

**Análise Elastoplástica de Placas Semi-Espessas
Sujeitas a Grandes Deflexões Utilizando o Método
dos Elementos Finitos**

Dissertação

Eng. José Aguiomar Foggiatto, M. Eng. Mec.

1997

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS
SEMI-ESPESSAS SUJEITAS A GRANDES DEFLEXÕES
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação Submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para
Obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica

José Aguiomar Foggiatto

Florianópolis, fevereiro de 1997.

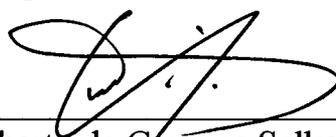
Análise Elastoplástica de Placas Semi-Espessas Sujeitas a Grandes Deflexões Utilizando o Método dos Elementos Finitos

José Aguiomar Foggiatto

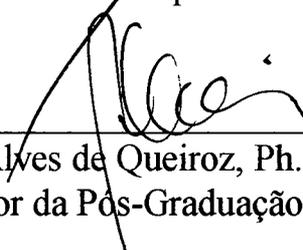
Esta Dissertação foi Julgada Adequada para a Obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Especialidade Engenharia Mecânica, Área de Concentração Projeto e Análise de Componentes Mecânicos, e Aprovada em sua Forma Final pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica



Carlos Alberto de Campos Selke, Ph.D.
Orientador

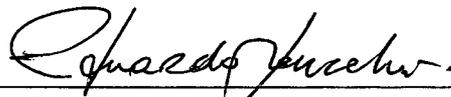


Abelardo Alves de Queiroz, Ph.D.
Coordenador da Pós-Graduação

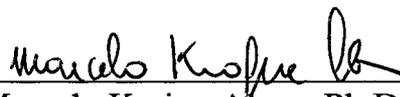
Banca Examinadora



Arno Blass, Ph.D.
Presidente



Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Membro



Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Membro



Jucélio Tomás Pereira, M.Sc.
Membro

DEDICATÓRIA

à minha mãe (*in memoriam*)

AGRADECIMENTOS

ao CEFET-PR e à CAPES-PICDT, pelo suporte financeiro;

ao professor Carlos Alberto de Campos Selke, pela orientação deste trabalho, pela amizade e confiança depositada;

aos professores Marcelo Alves e Eduardo Fancello, pela ajuda, amizade e experiência compartilhada;

ao professor Arno Blass, pelo exemplo de dedicação na carreira do magistério;

aos amigos Marco Antonio Luersen e Jucélio Tomás Pereira, por todo tempo e atenção dispensados nos momentos mais difíceis;

a Jackson Barp e André Novotny, que foram os grandes companheiros nas madrugadas de trabalho e de discussões filosóficas no GRANTE;

aos demais amigos do GRANTE, em especial a Lauro Nicolazzi, Prof. Domingos, André Ogliari, Pablo, Tancredo, Raminelli, Sula, Ivan, Yuji, Altamir Dias, Vinadé, Mauro (+ Cleusa) e Armando (+ Cris), e Rodrigo Rossi.

a Cláudio Avila pela parceria e apoio nas madrugadas de trabalho no CEFET;

a todos os amigos do CEFET-PR que me incentivaram e que acreditaram no término deste trabalho;

a Nichele, Alessandra, Nilmara, Marilea, Patrícia, Lourdes, Leila, Cristine (Titi), Deborah, Lídia, e Denise pelo incentivo, companhia e amizade;

a meu pai, minha irmã Mabel e meus irmãos pelo apoio nas horas difíceis.

e, em especial, a Richard e Rosamélia (minha família em Florianópolis), por toda a ajuda, apoio psicológico e excelente convívio;

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Revisão Bibliográfica	3
1.2	Descrição do Escopo do Trabalho	7
2	Formulação de Problemas de Mecânica dos Sólidos com Não-Linearidades Geométrica e Material	9
2.1	Cinemática do Processo de Deformação	9
2.1.1	Introdução	9
2.1.2	Formulação Lagrangeana Atualizada	10
2.2	Medidas de Tensão e Deformação	12
2.2.1	Tensores Deformação	12
2.2.2	Tensores Tensão	15
2.3	Equações Diferenciais de Equilíbrio	19
2.3.1	Equações de Equilíbrio na Forma de Taxa	19
2.3.2	Condições de Contorno	20
2.3.3	Princípio dos Trabalhos Virtuais na Forma de Taxa	21
3	Formulação do Elemento Finito de Placa de Reissner-Mindlin Sujeito a Grandes Deslocamentos	23
3.1	Teorias de Placas	23
3.1.1	Introdução	23
3.1.2	Teoria de Placas de Reissner-Mindlin	24

3.2	Formulação Isoparamétrica	26
3.3	Discretização do Princípio do Trabalhos Virtuais na Forma de Taxa	29
3.4	Integração Numérica das Matrizes de Rigidez	33
3.5	Atualização das Tensões	35
4	Relação Constitutiva Elastoplástica	37
4.1	Introdução	37
4.2	CrITÉrio de Escoamento	37
4.2.1	Introdução	37
4.2.2	CrITÉrio de Escoamento de von Mises	39
4.3	Regra de Encruamento	42
4.3.1	Introdução	42
4.3.2	Regra de Encruamento Isotrópico	43
4.4	Regra de Fluxo	44
4.4.1	Introdução	44
4.4.2	Regra de Fluxo Associada	44
4.4.3	Regra de Fluxo Associada a função de Escoamento de von Mises	45
4.5	Relação Constitutiva Elastoplástica	46
4.6	Particularização da Matriz Constitutiva Elastoplástica para Placas Semi-Espessas	47
4.7	Generalização da Relação Constitutiva Elastoplástica para Deformações Finitas	50
4.8	Integração da Matriz Constitutiva	50

5	Resultados Numéricos	54
5.1	Introdução	54
5.2	Placa quadrada engastada com não-linearidade geométrica	55
5.3	Placa circular engastada, com não-linearidade geométrica	58
5.4	Placa retangular furada, tracionada, com não-linearidade material . .	61
5.5	Placa quadrada, engastada, com não-linearidade material	65
5.6	Placa furada flexionada com não-linearidade geométrica e material . .	69
6	Conclusões e Sugestões	72
A	APÊNDICE	79
A.1	Sub-Matrizes da Matriz de Rigidez Geométrica	79

Lista de Figuras

1	Cinemática do processo de deformação incremental de um corpo Ω . . .	11
2	Condições de contorno de um corpo Ω	20
3	Indicação da superfície de referência em uma placa.	25
4	Elemento finito isoparamétrico de nove nós - sistema local (ξ, η)	27
5	Representação geométrica da superfície de escoamento de von Mises. .	41
6	Modelo matemático para representar o encruamento isotrópico.	43
7	Forma simplificada da curva tensão-deformação.	48
8	Integração da relação constitutiva com um sub-incremento.	52
9	Integração da matriz constitutiva utilizando m sub-incrementos. . . .	53
10	Placa quadrada engastada com carregamento distribuído.	55
11	Deslocamento central da placa quadrada engastada.	56
12	Convergência h para o problema da placa quadrada engastada (carga total).	58
13	Placa circular engastada submetida a um carregamento concentrado central.	59
14	Discretização de um quadrante da placa circular engastada.	59
15	Geometria e discretização de uma placa retangular furada.	61
16	Configurações deformada e indeformada da placa retangular furada tracionada.	62
17	Evolução da frente plástica de uma placa furada tracionada.	63
18	Evolução da frente plástica apresentada por Zienkiewicz (1977). . . .	64

19	Discretização utilizada por Zienkiewicz (1977).	64
20	Placa engastada submetida a um carregamento distribuído.	65
21	Evolução da frente plástica de uma placa quadrada.	67
22	Deslocamento central da placa quadrada.	67
23	Geometria da placa retangular furada.	69
24	Placa retangular furada sujeita a flexão.	70
25	Evolução da frente plástica em uma placa retangular com furo circular central sujeita a flexão, exibindo não-linearidades geométrica e material.	71

Lista de Tabelas

1	Deslocamento central de uma placa quadrada engastada sujeita a não linearidade geométrica.	57
2	Deslocamento central w de uma placa circular engastada sujeita a não- linearidade geométrica.	60
3	Deslocamento longitudinal de uma placa retangular furada sujeita a não-linearidade material.	62
4	Deslocamento central w de uma placa quadrada engastada sujeita a não-linearidades geométrica e material.	68
5	Deslocamento central de uma chapa retangular com um furo central sujeita a flexão, e apresentando não-linearidades geométrica e material.	70

RESUMO

O método dos elementos finitos é utilizado para a análise elastoplástica de placas semi-espessas sujeitas a grandes deflexões. Na formulação do problema é utilizado o princípio variacional de Hill na sua forma lagrangeana atualizada, uma vez que o mesmo tem se mostrado eficiente no modelamento de problemas com materiais elastoplásticos, com encruamento isotrópico. O comportamento elastoplástico das placas estudadas é modelado utilizando-se o critério de escoamento de von Mises e a regra de fluxo associada a função de escoamento de von Mises. O tensor incremento co-rotacional de Kirchhoff é empregado na formulação, devido à sua característica de invariância com as rotações e deslocamentos de corpo rígido e por garantir a simetria da matriz de rigidez.

O elemento finito obtido a partir desta formulação é o lagrangeano quadrilateral de 9 nós. Objetivando evitar uma excessiva rigidez, ou mesmo o travamento (*locking*) da estrutura, utilizou-se a técnica de integração reduzida seletiva de termos da matriz de rigidez do elemento, provenientes da consideração da deformação cisalhante transversal.

A integração ao longo da espessura do elemento é calculada numericamente através da regra de quadratura de Gauss-Lobatto, a qual permite uma melhor representação do processo de plastificação.

Este elemento finito de placa semi-espessa é utilizado na resolução de vários problemas não-lineares elastoplásticos de placas e os resultados obtidos são apresentados e comparados com soluções analíticas e numéricas disponíveis na literatura.

ABSTRACT

The finite element method is used to solve elastic-plastic problems of thick plates undergoing large deflections. Hill's variational principle, in its updated lagrangian form, is adopted in the formulation of the problem, since it has shown to be efficient in the modelling of elastic-plastic materials, with isotropic hardening. The behavior of the elastic-plastic plates is modelled using the von Mises yield criterion and the flow rule associated with von Mises yield function. Due to its invariance with the rigid body rotation and displacements and because it leads to a symmetric stiffness matrix, the co-rotational rate of Kirchhoff stress tensor is used in the formulation.

The element obtained from this formulation is the nine node isoparametric quadrilateral Lagrangian finite element. In order to avoid an excessive stiffness of the structure, or even the locking phenomenon, the element stiffness matrix terms, that originated from the transversal shear deformation part, are integrated using the reduced and selective integration technique.

The integration through the thickness of the element is numerically performed by the Gauss-Lobatto quadrature rule, which allows a better representation of the plastic process.

This thick plate finite element is used to solve several non-linear elastic-plastic problems of plates and the results obtained are compared with analytical and numerical solutions available in the literature.

1 Introdução

O estudo de problemas elastoplásticos não lineares na mecânica estrutural tem sido objeto de grande interesse nas últimas décadas. A inexistência de soluções analíticas para grande parte destes problemas, tem motivado o aparecimento de inúmeras formulações que possibilitem a solução numérica desses casos, fazendo-se uso de algum método numérico consagrado, como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos. O desenvolvimento e a disponibilidade de computadores de altíssima capacidade de processamento, vem tornando possível a implementação de modelos constitutivos de representação do comportamento do material, cada vez mais realísticos. A modelagem de problemas de elastoplasticidade com grandes deformações é, ainda hoje, considerada um tópico de difícil tratamento (Khan e Huang, 1995), visto que, além da complexidade matemática das formulações, estas devem utilizar parâmetros materiais, obtidos experimentalmente, que levem a resultados numéricos compatíveis com a realidade.

O presente trabalho apresenta um estudo sobre o comportamento de placas semi-espessas, quando estas estão sujeitas a carregamentos que causam a plastificação de parte da estrutura e ainda provocam grandes deslocamentos, o que caracteriza o aparecimento de dois tipos de não-linearidades: a material e a geométrica (Gadala *et al*, 1984; Fonseca, 1990). Uma formulação baseada no princípio variacional de Hill (1959) e adaptada por McMeeking e Rice (1975), para problemas com grandes deformações elastoplásticas e grandes deslocamentos, é utilizada na sua forma la-grangeana atualizada e o comportamento elastoplástico é modelado considerando-se

o encruamento como sendo isotrópico, o critério de escoamento de von Mises e a regra de fluxo associada com a função de escoamento de von Mises.

O elemento finito isoparamétrico quadrilateral de nove nós é utilizado na discretização dos domínios das placas estudadas. Para evitar o aparecimento de uma rigidez excessiva, ou mesmo o travamento (*locking*) da estrutura, é utilizada a técnica de integração reduzida seletiva dos termos da matriz de rigidez do elemento, provenientes da consideração da deformação cisalhante transversal. A integração numérica da matriz de rigidez é feita usando-se duas regras de quadratura: Gauss-Legendre para a superfície da placa e Gauss-Lobatto ao longo da espessura.

A implementação numérica deste trabalho é feita em linguagem FORTRAN, utilizando o algoritmo *skyline* não simétrico, para a resolução do sistema de equações, e o método de Newton-Raphson (Bathe, 1982) como algoritmo iterativo. Como suporte de hardware é usado o super computador de alto desempenho IBM 9076 SP/2 (<http://www.ufsc.br:80/npd/pad/pad03.htm>), existente na UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina.

No próximo item deste capítulo, é feita uma revisão bibliográfica para possibilitar o entendimento da evolução histórica na busca das soluções para problemas com não-linearidades em placas semi-espessas e para enfatizar a importância do presente trabalho no contexto da linha de pesquisa desenvolvida.

1.1 Revisão Bibliográfica

Na modelagem de estruturas do tipo placa é possível a aproximação de um modelo tridimensional por um modelo bidimensional. Kirchhoff, em 1850, visando tornar mais simples o estudo do comportamento de placas, desenvolveu uma teoria, baseada em algumas hipóteses *ad hoc*, que levou a um modelo bi-dimensional. Com o aparecimento dos primeiros computadores, esta teoria tornou-se a escolha favorita nas implementações numéricas que tinham por objetivo a solução de problemas de placas. No entanto esta teoria, chamada de Teoria Clássica de Placas, se limitava ao estudo de placas finas, pois ela não leva em consideração o efeito das tensões cisalhantes transversais.

Buscando a solução de problemas de propagação de ondas em placas, que a teoria de placas finas não resolvia adequadamente, Reissner (1945), desenvolveu uma teoria de placas, baseada em um campo de tensões, que considera o efeito das tensões cisalhantes transversais. Mindlin (1951), sem o conhecimento da teoria de Reissner, obteve uma teoria similar, partindo de um campo de deslocamentos. As contribuições destes dois pesquisadores levaram à Teoria de Primeira Ordem de Placas Semi-espessas, ou, também chamada, Teoria de Reissner-Mindlin, utilizada neste trabalho. A popularidade desta teoria se deve ao fato de que, quando implementada usando o Método dos Elementos Finitos, as funções de interpolação, utilizadas para representar de forma aproximada os deslocamentos, exigem apenas continuidade C^0 ,

isto é, são polinômios de primeira ordem, pois os deslocamentos e rotações são aproximados independentemente. Outras teorias de placas têm sido desenvolvidas, com o campo de deslocamentos sendo representado por polinômios de ordem superior, considerando-se a variável na direção normal à placa. O objetivo de se utilizar essas teorias é realizar uma modelagem mais precisa e adequada de problemas de contato, de problemas com placas laminadas, entre outros. Destas teorias de ordem superior, é importante citar a teoria de Lo, Christensen e Wu (1977) e a teoria de Reddy (1984).

A utilização da Teoria de Reissner-Mindlin quando se usa o Método dos Elementos Finitos na simulação numérica de problemas de flexão de placas, faz com que, quando a espessura se torna muito pequena, ocorra uma excessiva rigidez à flexão (Hughes, 1987). Esse fenômeno, conhecido como travamento de cisalhamento (*shear locking*), ocorre devido à sobre-avaliação da contribuição energética da parcela de deformação cisalhante transversal, comparada com a da deformação de flexão, na expressão da energia potencial do sistema (Hughes, 1987). Para resolver o problema do travamento, duas técnicas podem ser empregadas com sucesso: a integração reduzida uniforme e a integração reduzida seletiva. A primeira integra os termos de flexão e de cisalhamento da matriz de rigidez utilizando um ponto de integração a menos que o necessário para a integração exata dos mesmos. Já a segunda consiste em fazer com que a parcela da matriz de rigidez relacionada com o cisalhamento transversal seja avaliada com um ponto de integração a menos do que os utilizados nas demais parcelas (Zienkiewicz *et al*, 1971). No entanto, o uso destas técnicas faz com que apareçam modos de deformação associados à energia nula, também chamados de modos espúrios. Foram então desenvolvidos métodos de estabilização para possibilitar o controle destes mo-

dos, inibindo a sua manifestação. É importante notar que, quando a integração seletiva reduzida é aplicada, ao se utilizar o elemento finito isoparamétrico quadrilateral de nove nós, verifica-se a possibilidade do aparecimento de apenas um modo espúrio (Hughes, 1987).

Novotny *et al* (1994) mostrou que, para melhor captar-se o processo de plastificação, a regra de quadratura de Gauss-Lobatto é a mais adequada para a integração numérica da matriz de rigidez ao longo da espessura. Esta regra permite ter-se pontos de integração nas fibras interna e externa da placa, locais em que se situam as maiores tensões num problema de flexão de placas.

As equações constitutivas, utilizadas na teoria da plasticidade, são usualmente escritas em forma incremental, e a tensão é considerada como sendo dependente da história da deformação plástica. Um princípio importante a ser satisfeito, o qual foi postulado por Truesdell e Noll (1965), é o da objetividade material (*principle of material frame indifference*) das equações constitutivas utilizadas em plasticidade finita. De acordo com este princípio, estas equações devem ser invariantes aos movimentos de corpo rígido. Muito embora o tensor tensão de Cauchy seja objetivo, sua derivada material perde esta característica, tornando-o inadequado para o uso nas relações constitutivas (Khan e Huang, 1995). Para resolver este problema, Jaumann criou um tensor co-rotacional, que adiciona dois termos à taxa do tensor tensão de Cauchy tornando-o objetivo (Kleiber, 1989). Inúmeros tensores tensão objetivos são listados pela literatura (Bazant, 1971; Dafalias, 1983; Liu e To, 1995; Johnson e Bammann, 1984), e decidir qual é o mais adequado para cada relação constitutiva tem se constituído em motivo de muita polêmica no meio científico. Nagtegaal e de Jong (1981)

mostraram que o uso do tensor de Jaumann, especialmente em problemas de cisalhamento simples utilizando encruamento cinemático, gera oscilações na evolução da superfície de escoamento. McMeeking e Rice (1975), alertam para o fato de que o uso desse tensor nas equações de Prandtl-Reuss, leva a matriz de rigidez a perder a propriedade de simetria, e sugerem o uso do tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff como uma boa alternativa.

Na mecânica dos sólidos, as formulações lagrangeanas, total ou atualizada, são normalmente utilizadas, principalmente quando se trabalha com não-linearidades geométrica e material (Gadala *et al*, 1984). Pica *et al* (1980) utilizaram uma formulação lagrangeana total para resolver problemas de flexão de placas de Reissner-Mindlin com não-linearidade geométrica. No entanto, neste trabalho é utilizada uma formulação lagrangeana atualizada, e o uso da mesma se justifica pelo fato dela ser mais adequada quando se está utilizando relações constitutivas na forma de taxas e pela sua melhor eficiência computacional (Liu e To, 1995). Imaeda (1992) e Ribeiro Jr. (1995) utilizaram com sucesso o princípio variacional de Hill (1959) modificado por McMeeking e Rice (1975) para grandes deformações elastoplásticas e grandes deslocamentos, para resolver problemas de elastoplasticidade em cascas finas e cascas semi-espessas, respectivamente. Este sucesso motivou sua aplicação neste trabalho sobre problemas de elastoplasticidade em placas semi-espessas.

McMeeking e Rice (1975) utilizaram a formulação baseada no princípio variacional de Hill, afirmando que esta é especialmente adequada para ser aplicada a materiais de Prandtl-Reuss, com encruamento isotrópico. A regra de fluxo associada a função de escoamento de von Mises é considerada a mais adequada para descrever o compor-

tamento dos materiais metálicos (Chen e Han, 1988). Para a integração da relação constitutiva elastoplástica muitos algoritmos têm sido propostos, como os de Nagtegaal e de Jong (1981), Simo e Taylor (1986) e Ortiz e Simo (1986). No entanto, o algoritmo desenvolvido por Hinton e Owen (1980), por ser de mais simples implementação e ter se demonstrado eficaz em trabalhos recentes, foi aqui utilizado.

A seguir será apresentada uma breve descrição do que será tratado em cada capítulo deste trabalho.

1.2 Descrição do Escopo do Trabalho

O capítulo 1 descreve de forma sucinta o conteúdo deste trabalho, procurando ressaltar os pontos mais importantes que foram desenvolvidos. Em seguida é apresentada uma revisão bibliográfica, enumerando os principais trabalhos que serviram de base para o desenvolvimento desta dissertação.

O capítulo 2 apresenta alguns conceitos básicos da elasticidade finita, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Atenção especial é dada às medidas de tensão e deformação, já que o sucesso da formulação utilizada depende da correta escolha do par dual tensão-deformação. O princípio dos trabalhos virtuais na forma de taxa é apresentado, na forma como foi proposto por McMeeking e Rice (1975).

No capítulo 3 é desenvolvida a formulação do elemento finito de placa de Reissner-Mindlin para problemas com não-linearidades geométrica e material. Inicialmente, a teoria de placas semi-espessas é apresentada de forma resumida. A formulação isoparamétrica é utilizada para a formulação do elemento finito usado na discretização

do princípio dos trabalhos virtuais na forma de taxa. Finalizando este capítulo, são apresentados detalhes sobre a integração numérica das matrizes de rigidez e sobre o processo de atualização das tensões, a cada passo de carga.

No capítulo 4 apresentam-se alguns tópicos da teoria da plasticidade. A relação constitutiva para o caso de elastoplasticidade infinitesimal é apresentada e desenvolvida até sua generalização para o caso de elastoplasticidade finita. No final, é apresentada a forma como é realizada a integração da relação constitutiva elastoplástica.

Os resultados numéricos obtidos, utilizando a presente formulação, são apresentados no capítulo 5. Para validar a formulação desenvolvida nos capítulos 3 e 4, foram selecionados alguns problemas de flexão de placas, envolvendo não-linearidade geométrica, não-linearidade material e o acoplamento destes dois tipos de não-linearidades.

Finalizando, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e as sugestões para a continuidade desta linha de pesquisa.

2 Formulação de Problemas de Mecânica dos Sólidos com Não-Linearidades Geométrica e Material

2.1 Cinemática do Processo de Deformação

2.1.1 Introdução

Para descrever o processo de deformação de um corpo, pode-se utilizar várias metodologias para a localização das partículas que o compõem, a cada instante, especificando-se a posição de cada partícula em um dado instante t . Apresentando estas metodologias, Malvern (1969), enumera as descrições material, referencial (lagrangeana total), espacial (euleriana) e relativa (lagrangeana atualizada), sendo que somente as três últimas são adequadas à resolução de problemas da Mecânica do Contínuo utilizando o Método dos Elementos Finitos (Gadalla *et al.*, 1984).

A formulação lagrangeana utiliza as coordenadas materiais (estado indeformado), sendo extensamente utilizada na modelagem de problemas de Mecânica do Contínuo devido ao fato do estado indeformado ter seus parâmetros bem definidos antes da resolução do problema. O que diferencia a formulação lagrangeana total da formulação lagrangeana atualizada é qual configuração de referência que está sendo utilizada. Na formulação lagrangeana total, a configuração de referência é a inicial, enquanto

que na formulação lagrangeana atualizada, um estado intermediário recém calculado é usado como configuração de referência para o cálculo do estado subsequente.

Neste trabalho será utilizada a formulação lagrangeana atualizada, por ser a mesma mais adequada quando são utilizadas, na formulação do problema, relações constitutivas na forma de taxas e ainda por ela resultar em melhor eficiência computacional (Liu e To, 1995).

2.1.2 Formulação Lagrangeana Atualizada

Considerando-se um sistema de coordenadas retangulares cartesianas, pode-se descrever o processo de deformação de um corpo Ω deformável analisando a posição de um ponto material arbitrário P , contido em Ω , em três instantes distintos t_0 , t e $t + \Delta t$, correspondendo, respectivamente às configurações inicial, intermediária (de referência) e final, conforme mostra a Figura 1.

No instante inicial t_0 , o ponto P_0 , pertencente ao domínio Ω_0 , é livre de tensões e é localizado pelo vetor posição x . Após a aplicação de uma parcela qualquer do carregamento, no tempo t , o corpo Ω_t tem o ponto P_t identificado pelo vetor X . O vetor deslocamento global obtido após a aplicação deste carregamento, é dado por

$$u = X - x. \quad (1)$$

Continuando o processo de deformação incremental, aplica-se o próximo incremento de carga, obtendo-se uma nova configuração $\Omega_{t+\Delta t}$, sendo que o ponto $P_{t+\Delta t}$ é posicionado pelo vetor Y . Define-se então o vetor incremento de deslocamento Δu

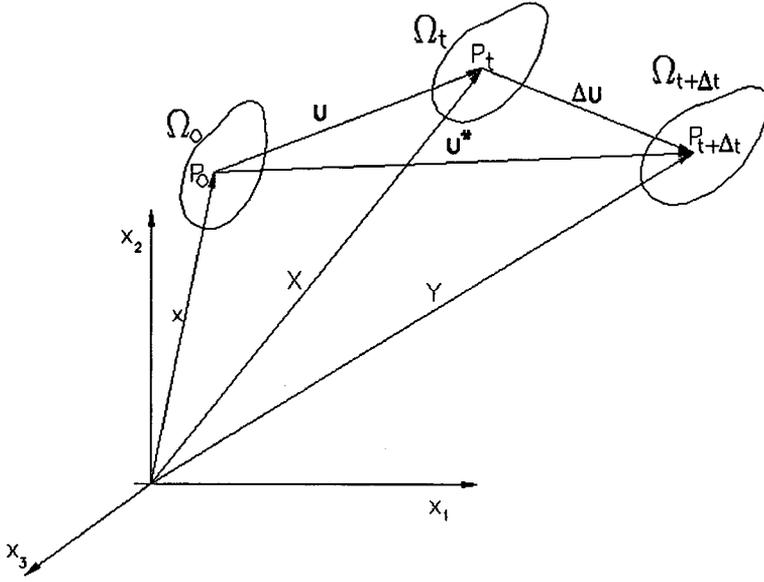


Figura 1: Cinemática do processo de deformação incremental de um corpo Ω .

entre Ω_t e $\Omega_{t+\Delta t}$, e o vetor deslocamento global u^* entre Ω_0 e $\Omega_{t+\Delta t}$, pelas expressões

$$\Delta u = Y - X \quad (2)$$

e

$$u^* = u + \Delta u. \quad (3)$$

respectivamente. Em outras palavras, o que caracteriza a formulação lagrangeana atualizada é a peculiaridade de que o processo de deformação produzido pelo incremento de carga, que leva o corpo de uma configuração qualquer Ω_n para a próxima Ω_{n+1} , terá como referência a configuração Ω_n .

2.2 Medidas de Tensão e Deformação

2.2.1 Tensores Deformação

Algumas medidas de deformação, consideradas importantes no estudo de problemas de Mecânica dos Sólidos, como o tensor gradiente de deformação, o tensor deformação de Green, o tensor deformação de Almansi e o tensor taxa de deformação são apresentados a seguir.

A- Tensor Gradiente de Deformação: Considerando o ponto P_0 , posicionado pelo vetor posição x , na configuração Ω_0 e o ponto P_t , posicionado por X em Ω_t (Figura 1), onde $X = X(x, t)$, define-se o tensor gradiente de deformação \mathbf{F} , entre as configurações Ω_0 e Ω_t , como (Washizu, 1982)

$$\mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x}. \quad (4)$$

Apesar da simplicidade na sua obtenção, este tensor de segunda ordem não é simétrico e nem invariante aos movimentos de corpo rígido, o que justifica a necessidade de se definir outros tensores deformação. Entre estes outros tensores deformação, destacam-se os tensores de Green, de Almansi e taxa de deformação como os mais utilizados em problemas de Mecânica dos Sólidos (Belytschko, 1983).

B- Tensor Deformação de Green: O tensor deformação de Green, também chamado de tensor de Green-Lagrange, é um tensor deformação lagrangeano definido por (Malvern, 1969)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (5)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ é denominado tensor deformação de Cauchy-Green à direita, o qual é simétrico e unitário em relação aos movimentos de corpo rígido. O tensor de Green é simétrico e invariante aos movimentos de corpo rígido sendo, portanto, objetivo. A expressão (5) pode ser escrita, em forma indicial¹, em função dos vetores posição, como

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right), \quad (6)$$

onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker².

Substituindo a expressão (1) em (6), obtém-se a expressão deste tensor em termos de deslocamentos, ou seja,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (7)$$

Os dois primeiros termos deste tensor representam a parte linear do mesmo, enquanto que o terceiro termo representa a parte não-linear. Ao considerar-se o processo de deformação entre as configurações Ω_t e $\Omega_{t+\Delta t}$, obtém-se, similarmente, o tensor incremento de deformação atualizado

$$\Delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} \right). \quad (8)$$

Usualmente analisam-se processos de deformação incremental em que os incrementos são considerados pequenos. Uma vez que duas configurações subseqüentes quaisquer são suficientemente próximas, pode-se escrever a versão linearizada do tensor incre-

¹ Quando não explicitados, os índices latinos variam de 1 a 3 e os índices gregos variam de 1 a 2 seguindo a convenção de soma de Einstein.

² $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

mento de deformação atualizado como

$$\Delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} \right). \quad (9)$$

C- Tensor Deformação de Almansi: O tensor deformação de Almansi, utilizado para descrições eulerianas de movimento, embora também seja simétrico, não é invariante aos movimentos de corpo rígido. Sua expressão é dada por

$$\gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}), \quad (10)$$

onde $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ é denominado tensor deformação de Cauchy-Green à esquerda, possuindo as mesmas propriedades do tensor \mathbf{C} . Em termos de deslocamentos, a expressão (10) pode ser escrita como

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} - \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (11)$$

D- Tensor Taxa de Deformação: Na descrição do processo de deformação de um corpo, principalmente quando este é submetido a deformações plásticas, necessita-se de um tensor que permita acompanhar toda a história de deformação. O tensor taxa de deformação \mathbf{D} , também chamado tensor velocidade de deformação, bastante utilizado em muitas teorias de plasticidade, tem esta propriedade e é definido em termos de taxas de deslocamentos pela expressão³ (Malvern, 1969)

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} \right). \quad (12)$$

³ A notação usando o ponto sobre-escrito à variável representa a derivada desta variável em relação ao tempo.

E- Tensor Vorticidade: O tensor vorticidade w (tensor *spin*) é um tensor anti-simétrico que representa a taxa de rotação de um corpo. Sua interpretação física pode ser explicada considerando-se o caso em que o corpo, em um determinado instante, possua todas as componentes do tensor taxa de deformação nulas, sendo que o movimento instantâneo resultante torna-se uma rotação de corpo rígido representada por este tensor. O tensor vorticidade é bastante usado na definição de tensores taxa de tensão, e é dado pela expressão

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} \right). \quad (13)$$

2.2.2 Tensores Tensão

Na Mecânica dos Sólidos, vários tensores tensão são utilizados. Entre eles, devido ao fato de serem relevantes para o desenvolvimento do presente trabalho, são a seguir brevemente descritos o tensor tensão de Cauchy, o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, o tensor taxa de tensão de Jaumann e o tensor co-rotacional de Kirchhoff.

A- Tensor Tensão de Cauchy: O tensor tensão de Cauchy, também chamado de tensor tensão verdadeira, denotado por σ , oferece a grande vantagem de proporcionar equações de equilíbrio mais simples além de ser amplamente utilizado na modelagem de problemas em que ocorra o escoamento do material. Contudo, como ele é definido na configuração deformada, seu cálculo é de difícil realização. Outro fator importante a ser considerado, é o fato de que, embora este tensor seja objetivo, sua derivada material não é, inviabilizando seu uso em relações constitutivas usadas na elastoplasticidade finita.

B- Primeiro Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff: Com a dificuldade de cálculo da configuração deformada, tem-se buscado a facilidade de trabalhar com um tensor tensão na configuração indeformada (descrição lagrangeana). Para tal, foi definido o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff, que é dado pela expressão (Atkin e Fox, 1980)

$$\mathbf{T} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \quad (14)$$

onde $J = \det(\mathbf{F})$ é o jacobiano da transformação (relação entre as densidades dos corpos nas configurações inicial e final).

C- Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff: Como o tensor acima, dado pela expressão (14), em geral não é simétrico, seu uso pode ser inconveniente e assim, de sua simetrização, definiu-se o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, que é dado por

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (15)$$

Este tensor simétrico tem sido usado em problemas de elasticidade finita em que a relação constitutiva não é dependente da trajetória (*path dependent*) (Luersen, 1994).

D- Tensor Tensão de Jaumann: O fato da taxa do tensor tensão de Cauchy não ser objetiva, motivou Jaumann a desenvolver um tensor co-rotacional que tivesse essa característica. Este tensor, de grande utilização em problemas com não-linearidades geométrica e material, recebeu a denominação de tensor tensão de Jaumann. Seu uso é conveniente em equações constitutivas na forma de taxa e em materiais dependentes

da trajetória. A expressão que o define é dada por (Johnson e Bammann, 1983)

$$\boldsymbol{\tau}^J = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{w}, \quad (16)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ é a taxa do tensor tensão de Cauchy.

Comparação entre os usos do Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff e o Tensor de Jaumann: No estudo da Elasticidade Finita é interessante comparar os usos do segundo tensor de Piola-Kirchhoff com o tensor taxa de tensão de Jaumann. Estes dois tensores são bastante utilizados na modelagem de problemas com grandes deslocamentos. A grande diferença entre eles é que o primeiro, representa a tensão, em um material elástico ou hiper-elástico, calculada a partir da deformação total corrente. Por outro lado o tensor de Jaumann é relacionado com a taxa de deformação, o que exige sempre um processo de integração para se poder avaliar a tensão de Cauchy corrente.

Esta diferença, deixa claro sob que condições é mais efetiva a utilização de um ou outro tensor. Se a relação constitutiva não é dependente da trajetória, não requerendo então um processo de integração, o uso do segundo tensor de Piola-Kirchhoff é mais indicado, ao passo que para análise de materiais dependentes da trajetória, o uso do tensor tensão de Jaumann deve ser considerado (Liu e To, 1995).

Nagtegaal e de Jong (1981), desaconselham o uso do tensor de Jaumann em problemas em que ocorra cisalhamento simples com o material admitindo encruamento cinemático, devido a oscilações na evolução da superfície de escoamento. Outro inconveniente de seu uso em problemas de elastoplasticidade, é que quando estabelecidas as relações de Prandtl-Reuss, ele não preserva a simetria da parcela de rigidez advinda

do termo constitutivo. O tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff pode ser utilizado para garantir esta simetria (McMeeking e Rice, 1975).

E- Tensor Tensão Co-rotacional de Kirchhoff: Este tensor é proposto como sendo o tensor de Kirchhoff definido na configuração corrente em termos de coordenadas co-rotacionais. O tensor de Kirchhoff é definido como (Kleiber, 1989)

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}. \quad (17)$$

Derivando em relação ao tempo a expressão (17) chega-se a

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{J}\boldsymbol{\sigma} + J\dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (18)$$

e, usando a propriedade $(\det \dot{\mathbf{F}}) = \det \mathbf{F} \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})$, tem-se que (Gurtin, 1981)

$$\dot{J} = J \operatorname{tr}(\mathbf{D}), \quad (19)$$

onde $\operatorname{tr}(\mathbf{D})$ é o traço do tensor taxa de deformação. Substituindo (19) em (18) chega-se a

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}}{J} - \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{D}). \quad (20)$$

Substituindo a expressão (20) em (16) tem-se

$$\boldsymbol{\tau}^J + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{D}) = \frac{1}{J} (\dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{w}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{w}). \quad (21)$$

Assim denominar-se-á como tensor co-rotacional de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}^*$, o termo $\boldsymbol{\tau}^J + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{D})$, ou seja

$$\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{\tau}^J + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{D}), \quad (22)$$

que também pode ser escrito como (Kikuchi e Cheng, 1983)

$$\boldsymbol{\tau}^* = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{w} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{D}). \quad (23)$$

É importante ter-se uma relação entre a taxa do primeiro tensor de Kirchhoff e o tensor co-rotacional de Kirchhoff. Esta é dada, em forma indicial, por (Hill, 1959)

$$\dot{T}_{ij} = \tau_{ij}^* - \sigma_{kj}D_{ki} - \sigma_{ik}D_{kj} + \sigma_{ik}\dot{u}_{j,k}. \quad (24)$$

Finalmente, para escolher-se corretamente o par tensão-deformação, a ser utilizado na formulação, dois fatores devem ser considerados: os dois tensores devem ser energeticamente conjugados e devem estar em concordância com a lei constitutiva utilizada para modelar o comportamento do material. Neste trabalho foi utilizado o tensor taxa de deformação conjuntamente com o tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff (McMeeking e Rice, 1975).

2.3 Equações Diferenciais de Equilíbrio

2.3.1 Equações de Equilíbrio na Forma de Taxa

As equações de equilíbrio são um caso particular das equações de movimento, quando se considera o equilíbrio estático do corpo (Malvern, 1969).

As equações do movimento, na configuração de referência, em termos do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff, são expressas por

$$T_{ij,j}(x, t) + b_i(x, y) = \rho\ddot{u}_i(x, t), \quad (25)$$

onde b_i representa o vetor forças de corpo e \ddot{u} é a aceleração.

Expressando (25) na forma de taxas tem-se

$$\dot{T}_{ij,j}(x, t) + \dot{b}_i(x, y) = \frac{d}{dt} [\rho\dot{u}_i(x, t)] \quad (26)$$

e considerando-se um processo quase-estático, a influência dos termos de inércia pode ser desprezada, resultando nas equações de equilíbrio na forma de taxa

$$\dot{T}_{ij,j}(x, t) + \dot{b}_i(x, y) = 0. \quad (27)$$

2.3.2 Condições de Contorno

Dividindo-se o contorno Γ de um domínio Ω em Γ_D e Γ_F , conforme o apresentado na Figura 2, de tal forma que

$$\Gamma_D \cup \Gamma_F = \Gamma \quad (28)$$

$$\Gamma_D \cap \Gamma_F = \emptyset,$$

estabelece-se que as restrições das taxas de deslocamento são aplicadas em Γ_D e que

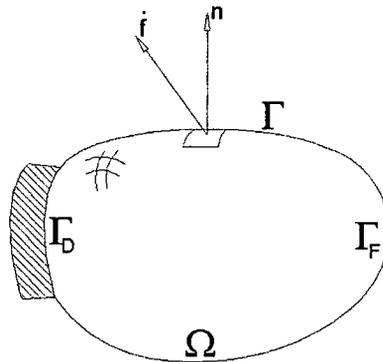


Figura 2: Condições de contorno de um corpo Ω .

as taxas de forças de superfície são prescritas em Γ_F . Com isto, pode-se definir as condições de contorno para as equações de equilíbrio na forma de taxas como sendo

$$\dot{T}_{ij}(x, t)n_j(x, t) = \dot{f}_i(x, t) \quad \forall x \in \Gamma_F \quad (29)$$

$$\dot{u}_i(x, t) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_D.$$

2.3.3 Princípio dos Trabalhos Virtuais na Forma de Taxa

O princípio dos trabalhos virtuais representa uma forma de se escrever as equações de equilíbrio em um corpo sujeito a determinadas condições de contorno. Para que o corpo esteja em equilíbrio, tem-se que garantir que o trabalho virtual total das forças externas seja igual a variação da energia interna.

Aplicando as condições de contorno em termos de taxa na expressão (27), chega-se ao princípio dos trabalhos virtuais proposto por Hill (1959), que é dado em função da taxa do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff (McMeeking e Rice, 1975)

$$\int_{V^0} \dot{T}_{ij} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) dV^0 = \int_{V^0} \dot{b}_i \delta \dot{u}_i dV^0 + \int_{S^0} \dot{f}_i \delta \dot{u}_i dS^0, \quad (30)$$

onde V^0 e S^0 são o volume e a superfície iniciais, $\delta \dot{u}_i$ é uma variação virtual arbitrária da taxa do deslocamento, \dot{b}_i é o vetor taxa de força por unidade de volume inicial e \dot{f}_i é o vetor taxa de força por unidade de área inicial, que pode ser expresso em função da taxa do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff e do vetor normal à superfície, na forma

$$\dot{f}_i = \dot{T}_{ij} n_j^0. \quad (31)$$

O princípio variacional expresso por (30), pode ser adaptado a problemas envolvendo grandes deslocamentos, escolhendo-se um tensor tensão adequado para representar o campo de tensões. McMeeking e Rice (1975) sugerem o uso do tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff, por ele ser mais adequado para a descrição das equações constitutivas, além de ser invariante às rotações de corpo rígido. Para isso, deve-se substituir a expressão (24) em (30) e chegar a expressão (Ribeiro Jr., 1995)

$$\int_V \left[\tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta (2D_{ik} D_{kj} - \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j}) \right] dV = \int_V \dot{b}_i \delta \dot{u}_i dV + \int_S \dot{f}_i \delta \dot{u}_i dS. \quad (32)$$

O princípio variacional, expresso por (32), está escrito na configuração corrente e, portanto, adequado ao uso na formulação lagrangeana atualizada. O próximo capítulo tratará da representação discretizada da equação (32) na forma de equações de elementos finitos, particularizadas para placas semi-espessas e considerando grandes deslocamentos.

3 Formulação do Elemento Finito de Placa de Reissner-Mindlin Sujeito a Grandes Deslocamentos

3.1 Teorias de Placas

3.1.1 Introdução

Uma placa é um elemento estrutural caracterizado por apresentar uma de suas dimensões, denominada espessura, muito menor que as outras duas. Esta grande diferença entre a espessura e as outras dimensões, de certa forma, cria dificuldades para o uso da elasticidade tridimensional na modelagem numérica de placas com o aparecimento de problemas de condicionamento (Luersen, 1994).

Ao longo dos anos, diversas teorias de placas foram desenvolvidas. Entre elas é importante citar a Teoria de Kirchhoff ou Teoria Clássica de Placas (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959), a Teoria de Reissner-Mindlin ou Teoria de Primeira Ordem (Reissner, 1945; Mindlin, 1951) e várias teorias de ordem superior como a Teoria de Lo, Christensen e Wu (1977) e a Teoria de Reddy (1984).

Considerando todas as quantidades referidas a um sistema de coordenadas cartesiano, um ponto qualquer da placa é denotado pelas coordenadas (x, y, z) e o seu domínio Ω pode ser escrito na forma (Hughes, 1987)

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (33)$$

onde S representa a projeção do domínio Ω sobre a superfície de referência e h é a espessura da placa.

Como no presente trabalho se utilizou a Teoria de Reissner-Mindlin, também chamada de Teoria de Primeira Ordem para Placas Semi-Espessas, não serão discu-

tidas em detalhe as outras teorias acima citadas.

3.1.2 Teoria de Placas de Reissner-Mindlin

Considere-se uma placa isotrópica, homogênea, moderadamente espessa, onde a relação entre a espessura h e o lado menor l é menor que $\frac{1}{10}$ ($\frac{h}{l} \leq \frac{1}{10}$)⁴, e que pode ser caracterizada por sua superfície de referência (superfície média), mostrada na Figura 3, de forma de que todas as variáveis do problema estão referenciadas a esta superfície.

O modelo de placas de Reissner-Mindlin pressupõe as seguintes hipóteses *ad hoc*:

- As deflexões da placa são pequenas, se comparadas com a espessura da mesma;
- A tensão normal transversal é desprezível;
- As normais à superfície de referência indeformada da placa permanecem retas e não sofrem variação no comprimento, mas não permanecem necessariamente normais à superfície de referência, após a deformação.

A última hipótese é uma forma aproximada de levar em conta a deformação cisalhante, visto que a ação do cisalhamento transversal resulta numa configuração deformada muito mais complexa. Assim, na utilização desta teoria, as tensões cisalhantes transversais resultam constantes na espessura, diferindo da Teoria da Elasticidade Tridimensional, que apresenta estas tensões variando, no mínimo, quadraticamente (Timoshenko e Goodier, 1970).

Para corrigir esta inconsistência, primeiramente Reissner (1945) calculou um fator igual a $\frac{5}{6}$ utilizando sua teoria baseada em campo de tensões. Mais tarde, Mindlin (1951) chegou a um valor bastante próximo, igual a $\frac{\pi^2}{12}$, utilizando uma formulação

⁴ Ugural (1981), afirma que uma placa é fina se a relação entre a espessura h e o lado menor l é menor que $\frac{1}{20}$, intuindo que valores acima definiriam as placas semi-espessas

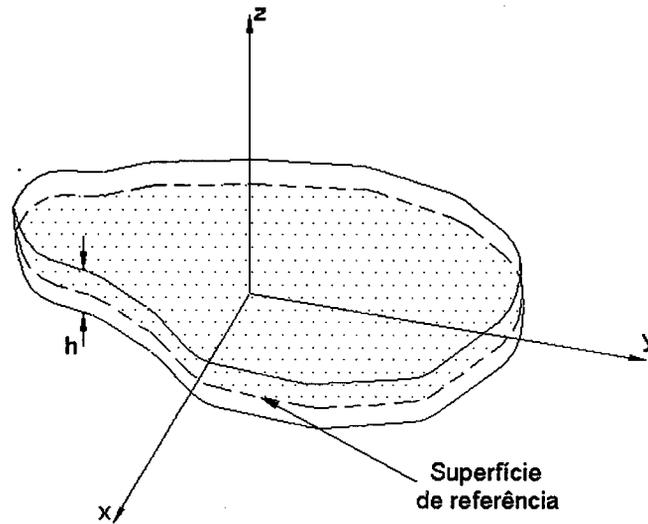


Figura 3: Indicação da superfície de referência em uma placa.

baseada em campo de deslocamentos.

A Teoria de Placas de Reissner-Mindlin também é chamada de Teoria de Primeira Ordem para Placas Semi-Espessas, devido ao fato dos deslocamentos serem representados por polinômios lineares na direção normal da placa. O campo de deslocamentos resultante desta teoria é dado por

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &\doteq u(x, y) + z\theta_x(x, y) \\
 u_y(x, y, z) &\doteq v(x, y) + z\theta_y(x, y) \\
 u_z(x, y, z) &\doteq w(x, y),
 \end{aligned} \tag{34}$$

onde u_x , u_y e u_z são as componentes do deslocamento nas direções x , y e z de um ponto qualquer da placa, respectivamente, u e v são as componentes do deslocamento da superfície de referência no plano da placa nas direções x , y , respectivamente, w

é o deslocamento transversal, sendo que a superfície de referência da placa está no plano $z = 0$, sendo z a coordenada transversal e θ_x e θ_y são as rotações da normal em torno dos eixos y e x respectivamente. A possibilidade de se poder usar funções de interpolação de continuidade C^0 para os graus de liberdade u , v , w , θ_x e θ_y , ao invés de C^1 , como é exigido na Teoria de Kirchhoff, faz com que a Teoria de Reissner-Mindlin seja largamente utilizada devido a sua relativa facilidade na implementação numérica.

3.2 Formulação Isoparamétrica

A formulação isoparamétrica é extensamente utilizada na obtenção de grande número de elementos finitos, entre eles, elementos planos, sólidos, de placas, de cascas e também para situações específicas, como elementos aplicados a problemas da Mecânica da Fratura (Cook et al, 1988). A palavra *isoparamétrico* significa *mesmo parâmetro*, que define muito bem a idéia fundamental desta formulação, qual seja, o uso das mesmas funções de interpolação, tanto para a aproximação das variáveis, interpolando os graus de liberdade, como para a aproximação das coordenadas nodais, interpolando as coordenadas.

No presente trabalho optou-se pelo uso do elemento finito isoparamétrico lagrangeano de nove nós, tomando como referência os ótimos resultados obtidos por Luersen (1994) e Ribeiro Jr. (1995). Outra razão deve-se ao fato deste elemento apresentar apenas um modo espúrio, quando se faz uso da integração seletiva reduzida (Hughes, 1987), assunto este que será tratado adiante com mais detalhes. As funções

de interpolação N para este elemento são dadas por (Cook et al, 1988)

$$\begin{aligned}
 N_I &= \frac{1}{4} (1 - \xi\xi_I) (1 + \eta\eta_I) (\xi\xi_I + \eta\eta_I - 1) & I = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \\
 N_I &= \frac{1}{2} (1 + \xi^2) (1 + \eta\eta_I) & I = 5 \text{ e } 7 \\
 N_I &= \frac{1}{2} (1 + \xi\xi_I) (1 - \eta^2) & I = 6 \text{ e } 8 \\
 N_I &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) & I = 9,
 \end{aligned} \tag{35}$$

sendo ξ e η as coordenadas no sistema do elemento mestre (Figura 4) e ξ_I e η_I as coordenadas do nó I em relação a este sistema.

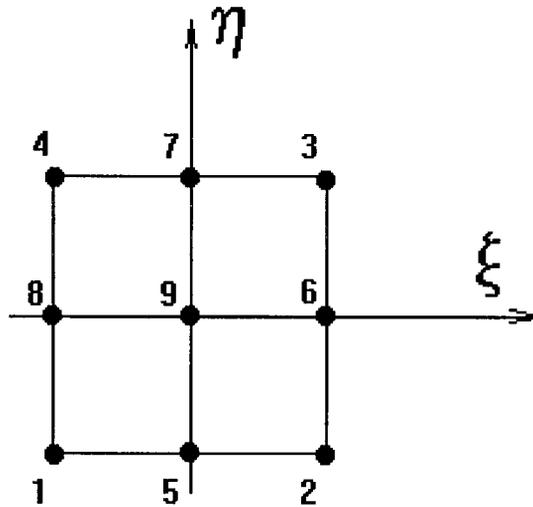


Figura 4: Elemento finito isoparamétrico de nove nós - sistema local (ξ, η) .

As funções de interpolação são expressas em termos de coordenadas locais, e a representação da geometria pode ser interpretada como um mapeamento, no qual se transforma uma forma regular expressa em coordenadas locais, como a da Figura 4, em uma forma distorcida (contornos curvos) expressa em coordenadas globais (Rao, 1992).

Os graus de liberdade nodais são apresentados na forma de deslocamentos incrementais e virtuais na superfície de referência e são interpolados em termos dos deslocamentos incrementais, do mesmo modo que os deslocamentos virtuais são interpolados em termos de deslocamentos virtuais nodais. Assim, eles tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \Delta u(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \Delta u_I \\
 \Delta v(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \Delta v_I \\
 \Delta w(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \Delta w_I \\
 \Delta \theta_x(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \Delta \theta_{xI} \\
 \Delta \theta_y(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \Delta \theta_{yI}
 \end{aligned} \tag{36}$$

e

$$\begin{aligned}
 \delta u(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \delta u_I \\
 \delta v(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \delta v_I \\
 \delta w(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \delta w_I \\
 \delta \theta_x(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \delta \theta_{xI} \\
 \delta \theta_y(\xi, \eta) &= N_I(\xi, \eta) \delta \theta_{yI}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

A geometria é interpolada de maneira semelhante

$$\begin{aligned}
 x &= N_I(\xi, \eta) x_I \\
 y &= N_I(\xi, \eta) y_I,
 \end{aligned} \tag{38}$$

onde x_I e y_I são as coordenadas nodais e I varia de 1 a 9.

Tendo-se definido a maneira de como será feita a interpolação dos graus de liberdade nodais e das coordenadas nodais, o próximo passo será obter a expressão discretizada do Princípio dos Trabalhos Virtuais na forma de taxa, que será apresentado a seguir.

3.3 Discretização do Princípio do Trabalhos Virtuais na Forma de Taxa

No capítulo anterior obteve-se a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais na forma de taxa, expresso em termos do tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff (expressão 32). Desenvolvendo-se o lado direito desta expressão, tem-se

$$\begin{aligned} \int_V \left[\tau_{ij}^* \delta D_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} (2\delta D_{ik} D_{kj} + 2D_{ik} \delta D_{kj} - \delta \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j} - \dot{u}_{k,i} \delta \dot{u}_{k,j}) \right] dV = \\ = \int_V \dot{b}_i \delta \dot{u}_i dV + \int_S \dot{f}_i \delta \dot{u}_i dS. \end{aligned}$$

Agora, considerando-se a propriedade de simetria do tensor σ , a expressão acima fica

$$\int_V \left[\tau_{ij}^* \delta D_{ij} + \delta \dot{u}_{k,i} \sigma_{ij} \dot{u}_{k,j} - 2\delta D_{ik} \sigma_{ij} D_{kj} \right] dV = \int_V \dot{b}_i \delta \dot{u}_i dV + \int_S \dot{f}_i \delta \dot{u}_i dS. \quad (39)$$

O primeiro termo da equação (39) produz a parcela correspondente à matriz de rigidez linear, que na forma discretizada é expressa por

$$\mathbf{K}_l = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad (40)$$

onde \mathbf{B} corresponde à matriz deformação-deslocamento, dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 & 0 & N_{I,x} \\ 0 & N_{I,y} & 0 & N_{I,y} & 0 \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 & N_{I,x} & N_{I,y} \\ 0 & 0 & -N_{I,x} & 0 & N_I \\ 0 & 0 & N_{I,x} & -N_I & 0 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

e \mathbf{C} é a matriz constitutiva elastoplástica (Hinton e Owen, 1980)

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - \alpha \frac{C_{ijmn}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right) C_{pqkl}^e}{\left[H' + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \right) C_{rstu}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} \right) \right]}, \quad (42)$$

que, no caso de $\alpha = 0$ (regime elástico), pode ser escrita na forma matricial como

$$\mathbf{C}^e = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, E é o módulo de elasticidade longitudinal e k é o fator de correção das tensões cisalhantes transversais que, segundo Reissner (1945), é igual a $\frac{5}{6}$. O regime elastoplástico ($\alpha = 1$) será discutido em detalhes no próximo capítulo.

Referenciando-se ainda o lado direito da expressão (39), o segundo e terceiro termos produzem a parcela correspondente à matriz de rigidez geométrica, que discretizada assume a forma (McMeeking e Rice, 1975)

$$\{\delta \dot{\Psi}\} [\mathbf{K}_\sigma] \{\Delta \dot{\Psi}\} = \int_V [\delta \dot{u}_{k,i} \sigma_{ij} \dot{u}_{k,j} - 2\delta D_{ik} \sigma_{ij} D_{kj}] dV, \quad (44)$$

onde $\dot{\Psi}$ representa o vetor taxa de variação dos graus de liberdade nodais e \mathbf{K}_σ a matriz de rigidez geométrica. Por conveniência a matriz \mathbf{K}_σ será separada em duas, na forma

$$\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K}_{\sigma 1} - 2\mathbf{K}_{\sigma 2}.$$

Estas matrizes são dadas por

$$K_{\sigma 1} = \begin{bmatrix} K_{uu} & & & & \\ 0 & K_{vv} & & & \text{sim.} \\ 0 & 0 & K_{ww} & & \\ K_{\theta u} & 0 & 0 & K_{\theta\theta} & \\ 0 & K_{\phi v} & 0 & 0 & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (45)$$

e

$$K_{\sigma 2} = \begin{bmatrix} L_{uu} & & & & \\ L_{vu} & L_{vv} & & & \text{sim.} \\ L_{wu} & L_{wv} & L_{ww} & & \\ L_{\theta u} & L_{\theta v} & L_{\theta w} & L_{\theta\theta} & \\ L_{\phi u} & L_{\phi v} & L_{\phi w} & L_{\phi\theta} & L_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (46)$$

As sub-matrizes \mathbf{K} e \mathbf{L} são definidas no Apêndice 1.

Considerando o domínio dividido em E elementos, pode-se então chegar à seguinte

forma discretizada do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\sum_{e=1}^E \left\{ \delta u_I \quad \delta v_I \quad \delta w_I \quad \delta \theta_{xI} \quad \delta \theta_{yI} \right\} ([K_I^e] + [K_\sigma^e]) \left\{ \begin{array}{c} u_I \\ v_I \\ w_I \\ \theta_{xI} \\ \theta_{yI} \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{e=1}^E \left\{ \delta u_I \quad \delta v_I \quad \delta w_I \quad \delta \theta_{xI} \quad \delta \theta_{yI} \right\} (\{\dot{P}^e\} + \{R^e\}), \quad (47)$$

sendo \mathbf{K}_I^e a matriz de rigidez linear incremental do elemento, \mathbf{K}_σ^e a matriz de rigidez geométrica do elemento, \dot{P}^e o vetor taxa de carregamento externo, R^e representa o vetor resíduo, e $\sum_{e=1}^E$ representa a superposição das matrizes e vetores de todos os elementos que compõe a estrutura. Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, a equação (47) pode ser escrita como

$$\sum_{e=1}^E ([K_I^e] + [K_\sigma^e]) \left\{ \begin{array}{c} \dot{u}_I \\ \dot{v}_I \\ \dot{w}_I \\ \dot{\theta}_{xI} \\ \dot{\theta}_{yI} \end{array} \right\} = \sum_{e=1}^E \{\dot{P}^e\} + \{R^e\} \quad (48)$$

ou

$$[K^G] \{\dot{u}^G\} = \{\dot{P}^G\} + \{R^G\}, \quad (49)$$

denominada equação de elementos finitos, que deve ser solucionada para cada incremento de carga ΔP^G . Um algoritmo freqüentemente utilizado na resolução de equações não-lineares de elementos finitos é o algoritmo iterativo de Newton-Raphson

(Bathe, 1982), que foi aqui adotado e que pode ser expresso como

$$\{\Delta u^G\}^{i+1} = \{\Delta u^G\}^i + \left([K^G]^i\right)^{-1} \left(\{\Delta P^G\} + \{R^G\}\right)^i, \quad (50)$$

onde i representa a iteração dentro do incremento de carga. O processo se encerrará quando o termo $(\{\Delta P^G\} + \{R^G\})$ atingir uma tolerância estabelecida e, em seguida, dar-se-á início ao próximo passo de carga e conseqüente processo iterativo. Isto se repetirá até que toda carga seja aplicada. O critério de convergência usado neste trabalho é dado por (Hinton e Owen, 1980)

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (R_i)^2}{\sum_{i=1}^n (P_i)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \text{tolerância}, \quad (51)$$

onde a tolerância é definida em função do grau de precisão que se deseja obter dos resultados, levando em conta que quanto maior a precisão requerida maior será o tempo computacional gasto.

Na seqüência será abordada a forma de integração numérica das matrizes de rigidez.

3.4 Integração Numérica das Matrizes de Rigidez

A integração numérica da matriz de rigidez sobre a superfície do elemento finito de placa é feita usando a regra de quadratura de Gauss-Legendre. Visando evitar o fenômeno denominado travamento (*locking*), a parcela da matriz de rigidez incremental relacionada ao cisalhamento transversal é avaliada usando uma regra de integração com um ponto de integração a menos em cada direção do que a chamada integração cheia, caracterizando assim a técnica de sub-integração seletiva. Assim, tem-se que, nas parcelas da matriz de rigidez incremental, referentes à membrana e flexão,

foram usados 3x3 pontos de integração, e na parcela correspondente ao cisalhamento transversal, 2x2 pontos. A utilização de tal técnica pode levar ao aparecimento de modos espúrios, que são modos de energia zero. No entanto, para o elemento finito de placa lagrangeano de nove nós, apenas um modo espúrio pode aparecer (Hughes, 1987). Para os casos estudados neste trabalho foi verificado que este modo não se pronunciou. Assim sendo, não se buscou a implementação de uma técnica de controle destes modos indesejáveis.

As tensões utilizadas na matriz de rigidez geométrica são calculadas utilizando 2x2 pontos de integração. Este procedimento garante a obtenção de resultados de tensão mais precisos (Cook *et al*, 1988; Luersen, 1994).

Numa análise puramente elástica utilizando a teoria de Reissner-Mindlin, verifica-se que a distribuição das tensões normais é linear ao longo da espessura da placa, possibilitando assim que a integração ao longo da espessura possa ser feita analiticamente. Nos problemas envolvendo flexão elastoplástica, a distribuição das tensões assume uma forma mais complexa, exigindo um tratamento especial destas integrais. A solução é implementar uma regra de integração na direção normal à placa. Um método bastante utilizado é a integração por camadas (Parish, 1981), em que a espessura da placa é dividida em camadas, dentro das quais a integração é feita considerando o campo de tensões constante ao longo de cada uma delas. Outra forma é usar também a regra de Gauss-Legendre para a integração na espessura, mas com um número variável de pontos. Embora os resultados obtidos sejam melhores que na integração por camadas, esta regra apresenta o inconveniente de não possuir pontos nas superfícies externas da placa, local onde se inicia a plastificação nos casos de flexão.

Novotny *et al* (1994) sugere o uso da regra de quadratura de Gauss-Lobatto, observando que nesta regra existem pontos situados nas superfícies externas, possibilitando captar com mais precisão o início do processo da plastificação e realizar um melhor mapeamento da propagação da frente plástica, justificando assim sua implementação neste trabalho.

3.5 Atualização das Tensões

O princípio variacional expresso por (39) pode ser utilizado na modelagem de problemas com materiais elastoplásticos com encruamento isotrópico e com sua relação constitutiva, expressa em termos do tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}^*$ e do tensor taxa de deformação \mathbf{D} , como (McMeeking e Rice, 1975)

$$\{\boldsymbol{\tau}^*\} = [\mathbf{C}]\{\mathbf{D}\} \quad (52)$$

ou, incrementalmente, como

$$\{\Delta\boldsymbol{\tau}^*\} = [\mathbf{C}]\{\Delta\mathbf{D}\}. \quad (53)$$

A utilização de (53) permite a obtenção do incremento do tensor co-rotacional de Kirchhoff $\Delta\boldsymbol{\tau}^*$ no final de cada passo. No entanto, o tensor tensão que representa o estado real de tensão num dado instante é o tensor tensão de Cauchy. Para calcular o incremento do tensor taxa de tensão de Cauchy $\Delta\dot{\sigma}_{ij}$, partindo-se do incremento do tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff $\Delta\tau_{ij}^*$, escreve-se a expressão (23) em forma incremental, obtendo-se

$$\Delta\tau_{ij}^* = \Delta\dot{\sigma}_{ij} - \Delta w_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\Delta w_{kj} + \sigma_{ij}\Delta D_{kk}, \quad (54)$$

onde Δw_{ij} representa os componentes da parte antissimétrica do tensor gradiente da taxa de deslocamento, dado por (Kleiber, 1989)

$$\Delta w_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta \dot{u}_{i,j} - \Delta \dot{u}_{j,i}). \quad (55)$$

Para atualizar-se o tensor tensão de Cauchy, parte-se da consideração que no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$ a taxa de tensão é constante, permitindo que a atualização possa ser feita da seguinte forma (Kleiber, 1989)

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \Delta \sigma_{ij}. \quad (56)$$

O próximo capítulo tratará sobre a relação constitutiva elastoplástica utilizada neste trabalho, que terá como base os trabalhos Chen e Han (1988) e Hinton e Owen (1980).

4 Relação Constitutiva Elastoplástica

4.1 Introdução

No capítulo anterior a relação constitutiva elastoplástica foi rapidamente apresentada, para permitir expressar de forma completa a equação de elementos finitos que representa o problema. Este capítulo tem por objetivo apresentar um breve sumário da Teoria Matemática da Plasticidade, detalhando a obtenção da relação constitutiva elastoplástica, utilizada para deformações finitas em placas semi-espessas.

Considerando os bons resultados obtidos por Imaeda (1992) e Ribeiro Jr (1995), neste estudo são mantidas as premissas básicas de que o comportamento plástico material considera quatro hipóteses: o critério de escoamento de von Mises, o encruamento isotrópico, a regra de fluxo associada a função de escoamento de von Mises e a relação constitutiva independente da velocidade de deformação.

A relação constitutiva para o caso de elastoplasticidade infinitesimal é apresentada e, em seguida, esta é particularizada para o caso de placas de Reissner-Mindlin. Finalmente, é generalizada para a forma utilizada em elastoplasticidade finita. No final do capítulo é apresentada a forma de integração da relação constitutiva elastoplástica.

4.2 Critério de Escoamento

4.2.1 Introdução

Os critérios de escoamento definem o limite elástico de um material sujeito a um estado multiaxial de tensões. Genericamente, eles podem ser representados pela função (Chen e Han, 1988)

$$f(\sigma_{ij}, k_1, k_2, k_3, \dots) = 0, \quad (57)$$

onde σ_{ij} representa um estado multiaxial de tensões e k_1, k_2, k_3, \dots representam parâmetros materiais, obtidos experimentalmente. Os critérios de escoamento possibilitam mapear um estado multiaxial de tensões em um estado uniaxial, a fim de se possibilitar uma comparação com uma tensão de escoamento uniaxial (σ_o). Quando se particulariza o problema para materiais isotrópicos, o estado multiaxial pode ser representado pelo estado triaxial de tensões principais ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), permitindo assim definir um espaço de tensões de possível representação geométrica e resultando em maior facilidade na implementação computacional (Nayak e Zienkiewicz, 1972). Este estado triaxial de tensões faz com que a função de escoamento se torne invariante (independente da escolha dos eixos), ou seja, as três tensões principais ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), podem ser expressas em termos de três invariantes de tensões: I_1, J_2 e J_3 , onde I_1 é o primeiro invariante do tensor tensão σ_{ij} e J_2 e J_3 são o segundo e terceiro invariantes do tensor desviador S_{ij} , sendo definidos por

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad (58)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad (59)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}, \quad (60)$$

respectivamente, sendo as componentes do tensor tensão desviador dadas por

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \quad (61)$$

Assim, a função de escoamento pode agora ser expressa por

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, k_3, \dots) = 0. \quad (62)$$

Os critérios de escoamento são relações essencialmente empíricas que devem fundamentalmente ser consistentes com observações experimentais. Uma delas é que durante o escoamento de um metal, a pressão hidrostática não afeta a deformação plástica. Isto permite considerar que a função de escoamento pode ser dada por

$$f(J_2, J_3, k_1, k_2, k_3, \dots) = 0, \quad (63)$$

ou seja, dependente apenas dos invariantes das tensões desviadoras e dos parâmetros materiais. Usualmente, tem-se utilizado apenas dois critérios para determinação do início do escoamento de materiais metálicos: o critério de Tresca e o critério de von Mises. No presente trabalho, optou-se por adotar o critério de escoamento de von Mises por ele ser mais preciso na determinação do início do escoamento (Hinton e Owen, 1980) e ser de mais simples implementação numérica.

4.2.2 Critério de Escoamento de von Mises

O critério de escoamento de von Mises estabelece que o início do escoamento ocorre quando o segundo invariante do tensor desviador, J_2 (expressão 59), atingir um valor crítico K . Esta função de escoamento pode ser escrita como

$$f(J_2, K) = J_2 - K^2(k_1, k_2, k_3, \dots) = 0, \quad (64)$$

onde K é um parâmetro material a ser determinado experimentalmente. Para relacioná-lo à tensão de escoamento σ_o , observa-se que, num ensaio de tração uniaxial, $\sigma_1 = \sigma_o$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Considerando que o segundo invariante da tensão desviadora (J_2) pode também ser dado pela expressão

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \quad (65)$$

e utilizando a expressão (64) chega-se a

$$K = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_o. \quad (66)$$

Considerando-se agora o estado de tensão em cisalhamento puro, tem-se que

$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ e $\sigma_2 = 0$, onde τ é a tensão de escoamento para cisalhamento puro. Utilizando o mesmo procedimento adotado na determinação da expressão (66), pode-se concluir que

$$K = \tau. \quad (67)$$

Assim, K representa o limite de escoamento para cisalhamento puro. Desta forma, o critério de von Mises prevê que o limite de escoamento em torção será menor que em tração uniaxial (Dieter, 1976).

Este critério, quando foi proposto por von Mises, foi respaldado pela sua simplicidade matemática. Mais tarde, outros estudiosos se preocuparam em dar seu significado físico. Em 1924, Hencky mostrou que o uso deste critério implicava em afirmar que o escoamento ocorreria quando a máxima densidade de energia de distorção atingisse um valor crítico, sendo que esta densidade de energia de distorção é a parcela da energia total de deformação por unidade de volume que é responsável pela variação de forma que ocorre em oposição a uma variação de volume. Nadai, em 1937, definiu a chamada tensão cisalhante octaédrica τ_{oct} , como sendo a tensão cisalhante nos planos de um octaedro regular, os quais formam ângulos iguais com os eixos principais de tensão. Esta tensão pode ser expressa por

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2J_2}{3}}. \quad (68)$$

Com isto pode-se afirmar que o escoamento se inicia quando τ_{oct} atingir um valor crítico.

Geometricamente, o critério von Mises pode ser representado em um espaço de tensões $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, por um cilindro de comprimento infinitamente grande e com seu eixo definido pelos pontos onde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, conforme mostra a Figura 5.

O eixo do cilindro é a componente hidrostática de tensão e o raio MN representa a tensão desviadora. Se em um estado de tensão o ponto se situar no interior do cilindro, isto significará que o comportamento do material ainda é elástico. O escoamento inicia quando esse ponto atingir a superfície do cilindro, designada superfície de escoamento.

Nesta seção, o critério de escoamento foi usado para determinar quando o material inicia sua fase plástica. A seguir, será mostrado como a superfície de escoamento se expande à medida que a deformação plástica ocorre, com a utilização de uma regra de encruamento.

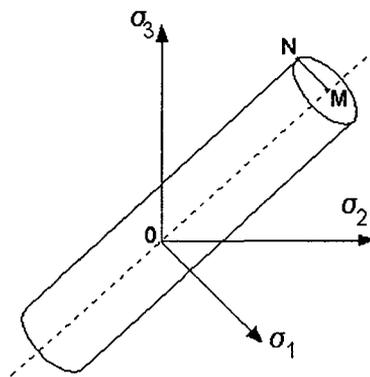


Figura 5: Representação geométrica da superfície de escoamento de von Mises.

4.3 Regra de Encruamento

4.3.1 Introdução

Após a determinação da superfície de escoamento inicial, utiliza-se uma regra de encruamento para estabelecer a forma de evolução do processo de plastificação. O encruamento pode ser definido como sendo o fenômeno no qual, após o escoamento inicial, o nível de tensão para uma posterior ocorrência de fluxo plástico pode depender do nível de plastificação acumulado (Hinton e Owen, 1980). As regras de encruamento mais utilizadas são: a) a regra de encruamento isotrópico; b) a regra de encruamento cinemático; c) uma combinação de ambas, denominada regra de encruamento misto; d) a regra de encruamento independente.

A regra de encruamento cinemático mantém a forma inicial da superfície de escoamento, movimentando-a na direção do vetor deformação plástica. Esta regra possibilita a verificação da ocorrência do *efeito Bauschinger*, que é uma dependência da tensão de escoamento ao caminho e direção do carregamento. Exemplificando, se um corpo de prova for deformado plasticamente segundo uma direção de tração, depois descarregado até a tensão zero e então recarregado na direção oposta (em compressão), se verificará que o limite de escoamento à compressão será inferior ao limite de escoamento à tração, caracterizando assim, uma anisotropia direcional no material, induzida pela deformação plástica. Muito embora este critério modele de forma mais realista o comportamento do material, verificou-se que o seu uso, em conjunto com tensores taxa de tensão objetivos, causa o aparecimento de oscilações na evolução da superfície de escoamento (Nagtegaal e de Jong, 1981). A regra de encruamento inde-

pendente, pressupõe que o material tenha um comportamento independente à tração e à compressão.

O presente trabalho utilizou a regra de encruamento isotrópico, tendo em vista sua melhor adequação ao princípio variacional de Hill (1959) (McMeeking e Rice, 1975).

4.3.2 Regra de Encruamento Isotrópico

Na regra de encruamento isotrópico, a superfície de escoamento, definida pela função

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = F(\sigma_{ij}) + K^2(\varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad (69)$$

expande-se de maneira uniforme e sem transladar. A Figura 6 mostra esta superfície de escoamento projetada no plano $\sigma\tau$. Esta expansão depende do grau de deformação plástica e, neste caso, o limite de escoamento à compressão cresce na mesma proporção que o limite de escoamento à tração, não se conseguindo representar o *efeito Bauschinger*. Por outro lado, esta regra é de simples implementação e se mostrou eficiente quando usada conjuntamente com o tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff.

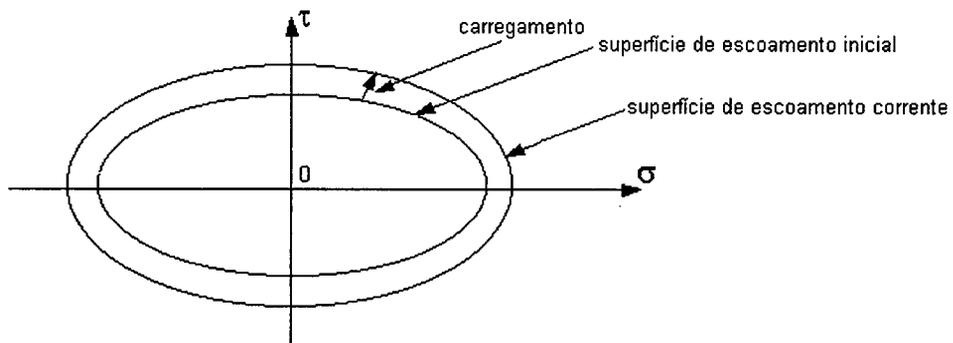


Figura 6: Modelo matemático para representar o encruamento isotrópico.

A seguir a função potencial plástico $g(\sigma_{ij})$ será relacionada com o do vetor de-

formação plástica através de uma regra de fluxo.

4.4 Regra de Fluxo

4.4.1 Introdução

A regra de fluxo é relacionada a uma função potencial plástico $g(\sigma_{ij})$ e permite definir a magnitude e a direção do vetor deformação plástica incremental $d\varepsilon_{ij}^p$ no espaço de deformações. Fazendo uma analogia com a forma de obtenção da deformação elástica, que é feita pela diferenciação da função potencial elástica (função densidade de energia complementar) em relação ao tensor tensão σ_{ij} , von Mises propôs o conceito de função potencial plástico $g(\sigma_{ij})$, permitindo assim obter, pela diferenciação direta, o incremento de deformação plástica. Desta forma, a equação do fluxo plástico pode ser dada por (Chen e Han, 1988)

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (70)$$

onde $d\lambda$ é um fator de proporcionalidade escalar, positivo e que assume valor diferente de zero somente quando houver deformação plástica. O uso da expressão (70) implica afirmar que o vetor $d\varepsilon_{ij}^p$, quando plotado no espaço de tensões, é direcionado ao longo da direção normal à superfície do potencial plástico.

4.4.2 Regra de Fluxo Associada

Quando a função de escoamento é utilizada como função potencial plástico a expressão (70) torna-se

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (71)$$

caracterizando a chamada regra de fluxo associada. Seu uso é de grande importância na teoria da plasticidade pelas simplificações advindas de seu uso. Neste caso, o

fluxo plástico se desenvolve ao longo da normal à superfície de escoamento. Von Mises, quando utilizou a regra de fluxo associada no desenvolvimento de sua relações tensão-deformação para metais, fez as seguintes considerações (Chen e Han, 1988):

- A regra de fluxo associada é válida para materiais plásticos irreversíveis, onde o trabalho gasto na deformação plástica não pode ser recuperado;
- A relação tensão-deformação de um material baseado na regra de fluxo associada resulta em uma única solução para o problema de valor no contorno;
- A utilização da regra de fluxo associada possibilita realizar várias generalizações das equações de plasticidade, considerando superfícies de escoamento e carregamentos das mais complexas formas.

Neste trabalho a regra de fluxo plástico foi associada ao critério de escoamento de von Mises.

4.4.3 Regra de Fluxo Associada a função de Escoamento de von Mises

Substituindo a função de von Mises (expressão 64) na expressão (71) chega-se a expressão da regra de fluxo associada ao critério de escoamento de von Mises:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij}. \quad (72)$$

A relação (72) pode ser expressa em termos das componentes dos incrementos de deformação e tensão

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{S_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{S_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{S_z} = \frac{d\gamma_{xz}^p}{2\tau_{xz}} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} = d\lambda. \quad (73)$$

Estas relações, também chamadas de *equações de Prandtl-Reuss*, são utilizadas na dedução da relação constitutiva elastoplástica.

4.5 Relação Constitutiva Elastoplástica

Após o escoamento inicial, a deformação total infinitesimal passa a receber uma parcela adicional, correspondente à deformação plástica. Assim a expressão para a deformação total infinitesimal passa a ser

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad (74)$$

onde $d\varepsilon_{ij}^e$ corresponde à deformação elástica infinitesimal e $d\varepsilon_{ij}^p$ à deformação plástica infinitesimal. Segundo Gadala *et al* (1984), a expressão (74) é válida para os casos em que ocorram deformações quase-estáticas e em que a componente elástica de deformação seja pequena. A expressão da deformação elástica infinitesimal $d\varepsilon_{ij}^e$ (lei de Hooke generalizada) é dada por

$$d\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl}, \quad (75)$$

onde C_{ijkl}^{-1} representa as componentes da inversa da matriz constitutiva elástica (equação 42). Substituindo as expressões (75) e (72) em (74) obtém-se

$$d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl} + d\lambda S_{ij} \quad (76)$$

ou, de outra forma

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\lambda S_{kl}). \quad (77)$$

A condição de consistência definida por $df = 0$, permite determinar a função escalar $d\lambda$, que garante a permanência do estado de tensões na superfície de escoamento.

Aplicando esta condição na equação (64), tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial K} dK = 0, \quad (78)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - H' d\lambda = 0, \quad (79)$$

onde $H' = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial K} dK$ é determinado experimentalmente, a partir de um ensaio de tração simples e com o uso da expressão

$$H' = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}^p}. \quad (80)$$

Substituindo-se a expressão (74) em (80), e considerando-se o modelo simplificado da curva tensão-deformação, mostrado na Figura 7, o parâmetro de encruamento H' , pode ser expresso por

$$H' = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}}. \quad (81)$$

Utilizando as equações (76) e (79) pode-se chegar à expressão que representa a matriz constitutiva elastoplástica (Chen e Han, 1988; Ribeiro Jr., 1995),

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijmn}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right) C_{pqkl}^e}{\left[H' + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \right) C_{rstu}^e \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} \right) \right]}, \quad (82)$$

e, finalmente, a relação constitutiva pode ser dada por (Chen e Han, 1988)

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl}. \quad (83)$$

4.6 Particularização da Matriz Constitutiva Elastoplástica para Placas Semi-Espessas

A expressão (82) representa a matriz constitutiva elastoplástica utilizada para elastoplasticidade tridimensional. Para o caso de placas semi-espessas, esta expressão deve ser particularizada levando-se em conta a hipótese que considera a tensão normal

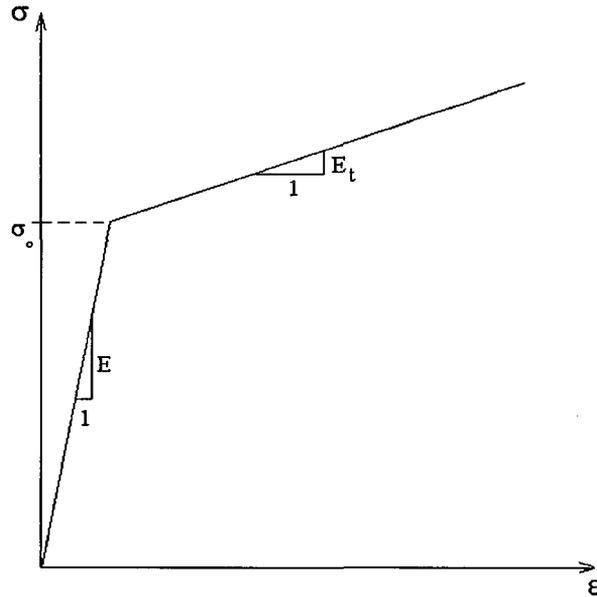


Figura 7: Forma simplificada da curva tensão-deformação.

transversal nula ($\sigma_z=0$). Para tal, a relação constitutiva elastoplástica, expressa por (83), assume a forma

$$d\sigma_i = C_{ij}^{ep} d\varepsilon_j \quad i, j = 1, 6, \quad (84)$$

onde $d\sigma_i$ e $d\varepsilon_j$ representam as componentes infinitesimais dos tensores tensão e deformação, respectivamente, escritos na forma unidimensional. Matricialmente, tem-se (Ribeiro Jr, 1995)

$$\left\{ \begin{array}{c} d\bar{\sigma} \\ \vdots \\ d\sigma_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{C} & \\ \hline (C^*)^t & C_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} d\bar{\varepsilon} \\ \vdots \\ d\varepsilon_z \end{array} \right\}, \quad (85)$$

onde

$$d\bar{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_{xy} \\ d\sigma_{yz} \\ d\sigma_{xz} \end{array} \right\}, \quad d\bar{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_{xy} \\ d\varepsilon_{yz} \\ d\varepsilon_{xz} \end{array} \right\}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^* = \left\{ \begin{array}{c} C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{46} \\ C_{56} \end{array} \right\}.$$

Desta forma a equação (84) pode ser expressa por

$$d\sigma_i = \bar{C}_{ij}d\bar{\varepsilon}_j + C_{i6}d\varepsilon_z \quad i, j = 1, 5 \quad (86)$$

e

$$d\sigma_z = C_{6j}^*d\bar{\varepsilon}_j + C_{66}d\varepsilon_z \quad j = 1, 5. \quad (87)$$

Considerando-se a hipótese de que $\sigma_z=0$ na expressão (87), pode-se chegar a

$$d\varepsilon_z = -\frac{C_{6j}^*d\bar{\varepsilon}_j}{C_{66}} \quad j = 1, 5 \quad (88)$$

que, substituída em (86), fica

$$d\sigma_i = \bar{C}_{ij} d\bar{\varepsilon}_j - C_{i6} \left(\frac{C_{6j}^* d\bar{\varepsilon}_j}{C_{66}} \right) \quad i, j = 1, 5, \quad (89)$$

de onde se conclui que a matriz constitutiva, particularizada para placas semi-espessas, é dada por

$$C_{ij}^{ep} = \bar{C}_{ij} - C_{i6} \left(\frac{C_{6j}^*}{C_{66}} \right) \quad i, j = 1, 5. \quad (90)$$

4.7 Generalização da Relação Constitutiva Elastoplástica para Deformações Finitas

A relação constitutiva elastoplástica representada pela expressão (83) é adequada para quando as deformações são consideradas infinitesimais (Chen e Han, 1988). Para estender o uso desta relação aos casos de deformações finitas, é necessário escolher adequadamente os tensores tensão e deformação para exprimir estes campos. A generalização utilizada neste trabalho foi fundamentada na escolha do tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff τ^* e do tensor taxa de deformação D , já definidos em capítulo anterior. Assim, a relação constitutiva elastoplástica para deformações finitas pode ser dada por (McMeeking e Rice, 1975)

$$\Delta\tau_{ij}^* = C_{ijkl}^{ep} \Delta\varepsilon_{kl}. \quad (91)$$

4.8 Integração da Matriz Constitutiva

Para que se possa verificar se as equações de equilíbrio estão sendo satisfeitas, é necessária a obtenção da tensão de Cauchy a cada incremento de carga aplicado. No regime elástico, o procedimento é simples, como já foi visto no capítulo 3. No entanto, se algum ponto de integração atingir o escoamento, será necessário empregar

a relação (91) em um processo de integração, de modo que se possa levar em conta a história do carregamento (Bathe, 1982). Desta forma, pode-se obter o incremento do tensor tensão co-rotacional de Kirchhoff usando a expressão

$$\Delta\tau_{ij}^* = \int_D^{D+\Delta D} C_{ijkl}^{ep} dD_{kl}. \quad (92)$$

Neste trabalho será utilizado o algoritmo sugerido por Hinton e Owen (1980), para integrar numericamente a expressão (92), considerando a sua facilidade de implementação numérica. Este algoritmo baseia-se na expressão (77) e será detalhado a seguir.

Na Figura 8 tem-se um estado de tensão, representado pelo ponto A , que se encontra no regime elástico. No estudo do critério de escoamento, foi visto que o material assume o comportamento plástico quando o estado de tensão estiver sobre a superfície de escoamento (ponto B). No entanto, quando um incremento de tensão $\Delta\sigma_{ij}^t$ é aplicado, e este ponto é projetado para fora da superfície de escoamento (trecho BC), a condição de consistência estabelecida pela expressão (79) deixa de ser obedecida. Para evitar que isso ocorra, garantindo que as equações de equilíbrio e a relação constitutiva sejam satisfeitas, deve-se eliminar a parcela referente à deformação plástica do incremento do tensor tensão $\Delta\sigma_{ij}$, de forma que a atualização das tensões passa a ser expressa por

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \Delta\sigma_{ij} - C_{ijkl} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (93)$$

onde $\Delta\sigma_{ij}$ são as componentes do tensor incremento de tensão de Cauchy, considerando o comportamento elástico.

A utilização da expressão (93) sobre o valor total do incremento de deformação

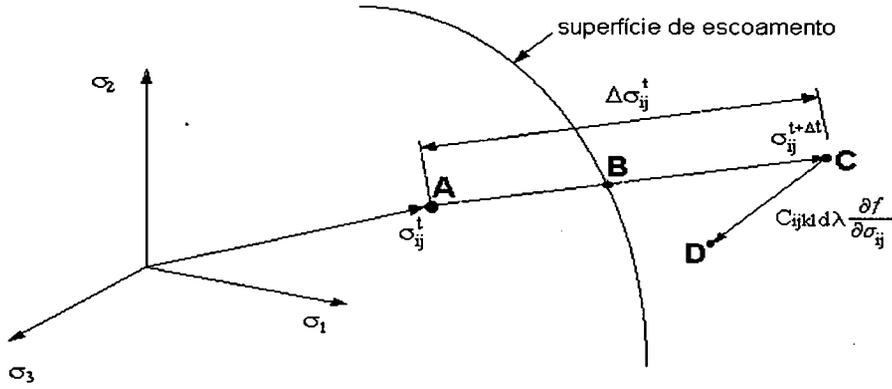


Figura 8: Integração da relação constitutiva com um sub-incremento.

plástica $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ tem o inconveniente de resultar num estado de tensão $\sigma_{ij}^{t+\Delta t}$ muito afastado da superfície de escoamento, conforme se vê na Figura 8 (ponto D). O presente trabalho utilizou a técnica, sugerida por Hinton e Owen (1988), de dividir o incremento de deformação plástica $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ em m sub-incrementos iguais, para diminuir ao máximo este afastamento. Desta forma a expressão (93) pode ser expressa por

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \Delta \sigma_{ij} - \frac{1}{m} C_{ijkl} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (94)$$

onde o número de sub-incrementos m é dado por

$$m = 8 \left[\frac{\bar{\sigma}_{ef} - \sigma_y}{\sigma_o} \right] + 1, \quad (95)$$

sendo $\bar{\sigma}_{ef} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$, a tensão efetiva, σ_y o limite de escoamento no instante considerado e σ_o o limite de escoamento inicial. Desta forma, para cada valor de σ_{ij} calculado, uma nova superfície de escoamento pode ser determinada através da expressão

$$\sigma_y = \sigma_o + H' \bar{\varepsilon}_{ef}, \quad (96)$$

onde $\bar{\epsilon}_{ef} = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \epsilon_{ij}^p \Delta \epsilon_{ij}^p}$, representa a deformação plástica efetiva.

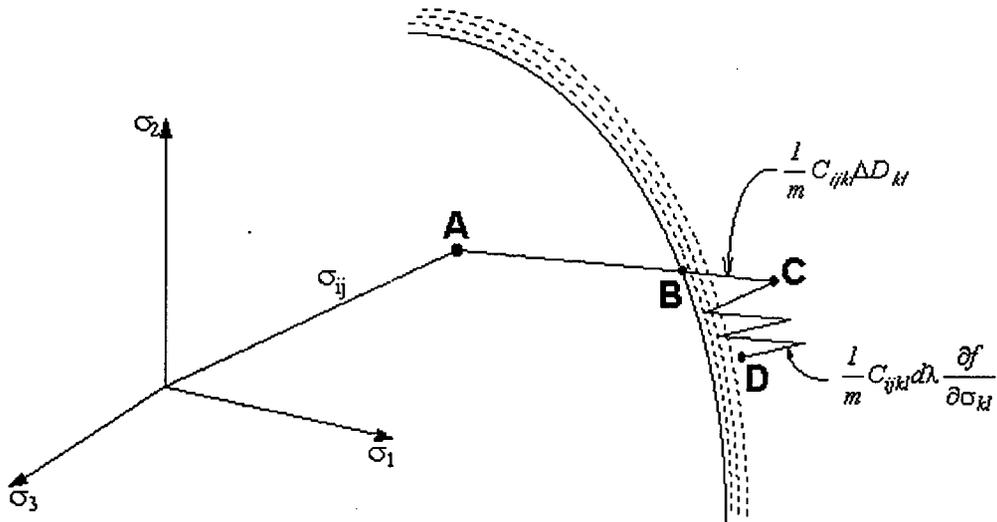


Figura 9: Integração da matriz constitutiva utilizando m sub-incrementos.

Mesmo utilizando esta técnica, a tensão final continua ligeiramente afastada da superfície de escoamento (Figura 9), mas este afastamento pode ser corrigido através de um fator de escalonamento R , da forma (Hinton e Owen, 1988)

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = R \sigma_{ij}, \quad (97)$$

sendo $R = \frac{\sigma_o + H' \bar{\epsilon}_{ef}}{\bar{\sigma}_{ef}}$.

No capítulo seguinte serão apresentados os resultados numéricos de alguns problemas com não-linearidades geométrica e material para comprovar a validade e a eficiência da formulação utilizada.

5 Resultados Numéricos

5.1 Introdução

Com o objetivo de verificar se a formulação desenvolvida nos capítulos 3 e 4, é adequada para a modelagem de problemas de análise estrutural, nos quais são consideradas não-linearidades geométrica e material, alguns problemas típicos da área de estruturas, no regime elastoplástico, são resolvidos, sendo os resultados obtidos apresentados e comparados com soluções analíticas e numéricas, encontradas na literatura.

Para tanto são resolvidos uma série de problemas descritos a seguir:

- Uma placa fina quadrada totalmente engastada com carregamento transversal uniformemente distribuído é estudada, objetivando validar a formulação para problemas com não linearidade geométrica. Com este mesmo objetivo, é analisada uma placa fina circular totalmente engastada com carregamento central concentrado. Os resultados obtidos, quando comparados com outras soluções numéricas e analíticas, foram satisfatórios.

- Para comprovar a eficiência da formulação para problemas elastoplásticos, foi analisada uma placa (tira) retangular furada tracionada. A evolução da frente plástica ocorreu conforme o esperado. A placa quadrada totalmente engastada com carregamento distribuído transversal, foi, agora, estudada para verificar-se a validade da formulação para problemas de flexão elastoplástica de placas.

- Finalmente, para comprovar que a formulação utilizada é válida para resolver problemas com não-linearidades geométrica e material simultaneamente, uma placa

retangular foi submetida à flexão. Muito embora não se tenha encontrado soluções numéricas ou analíticas para este tipo de problema, os resultados foram satisfatórios, com a evolução da frente plástica comportando-se conforme o esperado.

5.2 Placa quadrada engastada com não-linearidade geométrica

Uma placa fina quadrada totalmente engastada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído é analisada. A geometria e as propriedades materiais são mostradas na Figura 10.

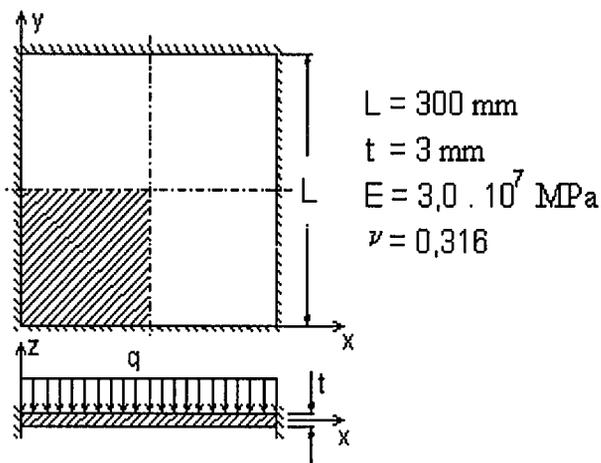


Figura 10: Placa quadrada engastada com carregamento distribuído.

Utilizando-se as propriedades de simetria, o problema foi modelado discretizando-se apenas um quadrante (região hachurada na Figura 10). Para se analisar a convergência h deste modelo, isto é, o comportamento da solução quando o número de elementos da malha aumenta, na Tabela 1 apresentam-se os deslocamentos transversais centrais da placa utilizando malhas com 1, 4 e 16 elementos finitos lagrangeanos isoparamétricos de nove nós, respectivamente, sendo que a carga é aplicada em 9

incrementos desiguais.

Os resultados obtidos para 16 elementos são comparados graficamente na Figura 11, confirmando a boa representação do comportamento não linear do caso proposto, visto que as diferenças entre os resultados obtidos no presente trabalho e aqueles apresentados por Pica et al (1980), Chia (1980) e Luersen (1994) é bastante pequena.

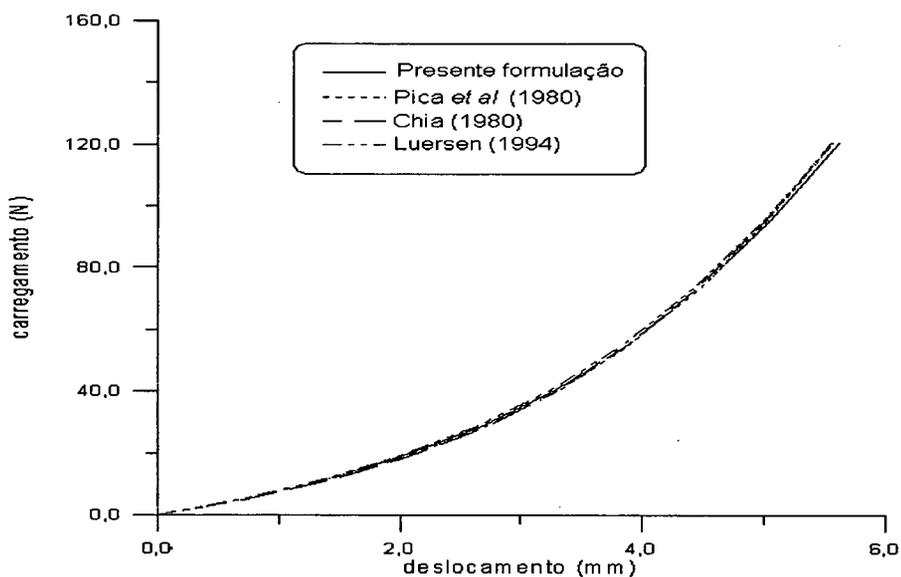


Figura 11: Deslocamento central da placa quadrada engastada.

Na Figura 12 são apresentados graficamente os valores do deslocamento central normalizado quando a carga total está aplicada, utilizando as malhas com 1, 4 e 16 elementos finitos. A normalização do deslocamento é feita utilizando a solução analítica de Chia (1980). Da análise desta representação gráfica (Figura 12), observa-se uma rápida convergência h da solução, isto é, ao aumentar-se o número de elementos da malha a convergência para os valores de deslocamento fornecidos aproximam-se rapidamente da solução analítica.

Tabela 1: Deslocamento central de uma placa quadrada engastada sujeita a não linearidade geométrica.

Carga q	Presente Formulação			Pica <i>et al</i> 16 elem.	Chia analítico	Luersen 16 elem.
	1 elem.	4 elem.	16 elem.			
5,337	0,8785	0,7058	0,6982	0,7104	0,7404	0,7006
11,490	1,7925	1,4163	1,3788	1,4097	1,4455	1,3678
19,020	2,7400	2,1247	2,0329	2,0745	2,0988	2,0092
28,500	3,7112	2,8259	2,6688	2,7087	2,7163	2,6333
40,470	4,6932	3,5149	3,2896	3,3189	3,3120	3,2457
55,200	5,6630	4,1802	3,8896	3,9027	3,8858	3,8410
73,500	6,6377	4,8360	4,4842	4,4784	4,4562	4,4334
95,400	7,5946	5,4681	5,0627	5,0358	5,0132	5,0112
120,600	8,5140	6,0677	5,6149	5,5665	5,5471	5,5642

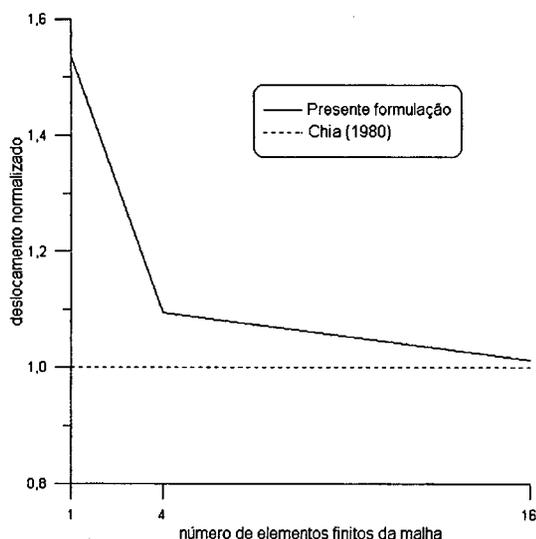


Figura 12: Convergência h para o problema da placa quadrada engastada (carga total).

5.3 Placa circular engastada, com não-linearidade geométrica

Uma placa fina circular engastada submetida a um carregamento concentrado central P é analisada. A geometria e as propriedades materiais são mostradas na Figura 13. Novamente, utilizando as propriedades de simetria, o problema foi modelado discretizando-se apenas um quadrante.

Na Tabela 2 são apresentados os deslocamentos transversais do ponto central da placa circular obtidos discretizando-se o quadrante com 12 elementos finitos lagrangeanos isoparamétricos de nove nós (Figura 14) para 6 incrementos de carga iguais. Este resultado é comparado com a solução apresentada por Pica *et al* (1980), utilizando o mesmo elemento finito e a mesma discretização, e com a solução analítica proposta por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) para placas finas.

Analisando-se os resultados apresentados na Tabela 2, comprova-se a boa perfor-

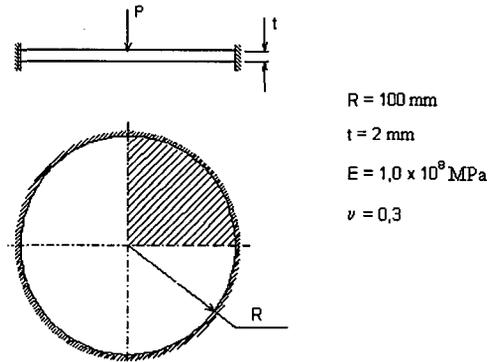


Figura 13: Placa circular engastada submetida a um carregamento concentrado central.

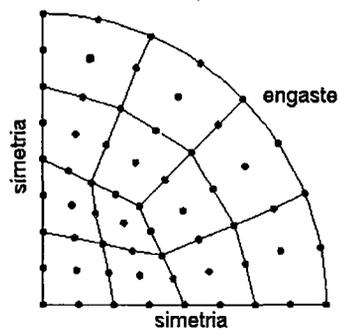


Figura 14: Discretização de um quadrante da placa circular engastada.

Tabela 2: Deslocamento central w de uma placa circular engastada sujeita a não-linearidade geométrica.

Carga P	(Presente formulação)	(Pica et al)	(Timoshenko et al)
16000	0,4256	0,4298	0,4255
32000	0,8062	0,8176	0,8093
48000	1,1360	1,1508	1,1386
64000	1,4227	1,4368	1,4193
80000	1,6749	1,6854	1,6618
96000	1,9002	1,9054	1,8745

mance da formulação proposta por Hill (1959). O deslocamento final apresentado é próximo do valor da espessura. A teoria linear de placas finas fornece como solução para o deslocamento central

$$w = \frac{3PR^2(1 - \nu^2)}{4\pi Et^3}, \quad (98)$$

onde P é o carregamento concentrado central, R é o raio da placa, ν é o coeficiente de Poisson, E representa o módulo de elasticidade longitudinal do material e t é a espessura da placa. Utilizando-se esta relação obtém-se o deslocamento central da placa igual a 2,6070 mm, valor este bem diferente daqueles listados na Tabela 2, obtidos utilizando-se formulações não-lineares. Isto confirma a necessidade da utilização de uma teoria específica para o caso de grandes deslocamentos, já que a teoria linear não é adequada quando a ordem dos deslocamentos ultrapassa, aproximadamente, 40% do valor da espessura (Foggiatto e Selke, 1995; Luersen, 1994).

5.4 Placa retangular furada, tracionada, com não-linearidade material

Neste problema de elastoplasticidade plana, uma placa (tira) retangular furada, apresentada na Figura 15 com suas dimensões e discretização utilizada, é tracionada por um carregamento de membrana. Uma análise deste problema é realizada objetivando verificar o comportamento elastoplástico da placa, quando em sua geometria existe um fator de acúmulo de tensões. O furo está posicionado no centro da placa, permitindo assim que a modelagem seja feita considerando-se apenas um quadrante. Na Figura 16 são apresentadas as configurações deformada e indeformada, bem como as características materiais utilizadas. Os resultados e deslocamentos obtidos são apresentados na Tabela 3 e a Figura 17 apresenta a evolução da frente plástica. Esta evolução ocorreu conforme o esperado, como pode ser visto na Figura 18, a qual mostra resultados obtidos por Zienkiewicz (1977). Este autor analisou o caso discretizando a placa com elementos finitos triangulares (Figura 19) e considerando as condições de tensão plana.

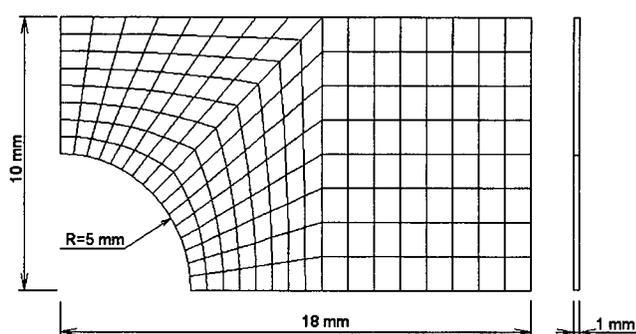


Figura 15: Geometria e discretização de uma placa retangular furada.

Os valores mostrados na Figura 18 correspondem à razão entre o dobro do car-

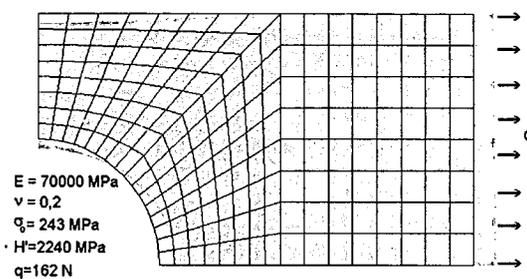


Figura 16: Configurações deformada e indeformada da placa retangular furada traçãoada.

Tabela 3: Deslocamento longitudinal de uma placa retangular furada sujeita a não-linearidade material.

carregamento	deslocamento
16,2	0,006468
32,4	0,012937
48,6	0,019407
64,8	0,025931
81,0	0,032668
97,2	0,039215
113,4	0,045796
129,6	0,052285
145,8	0,058766
162,0	0,065237

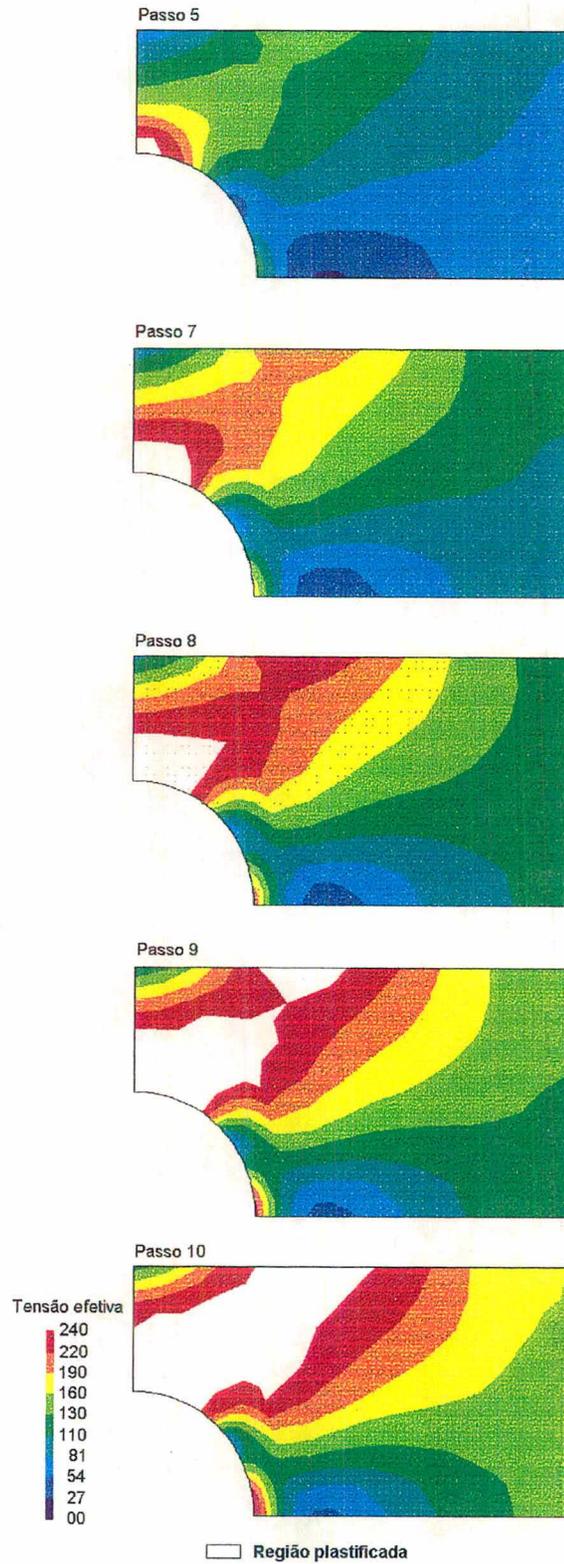


Figura 17: Evolução da frente plástica de uma placa furada tracionada.

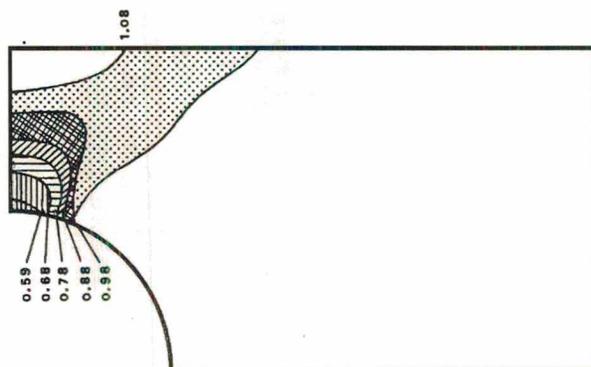


Figura 18: Evolução da frente plástica apresentada por Zienkiewicz (1977).

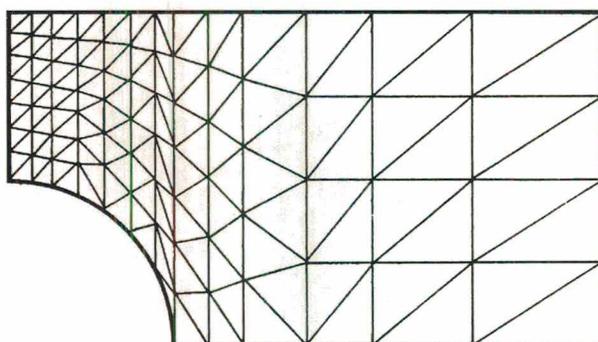


Figura 19: Discretização utilizada por Zienkiewicz (1977).

regamento aplicado e a tensão de escoamento do material ($\frac{2q}{\sigma_0}$). É importante notar que Zienkiewicz (1977) informa que esta relação seria ($\frac{q}{\sigma_0}$) o que seria incompatível com os resultados apresentados por ele. Esta observação também foi feita por Brebbia *et al* (1984), quando estudou este caso, utilizando o Método dos Elementos de Contorno.

5.5 Placa quadrada, engastada, com não-linearidade material

Este problema consiste em uma placa fina engastada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído na superfície, conforme mostra a Figura 20, que também apresenta características geométricas e materiais da placa em forma adimensionalizada.

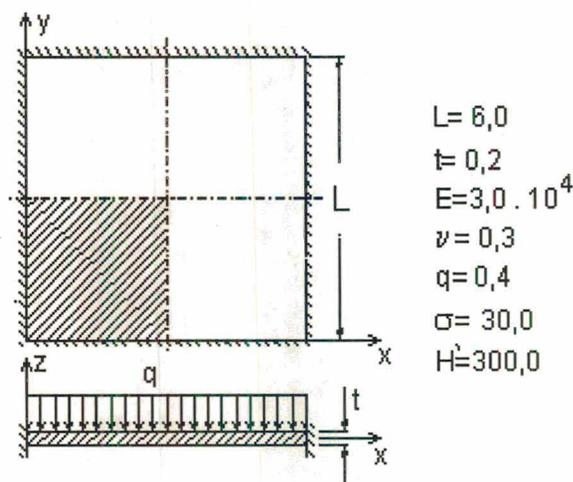


Figura 20: Placa engastada submetida a um carregamento distribuído.

Este problema tem sido vastamente utilizado para estudar a influência da consideração da não-linearidade geométrica (Foggiatto e Selke, 1995), bem como da não-linearidade material (Owen e Figueiras, 1983 e Foggiatto e Selke, 1996). Neste caso de

flexão elasto-plástica de uma placa, estudou-se a evolução da frente plástica para um carregamento distribuído aplicado incrementalmente em 12 passos. A espessura da placa foi dividida em 12 pontos de Gauss-Lobatto. A Figura 3 mostra as configurações de tensão, na superfície da placa, para os passos de carga número 1, 5, 7 e 10. A região branca representa a zona plastificada na superfície externa da placa e o início da plastificação se dá no ponto **A** (Figura 21).

A Figura 22 mostra graficamente uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e os obtidos por outros autores utilizando outras teorias, ou utilizando o mesmo arcabouço teórico aqui utilizado, com pequenas modificações. Observa-se que os resultados são bastante próximos, evidenciando a validade da presente formulação. A Tabela 4 mostra os resultados de deslocamento transversal do ponto central que foram representados na Figura 22.

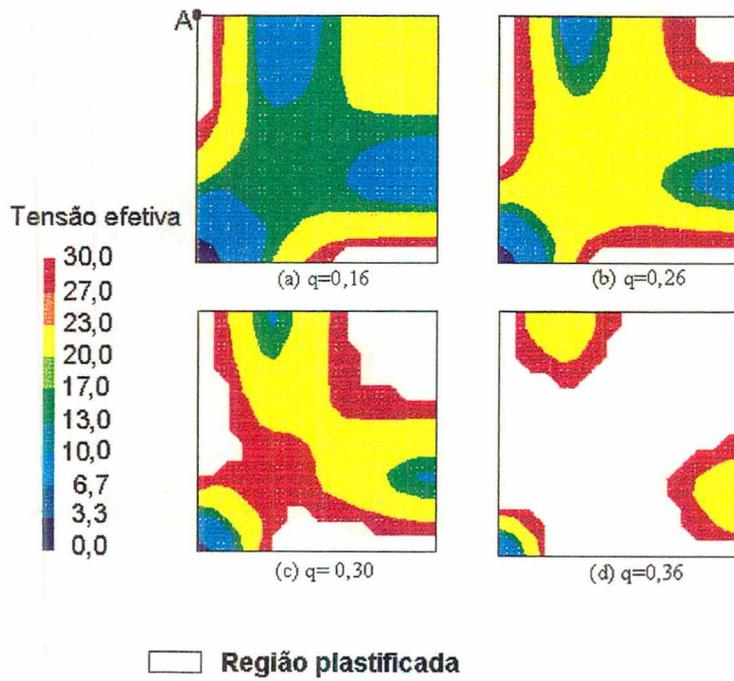


Figura 21: Evolução da frente plástica de uma placa quadrada.

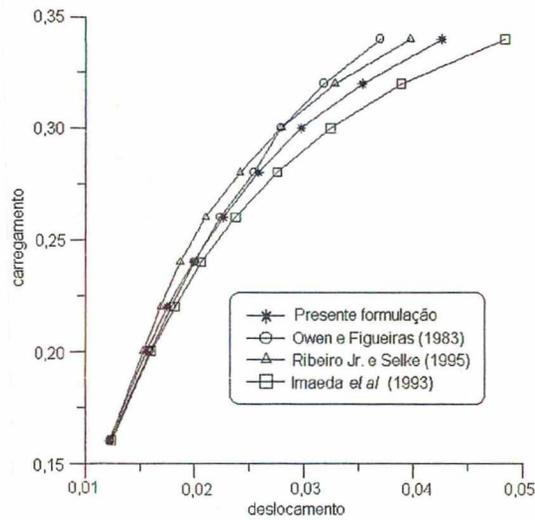


Figura 22: Deslocamento central da placa quadrada.

Tabela 4: Deslocamento central w de uma placa quadrada engastada sujeita a não-linearidades geométrica e material.

Carga P	Presente formulação	Owen e Figueiras (1983)	Ribeiro Jr e Selke (1995)	Imaeda <i>et al</i> (1993)
0,16	0,0122	0,0123	0,0122	0,0124
0,20	0,0156	0,0159	0,0153	0,0160
0,22	0,0175	0,0179	0,0169	0,0182
0,24	0,0199	0,0200	0,0187	0,0206
0,26	0,0226	0,0223	0,0210	0,0237
0,28	0,0258	0,0254	0,0241	0,0275
0,30	0,0297	0,0279	0,0279	0,0324
0,32	0,0353	0,0318	0,0328	0,0388
0,34	0,0426	0,0370	0,0397	0,0484

5.6 Placa furada flexionada com não-linearidade geométrica e material.

Com o intuito de verificar se a formulação resolve de forma adequada problemas com não-linearidades material e geométrica, simultaneamente, uma placa furada (Figura 23) foi submetida a um carregamento de flexão, conforme mostra a Figura 24.



Figura 23: Geometria da placa retangular furada.

Embora não tenham sido encontradas na literatura soluções para poder-se comparar com os resultados numéricos obtidos com a formulação utilizada, os resultados encontrados são mostrados na Tabela 5, onde se verifica o bom desempenho desta formulação para o caso estudado.

A evolução da frente plástica, mostrada na Figura 25, ocorreu conforme o esperado e demonstrou que a formulação utilizada é eficiente para os casos de flexão elasto-plástica de placas semi-espessas.

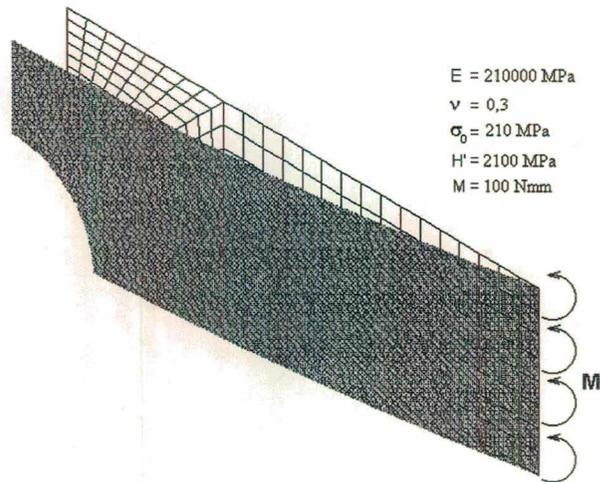


Figura 24: Placa retangular furada sujeita a flexão.

Tabela 5: Deslocamento central de uma chapa retangular com um furo central sujeita a flexão, e apresentando não-linearidades geométrica e material.

Carregamento	Presente trabalho
10	0,16432
20	0,32863
30	0,49293
40	0,65721
50	0,82147
60	0,98571
70	1,15009
80	1,32442
90	1,51233
100	1,71541

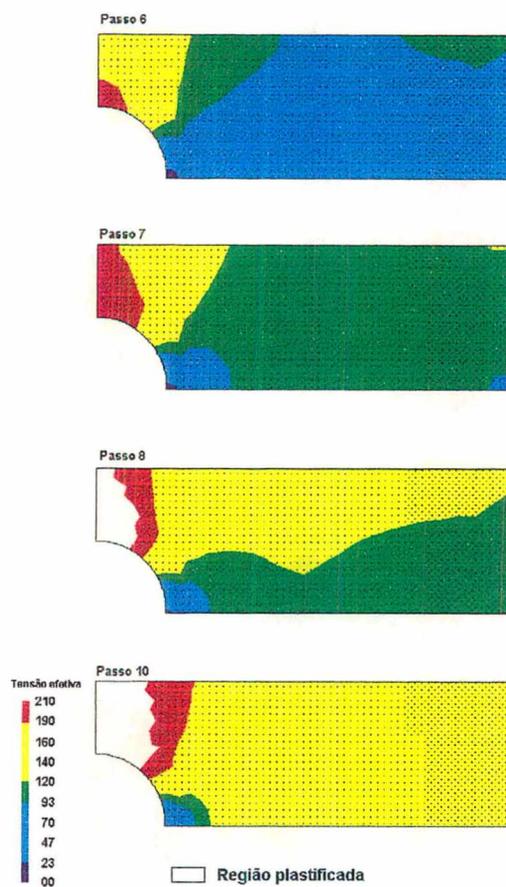


Figura 25: Evolução da frente plástica em uma placa retangular com furo circular central sujeita a flexão, exibindo não-linearidades geométrica e material.

6 Conclusões e Sugestões

Este trabalho foi desenvolvido tendo por finalidade estudar e implementar um elemento finito de placas semi-espessas, a ser usado na resolução de problemas com não-linearidades geométrica e material. A motivação para o desenvolvimento do presente trabalho, foram os bons resultados obtidos por Imaeda (1992) e Ribeiro Jr. (1995), utilizando o mesmo princípio variacional, no estudo de cascas finas e cascas semi-espessas, respectivamente.

A formulação de um elemento finito de placa semi-espessa, isoparamétrico, quadrilateral de nove nós, baseada no princípio variacional de Hill (1959), mostrou-se eficiente na modelagem de placas semi-espessas sujeitas a grandes deflexões e o elemento finito proposto apresentou bom desempenho ao resolver problemas de elastoplasticidade.

O uso da regra de quadratura de Gauss-Lobatto, na integração sobre a espessura, garantiu uma maior sensibilidade na representação do processo de plastificação. Embora previsto, o único modo espúrio esperado usando-se o elemento finito isoparamétrico quadrilateral de nove nós não se manifestou nos casos estudados. Assim sendo, não se buscou a implementação de procedimentos para controle ou eliminação do mesmo.

O algoritmo de Newton-Raphson demonstrou-se razoavelmente eficiente no processo iterativo, restando para um trabalho futuro comparar se o uso de outros algoritmos melhoraria ainda mais a convergência.

A regra de encruamento isotrópico foi utilizada, seguindo orientação do trabalho de

McMeeking e Rice (1975). A análise do desempenho de outras regras de encruamento nesta formulação é uma outra sugestão para trabalhos futuros.

A escolha correta dos tensores tensão-deformação é de grande relevância para representar corretamente o comportamento não linear da estrutura. Outro tópico importante, que pode dar continuidade a esta linha de pesquisa, é a determinação de outros tensores taxa de tensão objetivos que se adaptem à formulação utilizada.

O uso de uma teoria de placas de ordem superior, como a implementada por Barp (1996), na análise elastoplástica de placas é outro tema para um próximo trabalho, já que, utilizando esta teoria não há a preocupação com o travamento (*locking*).

Existe uma grande carência, na literatura, de soluções analíticas e resultados numéricos abrangendo elastoplasticidade finita em placas semi-espessas. Isso, de certa forma, tornou difícil a comparação de alguns dos resultados obtidos. No entanto, estes resultados numéricos podem servir de referência para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- . ATKIN, R.J.; FOX, N. **An Introduction to the Theory of Elasticity**. London: Longman mathematical texts, xi + 245 p., 1980.
- . BARP, J.L. "Problemas de contato unilateral em placas semi-espessas, sujeitas a grandes deflexões, utilizando uma teoria de ordem superior". **Dissertação de Mestrado**, UFSC, xvi + 143 p., 1996.
- . BATHE, K.J. **Finite Elements Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, xiii + 735 p., 1982.
- . BAZANT, Z. P. "A correlation study of formulations of incremental deformation and stability of continuous bodies". **Journal of Applied Mechanics**, n. 71, p. 919-928, 1971.
- . BELYTSCHKO, T. **Computational Methods for Transient Analysis**. 2nd edition. Illinois: Elsevier Science Publishers B.V., 1983.
- . BORESI, P.A.; LYNN, P.P. **Elasticity in Engineering Mechanics**, New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1974.
- . BREBBIA, C.A.; TELLES J.C.F.; WROBEL L.C. **Boundary Element Techniques**. Berlin: Springer-Verlag, xiv + 467p., 1984.
- . CHEN, W.F.; HAN, D.J. **Plasticity for Structural Engineering**. New York: Springer-Verlag, xiii + 606p., 1988.
- . CHIA, C.Y. **Nonlinear Analysis of Plates**. McGraw-Hill, Inc, 1980.
- . COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- . DAFALIAS Y. F. "Co-rotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations". **Journal of Applied Mechanics**, v. 50, p. 561-565, 1983.
- . DIETER, G.E. **Mechanical Metallurgy**. McGraw-Hill, 1976.
- . FOGGIATTO, J.A.; SELKE, C.A.C., "Um estudo sobre flexão de placas semi-espessas com não-linearidade geométrica utilizando o método dos elementos finitos". **Anais do XVI Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia**, v. 1, p. 207-215, 1995.
- . FOGGIATTO, J.A.; SELKE, C.A.C., "Análise elastoplástica de placas semi-espessas sujeitas a grandes deflexões utilizando o método dos elementos finitos". **Anais do VII Congresso Nacional de Ingenieria Mecanica**, v. 1, p. 105-108, Chile, 1996.

- . FONSECA, J.S.O. "Uma formulação de elementos finitos sólidos para problemas com não-linearidades geométrica e material, **Dissertação de Mestrado**, UFSC, xiii + 67 p., 1990.
- . GADALA, M.S.; DOKAINISH, M.A.; ORAVAS, G.A.E. "Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p. 887-914, 1984.
- . GURTIN, M.E. **An Introduction to Continuum Mechanics**. New York: Academic Press, xi + 265 p., 1981.
- . HILL, R. "Some basic principles in mechanics of solids without a natural time". **Journal of the Mechanics and Physics of solids**, v. 7, p. 209-225, 1959.
- . HINTON, E.; OWEN D.R.J. **Finite Elements in Plasticity**. Swansea (UK): Pineridge Press Limited, xii + 594 p., 1980
- . HUGHES, T.J.R. **The finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, xxvii + 803 p., 1987.
- . IMAEDA, F.T. "Um elemento finito de casca fina para análise elastoplástica de estruturas". **Dissertação de Mestrado**, UFSC, x + 133 p., 1992.
- . IMAEDA, F.T.; SELKE C.A.C.; BLASS, A. "Análise elastoplástica de estruturas utilizando um elemento finito de casca fina". **Anais do XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, v. 1, p. 169-172, Brasília, DF, 1993.
- . JOHNSON, G.C.; BAMMANN, D.J. "A discussion of stress rates in finite deformation problems". **International journal Solids Structures**, v. 20, p. 725-737, 1984.
- . KHAN, A.S.; HUANG, S. **Continuum Theory of Plasticity**. New York: John Wiley & Sons, 422 p., 1995.
- . KIKUCHI, N.; CHENG, J.H. "Finite element analysis of large deformation problems including unilateral contact and friction". **ASME. AMD.**, v.54, p. 121-132, 1983.
- . KLEIBER, M. **Incremental Finite Element Modelling in Nonlinear Solid Mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 187 p., 1989.
- . LIU, M.L.; TO, C.W.S. "Híbrido strain based three node flat triangular shell elements - I, nonlinear theory and incremental formulation". **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, p. 1031-1056, 1995.
- . LO, K.H.; CHRISTENSEN, R.M.; WU, E.M. "A high-order theory of plate deformation, part 1: homogeneous plates". **Journal of Applied Mechanics**, v. 44, n. 4, p. 663-668, 1977.

- . LUERSEN, M.A. "Contato unilateral em placas semi-espessas sujeitas a grandes deflexões". **Dissertação de Mestrado**, UFSC, xii + 84 p., 1994.
- . MALVERN, L.E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**, Prentice Hall, xiv + 713 p., 1969.
- . McMEEKING, R.M.; RICE, J.R. "Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation". **International Journal Solids Structures**, v. 11, p. 601-616, 1975.
- . MINDLIN, R.D. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates". **Journal of Applied Mechanics**, v. 18, p. 31-38, 1951.
- . MOURÃO, R.P. "Um elemento finito de casca para a análise de problemas com não-linearidade geométrica, **Dissertação de Mestrado**, UFSC, x + 69 p., 1991.
- . MUÑOZ, P.A.R. "Desenvolvimentos na aplicação do método da função de Green local modificado a problemas de placas de Mindlin". **Dissertação de Mestrado**, UFSC, 1994.
- . NAGTEGAAL, J.C.; DE JONG J. E. "Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 15-41, 1981.
- . NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICZ, O.C. "Convenient form of stress invariants for plasticity". **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 98, p. 949-953, 1972.
- . NOVOTNY, A.A.; LUERSEN, M.A.; TOMÁS PEREIRA, J.; SELKE, C.A.C. "Análise comparativa entre alguns procedimentos de integração na espessura para problemas elasto-plásticos em placas semi-espessas". **Anais do XV Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia**, v. 11, p. 203-215, 1994.
- . ODEN, J.T. **Finite Elements of Nonlinear Continua**, McGraw-Hill, 1972.
- . ORTIZ, M.; SIMO, J.C. "An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relation". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 353-366, 1986
- . OWEN, D.R.J.; FIGUEIRAS, J.A. "Anisotropic elastic-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 19, p. 541-546, 1983
- . PARISH, H. "Nonlinear analysis of shells using isoparametric elements". **Non-linear Finite Element Analysis of Plates and Shells. AMD.**, v. 48, p. 47-63, 1981.

- . PICA, A.; WOOD, R.D.; HINTON, E. "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behavior using a Mindlin formulation " **Computers & Structures**, v. 11, p. 203-215, 1980.
- . RAO, S.S. **The Finite Element Method in Engineering**. 2nd edition. New York: Pergamon Press, xxvi + 643 p., 1992.
- . REDDY, J.N. "A simple higher-order theory for laminated composite plates". **Journal of Applied Mechanics**, v. 51, p. 745-752, 1984.
- . REISSNER, E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". **Journal of Applied Mechanics**, v. 12, A69-A77, 1945.
- . RIBEIRO Jr., A.S. "Uma formulação para análise elastoplástica de cascas semi-espessas utilizando o método dos elementos finitos". **Dissertação de Mestrado**, UFSC, xii + 129 p., 1995.
- . RIBEIRO Jr., A.S.; SELKE, C.A.C. "Uma formulação para análise elastoplástica de cascas semi-espessas utilizando o método dos elementos finitos ". **Anais do XVI Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia**, v. 1, p. 226-235, 1995.
- . SELKE, C.A.C. "Local unilateral contact problems of beams and plates undergoing large deflections". **Ph.D. Thesis**, The University of Michigan, Ann Arbor, 1987.
- . SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. "Return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, p. 649-670, 1986.
- . SPENCER, A.J.M. **Continuum Mechanics**, New York: Longman,, 1980.
- . TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. 2nd edition, New York: McGraw-Hill, 1959.
- . TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. **Theory of Elasticity**. 3rd edition. New York: McGraw-Hill, xx + 545 p., 1970.
- . TORIGAKI, T. "Contact and impact problems using adaptative finite elements methods", **Ph.D. Thesis**, The University of Michigan, Ann Arbor, 1989.
- . TRUESDELL, C.; NOLL, W. "The nonlinear field theories of mechanics". **Encyclopedia of Physics**, v. 3, 5th edition, Berlin: Springer-Verlag, 1965.
- . UGURAL, A.C. **Stresses in Plates and Shells**. New York: McGraw-Hill, xv + 317 p., 1981.
- . WASHIZU, K. **Variational Methods in Elasticity and Plasticity**. 3rd edition. New York: Pergamon Press, xv + 630 p., 1982.

ZIENKIEWICZ, O.C. **The Finite Element Method**. 4rd edition. v. 1. New York: McGraw-Hill, xx + 648 p., 1977.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; TOO, J.M. "Reduced Integration technique in general analysis of plates and shells ". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 3, p. 275-290, 1971.

A APÊNDICE

A.1 Sub-Matrizes da Matriz de Rigidez Geométrica

Para facilitar a implementação da matriz de rigidez geométrica, ela foi dividida em duas submatrizes, $K_{\sigma 1}$ e $K_{\sigma 2}$ (expressões (45) e (46)), sendo que estas foram obtidas desenvolvendo-se o segundo e terceiro termos da expressão (39). Considerando o campo de deslocamento na forma de taxa

$$\delta \dot{u}_x(x, y, z) \doteq \delta \dot{u}(x, y) + z \cdot \delta \dot{\theta}_x(x, y) \quad (\text{A1})$$

$$\delta \dot{u}_y(x, y, z) \doteq \delta \dot{v}(x, y) + z \cdot \delta \dot{\theta}_y(x, y)$$

$$\delta \dot{u}_z(x, y, z) \doteq \delta \dot{w}(x, y),$$

e sua substituição no segundo termo de (39) pode-se chegar as sub-matrizes de

$K_{\sigma 1}$:

$$K_{uu} = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A2})$$

$$K_{\theta u} = \int_V \left\{ z \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{13} & 0 \\ 0 & \sigma_{23} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A3})$$

$$K_{vv} = K_{uu} \quad (\text{A4})$$

$$K_{\phi v} = \int_V \left\{ -z \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV -$$

$$- \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{13} & 0 \\ 0 & \sigma_{23} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A5})$$

$$K_{ww} = K_{uu} \quad (\text{A6})$$

$$K_{\theta\theta} = \int_V \left\{ z^2 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{13} & 0 \\ 0 & \sigma_{23} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{13} & 0 \\ 0 & \sigma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A7})$$

$$K_{\phi\phi} = \int_V \left\{ z^2 \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{13} & 0 \\ 0 & \sigma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{13} & 0 \\ 0 & \sigma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A8})$$

As sub-matrizes de K_{σ_2} são obtidas desenvolvendo-se o terceiro membro da ex-

pressão (39):

$$L_{uu} = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{11} & \frac{1}{2}\sigma_{12} \\ \frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A9})$$

$$L_{vu} = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{12} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A10})$$

$$L_{wu} = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2}\sigma_{13} & \frac{1}{4}\sigma_{23} \\ 0 & \frac{1}{4}\sigma_{13} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A11})$$

$$L_{\theta u} = \int_V \left\{ z \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \sigma_{11} & \frac{1}{2}\sigma_{12} \\ \frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2}\sigma_{13} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sigma_{23} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{array} \right] \right\} dV \quad (\text{A12})$$

$$L_{\phi u} = \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sigma_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A13})$$

$$L_{vv} = \int_V \left\{ \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \frac{1}{2}\sigma_{12} \\ \frac{1}{2}\sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A14})$$

$$L_{wv} = \int_V \left\{ \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{23} & 0 \\ \frac{1}{4}\sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A15})$$

$$L_{\theta v} = \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sigma_{12} & 0 \\ \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \frac{1}{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4}\sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A16})$$

$$L_{\phi v} = \int_V \left\{ z \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & \frac{1}{2}\sigma_{12} \\ \frac{1}{2}\sigma_{12} & \sigma_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4}\sigma_{13} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{23} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A17})$$

$$L_{ww} = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4}\sigma_{11} & \frac{1}{4}\sigma_{12} \\ \frac{1}{4}\sigma_{12} & \frac{1}{4}\sigma_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV \quad (\text{A18})$$

$$L_{\theta w} = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{4}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sigma_{12} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sigma_{31} & 0 \\ \frac{1}{4}\sigma_{32} & \frac{1}{4}\sigma_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A19})$$

$$L_{\phi\omega} = \int_V \left\{ \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{32} & \frac{1}{4}\sigma_{31} \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A20})$$

$$L_{\theta\theta} = \int_V \left\{ \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sigma_{13} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sigma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sigma_{13} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sigma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV + \\
& + \int_V \left\{ z^2 \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \frac{1}{2}\sigma_{12} \\ \frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{4}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV \\
& \tag{A21}
\end{aligned}$$

$$L_{\phi\theta} = \int_V \left\{ \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sigma_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z^2 \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{4}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A22})$$

$$L_{\phi\phi} = \int_V \left\{ \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{13} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_9 \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z \begin{bmatrix} N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots \\ N_9 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sigma_{13} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV +$$

$$+ \int_V \left\{ z^2 \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ N_{9,1} & N_{9,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) & \frac{1}{2}\sigma_{12} \\ \frac{1}{2}\sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & \cdots & N_{9,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & \cdots & N_{9,2} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A23})$$