UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PERTURBADA DE SEGUNDA ORDEM $x'' + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(x')x' + g(x) = 0$ E DE SUA FORMA RETARDADA, $x'' + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(x')x' + g(x(t-\zeta(t))) = 0$, USANDO O SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV.

MIGUEL PELANDRÉ PEREZ

NOVEMBRO-1980

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof.William Glenn Whitley, Ph.D.

Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Teófilo Abuabara Saad

Orientador

Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

A minha esposa Nilcéa e aos meus filhos
Mariana e Gustavo

A Universidade Federal de Santa Catarina,

aos colegas do Departamento de Matemática da UFSC,

ao Professor Pedro José Bosco, Diretor do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da UFSC,

ao Professor Doutor Plácido Zoéga Táboas, por valiosas conversações,

a todos que direta ou indiretamente contribuiram para a realização deste trabalho

Meu agradecimento.

Agradeço, muito especialmente, ao Professor Doutor Teófilo Abuabara Saad, pela disponibilidade constante com que sempre nos atendeu. E, também, pela segurança e dedicação com que numa hora difícil, assumiu e orientou este trabalho.

Ao saudoso Professor Doutor Walter de Bona Castelan, idealizador e primeiro orientador deste trabalho, pelo apoio e exemplo de persistência e seriedade na pesquisa.

RESUMO

Neste trabalho, seguindo Burton [2], consideramos a equação diferencial,

$$x'' + q(x,x',t)x' + g(x) = 0 \qquad (*)$$

sob as hipóteses,

$$y = x', \quad q(x, y, t) = f(x)h(y), \quad h(y) \geqslant 1, \quad f(x) > 0 \qquad \text{e}$$

$$xg(x) > 0 \text{ para } x \neq 0.$$

E, construimos funções de LYAPUNOV para (*), no caso em que:

$$q(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y), \quad h_k(y) \geqslant 1,$$

$$k = 1,2,\ldots,n \qquad (**)$$

para então construirmos funcionais de LYAPUNOV para a equação perturbada,

$$x'' + q(x,x',t)x' + g(x(t - \zeta(\tilde{t}))) = 0$$

no caso em que a função q é dada por (**).

ABSTRACT

In this work, following Burton [2], we consider a differential equation

$$x'' + q(x,x',t)x' + g(x) = 0 \qquad (*)$$

under the hypotheses

$$y = x', \; q(x,y,t) = f(x)h(y), \; h(y) \geq 1, \; f(x) > 0 \text{ and}$$

$$xg(x) > 0 \text{ for } x \neq 0$$

And, we construct Lyapunov's functions for (*), where

$$q(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y), \quad h_k(y) \geq 1. \qquad (**)$$

$$k = 1,2,\dots,n$$

In order to construct Lyapunov's functions for a perturbed equation

$$x'' + q\,(x,x',t)x' + g(x(t - \zeta(t))) = 0,$$

where de functons q is given by (**).

INTRODUÇÃO

Em [2] e [3], Burton considera a equação diferencial

$$x'' + q(x,x',t)x' + g(x) = 0 \tag{1}$$

e, sua forma retardada,

$$x'' + q(x,x',t)x' + g(x(t-\zeta(t))) = 0 \tag{2}$$

Se $y = x'$, $q(x,y,t) = f(x)h(y)$, então a equação (1) se transforma no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x)h(y)y - g(x) \end{cases} \tag{3}$$

Sob as hipóteses $h(y) \geqslant 1$, $f(x) > 0$ e $xg(x) > 0$, para $x \neq 0$, Burton [2] constrói funções de Lyapunov para a equação diferencial (3), para então construir funcionais de Lyapunov para a equação perturbada (2).

Seguindo Burton [2], construimos funções de Lyapunov para a equação (1) no caso em que,

$$q(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y), \tag{4}$$

onde $h_k(y) \geqslant 1$, $k = 1,2,\ldots,n$, para então construir funcionais de Lyapunov para a equação perturbada (2), no caso em que a função q é dada por (4) (Capítulo II).

A importância de conhecer funções de Lyapunov para uma equação diferencial baseia-se em que elas nos informam sobre a estabilidade (de Lyapunov) das soluções da equação diferencial.

A equação (1) tem sido objeto de estudo de muitos autores, entre eles

Antosiewicz [1], Burton [4], Bushaw [5], La Salle [7], Levin-Nohel [8] e Willett-Wong [9].

Ela cobre, entre outras, a equação de Van der Pohl.

No capítulo I deste trabalho, nós estudamos condições necessárias e suficientes para que as soluções de (1) sejam limitadas, quando q é definida como em (4).

CAPITULO I

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES A FIM DE QUE AS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$$x'' + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y + g(x) = e(t)$$

SEJAM LIMITADAS.

Consideremos a equação

$$x'' + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y + g(x) = e(t), \tag{5}$$

ou equivalentemente o sistema

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y - g(x) + e(t), \end{aligned} \tag{6}$$

onde

I) $f_k, h_k, k= 1,2,\ldots,n$ e g são funções reais contínuas em $\mathbb{R}$.

II) $xg(x)>0$ para todo $x\neq 0$ e $f_k(x)\geq 0$, para todo $x\in\mathbb{R}$, $k= 1,2,\ldots,n$.

III) $h_k(y)>0$, para todo $y\in\mathbb{R}$, $k= 1,2,\ldots n$.

IV) A função e é localmente contínua para $t\geq 0$

V) $\int_0^{+\infty} |e(s)|ds<\infty$, em particular a função e é limitada para $t\geq 0$.

Lema 1 - No sistema (6), suponhamos que as funções f_k, h_k, $k= 1,2,\ldots n$ e g satisfaçam as condições I) até IV) e que para todo $t_o\geq 0$, $\int_{t_o}^{t} e(s)ds$ é limitada para $t\geq t_o$. Se

$$\text{(VI)} \quad \int_0^{+\infty}\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)|\}dx = \pm\infty,$$

então todas as soluções de (6) são limitadas.

Será demonstrado posteriormente (teorema 1, por vir) que estas condições também são necessárias para que qualquer solução do sistema (6) seja limitada.

<u>Demonstração</u> - Suponhamos que (VI) não é verdadeira. Então,

$$\int_0^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)| \} dx = M < +\infty, \text{ ou,}$$

$$\text{ou } \int_0^{-\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)| \} dx = -M_1 > -\infty.$$

Admitamos, por exemplo, que

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x) \} dx = M < +\infty,$$

sendo que o outro caso é similar.

Seja $N>0$ tal que

$$\left| \int_{t_0}^{t} e(s) ds \right| \leq N, \tag{7}$$

para todo $t \geq t_0$,

$$P = \max_{0 \leq k \leq n} \max_{0 \leq y \leq 2(N+1)} h_k(y),$$

e $x_0 > 0$, suficientemente grande, tal que

$$(P+1) \int_{x_0}^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x) \} dx < 1 \tag{8}$$

Seja $(x(t), y(t))$, $t \geq t_0$, uma solução de (6) tal que

$$x(t_0) = x_0, \text{ e, } y(t_0) = N + 2 \tag{9}$$

Como

$$y' = -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y - g(x) + e(t), \tag{10}$$

então, integrando de t_o a t e, usando (7) e (9), temos que

$$y(t) = y(t_0) - \int_{t_0}^{t} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))h_k(y(s))\, y(s) + g(x(s))\} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e(s)ds \leq$$

$$\leq N + 2 - \int_{t_0}^{t} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s) + g(x(s))\}ds + N =$$

$$= 2N + 2 - \int_{t_0}^{t} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s) + g(x(s))\}ds \leq$$

$$\leq 2N + 2,$$

para todo $t \geq t_0$ tal que $(x(s), y(s))$, $t_0 \leq s \leq t$, esteja no primeiro quadrante do $\mathbb{R}^2$ (isto é, $x(s)>0$ e $y(s)>0$, $t_0 \leq s \leq t$), já que neste caso o segundo termo do lado direito da penúltima desigualdade é ≤ 0. Assim,

$$y(t) \leq 2N + 2, \tag{11}$$

para todo $t \geq t_0$ tal que $(x(s), y(s))$, $t_0 \leq s \leq t$, permaneça no primeiro quadrante do $\mathbb{R}^2$.

Demonstraremos que $y(t) \geq 1$, para todo $t \geq t_0$. Com efeito, suponhamos que existe $t>t_0$ tal que $y(t)<1$. Então, já que $y(t_0) = N + 2 > 1$, existe $t>t_0$ tal que $y(t) = 1$. Seja t_1 o primeiro dos $t>t_0$ tais que $y(t) = 1$. Segue-se que $y(t_1) = 1$ e que $y(t)>1$ para $t_0 \leq t \leq t_1$, de onde $x'(t) = y(t) \geq 1$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Portanto, integrando (10) de t_0 a t_1, e usando (7) e (9), temos que

$$y(t_1) = y(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))h_k(y(s)) + g(x(s))\}ds + \int_{t_0}^{t_1} e(s)ds \geq$$

$$\geqslant N + 2 - \int_{t_0}^{t_1} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s) + g(x(s))\}ds - N =$$

$$= 2 - \sum_{k=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s)ds - \int_{t_0}^{t_1} g(x(s))ds \tag{12}$$

Ora, usando o teorema de valor médio para integrais (teorema 12-B § 4, Cap. IX de [6]), temos que existe $t_k \in [t_0, t_1]$, tal que

$$\int_{t_0}^{t_1} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s)ds = h_k(y(t_k)) \int_{t_0}^{t_1} f_k(x(s))y(s)ds,$$

K= 1,2,...,n, de onde, já que $x'(s)= y(s)$ tem-se que

$$\int_{t_0}^{t_1} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s)ds = h_k(y(t_k)) \int_{x_0}^{x(t_1)} f_k(s)ds,$$

k= 1,2,...,n. Também, já que $x'(s) = y(s) \geqslant 1$, $t_0 \leqslant s \leqslant t_1$, temos que:

$$- \int_{t_0}^{t_1} g(x(s))ds \geqslant - \int_{t_0}^{t_1} g(x(s))x'(s)ds = - \int_{x_0}^{x(t_1)} g(s)ds$$

Portanto, de (12), se tem que

$$y(t_1) \geqslant 2 - \sum_{k=1}^{n} h_k(y(t_k)) \int_{x_0}^{x(t_1)} f_k(s)ds - \int_{x_0}^{x(t_1)} g(s)ds,$$

logo, da desigualdade (11) e tendo em conta a definição de P, temos que

$$y(t_1) \geqslant 2 - P \int_{x_0}^{x(t_1)} \sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))ds - \int_{x_0}^{x(t_1)} g(s)ds \geqslant$$

$$\geqslant 2 - (P+1) \int_{x_0}^{x(t_1)} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(s) + g(s)\}ds,$$

de onde, por (8), se tem que $y(t_1) > 1$, o que é uma contradição. Portanto $y(t) \geqslant 1$ para todo $t \geqslant t_0$. Ora, como $x'(t) = y(t) \geqslant 1$, $t \geqslant t_0$, então

$$x(t) \geqslant x_0 + t - t_0, \qquad t \geqslant t_0,$$

de onde $\{x(t),\ t \geqslant t_0\}$ não é limitada. Portanto, o lema.

Teorema 1 - No sistema (6), suponhamos que $e(t) = 0$, para todo t e que I) até III) são válidas. Então toda solução de (6) é limitada se, e somente se,

$$\text{(VI)} \quad \int_0^{\pm\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)| \} dx = \pm \infty$$

Demonstração

Suponhamos que (VI) é verdadeira. Demonstremos que qualquer solução de (6) é limitada. Com efeito, seja $W: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$W(x,y) = G(x) + \frac{y^2}{2}, \quad \text{onde } G(x) = \int_0^x g(s)\,ds$$

Então a derivada de W ao longo das soluções de (6) satisfaz:

$$W'(x,y) = \frac{dW}{dt}(x,y) = \frac{\partial W}{\partial x} . x' + \frac{\partial W}{\partial y} . y' =$$

$$= g(x)y + y\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y - g(x)\Big) =$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y^2 \leqslant 0$$

Portanto, se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $(x(t), y(t))$ é uma solução de (6) através de (x_0, y_0), então temos que:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x(t),y(t))} W'(x(t),y(t))\,dt \leqslant 0,$$

de onde se tem que $W(x(t), y(t)) \leqslant W(x_0, y_0)$, isto é,

$$G(x(t)) + \frac{y(t)^2}{2} \leqslant G(x_0) + \frac{y_0^2}{2} \tag{13}$$

Portanto, já que $G(x)>0$, $x \neq 0$, então temos que

$$\frac{y(t)^2}{2} \leqslant G(x(t)) + \frac{y(t)^2}{2} \leqslant G(x_0) + \frac{y_0^2}{2},$$

logo,

$$|y(t)| \leqslant \sqrt{2G(x_0) + y_0^2} = K, \ \forall t \geqslant t_0 \tag{14}$$

Ora, por (VI) temos que:

$$\int_0^{\pm\infty} \sum_{K=1}^{n} f_k(x)dx = \pm\infty, \text{ ou, } \int_0^{\pm\infty} g(x)dx = +\infty \ (\text{pois}, \ xg(x)>0,$$

$x \neq 0$).

i) Suponhamos que $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = +\infty$, isto é, $\lim_{|x| \to +\infty} G(x) = +\infty$. Então, neste caso, $x(t)$ $t \geqslant t_0$ é limitada. Com efeito, se não é o caso, existe uma sequência $t_n \geqslant t_0$, tal que $\lim |x(t_n)| = +\infty$, de onde por hipótese, $\lim G(x(t_n)) = +\infty$, que é uma contradição, pois por (13), temos:

$$G(x(t_n)) \leqslant G(x_0) + \frac{y_0^2}{2}, \quad \forall_n \in \mathbb{N}$$

ii) Se $G(x)$ é limitada, então $\int_0^{\pm\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx = \pm\infty$.

Consideremos o sistema:

$$x' = y$$

$$y' = -\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y + g(x)\right]/2 \tag{15}$$

Seja $(x(t), y(t))$ uma solução de (15) tal que:

$$x(0) = |x_0| \quad \text{e} \quad y(0) = K \tag{16}$$

então, integrando (15) de 0 a t e usando (16) temos que:

$$y(t) = y(0) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s)ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(x(s))ds = K - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t f_k(x(s))h_k(y(s))y(s)ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(x(s))ds$$

Ora, para $t>0$ tal que $(x(t),y(t))$ esteja no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ (isto é, $x(t)>0$ e $y(t)>0$), pelo teorema de valor médio para integrais (teorema 12B, §4, Cap. IX de [6]), temos que existe $t_k \in [0,t]$ tal que:

$$\int_0^t f_k(x(s))h_k(y(s))y(s)ds = h_k(y(t_k))\int_0^t f_k(x(s))y(s)ds$$

$K = 1,2,\dots,n$, de onde, já que $x'(s) = y(s)$, se tem que:

$$\int_0^t f_k(x(s))h_k(y(s))y(s)ds = h_k(y(t_k))\int_{|x_0|}^{x(t)} f_k(s)ds$$

$K = 1,2,\dots,n$. Portanto,

$$y(t) = K - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} h_k(y(t_k))\int_{|x_0|}^{x(t)} f_k(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t g(x(s))ds,$$

logo se

$$M = \max_{t\geq 0} y(t)$$

$$\alpha = \max_{1\leq k\leq n}\ \max_{y\in[0,M]} h_k(y)$$

então

$$y(t) \geq K - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x_0|}^{x(t)} f_k(s)ds - \frac{1}{2} \int_{|x_0|}^{x(t)} g(s)ds$$

Portanto, já que $y(t)$, $t \geq 0$ e $G(x)$ são funções limitadas e

$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} f_k(x)dx = +\infty$, então, como em (i) temos que $x(t)$, $t \geq 0$, é limitada.

CAPÍTULO II

LIMITAÇÃO DAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$$x'' + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(x')x' + g(x) = p(t,x,x')$$

E DE SUA FORMA RETARDADA

$$x'' + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(x')x' + g(x(t-\zeta(t))) = p(t,x,x')$$

USANDO O SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV.

No desenvolvimento deste capítulo, usaremos a seguinte notação:

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds,$$

$$F_k(x) = \int_0^x f_k(s)ds, \qquad (**)$$

$$H_k(y) = \int_0^y \frac{ds}{h_k(s)}, \quad K= 1,2,\ldots,n$$

sendo que as funções $g(x)$, $f_k(x)$ e $h_k(y)$, $K= 1,2,\ldots,n$, serão definidas oportunamente.

<u>Teorema 2</u> - No sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y - g(x) \end{cases} \qquad (17)$$

Suponhamos que $f_k(x)>0$ para todo x, $h_k(y)\geqslant 1$ para todo y, $K= 1,2,\ldots,n$ e $xg(x)>0$, $x \neq 0$. Se V é a função definida por:

$$V(x,y) = \{3[G(x) + y^2/2] + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]^2/2 -$$

$$- \int_0^y \sum_{k=1}^{n} H_k(u) / \sum_{k=1}^{n} h_k(u)\, du\}^{1/2} \qquad (18)$$

então temos que:

(a) V é radialmente ilimitada se, e somente se, todas as soluções de (17) são limitadas.

(b) $|\partial V/\partial y| \leq (2n + 3)\sqrt{2}$ para $x^2 + y^2 > 0$

(c) A derivada de V ao longo das soluções de (17) satisfaz:-

$$V'(x,y) \leq \{(-3 + n) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y^2 + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y -$$

$$- n \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} H_k(y) g(x) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\}/2V$$

Demonstração

(a) ($\Longrightarrow$) Suponhamos V radialmente ilimitada e demonstremos que qualquer solução de (17) é ilimitada. Com efeito, pelo teorema 1, devemos mostrar que:

$$\int_0^{\pm\infty} \{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)|\} dx = \pm \infty.$$

isto é, que

$$\int_0^{+\infty} \{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x)\} dx = + \infty \quad e$$

$$e \int_{-\infty}^{0} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \bar{g}(x) \} dx = + \infty$$

Por hipótese, $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} V(x,y) = +\infty$, logo, em particular

$$\lim_{x \to +\infty} V(x,0) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} V(x,0) = +\infty \qquad (*)$$

. Portanto, como

$$V(x,0) = \{3G(x) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x)]^2/2\}^{1/2},$$

então temos que

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} F_k(x) = +\infty,$$

isto é,

$$\int_{0}^{+\infty} g(x)dx = +\infty \quad \text{ou} \quad \int_{0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx = +\infty$$

Ora, como

$$\int_{0}^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x) \} dx \geq \int_{0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx$$

e

$$\int_{0}^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x) \} dx \geq \int_{0}^{+\infty} g(x)dx$$

então temos que

$$\int_{0}^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x) \} dx = +\infty \qquad (19)$$

Também por (*) temos que

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} \sum_{k=1}^{n} F_k(x) = +\infty$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{0} - g(x)dx = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \int_{-\infty}^{0} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx = +\infty$$

Ora, como

$$\int_{-\infty}^{0} \{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - g(x)\}dx \geq \int_{-\infty}^{0} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx$$

e

$$\int_{-\infty}^{0} \{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - g(x)\}dx \geq \int_{-\infty}^{0} - g(x)dx$$

logo

$$\int_{-\infty}^{0} \{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - g(x)\}dx = +\infty \qquad (20)$$

De (19) e (20) temos então que

$$\int_{0}^{\pm\infty} \{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)|\}dx = \pm\infty$$

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que todas as soluções de (17) sejam limitadas, e demonstremos que V é radialmente ilimitada. Com efeito, como

$$\int_0^y \sum_{k=1}^n H_k(y)/\sum_{k=1}^n h_k(y)\, du = \int_0^y (H_1(u) + H_2(u) + \dots$$

$$\dots + H_n(u))/(h_1(u) + h_2(u) + \dots + h_n(u))\, du =$$

$$= \int_0^y \Big(\int_0^u ds/h_1(s) + \int_0^u ds/h_2(s) + \dots$$

$$\dots + \int_0^u ds/h_n(s)\Big)/(h_1(u) + h_2(u) + \dots h_n(u))\,du \leq$$

$$\leq \int_0^y \Big(\int_0^u ds + \int_0^u ds + \dots + \int_0^u ds\Big)/(h_1(u) + h_2(u) + \dots +$$

$$\dots + h_n(u))\, du \leq \int_0^y u\,du = y^2/2 \leq y^2$$

então

$$V(x,y) \geq \{3(G(x)+y^2/2) + \Big[\sum_{k=1}^n (H_k(y) + F_k(x))\Big]^2/2 - y^2/2\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \{3G(x) + y^2 + \Big[\sum_{k=1}^n (H_k(y) + F_k(x))\Big]^2/2\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \{y^2\}^{1/2} =$$

$$= |y|$$

logo

$$\lim_{|y| \to +\infty} V(x,y) = +\infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ (mais precisamente, uniforme em $x \in \mathbb{R}$).

Demonstraremos agora que

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x,y) = +\infty,$$

para cada $y \in \mathbb{R}$, e portanto, V é radialmente ilimitada, de onde a afirmação a) Com efeito, como as soluções de (17) são limitadas, então (pelo teorema 1) temos que

$$\int_0^{\pm\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)| \} dx = \pm \infty$$

isto é,

$$\int_0^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)| \} dx = + \infty \quad \text{e}$$

$$\text{e} \int_0^{-\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)| \} dx = - \infty$$

Ora, já que $xg(x) > 0$ se $x \neq 0$, então temos que,

$$\int_0^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x) \} dx = + \infty \quad \text{e}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - g(x) \} dx = + \infty,$$

Isto é,

$$\int_0^{+\infty} \{ \sum_{k=1}^{n} f_k(x) dx = + \infty \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} g(x) dx = + \infty \tag{21}$$

e

$$\int_{\infty}^{0} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) dx = + \infty \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{0} -g(x) dx = + \infty \tag{22}$$

Também, como

$$V(x,y) \geqslant \{3G(x) + 1/2 \left[\sum_{k=1}^{n} H_k(y) + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \right]^2 \}^{1/2},$$

e tendo em conta (**), por (21) temos que

$$\lim_{x \to +\infty} V(x,y) = + \infty,$$

e por (22) também temos que

$$\lim_{x \to -\infty} V(x,y) = +\infty$$

Portanto, $\lim_{|x| \to +\infty} V(x,y) = +\infty$, para cada $y \in \mathbb{R}$, o que queríamos demonstrar.

Provemos (b). Com efeito,

$$2V\,\partial V/\partial y = 3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) / \sum_{K=1}^{n} h_k(y) =$$

$$= 3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]/h_1(y) + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]/h_2(y) +$$

$$+\ldots+ [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]/h_n(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y)$$

Portanto,

$$|\partial V/\partial y| \leq (|3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]/h_1(y) + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]/h_2(y)$$

$$+\ldots+ [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]/h_n(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \;)/2V \;| \leq$$

$$\leq (3|y| + |\sum_{K=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))|/h_1(y) + |\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))|/h_2(y) + \ldots$$

$$+\ldots+ |\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))|/h_n(y) + |\sum_{k=1}^{n} H_k(y)| / \sum_{k=1}^{n} h_k(y))/2V$$

Ora, como $h_k(y) \geq 1$ para todo y, então temos que

$$|\sum_{k=1}^{n} H_k(y)| \leq |\int_0^y ds/h_1(s)| + |\int_0^y ds/h_2(s)| +\ldots+ |\int_0^y ds/h_n(s)| \leq$$

$$\leq |\int_0^y ds| + |\int_0^y ds| +\ldots+ |\int_0^y ds| =$$

$$= |y| + |y| + \ldots + |y| =$$

$$= n|y|$$

Por outra parte temos que

$$V(x,y) \geq \{3(G(x) + y^2/2) + 1/2 \left[\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))\right]^2 - y^2\}^{1/2} =$$

$$= \{3G(x) + y^2/2 + 1/2 \left[\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))\right]^2\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \{y^2/2\}^{1/2} =$$

$$= |y|/\sqrt{2}$$

Também,

$$V(x,y) \geq \{\left[\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))\right]^2/2\}^{1/2} =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))\right|/\sqrt{2}$$

Portanto, segue-se que

$$|\partial V/\partial y| \leq (3|y| + n \left|\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))\right| + n|y|)/2V \leq$$

$$\leq ((n+3)\ |y|)/(|y|/\sqrt{2}) + n \left|\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))\right| /$$

$$/\left(\left|\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))\right|/\sqrt{2}\right) =$$

$$= (n+3)\sqrt{2} + n\sqrt{2} =$$

$$= (2n+3)\sqrt{2} \quad p/\ x^2 + y^2 > 0.$$

Provemos (c).

A derivada V' de V, ao longo das soluções de (17), é dada por:

$$V'(x,y) = \frac{dV(x,y)}{dt} = (\partial V/\partial x)\, x' + (\partial V/\partial y)\, y'$$

De (18), temos

$$\partial V/\partial x = \{3g(x) + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}/2V$$

e

$$\partial V/\partial y = \{3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \sum_{K=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/ \sum_{k=1}^{n} H_k(y)\}/2V$$

então,

$$V'(x,y) = (\{3g(x) + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}\, y +$$

$$+ \{3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) /$$

$$/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\}\, \{-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y - g(x)\})/2V \leq$$

$$\leq \{\sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - 3\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y + (-n+1) \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y /$$

$$/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - n\sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} F_k(x) g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \}/2V$$

Ora, como $h_k(y) \geq 1$ para todo y e $|\sum_{k=1}^{n} H_k(y)| \leq n|y|$, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y \leq |\sum_{k=1}^{n} H_k(y)| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y \leq n \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y^2 \leq$$

$$\leq n \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y^2$$

Também,

$$(-n + 1) \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \leq 0,$$

Portanto, temos que

$$V'(x,y) \leq \{ (-3 + n) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, h_k(y) y^2 + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y -$$

$$- n \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y \,/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \quad -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y) g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) g(x) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} F_k(x) g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \}/2V$$

Isto completa a demonstração do teorema.

<u>Corolário</u> - Suponhamos que as condições do teorema (2) sejam mantidas. Se V é radialmente ilimitada, então as soluções do sistema perturbado:

$$x' = y$$
$$y' = -\sum_{k=1}^{n} F_k(x)h_k(y)y - g(x) + p(t,x,y) \tag{23}$$

são limitadas para qualquer p contínua satisfazendo:

$$(2n+3)\sqrt{2}\,|p(t,x,y)| \leqslant -\{(-3+n)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y -$$
$$- n\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) \quad -$$
$$-\sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)\sum_{K=1}^{n} 1/h_k(y) \quad + \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) \, -$$
$$-\sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\}/2V$$

para $x^2 + y^2 \geqslant M$ para algum $M > 0$.

Usando (18), vamos calcular a derivada de V ao longo das soluções de (23). Com efeito, demonstremos que:

$$V'(x,y) \leqslant 0$$

isto é,

$$V'(x,y) = \frac{dV(x,y)}{dt} = (\partial V/\partial x)x' + (\partial V/\partial y)y' \leqslant 0$$

De (18), temos

$$\partial V/\partial x = \{3g(x) + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}/2V$$

e

$$\partial V/\partial y = \{3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \quad -$$
$$-\sum_{k=1}^{n} H_k(y)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\}/2V$$

então,

$$V'(x,y) = (\{3g(x) + [\sum_{k=1}^{n}(H_k(y) + F_k(x))]\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}y + \{3y +$$

$$+ [\sum_{k=1}^{n}(H_k(y) + F_k(x))]\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\}.$$

$$.\{-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y - g(x) + p(t,x,y)\})/2V$$

Ora, como $h_k(y) \geqslant 1$ para todo y e

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(y)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y \leqslant n\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2$$

também

$$(-n + 1)\sum_{k=1}^{n} H_k(y)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) \leqslant 0$$

logo,

$$V'(x,y) \leqslant (-3 + n)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y -$$

$$- n\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) .$$

$$.\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x) .$$

$$.\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + 3yp(t,x,y) + \sum_{k=1}^{n}(H_k(y) + F_k(x)).$$

$$.\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\ p(t,x,y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)p(t,x,y)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)$$

Por hipótese,

$$-(2n + 3)\sqrt{2}\,|p(t,x,y)| \leqslant \{(-3 + n)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y + \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y -$$

$$- n \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) g(x) \,.$$

$$. \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) g(x) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) g(x) \,.$$

$$. \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \}/2V$$

logo,

$$V'(x,y) \leq -(2n + 3)\sqrt{2}\, |p(t,x,y)| + \{ p(t,x,y)(3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \,.$$

$$. \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y)) \}/2V \leq$$

$$\leq -(2n + 3)\sqrt{2}\, |p(t,x,y)| + \{ |p(t,x,y)| \,[3|y| + n| \sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))| +$$

$$+ n|y| \,]\}/2V \leq -(2n + 3)\sqrt{2}\, |p(t,x,y)| + |p(t,x,y)| \,[(n + 3)|y| +$$

$$+ n| \sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))| \,]/2V$$

Ora, como

$$V(x,y) \geq |y|/\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad V(x,y) \geq | \sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x)|/\sqrt{2}$$

então,

$$(n + 3)|y| \leq (n + 3)\sqrt{2}\, V \quad \text{e} \quad n| \sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))| \leq n\sqrt{2}\, V$$

logo,

$$(n + 3)|y| + n| \sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))| \leq (n + 3)\sqrt{2}\, V + n\sqrt{2}\, V = (2n+3)\sqrt{2}\, V$$

Portanto,

$$V'(x,y) \leq -(2n+3)\sqrt{2}\,|p(t,x,y)| + |p(t,x,y)|\,[(2n+3)\sqrt{2}\,V]/2V =$$

$$= -(2n+3)\sqrt{2}/2 \cdot |p(t,x,y)| \leq 0 \text{ p/ } x^2 + y^2 \geq M \text{ para algum } M>0$$

Como V é autônoma, isto implica em que todas as soluções de (23) sejam limitadas.

Teorema 3 - Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - g(x) \end{cases} \tag{24}$$

Suponhamos que em (17) $f_k(0)<0$, $h_k(y)\geq K>0$ se $y\geq M>0$, $K=1,2,\ldots,n$, para algumas constantes K e M. Se

$\int_M^\infty ds/\sum_{k=1}^{n} h_k(s)<\infty$, então existem soluções de (24) com finito tempo de escape.

Demonstração

a) Demonstraremos primeiro que existem $m>M$ e $x_1>0$ tais que $y\geq m$ e $0\leq x\leq x_1$ então $y'\geq m$. Com efeito, como cada função f_k é contínua e $f_k(0)<0$, $k=1,2,\ldots,n$, então existe $x_1>0$ tal que $f_k(x)<0$, para $0\leq x\leq x_1$, $k=1,2,\ldots,n$. Então se,

$$m>\max\left\{\max_{0\leq x\leq x_1} g(x)/-K\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\},$$

então temos que $y>m$ implica em que

$$y > g(x)/(-K\sum_{k=1}^{n} f_k(x)),$$

para todo $0\leq x\leq x_1$, isto é,

$$-K\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - g(x)\geq 0, \qquad 0\leq x\leq x_1.$$

Portanto,

$$y' = -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y - g(x) \geqslant -K\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - g(x) \geqslant 0,$$

para todo $y>m$, todo $x \in \mathbb{R}$ com $0 \leqslant x \leqslant x_1$, já que $h_k(y) \geqslant K > 0$ e $-\sum_{k=1}^{n} f_k(x) > 0$, $0 \leqslant x \leqslant x_1$.

b) Sejam $P>0$ tal que $|g(x)| \leqslant P$ para $0 \leqslant x \leqslant x_1$ $y_0 > m$ tal que $x_1/y_0 < -K\sum_{K=1}^{n} F_k(x_1)/(2P)$ e tal que $\int_{y_0}^{+\infty} ds/h(s) < -\sum_{k=1}^{n} F_k(x)/2$. Seja $(x(t), y(t))$ uma solução em $\mathbb{R}^+ \times [m,+\infty)$ com $x(0) = 0$ e $y(0) = y_0$. Ora, pela parte a), enquanto a solução $(x(t),y(t))$ é definida e $x(t) \leqslant x_1$, então $y(t)$ é crescente, de onde $y(t) \geqslant y_0$. Demonstremos que tal solução não é prolongável, de onde o teorema. Com efeito, se é o caso, então existe $t_1 > 0$ (dependendo de y_0) tal que $x(t_1) = x_1$. Ora, como $x'(t) = y(t) > 0$, então $x(t)$ é crescente em $[0,t_1]$, de onde $0 \leqslant x(t) \leqslant x(t_1) = x_1$, para $t \in [0,t_1]$.

Portanto $x'(t) = y(t) \geqslant y_0$, para todo $t \in [0,t_1]$, logo, integrando de 0 a t_1, temos que

$x_1 = x(t_1) \geqslant t_1 y_0$, de onde se tem que

$$t_1 \leqslant x_1/y_0 < -K\sum_{k=1}^{n} F_k(x_1)/(2p)$$

Portanto, já que $\sum_{k=1}^{n} h_k(y) \geqslant K$, então temos que

$$\int_0^{t_1} g(x(s))/\sum_{k=1}^{n} h_k(y(s))\, ds \leqslant t_1 P/(2K) < -\sum_{k=1}^{n} F_k(x_1)/2 \quad (25)$$

De (17) temos que,

$$y'(s) = -\sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s) - g(x(s))$$

de onde,

$$y'(s)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y(s)) = -[\sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))h_k(y(s))y(s) - g(x(s))]/\sum_{k=1}^{n} h_k(y(s)) =$$

$$= -([f_1(x(s))h_1(y(s)) + f_2(x(s))h_2(y(s)) + \ldots +$$

$$+ f_n(x(s))h_n(y(s))]y(s) - g(x(s)))/\sum_{k=1}^{n} h_k(y(s))$$

Ora, já que $-h_k(y(s)) \geq -\sum_{k=1}^{n} h_k(y(s))$, então tem-se que,

$$y'(s)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y(s)) \geq -\sum_{k=1}^{n} f_k(x(s))y(s) - g(x(s))/\sum_{k=1}^{n} h_k(y(s))$$

Portanto, integrando esta expressão de 0 a t_1, e tendo em conta que $x'(s) = y(s)$, então temos que

$$\int_{y_0}^{y(t_1)} ds/\sum_{k=1}^{n} h_k(s) \geq -\sum_{k=1}^{n} F_k(x_1) - \int_0^{t_1} g(x(s))/\sum_{k=1}^{n} h_k(y(s))\ ds \geq$$

$$\geq -\sum_{k=1}^{n} F_k(x_1)/2,$$

sendo que a última desigualdade segue-se de (25), o que é uma contradição, pois,

$$\int_{y_0}^{y(t_1)} ds/\sum_{k=1}^{n} h_k(s) \leq \int_{y_0}^{+\infty} ds/\sum_{k=1}^{n} h_k(s) < -\sum_{k=1}^{n} F_k(x_1)/2.$$

<u>Teorema 4</u> - No sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -a(t)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - g(x) \end{cases} \qquad (26)$$

Suponhamos que $f_k(x)>0$, $k=1,2,\ldots,n$, $xg(x)>0$ se $x\neq 0$, $a(t)>0$, $a(t)$ monótona crescente e seja $a'(t)/a^2(t)$ monótona decrescente. Então para V definida por:

$$V(t,x,y) = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)]^2/2 + G(x)/a^2(t) + a'(t)/a^2(t) \int_0^x F(s)ds +$$

$$+ [G(x) + y^2/2]/a^2(t) \}^{1/2} \tag{27}$$

temos que:

(a) $V' \leq \{ - \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y^2 \}/(2a(t)V)$

(b) $|\partial V/\partial y| \leq 2/a(t)$

(c) $V'(t,x,y) \to -\infty$ quando $|y| \to +\infty$

(d) V é moderadamente ilimitada se (VI) (Lema 1, Capítulo 1) vale.

Demonstração

(a) A derivada V' de V ao longo das soluções de (26) é dada por:

$$V'(t,x,y) = \frac{dV}{dt}(t,x,y) = (\partial V/\partial x)x' + (\partial V/\partial y)y' + \partial V/\partial t$$

De (26), temos

$$\partial V/\partial x = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x)/a^2(t) +$$

$$+ a'(t)/a^2(t) \sum_{k=1}^{n} F_k(x) + g(x)/a^2(t) \}/2V,$$

$$\partial V/\partial y = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + Y/a(t)] 1/a(t) + y/a^2(t) \}/2V$$

e

$$\partial V/\partial t = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] \cdot -ya'(t)/a^2(t) - 2G(x)a'(t)/$$

$$/a^3(t) + [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^n F_k(s)ds -$$

$$- 2[G(x) + y^2/2]\, a'(t)/a^3(t)\}/2V$$

então,

$$V' = (\{[\sum_{k=1}^n F_k(x) + y/a(t)] \sum_{k=1}^n f_k(x) + g(x)/a^2(t) +$$

$$+ a'(t)/a^2(t) \sum_{k=1}^n F_k(x) + g(x)/a^2(t)\}y + \{[\sum_{k=1}^n F_k(x) +$$

$$+ y/a(t)]\ 1/a(t) + y/a^2(t)\}\ [-a(t) \sum_{k=1}^n f_k(x)y - g(x)] +$$

$$+ [\sum_{k=1}^n F_k(x) + y/a(t)]. -ya'(t)/a^2(t) - 2G(x)a'(t)/a^3(t) +$$

$$+ [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^n F_k(s) - 2[G(x) + y^2/2]\ a'(t)/a^3(t))/2V =$$

$$= \{ - \sum_{k=1}^n F_k(x)g(x)/a(t) - \sum_{k=1}^n f_k(x)y^2/a(t) - 2y^2a'(t)/a^3(y) -$$

$$- 4G(x)a'(t)/a^3(t) + [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^n F_k(s)ds\}/2V$$

Ora, $a(t)>0$ é monótona crescente, $G(x)>0$ se $x\neq 0$ e $a'(t)/a^2(t)$ monótona decrescente,

portanto,

$$V' \leqslant \{ - \sum_{k=1}^n F_k(x)g(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)y^2\}/2a(t)V$$

Provemos (b). Com efeito,

$$\partial V/\partial y = \{[\sum_{k=1}^n F_k(x) + y/a(t)]\ 1/a(t) + y/a^2(t)\}/\ 2V$$

Ora,

$$V(t,x,y) \geq \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)]/2 \}^{1/2} = [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)]/\sqrt{2}$$

também,

$$V(t,x,y) \geq \{(y^2/2)/a^2(t)\}^{1/2} =$$

$$= |y|/(\sqrt{2}\ a(t))$$

Portanto, segue-se que:

$$|\partial V/\partial y| \leq (|\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)|/a(t))/2V + (|y|/a^2(t))/2V \leq$$

$$\leq (|\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)|/a(t))/(2|\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)|/\sqrt{2}) +$$

$$+(|y|/a^2(t))/[2|y|/(\sqrt{2}\ a(t))] \leq \sqrt{2}/(2a(t)) + \sqrt{2}/(2a(t)) =$$

$$= \sqrt{2}/a(t) \leq 2/a(t)$$

Provemos (c). Com efeito,

$$V(t,x,y) = \int_0^y \frac{\partial V}{\partial y}(t,x,s)ds \leq \left|\int_0^y \frac{\partial V}{\partial y}(t,x,s)ds\right| \leq \int_0^y \left|\frac{\partial V}{\partial y}(t,x,y)\right|ds \leq$$

$$\leq 2/a(t) \int_0^y ds = 2y/a(t) \leq 2|y|/a(t)$$

Ora, $a(t)>0$,

então,

$$V(t,x,y) \leq 2|y| \qquad (28)$$

De (a) temos que,

$$V'(t,x,y) \leqslant \{-\sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y^2\}/2a(t)V$$

Ora, $f_k(x)>0$, para todo x, $k=1,2,...,n$ e como $xg(x)>0$ para $x \neq 0$, segue que

$$V'(t,x,y) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y^2/(2a(t)V) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)|y|^2/(2a(t)V)$$

Por (28), temos

$$V'(t,x,y) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)|y|^2/(4a(t)|y|) = -\sum_{k=1}^{n} f_k(x)|y|/(4a(t))$$

Portanto,

$$V'(t,x,y) \to -\infty \quad \text{quando } |y| \to +\infty$$

Provemos (d). De (27), temos

$$V(t,x,y) \geqslant |\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)|/\sqrt{2} + |G(x) + y^2/2|/a(t) \geqslant$$

$$\geqslant |\sum_{k=1}^{n} F_k(x)|/\sqrt{2} - |y|/(\sqrt{2}\,a(t)) + G(x)/a(t) +$$

$$+ y^2/(2a(t))$$

Considerando,

$$b = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} a(t) \quad \text{e} \quad \alpha = \max\{\sqrt{2}, b\}$$

então,

$$\alpha \geqslant \sqrt{2} \Longrightarrow 1/\sqrt{2} \geqslant 1/\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

também,

$$c = \min_{0 \leqslant t \leqslant T} a(t)$$

Portanto,

$$V(t,x,y) \geq |\sum_{k=1}^{n} F_k(x)|/\alpha + G(x)/\alpha + |y|^2/(2a(t)) - |y|/(2\,a(t)) =$$

$$=(|\sum_{k=1}^{n} F_k(x)| + G(x))/\alpha + |y|\left[|y|/(2a(t)) - 1/(\sqrt{2}\,a(t))\right] \geq$$

$$\geq (|\sum_{k=1}^{n} F_k(x)| + G(x))/\alpha + |y|\left[|y|/(2b) - 1/(\sqrt{2}\,c)\right]$$

logo

$$V(t,x,y) \to +\infty \quad \text{quando} \quad \|(x,y)\| \to +\infty$$

<u>Observação (3.1)</u>

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -a(t)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - g(x) + p(t,x,y) \end{cases} \tag{29}$$

onde p é contínua. Suponhamos que as hipóteses do Teorema (4) valem e ainda, $\sum_{k=1}^{n} F_k(x)$ tende para o infinito quando $|x|$ tende para o infinito e V definida em (27) é globalmente decrescente. Então a derivada de V ao longo das soluções de (29) satisfaz:

$$V'(t,x,y) \leq -\sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/(2a(t)V) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y^2/(2a(t)V) + 2|p(t,x,y)|/a(t) \tag{30}$$

Com efeito. A derivada V' de V ao longo das soluções de (29) é dada por:

$$V'(t,x,y) = \frac{dV}{dt}(t,x,y) = (\partial V/\partial x)x' + (\partial V/\partial y)y' + \partial V/\partial t$$

De (27) temos,

$$\partial V/\partial x = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x)/a^2(t) +$$

$$+ a'(t)/a^2(t) \sum_{k=1}^{n} F_k(x) + g(x)/a^2(t) \}/(2V)$$

$$\partial V/\partial y = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] 1/a(t) + y/a^2(t) \}/(2V)$$

e

$$\partial V/\partial t = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] . - ya'(t)/a^2(t) - 2G(x)a'(t)/a^3(t) +$$

$$+ [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^{n} F_k(s)ds - 2[G(x) + y^2/2] .$$

$$. a'(t)/a^3(t) \}/(2V)$$

então,

$$V' = (\{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + g(x)/a^2(t) +$$

$$+ a'(t)/a^2(t) \sum_{k=1}^{n} F_k(x) + g(x)/a^2(t) \}y + \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] .$$

$$. 1/a(t) + y/a^2(t) \} [- a(t) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - g(x) + p(t,x,y)] +$$

$$+ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] . - ya'(t)/a^2(t) - 2G(x)a'(t)/a^3(t) +$$

$$+ [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^{n} F_k(s)ds - 2[G(x) + y^2/2] . a'(t)/a^3(t))/(2V) =$$

$$= \{ - \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/a(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y^2/a(t) - 2y^2a'(t)/a^3(t) -$$

$$- 4G(x)a'(t)/a^3(t) + [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^n F_k(s)ds +$$

$$+ [\sum_{k=1}^n F_k(x) + y/a(t)]p(t,x,y)/a^2(t) + yp(t,x,y)/a^2(t)\}/(2V)$$

Ora, como,

$a(t)>0$ é monótona crescente, $G(x)>0$ se $x \neq o$ e $a'(t)/a^2(t)$ monótona decrescente, então temos

$$V' \leqslant \{- \sum_{k=1}^n F_k(x)g(x)/a(t) - \sum_{k=1}^n f_k(x)y^2/a(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n F_k(x)p(t,x,y)/a(t) + 2yp(t,x,y)/a^2(t)\}/(2V) =$$

$$=(- \sum_{k=1}^n F_k(x)g(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)y^2)/(2a(t)V) +$$

$$+ \{ \sum_{k=1}^n F_k(x)p(t,x,y)/a(t) + 2yp(t,x,y)/a^2(t)\}/(2V)$$

Demonstremos agora que:-

$$\{ \sum_{k=1}^n F_k(x)p(t,x,y)/a(t) + 2yp(t,x,y)/a^2(t)\}/(2V) \leqslant 2|p(t,x,y)|/a(t),$$ de

onde a afirmação (30). Com efeito,

$$\sum_{k=1}^n F_k(x)p(t,x,y)/(2a(t)V) + yp(t,x,y)/(Va^2(t)) = | \sum_{k=1}^n F_k(x)/(2a(t)V) +$$

$$+ y/(Va^2(t)) |p(t,x,y) \leqslant$$

$$\leqslant [| \sum_{k=1}^n F_k(x) |/(2a(t)V) +$$

$$+ |y|/(Va^2(t))] |p(t,x,y)|$$

Ora, de (27) temos,

$$V(t,x,y) \geq \left|\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)\right| /\sqrt{2} + |y|/(\sqrt{2}\,a(t)) \geq$$

$$\geq \left|\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\right|/\sqrt{2} - |y|/(\sqrt{2}\,a(t)) + |y|/(\sqrt{2}\,a't)) =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\right|/\sqrt{2} \geq \left|\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\right|/2$$

logo,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\right| \leq 2V \tag{31}$$

também, como $\sum_{k=1}^{n} F_k(x) \geq 0$,

então,

$$V(t,x,y) \geq \left|\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)\right|/\sqrt{2} + |y|/(\sqrt{2}\,a(t)) \geq$$

$$\geq \left|\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)\right|/2 + |y|/(2a(t)) \geq$$

$$\geq |y|/(2a(t)) + |y|/(2\,a(t)) =$$

$$= |y|/a(t)$$

logo,

$$|y| \leq a(t)V \tag{32}$$

Portanto por (31) e (32), temos que

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x)p(t,x,y)/(2a(t)V) + yp(t,x,y)/(Va^2(t)) \leq [\,2V/(2a(t)V) +$$

$$+ a(t)V/Va^2(t)]\,|p(t,x,y)| \leq$$

$$\leq 2|p(t,x,y)|/a(t)$$

Teorema 5 - Consideremos a função:

$$R_k(x) = \begin{cases} F_k(x) & \text{para } |x| \geq a \\ F_k(a) + (x - a)\left[(F_k(a)-F_k(-a))/2a\right] & \text{para } |x| \leq a \end{cases} \quad (33)$$

Suponhamos que $a(t)>0$, $a(t)$ crescente, $xg(x)>0$, se $x \neq 0$, $f_k(x)>0$ $k= 1,2,...,n$ se $|x| \geq b$ para algum $b \geq 0$ e $(sgx)F(x)>1$ se $|x| \geq b$. Seja $r_k(x)$ a derivada de $R_k(x)$, $k= 1,2,...,n$ e seja V definida por:

$$V(t,x,y) = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x) + y/a(t)]^2/2 + K + 2G(x)/a^2(t) +$$

$$+ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)]^2/2 + a'(t)/a^2(t) \int_0^x \sum_{k=1}^{n} F_k(s)ds +$$

$$+ \int_0^x \sum_{k=1}^{n} r_k(s)[\sum_{k=1}^{n} F_k(s) - \sum_{k=1}^{n} R_k(s)]ds\}^{1/2} \quad (34)$$

onde $a(t)/a^2(t)$ é decrescente e $K>0$ torna V real. Então existe $c>0$ e $M>0$ tal que a derivada de V ao longo das soluções de (26) satisfaz:

$$2VV' \leq \begin{cases} -My^2/a(t) & \text{se } |x| \leq b \text{ e } |y| \geq c \\ -[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y^2 + \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)]/a(t) & \text{se } |x| \geq b \end{cases}$$

Demonstração

A derivada V' de V ao longo das soluções de (26) é dada por:

$$V'(t,x,y) = \frac{dV}{dt}(t,x,y) = (\partial V/\partial x)x' + (\partial V/\partial y)y' + \partial V/\partial t$$

a) Para $|x| \leq a$ e $|y| \leq b$, de (34) temos:

$$\partial V/\partial x = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x) + y/a(t)][\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} r_k(x)] +$$

$$+ 2g(x)/a^2(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] \sum_{k=1}^{n} f_k(x) +$$

$$+ a'(t)/a^2(t) \sum_{k=1}^{n} F_k(x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(x) [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x)]\}/2V,$$

$$\partial V/\partial y = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x) + y/a(t)]\ 1/a(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) +$$

$$+ y/a(t)]\ 1/a(t)\}/2V$$

e,

$$\partial V/\partial t = \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x) + y/a(t)].-ya'(t)/a^2(t) -$$

$$- 4G(x)a'(t)/a^3(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)].-ya'(t)/a^2(t) +$$

$$+ [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^{n} F_k(s)ds\}/2V$$

então,

$$V' = (\{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x) + y/a(t)] [\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} r_k(x)] + 2g(x)/a^2(t) +$$

$$+ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + a'(t)/a^2(t) \sum_{k=1}^{n} F_k(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} r_k(x) [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x)]\}y + \{ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x) +$$

$$+ y/a(t)]\ 1/a(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)]\ 1/a(t)\} [-a(t)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y -$$

$$- g(x)] + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \sum_{k=1}^{n} R_k(x) + y/a(t)].-ya'(t)/a^2(t) -$$

$$- 4G(x)a'(t)/a^3(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)].-ya'(t)/a^2(t) +$$

$$+ \left[a'(t)/a^2(t)\right]' \int_0^x \sum_{k=1}^n F_k(s)ds)/2V = \{ - \sum_{k=1}^n r_k(x)y^2/a(t) -$$

$$- 2\sum_{k=1}^n F_k(x)g(x)/a(t) + \sum_{k=1}^n R_k(x)g(x)/a(t) - \sum_{k=1}^n F_k(x)ya'(t)/$$

$$/a^2(t) + \sum_{k=1}^n R_k(x)ya'(t)/a^2(t) - 2y^2a'(t)/a^3(t) -$$

$$- 4G(x)a'(t)/a^3(t) + \left[a'(t)/a^2(t)\right]' \int_0^x \sum_{k=1}^n F_k(s)ds\}/2V$$

Ora, $a(t)>0$ é monótona crescente, $G(x)>0$ se $x \neq 0$ e $a'(t)/a^2(t)$ ' monótona decrescente,

portanto,

$$V' \leqslant \{ - \sum_{k=1}^n r_k(x)y^2/a(t) - 2\sum_{k=1}^n F_k(x)g(x)/a(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n R_k(x)g(x)/a(t) + \sum_{k=1}^n R_k(x)a'(t)y/a^2(t) -$$

$$- \sum_{k=1}^n F_k(x)a'(t)y/a^2(t)\}/2V$$

Então, como $a(t)$ é crescente e para $|x| \leqslant b$ é possível limitar as funções $r_k(x)$, $F_k(x)$, $g(x)$ e $R_k(x)$. Então, existem $c>0$ e $M>0$ tal que para $|x| \leqslant b$ e $|y| \geqslant c$, temos,

$$V' \leqslant - My^2/2a(t)V \tag{35}$$

b) Para $|x| \geqslant b$ e $|x| \geqslant a$, temos que, $R_k(x) = F_k(x)$, ' $k= 1,2,\ldots,n$, e de (34) temos que:

$$V(t,x,y) = \{ \left[y/a(t)\right]^2/2 + K + 2G(x)/a^2(t) + \left[\sum_{k=1}^n F_k(x) + \right.$$

$$\left. + y/a(t)\right]^2/2 + a'(t)/a^2(t) \int_0^x \sum_{k=1}^n F_k(s)ds\}^{1/2}$$

Com efeito,

$$\partial V/\partial x = \{2g(x)/a^2(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] \sum_{k=1}^{n} f_k(x) +$$

$$+ a'(t)/a^2(t) \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\}/2V,$$

$$\partial V/\partial y = \{y/a^2(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)]\ 1/a(t)\}/2V$$

e

$$\partial V/\partial t = \{[y/a(t)].-ya'(t)/a^2(t) - 4G(x)a'(t)/a^3(t) +$$

$$+ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)].-ya'(t)/a^2(t) +$$

$$+ [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^{n} F_k(s)ds\}/2V$$

Então,

$$V' = (\{2g(x)/a^2(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)] \sum_{k=1}^{n} f_k(x) +$$

$$+ a'(t)/a^2(t) \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\}y + \{y/a^2(t) + [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) +$$

$$+ y/a(t)]1/a(t)\}[-a(t) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - g(x)] +$$

$$+ [y/a(t)].-ya'(t)/a^2(t) - 4G(x)a'(t)/a^3(t) +$$

$$+ [\sum_{k=1}^{n} F_k(x) + y/a(t)].-ya'(t)/a^2(t) +$$

$$+ [a'(t)/a^2(t)]' \int_0^x \sum_{k=1}^{n} F_k(s)ds)/2V =$$

$$= \{-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y^2/a(t) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/a(t) +$$

$$- 2y^2a'(t)/a^3(t) \quad - \quad 4G(x)a'(t)/a^3(t) \quad +$$

$$+ \left[a'(t)/a^2(t)\right]' \int_0^x F_k(s)ds\}/2V$$

Ora, $a(t)>0$ é monótona crescente, $G(x)>0$ se $x \neq 0$ e $a'(t)/a^2(t)$ monótona decrescente,

portanto,

$$V' \leqslant - \{+ \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y^2 + \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)\}/(2a(t)V) \qquad (36)$$

De (35) e (36), o teorema.

Teorema 6 - Consideremos a equação:

$$x'' + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y + g(x(t - \zeta(t))) = 0 \qquad (37)$$

com $f_k(x)>0$ para todo x, $h_k(y) \geqslant 1$ para todo y, $K= 1,2,\ldots,n$, $xg(x)>0$ se $x \neq 0$, onde f_k, h_k, $dg(x)/dx$ e ζ são contínuas, e o sistema equivalente,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y - g(x) + \int_{-\zeta(t)}^{0} g'(x(t+s))y(t+s)ds \end{cases} \qquad (38)$$

Agora se $\zeta(t)$ é diferenciável e $\zeta'(t) \leqslant c_3 \leqslant 1$ para algum $c_3>0$, a seguinte função $\eta(t)$ pode ser substituida por $\zeta(t)$.

$$\eta: [0,\infty) \to (0,\infty)$$

com,

$$0 \leqslant \zeta(t) \leqslant \eta(t) \leqslant B \text{ para algum } B>0$$

$$\eta'(t) \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ para algum } \alpha \geqslant 0 \qquad (39)$$

Suponhamos α, β e η definidas como em (39) e sejam as condiões estabelecidas em (37) válidas. Se existe uma constante $c>0$ para a qual

$$\text{i)} \quad \int_0^{\pm\infty} [c \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + |g(x)|]dx = \pm \infty \quad \text{e}$$

$$\text{ii)} \quad (\{(1+c) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + nc \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\}1/\eta(t) -$$

$$- K [g'(x(s))y(s)]^2 - c/\eta(t) [\sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=L}^{n} 1/h_k(y)] -$$

$$- c/\eta(t)\{ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} -$$

$$- c/\eta(t) \{ \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\} [g'(x(t +$$

$$+ s)y(t+s))])^{1/2} \geqslant |\{ (1+2c)y + c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\}/2|$$

são válidas, então toda solução de (38) com função inicial contínua é limitada.

Demonstração

Seja a funcional

$$V(x,y,t) = (1+2c)(G(x) + y^2/2) + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]^2 . c/2 -$$

$$- c \int_0^{y} \sum_{k=1}^{n} H_k(u)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(u) \, du +$$

$$+ K \int_{-\eta(t)}^{y} (\int_{s+t}^{t} [g'(x(u))y(u)]^2) ds \tag{40}$$

onde, $K = 1/(1-\alpha)$

Ora, $|\sum_{k=1}^{n} H_k(y)| \leqslant n|y|$ logo $|\int_0^{y} \sum_{k=1}^{n} H_k(u)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(u)| \, du \leqslant y^2$

Então,

$$V(x,y,t) \geqslant (1+2)(G(x)+y^2/2) + \left[\sum_{k=1}^{n}(H_k(y)+F_k(x))\right]^2 c/2 -$$

$$- cy^2 + K\int_{-\eta(t)}^{0}\left(\int_{s+t}^{t}[g'(x(u))y(u)]^2 du\right)ds =$$

$$= (1+2c)G(x) + y^2/2 + \left[\sum_{k=1}^{n}(H_k(y)+F_k(x))\right]^2 c/2 +$$

$$+ K\int_{-\eta(t)}^{0}\left(\int_{s+t}^{t}[g'(x(u))y(u)]^2 du\right)ds,$$ logo V é positiva definida quando $(x,y) \neq (0,0)$

Com efeito, a derivada V' de V ao longo das soluções de (38) é dada por:

$$V'(t,x,y) = \frac{dV}{dt}(t,x,y) = \partial V/\partial t + (\partial V/\partial x)x' + (\partial V/\partial y)y'$$

De (40), temos:

$$\partial V/\partial x = (1+2c)g(x) + c\left[\sum_{k=1}^{n}(H_k(y)+F_k(x))\right]\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$$\partial V/\partial y = (1+2c)y + c\left[\sum_{k=1}^{n}(H_k(y)+F_k(x))\right]\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- c\sum_{k=1}^{n} H_k(y)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)$$

Seja $E = \mathcal{R}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais integráveis segundo Riemann. Seja

$$U(t) = \int_{-\eta(t)}^{0}\left(\int_{s+t}^{t}[g'(x(u))y(u)]^2 du\right)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

Se definimos as aplicações

$$\varphi(u) = [g'(x(u))y(u)]^2, \qquad u \in \mathbb{R}$$

$$\Psi(t,s) = \int_{s+t}^{t} \varphi(u)\,du, \qquad t,\ s \in \mathbb{R}$$

e

$$T: (\alpha,h) \in \mathbb{R} \times E \to \int_{\alpha}^{0} h(s)\,ds,$$

então temos que

$$U(t) = T(\,-\eta(t),\ \Psi(t,.))$$

Ora, já que T é linear na segunda variável, então temos que

$$U'(t) = D_1T(-\eta(t),\ \Psi(t,.))\ \frac{d}{dt}(-\eta(t)) + D_2T(-\eta(t),\ \Psi(t,.))\circ\frac{d}{dt}\ \Psi(t,.) =$$

$$= \Psi(t,-\eta(t))\ \eta'(t) + T(-\eta(t), \varphi(t) - \varphi(t+s)) =$$

$$= \eta'(t) \int_{t-\eta(t)}^{t} \varphi(s)\,ds + \int_{-\eta(t)}^{0} [\varphi(t) - \varphi(t+s)]ds =$$

$$= \eta'(t) \int_{t-\eta(t)}^{t} [\,g'(x(s))y(s)]^2 ds + \int_{-\eta(t)}^{0} [g'(x(t))y(t)]^2 ds -$$

$$- \int_{-\eta(t)}^{0} [g'(x(t+s))y(t+s)]^2 ds$$

logo

$$\partial V/\partial t = \eta'(t) \int_{t-\eta(t)}^{t} [\,g'(x(s))y(s)]^2 ds + \int_{-\eta(t)}^{0} [\,g'(x(t))y(t)]^2 ds -$$

$$- \int_{-\eta(t)}^{0} [g'(x(t+s))y(t+s)]ds$$

Então

$$V' = \{\,(1 + 2c)g(x) + c\,[\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))]\ \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\ \}\ y +$$

$$+\{(1+2c)y + c\,[\sum_{k=1}^{n}(H_k(y)+F_k(x))]\sum_{k=1}^{n}1/h_k(y) -$$

$$- c\sum_{k=1}^{n}H_k(y)/\sum_{k=1}^{n}h_k(y)\}\{-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)h_k(y)y - g(x) +$$

$$+\int_{-\zeta(t)}^{0} g'(x(t+s))y(t+s)ds\} + \eta'(t)\int_{t-\eta(t)}^{t}[g'(x(s))y(s)]^2 ds +$$

$$+\int_{-\eta(t)}^{0}[g'(x(t))y(t)]^2 ds - \int_{-\eta(t)}^{0}[g'(x(t+s))y(t+s)]^2 ds =$$

$$= -(1+2c)\sum_{k=1}^{n}f_k(x)h_k(y)y^2 + c\sum_{k=1}^{n}H_k(y)\sum_{k=1}^{n}f_k(x)y -$$

$$- c\sum_{k=1}^{n}F_k(x)g(x)\sum_{k=1}^{n}1/h_k(y) + \int_{-\zeta(t)}^{0}\{(1+2c)y +$$

$$+ c\sum_{k=1}^{n}F_k(x)\sum_{k=1}^{n}1/h_k(y)\}\, g'(x(t+s))y(t+s)ds +$$

$$+ c\{\sum_{k=1}^{n}H_k(y)g(x)/\sum_{k=1}^{n}h_k(y) - \sum_{k=1}^{n}H_k(y)g(x)\sum_{k=1}^{n}1/h_k(y)\} +$$

$$+ c\{\sum_{k=1}^{n}F_k(x)\sum_{k=1}^{n}f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n}F_k(x)\sum_{k=1}^{n}f_k(x)h_k(y)y\sum_{k=1}^{n}1/h_k(y)\} +$$

$$+ c\{\sum_{k=1}^{n}H_k(y)\sum_{k=1}^{n}1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n}H_k(y)/\sum_{k=1}^{n}h_k(y)\int_{-\zeta(t)}^{0} g'(x(t+$$

$$+ s))y(t+s)ds + K\eta'(t)\int_{t-\eta(t)}^{t}[g'(x(s))y(s)]^2 ds +$$

$$+ K\int_{-\eta(t)}^{0}[g'(x(t))y(t)]^2 ds - K\int_{-\eta(t)}^{0}[g'(x(t+s))y(t+s)]^2 ds +$$

$$+ (-n+1)\, c\sum_{k=1}^{n}H_k(y)\sum_{k=1}^{n}f_k(x)h_k(y)y/\sum_{k=1}^{n}h_k(y)$$

Ora, $\quad c\sum_{k=1}^{n}H_k(y)\sum_{k=1}^{n}f_k(x)y \leqslant c\sum_{k=1}^{n}f_k(x)h_k(y)y^2$, $\eta'(t) \leqslant \alpha$,

$$\eta(t) \geqslant \zeta(t), \quad \int_{t-\eta(t)}^{t} [g'(x(s))y(s)]^2 ds = \int_{-\eta(t)}^{0} [g'(x(t+s))y(t+s)]^2 ds$$ e

$$(-n+1)c\left(\sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y / \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\right) \leqslant o,$$

então,

$$V' \leqslant -(1+c) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 - nc \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) +$$

$$+ \int_{-\zeta(t)}^{0} \{(1+2c)y + c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} g'(x(t+s))y(t+s)ds + K \int_{-\eta(t)}^{0} [g'(x(t))y(t)]^2 - K \int_{-\eta(t)}^{0} [g'(x(t+s))y(t+s)]^2 ds + k\alpha \int_{-\eta(t)}^{0} [g'(x(t+s))y(t+s)]^2 ds +$$

$$+ c\{ \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} +$$

$$+ c\{ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} +$$

$$+ c\{ \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\} \int_{-\eta(t)}^{0} g'(x(t+s))y(t+s)ds$$

$$V' \leqslant \int_{-\eta(t)}^{0} \{-[(1+c) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2/\eta(t)] - nc \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x) / (\eta(t) \sum_{k=1}^{n} h_k(y)) + K [g'(x(s))y(s)]^2 + \{(1+2c)y$$

$$+ c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} g'(x(t+s))y(t+s)\, ds - [g'(x(t+$$

$$+ s))y(t + s)]^2 + c/\eta(t) \{ \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \quad -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} + c/\eta(t) \{ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} +$$

$$+ c/\eta(t) \{ \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \quad - \quad \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\} [g'(x(t +$$

$$+ s))y(t + s)]\}ds$$

Por (ii) temos que

$$(\{(1 + c) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + nc \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\} 1/\eta(t) -$$

$$- K [g'(x(s))y(s)]^2 - c/\eta(t) [\sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \quad -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)] - c/\eta(t)\{ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} - c/\eta(t) \{\sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \int_{-\eta(t)}^{0} g'(x(t + s))y(t + s)ds\}^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant |\{ (1 + 2c)y + c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\}/2|$$

Elevando ao quadrado e multiplicando por -1, temos,

$$-\{(1 + c) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + nc \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\} 1/\eta(t) +$$

$$+ K [g'(x(s))y(s)]^2 + c/\eta(t) \quad [\sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) \quad -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} \mp c/\eta(t) \{ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n} F_k(x).$$

$$.\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} + c/\eta(t) \{ \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\} [g'(x(t+s))y(t+s)ds] \leqslant -1/4 \, |(1+2c)y +$$

$$+ c\sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)|^2$$

Então,

$$V' \leqslant \int_{-\eta(t)}^{0} \{-1/4| (1+2c)y + c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)|^2 +$$

$$+ \{(1+2c)y + c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\} \, g'(x(t+s))y(t+s) -$$

$$- [g'(x(t+s))y(t+s)]^2\}ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\eta(t)}^{0} -\{1/4|(1+2c)y + c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)|^2 - |(1+2c)y +$$

$$+ c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)| \; |g'(x(t+s))y(t+s)| + |g'(x(t+s))y(t+$$

$$+ s)|^2\}ds = \int_{-\eta(t)}^{0} - \{[1/2 \, |(1+2c)y + c \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)|] -$$

$$- |g'(x(t+s))y(t+s)|\}^2 ds$$

Portanto,

$$V' \leqslant 0$$

A integral é não positiva. Portanto V é não crescente ao longo das soluções e como também, por i), é radialmente ilimitado, então concluimos que toda solução de (38) é limitada. Portanto, o teorema.

Teorema 7 - Consideremos a equação perturbada:

$$x'' + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(x')x' + g(x(t-\zeta)) = p(t,x,x')$$

e o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x' = y \\ x'' = -\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y - g(x) + \int_{-\zeta}^{0} g'(x(t+s))y(t+s)ds + \\ \qquad + p(t,x,y) \end{cases} \tag{41}$$

onde $f_k(x)>0$ para todo s, $h_k(y)\geq 1$ para todo y, $K= 1,2,...,n$, $xg(x)>0$ se $x \neq 0$ e $\zeta>0$ com f_k, h_k, $dg(x)/dx$ e p são contínuas.

Sejam $\alpha>0$, $\beta>0$ com $\alpha + \beta = 1$. Suponhamos,

$$\{ (n-3) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + n \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=1}^{n} .$$

$$. 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \}/2V \geq$$

$$\geq L|yg'(x)| \tag{42}$$

para algum $L>0$, e,

$$\alpha L/\zeta \geq K \tag{43}$$

onde,

$$R = \max \{ | 3y + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \,|/2V \qquad (44)$$

Suponhamos também que (VI) (Lema 1, Cap I), (18),(42) e (43) sejam válidas. Se

$$K|p(t,x,y)| \leqslant \beta\Big[(n-3)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 +$$

$$+\, n\sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\Big]/2V \qquad (45)$$

Então todas as soluções de (41) com condições iniciais contínuas são (uniformemente) limitadas.

Demonstração

A demonstração do teorema baseia-se na construção de uma funcional de Lyapunov W radialmente ilimitada, isto, é,

i) W é positiva definida.

ii) A derivada W' de W ao longo das soluções de (41) é menor ou igual a zero; $W'(x,y) \leqslant 0$.

iii) W é radialmente ilimitada.

Tendo isto, concluímos que as soluções são limitadas, pois se existir uma solução $(x(t),y(t))$ não limitada $\Rightarrow \exists\ \{t_n\}_n$, $\|(x(t_n), y(t_n))\| \to +\infty$. Ora, W é limitada ao longo das soluções, de onde $W(x(t_n),y(t_n)) \leqslant \alpha$, para todo n.

Calculemos a derivada V' de V ao longo das soluções de (41),

$$V'(x,y) = \frac{dV}{dt}(x,y) = (\partial V/\partial x)x' + (\partial V/\partial y)y'$$

De (18) temos,

$$\partial V/\partial x = \{3g(x) + \Big[\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))\Big] \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}/2V$$

e

$$\partial V/\partial y = \{3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\}/2V,$$

Então

$$V'(x,y) = (\{3g(x) + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}y +$$

$$+ \{3y + [\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))] \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y) / \sum_{k=1}^{n} h_k(y)\} [- \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y - g(x) +$$

$$+ \int_{-\zeta}^{0} g'(x(t+s)) y(t+s) ds + p(t,x,y)])/2V =$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) y -$$

$$- 3 \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y^2 + 3y \int_{-\zeta}^{0} g'(x(t+s)) y(t+s) ds +$$

$$+ 3yp(t,x,y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y) g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/$$

$$/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \int_{-\zeta}^{0} g'(x(t+s)) y(t+s) ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} H_k(y) p(t,x,y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y \,.$$

$$. \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \int_{-\zeta}^{0} g'(x(t+s)) y(t+s) ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x)p(t,x,y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y/ \sum_{k=i}^{n} h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \int_{-\zeta}^{0} g'(x(t +$$

$$+ s))y(t + s)ds - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)p(t,x,y)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y))/2V \leq$$

$$\leq -[(3 - n) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + n \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)]/2V +$$

$$+ \{|3y + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)| \int_{-\zeta}^{0} |g'(x(t + s))y(t + s)|ds\}/2V +$$

$$+ \{|3y + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)| \; |p(t,x,y)|\}/2V +$$

$$+ \{(1 - n) \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\}/2V$$

Ora,

$$\{|3y + \sum_{k=k}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) \; |\}/2V \leq$$

$$\leqslant \{|3y + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)|\}/2V \leqslant$$

$$\leqslant (3|y| + n|\sum_{k=1}^{n} (F_k(x) + H_k(y))| + n|y|)/\ 2V \leqslant$$

$$\leqslant ((n+3)|y| + n|\sum_{k=1}^{n} (F_k(x) + H_k(y))|/2V$$

também,

$$V(x,y) \geqslant |y|/\sqrt{2}$$

$$V(x,y) \geqslant |\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))|/\sqrt{2}$$

então

$$\{|3y + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)|\}/2V \leqslant (n+3)|y|/(|y|\sqrt{2}) +$$

$$+ n|\sum_{k=1}^{n} (F_k(x) + H_k(y))|/(|\sum_{k=1}^{n} (H_k(y) + F_k(x))|/\sqrt{2}) =$$

$$= (2n+3)\sqrt{2} \qquad p/\ x^2 + y^2 > 0$$

Seja $K = \text{máx}\ \{|3y + \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) + \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) -$

$$- \sum_{k=1}^{n} H_k(y)/\sum_{k=k}^{n} h_k(y)|\}/2V$$

Por (44) e como,

$$(1-n) \sum_{k=1}^{n} H_k(y) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) h_k(y) y/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) \leqslant 0$$

Temos,

$$V' \leqslant -\Big[(3-n)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + n\sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\Big]/2V +$$

$$+ K\int_{-}^{0} |g'(x(t+s))y(t+s)|ds + K|p(t,x,y)| +$$

$$+ \{\sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\}/2V$$

Usaremos parte de um termo definido negativo na perturbação e parte no retardamento. Ora, $\alpha+\beta = 1$, então

$$V' \leqslant -\Big[(3-n)(\alpha+B)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + n\sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\Big]/2V +$$

$$+ K\int_{-\zeta}^{0} |g'(x(t+s))y(t+s)|ds + K|p(t,x,y)| +$$

$$+ \{\sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n} F_k(x)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y)\}/2V =$$

$$= -\alpha\Big[(n-3)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + n\sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\}/2V -$$

$$- \beta\Big[(n-3)\sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + n\sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y)\}/2V +$$

$$+ K\int_{-\zeta}^{0} |g'(x(t+s))y(t+s)|ds + K|p(t,x,y)| +$$

$$+ \{\sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/\sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)\sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \}/2V$$

Por (42), temos

$$\{-(n-3) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 - n \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y) - \sum_{k=1}^{n} H_k(y)g(x) \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)y - \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y \sum_{k=1}^{n} 1/h_k(y) \}/2V \leq$$

$$\leq - L|g'(x)y|$$

Então,

$$V' \leq - \alpha L|g'(x)y| + K \int_{-\zeta}^{0} |g'(x(t+s))y(t+s)|ds +$$

$$K|p(t,x,y)| - \beta[(n-3) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 +$$

$$+ n \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)]/2V =$$

$$= \int_{-\zeta}^{0} \{- \alpha L |g'(x)y|/\zeta + K|g'(x(t+s))y(t+s)|\}ds +$$

$$+ K|p(t,x,y)| - \beta|(n-3) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 + n \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)|/2V$$

Ora,

$$\int_{-\zeta}^{0} \{-\alpha L |g'(x)y|/\zeta + K|g'(x(t+s))y(t+s)|\}ds =$$

$$= \int_{-\zeta}^{0} \{-\alpha L/\zeta |g'(x)y| + K|g'(x(t+s))y(t+s)|\}ds \leq$$

$$\leq \int_{-\zeta}^{0} K\{ -|g'(x)y| + |g'(x(t + s))y(t + s)|\}ds$$

onde a última desigualdade decorre de (43). Esta expressão final é a derivada em relação a t, da funcional negativa,

$$- \int_{-\zeta}^{0} (\int_{t+s}^{0} K|g'(x(u))y(u)|du)ds$$

Desta forma, se fizermos a funcional

$$W(x,y) = V(x,y) + K\int_{-\zeta}^{0} (\int_{t+s}^{0} |g'(x(t + s))y(t + s)|du)ds$$

encontraremos

$$W'(x,y) \leq K|p(t,x,y)| - \beta[(n - 3) \sum_{k=1}^{n} f_k(x)h_k(y)y^2 +$$

$$+ n \sum_{k=1}^{n} F_k(x)g(x)/ \sum_{k=1}^{n} h_k(y)]/2V$$

Logo, por (45)

$$W'(x,y) \leq 0$$

Como W é radialmente ilimitada, então toda solução de (41) com condições iniciais contínuas são (uniformemente) limitadas.

BIBLIOGRAFIA

[1] H.A. Antosiewicz, On no-linear differential equations of the second order with integrable forcing term, J. London Math. Soc. 30(1955) pp. 64-67.

[2] T.A. Burton, Perturbations and Delays in Differential Equa - tions, SIAM J. Appl. Math. Vol. 29, nº 3 (1975), 422-438.

[3] T.A. Burton, On the equation $x''+f(x)h(x')+g(x) = e(t)$. Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 85(1970) pp. 277-286.

[4] T.A. Burton, The generalized Lienard equation, SIAM J. Con - trol 3(1965), pp. 223-230.

[5] D.W. Bushaw, The Differential equation $x''+g(x,x')+h(x) = e(t)$ Terminal report on Contract AF 29 (600) - 1003, Hollomann Air Force Base, New Mexico, 1958.

[6] Elon Lages Lima, Curso de Análise, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

[7] J.P. LaSalle, Asymptotic Stability criteria, in Proceedings of the Symposia in Applied Math, Hydrodynamic Instability, Vol. 13, Aner Math. Soc., Providence, Rhode.

[8] J.J. Levin and J.A. Nohel, Golbal asymptotic Stability for nonlinear systems of differential equations and applica- tions to reactor dynamics, Arch. Rational Mach. Anal, 5 (1960) pp. 194-211.

[9] J.S.W. Wong and D. Willet, The boundedness of solutions of the equati - ons $x'' + f(x,x') + g(x) = 0$, SIAM J. Appl. Math, 14 (1966) pp. 2084 - 4098