinação de C_{12} pode-se notar que, para valores grandes de r , onde as funções $\ker(s)$ e $\kei(s)$ são pequenas, a força de membrana N_r sustenta toda a carga P e desta forma:

$$N_r = - \frac{P}{2\pi r \phi} = - \frac{P R}{2\pi r^2},$$

que igualada à força de membrana fornecida pela substituição de (3.8) em (3.2),

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} C_{12} \ln s \right] = \frac{C_{12} E h^2}{r^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}}$$

fornece a constante

$$C_{12} = - \frac{P R [12(1 - \nu^2)]^{1/2}}{2\pi E h^2} \quad (3.9)$$

As duas constantes restantes C_3 e C_4 podem ser determinadas através de duas condições, que devem ser preenchidas para $r = r_0$ (quando $s = u$), que é considerado um ponto de engaste da casca esférica, ficando livre apenas um movimento na direção do eixo vertical mostrado na fig.3.1. Assim:

$$\frac{dw}{dr} = 0 \quad (3.10)$$

$$e \quad \epsilon_\theta = \frac{N_\theta - \nu N_r}{E h} = 0 \quad (3.11)$$

Lembrando que $s = r_0/\ell (= u)$, (3.10) e (3.7) fornecem:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{\ell} \frac{dw}{ds} = \frac{1}{\ell} \left[C_3 \ker'(s) + C_4 \operatorname{kei}'(s) \right] = 0$$

portanto:

$$C_4 = - C_3 \frac{\ker'(u)}{\operatorname{kei}'(u)} \quad (3.12)$$

De (3.1), (3.2) e (3.8), e levando em consideração as relações (2.46) e (2.47), obtém-se:

$$N_r = \frac{E h^2}{u \ell^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \operatorname{kei}'(u) - C_4 \ker'(u) + \frac{C_{12}}{u} \right]$$

$$N_\theta = \frac{E h^2}{\ell^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \left(\ker(u) - \frac{\operatorname{kei}'(u)}{u} \right) + C_4 \left(\operatorname{kei}(u) + \frac{\ker'(u)}{u} \right) - \frac{C_{12}}{u^2} \right]$$

que substituídas na condição (3.11), junto com (3.12) e (3.9), fornecem:

$$C_3 = - \left[\frac{(1+\nu) [3(1-\nu^2)]^{1/2} P R \operatorname{kei}'(u)}{E h^2 \pi u} \right] \left\{ u \left[\operatorname{kei}'(u) \ker(u) - \ker'(u) \operatorname{kei}(u) \right] - (1+\nu) \left[\operatorname{kei}'^2(u) + \ker'^2(u) \right] \right\}^{-1} \quad (3.13)$$

Os momentos meridional (M_r) e circunferencial (M_θ) são fornecidos pelas equações (3.4) e (3.5), respectivamente, com (3.7).

Com as derivadas

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{\ell} \frac{dw}{ds} = \frac{1}{\ell} \left[C_3 \ker'(s) + C_4 \operatorname{kei}'(s) \right]$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{1}{\ell^2} \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} \right) = \frac{1}{\ell^2} \left[C_3 \left(-\text{kei}(s) - \frac{\text{ker}'(s)}{s} \right) + \right. \\ \left. + C_4 \left(\text{ker}(s) - \frac{\text{kei}'(s)}{s} \right) \right],$$

a rigidez de flexão $D = (E h^3)/12(1-\nu^2)$ e as equações (3.4) e (3.5), obtém-se

$$M_r = \frac{-E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \left(\text{kei}(s) + \frac{\text{ker}'(s)}{s} (1-\nu) \right) - \right. \\ \left. - C_4 \left(\text{ker}(s) - \frac{\text{kei}'(s)}{s} (1-\nu) \right) \right] \quad (3.14)$$

$$M_\theta = \frac{-E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \left(\nu \text{kei}(s) - \text{ker}'(s) \frac{(1-\nu)}{s} \right) - \right. \\ \left. - C_4 \left(\text{kei}'(s) \frac{(1-\nu)}{s} + \nu \text{ker}(s) \right) \right] \quad (3.15)$$

De forma similar, as forças de membrana meridional (N_r) e circunferencial (N_θ) são dadas pelas equações (3.2) e (3.1), respectivamente, depois de serem substituídos os valores das derivadas abaixo, naquelas duas expressões.

$$\frac{dF}{dr} = \frac{1}{\ell} \frac{dF}{ds} = \frac{1}{\ell} \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \text{kei}'(s) - C_4 \text{ker}'(s) + \frac{C_{12}}{s} \right]$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} = \frac{1}{\ell^2} \frac{d}{ds} \left(\frac{dF}{ds} \right) = \frac{1}{\ell^2} \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \left(\text{ker}(s) - \frac{\text{kei}'(s)}{s} \right) + \right. \\ \left. + C_4 \left(\text{kei}(s) + \frac{\text{ker}'(s)}{s} \right) - \frac{C_{12}}{s^2} \right]$$

Assim, tem-se:

$$N_\theta = \frac{Eh}{R} \left[C_3 \left(\text{ker}(s) - \frac{\text{kei}'(s)}{s} \right) + C_4 \left(\text{kei}(s) + \frac{\text{ker}'(s)}{s} \right) - \frac{C_{12}}{s^2} \right] \quad (3.16)$$

$$N_r = \frac{E h}{R s} \left[C_3 kei'(s) - C_4 ker'(s) + \frac{C_{12}}{s} \right] \quad (3.17)$$

Então, o conjunto de equações (3.7) e (3.14) a (3.17) com as constantes dadas pelas equações (3.9), (3.12) e (3.13) constitui uma solução para o problema de cascas esféricas finas de pequena curvatura, com carga aplicada em um bocal rígido radial cilíndrico.

O programa computacional PACE, apresentado no Apêndice B foi codificado a partir da formulação analítica desenvolvida acima e seus resultados são apresentados no Capítulo 9.

4 MOMENTO FLETOR ATUANDO NO BOCAL RÍGIDO

4.1 Introdução

Da mesma forma como foi suposto para o caso anteriormente estudado, aqui também, para grandes valores de r , os deslocamentos radiais na casca esféricas são nulos. Portanto, para que (2.53) represente estes deslocamentos, faz-se: $C_1 = C_2 = C_5 = 0$.

Introduzindo-se as equações (2.53) e (2.54), com $C_1 = C_2 = C_5 = 0$, em (2.35), onde o Laplaciano em coordenadas polares, com $r = s\ell$, é

$$\nabla^2 = \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s\ell^2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2\ell^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

obtém-se, depois de igualar as constantes que aparecem multiplicando as funções de Kelvin e suas derivadas primeiras, nos dois lados do sinal de igualdade, as seguintes relações entre as constantes:

$$C_{10} = C_3 \frac{\ell^2 h E}{R}, \quad C_9 = -C_4 \frac{\ell^2 h E}{R},$$

$$C_7 = C_8 = C_{11a} = 0 \quad \text{e} \quad C_{12a} = C_{12} \neq 0.$$

Com as considerações acima, as equações (2.53) e (2.54) são escritas como:

$$w = (C_3 \operatorname{ker}'(s) + C_4 \operatorname{kei}'(s)) \cos \theta \quad (4.1)$$

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \operatorname{kei}'(s) - C_4 \operatorname{ker}'(s) + \frac{C_{12}}{s} \right] \cos \theta \quad (4.2)$$

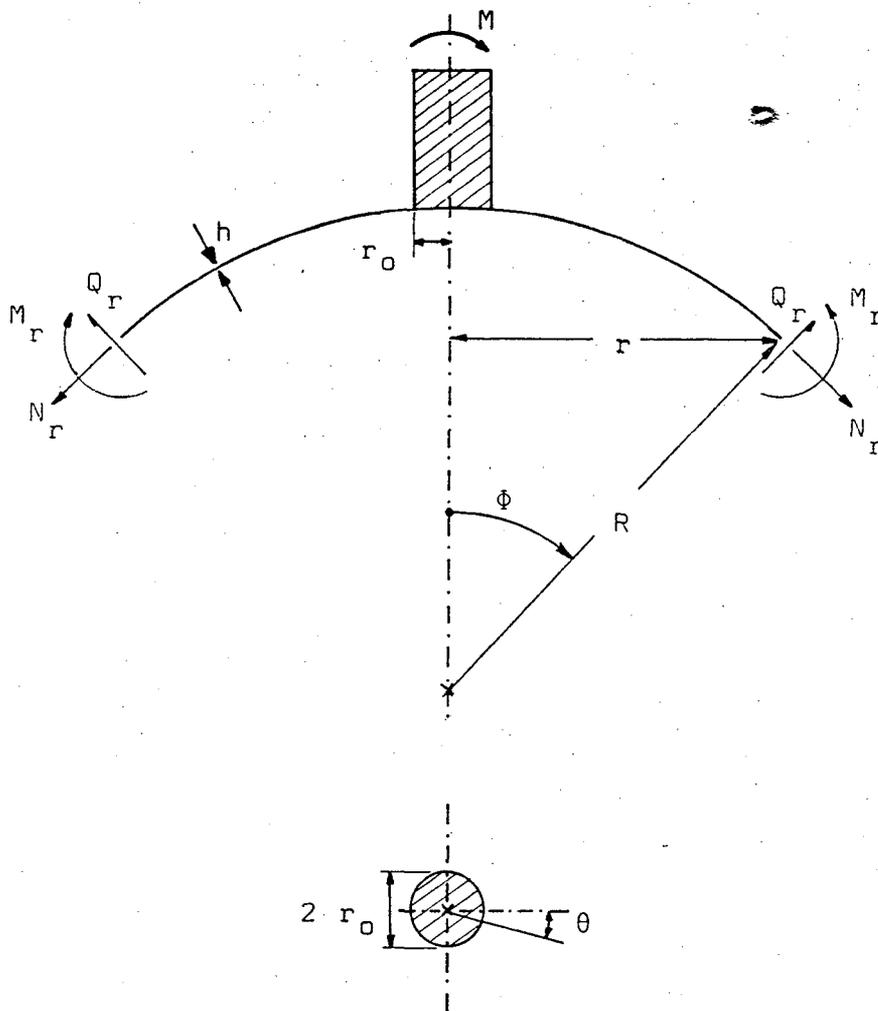


Fig.4.1

4.2 Determinação das constantes

As constantes C_3 , C_4 e C_{12} podem ser determinadas através das condições de contorno impostas pelo caso em análise.

Se for observado que para grandes valores de r as funções $ker'(s)$ e $kei'(s)$ diminuem consideravelmente, a expressão (4.1) fica $w = 0$ e a (4.2) pode ser escrita como:

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \frac{C_{12}}{s} \cos e \quad (4.3)$$

concluindo-se que o momento fletor externo M deve ser sustentado integralmente pelas forças de membrana $N_r = N_r^\theta \cos \theta$, onde N_r^θ indica a força de membrana como uma função de θ (fig.4.1), devido ao tipo de sollicitação na estrutura.

Então, fazendo $\phi \approx r/R$, o momento M será:

$$M = - \int_0^{2\pi} \phi N_r r^2 \cos \theta \, d\theta = - 4 \frac{r^3}{R} N_r^\theta \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta = - \frac{r^3 N_r^\theta \pi}{R}$$

fornecendo a força de membrana:

$$N_r = - \frac{M R}{\pi r^3} \cos \theta \quad (4.4)$$

Por outro lado, substituindo (4.3) em (2.18), e igualando este resultado com (4.4), obtém-se uma expressão para a constante C_{12} , como segue:

$$C_{12} = - \frac{M R}{\lambda \pi E h^2} [3(1 - \nu^2)]^{1/2} \quad (4.5)$$

Para a determinação das duas outras constantes pode-se usar as duas condições de contorno abaixo, para $r = r_0$:

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{w}{r} \right|_{r=r_0} \quad (4.6)$$

$$\epsilon_\theta \Big|_{r=r_0} = \frac{N_\theta - \nu N_r}{E h} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (4.7)$$

Utilizando (4.6) e (4.1), com $s = u$ para $r = r_0$, tem-se:

$$C_4 = - C_3 \left[\frac{2\text{ker}'(u) + u\text{kei}(u)}{2\text{kei}'(u) - u\text{ker}(u)} \right] \quad (4.8)$$

Da condição (4.7) sabe-se que

$$N_\theta \Big|_{r=r_0} = \nu N_r \Big|_{r=r_0} \quad (4.9)$$

onde N_θ e N_r são conseguidos introduzindo-se (4.2) em (2.17) e (2.18):

$$N_\theta = \frac{E h^2 \cos \theta}{\ell^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \left(\ker'(s) - \frac{\ker(s)}{s} + 2 \frac{\ker'(s)}{s^2} \right) + C_4 \left(\ker'(s) - \frac{\ker(s)}{s} - 2 \frac{\ker'(s)}{s^2} \right) + 2 \frac{C_{12}}{s^3} \right]$$

$$N_r = \frac{E h^2 \cos \theta}{s \ell^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_3 \left(\ker(s) - \frac{\ker'(s)}{s} \right) + C_4 \left(\ker(s) + \frac{\ker'(s)}{s} \right) - \frac{C_{12}}{s^2} - \frac{C_3 \ker'(s)}{s} + \frac{C_4 \ker'(s)}{s} - \frac{C_{12}}{s^2} \right\}$$

donde sai, junto com (4.8), uma expressão para C_3 :

$$C_3 = - \left[\frac{M R}{u \pi E h^2 \ell} \right] (2 \ker'(u) - u \ker(u)) (1+\nu) [12(1-\nu^2)]^{1/2} \cdot \left\{ (1+\nu) \left[4(\ker'^2(u) + \ker^2(u)) + 4u (-\ker'(u)\ker(u) + \ker(u)\ker'(u)) + u^2(\ker^2(u) + \ker'^2(u)) \right] - u^3 \left[\ker'(u)\ker(u) + \ker'(u)\ker(u) \right] \right\}^{-1} . \quad (4.10)$$

Os deslocamentos radiais w são dados pela equação (4.1), com as constantes C_3 e C_4 dadas por (4.8) e (4.10).

Para a obtenção dos momentos M_r e M_θ ($M_{r\theta}$ não é considerado nesta análise) deve-se introduzir (4.1) em (2.23) e (2.24), sendo que alguns passos intermediários são apresentados abaixo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = (C_3 \ker'(s) + C_4 \ker'(s)) (-\cos \theta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{\ell} \left[C_3 \left(-\text{kei}(s) - \frac{\text{ker}'(s)}{s} \right) + C_4 \left(\text{ker}(s) - \frac{\text{kei}'(s)}{s} \right) \right] \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) = \frac{1}{\ell^2} \left[C_3 \left(-\text{kei}'(s) + \frac{\text{kei}(s)}{s} + 2 \frac{\text{ker}'(s)}{s^2} \right) + \right. \\ \left. + C_4 \left(\text{ker}'(s) - \frac{\text{ker}(s)}{s} + 2 \frac{\text{kei}'(s)}{s^2} \right) \right] \cos \theta$$

$$M_r = \frac{E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_3 \left[-\text{kei}'(s) + (1-\nu) \left[\frac{\text{kei}(s)}{s} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2 \frac{\text{ker}'(s)}{s^2} \right] \right] + C_4 \left[\text{ker}'(s) + (1-\nu) \left[-\frac{\text{ker}(s)}{s} + 2 \frac{\text{kei}'(s)}{s^2} \right] \right] \right\} \cos \theta \quad (4.11)$$

$$M_\theta = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_3 \left[(1-\nu) \left[-\frac{\text{kei}(s)}{s} - 2 \frac{\text{ker}'(s)}{s^2} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \nu \text{kei}'(s) \right] + C_4 \left[(1-\nu) \left[\frac{\text{ker}(s)}{s} - 2 \frac{\text{kei}'(s)}{s^2} \right] + \nu \text{ker}'(s) \right] \right\} \cos \theta \quad (4.12)$$

As forças de membrana N_r e N_θ ($N_{r\theta}$ não é aqui levado em conta) seguem das equações (2.17) e (2.18) com (4.2):

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{\ell} \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_3 \left[\text{ker}(s) - \frac{\text{kei}'(s)}{s} \right] + \right. \\ \left. + C_4 \left[\text{kei}(s) + \frac{\text{ker}'(s)}{s} \right] - \frac{C_{12}}{s^2} \right\} \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{1}{l^2} \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3(\ker'(s) - \frac{\ker(s)}{s} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\ker'(s)}{s^2}) - C_4(\ker'(s) - \frac{\ker(s)}{s} - 2 \frac{\ker'(s)}{s^2}) + \frac{C_{12}}{s^2} \right] \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \ker'(s) - C_4 \ker'(s) + \frac{C_{12}}{s} \right] (-\cos \theta)$$

$$N_r = \frac{E h}{R s} \left[C_3(\ker(s) - 2 \frac{\ker'(s)}{s}) + C_4(\ker(s) + 2 \frac{\ker'(s)}{s}) - \right. \\ \left. - 2 \frac{C_{12}}{s^2} \right] \cos \theta \quad (4.13)$$

$$N_\theta = \frac{E h}{R} \left[C_3(\ker'(s) - \frac{\ker(s)}{s} + 2 \frac{\ker'(s)}{s^2}) + \right. \\ \left. + C_4(\ker'(s) - \frac{\ker(s)}{s} - 2 \frac{\ker'(s)}{s^2}) + 2 \frac{C_{12}}{s^3} \right] \cos \theta \quad (4.14)$$

Uma casca esférica fina de pequena curvatura, com um bocal cilíndrico rígido radial e um momento fletor externo M aplicado neste bocal, tem como função deslocamento a equação (4.1). Seus momentos resultantes são dados pelas expressões (4.11) e (4.12) e as forças de membrana, por (4.13) e (4.14), com as constantes dadas pelas equações (4.5), (4.8) e (4.10).

5 ANEL DE REFORÇO NUMA CASCA ESFÉRICA COM UMA FORÇA P APLICADA NUM BOCAL RADIAL CILÍNDRICO RÍGIDO

5.1 Introdução

No presente capítulo é estudada a influência de um anel de reforço na casca esférica fina colocado próximo ao bocal cilíndrico rígido.

Na região de reforço, aqui denominada Região I, a casca esférica terá espessura h^* e contorno externo r^* , e a região sem reforço será denominada Região II.

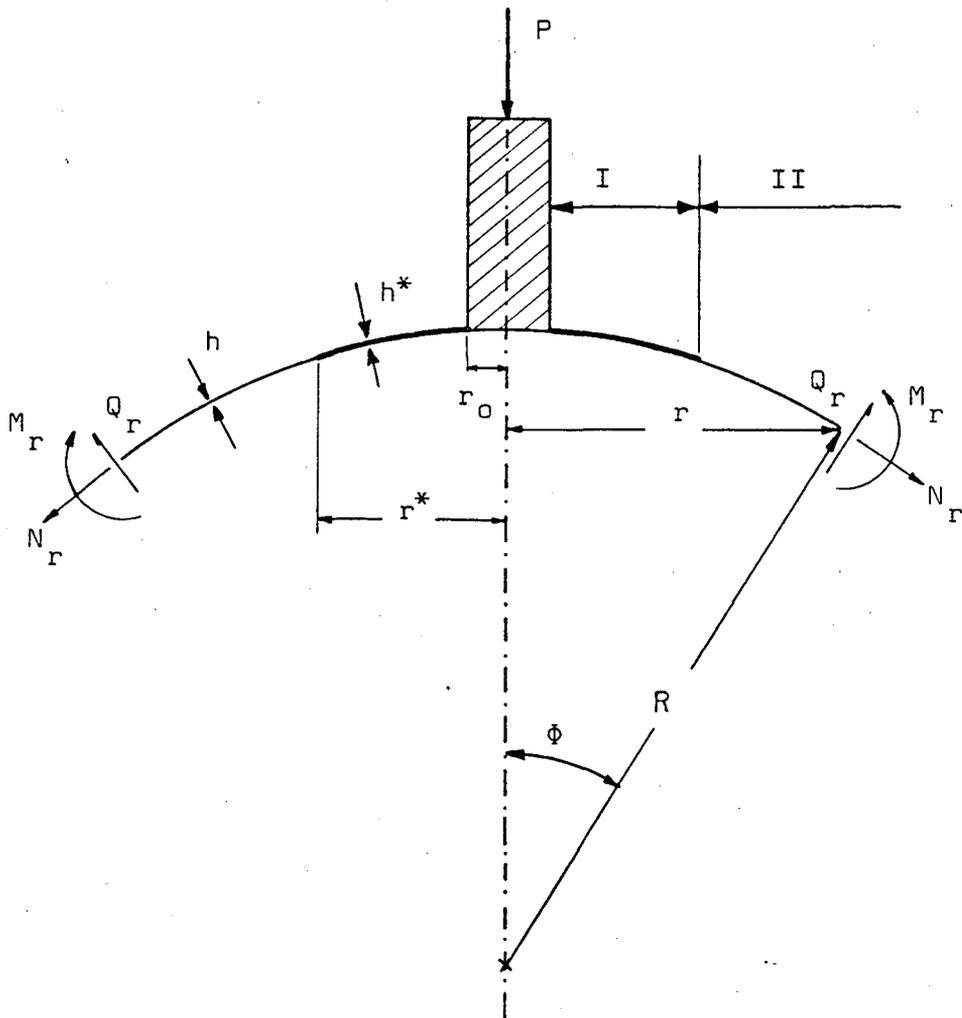


Fig.5.1

Sendo este caso um problema axissimétrico, as soluções das equações diferenciais que o regem são dadas pelas equações (2.41) e (2.48). Assim, para a região I, as funções deslocamento e tensão são dadas, respectivamente, por:

$$w^* = C_1 \text{bers}^* + C_2 \text{beis}^* + C_3 \text{kers}^* + C_4 \text{keis}^* + C_5 + C_6 \ln s^* \quad (5.1)$$

$$F^* = \frac{E h^{*2}}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_1 \text{beis}^* - C_2 \text{bers}^* + C_3 \text{keis}^* - C_4 \text{kers}^* + C_7 + C_8 \ln s^* \right] \quad (5.2)$$

onde:

$$s^* = \frac{r}{\ell^*}$$

$$\ell^{*4} = \frac{R^2 h^{*2}}{12(1-\nu^2)} \quad (5.3)$$

Para a região II são aplicáveis as equações (3.7) e (3.8), para w e F desde que sejam trocadas as constantes C_3 , C_4 e C_{12} por C_9 , C_{10} e C_{11} , respectivamente, ou seja:

$$w = C_9 \text{kers} + C_{10} \text{keis} \quad (5.4)$$

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_9 \text{keis} - C_{10} \text{kers} + C_{11} \ln s \right] \quad (5.5)$$

As forças de membrana e os momentos resultantes, para as regiões I e II, seguem das equações (3.1) a (3.6).

Nesta altura uma nova constante é introduzida e definida como

$$Z = \left(\frac{\ell^*}{\ell} \right)^{1/2} = \frac{h^*}{h} \quad (5.6)$$

5.2 Determinação das constantes

Para o contorno externo da região de reforço o deslocamento radial w é diferente de zero. Portanto, deve-se adicionar uma constante à equação (2.35) [2,10]. Assim:

$$\nabla^2 F^* = \frac{h E}{R} w^* + C \quad (5.7)$$

Substituindo agora (5.1) e (5.2) em (5.7) conclui-se que C_6 deve ser zero, e, com o auxílio das equações (3.1) e (3.2), que C_7 pode ser desconsiderada. Estas considerações reduzem para nove as constantes a serem determinadas, o que exige nove condições de contorno ou continuidade. Estas condições devem ser tiradas de uma análise do problema esquematizado na fig.5.1, donde se pode concluir, por exemplo, que se a força P for sustentada inteiramente pelas forças de membrana, C_1 a C_5 , C_9 e C_{10} devem ser igualadas a zero, e assim as equações (5.2) e (5.5) ficam reduzidas a:

$$F^* = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} C_9 \ln s^* \quad (5.8)$$

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} C_{11} \ln s \quad (5.9)$$

que substituídas em (3.2) fornecem:

$$N_r = \frac{C_{11}}{r^2} \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \quad (5.10)$$

$$N_r^* = \frac{C_9}{r^2} \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \quad (5.11)$$

A solução de membrana é uma solução particular das equações diferenciais. A solução que considera a rigi -

dez de flexão da casca, é uma solução da equação homogênea, que não envolve carregamentos externos, desde que na solução completa, a carga P seja sustentada inteiramente pelas forças de membrana N_r na solução de membrana [2]. Isto posto, deve-se fazer com que as forças de membrana sejam iguais às relações:

$$N_r \text{ e } N_r^* = - \frac{P}{2\pi r \sin\phi} = - \frac{P R}{2\pi r^2} \quad (5.12)$$

donde saem as constantes C_8 e C_{11} :

$$C_8 = - \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/2} P R}{\pi E h^*{}^2} \quad (5.13)$$

$$C_{11} = - \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/2} P R}{\pi E h^2} \quad (5.14)$$

A determinação das demais sete constantes é feita através da utilização de sete condições de contorno especificadas para os bordos da região I.

Pode-se notar que para $r = r_0$, curva de junção da casca esférica com o bocal rígido, a inclinação do meridiano e a deformação específica na direção circunferencial devem ser iguais a zero, pois esta zona representa um engaste na casca. Desta forma:

$$\left. \frac{dw^*}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (5.15.a)$$

$$\left. \varepsilon_{\theta}^* \right|_{r=r_0} = \frac{N_{\theta}^* - \nu N_r^*}{E h^*} = 0 \quad (5.15.b)$$

Na passagem da região I para a região II, para que haja continuidade de tensões e deslocamentos, algumas condições de continuidade devem ser preenchidas. Deslocamentos radiais, incli

nações do meridiano, momentos fletores meridionais, forças cisalhantes transversais e deformações específicas circunferenciais, para $r = r^*$, devem obedecer às seguintes relações de igualdade:

$$w^* \Big|_{r=r^*} = w \Big|_{r=r^*} \quad (5.15.c)$$

$$\frac{dw^*}{dr} \Big|_{r=r^*} = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=r^*} \quad (5.15.d)$$

$$M_r^* \Big|_{r=r^*} = M_r \Big|_{r=r^*} \quad (5.15.e)$$

$$Q_r^* \Big|_{r=r^*} = Q_r \Big|_{r=r^*} \quad (5.15.f)$$

$$\frac{N_\theta^* - \nu N_r^*}{E h^*} \Big|_{r=r^*} = \frac{N_\theta - \nu N_r}{E h} \Big|_{r=r^*} \quad (5.15.g)$$

Lembrando que $C_5 = 0$ e fazendo para $r = r_0$, $s = u = r_0/\ell^*$, a equação (5.1) com a condição (5.15.a) fornece:

$$C_1 \text{ber}'u + C_2 \text{bei}'u + C_3 \text{ker}'u + C_4 \text{kei}'u = 0 \quad (5.16)$$

Da condição (5.15.b), tem-se:

$$N_\theta^* = \nu N_r^*$$

onde as forças de membrana são conseguidas introduzindo-se (5.2) em (3.1) e (3.2), e com o auxílio de (2.44) a (2.47) vem:

$$\frac{dF^*}{dr} = \frac{1}{\ell^*} \frac{dF^*}{ds^*} = \frac{1}{\ell^*} \frac{E h^{*2}}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_1 \text{bei}'s^* - C_2 \text{ber}'s^* + C_3 \text{kei}'s^* - C_4 \text{ker}'s^* + \frac{C_8}{s^*} \right]$$

$$\frac{d^2 F^*}{dr^2} = \frac{1}{\ell^{*2}} \frac{d}{ds^*} \left(\frac{dF^*}{ds^*} \right) = \frac{1}{\ell^{*2}} \frac{E h^{*2}}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_1 (\text{bers}^* - \frac{\text{bei}'s^*}{s^*}) + C_2 (\text{beis}^* + \frac{\text{ber}'s^*}{s^*}) + C_3 (\text{kers}^* - \frac{\text{kai}'s^*}{s^*}) + C_4 (\text{kais}^* + \frac{\text{ker}'s^*}{s^*}) - \frac{C_8}{s^{*2}} \right],$$

obtendo-se:

$$C_1 (\text{beru} - (1+\nu) \frac{\text{bei}'u}{u}) + C_2 (\text{beiu} + (1+\nu) \frac{\text{ber}'u}{u}) + C_3 (\text{keru} - (1+\nu) \frac{\text{kai}'u}{u}) + C_4 (\text{keiu} + (1+\nu) \frac{\text{ker}'u}{u}) - C_8 \frac{(1+\nu)}{u^2} = 0 \quad (5.17)$$

As condições (5.15.c) e (5.15.d) com (5.1) e (5.4), fazendo-se $m = r^*/\ell^*$ e $n = r^*/\ell$, fornecem diretamente:

$$C_1 \text{ber}m + C_2 \text{beim} + C_3 \text{ker}m + C_4 \text{keim} + C_5 - C_9 \text{ker}n - C_{10} \text{kein} = 0 \quad (5.18)$$

$$C_1 \text{ber}'m + C_2 \text{bei}'m + C_3 \text{ker}'m + C_4 \text{kai}'m - Z^{1/2} [C_9 \text{ker}'n + C_{10} \text{kai}'n] = 0 \quad (5.19)$$

com Z dada por (5.6).

A igualdade imposta pela condição (5.15.e) pode ser feita comparando-se a equação (3.14), tendo C_3 e C_4 trocados por C_9 e C_{10} respectivamente, com a equação apresentada abaixo, que é conseguida pela substituição de (5.1), sendo $C_6 = 0$, em (2.4):

$$M_r^*|_{r=r^*} = \frac{D^*}{\ell^{*2}} \left\{ C_1 \left[beim + (1-\nu) \frac{ber'm}{m} \right] - C_2 \left[berm - (1-\nu) \frac{bei'm}{m} \right] + \right. \\ \left. + C_3 \left[keim + (1-\nu) \frac{ker'm}{m} \right] - C_4 \left[kern - (1-\nu) \frac{kei'm}{m} \right] \right\}$$

que com $D^* = E h^{*2} / [12(1-\nu^2)]^{1/2}$ e ℓ^* dado por (5.3) fornece a expressão:

$$Z^2 \left\{ C_1 \left[beim + (1-\nu) \frac{ber'm}{m} \right] - C_2 \left[berm - (1-\nu) \frac{bei'm}{m} \right] + C_3 \left[keim + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{ker'm}{m} (1-\nu) \right] - C_4 \left[kern - (1-\nu) \frac{kei'm}{m} \right] \right\} - C_9 \left[kein + (1-\nu) \frac{ker'n}{n} \right] + \\ + C_{10} \left[kern - (1-\nu) \frac{kei'n}{n} \right] = 0 \quad (5.20)$$

Com as equações (2.27), (5.1) e (5.4) e levando em consideração as relações (2.44) a (2.47), obtém-se:

$$Q_r = \frac{D}{\ell^3} \left[-C_9 kei's + C_{10} ker's \right]$$

$$Q_r^* = \frac{D^*}{\ell^{*3}} \left[-C_1 bei's^* + C_2 ber's^* - C_3 kei's^* + C_4 ker's^* \right]$$

que substituídas na condição (5.15.f) fornecem:

$$Z^{3/2} \left[-C_1 bei'm + C_2 ber'm - C_3 kei'm + C_4 ker'm \right] + C_9 kei'n - \\ - C_{10} ker'n = 0 \quad (5.21)$$

Trocando-se C_3 , C_4 e C_{12} por C_9 , C_{10} e C_{11} , as equações (3.16) e (3.17) representam as forças de membrana para a região II. Para a região I, estas expressões são obtidas pela subs-

tituição de (5.2) em (3.1) e (3.2), e são: \Rightarrow

$$N_r^* = \frac{1}{s^* \rho^{*2}} \frac{E h^{*2}}{[12(1-\nu^{*2})]^{1/2}} \left[C_1 \text{bei}'s^* - C_2 \text{ber}'s^* + C_3 \text{kei}'s^* - \right. \\ \left. - C_4 \text{ker}'s^* + \frac{C_8}{s^*} \right]$$

$$N_g^* = \frac{1}{\rho^{*2}} \frac{E h^{*2}}{[12(1-\nu^{*2})]^{1/2}} \left[C_1 \left(\text{bers}^* - \frac{\text{bei}'s^*}{s^*} \right) + \right. \\ \left. + C_2 \left(\text{beis}^* + \frac{\text{ber}'s^*}{s^*} \right) + C_3 \left(\text{kers}^* - \frac{\text{kei}'s^*}{s^*} \right) + C_4 \left(\text{keis}^* + \frac{\text{ker}'s^*}{s^*} \right) - \right. \\ \left. - \frac{C_8}{s^{*2}} \right]$$

Substituindo-se estas equações na condição (5.15.g), vem:

$$C_1 \left[\text{ber}_m - (1+\nu) \frac{\text{bei}'_m}{m} \right] + C_2 \left[\text{bei}_m + (1+\nu) \frac{\text{ber}'_m}{m} \right] + C_3 \left[\text{ker}_m - \right. \\ \left. - (1+\nu) \frac{\text{kei}'_m}{m} \right] + C_4 \left[\text{kei}_m + (1+\nu) \frac{\text{ker}'_m}{m} \right] - C_8 \frac{(1+\nu)}{m^2} - C_9 \left[\text{ker}_n - \right. \\ \left. - (1+\nu) \frac{\text{kei}'_n}{n} \right] - C_{10} \left[\text{kei}_n + (1+\nu) \frac{\text{ker}'_n}{n} \right] + C_{11} \frac{(1+\nu)}{n^2} = 0 \quad (5.22)$$

As equações (5.15) a (5.22) formam um sistema de sete equações a sete incógnitas, cuja solução determina as constantes C_1 a C_5 , C_9 e C_{10} , sendo que C_8 e C_{11} são dadas por (6.13) e (5.14), respectivamente.

O sistema linear a ser resolvido é: $A X = Y$, onde a matriz A é:

$$A = \begin{array}{ccccccc}
\text{ber}'u & \text{bei}'u & \text{ker}'u & \text{kei}'u & 0 & 0 & 0 \\
\text{beru}-\text{bei}'u \frac{1+v}{u} & \text{beiu}+\text{ber}'u \frac{1+v}{u} & \text{keru}-\text{kei}'u \frac{1+v}{u} & \text{keiu}+\text{ker}'u \frac{1+v}{u} & 0 & 0 & 0 \\
\text{ber}m & \text{beim} & \text{ker}m & \text{keim} & 1 & -\text{kern} & -\text{kein} \\
\text{ber}'m & \text{bei}'m & \text{ker}'m & \text{kei}'m & 0 & -Z^{1/2}\text{ker}'n & -Z^{1/2}\text{kei}'n \\
Z^2(\text{beim}+ & -Z^2(\text{ber}m- & Z^2(\text{keim}+ & -Z^2(\text{ker}m- & & -(\text{kein}+ & \text{kern}- \\
\text{+ber}'m \frac{1-v}{m}) & \text{-bei}'m \frac{1-v}{m}) & \text{+ker}'m \frac{1-v}{m}) & \text{-kei}'m \frac{1-v}{m}) & 0 & \text{+ker}'n \frac{1-v}{n} & \text{-kei}'n \frac{1-v}{n} \\
-Z^{1/2}\text{bei}'m & Z^{1/2}\text{ber}'m & -Z^{1/2}\text{kei}'m & Z^{1/2}\text{ker}'m & 0 & \text{kei}'n & -\text{ker}'n \\
\text{ber}m-\text{bei}'m \frac{1+v}{m} & \text{beim}+\text{ber}'m \frac{1+v}{m} & \text{ker}m-\text{kei}'m \frac{1+v}{m} & \text{keim}+\text{ker}'m \frac{1+v}{m} & 0 & -\text{kern}+\text{kei}'n \frac{1+v}{n} & -\text{kein}-\text{ker}'n \frac{1+v}{n}
\end{array}$$

o vetor solução X é:

$$X = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_9 & C_{10} \end{bmatrix}^t$$

e o vetor constante Y é:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{1+\nu}{u^2} C_8 \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1+\nu}{m^2} C_8 - \frac{1+\nu}{n^2} C_{11} \right) \end{bmatrix}^t$$

Invertendo-se a matriz A e multiplicando a sua inversa pelo vetor constantes, obtém-se o vetor solução:

$$X = A^{-1} Y$$

Os deslocamentos radiais na casca esférica para as regiões I e II são dados, respectivamente, pelas equações (5.1), com $C_6 = 0$, e (5.4).

Para a região I (região de reforço) os momentos meridional (M_r^*) e circunferencial (M_θ^*) seguem das expressões:

$$M_r^* = D^* \left[\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw^*}{dr} \right]$$

$$M_\theta^* = D^* \left[\frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} + \nu \frac{d^2 w^*}{dr^2} \right],$$

e tendo as seguintes derivadas de w^* (equação (5.1)):

$$\frac{dw^*}{dr} = \frac{1}{\ell^*} \frac{dw^*}{ds^*} = \frac{1}{\ell^*} \left[C_1 \text{ber}'s^* + C_2 \text{bei}'s^* + C_3 \text{ker}'s^* + C_4 \text{kei}'s^* \right]$$

$$\frac{d^2 w^*}{dr^2} = \frac{1}{\ell^{*2}} \frac{d^2 w^*}{ds^{*2}} = \frac{1}{\ell^{*2}} \left[C_1 \left(-\text{beis}^* - \frac{\text{ber}'s^*}{s^*} \right) + \right. \\ \left. + C_2 \left(\text{bers}^* - \frac{\text{bei}'s^*}{s^*} \right) - C_3 \left(\text{keis}^* + \frac{\text{ker}'s^*}{s^*} \right) + C_4 \left(\text{kers}^* + \frac{\text{kei}'s^*}{s^*} \right) \right]$$

obtêm-se as seguintes equações finais:

$$M_r^* = - \frac{E h^{*2}}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_1 \left[\text{beis}^* + \frac{(1-\nu)}{s^*} \text{ber}'s^* \right] - \right. \\ - C_2 \left[\text{bers}^* - \frac{(1-\nu)}{s^*} \text{bei}'s^* \right] + C_3 \left[\text{keis}^* + \frac{(1-\nu)}{s^*} \text{ker}'s^* \right] - \\ \left. - C_4 \left[\text{kers}^* - \frac{(1-\nu)}{s^*} \text{kei}'s^* \right] \right\} \quad (5.23)$$

$$M_\theta^* = - \frac{E h^{*2}}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_1 \left[\text{beis}^* - \frac{(1-\nu)}{s^*} \text{ber}'s^* \right] - \right. \\ - C_2 \left[\text{bers}^* + \frac{(1-\nu)}{s^*} \text{bei}'s^* \right] + C_3 \left[\text{keis}^* - \frac{(1-\nu)}{s^*} \text{ker}'s^* \right] - \\ \left. - C_4 \left[\text{kers}^* + \frac{(1-\nu)}{s^*} \text{kei}'s^* \right] \right\} \quad (5.24)$$

As forças de membrana seguem das equações:

$$N_r^* = \frac{1}{r} \frac{dF^*}{dr}$$

$$N_\theta^* = \frac{d^2 F^*}{dr^2}$$

que com a introdução da equação (5.2) fornecem as expressões finais:

$$N_I^* = \frac{E h^*}{R s^*} \left[C_1 \text{bei}'s^* - C_2 \text{ber}'s^* + C_3 \text{kei}'s^* - C_4 \text{ker}'s^* + \frac{C_8}{s^*} \right] \quad (5.25)$$

$$N_{\theta}^* = \frac{E h^*}{R} \left[C_1 \left(\text{bers}^* - \frac{\text{bei}'s^*}{s^*} \right) + C_2 \left(\text{beis}^* + \frac{\text{ber}'s^*}{s^*} \right) + C_3 \left(\text{kers}^* - \frac{\text{kei}'s^*}{s^*} \right) + C_4 \left(\text{keis}^* + \frac{\text{ker}'s^*}{s^*} \right) - \frac{C_8}{s^*} \right] \quad (5.26)$$

Para a região II ($r > r^*$) as expressões para a determinação dos momentos resultantes e das forças de membrana são as mesmas apresentadas no capítulo III, equações (3.14) a (3.17), desde que C_3 , C_4 e C_{12} sejam trocadas por C_9 , C_{10} e C_{11} , respectivamente

6. ANEL DE REFORÇO NUMA CASCA ESFÉRICA COM UM MOMENTO EXTERNO M APLICADO NUM BOCAL RÍGIDO CILÍNDRICO RADIAL

6.1 Introdução

Neste capítulo é realizada a solução analítica de uma casca esférica fina, considerando um anel de reforço, de espessura constantes, próximo à região onde existe um bocal radial rígido, conforme a fig.6.1.

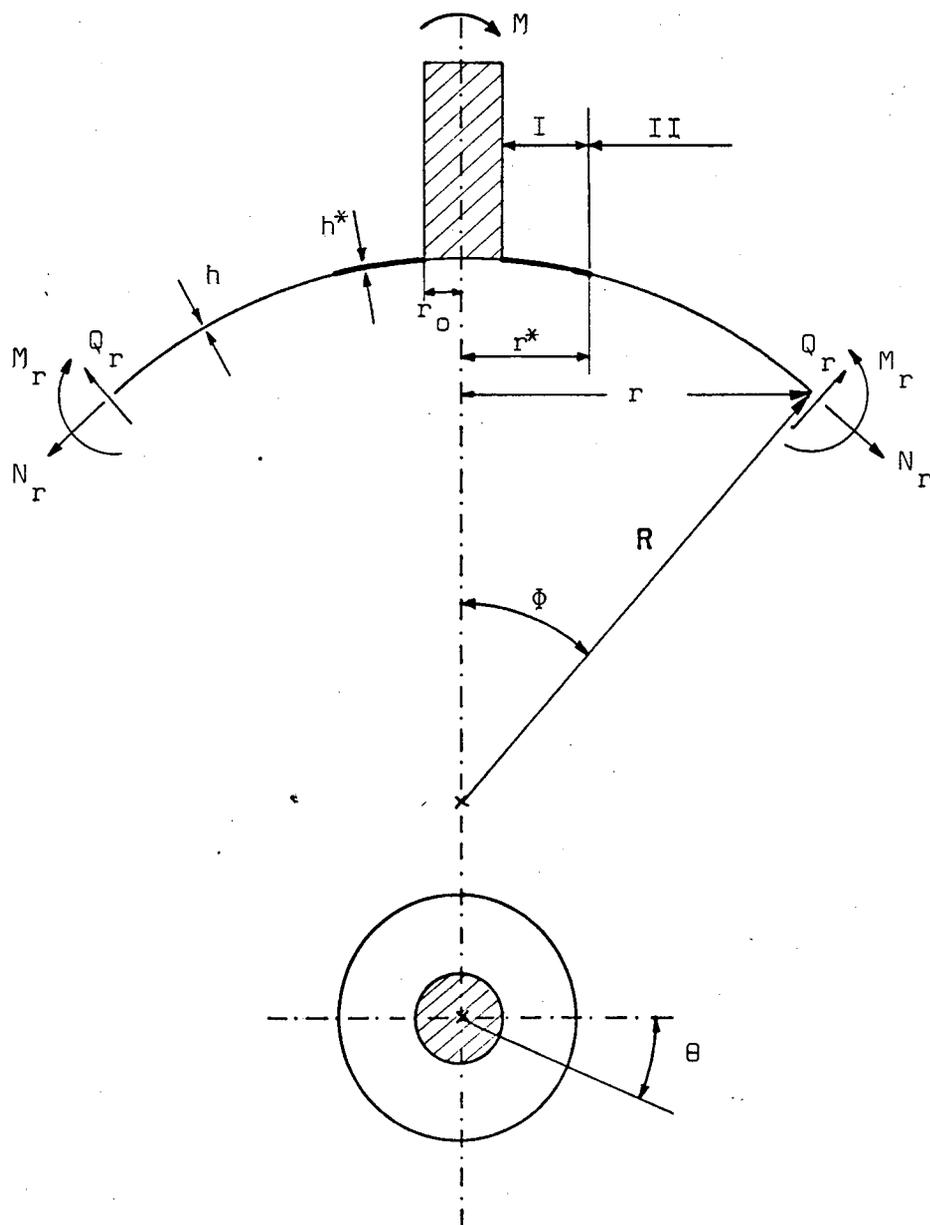


Fig.6.1

Um momento externo M é aplicado no bocal rígido e desta forma o problema é atacado como um caso sem simetria axial de carregamento. Não existindo carregamento na superfície da casca esférica, as equações diferenciais que regem o problema são homogêneas e os efeitos do momento externo são considerados na solução através das condições de contorno.

As soluções gerais para a região de reforço-região I, neste caso, são dadas pelas equações (2.53) e (2.54) com $s = s^* = r/\rho^*$. O deslocamento radial é dado por:

$$w^* = \left[C_1 \text{ber}'s^* + C_2 \text{bei}'s^* + C_3 \text{ker}'s^* + C_4 \text{kei}'s^* + C_5 s^* + \frac{C_6}{s^*} \right] \cos\theta \quad (6.1)$$

e a função tensão F^* é encontrada substituindo-se (2.54) e (6.1) em (2.21) com a finalidade de serem relacionadas as constantes das equações (2.54) e (6.1), o que resulta em:

$$F^* = \frac{E h^{*2}}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_1 \text{bei}'s^* - C_2 \text{ber}'s^* + C_3 \text{kei}'s^* - C_4 \text{ker}'s^* + C_7 s^* + \frac{C_8}{s^*} \right] \cos\theta \quad (6.2)$$

onde θ é medido na direção circunferencial.

Para a região II, as funções deslocamento radial e tensão vêm das equações (4.1) e (4.2), desde que C_3 , C_4 e C_{12} sejam trocados por C_9 , C_{10} e C_{11} , respectivamente, ficando

$$w = (C_9 \text{ker}'s + C_{10} \text{kei}'s) \cos\theta \quad (6.3)$$

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_9 \text{kei}'s - C_{10} \text{ker}'s + \frac{C_{11}}{s} \right] \cos\theta \quad (6.4)$$

6.2 Determinação das constantes

No caso axissimétrico apresentado anteriormente ocorria um deslocamento nos extremos da região de reforço, que foi considerado fazendo-se $C_5 \neq 0$. No presente caso também ocorrem deslocamentos no contorno da região de reforço, adotando-se da mesma forma $C_5 \neq 0$.

Para a determinação das constantes C_1 a C_{11} devem ser selecionadas condições de contorno ou continuidade que representem matematicamente o problema.

De forma análoga à que foi feita no caso axissimétrico apresentado no capítulo anterior, considerando a solução de membrana, C_8 e C_{11} seguem diretamente da condição de que a carga externa é totalmente sustentada pelas forças de membrana N_r . Nesta situação, M_r e M_θ devem ser nulos e para que isto ocorra, C_1 a C_4 , C_9 e C_{10} devem ser iguais a zero e (6.2) reduz-se a:

$$F^* = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_7 s^* + \frac{C_8}{s^*} \right] \text{cose} \quad (6.5)$$

As forças de membrana N_θ^* e N_r^* são dadas pelas equações (2.17) e (2.18), donde pode-se concluir, junto com (6.5), que a constante arbitrária C_7 pode ser igualada a zero. Assim, N_r^* é dada por:

$$N_r^* = \frac{1}{s^* \ell^{*2}} \frac{E h^2 \text{cose}}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[-2 \frac{C_8}{s^{*2}} \right]$$

que igualada a (4.4) fornece:

$$C_8 = \frac{M R [3(1-\nu^2)]^{1/2}}{\pi E h^2 \ell^*} \quad (6.6)$$

Da mesma forma como foi feito acima, com $C_9 = C_{10} = 0$ na equação (6.4), N_r vem de (2.18), sendo

$$N_r = \frac{-E h^2 \cos \theta \, 2 C_{11}}{s^3 \ell^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}}$$

que igualada a (4.4) fornece:

$$C_{11} = \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/2} M R}{\pi E h^2 \ell} \quad (6.7)$$

Com estas considerações ficam especificadas as constantes C_8 e C_{11} . Para a determinação das demais sete constantes, C_1 a C_5 , C_9 e C_{10} , considerando agora a rigidez à flexão, sete condições de contorno ou continuidade devem ser estabelecidas.

Para $r = r_0$ a inclinação do meridiano e a deformação específica circunferencial devem ser dadas por:

$$\left. \frac{\partial w^*}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{w^*}{r} \right|_{r=r_0} \quad (6.8.a)$$

$$\epsilon_{\theta}^* \Big|_{r=r_0} = \frac{N_{\theta}^* - \nu N_r^*}{E h^*} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (6.8.b)$$

Cinco condições de continuidade podem ser estabelecidas na passagem da região I para a II, pois os deslocamentos radiais, inclinações do meridiano, momentos meridionais, forças de membrana meridionais e deformações específicas circunferenciais devem ser iguais para $r = r^*$, e são assim expressas:

$$w^* \Big|_{r=r^*} = w \Big|_{r=r^*} \quad (6.8.c)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial r} \Big|_{r=r^*} = \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=r^*} \quad (6.8.d)$$

$$M_r^* \Big|_{r=r^*} = M_r \Big|_{r=r^*} \quad (6.8.e)$$

$$N_r^* \Big|_{r=r^*} = N_r \Big|_{r=r^*} \quad (6.8.f)$$

$$\frac{N_\theta^* - \nu N_r^*}{E h^*} \Big|_{r=r^*} = \frac{N_\theta - \nu N_r}{E h} \Big|_{r=r^*} \quad (6.8.g)$$

Com $C_5 = 0$ na equação (6.1), a condição (6.8.a) fornece, com o auxílio de (2.44) a (2.47) e desde que seja feito $s^* = u = r_0/\ell^*$ para $r = r_0$,

$$C_1 [u \operatorname{ber}'u + 2 \operatorname{ber}'u] - C_2 [u \operatorname{ber}u - 2 \operatorname{ber}'u] + C_3 [u \operatorname{kei}u + 2 \operatorname{ker}'u] - C_4 [u \operatorname{ker}u - 2 \operatorname{kei}'u] = 0 \quad (6.9)$$

Da condição (6.8.b) tira-se que $N_\theta^* = \nu N_r^*$, onde N_θ^* e N_r^* são conseguidas de (2.17) e (2.18), desde que F seja trocado por F^* . Realizando-se as derivadas indicadas em (2.17) e (2.18) com F^* dado por (6.2), vem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & C_1 \left[\operatorname{ber}'u - (1+\nu) \frac{\operatorname{ber}u}{u} + 2(1+\nu) \frac{\operatorname{ber}'u}{u^2} \right] + C_2 \left[\operatorname{ber}'u - (1+\nu) \frac{\operatorname{ber}u}{u} - \right. \\ & \left. - 2(1+\nu) \frac{\operatorname{ber}'u}{u^2} \right] + C_3 \left[\operatorname{ker}'u - (1+\nu) \frac{\operatorname{ker}u}{u} + 2(1+\nu) \frac{\operatorname{kei}'u}{u^2} \right] + \\ & + C_4 \left[\operatorname{kei}'u - (1+\nu) \frac{\operatorname{kei}u}{u} - 2(1+\nu) \frac{\operatorname{ker}'u}{u^2} \right] = - 2(1+\nu) \frac{C_5}{u^3} \quad (6.10) \end{aligned}$$

Igualando-se (6.1) e (6.3) para $r = r^*$ (condição (6.8.c)), com $s^* = m$ e $s = n$ nesta região, vem:

$$C_1 \text{ber}'m + C_2 \text{bei}'m + C_3 \text{ker}'m + C_4 \text{kei}'m + C_5 m - C_9 \text{ker}'n - C_{10} \text{kei}'n = 0 \quad (6.11)$$

A condição (6.8.d), com w^* e w dados por (6.1) e (5.3), $z^{1/2} = \ell^*/\ell$ e com o auxílio das equações (2.44) a (2.47), fornece a expressão:

$$C_1 \left[-\text{beim} - \frac{\text{ber}'m}{m} \right] + C_2 \left[\text{ber}m - \frac{\text{bei}'m}{m} \right] + C_3 \left[-\text{keim} - \frac{\text{ker}'m}{m} \right] + C_4 \left[\text{kerm} - \frac{\text{kei}'m}{m} \right] + C_5 + z^{1/2} \left\{ C_9 \left[\text{kein} + \frac{\text{ker}'n}{n} \right] - C_{10} \left[\text{kern} - \frac{\text{kei}'n}{n} \right] \right\} = 0 \quad (6.12)$$

Pela substituição de (6.1) e (6.3) em (2.23) obtém-se M_r^* e M_r , respectivamente, e com o auxílio de (2.44) a (2.47), vem:

$$M_r^* \Big|_{r=r^*} = \frac{D^* \cos \epsilon}{\ell^{*2}} \left\{ C_1 \left[-\text{bei}'m + (1-\nu) \frac{\text{beim}}{m} + 2(1-\nu) \frac{\text{ber}'m}{m^2} \right] + C_2 \left[\text{ber}'m - (1-\nu) \frac{\text{ber}m}{m} + 2(1-\nu) \frac{\text{bei}'m}{m^2} \right] + C_3 \left[-\text{kei}'m + (1-\nu) \frac{\text{keim}}{m} + 2(1-\nu) \frac{\text{ker}'m}{m^2} \right] + C_4 \left[\text{ker}'m - (1-\nu) \frac{\text{kerm}}{m} + 2(1-\nu) \frac{\text{kei}'m}{m^2} \right] \right\}$$

$$M_r \Big|_{r=r^*} = \frac{E h^2 \cos \theta}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} C_9 \left[(1-\nu) \frac{\text{kein}}{n} + 2(1-\nu) \frac{\text{ker}'n}{n^2} - \right. \\ \left. - \text{kei}'n \right] + C_{10} \left[-(1-\nu) \frac{\text{kern}}{n} + 2(1-\nu) \frac{\text{kei}'n}{n^2} + \text{ker}'n \right]$$

que igualados (condição (5.8.e)), dão:

$$z^2 \left\{ C_1 \left[-\text{bei}'m + (1-\nu) \frac{\text{beim}}{m} + 2(1-\nu) \frac{\text{ber}'m}{m^2} \right] + C_2 \left[\text{ber}'m - (1-\nu) \frac{\text{berm}}{m} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) \frac{\text{bei}'m}{m^2} \right] + C_3 \left[-\text{kei}'m + (1-\nu) \frac{\text{keim}}{m} + 2(1-\nu) \frac{\text{ker}'m}{m^2} \right] + C_4 \left[\text{ker}'m - \right. \right. \\ \left. \left. - (1-\nu) \frac{\text{kerm}}{m} + 2(1-\nu) \frac{\text{kei}'m}{m^2} \right] \right\} - C_9 \left[(1-\nu) \frac{\text{kein}}{n} + 2(1-\nu) \frac{\text{ker}'n}{n^2} - \text{kei}'n \right] + \\ + C_{10} \left[(1-\nu) \frac{\text{kern}}{n} - 2(1-\nu) \frac{\text{kei}'n}{n^2} - \text{ker}'n \right] = 0 \quad (6.13)$$

Da condição (6.8.f) com N_r^* e N_r dadas por (2.18), adotando (6.2) e (6.4) e levando em consideração (2.44) a (2.47), chega-se, depois de agrupar os termos em C_1 a C_4 , C_9 e C_{10} , a:

$$z^{3/2} \left\{ C_1 \left[\text{berm} - 2 \frac{\text{bei}'m}{m} \right] + C_2 \left[\text{beim} + 2 \frac{\text{ber}'m}{m} \right] + C_3 \left[\text{kerm} - 2 \frac{\text{kei}'m}{m} \right] + \right. \\ \left. + C_4 \left[\text{keim} + 2 \frac{\text{ker}'m}{m} \right] \right\} - C_9 \left[\text{kern} - 2 \frac{\text{kei}'n}{n} \right] - C_{10} \left[\text{kein} + 2 \frac{\text{ker}'n}{n} \right] = 0 \quad (6.14)$$

Pela substituição de N_{θ}^* , N_{θ} , N_r^* e N_r determinados pelas equações (2.17), (2.18), (6.2) e (6.4) na condição (6.8.g), após alguns rearranjos consegue-se

$$\begin{aligned}
 & C_1 \left[(1+\nu) \frac{\text{ber}'_m}{m} - \text{ber}'_m - 2(1+\nu) \frac{\text{bei}'_m}{m^2} \right] + C_2 \left[(1+\nu) \frac{\text{beim}}{m} - \text{bei}'_m + \right. \\
 & \left. + 2(1+\nu) \frac{\text{ber}'_m}{m^2} \right] + C_3 \left[(1+\nu) \frac{\text{kern}}{m} - \text{ker}'_m - 2(1+\nu) \frac{\text{kei}'_m}{m^2} \right] + \\
 & + C_4 \left[(1+\nu) \frac{\text{keim}}{m} - \text{kei}'_m + 2(1+\nu) \frac{\text{ker}'_m}{m^2} \right] - C_9 \left[(1+\nu) \frac{\text{kern}}{n} - \text{ker}'_n - \right. \\
 & \left. - 2(1+\nu) \frac{\text{kei}'_n}{n^2} \right] - C_{10} \left[(1+\nu) \frac{\text{kein}}{n} - \text{kei}'_n + 2(1+\nu) \frac{\text{ker}'_n}{n^2} \right] = \\
 & = - \frac{(1+\nu) [12(1-\nu^2)]^{1/2} R M}{\pi n^3 E h^2 \ell} (1-Z^{-1}) \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

Com as equações (6.9) a (6.15) forma-se um sistema linear de sete equações a sete incógnitas, para a determinação das sete constantes C_1 a C_5 , C_9 e C_{10} .

O sistema $AX = Y$ é resolvido invertendo-se a matriz A e multiplicando-se a inversa pelo vetor constante, o que é feito em subrotinas apropriadas do programa computacional PACE apresentado no Apêndice B.

O vetor solução é

$$X = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_9 \ C_{10}]^t,$$

a matriz A

$$A = \begin{bmatrix}
2\text{ber}'u + u\text{beiu} & 2\text{bei}'u - u\text{beru} & 2\text{ker}'u + u\text{keiu} & 2\text{kei}'u - u\text{keru} & 0 & 0 & 0 \\
\left[\text{ber}'u - \frac{\text{beru}}{u} \frac{1+v}{2} + 2\text{bei}'u \frac{1+v}{u^2} \right] & \left[\text{bei}'u - \frac{\text{beiu}}{u} \frac{1+v}{2} - 2\text{ber}'u \frac{1+v}{u^2} \right] & \left[\text{ker}'u - \frac{\text{keru}}{u} \frac{1+v}{2} + 2\text{kei}'u \frac{1+v}{u^2} \right] & \left[\text{kei}'u - \frac{\text{keiu}}{u} \frac{1+v}{2} - 2\text{ker}'u \frac{1+v}{u^2} \right] & 0 & 0 & 0 \\
\text{ber}'m & \text{bei}'m & \text{ker}'m & \text{kei}'m & m & -\text{ker}'n & -\text{kei}'n \\
-\text{beim} - \frac{\text{ber}'m}{m} & \text{berm} - \frac{\text{bei}'m}{m} & -\text{keim} - \frac{\text{ker}'m}{m} & \text{kerm} - \frac{\text{kei}'m}{m} & 1 & z^{1/2} \left(\text{kein} + \frac{\text{ker}'n}{n} \right) & z^{1/2} \left(-\text{kern} + \frac{\text{kei}'n}{n} \right) \\
z^2 \left[\text{beim} \frac{1-v}{m} - \text{bei}'m + 2\text{ber}'m \frac{1-v}{m^2} \right] & z^2 \left[-\text{berm} \frac{1-v}{m} + \text{ber}'m + 2\text{bei}'m \frac{1-v}{m^2} \right] & z^2 \left[\text{keim} \frac{1-v}{m} - \text{kei}'m + 2\text{ker}'m \frac{1-v}{m^2} \right] & z^2 \left[-\text{kerm} \frac{1-v}{m} + \text{ker}'m + 2\text{kei}'m \frac{1-v}{m^2} \right] & 0 & \left[-\frac{1-v}{n} \text{kein} - \text{kei}'n + 2\text{ker}'n \frac{1-v}{n^2} \right] & \left[\frac{1-v}{n} \text{kern} - \text{ker}'n - 2\text{kei}'n \frac{1-v}{n^2} \right] \\
z^{1/2} \left(\text{berm} - 2 \frac{\text{bei}'m}{m} \right) & z^{1/2} \left(\text{beim} + 2 \frac{\text{ber}'m}{m} \right) & z^{1/2} \left(\text{kerm} - 2 \frac{\text{ker}'m}{m} \right) & z^{1/2} \left(\text{keim} + 2 \frac{\text{kei}'m}{m} \right) & 0 & -\text{kern} + 2 \frac{\text{kei}'n}{n} & -\text{kein} - 2 \frac{\text{ker}'n}{n} \\
\left[\frac{1+v}{m} \text{berm} - \text{ber}'m - 2 \frac{1+v}{m^2} \text{bei}'m \right] & \left[\frac{1+v}{m} \text{beim} - \text{bei}'m + 2 \frac{1+v}{m^2} \text{ber}'m \right] & \left[\frac{1+v}{m} \text{kerm} - \text{ker}'m - 2 \frac{1+v}{m^2} \text{kei}'m \right] & \left[\frac{1+v}{m} \text{keim} - \text{kei}'m + 2 \frac{1+v}{m^2} \text{ker}'m \right] & 0 & \left[-\frac{1+v}{n} \text{kern} + \text{ker}'n + 2 \frac{1+v}{n^2} \text{kei}'n \right] & \left[-\frac{1+v}{n} \text{kein} + \text{kei}'n - 2 \frac{1+v}{n^2} \text{ker}'n \right]
\end{bmatrix}$$

e o vetor constante

$$Y = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(1+\nu) \frac{R M}{E h^2 \ell} \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{\pi u^3 Z^{5/2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(1+\nu)(1-Z^{-1}) \frac{R M}{E h^2 \ell} \frac{[12(1-\nu^2)]^{1/2}}{\pi n^3} \end{Bmatrix}$$

Para a região II o deslocamento radial será dado por (6.3) e os momentos resultantes e forças de membrana pelas equações (4.11) a (4.14), onde as constantes C_3 , C_4 e C_{12} devem ser trocadas por C_9 , C_{10} e C_{11} , ficando:

$$M_r = \frac{E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_9 \left[(1-\nu) \frac{\text{keis}}{s} + 2(1-\nu) \frac{\text{ker}'s}{s^2} - \text{kei}'s \right] + C_{10} \left[-(1-\nu) \frac{\text{kers}}{s} + 2(1-\nu) \frac{\text{kei}'s}{s^2} + \text{ker}'s \right] \right\} \cos \theta \quad (6.15)$$

$$M_\theta = \frac{E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ -C_9 \left[(1-\nu) \frac{\text{keis}}{s} + 2(1-\nu) \frac{\text{ker}'s}{s^2} + \text{kei}'s \right] + C_{10} \left[(1-\nu) \frac{\text{kers}}{s} - 2(1-\nu) \frac{\text{kei}'s}{s^2} + \text{ker}'s \right] \right\} \cos \theta \quad (6.16)$$

$$N_r = \frac{E h}{R s} \left\{ C_9 \left[kers - 2 \frac{kei's}{s} \right] + C_{10} \left[keis + 2 \frac{ker's}{s} \right] - \right. \\ \left. - 2 \frac{C_{11}}{s^2} \right\} \cos \vartheta \quad (6.17)$$

$$N_\theta = \frac{E h}{R} \left\{ C_9 \left[ker's - \frac{kers}{s} + 2 \frac{kei's}{s^2} \right] - \right. \\ \left. - C_{10} \left[\frac{keis}{s} + 2 \frac{ker's}{s^2} - kei's \right] + 2 \frac{C_{11}}{s^3} \right\} \cos \vartheta \quad (6.18)$$

Para a região I o deslocamento radial será dado por (6.1), com $C_6 = 0$. Os momentos resultantes e forças de membrana vem de (2.17), (2.18), (2.23), (2.24), (6.1) e (6.2) junto com (2.44) a (2.47), e são apresentados abaixo:

$$N_\theta^* = \frac{E h^*}{R} \left\{ C_1 \left[ber's^* - \frac{bers^*}{s^*} + 2 \frac{bei's^*}{s^{*2}} \right] - C_2 \left[-bei's^* + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{beis^*}{s^*} + 2 \frac{ber's^*}{s^{*2}} \right] + C_3 \left[ker's^* - \frac{kers^*}{s^*} + 2 \frac{kei's^*}{s^{*2}} \right] - C_4 \left[-kei's^* + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{keis^*}{s^*} + 2 \frac{ker's^*}{s^{*2}} \right] + 2 \frac{C_8}{s^{*3}} \right\} \cos \vartheta \quad (6.19)$$

$$N_r^* = \frac{E h^*}{R s^*} \left\{ C_1 \left[bers^* - 2 \frac{bei's^*}{s^*} \right] + C_2 \left[beis^* + 2 \frac{ber's^*}{s^*} \right] + \right. \\ \left. + C_3 \left[kers^* - 2 \frac{kei's^*}{s^*} \right] + C_4 \left[keis^* + 2 \frac{ker's^*}{s^*} \right] - 2 \frac{C_8}{s^{*2}} \right\} \cos \vartheta \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}
 M_I^* = & \frac{E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_1 \left[-\text{bei}'s^* + (1-\nu) \frac{\text{beis}^*}{s^*} + \right. \right. \\
 & + 2 \frac{\text{ber}'s^*}{s^{*2}} (1-\nu) \left. \right] + C_2 \left[\text{ber}'s^* - (1-\nu) \frac{\text{bers}^*}{s^*} + 2(1-\nu) \frac{\text{bei}'s^*}{s^{*2}} \right] + \\
 & + C_3 \left[-\text{kei}'s^* + (1-\nu) \frac{\text{kais}^*}{s^*} + 2(1-\nu) \frac{\text{ker}'s^*}{s^{*2}} \right] + C_4 \left[\text{ker}'s^* - \right. \\
 & \left. - (1-\nu) \frac{\text{kers}^*}{s^*} + 2(1-\nu) \frac{\text{kai}'s^*}{s^{*2}} \right] \left. \right\} \cos \theta \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{II}^* = & \frac{E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_1 \left[-(1-\nu) \frac{\text{beis}^*}{s^*} - 2(1-\nu) \frac{\text{ber}'s^*}{s^{*2}} - \right. \right. \\
 & - \nu \text{bei}'s^* \left. \right] + C_2 \left[(1-\nu) \frac{\text{bers}^*}{s^*} - 2(1-\nu) \frac{\text{bei}'s^*}{s^{*2}} + \nu \text{ber}'s^* \right] + \\
 & + C_3 \left[-(1-\nu) \frac{\text{kais}^*}{s^*} - \nu \text{kei}'s^* - 2(1-\nu) \frac{\text{ker}'s^*}{s^{*2}} \right] + C_4 \left[(1-\nu) \frac{\text{kers}^*}{s^*} + \right. \\
 & \left. + \nu \text{ker}'s^* - 2(1-\nu) \frac{\text{kai}'s^*}{s^{*2}} \right] \left. \right\} \cos \theta \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

7 ANÁLISE DE UMA CASCA ESFÉRICA FINA COM UMA FORÇA P APLICADA NUM BOCAL RADIAL CILÍNDRICO

7.1 Introdução

Nos quatro capítulos anteriores foram estudados casos em que o bocal era considerado rígido. No presente capítulo o bocal é considerado como sendo uma casca cilíndrica fina.

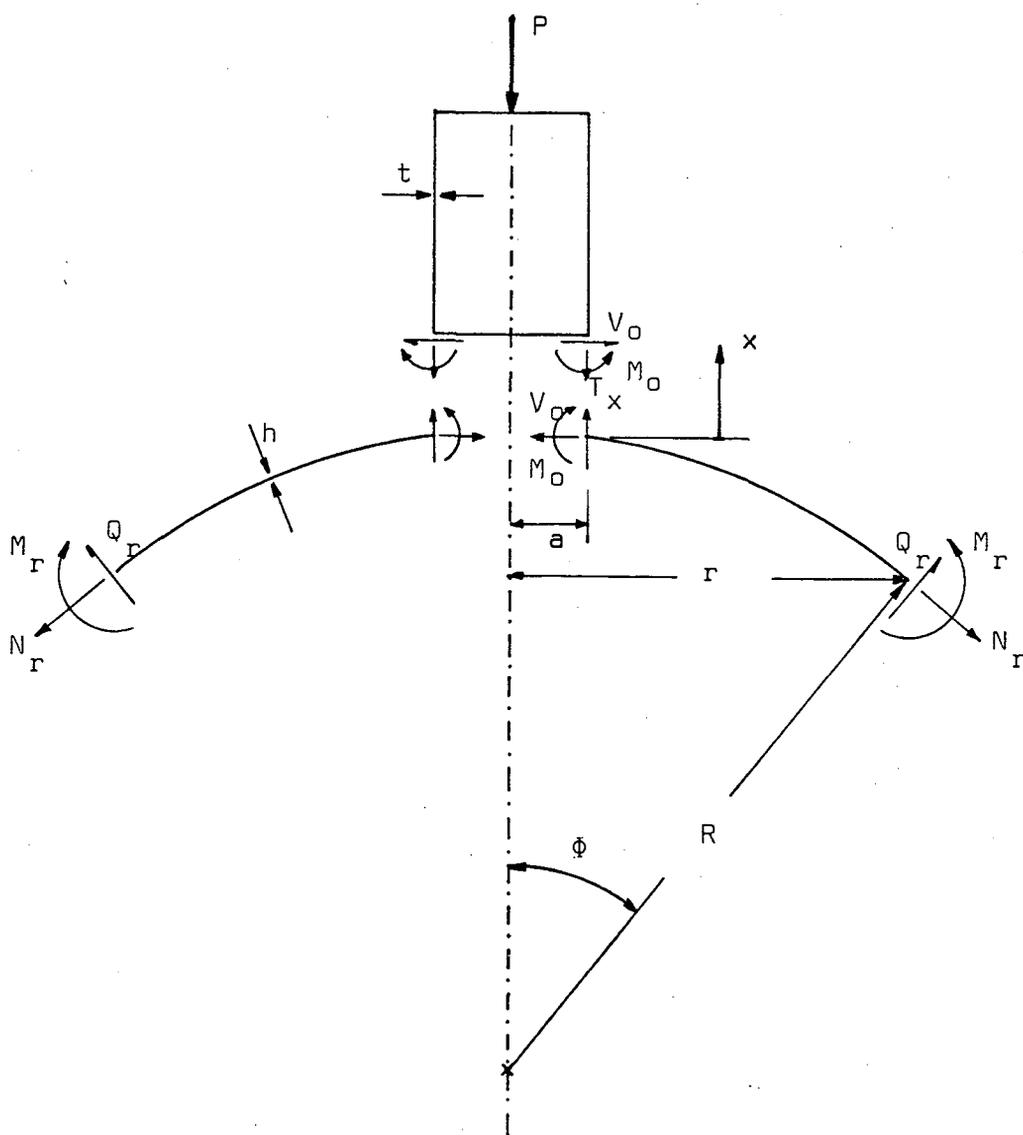


Fig.7.1

O comportamento do presente caso é análogo ao do apresentado no capítulo III sendo que aparecem diferenças nas condições de contorno para a região $r = a$. Desta forma, as equações (3.7), (3.8) e (3.9) são aqui válidas.

$$w = C_3 k e^{rs} + C_4 k e^{is} \quad (7.1)$$

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 k e^{is} - C_4 k e^{rs} + C_{12} \ln s \right] \quad (7.2)$$

$$C_{12} = - \left[3(1-\nu^2) \right]^{1/2} \frac{P R}{\pi E h^2} \quad (7.3)$$

7.2 Determinação das constantes

Com as considerações acima, ficam para serem determinadas as constantes C_3 e C_4 , o que pode ser feito através de condições de contorno impostas para $r = a$ (união das cascas cilíndrica e esférica).

É fácil notar que na curva de união, as inclinações dos meridianos das duas cascas devem ser iguais, da mesma forma como devem ser iguais as deformações específicas circunferenciais, o que é explicitado abaixo:

$$\alpha_s \Big|_{r=a} = \alpha_c \Big|_{x=0} \quad (7.4.a)$$

$$\epsilon_{\theta s} \Big|_{r=a} = \epsilon_{\theta c} \Big|_{x=0} \quad (7.4.b)$$

onde o índice s se refere à esfera e c , ao cilindro.

De (7.1), vem:

$$\alpha_s \Big|_{r=a} = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{1}{\ell} \left[C_3 \ker'u + C_4 \operatorname{kei}'u \right] \quad (7.5)$$

e da referência [6], para uma casca cilíndrica, com v sendo o deslocamento radial de um ponto desta, tem-se:

$$\alpha_c \Big|_{x=0} = - \frac{dv}{dx} = \frac{2\beta M_0 + V_0}{2\beta^2 N} \quad (7.6)$$

onde M_0 é o momento meridional para $x = 0$, V_0 o esforço cortante para a mesma região e N a rigidez de flexão da casca cilíndrica

$$N = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.7)$$

sendo

$$\beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \quad (7.8)$$

A determinação de M_0 e V_0 , que são solicitações da casca cilíndrica, fica facilitada se elas forem escritas em termos de M_r , N_r e Q_r da casca esférica para $r = a$.

Assim tem-se, com M_r dado por (3.14) para $r = a$:

$$M_0 \Big|_{x=0} = M_r \Big|_{r=a} = \frac{-E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_3 \left[\operatorname{kei}u + (1-\nu) \frac{\ker'u}{u} \right] - C_4 \left[\ker u - (1-\nu) \frac{\operatorname{kei}'u}{u} \right] \right\} \quad (7.9)$$

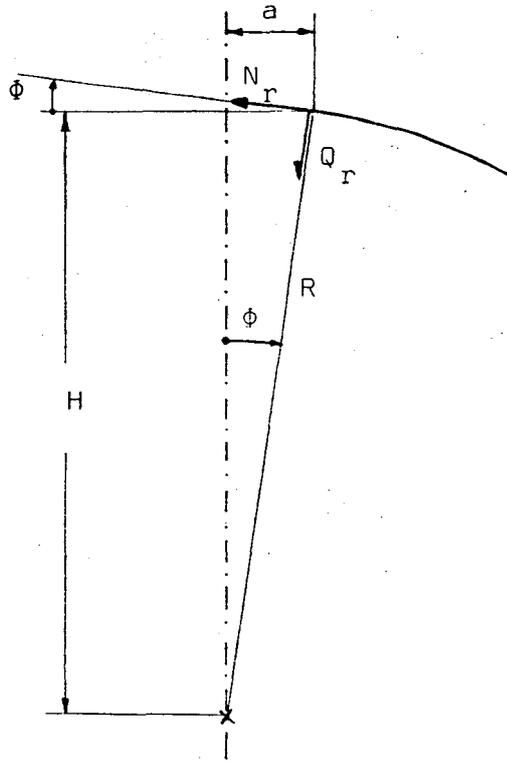


Fig.7.2

Analisando as figs.7.1 e 7.2, para pequenos ângulos ϕ , pode-se escrever:

$$\cos \phi \approx 1 - \frac{a^2}{2 R^2} \qquad \sin \phi = \frac{a}{R}$$

$$V_0 = \left[N_r \cos \phi + Q_r \sin \phi \right]_{r=a}$$

então:

$$V_0 = N_r \Big|_{r=a} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{2 R^2} \right] + Q_r \Big|_{r=a} \cdot \frac{a}{R} \qquad (7.10)$$

Na derivação da equação diferencial para cascas finas, a força cisalhante Q_r é negligenciada, porém ela será considerada na equação (7.10) para que resultados mais precisos sejam obtidos.

Da equação (2.27), com w sendo dado por (7.1), tem-se:

$$Q_r \Big|_{r=a} = \frac{D}{\ell^3} \left[C_3 \text{kei}'u - C_4 \text{ker}'u \right] \quad (7.11)$$

e de (3.2), com F dada por (7.2), tem-se:

$$N_r \Big|_{r=a} = \frac{E h}{R u} \left[C_3 \text{kei}'u - C_4 \text{ker}'u + \frac{C_{12}}{u} \right] \quad (7.12)$$

Introduzindo-se agora (7.11) e (7.12) em (7.10) e a expressão resultante com (7.9) em (7.6), vem da condição (7.4.a) junto com (7.5):

$$\begin{aligned} \frac{2 \beta^2 N}{\ell} \left[C_3 \text{ker}'u + C_4 \text{kei}'u \right] &= \frac{-2 \beta E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_3 \left[\text{keiu} + \right. \right. \\ &+ (1-\nu) \frac{\text{ker}'u}{u} \left. \right] - C_4 \left[\text{ker}u - (1-\nu) \frac{\text{kei}'u}{u} \right] \left. \right\} + \frac{E h}{R u} \left\{ (1+\eta) \left[C_3 \text{kei}'u - \right. \right. \\ &\left. \left. - C_4 \text{ker}'u \right] + (1-\eta) \frac{C_{12}}{u} \right\} \end{aligned} \quad (7.13)$$

onde:

$$\eta = \frac{a^2}{2 R^2} = \frac{\rho^2 u^4}{\gamma^2 [24(1-\nu^2)]} \quad (7.14)$$

e:

$$u = \frac{a}{l}, \quad \gamma = \frac{a}{t}, \quad \rho = \frac{h}{t} \quad (7.15)$$

Da referência [6] para uma casca cilíndrica, tem-se que $\epsilon_a = v/a$. Devido ao tipo de solicitação existem tensões de compressão na direção axial do bocal $\sigma_x = -P/(2\pi a t)$, que causam uma deformação específica circunferencial:

$$\epsilon_D = \frac{\nu P}{E 2\pi a t}$$

Portanto, com:

$$v|_{x=0} = \frac{\beta M_D + V_D}{2\beta^3 N}$$

e da lei de Hooke generalizada, vem:

$$\epsilon_{ec}|_{x=0} = \frac{\beta M_D + V_D}{2\beta^3 N a} + \frac{\nu P}{2\pi a t E} \quad (7.16)$$

No lado da casca esférica, a deformação específica circunferencial ϵ_{es} é dada por:

$$\epsilon_{es}|_{r=a} = \frac{N_\theta - \nu N_r}{E h} \Big|_{r=a}$$

que com N_θ dado por (3.1) e (7.2)

$$N_e \Big|_{r=a} = \frac{E h^2}{\ell^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_3 \left[\text{ker}u - \frac{\text{kei}'u}{u} \right] + C_4 \left[\text{keiu} + \frac{\text{ker}'u}{u} \right] - \frac{C_{12}}{u^2} \right\}$$

e N_r por (3.2) e (7.2)

$$N_r \Big|_{r=a} = \frac{E h^2}{u \ell^2 [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_3 \text{kei}'u - C_4 \text{ker}'u + \frac{C_{12}}{u} \right]$$

fornece

$$\epsilon_{es} \Big|_{r=a} = \frac{1}{R} \left\{ C_3 \left[\text{ker}u - (1+\nu) \frac{\text{kei}'u}{u} \right] + C_4 \left[\text{keiu} + (1+\nu) \frac{\text{ker}'u}{u} \right] - \frac{C_{12}}{u^2} (1+\nu) \right\} \quad (7.17)$$

Fazendo-se (7.17) igual a (7.16) (condição (7.4.b)), com (7.16) sendo dada por (7.7) a (7.12), vem:

$$\begin{aligned} \frac{2 \beta^3 a N}{R} \left\{ C_3 \left[\text{ker}u - \frac{\text{kei}'u}{u} \right] + C_4 \left[\text{keiu} + \frac{\text{ker}'u}{u} \right] - \frac{C_{12}}{u} - \nu \left[C_3 \frac{\text{kei}'u}{u} - C_4 \frac{\text{ker}'u}{u} + \frac{C_{12}}{u^2} \right] \right\} &= \frac{-\beta E h^2}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_3 \left[\text{keiu} + (1-\nu) \frac{\text{ker}'u}{u} \right] - C_4 \left[\text{ker}u - (1-\nu) \frac{\text{kei}'u}{u} \right] \right\} \\ &+ \frac{\nu P N \beta^3}{\pi t E} + \frac{E h}{R a} \left\{ (1+\eta) \left[C_3 \text{kei}'u - C_4 \text{ker}'u \right] + (1-\eta) \frac{C_{12}}{u} \right\} \quad (7.18) \end{aligned}$$

De (7.13), fazendo

$$A_1 = \frac{[12(1-v^2)]^{1/4}}{u} \left[\frac{\gamma}{\rho} \ker'u - \gamma \rho (1+\eta) \operatorname{kei}'u \right] + \rho^2 (2\gamma)^{1/2} \left[\operatorname{kei}u + (1-v) \frac{\ker'u}{u} \right] \quad (7.19)$$

$$A_2 = \frac{[12(1-v^2)]^{1/4}}{u} \left[\frac{\gamma}{\rho} \operatorname{kei}'u + \gamma \rho (1+\eta) \ker'u \right] - \rho^2 (2\gamma)^{1/2} \left[\operatorname{ker}u - (1-v) \frac{\operatorname{kei}'u}{u} \right] \quad (7.20)$$

obtém-se a seguinte relação entre as constantes C_3 e C_4 :

$$C_4 = - \frac{1}{A_2} \left\{ A_1 C_3 + \frac{6(1-v^2)}{\pi [12(1-v^2)]^{1/4}} (1-\eta) \frac{\gamma \rho P R}{u^2 E h^2} \right\} \quad (7.21)$$

A constante C_3 vem da substituição de (7.21) em (7.18)

$$C_3 = \left\{ \frac{A_4}{A_2} \frac{6(1-v^2)(1-\eta)\gamma \rho}{\pi [12(1-v^2)]^{1/4} u^2} - \frac{[12(1-v^2)]^{1/2}}{2 u^2} \left[1+v + \right. \right. \\ \left. \left. + [48(1-v^2)]^{1/4} (1-\eta) \rho \gamma^{1/2} \right] + \frac{\gamma \rho^2}{2\pi \gamma} \right\} \frac{A_2}{A_2 A_3 - A_1 A_4} \frac{P R}{E h^2} \quad (7.22)$$

onde:

$$A_3 = \text{ker}u - (1+\nu)\frac{\text{kei}'u}{u} + \rho^2 \left[\text{keiu} + (1-\nu)\frac{\text{ker}'u}{u} \right] - \frac{[48(1-\nu^2)]^{1/4} \rho \gamma^{1/2}}{u} (1+\eta)\text{kei}'u \quad (7.23)$$

$$A_4 = \text{keiu} + (1+\nu)\frac{\text{ker}'u}{u} - \rho^2 \left[\text{ker}u - (1-\nu)\frac{\text{kei}'u}{u} \right] + \frac{[48(1-\nu^2)]^{1/4} \rho \gamma^{1/2}}{u} (1+\eta)\text{ker}'u \quad (7.24)$$

De acordo com os desenvolvimentos até aqui realizados, o deslocamento radial na casca esférica é fornecido por (7.1), e os momentos resultantes e as forças de membrana por (3.14) a (3.17), com as constantes C_3 , C_4 e C_{12} determinadas através das expressões (7.21), (7.22) e (7.3).

8 ANEL DE REFORÇO NUMA CASCA ESFÉRICA FINA COM UMA FORÇA P APLICADA NUM BOCAL CILÍNDRICO RADIAL

8.1 Introdução

Neste capítulo serão estudados os efeitos de uma carga axial P , aplicada a uma casca cilíndrica fina, unida radialmente a uma casca esférica fina de pequena curvatura.

Como se trata de um caso de carregamento e geometria axissimétricos, a solução geral, para a casca esférica, é dada pelas equações (2.41) e (2.48).

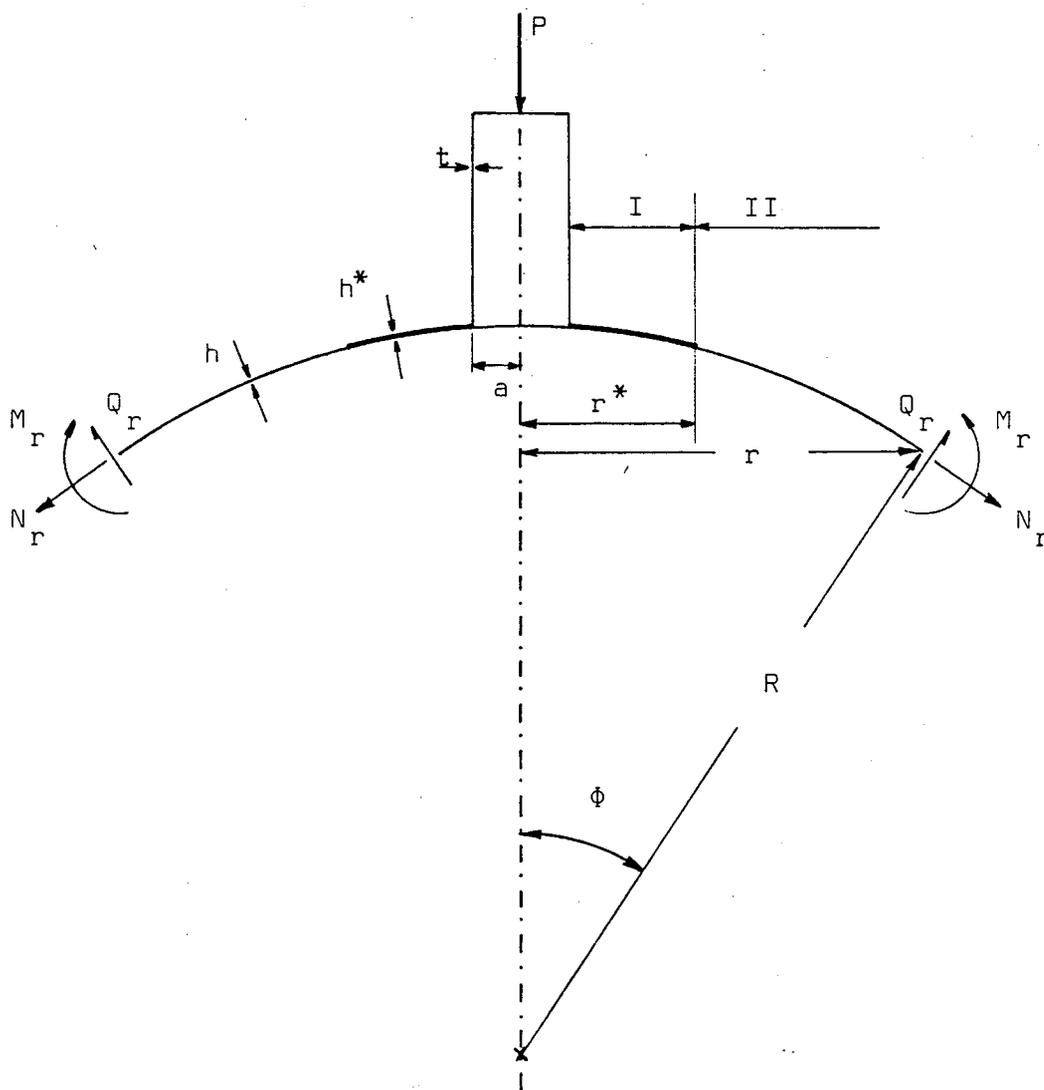


Fig.8.1

A equação (2.41) para a região I (região de reforço na casca esférica), é idêntica à equação (5.1) para o caso analisado no capítulo V, e é reescrita abaixo:

$$w^* = C_1 \text{bers}^* + C_2 \text{beis}^* + C_3 \text{kers}^* + C_4 \text{keis}^* + C_5 + C_6 \ln s^* \quad (8.1)$$

A função tensão F^* é dada por (5.2)

$$F^* = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_1 \text{beis}^* - C_2 \text{bers}^* + C_3 \text{keis}^* - C_4 \text{kers}^* + C_7 + C_8 \ln s^* \right] \quad (8.2)$$

onde $s^* = r/\ell^*$, sendo ℓ^* dado por (5.3).

Já para a região II serão empregadas as expressões (5.4) para w e (5.5) para F , ou seja:

$$w = C_9 \text{kers} + C_{10} \text{keis} \quad (8.3)$$

$$F = \frac{E h^2}{[12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left[C_9 \text{keis} - C_{10} \text{kers} + C_{11} \ln s \right] \quad (8.4)$$

8.2 Determinação das constantes

Como, para o contorno externo da região de reforço, os deslocamentos radiais são diferentes de zero, deve-se adicionar à equação diferencial (2.35) uma constante

$$\nabla^2 F^* = \frac{h E}{R} w^* + C \quad (8.5)$$

Pela substituição de (8.1) e (8.2) em (8.5) conclui-se que C_6 deve ser igual a zero, e pelas equações (3.1) e (3.2) que C_7 pode ser desconsiderada, pois desaparece nas derivações. Fica-se portanto com nove constantes para determinar, C_1 a C_5 e C_8 a C_{11} , devendo-se aplicar nove condições de contorno e/ou continuidade para defini-las.

Como atua somente uma carga externa axial P no bocal, toda ela deve ser sustentada pelas forças de membrana que se desenvolvem na casca esférica. Assim, (8.2) e (8.4) ficam reduzidas a equações idênticas a (5.8) e (5.9), que com as condições aventadas no capítulo , fornecem as constantes:

$$C_3 = - \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/2} P R}{\pi E h^2} \quad (8.6)$$

$$C_{11} = - \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/2} P R}{\pi E h^2} \quad (8.7)$$

Analisando a fig.7.1 pode-se notar que na união das cascas cilíndrica e esférica e na passagem da região I para a região II, algumas condições devem ser preenchidas para haver continuidade de deslocamentos e esforços na estrutura.

Desta forma, para $x = 0$ na casca cilíndrica e $r = a$ na casca esférica, as seguintes condições devem ser obedecidas:

$$\alpha_s \Big|_{r=a} = \alpha_c \Big|_{x=0} \quad (8.8.a)$$

$$\epsilon_{\theta s} \Big|_{r=a} = \epsilon_{\theta c} \Big|_{x=0} \quad (8.8.b)$$

e na transição da região I para II:

$$u^* \Big|_{r=r^*} = u \Big|_{r=r^*} \quad (8.8.c)$$

$$\frac{dw^*}{dr} \Big|_{r=r^*} = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=r^*} \quad (8.8.d)$$

$$M_H^* \Big|_{r=r^*} = M_H \Big|_{r=r^*} \quad (8.8.e)$$

$$Q_H^* \Big|_{r=r^*} = Q_H \Big|_{r=r^*} \quad (8.8.f)$$

$$\frac{N_e^* - \nu N_r^*}{E h^*} \Big|_{r=r^*} = \frac{N_e - \nu N_r}{E h} \Big|_{r=r^*} \quad (8.8.g)$$

Com estas condições de continuidade pode-se formar um sistema linear de sete equações a sete incógnitas e definir as constantes envolvidas.

As duas condições (8.8.a) e (8.8.b) são as mesmas (7.4.a) e (7.4.b) já apresentadas no capítulo anterior, portanto têm desenvolvimentos semelhantes.

Para $r = a$ na esfera, onde $s^* = u = a/\ell^*$, a inclinação do meridiano é dada, com $C_6 = 0$ em (8.1), por:

$$\alpha_s \Big|_{r=a} = \frac{1}{\ell^*} \left[C_1 \text{ber}'u + C_2 \text{bei}'u + C_3 \text{ker}'u + C_4 \text{kei}'u \right] \quad (8.9)$$

Para $x = 8$ no cilindro, (7.6) é válida, com M_0 fornecida por (5.23)

$$M_0 = M_r^* \Big|_{r=a} = \frac{-E h^{*2}}{R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \left\{ C_1 \left[\text{beiu} + \frac{1-\nu}{u} \text{ber}'u \right] - C_2 \left[\text{ber}u - \frac{1-\nu}{u} \text{bei}'u \right] + C_3 \left[\text{keiu} + \frac{1-\nu}{u} \text{ker}'u \right] - C_4 \left[\text{ker}u - \frac{1-\nu}{u} \text{kei}'u \right] \right\} \quad (8.10)$$

e V_0 por (7.10). Na expressão (7.10) aparecem N_R e Q_R . N_R é aqui denominada N_R^* e é dado por (5.25) (com $s^* = u$) e Q_R , aqui denominado Q_R^* , é fornecido por (2.27) e (8.1):

$$Q_R^*|_{r=a} = \frac{-E h^3}{\ell^{*3} 12(1-\nu^2)} \left\{ C_1(-\text{bei}'u) + C_2 \text{ber}'u + C_3(-\text{kei}'u) + C_4 \text{ker}'u \right\} \quad (8.11)$$

Substituindo-se (8.11) e (5.25) em (7.10), e o resultado desta substituição junto com (8.10) em (7.6) e considerando ainda (8.9), a condição (8.8.a) fornece:

$$\begin{aligned} & C_1 \left\{ \frac{\text{ber}'u}{\ell^*} + A_3 \left[\text{bei}u + (1-\nu) \frac{\text{ber}'u}{u} \right] - A_1 A_2 \text{bei}'u \right\} + C_2 \left\{ \frac{\text{bei}'u}{\ell^*} - \right. \\ & - A_3 \left[\text{ber}u - (1-\nu) \frac{\text{bei}'u}{u} \right] + A_1 A_2 \text{ber}'u \left. \right\} + C_3 \left\{ \frac{\text{ker}'u}{\ell^*} + A_3 \left[\text{kei}u + \right. \right. \\ & + (1-\nu) \frac{\text{ker}'u}{u} \left. \right] - A_1 A_2 \text{kei}'u \left. \right\} + C_4 \left\{ \frac{\text{kei}'u}{\ell^*} - A_3 \left[\text{ker}u - (1-\nu) \frac{\text{kei}'u}{u} \right] + \right. \\ & \left. + A_1 A_2 \text{ker}'u \right\} = C_6 \left\{ \frac{E h^* \left[1 - \frac{a^2}{2R^2} \right]}{2 \beta^2 N R u^2} \right\} \quad (8.12) \end{aligned}$$

onde, com η dado por (7.14):

$$A_1 = 1 + \eta \quad (8.13)$$

$$A_2 = \frac{E h^*}{2 \beta^2 N R u} \quad (8.14)$$

$$A_3 = \frac{E h^{*2}}{\beta N R [12(1-\nu^2)]^{1/2}} \quad (8.15)$$

Para a utilização da condição (8.8.b) é válida a equação (7.16), sendo M_0 e V_0 fornecidos, respectivamente, por (8.10) e (7.10), junto com (8.11) e (5.25).

A deformação específica circunferencial para a casca esférica em $r = a$ é:

$$\varepsilon_{\theta\theta}|_{r=a} = \frac{1}{R} \left\{ C_1 \left[\text{ber}u - (1+\nu) \frac{\text{bei}'u}{u} \right] + C_2 \left[\text{beiu} + (1+\nu) \frac{\text{ber}'u}{u} \right] + C_3 \left[\text{ker}u - (1+\nu) \frac{\text{kei}'u}{u} \right] + C_4 \left[\text{keiu} + (1+\nu) \frac{\text{ker}'u}{u} \right] - C_8 \frac{1+\nu}{u^2} \right\} \quad (8.15)$$

Igualando (8.15) e (7.16) (condição (8.8.b)), tem-se:

$$\begin{aligned} & C_1 \left\{ \text{ber}u + \text{bei}'u \left[-\frac{1+\nu}{u} - \frac{A_1 A_2 R}{\beta a} \right] + \frac{A_3 R}{2 a \beta} \left[\text{beiu} + \frac{1-\nu}{u} \text{ber}'u \right] \right\} + \\ & + C_2 \left\{ \text{beiu} + \text{ber}'u \left[\frac{1+\nu}{u} + \frac{A_1 A_2 R}{\beta a} \right] - \frac{A_3 R}{2 a \beta} \left[\text{ber}u - \frac{1-\nu}{u} \text{bei}'u \right] \right\} + \\ & + C_3 \left\{ \text{ker}u - \text{kei}'u \left[\frac{1+\nu}{u} + \frac{A_1 A_2 R}{\beta a} \right] + \frac{A_3 R}{2 a \beta} \left[\text{keiu} + \frac{1-\nu}{u} \text{ker}'u \right] \right\} + \\ & + C_4 \left\{ \text{keiu} + \text{ker}'u \left[\frac{1+\nu}{u} + \frac{A_1 A_2 R}{\beta a} \right] - \frac{A_3 R}{2 a \beta} \left[\text{ker}u - \frac{1-\nu}{u} \text{kei}'u \right] \right\} = \\ & = C_8 \left\{ \frac{1+\nu}{u^2} + \frac{A_2 R}{\beta a u} \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} \right) \right\} + \frac{\nu P R}{2 \pi a h E} \quad (8.17) \end{aligned}$$

As restantes cinco condições (8.8.c) a (8.8.g) são as mesmas analisadas no Capítulo 4., fornecem as mesmas expressões lá conseguidas ((5.18) a (5.22)) e são transcritas abaixo:

$$C_1 \text{berm} + C_2 \text{beim} + C_3 \text{kerm} + C_4 \text{keim} + C_5 - C_9 \text{kern} - C_{10} \text{kein} = 0 \quad (8.18)$$

$$C_1 \text{ber}'m + C_2 \text{bei}'m + C_3 \text{ker}'m + C_4 \text{kei}'m - z^{1/2} \left[C_9 \text{ker}'n + \text{kei}'n \right] = 0 \quad (8.19)$$

$$z^2 \left\{ C_1 \left[\text{keim} + \frac{1-v}{m} \text{ber}'m \right] - C_2 \left[\text{berm} - \frac{1-v}{m} \text{bei}'m \right] + C_3 \left[\text{keim} + \frac{1-v}{m} \text{ker}'m \right] - C_4 \left[\text{kerm} - \frac{1-v}{n} \text{kei}'m \right] \right\} - C_9 \left[\text{kein} + \frac{1-v}{n} \text{ker}'n \right] + C_{10} \left[\text{kern} - \frac{1-v}{n} \text{kei}'n \right] = 0 \quad (8.20)$$

$$z^{3/2} \left[-C_1 \text{bei}'m + C_2 \text{ber}'m - C_3 \text{kei}'m + C_4 \text{ker}'m \right] + C_9 \text{kei}'n - C_{10} \text{ker}'n = 0 \quad (8.21)$$

$$C_1 \left[\text{berm} - \frac{1+v}{m} \text{bei}'m \right] + C_2 \left[\text{beim} + \frac{1+v}{m} \text{ber}'m \right] + C_3 \left[\text{kerm} - \frac{1+v}{m} \text{kei}'m \right] + C_4 \left[\text{keim} + \frac{1+v}{m} \text{ker}'m \right] - C_9 \left[\text{kern} - \frac{1+v}{n} \text{kei}'n \right] - C_{10} \left[\text{kein} + \frac{1+v}{n} \text{ker}'n \right] = \left[C_9 \frac{1}{m^2} - C_{11} \frac{1}{n^2} \right] (1+v) \quad (8.22)$$

lembrando que

$$m = \frac{r^*}{l^*}$$

$$n = \frac{r^*}{l}$$

$$Z = \frac{h^*}{h}$$

Com as constantes C_8 e C_{11} já definidas por (8.6) e (8.7), as equações (8.12) e (8.17) a (8.22) formam um sistema linear de sete equações a sete incógnitas cuja solução define as constantes C_1 a C_5 , C_9 e C_{10} .

Sintetizando o sistema linear como

$$R X = Y$$

onde o vetor solução é dado por

$$X = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_9 & C_{10} \end{bmatrix}^t$$

o vetor constante Y por

$$Y = \begin{pmatrix} C_8 \left[\frac{E h^*}{2 \beta^2 N R u} \left(1 - \frac{a^2}{2 R^2} \right) \right] \\ C_8 \left\{ \frac{1+\nu}{u^2} + \frac{A_2 R}{a \beta u^2} \left[1 - \frac{a^2}{2 R^2} \right] \right\} + \frac{P R}{2 \pi a h E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left[\frac{C_8}{m^2} - \frac{C_{11}}{n^2} \right] (1+\nu) \end{pmatrix}$$

e a matriz A por

$$A = \begin{bmatrix}
\left[\frac{\text{ber}'u}{l^*} + A_3(\text{beiu} + \text{ber}'u \frac{1-v}{u}) \right] - & \left[\frac{\text{bei}'u}{l^*} - A_3(\text{beru} - \text{bei}'u \frac{1-v}{u}) \right] + & \left[\frac{\text{ker}'u}{l^*} + A_3(\text{keiu} + \text{ker}'u \frac{1-v}{u}) \right] - & \left[\frac{\text{kei}'u}{l^*} - A_3(\text{keru} - \text{kei}'u \frac{1-v}{u}) \right] + & 0 & 0 & 0 \\
- A_1 A_2 \text{bei}'u & + A_1 A_2 \text{ber}'u & - A_1 A_2 \text{kei}'u & + A_1 A_2 \text{ker}'u & & & \\
\left[\text{beru} + \text{bei}'u \left[-\frac{1+v}{u} - \frac{A_1 A_2 R}{\beta a} \right] + \frac{A_3 R}{2\beta a} [\text{beiu} + \text{ber}'u \frac{1-v}{u}] \right] & - \left[\text{beiu} + \text{ber}'u \left[\frac{1+v}{u} + \frac{A_1 A_2 R}{\beta a} \right] - \frac{A_3 R}{2\beta a} [\text{beru} - \text{bei}'u \frac{1-v}{u}] \right] & \left[\text{keru} - \text{kei}'u \left[\frac{1+v}{u} + \frac{A_1 A_2 R}{\beta a} \right] + \frac{A_3 R}{2\beta a} [\text{keiu} + \text{ker}'u \frac{1-v}{u}] \right] & - \left[\text{keiu} + \text{ker}'u \left[\frac{1+v}{u} - \frac{A_1 A_2 R}{\beta a} \right] - \frac{A_3 R}{2\beta a} [\text{keru} - \text{kei}'u \frac{1-v}{u}] \right] & 0 & 0 & 0 \\
\text{berm} & \text{beim} & \text{kerm} & \text{keim} & 1 & -\text{kern} & -\text{kein} \\
\text{ber}'m & \text{bei}'m & \text{ker}'m & \text{kei}'m & 0 & -z^{1/2} \text{ker}'n & -z^{1/2} \text{kei}'n \\
z^2 [\text{beim} + \text{ber}'m \frac{1-v}{m}] & -z^2 [\text{berm} - \text{bei}'m \frac{1-v}{m}] & z^2 [\text{keim} + \text{ker}'m \frac{1-v}{m}] & -z^2 [\text{kerm} - \text{kei}'m \frac{1-v}{m}] & 0 & -[\text{kein} + \text{ker}'n \frac{1-v}{n}] & [\text{kern} - \text{kei}'n \frac{1-v}{n}] \\
-z^{3/2} \text{bei}'m & z^{3/2} \text{ber}'m & -z^{3/2} \text{kei}'m & z^{3/2} \text{ker}'m & 0 & \text{kei}'n & -\text{ker}'n \\
\left[\text{berm} - \text{bei}'m \frac{1+v}{m} \right] & \left[\text{beim} + \text{ber}'m \frac{1+v}{m} \right] & \left[\text{kerm} - \text{kei}'m \frac{1+v}{m} \right] & \left[\text{keim} + \text{ker}'m \frac{1+v}{m} \right] & 0 & -[\text{kern} - \text{kei}'n \frac{1+v}{n}] & -[\text{kein} + \text{ker}'n \frac{1+v}{n}]
\end{bmatrix}$$

o vetor solução é determinado, como já foi comentado nos Capítu -
los 4 e 5, por

$$A^{-1}Y = X,$$

Para a região I, o deslocamento radial é dado por (8.1), os momentos meridional e circunferencial por (5.23) e (5.24) e as forças de membrana meridional e circunferencial por (5.25) e (5.25) respectivamente.

Para a região II, o deslocamento radial é dado por (8.3), e as demais variáveis mencionadas acima pelas equações (3.14) a (3.17), desde que C_3 , C_4 e C_{12} sejam trocadas por C_9 , C_{10} e C_{11} .

9 RESULTADOS E CONCLUSÕES

9.1 Comparação da teoria

Com o intuito de verificar a aceitabilidade dos resultados fornecidos pela solução analítica proposta, foram feitas comparações com outro método de solução. Dois programas de diferenças finitas serviram para este propósito (CORTER e CORTERDE), cujos resultados são apresentados neste item.

Como a solução proposta tem uma metodologia semelhante para a análise de todos os casos estudados, três destes modelos foram submetidos à comparação, conforme pode ser visto nas Tabelas aqui apresentadas.

Nos modelos usados como comparação, o ângulo $\phi_{\text{máx}}$ foi tomado igual a 90° , para que o efeito do engaste considerado neste ponto (ver Fig.9.1) não influísse na região de análise.

O modelo (base de comparação) apresentado nas Tabelas 9.1 a 9.3 foi simulado conforme mostra a Fig.9.2, sendo os seus resultados convertidos para o caso original.

Uma outra verificação realizada, foi a de comparar os resultados obtidos com os diversos modelos, para casos particulares. Tomando-se a solução apresentada no Capítulo 8 e fazendo-se a espessura do reforço igual a espessura da casca esférica (região II), o programa PACE forneceu os mesmos resultados obtidos com a codificação do modelo apresentado no Capítulo 7. Outra verificação também realizada foi tomar o módulo de elasticidade do material do bocal cilíndrico (Capítulo 8) bastante elevado, o que simulou os modelos apresentados nos Capítulos 3 (fazendo-se $h^* = h$) e IV (com $h^* > h$).

Cumpra-se também ressaltar que foram testados modelos para todos os casos analisados, e forneceram os mesmos resultados apresentados por Bijlaard [1,2,3].

As Tabelas a seguir mostram as comparações efetuadas, deixando ver o grau de precisão do método de solução adotado.

Para se localizar um ponto na esfera, o sistema de coordenadas apresentado na Fig.9.1 deve ser utilizado, onde $s = r/l$, para o caso sem reforço, e $s^* = r/l^*$, para o caso com reforço. Porém, lembrando que, com l^* dado por (5.3).

$$s^* = \left[\frac{[12(1-\nu^2)]^{1/4}}{[R h^*]^{1/2}} \right]^{-1} \cdot r$$

e que o material da casca foi considerado com $\nu = 0,3$, vem:

$$s^* = 1,8178 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{R}{h^*}}$$

onde, quando não existe anel de reforço, pode-se tomar $h^* = h$, fornecendo, então, s .

Para o primeiro ponto (intersecção do bocal com a casca esférica), $s = u$. Os demais pontos podem ser localizados conforme descrito acima.

Considerando que, para todos os casos analisados neste item e no próximo, o raio externo do anel de reforço foi tomado igual ao dobro do raio do bocal, então para $s^* = 2u$ tem-se a passagem da região de reforço para a região sem reforço. Portanto, para valores de s^* maiores que $2u$, localizam-se pontos nesta segunda região.

As diferenças percentuais apresentadas nas Tabelas 9.1 a 9.18 são precedidas de um sinal negativo, quando a base de comparação apresenta valores maiores que o modelo comparado. Em caso contrário, a diferença é considerada positiva.

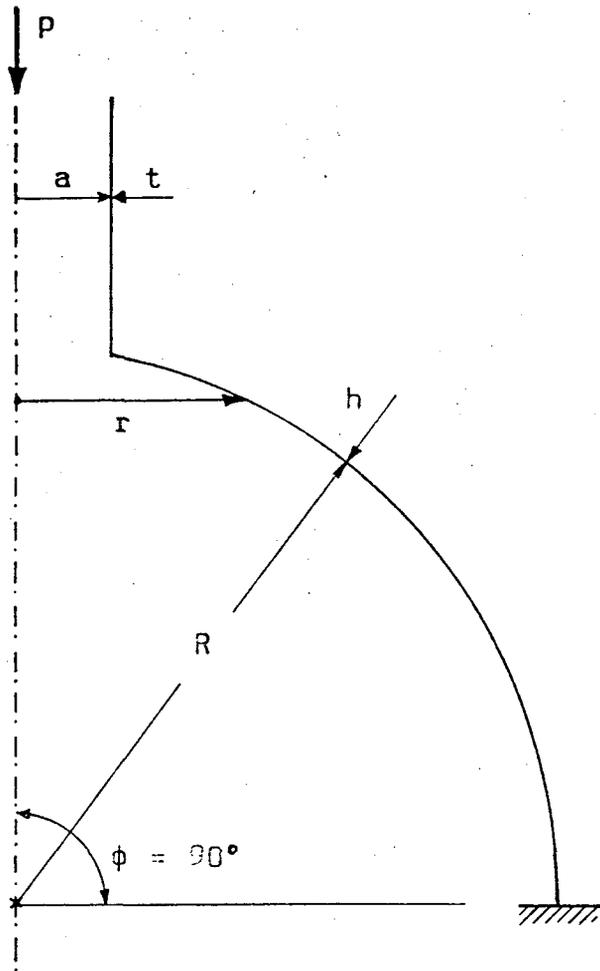


Fig.9.1

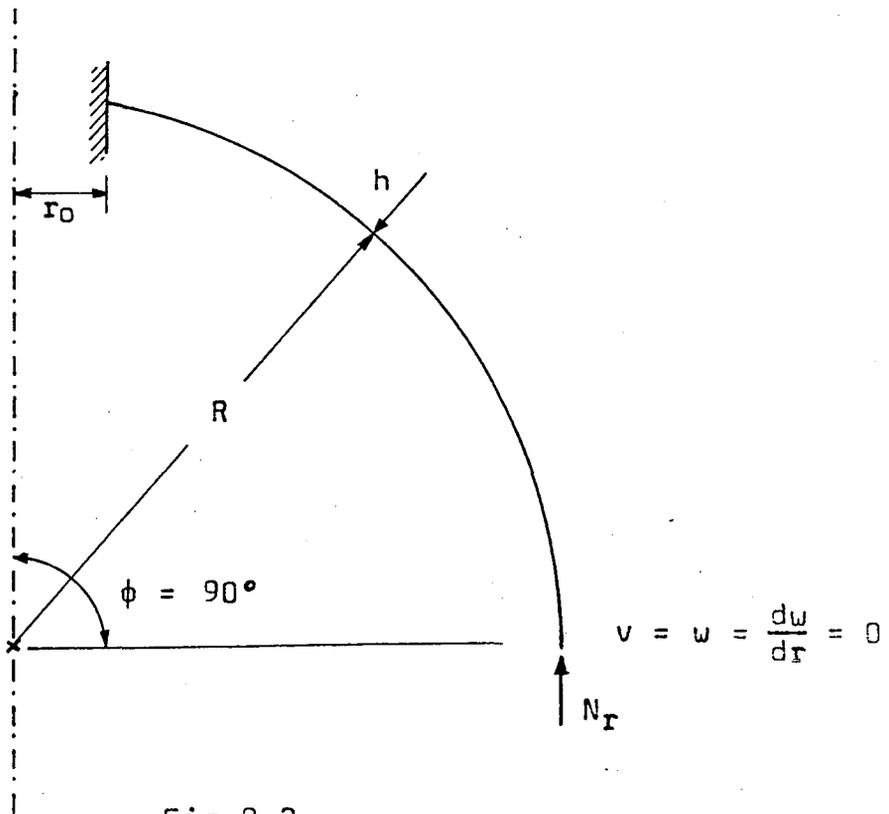


Fig.9.2

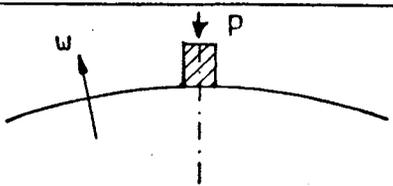
$\frac{w}{\left[\frac{R}{E} \frac{P}{h^2} \right]}$			
s	Solução Analítica (PACE)	Solução Numérica (CORTER)	Diferença percentual
0,400	-0,2331	-0,2377	21,32
0,593	-0,2334	-0,2369	21,44
0,824	-0,2568	-0,2117	21,30
1,133	-0,2162	-0,1786	21,05
1,769	-0,1325	-0,1085	22,12
2,612	-0,5335 10^{-1}	-0,4309 10^{-1}	23,61
3,247	-0,2011 10^{-1}	-0,2279 10^{-1}	-11,76
3,450	-0,1324 10^{-1}	-0,6919 10^{-2}	91,30

TABELA 9.1 - Deslocamento radial na esfera

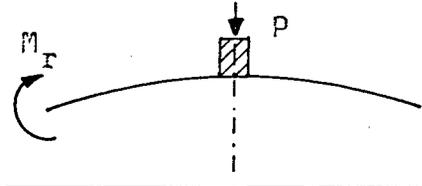
$\frac{M_r}{P}$			
s	Solução Analítica (PACE)	Solução Numérica (CORTER)	Diferença percentual
0,400	0,1793	0,1777	0,90
0,593	0,9458 10^{-1}	0,7528 10^{-1}	25,64
0,824	0,4731 10^{-1}	0,3818 10^{-1}	23,91
1,133	0,1518 10^{-1}	0,1309 10^{-1}	15,17
1,769	0,1039 10^{-1}	0,7930 10^{-2}	31,02
2,612	0,1471 10^{-1}	0,1147 10^{-1}	28,29
3,247	0,1126 10^{-1}	0,8824 10^{-2}	27,61
3,450	0,1324 10^{-1}	0,7718 10^{-2}	71,55

TABELA 9.2 - Momento meridional M_r

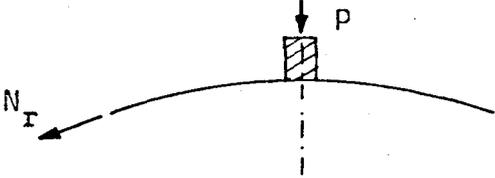
$\frac{N_r}{P/h}$			
s	Solução Analítica (PACE)	Solução Numérica (CORTER)	Diferença percentual
0,400	-0,2234	-0,1753	28,33
0,523	-0,1783	-0,1417	26,53
0,624	-0,1576	-0,1291	25,98
1,133	-0,1387	-0,1106	25,59
1,767	-0,1072	-0,8517 10^{-1}	25,87
2,614	-0,7410 10^{-1}	-0,5776 10^{-1}	28,23
3,242	-0,5324 10^{-1}	-0,4245 10^{-1}	26,42
3,450	-0,4738 10^{-1}	-0,3627 10^{-1}	25,31

TABELA 9.3 - Força de membrana meridional N_r

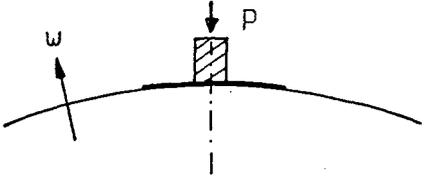
$\frac{w}{\left[\frac{P R}{E h^2} \right]}$			
s	Solução Analítica (PACE)	Solução Numérica (CORTERDE)	Diferença percentual
0,400	-0,1666	-0,1567	6,32
0,505	-0,1658	-0,1558	6,42
0,611	-0,1639	-0,1536	6,71
0,695	-0,1620	-0,1513	7,07
0,800	-0,1589	-0,1478	7,51
1,251	-0,1222	-0,1138	7,38
2,145	-0,3868 10^{-1}	-0,3053 10^{-1}	26,70
2,977	-0,6818 10^{-2}	-0,9480 10^{-2}	-28,08

TABELA 9.4 - Deslocamento radial na esfera

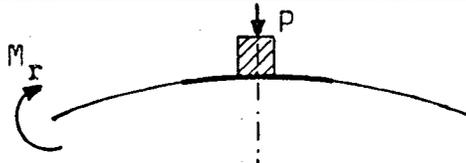
$\frac{M_r}{P}$			
s	Solução Analítica (PACE)	Solução Numérica (CORTERDE)	Diferença percentual
0,400	-0,1843	-0,2018	-8,67
0,505	-0,1288	-0,1370	-5,99
0,611	-0,9457 10^{-1}	-0,9689 10^{-1}	-2,32
0,695	-0,7642 10^{-1}	-0,7433 10^{-1}	2,73
0,800	-0,5836 10^{-1}	-0,5376 10^{-1}	8,56
1,251	-0,8826 10^{-2}	-0,8464 10^{-2}	4,29
2,145	-0,9045 10^{-2}	-0,8010 10^{-2}	12,02
2,877	-0,6028 10^{-2}	-0,5209 10^{-2}	15,72

TABELA 9.5 - Momento meridional M_r

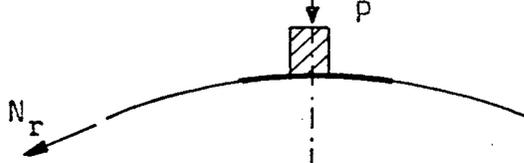
$\frac{N_r}{P/h}$			
s	Solução Analítica (PACE)	Solução Numérica (CORTERDE)	Diferença percentual
0,400	-0,1489	-0,2239	-33,50
0,505	-0,1292	-0,1958	-34,01
0,611	-0,1184	-0,1802	-34,30
0,695	-0,1129	-0,1720	-34,36
0,800	-0,1074	-0,1645	-34,71
1,251	-0,8581 10^{-1}	-0,7247 10^{-1}	18,41
2,145	-0,5339 10^{-1}	-0,4622 10^{-1}	15,51
2,877	-0,3415 10^{-1}	-0,2058 10^{-1}	15,46

TABELA 9.6 - Força de membrana meridional N_r

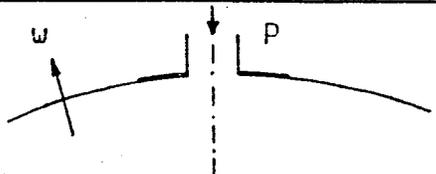
$\frac{w}{\left[\frac{R}{E} \frac{P}{h^2} \right]}$ 			
s	Solução Analítica (PACE)	Solução Numérica (CORTERDE)	Diferença percentual
0,400	-0,4259	-0,4080	4,30
0,724	-0,3468	-0,3375	2,82
1,048	-0,2733	-0,2670	1,60
1,371	-0,2085	-0,2072	0,63
1,695	-0,1532	-0,1543	-0,71
2,341	-0,7387 10^{-1}	-0,7464 10^{-1}	-2,10
2,937	-0,2671 10^{-1}	-0,2360 10^{-1}	-9,75
3,631	-0,3624 10^{-2}	-0,6914 10^{-2}	-46,82

TABELA 9.7 - Deslocamento radial na esfera

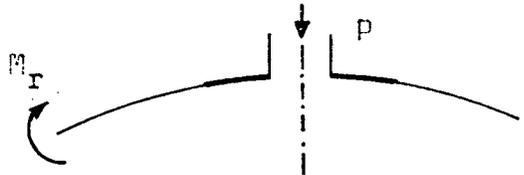
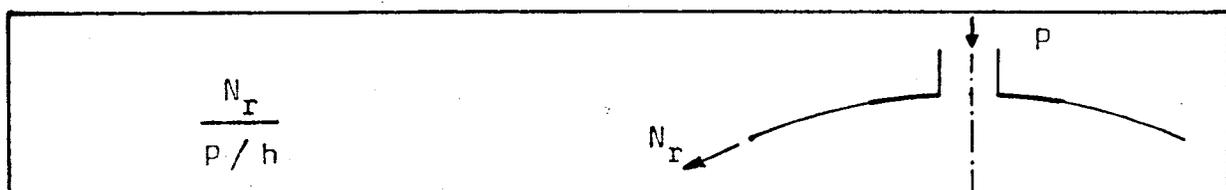
$\frac{M_r}{P}$ 			
s	Solução Analítica (PACE)	Solução Numérica (CORTERDE)	Diferença percentual
0,400	0,3720 10^{-1}	0,5188 10^{-1}	-28,30
0,724	0,1336 10^{-1}	0,1815 10^{-1}	-23,13
1,048	-0,5348 10^{-2}	-0,2354 10^{-2}	55,45
1,371	-0,1656 10^{-1}	-0,1412 10^{-1}	17,28
1,695	-0,2136 10^{-1}	-0,1919 10^{-1}	11,31
2,341	-0,2098 10^{-1}	-0,1965 10^{-1}	6,77
2,937	-0,1543 10^{-1}	-0,1472 10^{-1}	4,82
3,631	-0,0427 10^{-2}	-0,0289 10^{-2}	3,37

TABELA 9.8 - Momento meridional M_r



$\frac{N_r}{P/h}$	Solução Analítica (FACE)	Solução Numérica (CORTEDE)	Diferença percentual
0,400	$-0,5795 \cdot 10^{-1}$	-0,1102	-45,60
0,724	-0,1504	-0,1147	23,74
1,048	-0,1523	-0,1338	13,03
1,371	-0,1385	-0,1260	10,00
1,695	-0,1216	-0,1124	8,19
2,341	$-0,8541 \cdot 10^{-1}$	$-0,9425 \cdot 10^{-1}$	1,30
2,987	$-0,6391 \cdot 10^{-1}$	$-0,6130 \cdot 10^{-1}$	4,26
3,631	$-0,1151 \cdot 10^{-1}$	$-0,4355 \cdot 10^{-1}$	-73,57

TABELA 9.9 - Força de membrana meridional N_r

De acordo com uma análise das Tabelas 9.1 a 9.9 pode-se concluir que, de forma geral, os resultados não são plenamente satisfatórios.

Estas diferenças devem advir, principalmente, das simplificações consideradas no método de solução adotado neste trabalho. No presente estudo são desprezados, nas variações de curvatura, os termos dependentes de u_r (deslocamento na direção meridional) e u_θ (direção circunferencial), além de Q_r e Q_θ nas equações de equilíbrio. Já na teoria usada como termo de comparação, estas simplificações não são adotadas.

A simplificação de Q_r nas condições de contorno na teoria utilizada é outro fator que certamente influenciou nas diferenças encontradas.

9.2 Apresentação e discussão dos resultados

Os resultados a seguir, obtidos através do programa PACE, mostram o comportamento dos diversos modelos analisados, com o objetivo precípuo de mostrar os efeitos dos anéis de reforço.

São apresentados resultados para deslocamento radial w , momento meridional M_r e força de membrana N_r , todos adimensionalizados, tabelados e traçados em gráficos, onde as abcissas representam a variável (também adimensional) $s = r/l^*$.

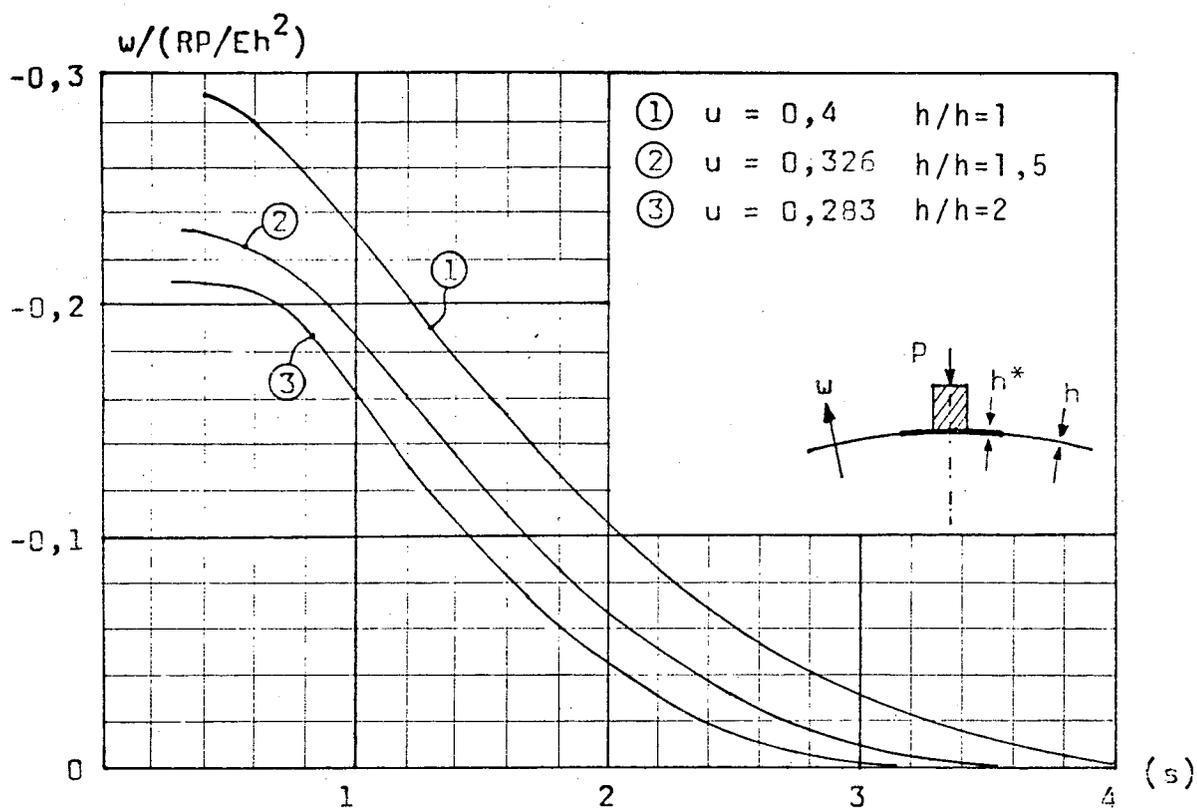
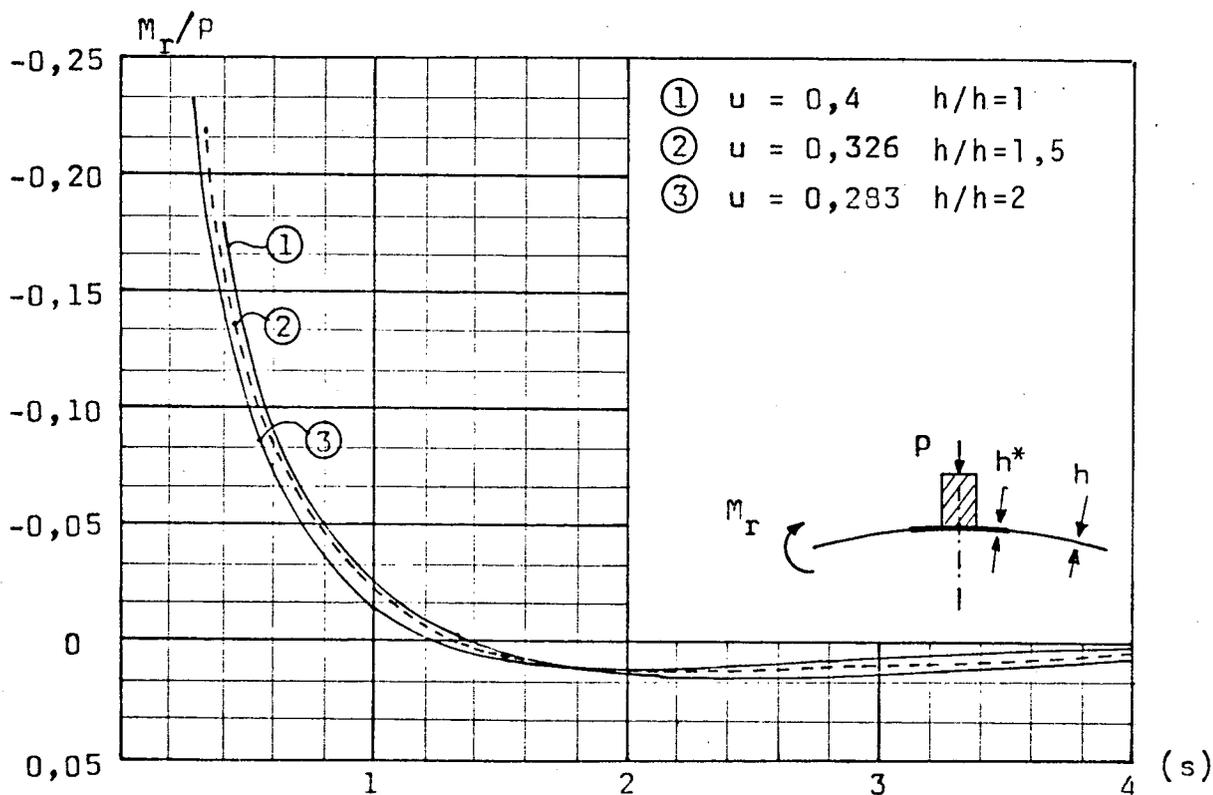
Em cada gráfico são apresentadas três curvas, sendo uma para $h^*/h = 1$ (caso sem reforço), outra para $h^*/h = 1,5$ e ainda para $h^*/h = 2$, curvas estas que mostram as variações das quantidades traçadas em função da espessura do reforço.

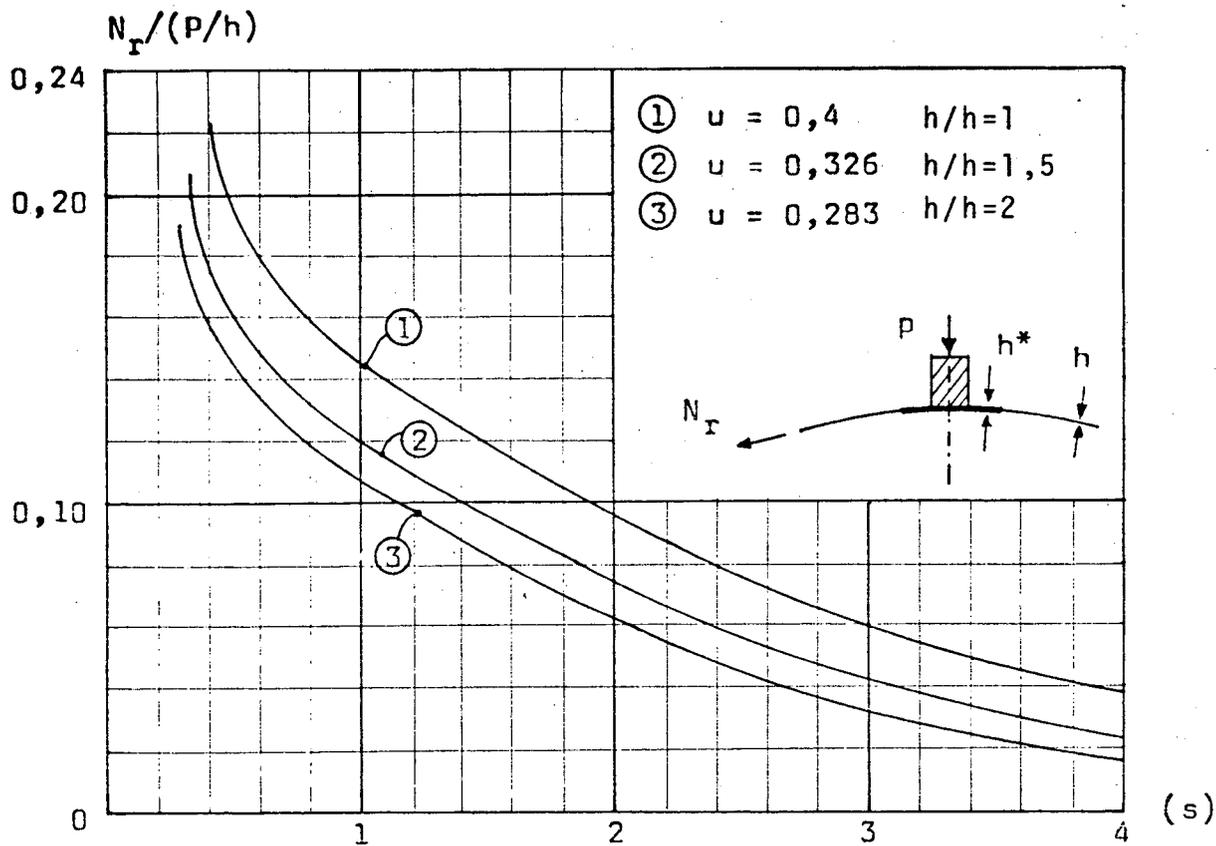
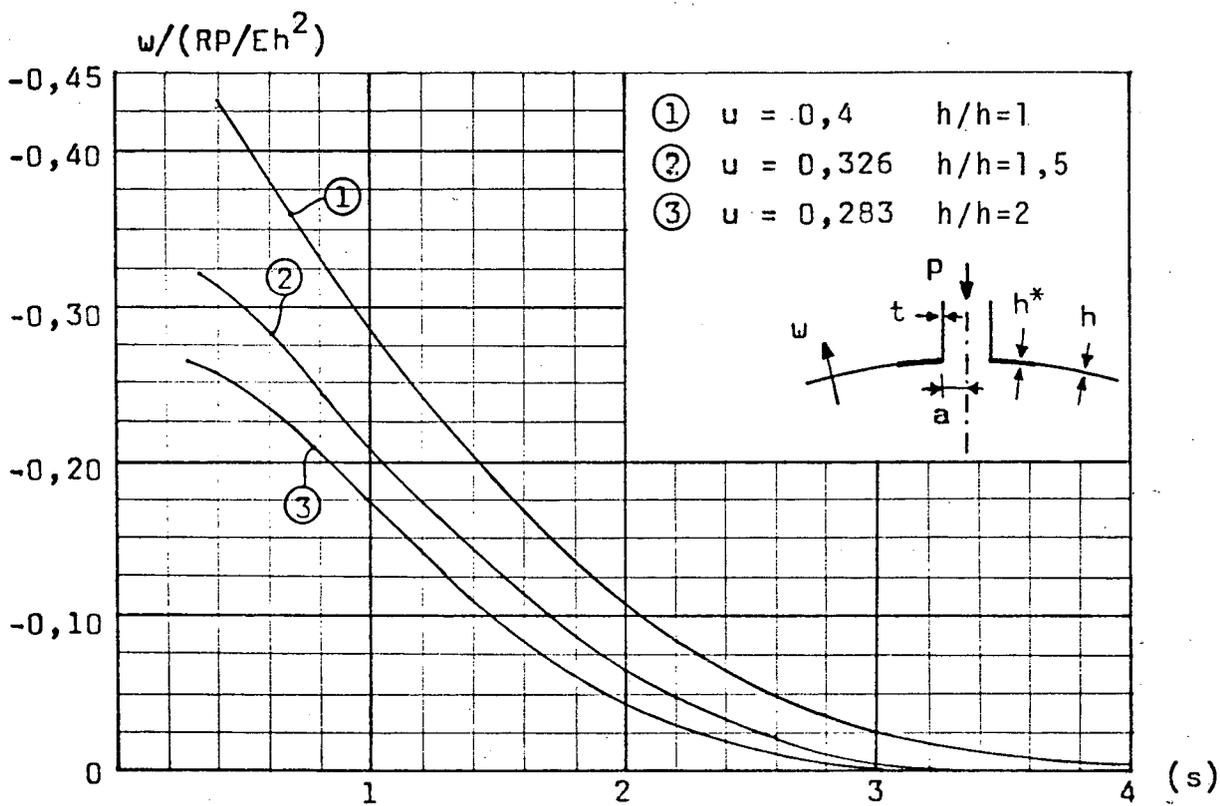
Como as comparações entre os modelos deveriam ser feitas para iguais valores do raio do bocal, raio da esfera e variável r , sendo $s = (h^*/h)^{1/2} s^*$, e desde que foram adotados para os casos sem anel de reforço dimensões que forneceram $u = 0,4$, então tem-se para $h^*/h = 1,5$, $s = 1,2247 s^*$ e para $h^*/h = 2$, $s = 1,4142 s^*$. Portanto, para se comparar, por exemplo, os deslocamentos radiais de um caso com reforço com um sem reforço, deve-se tomar valores de s^* para o primeiro caso e $s = (h^*/h)^{1/2} s^*$ para o segundo.

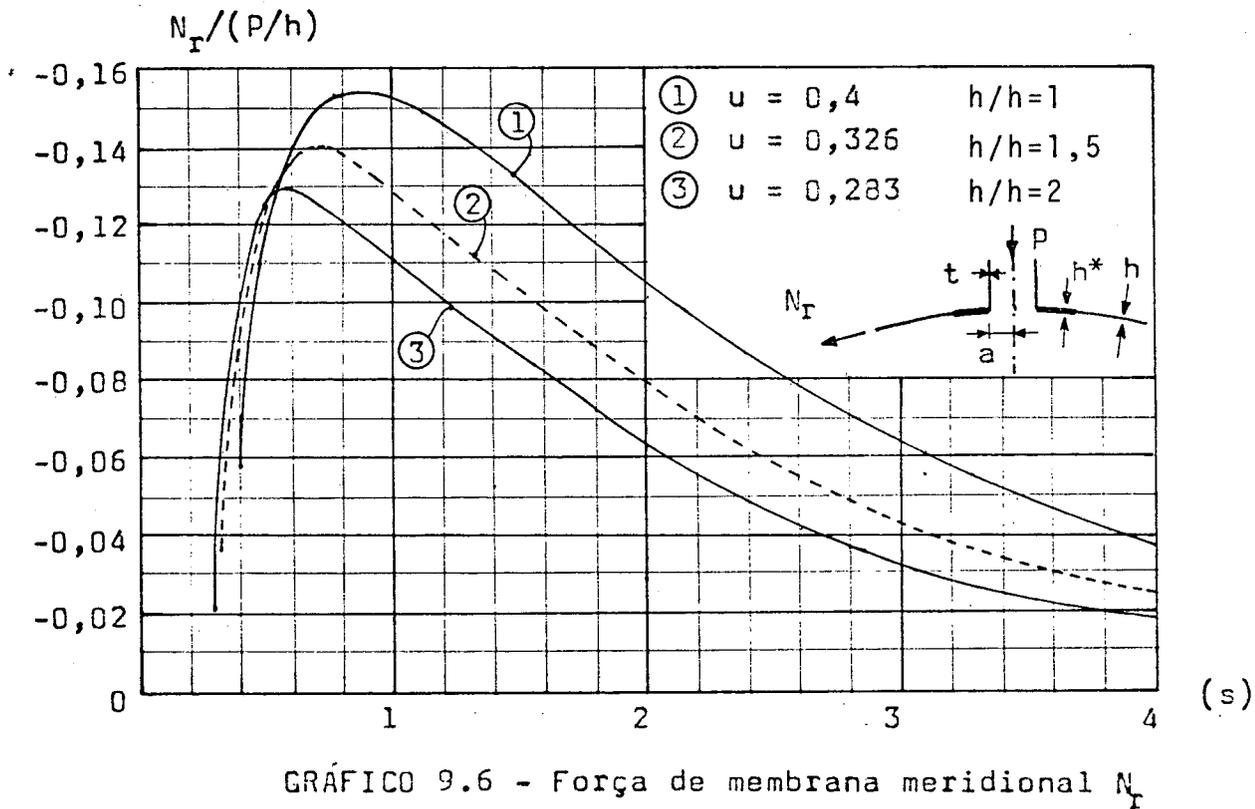
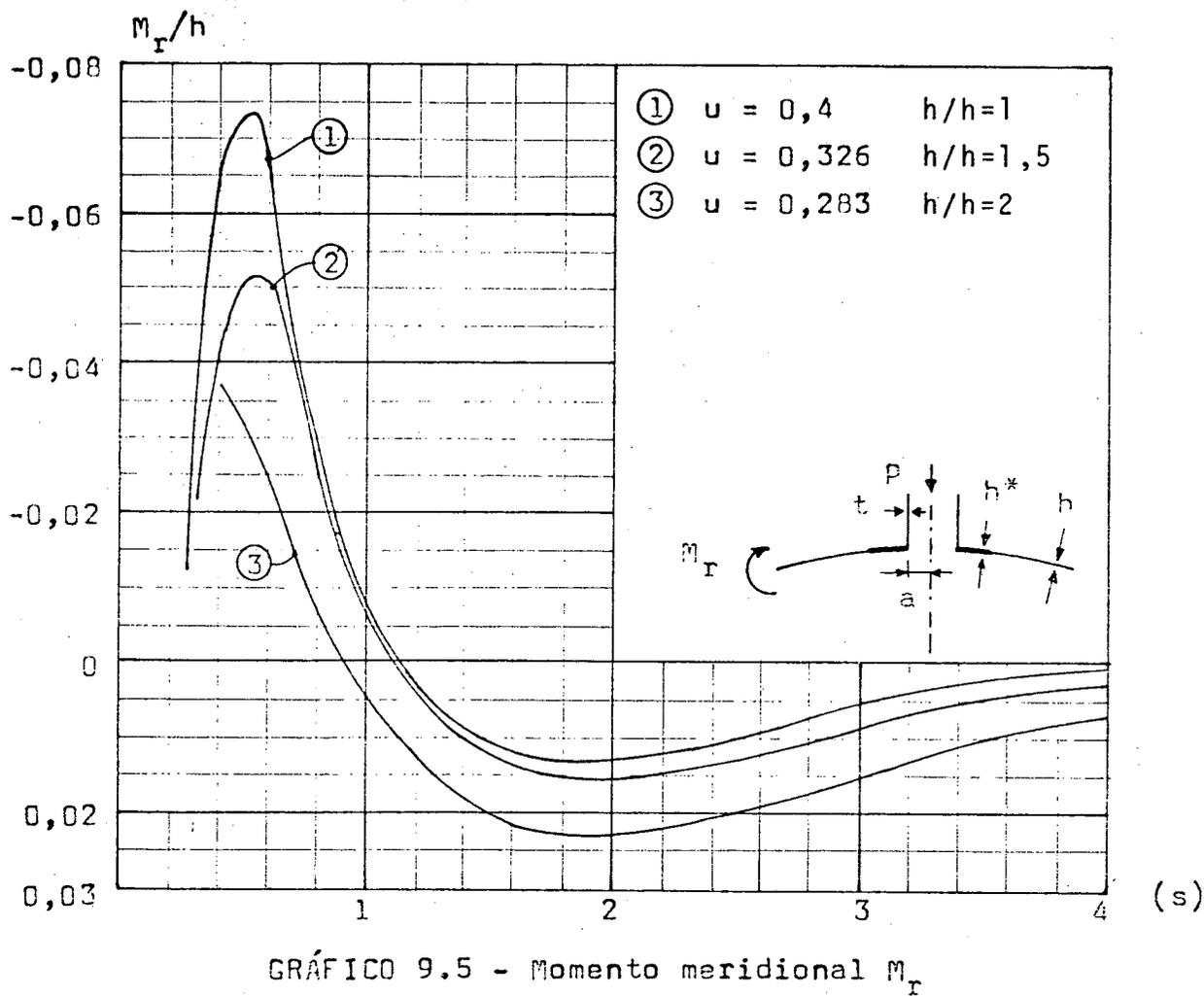
A localização dos pontos em análise, segue o mesmo raciocínio apresentado no item 9.1.

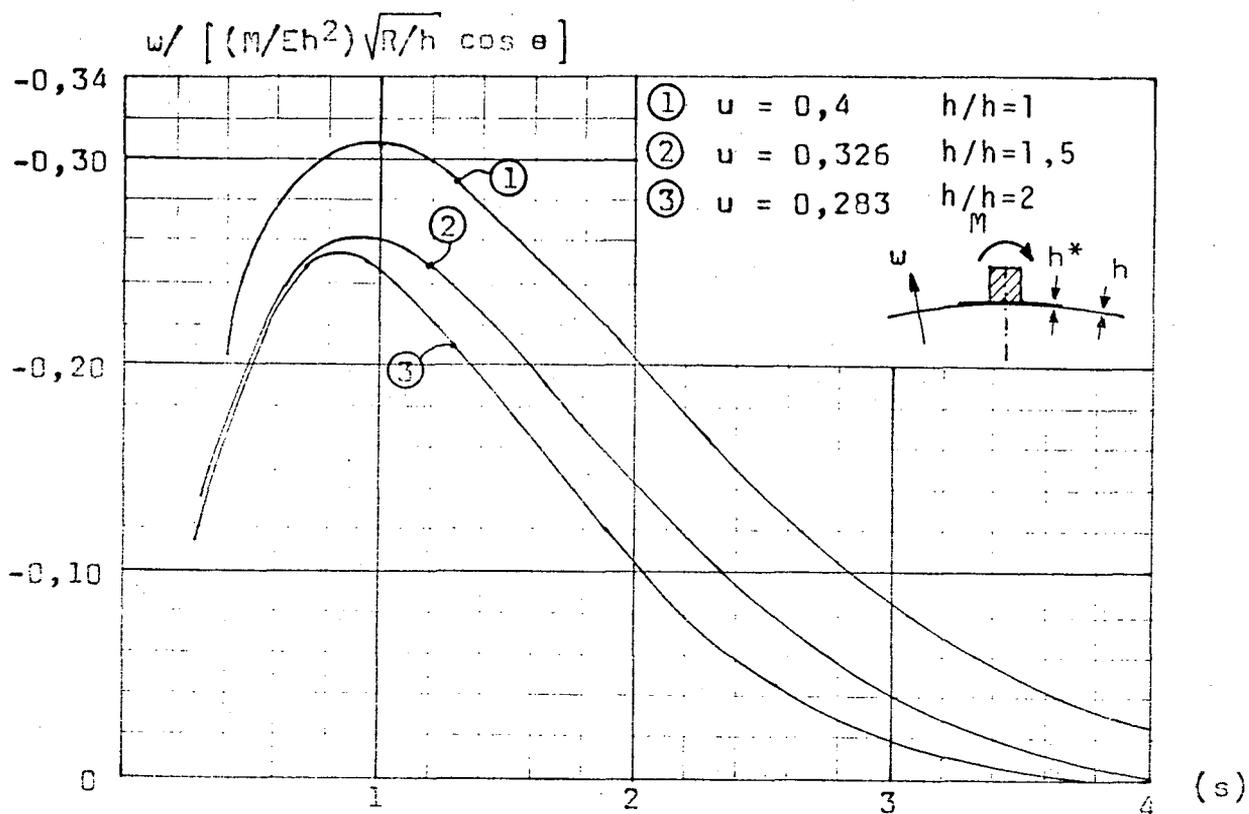
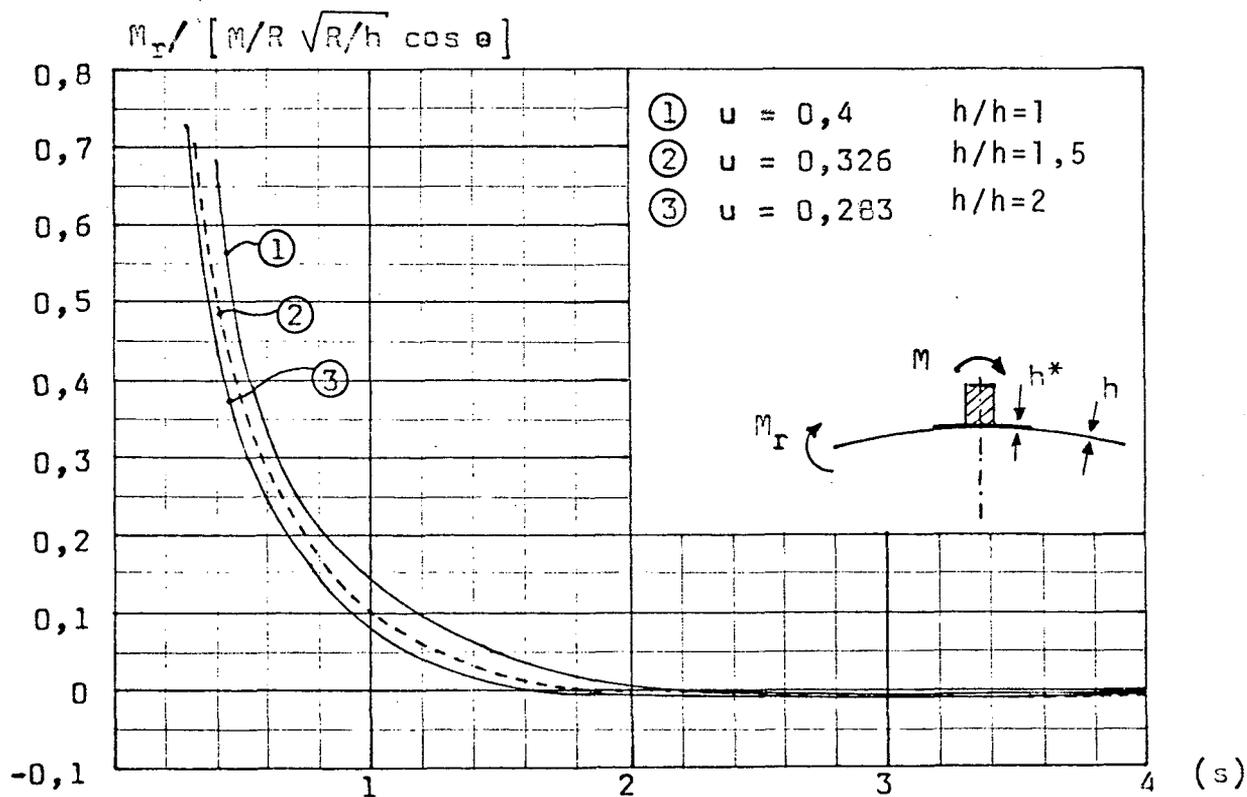
Os Gráficos 9.7 a 9.9 e Tabelas 9.13 a 9.15, (caso com momento fletor aplicado num bocal rígido), como são adimensionalizados com relação a ϵ (ângulo na direção circunferencial - ver Figs.4.1 e 6.1), fornecem valores de w , M_r e N_r para qualquer ϵ , bastando para tal, que se proceda a devida conversão para cada meridiano desejado.

Os fatores adimensionalizantes das Tabelas 9.1 a 9.18 são os mesmos apresentados nos Gráficos 9.1 a 9.9.

GRÁFICO 9.1 - Deslocamento radial w GRÁFICO 9.2 - Momento meridional M_r

GRÁFICO 9.3 - Força de membrana meridional N_r GRÁFICO 9.4 - Deslocamento radial w



GRÁFICO 9.7 - Deslocamento radial w GRÁFICO 9.8 - Momento meridional M_r

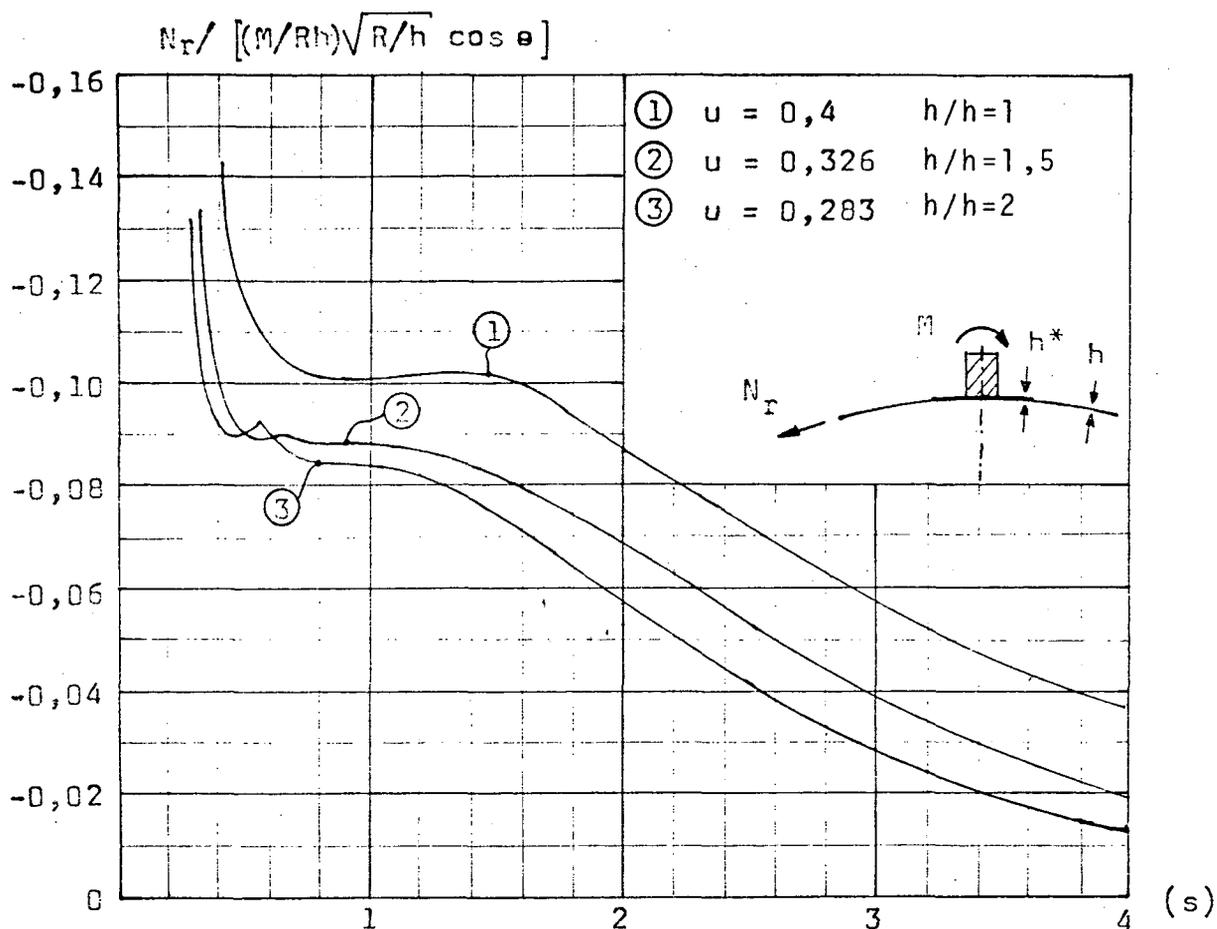


GRÁFICO 9.9 - Força de membrana N_r

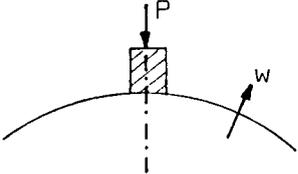
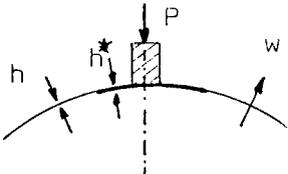
Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
					
s	u = 0,400	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ (u=0,326)	$\frac{h^*}{h} = 2$ (u=0,283)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	-0,2891	-0,2338	-0,2142	-19,13	-25,91
0,602	-0,2798	-0,2303	-0,2126	-17,69	-24,02
0,805	-0,2591	-0,2226	-0,2091	-14,09	-19,30
1,210	-0,2056	-0,1896	-0,1836	- 7,78	-10,70
2,017	-0,1047	-0,1052	-0,1052	0,48	0,48
2,618	$-0,5295 \cdot 10^{-1}$	$-0,5663 \cdot 10^{-1}$	$-0,5784 \cdot 10^{-1}$	6,95	9,24
3,214	$-0,2134 \cdot 10^{-1}$	$-0,2511 \cdot 10^{-1}$	$-0,2639 \cdot 10^{-1}$	17,67	23,66
4,000	$-0,1320 \cdot 10^{-2}$	$-0,3825 \cdot 10^{-2}$	$-0,4692 \cdot 10^{-2}$	189,77	255,45

TABELA 9.10 - Deslocamento radial na esfera

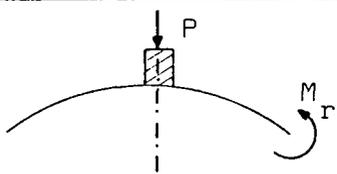
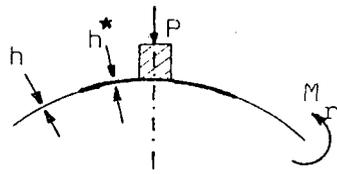
Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
					
s	u = 0,400	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ (u=0,326)	$\frac{h^*}{h} = 2$ (u=0,283)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	-0,1793	-0,2199	-0,2340	22,64	30,51
0,602	-0,9141 10^{-1}	-0,1237	-0,1349	35,32	47,58
0,805	-0,4984 10^{-1}	-0,7955 10^{-1}	-0,8960 10^{-1}	59,61	79,78
1,210	-0,9858 10^{-2}	-0,2437 10^{-1}	-0,2945 10^{-1}	147,21	198,74
2,017	0,1366 10^{-1}	0,2437 10^{-1}	0,6601 10^{-2}	-78,40	-51,68
2,618	0,1462 10^{-1}	0,1229 10^{-1}	0,1145 10^{-1}	15,94	21,68
3,214	0,1144 10^{-1}	0,1061 10^{-1}	0,1030 10^{-1}	-7,26	-9,97
4,000	0,6418 10^{-2}	0,6445 10^{-2}	0,6439 10^{-2}	0,42	0,33

TABELA 9.11 Momento meridional na esfera

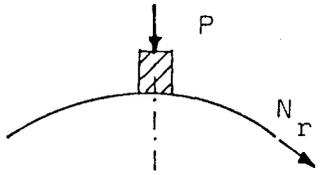
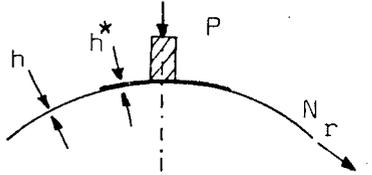
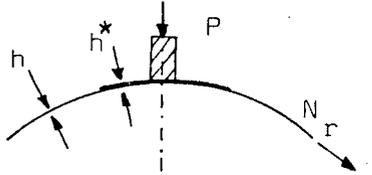
Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
				$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
s	$u = 0,400$	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ ($u=0,326$)	$\frac{h^*}{h} = 2$ ($u=0,283$)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	-0,2224	-0,1981	-0,1906	-10,93	-14,30
0,602	-0,1778	-0,1588	-0,1530	-10,69	-13,95
0,805	-0,1588	-0,1429	-0,1384	-10,01	-12,85
1,210	-0,1347	-0,1208	-0,1163	-10,32	-13,66
2,017	$-0,9604 \cdot 10^{-1}$	$-0,8936 \cdot 10^{-1}$	$-0,8707 \cdot 10^{-1}$	-6,96	-9,34
2,618	$-0,7243 \cdot 10^{-1}$	$-0,6900 \cdot 10^{-1}$	$-0,6779 \cdot 10^{-1}$	-4,74	-6,41
3,214	$-0,5397 \cdot 10^{-1}$	$-0,5235 \cdot 10^{-1}$	$-0,5177 \cdot 10^{-1}$	-3,00	-4,08
4,000	$-0,3652 \cdot 10^{-1}$	$-0,3606 \cdot 10^{-1}$	$-0,3588 \cdot 10^{-1}$	-1,26	-1,75

TABELA 9.12 - Força de membrana N_r na esfera

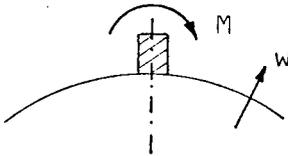
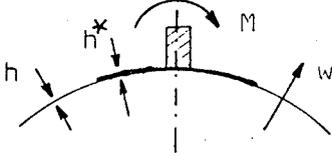
Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
					
s	$u = 0,400$	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ ($u=0,326$)	$\frac{h^*}{h} = 2$ ($u=0,283$)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	-0,4249	-0,3230	-0,2663	-24,16	-37,47
0,671	-0,3595	-0,2876	-0,2476	-20,00	-31,13
0,851	-0,3171	-0,2644	-0,2350	-16,62	-25,89
1,122	-0,2577	-0,2265	-0,2091	-12,11	-18,86
1,842	-0,1315	-0,1282	-0,1264	-2,51	-3,88
2,562	$-0,5384 \cdot 10^{-1}$	$-0,5862 \cdot 10^{-1}$	$-0,6129 \cdot 10^{-1}$	8,88	13,84
3,191	$-0,1736 \cdot 10^{-1}$	$-0,2243 \cdot 10^{-1}$	$-0,2547 \cdot 10^{-1}$	29,21	46,72
4,000	$-0,2421 \cdot 10^{-2}$	$-0,1283 \cdot 10^{-2}$	$-0,3346 \cdot 10^{-2}$	-47,01	38,21

TABELA 9.13 Deslocamento radial na esfera

Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
s	u = 0,400	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ (u=0,326)	$\frac{h^*}{h} = 2$ (u=0,283)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	$0,3720 \cdot 10^{-1}$	$0,2141 \cdot 10^{-1}$	$0,1266 \cdot 10^{-1}$	-42,45	-65,97
0,671	$0,1804 \cdot 10^{-1}$	$0,5137 \cdot 10^{-1}$	$0,7059 \cdot 10^{-1}$	184,76	291,30
0,851	$0,4993 \cdot 10^{-2}$	$0,4230 \cdot 10^{-1}$	$0,6369 \cdot 10^{-1}$	747,19	1175,59
1,122	$-0,8917 \cdot 10^{-2}$	$0,1501 \cdot 10^{-1}$	$0,2866 \cdot 10^{-1}$	68,33	221,41
1,842	$-0,2219 \cdot 10^{-1}$	$-0,1255 \cdot 10^{-1}$	$-0,7089 \cdot 10^{-2}$	-43,44	-68,05
2,562	$-0,1934 \cdot 10^{-1}$	$-0,1548 \cdot 10^{-1}$	$-0,1329 \cdot 10^{-1}$	-19,96	-31,28
3,191	$-0,1346 \cdot 10^{-1}$	$-0,1200 \cdot 10^{-1}$	$-0,1123 \cdot 10^{-1}$	-10,85	-16,57
4,000	$-0,6695 \cdot 10^{-2}$	$-0,6674 \cdot 10^{-2}$	$-0,6648 \cdot 10^{-2}$	-0,31	-0,70

TABELA 9.14 Momento meridional na esfera

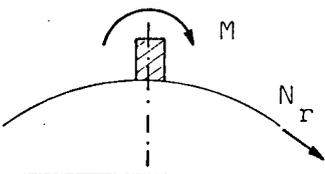
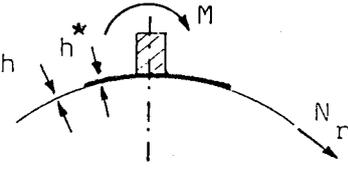
Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
					
s	u = 0,400	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ (u=0,326)	$\frac{h^*}{h} = 2$ (u=0,283)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	$-0,5995 \cdot 10^{-1}$	$-0,3605 \cdot 10^{-1}$	$-0,2280 \cdot 10^{-1}$	-39,87	-61,97
0,671	-0,1468	-0,1301	-0,1184	-11,38	-19,35
0,851	-0,1551	-0,1394	-0,1290	-10,12	-16,83
1,122	-0,1499	-0,1323	-0,1214	-11,74	-19,01
1,842	-0,1139	-0,1031	$-0,9667 \cdot 10^{-1}$	-9,48	-15,13
2,562	$-0,7984 \cdot 10^{-1}$	$-0,7473 \cdot 10^{-1}$	$-0,7169 \cdot 10^{-1}$	-6,40	-10,21
3,191	$-0,5733 \cdot 10^{-1}$	$-0,5473 \cdot 10^{-1}$	$-0,5333 \cdot 10^{-1}$	-4,54	-6,98
4,000	$-0,3748 \cdot 10^{-1}$	$-0,3685 \cdot 10^{-1}$	$-0,3641 \cdot 10^{-1}$	-1,68	-2,85

TABELA 9.15 Força de membrana meridional N_r na esfera

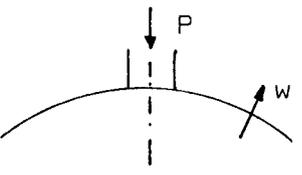
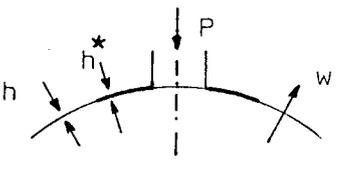
Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
					
s	u = 0,400	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ (u=0,326)	$\frac{h^*}{h} = 2$ (0,283)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	-0,2076	-0,1363	-0,1162	-34,34	-44,03
0,599	-0,2773	-0,1937	-0,1697	-30,15	-38,80
0,799	-0,3052	-0,2370	-0,2170	-22,35	-28,90
1,317	-0,2903	-0,2610	-0,2536	-10,09	-13,09
1,913	-0,2171	-0,2068	-0,2036	-4,74	-6,22
2,702	-0,1182	-0,1175	-0,1172	-0,59	-0,85
3,211	$-0,7043 \cdot 10^{-1}$	$-0,7184 \cdot 10^{-1}$	$-0,7215 \cdot 10^{-1}$	2,00	2,44
4,000	$-0,2395 \cdot 10^{-1}$	$-0,2494 \cdot 10^{-1}$	$-0,2546 \cdot 10^{-1}$	4,13	6,30

TABELA 9.16 Deslocamento radial na esfera

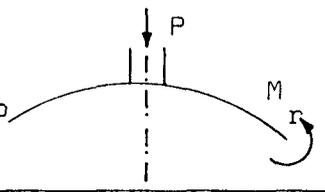
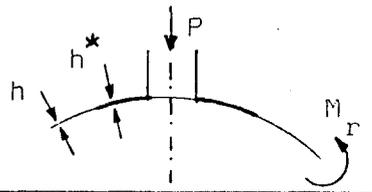
Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
					
s	u = 0,400	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ (u=0,326)	$\frac{h^*}{h} = 2$ (u=0,283)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	0,6822	0,7187	0,7288	5,35	6,83
0,599	0,3400	0,3853	0,3982	13,32	17,12
0,799	0,2070	0,2662	0,2831	28,60	36,76
1,317	$0,6967 \cdot 10^{-1}$	$0,8630 \cdot 10^{-1}$	$0,9101 \cdot 10^{-1}$	23,87	30,63
1,913	$0,1264 \cdot 10^{-1}$	$0,1988 \cdot 10^{-1}$	$0,2195 \cdot 10^{-1}$	57,28	73,66
2,702	$-0,1139 \cdot 10^{-1}$	$-0,8402 \cdot 10^{-2}$	$-0,7523 \cdot 10^{-2}$	-26,23	-33,95
3,211	$-0,1412 \cdot 10^{-1}$	$-0,1248 \cdot 10^{-1}$	$-0,1199 \cdot 10^{-1}$	-11,61	-15,08
4,000	$-0,1128 \cdot 10^{-1}$	$-0,1067 \cdot 10^{-1}$	$-0,1052 \cdot 10^{-1}$	-5,41	-6,74

TABELA 9,17 Momento meridional na esfera

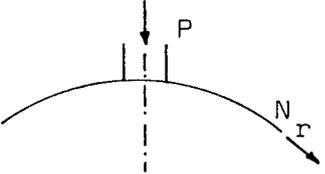
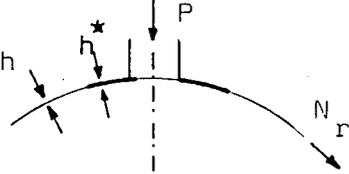
Caso sem reforço		Casos com reforço		Diferença percentual com o caso sem reforço	
					
s	u = 0,400	$\frac{h^*}{h} = 1,5$ (0,326)	$\frac{h^*}{h} = 2$ (u=0,283)	$\frac{h^*}{h} = 1,5$	$\frac{h^*}{h} = 2$
0,400	-0,1596	-0,1344	-0,1324	-15,79	-17,04
0,599	-0,1066	-0,9085 10^{-1}	-0,9006 10^{-1}	-14,77	-15,52
0,799	-0,1018	-0,9129 10^{-1}	-0,9288 10^{-1}	-10,32	-8,76
1,317	-0,1013	-0,8787 10^{-1}	-0,8495 10^{-1}	-13,26	-16,14
1,913	-0,8944 10^{-1}	-0,8120 10^{-1}	-0,7903 10^{-1}	-9,21	-11,64
2,702	-0,6619 10^{-1}	-0,6240 10^{-1}	-0,6133 10^{-1}	-5,73	-7,34
3,211	-0,5180 10^{-1}	-0,4962 10^{-1}	-0,4900 10^{-1}	-4,21	-5,41
4,000	-0,3372 10^{-1}	-0,3246 10^{-1}	-0,3223 10^{-1}	-3,74	-4,42

TABELA 9.18 - Força de membrana N_r na esfera

Conforme pode ser visto nos gráficos 9.1, 9.2, 9.4, 9.5, 9.7 e 9.8, os deslocamentos radiais e os momentos meridionais praticamente desaparecem para $s = 3,5$, o que corresponde, com $\nu = 0,3$, a $r = 1,9 \sqrt{Th}$. Desta forma, estas quantidades ficam restritas a um segmento de esfera com um raio de base igual a $1,9 \sqrt{Th}$ (Fig.2.1), isto é, $0,57 R$ ou $0,11 R$, para $R/h = 15$ ou 300 , respectivamente. Isto significa que, por exemplo, para $R/h = 15$, os deslocamentos radiais e momentos meridionais ocorrem até $\phi = 30^\circ$, ou seja, dentro do campo de aplicação da Hipótese de Reissner.

Pode-se notar, pela observação dos Gráficos 9.1, 9.2, 9.4 e 9.5 que, quando o bocal é considerado como sendo uma casca cilíndrica, os deslocamentos radiais crescem e os momentos meridionais diminuem, comparado com o caso em que o bocal é considerado rígido. Percebe-se também que quando se introduz um anel de reforço na esfera, o caso onde o bocal é flexível se aproxima do modelo com bocal rígido, notadamente para os deslocamentos radiais. Outra conclusão adicional que se pode tirar, é que as forças de membrana meridionais, para pontos próximos do bocal flexível, são menores que nos correspondentes pontos para o caso em que o bocal é rígido. Para pontos mais afastados do bocal ocorre o inverso, sendo entretanto, a diferença menos acentuada.

Uma análise dos Gráficos 9.1 a 9.9 e Tabelas 9.10 a 9.18 mostra o efeito dos anéis de reforço. Assim, para o modelo com bocal rígido e uma força P aplicada axialmente neste, os máximos deslocamentos radiais, em relação ao caso sem reforço, crescem 19,13% para $h^*/h = 1,5$, e 25,91% para $h^*/h = 2$. Para as mesmas condições acima, os momentos meridionais crescem 22,64% para $h^*/h = 1,5$ e 30,51% para $h^*/h = 2$, e as forças de membrana máximas, 10,93% e 14,30% respectivamente. A medida que s aumenta, estas diferenças tendem a diminuir. Entretanto, como os valores absolutos destas variáveis também diminuem, alguns pontos apresentam diferenças percentuais bastante elevadas, o que não deve ser levado em consideração.

Análises semelhantes podem ser efetuadas para os

demais casos, com o auxílio dos gráficos e tabelas referencia dos acima. Deve-se ressaltar o efeito de anéis de reforço no comportamento do momento meridional M_r , apresentado no Gráfico 9.5, onde tem-se um aumento substancial desta variável até a passagem da região I para II, e depois, uma diminuição com uma tendência a acompanhar o comportamento do caso sem reforço.

No caso em que é aplicado um momento fletor no bocal rígido, a curva para $u = 0,283$ ($h^*/h = 2$) do Gráfico 9.9 apresenta um ponto de inflexão para $s = 0,566$ (passagem da região I para II), o que deve ser fruto de um conjunto de condições de contorno não totalmente apropriado para representar o problema físico.

Deve-se deixar claro, também, que as análises para o caso de um carga axial P , atuando num bocal flexível, foram procedidas para as seguintes relações: espessura da casca esférica/ espessura do bocal = 4 e raio médio do bocal/ espessura do bocal = 15.

O raio do bocal pode ser identificado nos gráficos e tabelas apresentados pela constante u , que representa a variável s ($= r/\lambda^*$) na intersecção da esfera com o bocal. Assim, o raio do bocal será $r = u \cdot \lambda^*$. Para se localizar o ponto de transição da região de reforço para a região sem reforço basta tomar as variáveis desejadas para $s = 2u$, pois o raio do anel de reforço foi adotado como sendo o dobro do raio do bocal.

9.3 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Tomando como base os programas CORTER e CORTERDE, o desenvolvimento analítico baseado na Hipótese de Reissner não apresenta resultados muito satisfatórios.

Entretanto, devido a relativa simplicidade de uso das expressões resultantes, pode-se indicar a sua utilização como um ferramental de auxílio ao projetista que não tem acesso imediato a computadores de grande porte.

Como o objetivo do presente trabalho é a análise do efeito de anéis de reforço, e como os resultados apresentaram-se conservativos, pode-se atestar a importância da utilização destes elementos estruturais, com o objetivo maior de conferir melhor rigidez em cascas esféricas com bocais radiais cilíndricos.

Os deslocamentos radiais diminuem, os momentos meridianais aumentam e as forças de membrana diminuem, a medida que se aumenta a espessura do reforço, com a tendência de convergir para valores fixos.

Como trabalhos futuros que possam dar continuidade ao estudo aqui apresentado, pode-se citar, entre outros:

- a análise de uma casca esférica fina com um momento fletor aplicado num bocal radial cilíndrico flexível;
- um estudo, usando a teoria aqui apresentada, considerando cargas de superfície;
- um estudo modificando as condições de contorno, principalmente combinando as tensões de membrana N_r com o esforço cortante Q_r nos extremos dos elementos componentes da estrutura.

REFERÊNCIAS

- [1] BILLAARD, P.P. - Computation of the Stresses from Local Loads in Spherical Pressure Vessels or Pressure Vessel Heads - Welding Research Council Bulletin Nº34,1-8
(March 1957)
- [2] BILLAARD, P.P. - Influence of Reinforcing Pad on the Stresses in a Spherical Vessel under Local Loading - Welding Research Council Bulletin Nº49,63-73(April 1959)
- [3] BILLAARD, P.P. - Stresses in a Spherical Vessel from Radial Loads Acting on a Pipe - Welding Research Council Bulletin Nº49,1-30 (April 1959)
- [4] REISSNER, E. - Stresses and Small Displacements of Shallow Spherical Shells - J. Math. Phys, 25, 27 e 38
- [5] KRAUS, H. - Thin Elastic Shells - John Wiley & Sons, Inc. New York - 1967
- [6] TIMOSHENKO, S.P. and KRIEGER, S.W. - Theory of Plates and Shells - McGraw-Hill Kogakusha LTD, Tokyo - 1959
- [7] ALVES, D. BOECHAT - Teoria da Elasticidade - Centro Tecnológico - UFSC - 1978
- [8] KREIDER, D., OSTEBERG, D.R., KULLER, R.C. and PERKINS, F.W. - Introdução à Análise Linear - Ao Livro Técnico S/A - Rio de Janeiro - 1972 - Vol.I, II e III
- [9] BELL, W.W. - Special Functions for Scientists and Engineers - D. Van Nostrand Company LTD - 1968

- [10] GREEN, A.E. and ZERNA, W. - Theoretical Elasticity - Oxford at the Clarendon Press - London - 1968
- [11] SNEDDON, I.N. - Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry. - Oliver and Boyd LTD - 1966
- [12] ALVES, D. BSECHAT - Teoria de Cascas - Centro Tecnológico UFSC - 1978
- [13] REKACH, V.G. - Static of Thin-Walled Space Structures - Mir Publishers, Moscow - 1978
- [14] GUENTHER, R. - Programa Analisador de Sistemas Estruturais (Corter e Corterde) - Centro Tecnológico - UFSC (1979)

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE BESSEL E KELVIN

A equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

é conhecida como equação diferencial de Bessel de ordem n , e tem como solução as funções de Bessel, $J_n(x)$ e $Y_n(x)$, de primeira e segunda classes, respectivamente, e de ordem n .

A equação

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 + n^2) y = 0$$

é conhecida como equação diferencial modificada de Bessel de ordem n , tendo como solução as funções de Bessel modificadas, $I_n(x)$ e $K_n(x)$, de primeira e segunda classes, respectivamente, e de ordem n .

Essas funções podem ser desmembradas nas partes real e imaginária que são conhecidas como funções de Kelvin, sendo funções reais.

As equações trabalhadas neste estudo são de ordem zero, e desta forma, seguem as seguintes funções de Kelvin de ordem zero:

$$\text{ber}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-1)^x \left[(x/2)^2 \right]^{2x}}{(2x!)^2}$$

$$\text{bei}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-1)^x [(x/2)^2]^{2x+1}}{(2x+1)!^2}$$

$$\text{ker}(x) = -\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right)\text{ber}(x) + \frac{\pi}{4}\text{bei}(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{4r}}{(2r)!^2} \phi(2r)$$

$$\text{kai}(x) = -\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right)\text{bei}(x) - \frac{\pi}{4}\text{ber}(x) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (x/2)^{4r+2}}{(2r+1)!^2} \phi(2r+1)$$

onde γ é a constante de Euler

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

aqui assumida como $\gamma = 0,577216$, e ϕ sendo dada por

$$\phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}, \quad \phi(0) = 0$$

As derivadas primeiras das funções de Kelvin de ordem zero são:

$$\text{ber}'(x) = -\frac{(x/2)^3}{2!} + \frac{(x/2)^7}{3!4!} - \frac{(x/2)^{11}}{5!6!} + \frac{(x/2)^{15}}{7!8!} - \dots$$

$$\text{bei}'(x) = \frac{x}{2} - \frac{(x/2)^5}{2!3!} + \frac{(x/2)^9}{4!5!} - \frac{(x/2)^{13}}{6!7!} + \frac{(x/2)^{17}}{8!9!} - \dots$$

$$\begin{aligned} \text{ker}'(x) = & -\left(\ln(x/2) + \gamma\right)\text{ber}'(x) - \frac{\text{ber}(x)}{x} + \frac{\pi}{4}\text{bei}'(x) - \\ & - \frac{(x/2)^3 \phi(2)}{2!} + \frac{(x/2)^7 \phi(4)}{3!4!} - \frac{(x/2)^{11} \phi(6)}{5!6!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{kei}'(x) = & (\ln(x/2) + \gamma) \text{bei}'(x) - \frac{\text{bei}(x)}{x} - \frac{\pi}{4} \text{ber}'(x) + \\
 & + \frac{x}{2} - \frac{(x/2)^5 \phi(3)}{2!3!} + \frac{(x/2)^9 \phi(5)}{4!5!} - \dots
 \end{aligned}$$

As fórmulas de recorrência que relacionam as funções de kelvin de ordem um com as suas derivadas primeiras são:

$$\text{ber}_1(x) = (\text{ber}'(x) - \text{bei}'(x))2^{-1/2}$$

$$\text{bei}_1(x) = (\text{ber}'(x) + \text{bei}'(x))2^{-1/2}$$

$$\text{ker}_1(x) = (\text{ker}'(x) - \text{kei}'(x))2^{-1/2}$$

$$\text{kei}_1(x) = (\text{ker}'(x) + \text{kei}'(x))2^{-1/2}$$

APÊNDICE B

PROGRAMA ANALISADOR DE CASCAS ESFÉRICAS
(FACE)

Alguns casos analisados são, relativamente, de fácil obtenção de resultados com o auxílio de uma calculadora eletrônica de pequeno porte. Entretanto, outros casos apresentam dificuldades adicionais sobretudo na resolução de casos que consideram um anel de reforço.

Como os valores de deslocamentos, momentos resultantes e forças de membrana deviam ser calculados para diversos pontos, o que implica muitos cálculos repetitivos, e conseqüentemente com muitas possibilidades de erros, foi codificado um programa computacional com base na solução analítica apresentada.

O programa é basicamente dividido em duas partes, uma que resolve os casos com momento fletor e a outra com carregamento axial.

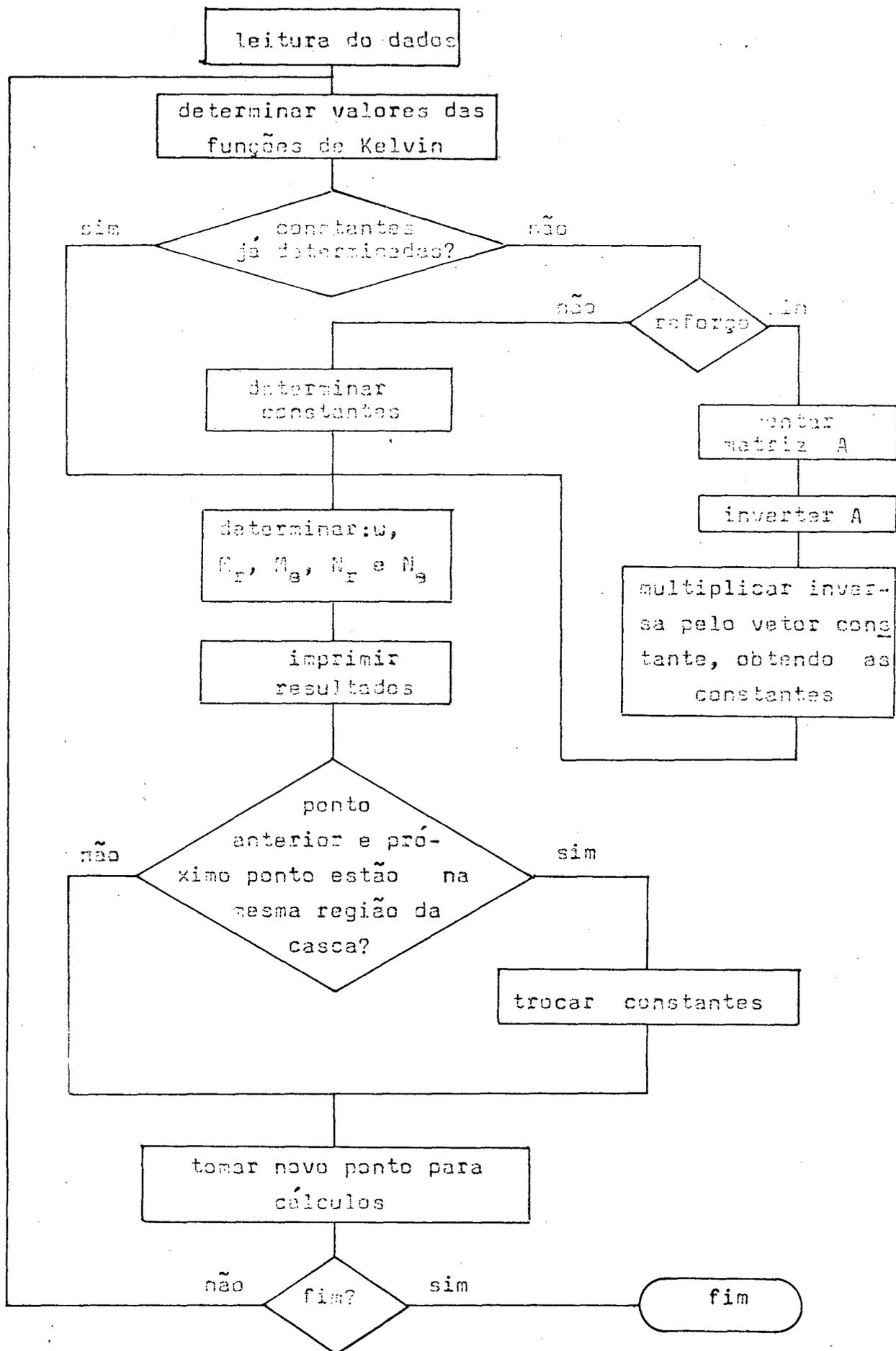
Neste programa as séries apresentadas no Apêndice A foram tomadas até os termos que fornecem potências de ordem dezoito, o que foi uma necessidade imposta pela precisão desejadas dos resultados.

A entrada de dados é extremamente simples e o tempo de computador, reduzido, o que atesta a vantagem do seu uso em relação aos programas numéricos disponíveis. A desvantagem do programa reside exatamente no fato de ele resolver somente os problemas específicos codificados, limitação esta inerente às soluções analíticas.

Entretanto, uma ampla gama de casos podem ser por ele solucionados, pois quaisquer valores de espessuras de cascas e de reforço, cargas, raios das cascas esféricas e cilíndricas e do anel de reforço, módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson (que podem ser diferentes para o cilindro, anel de reforço e casca esférica) são aceitos, desde que respeitados os limites impostos pela teoria de cascas esféricas finas de pequena curvatura.

A solução dos sistemas lineares sete por sete apresentados nos Capítulos 5, 6 e 8 é feita por subrotinas apropriadas dentro do programa.

O fluxograma simplificado abaixo representa o corpo básico do programa PACE.



Fluxograma do programa PACE

APÊNDICE C

MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA PACE

C.1 Introdução

Neste Apêndice é feita uma descrição expedita da utilização do programa PACE, mais com o intuito de mostrar as suas aplicações e a simplicidade do seu uso.

C.2 Entrada de dados

Os dados de um problema específico devem ser fornecidos através de apenas quatro cartões, na seguinte ordem:

1º cartão

LISTA R,h,h*,r₀,r*,t
FORMAT (1X,6(E12.4))

onde:

R - raio da casca esférica
h - espessura da casca esférica
h* - espessura do anel de reforço
r₀ - raio do bocal cilíndrico
r* - raio do contorno externo do anel de reforço
t - espessura do bocal cilíndrico

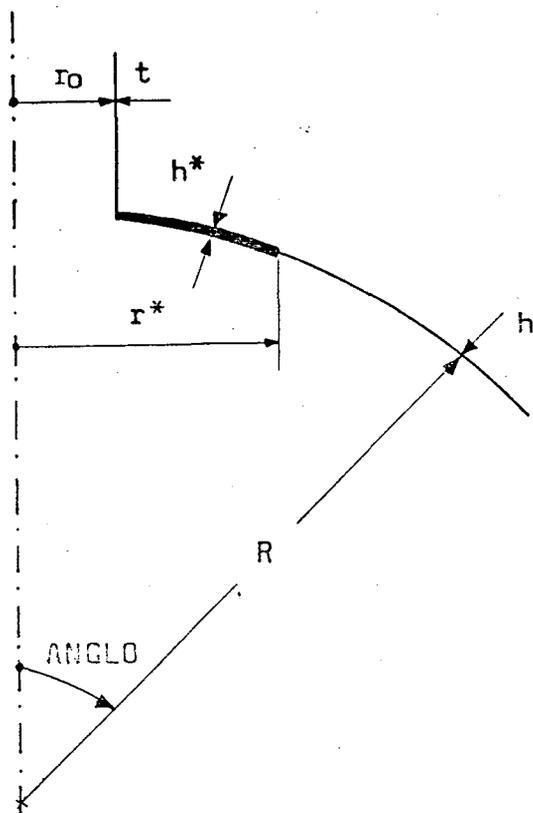


Fig.C.1

2º cartão

LISTA NESP, ANGLO
 FORMAT (1X, I3, E10.4)

onde:

NESP - número de espaçamentos desejados entre r_0 (ponto inicial) e $R \cdot \text{seno}(\text{ANGLO})$ para os casos sem reforço, e entre r_0 e r^* para os casos com anel de reforço. Para este segundo caso, NESP pode ser sensivelmente menor do que para o primeiro, pois a região considerada para a divisão equidistante dos pontos é menor, sendo que para os demais pontos ($r > r^*$), os espaçamentos são iguais aos da região de reforço.

ANGLO - ângulo ϕ máximo até onde se deseja uma análise da casca esférica, não devendo exceder 30° (limitação da teoria).

3º cartão

LISTA E1, XNU1, E2, XNU2, E3, XNU3
 FORMAT (1X, 6(E12.4))

onde:

E1, E2, E3 - são os módulos de elasticidade da casca esférica, do bocal e do anel de reforço, respectivamente.

OBS - o bocal rígido pode ser simulado, fazendo-se E2 bastante elevado.

XNU1, XNU2, XNU3 - são os coeficientes de Poisson dos materiais da casca esférica, do bocal e do anel de reforço, respectivamente.

4º cartão

LISTA P, M, IADIM
 FORMAT (1X, 2E12.4, 3X, I2)

onde:

P - carga axial aplicada no bocal

M - momento fletor externo, aplicado no bocal

IADIM - se é desejada uma saída dos dados adimensionalizada, deve-se fazer $IADIM \geq 1$, caso contrário, deixa-se em branco o espaço correspondente.

OBS - Qualquer número de modelos pode ser rodado de uma só vez, bastando para tanto, apenas seqüenciar os quatro cartões correspondentes à entrada de dados de cada um deles.

Um cartão em branco no fim do último modelo termina a leitura de novos casos.

As cargas P e M , estáticas, devem ser aplicadas separadamente, de acordo com os desenvolvimentos realizados neste trabalho.

C.3 Saída de dados

A apresentação final dos resultados começa com a impressão dos dados de entrada. Logo após, aparecem os valores das constantes determinadas internamente pelo programa (ver Capítulos 3 a 8).

A seguir são impressos os resultados finais (w , M_r , M_θ , N_r e N_θ), para cada ponto definido pela variável s , também impressa na mesma linha. O primeiro ponto apresentado é o definido pela intersecção do bocal com a casca esférica; os demais pontos podem ser definidos conforme explicitado no Capítulo 9.